TEMA 1. NOMBRES NATURALS. SISTEMES DE NUMERACIÓ.

ÍNDEX

1. INTRODUCCIÓ

L'elecció del tema 1 sobre nombres complexas, sistemes de numeració es justifica per la seua especial relevància, al ser un tema base per entendre els coneixements matemàtics actuals i que estimula l'ús del pensament crític i del raonament matemàtic.

La utilització de la lògica i la abstracció per la comprensió dels continguts del tema es presenta com un repte per als estudiants que els permetrà comprendre com es construeix el pensament en la societat actual i quina aplicació tenen les matemàtiques al seu entorn.

Cal tenir en compte que aquests continguts son especialment relevants en l'etapa secundària deguts als canvis psicològics i socials de l'alumnat i que els permetràn assolir uns coneixements pels seu desenvolupament al llarg del temps.

Tots aquestas aspectes es troben recollits a la normativa vigent: la LOMLOE, la LOE, la LEC i el decret 171/2022, on es descriuen les competències clau i específiques de la matèria de matemàtiques i on es dóna especial importància a la utilització de distints materials, procesas i objectes tecnològics/STEAM per tal d'augmentar la capacitat d'actuació sobre l'entorn de l'alumne i, especialment, per tal d'assolir dites competències.

Aquesta normativa i més concretament el decret 175/2022 atribueix a l'equip docent la responsabilitat de consolidar els sabers i competències escaients així com els objectius de desenvolupament sostenible ODS.

Tot, treballant amb metodologies i eines d'avaluació variades i fent atenció a la diversitat d'aula, en quedarà constància a la programació d'aula que ens permetrà seqüenciar i sistematitzar el procés d'ensenyament i aprenentatge de l'alumnat.

Desenvolupada la introducció, passo a descriure el tema amb els continguts escaients (fonamentals): construirem el conjunt dels nombres naturals de manera axiomàtica, veurem les operacions de dit conjunt, la relació d'ordre que posseeix i els sistemes de numeració. Els coneixements prèvis que necessitarem per desenvolupar aquest tema són els relatius a la divisibilitat (tema 4) i a les relacions binàries (tema 11).

2. CONSTRUCCIÓ DE $\mathbb{N}$

La profunda revisió i formalització que va sofrir la fonamentació matemàtica al segle XIX va començar amb la del concepte de número. Des del punt de vista matemàtic, la introducció de nombre naturals es pot fer des de dos enfocaments: l'enfocament constructivista de Zermelo com a classes d'equivalència obtingudes per la relació de coordinabilitat entre conjunts i la definició axiomàtica de Peano. Com ambdós definicions són equivalent, i per no extendre excessivament el tema, ens centrarem en l'últim enfocament.

Així, ~~a finals del segle XIX~~, el conjunt de nombres naturals va quedar establert mitjançant un sistema axiomàtic (un conjunt d'afirmacions que s'accepten com a vertaderes) i, a partir d'ells es van construir els conjunts de nombres enters, racionals, reals i complexos. Aquests axiomes els va establir Peano a la sombra de la nova teoria de conjunts sorgida a finals del segle XIX.

el conjunt de nombres naturas que denotem per
Construïm $\mathbb{N}$ com un conjunt infinit d'elements, tots ells diferents, anomenats nombres naturals: $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,\dots\}$, que verifiquen els següents axiomes, (postulats de Peano):

