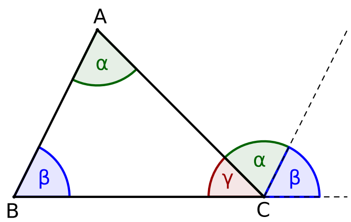
1 Resultats previs

Abans de començar revisem uns resultats fonamentals de la geometria elemental.

Teorema. *En tot triangle $\triangle ABC$ la suma dels angles és un angle pla.*

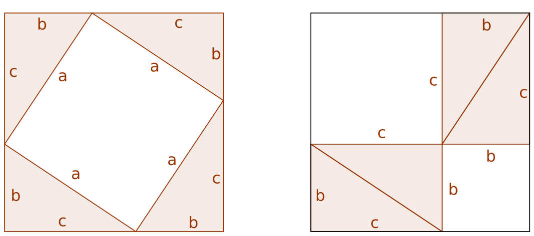


Demostració. Anomenem α, β, γ els angles en A, B, C respectivament. Si prolonguem el costat BC i tracem per C una paral·lela a AB, aquesta recta forma amb AC un angle α i amb la prolongació de BC un angle β, tal com mostra la figura.

Llavors, queda clar que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. □

Teorema de Pitàgores. *Si b, c són els catets d'un triangle rectangle i a és la hipotenusa, llavors $a^2 = b^2 + c^2$.*

Demostració. Disposem quatre còpies del triangle rectangle de dues maneres diferents, com mostren les figures. En tots dos casos, les disposicions formen un quadrat exterior de costat $b + c$.



Independentment de la disposició dels quatre triangles, l'àrea que queda sense cobrir (en blanc) del quadrat de costat $b + c$ serà sempre la mateixa. En la primera disposició aquesta àrea no coberta és un quadrat de costat a i per tant val a^2. En la segona, són dos quadrats de costat b i c respectivament, per tant val $b^2 + c^2$. Així, concloem que $a^2 = b^2 + c^2$. □

Teorema de Tales. *Siguin r, s dues rectes que es tallen en O. Siguin A, B dos punts sobre r i A', B' dos punts sobre s. Llavors*

$$AA' \text{ és paral·lel a } BB' \;\Leftrightarrow\; \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}.$$

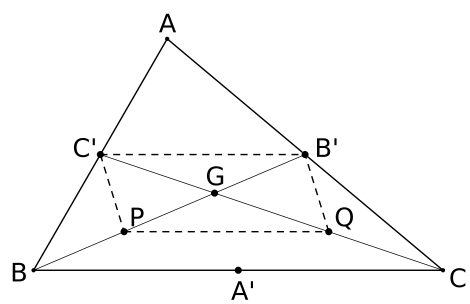
Teorema. *Un angle inscrit en una circumferència mesura la meitat que el corresponent angle central. En conseqüència, dos angles inscrits que abasten el mateix arc tenen la mateixa mesura perquè corresponen al mateix angle central.*

D'ara endavant farem un abús de notació i emprarem indistintament les lletres A, B, C per referir-nos tant als vèrtexs com als angles en aquests vèrtexs. Notem a, b, c els costats oposats als vèrtexs A, B, C respectivament.

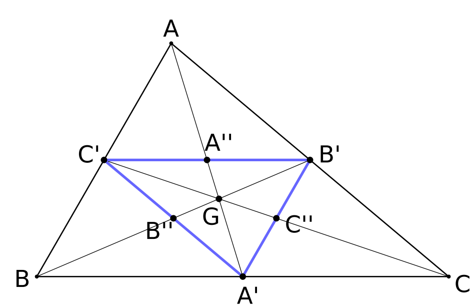
2 Les medianes i el baricentre

Les *medianes* d'un triangle són les rectes que passen per un vèrtex i el punt mig del costat oposat.

Teorema. *Sigui $\triangle ABC$ un triangle i anomenem A', B', C' els punts mitjos dels costats BC, AC, AB respectivament. Llavors, les medianes AA', BB', CC' es tallen en un punt G que anomenem* baricentre *del triangle.*



Demostració. Sigui G el punt d'intersecció de les medianes BB' i CC'. Volem demostrar que G també pertany a AA'. Siguin P, Q els punts mitjos dels segments GB i GC respectivament. Com el triangle $\triangle AC'B'$ és semblant al $\triangle ABC$ amb raó de semblança $1/2$, el segment $B'C'$ és paral·lel a BC i mesura la meitat. El mateix passa amb el triangle $\triangle GPQ$ respecte del triangle $\triangle GBC$, per tant PQ és paral·lel a BC i mesura la meitat. Així, $PQ = B'C'$, $B'C'PQ$ és un paral·lelogram i G n'és el centre. En particular, $GB' = GP$ i $GC' = GQ$. Però $GP = PB$ i $GQ = QC$, de forma que $GB' = 2GB$ i $GC' = 2GC$, o en altres paraules, les dues medianes es tallen a $2/3$ de camí entre el vèrtex i el punt mig del costat oposat. Si fem el mateix raonament començant amb les medianes AA' i BB', trobem que es tallen en un punt G' que és a $2/3$ de AA' i a $2/3$ de BB', però el punt que verificava això darrer era G. Per tant $G' = G$, això és, G també pertany a AA'. □

