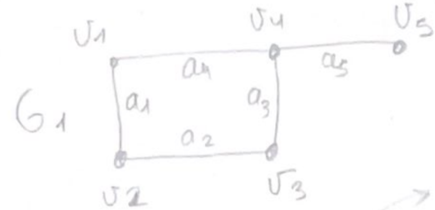
TEMA 2. FONAMENTS I APLICACIONS DE LA TEORIA DE GRAFS. DIAGRAMES EN ÀRBRE.

1. INTRODUCCIÓ
   1.1. CONEIXEMENTS PREVIS
   1.2. JUSTIFICACIÓ DEL CONTINGUT
2. DEFINICIONS I ELEMENTS CARACTERÍSTICS
3. TIPUS DE GRAFS
4. MATRIUS D'ADJACÈNCIA I D'INCIDÈNCIA
5. OPERACIONS
   5.1 ISOMORFISME I HOMOMORFISME
   5.2 UNIÓ I SUMA DE GRAFS
   5.3. GRAF COMPLEMENTARI
6. CAMINS. CONNEXIÓ
   6.1. GRAF CONNEX
7. GRAFS EULERIANS I HAMILTONIANS
8. DIAGRAMES EN ARBRE
9. ASPECTES DIDÀCTICS
   9.1 UBICACIÓ
   9.2. PROPOSTES DIDÀCTIQUES
10. CONCLUSIONS
11. BIBLIOGRAFÍA.

2. DEFINICIONS I ELEMENTS CARACTERÍSTICS

Un graf $G(V,A)$ està format per un conjunt de vèrtex $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ i per un conjunt d'arestes $A=\{a_1,\ldots,a_m\}$ de manera que cada aresta uneix dos vèrtexs

Geomètricament un graf G és un conjunt de punts a l'espai (vèrtexs) alguns d'ells units per línies (arestes), p.e.



G_1 esta format per $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\} = V$ vèrtex i per $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}= =\{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\}\ldots\{v_4,v_5\}\}$

si existeix una aresta que els uneix

Direm que dos vèrtex són adjacents (o veïns) si estan units per una mateixa aresta. Dues arestes són adjacents si tenen un vèrtex en comú.

El grau d'un vèrtex és el nombre d'arestes que són incidents en aquest vèrtex, ho denotem per $g(v)$, p.e.  v $g(v)=3$

Tenim també que $\delta(G)=\min_{v\in V}\{g(v)\}$ i $\Delta(G)=\max_{v\in V}\{g(v)\}$

Arribats a aquest punt tenim un resultat molt rellevant

TEOREMA 1 - Sigui $G(V,A)$ graf aleshores $\sum_{v\in V} g(v) = 2\cdot|A|$

on $|A| = \#$ arestes

dem. Es basa en el fet que cada aresta té dos vèrtexs

COROL·LARI. - En un graf G el nombre de vèrtex de grau senar sempre és parell

Un llaç és una aresta que comença i acaba en el mateix vèrtex. Si el grau d'un vèrtex és 1 se l'anomena extrem (o terminal) i si és 0 se l'anomena aïllat, per exemple:

$g(v_0)=0 \Rightarrow v_0$ és aïllat

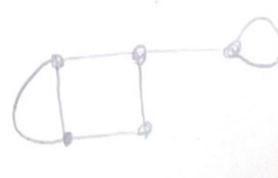
$g(v_1)=1 \Rightarrow v_1$ és extrem

I notem que $g(v_2)=1+2=3$ ja que el llaç compta doblement

$$\Rightarrow \sum_{v\in V} g(v) = 3+1 = 4 = 2\cdot 2 = 2\cdot|A|$$

3. TIPUS DE GRAFS

Anomenem graf simple en aquell que tot parell ~~tot parell~~ dels seus vèrtexs només està conectat per una (o cap) aresta i no te llaços. En cas contrari direm que el graf és no simple o multigraf. El graf G_1, al primer exemple, és simple, mentre que un multigraf seria:

G_2 

Un graf direm que és nul si està format per un numero finit de vèrtex però sense cap aresta, $|A|=0$. El cas particular en que només hi ha un vèrtex s'anomena graf trivial

Un graf orientat (o dirigit o digraf) és aquell en que totes les seues arestes estan dirigides, i passen a anomenar-se arcs. Si no estan orientades el graf s'anomena simètric.