- Axioma 1. $0\in\mathbb{N}$
- Axioma 2. A cada nombre natural $n\in\mathbb{N}$ li correspon un únic nombre natural anomenat següent de n i al que ~~ano~~ denotem per $s(n)$. Si $n\in\mathbb{N}$, $s(n)\in\mathbb{N}$.
- Axioma 3. El 0 no és el següent de cap nombre natural. $\forall n\in\mathbb{N}$ $s(n)\neq 0$
- Axioma 4. (injectivitat de s). → (retallable (Niston) Si els següents de dos nombres naturals són iguals, llavors els dos nombres són iguals. $(s(a)=s(b)\Rightarrow a=b \ \forall a,b\in\mathbb{N})$
- Axioma 5. Principi d'inducció: si un subconjunt de nombres naturals K conté al zero i al següent de qualsevol nombre natural que pertany a K, aleshores tot nombre natural pertany a K i, per tant, $K=\mathbb{N}$. (Si $K\subset\mathbb{N}$ / $0\in K$ i $\forall n\in K$ $s(n)\in K \Rightarrow K=\mathbb{N}$)

recortable

! (*) Parlar sobre l'axioma inducció, es pot treballar en batx → moat matem. !

Com a conseqüència directa d'aquests postulats se'n desprenen les següents tres propietats fonamentals → Explicar en mundano ~~de~~ dem. per inducció, aplicació, cas inicial... Pas inductiu...

- $\forall n,m\in\mathbb{N}, n\neq m \Rightarrow s(n)\neq s(m)$
- $\forall m\in\mathbb{N}, m\neq s(n)$
- Tot natural, excepte el 0, té un "anterior", això és $\forall n\in\mathbb{N}, n\neq 0, \exists m\in\mathbb{N}$ tal que $s(m)=n$.

Aquest mètode ens permet introduïr per recurrència en $\mathbb{N}$, com veurem al següent apartat, dos operacions a lls que anomenarem, respectivament, suma i producte i l'utilitzarem per demostrar les seues propietats.

3. SUMA I PRODUCTE DE NATURALS

a) Suma en $\mathbb{N}$.

Definim la suma de nombres naturals com l'aplicació donada per:

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(x, y) \longmapsto x + y$$

que verifica (tal que)

1) $x + 0 = x$ i 2) $x + S(y) = S(x+y)$

"Veiem ara, què l'aplicació suposada està ben definida?:

PROPOSICIÓ: L'aplicació suma + existeix i és única $x+y$ $\forall y \in \mathbb{N}$

Veiem primer l'existència, siga $K = \{x \in \mathbb{N} : \exists + : \{x\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ on + verifica les dues condicions de l'enunciat. Podem definir $0 + y = y$ $\forall y \in \mathbb{N}$ i com que $0 + 0 = 0$ i $0 + S(y) = S(y) = S(0+y)$. es verifiquen 1) i 2) i per tant $0 \in K$.

Siga $x \in K$ veiem que $S(x) \in K$. Com que $x \in K$ $\exists\, x + y$ $\forall y \in \mathbb{N}$ verificant 1) i 2), ~~defini~~ i podem definir $S(x) + y = S(x+y)$, llavors

$S(x) + 0 = S(x+0) = S(x) \Rightarrow S(x)$ verifica 1) ✓

$S(x) + S(y) = S(x + S(y)) \overset{(2)}{=} S(S(x+y)) = S(S(x)+y) \Rightarrow$ verifica 2) (definició)

Llavors $S(x) \in \mathbb{N}$ i aplicant l'axioma 5, d'inducció, $K = \mathbb{N}$ i hem provat l'existència de f.

Per comprovar la unicitat suposem que existeixen dues aplicacions $+_1$ i $+_2$ que verifiquen les dues condicions de l'enunciat. Fixem $x \in \mathbb{N}$ i considerem el conjunt $K_x = \{y \in \mathbb{N} \,/\, +_1(x,y) = +_2(x,y)\}$. $0 \in K_x$ perquè $+_1(x,0) = x = +_2(x,0)$. A més si $y \in K_x \Rightarrow$

$+_1(x,y) = +_2(x,y) \overset{\text{Axioma 2}}{\Rightarrow} S(+_1(x,y)) = S(+_2(x,y)) \Rightarrow$

$\Rightarrow +_1(x, S(y)) = +_2(x, S(y)) \Rightarrow S(y) \in K_x$, de manera que, per l'axioma d'inducció $K_x = \mathbb{N}$, i

arreglar notació

com això succeix $\forall x \in \mathbb{N}$, deduïm que $s_1 = s_2$.