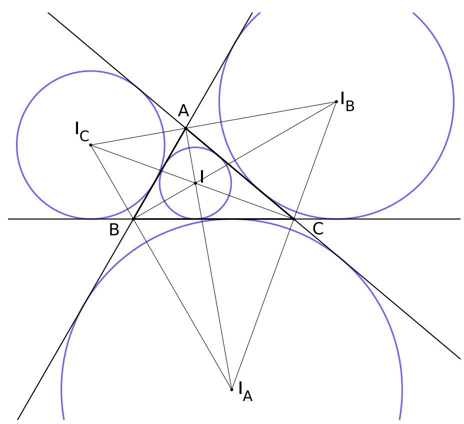


El triangle que resulta d'unir els punts mitjos $A'B'C'$ s'anomena *triangle medial*. En la prova anterior hem vist que $B'C'$ és paral·lel a BC i raonant de la mateixa manera deduïm que $A'C'$ és paral·lel a AC i $A'B'$ ho és a AB. Per tant, els angles del triangle medial són iguals dos a dos als de $\triangle ABC$, de manera que són semblants amb raó de semblança $1/2$. Això també ens diu que l'àrea del triangle medial és 4 cops menor que la de $\triangle ABC$, cosa que queda molt clara observant els triangles $\triangle AB'C'$, $\triangle A'BC'$ i $\triangle A'B'C$, que són exactament iguals que el medial però rotats π rad. Finalment, si anomenem A'', B'', C'' els punts de tall de les medianes amb els costats del triangle medial, gràcies al paral·lelisme i al teorema de Tales deduïm fàcilment que aquests punts són els punts mitjos dels costats del triangle medial. Així, tots dos triangles comparteixen les medianes i, en conseqüència, el baricentre G.

3 Les bisectrius, l'incentre i els excentres

Dues rectes r, s que es tallen, defineixen dos angles α, β tals que $\alpha + \beta = \pi$. Les rectes que els bisequen s'anomenen les *bisectrius* de r i s i coincideixen amb el lloc geomètric dels punts que equidisten d'ambdues. En un triangle $\triangle ABC$, cada parella de costats defineix dues bisectrius, una d'*interior* (que interseca la regió interior del triangle) i una altra d'*exterior*.

Teorema. *En un triangle $\triangle ABC$, les tres bisectrius interiors es tallen en un punt I anomenat* incentre *que és el centre de la circumferència inscrita en el triangle, tangent interior als tres costats. Les bisectrius exteriors per dos vèrtexs i la interior pel tercer vèrtex es tallen en un punt anomenat* excentre *que és el centre d'una circumferència tangent exterior a les prolongacions dels tres costats (*circumferència exinscrita*).*



Demostració. Sigui I el punt de tall de les bisectrius interiors per B i per C. Per pertànyer a la primera, I equidista de AB i BC; per pertànyer a la segona, equidista de BC i de AC. Per tant, equidista de AB i de AC, de manera que també es troba sobre la bisectriu interior per A (no pot ser l'exterior perquè I es troba a l'interior del triangle). Si r és la distància comú de I als tres costats, mesurada perpendicularment, la circumferència de centre I i radi r és tangent als tres costats (la tangent a una circumferència és perpendicular al radi en el punt de tangència) i per tant és la circumferència inscrita a $\triangle ABC$.

Amb un raonament idèntic trobem que les bisectrius exteriors per B i per C es tallen en un punt I_A que també es troba sobre la bisectriu interior per A i per tant equidista dels tres costats prolongats. En conseqüència, és el centre d'una circumferència tangent als tres, exterior al triangle. El mateix raonament amb les altres parelles de vèrtexs proporciona els altres dos excentres I_B, I_C i les altres dues circumferències exinscrites. $\square$