Graf simètric

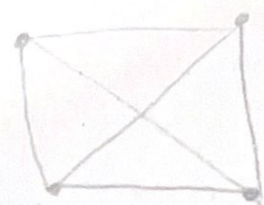
Graf orientat

Direm que

Un graf diem que és complet si tot parell dels seus vèrtex són adjacents, per exemple

K_2

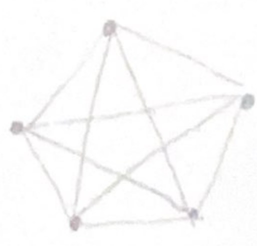
K_3



K_4

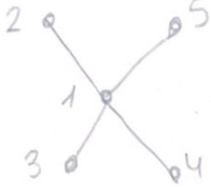
Es podria veure com el conjunt format pels polígons amb totes les seues diagonals

Anomenem graf regular aquell que tots els seus vèrtex tenen el mateix grau, és a dir, que estan connectats pel mateix nombre d'arestes. Un graf K regular és aquell que $g(v)=K \quad \forall v \in V$.

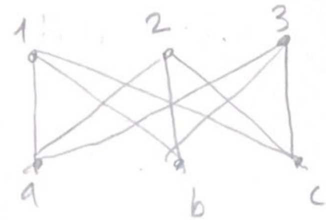


K_5 és 4-regular (en general, K_m és $m-1$ regular donat que cada vèrtex està connectat amb tots els altres.

Diem que un graf $G(V,A)$ és bipartit si el conjunt V està format per dos subconjunts $V_1, V_2 \subseteq V$, disjunts $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, de manera que els vèrtexs d'un mateix subconjunt no poden ser adjacents. Les arestes van d'un vèrtex d'un dels subconjunt a un de l'altre. És a dir si $v_1, v_2 \in V$ són adjacent és perquè $v_1 \in V_1$ i $v_2 \in V_2$, per exemple



$K_{1,5}$ és bipartit amb $V_1 = \{1\}$ i $V_2 = \{2,3,4,5\}$



$K_{3,3}$ és bipartit amb $V_1 = \{1,2,3\}$ i $V_2 = \{a,b,c\}$

Al cas particular en que un dels subconjunts del graf bipartit està format per un únic vèrtex l'anomem graf estrella, per exemple $K_{1,5}$.

Els grafs bipartits tenen multitud d'aplicacions pràctiques, especialment en problemes d'assignació horaris, tasques, matèries,...

Per últim, anomenem subgraf aquell que el podem reconèixer dintre d'un altre graf (seria com l'esquelet d'un graf)

És a dir $H(A',V')$ és subgraf de $G(A,V)$ si $A' \subseteq A$ i $V' \subseteq V$, per exemple

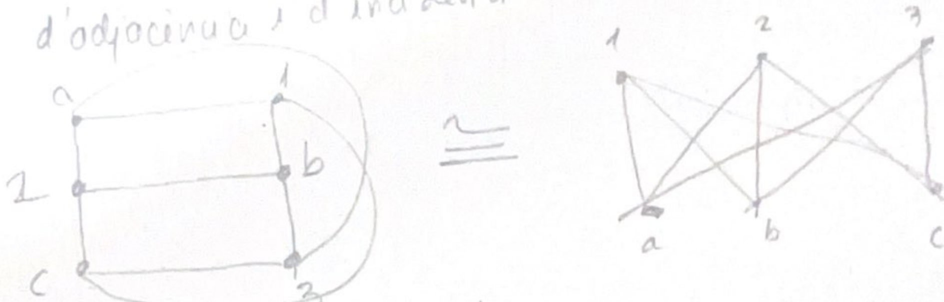
és subgraf de $K_{3,3}$

Un subgraf és comprensiu o abarcador si $V' = V$.

4 OPERACIONS

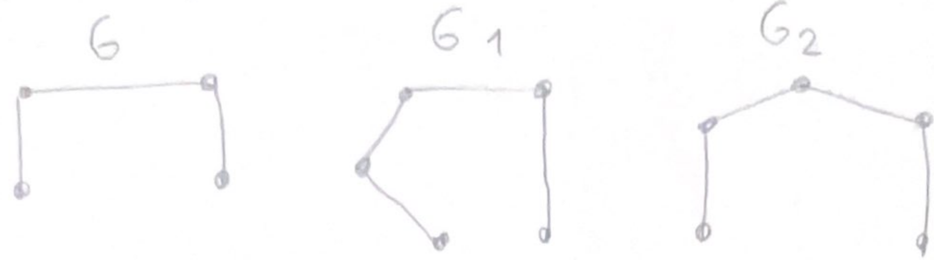
4.1 ISOMORFISME I HOMEOMORFISME

Tenim un isomorfisme entre dos grafs si tenen el mateix nombre de vèrtex i d'arestes i estan connectats de la mateixa manera. És a dir, si existeixen aplicacions bijectives entre els grafs $\psi: V \to V'$ i $\phi: A \to A'$ que respecten les relacions $G(V,A)$ i $G'(V',A')$ d'adjacència i d'incidència. Ho denotem per $G \cong G'$.