PROPOSICIÓ.

- $+$ és una operació interna, és a dir, $\forall x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x+y \in \mathbb{N}$.

Dem: per inducció sobre y, fixat x. $K_x = \{y \in \mathbb{N} / x+y \in \mathbb{N}\}$
- Si $y = 0 \Rightarrow x + 0 = x \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow 0 \in K_x$
Suposem que $x+y \in \mathbb{N}$, per l'axioma 2 $s(x+y) \in \mathbb{N}$ ■
$\Rightarrow K_x = \mathbb{N}$

Millor amb conjunts

PROPOSICIÓ — Cap nombre natural, excepte el zero, té simètric.

a) $x + 1 = s(x)$, b) $x+y = 0 \Rightarrow x = 0$ i $y = 0$

dem: a) $x + 1 = x + s(0) = s(x+0) = s(x)$

b) Suposem que $y \neq 0$, llavors $\exists a$ tal que $s(a) = y$ i aleshores $0 = x+y = x + s(a) = s(x+a)$, impossible perquè 0 no té anterior. Per tant $y = 0$ i $0 = x+y = x+0 = x$.

La suma verifica cinc propietats fonamentals que es demostren fàcilment per inducció: $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$ es compleixen

- Commutativa $x+y = y+x$
- Associativa $(x+y)+z = x+(y+z)$
- Existència d'element neutre: $\exists 0 \in \mathbb{N} / x+0 = 0 = 0+x$
- Llei de simplificació: $x+z = y+z \Rightarrow x = y$
- Llei de monotonia si $x = y \Rightarrow x+z = y+z$.

Amb totes aquestes propietats, $(\mathbb{N}, +)$ és un semigrup abelià amb element neutre 0.

b) Producte en $\mathbb{N}$:

Definim el producte de nombres naturals com l'aplicació donada per

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(x, y) = x \cdot y$$

tal que

1) $x \cdot 0 = 0$

2) $x \cdot s(y) = x \cdot y + x$

Veiem que l'aplicació producte existeix i està ben definida:

PROPOSICIÓ: L'aplicació producte $\cdot$, existeix i és única

dem. (Podem dir demostració anàloga ~~per~~ la de la suma)

Per veure'n l'existència considerem $K = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists \cdot_x : \{x\} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$

on les $\cdot_x$ verifiquen les dues condicions de l'enunciat. i tenim

[Per a $x = 0$, definim $x \cdot y = 0 \ \forall y \in \mathbb{N}$

$0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ es verifica 1) $\Rightarrow 0 \in K$

$0 \cdot s(y) = 0 = 0 \cdot y + 0$ es verifica 2)

Siga $x \in K \Rightarrow \exists x \cdot y \ \forall y \in \mathbb{N}$ verificant 1) i 2)

Definim $s(x) \cdot y = x \cdot y + y$, llavors

$s(x) \cdot 0 = x \cdot 0 + 0 = 0 \Rightarrow$ es verifica 1)

$s(x) \cdot s(y) = x \cdot s(y) + s(y) = (x \cdot y + x) + s(y) = x \cdot y + (x + s(y)) =$

$= x \cdot y + (s(x) + y) = (xy + y) + s(x) = s(x) \cdot y + s(x) \Rightarrow$ es verifica 2)

$\Rightarrow s(x) \in K \to$ Per l'axioma d'inducció completa, $K = \mathbb{N}$ i

hem provat l'existència de f.

Per comprovar la unicitat suposem que existeixen dues aplicacions p_1 i p_2 que verifiquen les condicions de l'enunciat.