L'àrea del triangle $\triangle ABC$, que notarem (ABC), és la suma $(BIC)+(AIC)+(AIB)$, però aquests tres triangles tenen la mateixa altura r i per tant

$$(ABC) = \frac{1}{2}(a+b+c)r = sr,$$

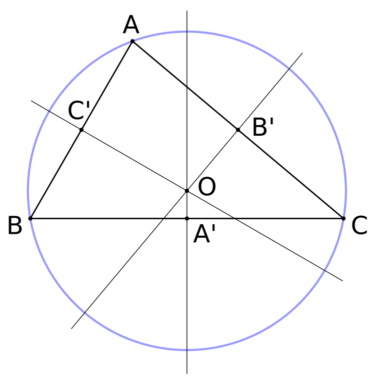
on s és el semiperímetre de $\triangle ABC$. De forma semblant, si r_A és el radi de la circumferència exinscrita de centre I_A, tenim $(ABC) = (ABI_A) + (ACI_A) - (BCI_A)$, de manera que

$$(ABC) = \frac{1}{2}(c+b-a)r_A = (s-a)r_A,$$

i el mateix raonament per als altres excentes proporciona $(ABC) = (s-b)r_B = (s-c)r_C$.

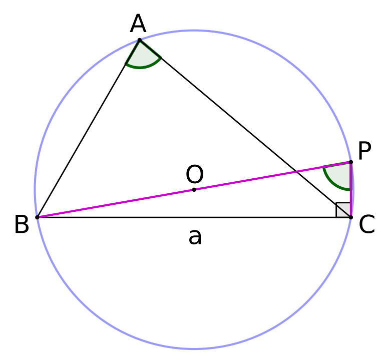
4 Les mediatrius i el circumcentre

Les *mediatrius* d'un triangle $\triangle ABC$ són les perpendiculars pels punts mitjos dels costats. La mediatriu d'un segment és el lloc geomètric dels punts que equidisten dels seus extrems.



Teorema. *En un triangle $\triangle ABC$, les tres mediatrius es tallen en un punt O que anomenem* circumcentre *del triangle, que és el centre de la circumferència que passa pels tres vèrtexs (*circumferència circumscrita*).*

Demostració. Anomenem O la intersecció de les mediatrius de BC i AC. Com O pertany a la primera mediatriu, equidista de B i C; per pertànyer a la segona, equidista de C i A. Per tant, equidista de A i B, de manera que també pertany a la mediatriu de AB, com volíem veure. □



Sigui R el radi de la circumferència circumscrita a $\triangle ABC$ i considerem el diàmetre per B, que talla la circumferència en un altre punt P. L'angle en A és el mateix que el $\angle BPC$ perquè abasten el mateix arc de circumferència i $\angle BCP$ és recte perquè abasta mitja circumferència. Per tant,

$$\sin A = \sin(\angle BPC) = \frac{a}{2R} \;\Rightarrow\; \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

El mateix raonament sobre els altres angles proporciona el resultat equivalent, de manera que hem provat:

Teorema del sinus. *En tot triangle $\triangle ABC$ es compleix*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

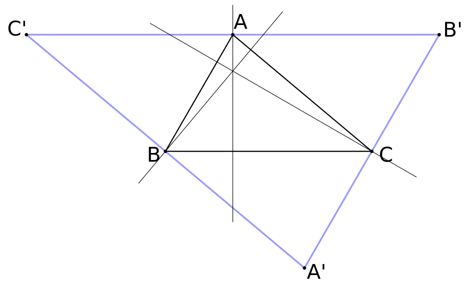
on R és el radi de la circumferència circumscrita. □

El teorema del sinus ens permet trobar una expressió per a l'àrea de $\triangle ABC$ que involucra R. En efecte, si h_a és l'altura de $\triangle ABC$ relativa a la base a, podem escriure

$$(ABC) = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ac\frac{b}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

5 Les altures i l'ortocentre

Les *altures* d'un triangle són les perpendiculars per cada vèrtex al costat oposat.



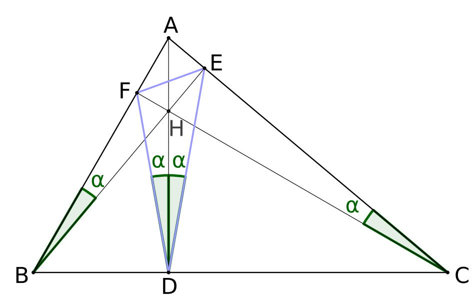
Teorema. *En un triangle $\triangle ABC$, les tres altures es tallen en un punt H que anomenem* ortocentre.