Notem que, que dos grafs tinguen el mateix nombre de vèrtex i d'arestes $\not\Rightarrow$ que siguin isomorfs, per exemple

Direm que dos grafs són homeomorfs si ambdós poden ser obtesos del mateix graf afegint nous vèrtex de grau 2 a les seves arestes, per exemple

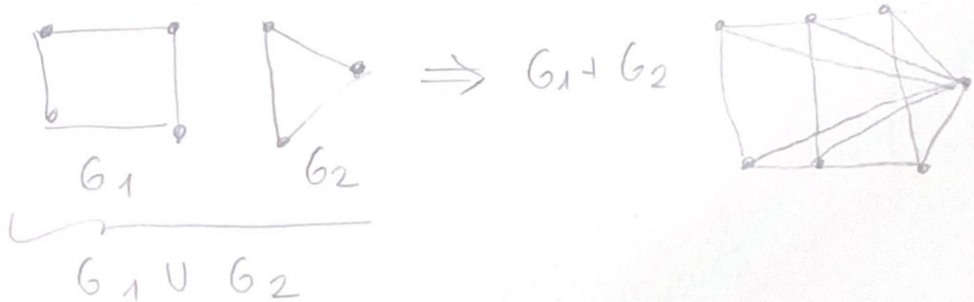


G_1 i G_2 són homeomorfs obtesos a partir de G

4.2 UNIÓ I SUMA

Siguin $G_1(V_1, A_1)$ i $G_2(V_2, A_2)$ anomenem graf unió $G(V, A)$ aquell tal que $V = V_1 \cup V_2$ i $A = A_1 \cup A_2$

I definim el graf suma com la unió dels grafs G_1 i G_2 traçant, a continuació, una aresta ~~de~~ entre cada vèrtex de G_1 a cada un de G_2, per exemple:



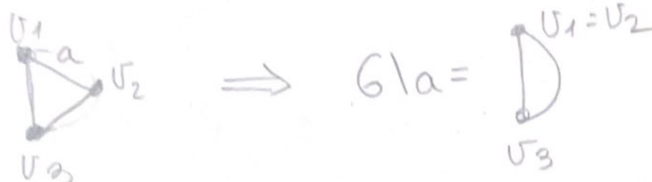
Com a resultat de la unió de grafs neix la definició d'un nou tipus de graf.

4.3 GRAF COMPLEMENTARI

Sigui $G(V,A)$ graf i G_1 subgraf de G, és coneix com graf complementari $\overline{G_1}$ aquell tal que $\overline{G_1} \cup G_1 = G$

Per il·lustrar aquest tipus de grafs podem recórrer a l'exemple anterior. En aquest cas G_1 seria subgraf de G, complementari de G_2 i viceversa

Sigui $G(V,A)$ graf i $a \in A$ aresta definim $G\backslash a$ com el ~~sub~~graf obtés de contraure l'aresta a, és a dir, d'eliminar l'aresta a i identificar els seus extrems. Altrament, s'anomena graf contracció, per exemple



5. CAMINS i CONNEXIÓ

Sigui $G = (V,A)$

Anomenem camí (en G ~~(V,A)~~) a qualsevol seqüència ordenada de les seves arestes de manera que el vèrtex final d'una aresta és l'inicial de la següent

Direm que dos vèrtex estan connectats si existeix un (o més) camins que els uneix

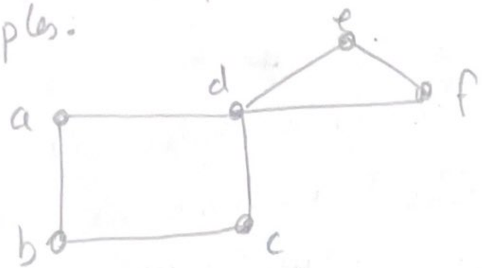
Un graf és connex si tot parell dels seus vèrtex estan connectats.

En cas contrari direm que el graf és disconnex i cadascun dels seus subgrafs connexos, s'anomena component connexa. MAXIMALS

La longitud d'un camí és el nombre d'arestes que el formen

La distància entre dos vèrtex $d(v_1, v_j)$ és la longitud del camí més curt que els uneix

Veiem, a continuació, els diferents tipus de camins que existeixen. En ajudarem del següent graf per donar exemples.



- Un camí direm que és simple si no repeteix cap aresta i elemental si no repeteix cap vèrtex.