Fixem $x \in \mathbb{N}$ i considerem el conjunt $K_x = \{y \in \mathbb{N} \ p_1(x,y) = p_2(x,y)\}$

$0 \in K_x$ ja que $p_1(x,0) = 0 = p_2(y,0)$. A més si $y \in K_x$

$\Rightarrow p_1(x,y) = p_2(x,y) \Rightarrow p_1(x,y) + x = p_2(x,y) + x \Rightarrow p_1(x,s(y)) =$

$= p_2(x,s(y)) \Rightarrow s(y) \in K_x$ i per inducció, $K_x = \mathbb{N}$ i

com això succeix $\forall x \in \mathbb{N}$ deduïm que $f = g$.]

Igual que en el cas de la suma, podem deduir dues propietats immediates del producte

PROPOSICIÓ:

a) $x \cdot 1 = x$, b) $x \cdot y = 0$, $x = 0$ ó $y = 0$

dem:

a) $x \cdot 1 = x \cdot s(0) = x \cdot 0 + x = 0 + x = x$

b) Suposem que $x \neq 0$ i $y \neq 0$, llavors existeixen a, b tals que $s(a) = x$, $s(b) = y$, i aleshores $0 = x \cdot y = x \cdot s(b) = x \cdot b + x = x \cdot b + s(a) = s(x \cdot b + a)$, impossible perquè 0 no té anterior. $\Rightarrow x = 0$ o bé $y = 0$

notable

PROPOSICIÓ

L'aplicació producte $\cdot$ és una operació interna, és a dir, $\forall x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{N}$

dem.

Considerem el conjunt $K_x = \{ y \in \mathbb{N} \mid x \cdot y \in \mathbb{N} \}$ amb x arbitrari però fix. $0 \in K_x$ ja que $0 \cdot x = 0 \in \mathbb{N}$ a més si $x \cdot y \in \cancel{K_x}$, per l'axioma 2 $s(x \cdot y) \in \cancel{K_x}$, llavors per l'~~axioma~~ axioma d'inducció $K_x = \mathbb{N} \Rightarrow \cdot$ és una operació interna.

Les propietats fonamentals del producte, totes elles demostrables per inducció, són les següents: $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$

- Commutativa $x \cdot y = y \cdot x$
- Associativa $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

notable

- Distributiva respecte de la suma: per la dreta $(a+b) \cdot c = ac + b \cdot c$, i per l'esquerra $c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b$.

canvia x i y

- Existència d'element neutre: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
- Existència d'element absorbent $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
- Llei de simplificació: $a \cdot c = b \cdot c$ i $c \neq 0 \Rightarrow a = b$
- Llei de monotonia $a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$

Amb tot, $(\mathbb{N}, \cdot)$ és un semigrup abelià amb element neutre i $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ és un semianell abelià.

(Ací, possibilitat de parlar de resta, potència i divisió $\Rightarrow$ Mates dures)

4. ORDRE A $\mathbb{N}$

Donats $x, y \in \mathbb{N}$ diem que x és menor estricte que y, i ho escrivim $x < y$, si existeix $a \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$ tal que $x + a = y$. La definició de menor o igual que y ($x \leq y$) és la mateixa però permetent que $c = 0$.

Veiem ara que la relació binària "menor o igual que" $\leq$ és una relació d'ordre total, comprovem $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$ es compleixen les propietats:

- Reflexiva ja que $\exists\, 0 \in \mathbb{N} \;/\; x + 0 = x \Rightarrow x \leq x$.
- Antisimètrica: si $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$ ja que com $x \leq y$ $\exists\, a \in \mathbb{N} / x + a = y$, i com que $y \leq x$, $\exists\, b \in \mathbb{N} / y + b = x$. Així, $x + a = y \Rightarrow y + b + a = y \Rightarrow b + a = 0 \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow x = y$
- transitiva: si $x \leq y$ i $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ja que com $x \leq y$; $\exists\, a \in \mathbb{N} / x + a = y$ i com $y \leq z$ $\exists\, b \in \mathbb{N} / y + b = z$, llavors $x + a = y \Rightarrow x + a + b = z \Rightarrow \exists\, a + b \in \mathbb{N} / x + (a+b) = z \Rightarrow x \leq z$.

Amb aquestes propietats hom provat que $\leq$ és una relació d'ordre (parcial). Veiem que és d'ordre total:

- $x \leq y$ o $y \leq x$, ho farem per inducció sobre x, fixant y.

  Si $x = 0$ es verifica ja que $0 \leq y$ $\forall y \in \mathbb{N}$

  Suposem que es compleix $y \leq x$, és a dir, $\exists\, a \in \mathbb{N} / y + a = x$. Llavors $x + 1 = y + a + 1 \Rightarrow y \leq x + 1 \Rightarrow y \leq s(x)$.

Anàlogament, si suposem que $x \leq y$, és a dir, que $\exists\, a \in \mathbb{N} / x + a = y$ podem suposar $x \neq y$ (ja que $x = y$ s'inclou al cas anterior). Llavors $a \neq 0 \Rightarrow \exists\, b \in \mathbb{N} \mid b + 1 = a \Rightarrow x + b + 1 = y$ $\Rightarrow x + 1 \leq y \Rightarrow s(x) \leq y$. I ja ho tenim.

Així, $\leq$ és d'ordre total i direm que $(\mathbb{N}, \leq)$ és totalment ordenat.

PROPOSICIÓ: (principi del bon ordre). El conjunt $(\mathbb{N}, \leq)$ és ben ordenat, això és, tot subconjunt $C \subseteq \mathbb{N}$, $C = \emptyset$ té un mínim. f

Dem. Hem de provar que si $C \subseteq \mathbb{N}$ $C \neq \emptyset$, llavors $\exists m \in C$ tal que $m \leq c$ $\forall c \in C$. (Aquest m s'anomena mínim de C i es denota per $m = \min(C)$).

Si $0 \in C$ llavors 0 és mínim perquè $0 \leq c$ $\forall c \in C$. Suposem doncs que $0 \notin C$. Considerem $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < c \ \forall c \in C\}$.

És evident que $0 \in A$ perquè $0 \notin C$ i llavors $0 < c$ $\forall c \in C$, i si $x \in C$, llavors $s(x) = x+1 \notin A$ ja que $x < x+1 \Rightarrow A \neq \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \exists x \in A$ tal que $s(x) \notin A$ (en cas contrari per l'axioma 5 $A = \mathbb{N}$ $\cancel{S}$)

Però $x \in A \Rightarrow x < c$ $\forall c \in C \Rightarrow s(x) \leq c$ $\forall c \in C$, i no pot ser $s(x) < c$ $\forall c \in C$ perquè $s(x) \notin A$, per tant existeix $m \in C$ tal que $m = s(x) \Rightarrow m = \min(C)$.

Com a conseqüència d'aquest resultat tenim el següent teorema:

TEOREMA DE L'EXTREM: tot subconjunt $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ i fitat superiorment, té un màxim, és a dir, $\exists m \in A$ ($m \geq a$ $\forall a \in A$)

Dem. Sigui $S = \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \ \forall a \in A\} \neq \emptyset$ el conjunt de les fites superiors d'A. Pel principi del bon ordre, com $S \neq \emptyset$, $S \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \exists m = \min(S)$ i anem a comprovar que també $m = \max(A)$. || Si $m = 0$ significa $a \leq 0$ $\forall a \in A$ $\Rightarrow A = \{0\}$ i $\max(A) = 0$.

Si $m \neq 0$ existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $s(n) = m$ i llavors $n \notin S$ $\Rightarrow \exists a \in A$ tal que $n < a \Rightarrow m = s(n) \leq a$. Com també tenim que $a \leq m$, deduïm $m = a$, per tant $m \in A$ i $m = \max(A)$.