- Un camí tancat és aquell en que els seus extrems coincideixen és a dir, que comença i acaba en el mateix vèrtex ($a \to b \to c \to d \to a$). En cas contrari, direm que el camí és obert ($d \to e \to f$)

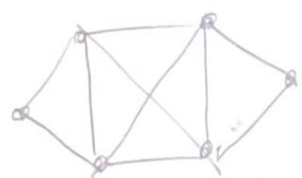
- Un circuit és un camí tancat en que totes les seves arestes (i no necessàriament tots els seus vèrtex) són distintes ($a \to b \to c \to d \to e \to f \to d \to a$).

Una trajectòria és un camí simple i elemental.
Si la trajectòria és tancada s'anomena cicle. (d→e→f→d).

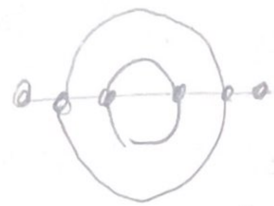
La connexió de grafs i els camins donen lloc a la introducció de dos nous tipus de grafs:

6 GRAFS EULERIANS I HAMILTONIANS

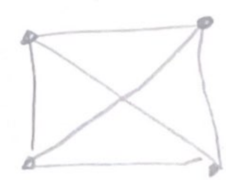
Anomenam graf eulerià aquell que conté un circuit eulerià, és a dir, un circuit que passa per totes les arestes del graf un i només un cop. Si el circuit és obert el graf s'anomena semieulerià, per exemple



Graf eulerià



Graf semieulerià



Graf no eulerià

Informalment, podem dir que un graf és eulerià si el podem recórrer (o dibuixar) sense alçar el llapis del paper i sense repetir cap aresta → passar dos cops per una mateixa aresta

Els següents resultats ens permeten identificar si un graf és eulerià

TEOREMA 2 - Siga $G(V,A)$ un graf connex i no buit.
és eulerià $\leftrightarrow$ tots els seus vèrtex són de grau parell

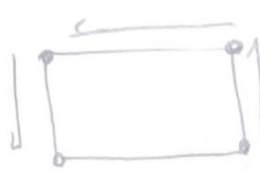
9/12

COROL·LARI - Un graf G té un camí eulerià $\Leftrightarrow$ 2 o cap dels seus vèrtex són de grau senar

Tot i que resulta fàcil identificar si un graf és, o no, eulerià, trobar en ell el cicle o camí eulerià pot resultar complicat. Per fer-ho ~~utilitzem~~ EXISTEIXEN diferents mecanismes, com ara, l'algoritme de Fleury.

6.2 GRAFS HAMILTONIANS

Direm que un graf és hamiltonià si hi podem trobar un camí tancat que passi per tots els seus vèrtexs un cop i només un, en aquest cas direm que conté un circuit hamiltonià. Notem que no s'exigeix que el camí passi per totes les arestes. Si el camí no és tancat el graf s'anomena semieulerià, per exemple:



Graf hamiltonià

Graf semihamiltonià

Graf no hamiltonià

A diferència dels grafs eulerians, no existeix una caracterització tan fàcil que ens permeti saber si un graf és hamiltonià. És per aquest fet que el seu estudi resulta més complicat.

10/12

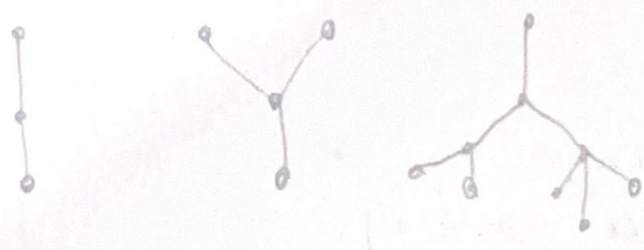
Tanmateix, els grafs hamiltonians tenen importants aplicacions pràctiques, especialment en el disseny de rutes de missatgeria i de distribució de productes

Veiem, per últim, altre tipus de grafs que també té moltes aplicacions a nivell teòric i pràctic

7 DIAGRAMES EN ARBRE

Un arbre és un graf connex i acíclic, és a dir, que no té cicles i que tot parell dels seus vèrtex té un únic camí que els uneix.

Un bosc és un conjunt format per la unió d'arbres, és a dir, és un graf disconnex amb totes les seves components connexes i acícliques.



Bosc format per tres arbres

Algunes propietat característiques dels arbres es resumeixen al següent teorema

TEOREMA - Sigui $G(V, A)$ un graf amb $|V| = \nu$ vèrtexs i $|A| = \alpha$ arestes, són equivalents:

1) G és un arbre

2) G és acíclic i $\alpha = \nu - 1$

3) G és connex i $\alpha = \nu - 1$

4) G és connex i sense arestes de tall (la eliminació d'una aresta provocaria que el graf fos disconnex)

5) tot parell de vèrtex de G està connectat per un únic camí elemental.

6) G és acíclic i l'addició d'una nova aresta crea un circuit.

12/12