5. SISTEMES DE NUMERACIÓ:

a) ~~Definició~~

La serie ~~dels~~ nombres naturals és infinita, llavors és impossible representar cada nombre natural amb un símbol diferent. Llavors, sorgeix la necessitat d'adaptar una ~~se~~ conjunt finit de símbols o dígits associats a un conjunt de regles de generació que ens permeten representar qualsevol nombre natural, això ~~[illegible]~~ és el que definim com a sistema de numeració. El cardinal del conjunt de dígits s'anomena base del sistema.

Existeixen diferents tipus de sistemes de numeració: ~~els additius~~ (no posicionals) i els posicionals i els no posicionals.

Abans d'enunciar i provar el teorema fonamental de la numeració, que és la base dels sistemes de numeració posicionals, ens cal provar el teorema de la divisió euclidiana a $\mathbb{N}$ com a lema previ:

TEOREMA (de la divisió euclidiana). Donats $D, d \in \mathbb{N}$ amb $d \neq 0$, existeixen uns únics $c, r \in \mathbb{N}$, anomenats respectivament quocient i residu de la divisió entera de D per d, tals que $D = d \cdot c + r$, amb $r < d$.

dem. Si $D = 0$ la demostració és evident: $c = r = 0$. Suposem que $D \neq 0$ i per provar l'existència considerem el conjunt $A = \{x \in \mathbb{N} \mid d \cdot x \leq D\}$, que és no buit $(0 \in A)$ i fitat superiorment (D n'és fita), per tant $\exists\, c = \max(A)$ que verifica $d \cdot c \leq D < d(c+1) = d \cdot c + d \Rightarrow D = d \cdot c + r$ amb $r < d$.

Per veure'n la unicitat suposem que $\exists\, c', r' \in \mathbb{N}$ tals que $D = d \cdot c + r = d \cdot c' + r'$ amb $r \leq r'$ i $r, r' < d$. Però $r \leq r' \Rightarrow r + h = r'$ per algun $h \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow d \cdot c + r = d \cdot c' + r + h \Rightarrow d \cdot c = d \cdot c' + h \Rightarrow d \cdot c' \leq d \cdot c \Rightarrow c \leq c' \Rightarrow c' + m = c$ per algun $m \in \mathbb{N}$. Llavors $d \cdot c' + d \cdot m = d \cdot c = dc' + h \Rightarrow dm = h \Rightarrow r' = r + dm$ de manera que si fos $m \neq 0$ tindríem $r' \geq d$, en contradicció amb la hipòtesi $\Rightarrow m = 0 \Rightarrow h = 0$ i $r = r'$, $c = c'$.

TEOREMA FONAMENTAL DE LA NUMERACIÓ:

Sigui $b \in \mathbb{N}, b > 0$. Llavors tot $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, es pot escriure ~~dema~~ forma única com $n = n_0 + n_1 b + n_2 b^2 + \dots + n_k b^k$ amb $n_k \neq 0$, $n_i < b \quad \forall i \in \{0, \dots, k\}$

dem:

considerem la divisió euclidiana de n entre b, ~~de forma que pel teorema de la divisió eucli~~ pel resultat anterior sabem que $\exists c_1, n_0 \in \mathbb{N} / n = c_1 \cdot b + n_0$ amb $n_0 < b$.

- Si $c_1 < b$ posem $c_1 = n_1$ i ja hem acabat ($n = n_1 \cdot b + c_1$)
- Si $c_1 \geq b$, llavors considerem la divisió euclídea de c_1 entre b, de forma que $\exists c_2, n_1 \in \mathbb{N} / c_1 = c_2 \cdot b + n_1$.

  Si substituïm c_1 en l'expressió de n, tenim que:

  $$n = c_2 \cdot b^2 + n_1 \cdot b + n_0$$

De manera que:

- si $c_2 < b$, considerem $c_2 = n$ i hem acabat ($n = n_2 \cdot b^2 + n_1 b + n_0$)
- si $c_2 \geq b$, repetim el procés de forma anàloga al cas anterior.

Donat que la successió és decreixent $c_1 > c_2 > c_3 > \dots$ i està acotada inferiorment ($c_i > 0 \; \forall i$), sabem que el procés acabarà i obtindrem l'expressió buscada.

Per probar la unicitat de l'expressió suposem que:

$$n = n_0 + n_1 b + \dots + n_k b^k \qquad n = n_0 + b(n_1 + \dots + n_k b^{k-1})$$

que poden reescriure's com:

$$n = n_0' + n_1' b + \dots + n_l' b^l \qquad n = n_0' + b(n_1' + \dots + n_l' b^{l-1})$$

Ambdues expressions representen la divisió euclidiana de n per b, llavors, per la unicitat ~~del resulta~~t d'aquesta expressió (provada al resultat anterior) deduïm que $n = n^0$ i que

$$n_1 + n_2 b + \dots + n_k b^{k-1} = n_1' + n_2' b + \dots + n_l' b^{l-1}$$

Si repetim el procés acabarem arribant a que $n_i = n_i' \; \forall i$ i $k = l$.

. BREU HISTÒRIA DELS SISTEMES DE NUMERACIÓ .

Abans que sorgissin els nombres per a representar quantitats, l'ésser humà emprà altres mètodes per comptar, fent servir objectes com ara pedres, palets de fusta, nusos en una corda o simplement els dits. Més endavant sorgiren el símbols gràfics com senyals per comptar, com ara les marques en una vara o traços a la sorra. tots aquests són exemples de sistemes de numeració no posicionals.

El sistema de numeració que emprem actualment a Europa, i que és el més estès, provè de l'indoaràbic. Fou ~~un~~ un sistema posicional de base 10 i comprenia el concepte del zero. La seva aparició constituí un dels gran avanços de la matemàtica. Altre dels sistemes de numeració posicional més emprats és el sexagesimal, en aquest cas de base 60, que s'utilitza per mesurar el temps i els angles.

A continuació incloem un llistat on apareixen cronològicament alguns dels sistemes (posicionals i no pos.) més rellevants històricament.

- 3000 a.C - Egipci - Additiu, no posicional, amb símbols per a les potències de base 10.
- 2500 a.C. - Babilònic - Semiposicional, de base 10, additiu fins el 60 i posicional per a nombres superiors.
- 1500 a.C - Xinès - Híbrid additiu / multiplicatiu, no posicional. Símbols de l'1 al 10 i potències de 10.
- 1000 a.C. - Maia - Posicional de base 20 amb 5 com base auxiliar
- 600 a.C - Grec - Additiu, no posicional, Símbols 1, 2, 3, ..., 10, 20, 30, ...
- S.V-VIII.d.C. - Indoaràbic, Posicional, de base 10, inclou el zero.

En l'actualitat, els sistemes binari, octal i hexadecimal (bases 2, 8 i 16 respectivament) són de gran importància a l'àmbit informàtic.

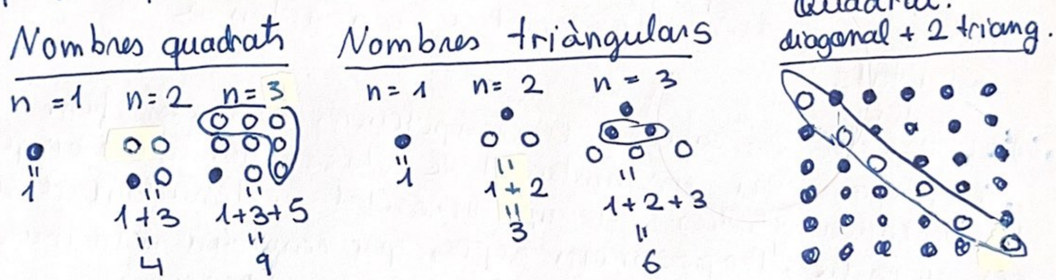
6. APLICACIÓ A L'AULA:

a) Ubicació

Tal i com s'estableix al decret 175/2022, la noció de nombre natural apareix a tots els cursos de l'educació secundària, fins i tot al batxillerat, més concretament al bloc de sentit numèric. Tanmateix, resulta apropiat ~~introduint~~ el treball d'aquest tipus de nombre i els sistema de numeració a 1º d'ESO donat que posteriorment s'aniràn introduint progresivament la resta de conjunts numèrics (enters, racionals, reals i irracionals).

b) Proposta didàctica.

Una activitat que permet conectar els nombres naturals amb patrons geomètrics és el treball amb els nombres figurats. Un nombre figurat és un nombre natural representat gràficament mitjançant punts. El gràfic en mostra uns exemples:



Aquestes disposicions ens permeteixen trobar fórmules interessants. En el cas dels nombres quadrats, veiem com aquests s'identifiquen amb la suma dels n primers nombres senars:

$$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$$

I també podem veure que un nombre triangular d'ordre n és $1+2+\dots+n$. I si relacionem el nombre quadrat d'ordre n amb la suma de la seua diagonal i dos triangles d'ordre $n-1$, podem deduir la suma dels $n-1$ primers nombres naturals:

$$n^2 = n + 2(1+2+\dots+n-1) \Rightarrow 1+2+\dots+n-1 = \frac{n^2-n}{2}$$

D'aquesta manera aprofundim i generalitzem el concepte de nombre natural conectant-lo amb representacions geomètriques, i introduïm les successions com a recurs auxiliar per la identificació de certs patrons.

A més, podem treballar aquesta activitat amitjançats
grups heterogenis, on podem repartir càrrecs i assignar
responsabilitat. Això ens anirà molt bé per atendre a la
diversitat d'aula, tenint en compte el decret 150/2022 i per
assolir les competències personal i social. L'avaluació,
tant d'aquesta activitat com d'altres que portem a terme,
serà inclusiva, contínua, formativa i formadora ~~en~~, emprant distintes
eines d'avaluació per assegurar la valoració objectiva de tot
l'alumnat, tal i com marca el capítol 4 del decret 175/2022.

7. CONCLUSIONS

Els nombres naturals i els sistemes de numeració són dues nocions pilars que apareixen continuament al llarg
de la vida tant acadèmica i personal dels estudiant.
És per això que el nostre paper com a docents és
fer-les accessibles als alumnes, fent ús de maneres de treball que
potencien el desenvolupament i s'adapten a les seues
capacitats.

Per assolir els sabers i les competencies buscades, hem
de proporcionar un ambient de classe que afavoreixqui
l'intercanvi d'idees, generant curiositat i estimulant el gust
per aprendre. Proposarem reptes que convidin a la investigació
i la reflexió sense temor a la equivocació.

D'altra banda hem de soterrar el mite segons el qual les
matemàtiques són abstractes i no tenen aplicació, treballant
de manera contextualitzada i fomentant un aprenentatge actiu.
En paraules de Lluís Santaló, referint-se a les matemàtiques
"Les seues aplicacions són essencials per moure'ns per la vida
i les seues concepcions alimenten allò més pur de l'esperit" (Santaló, 1975)

Per acabar, m'agradaria fer incapeu en la necessitat de treballar les
matemàtiques des d'una perspectiva de gènere; potenciant
les habilitats de les nostres alumnes, proposant contextos de
resolució de problemes que tinguin en compte les seues necessitats
i visibilitzant el paper de les dones a les matemàtiques i a la
ciència.

8: BIBLIOGRAFIA

- Números increíbles, Ian Stewart. 2022, Ed. Crítica
- Santaló, Lluís. La Educación Matemàtica Hoy. Ed. teide. 1975
- Gómez, B: 1988, Númeración y càlcula. Ed síntesis
- LOMLOE
- RD Ensyaments mínim d'Educació obligatória 175/2022.