Demostració. Construïm el triangle $\triangle A'B'C'$ traçant, per cada vèrtex, la paral·lela al costat oposat. Per construcció, $BCB'A$ és un paral·lelogram, de manera que $AB' = BC$, però també $BCAC'$ és un paral·lelogram, per tant $AC' = BC$. Això ens diu que A és el punt mig de $B'C'$ i el mateix raonament aplicat als altres vèrtexs ens diu que B i C són els punts mitjos dels costats $A'C'$ i $A'B'$ respectivament. (En altres paraules, $\triangle ABC$ és el triangle medial del $\triangle A'B'C'$.) Però llavors, veiem que les altures de $\triangle ABC$ són les mediatrius de $\triangle A'B'C'$, que ja hem vist que són concurrents. □

En el transcurs de la demostració també hem provat

Teorema. *El circumcentre d'un triangle és l'ortocentre del seu triangle medial.* □

Considerem ara el triangle $\triangle DEF$ format pels peus de les altures. L'anomenem *triangle òrtic*.



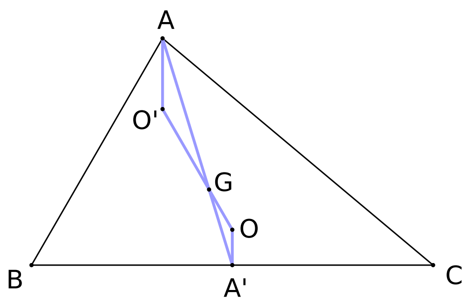
Teorema. *Les altures d'un triangle $\triangle ABC$ són les bisectrius del seu triangle òrtic. En particular, l'ortocentre de $\triangle ABC$ coincideix amb l'incentre de l'òrtic.*

Demostració. Provarem primer que $\angle FBE = \angle FCE$ i després que $\angle FDH = \angle FBH = \angle FBE$ i $\angle EDH = \angle ECH = \angle FCE$. Els triangles $\triangle BFC$ i $\triangle BEC$ són rectangles en F i E respectivament, de manera que els punts B, F, E, C són sobre una circumferència de diàmetre BC. En particular $\angle FBE = \angle FCE$ perquè són angles inscrits que abasten el mateix arc. D'altra banda, el quadrilàter $BFHD$ està inscrit en la circumferència de diàmetre BH perquè els angles en F i D són rectes. En conseqüència, $\angle FDH = \angle FBH$ perquè abasten el mateix arc. El mateix passa amb el quadrilàter $CEHD$, que és inscrit en la circumferència de diàmetre CH i, per tant, $\angle EDH = \angle ECH$. □

6 La recta d'Euler

En un triangle en què coincideixen el baricentre G i el circumcentre O, les medianes són les mediatrius i llavors el triangle és isòsceles "pels tres costats", això és, equilàter. En cas contrari, O i G defineixen una recta.

Teorema. *En un triangle $\triangle ABC$ no equilàter, els punts O, G, H estan alineats. La recta que els conté s'anomena* recta d'Euler.



Demostració. Si el triangle és isòsceles el resultat és evident, perquè en tal cas els tres punts es troben sobre la mediatriu del costat desigual i aquesta mediatriu és també la mediana i l'altura pel vèrtex oposat.

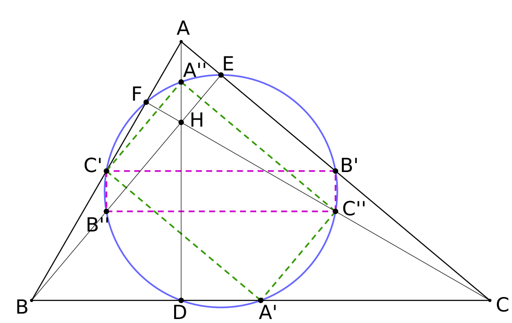
Suposem, doncs, que $\triangle ABC$ és escalè. Considerem sobre la recta OG un punt O' tal que $GO' = 2OG$, com mostra la figura. Però també hem vist que, si AA' és una mediana, el baricentre G té la propietat que $GA = 2A'G$. En conseqüència, pel teorema de Tales, els triangles $\triangle AGO'$ i $\triangle A'GO$ són semblants. En particular, AO' és paral·lela a $A'O$, de manera que és perpendicular a BC, això és, O' es troba sobre l'altura per A. Raonant de forma idèntica amb les altres dues medianes BB', CC' concloem que O' es troba també sobre les altures per B i per C, això és, $O' = H$. $\square$

Observem que aquesta és una demostració alternativa de la concurrència de les altures.

7 La circumferència dels 9 punts

En un triangle $\triangle ABC$ considerem els peus de les altures D, E, F, els punts mitjos dels costats A', B', C' i els punts mitjos A'', B'', C'' dels segments HA, HB, HC respectivament.

Teorema. *Els punts D, E, F, A', B', C', A'', B'', C'' es troben sobre l'anomenada* circumferència dels 9 punts *o* circumferència de Feuerbach.



Demostració. El segment $B'C'$ és paral·lel a BC i també ho és el segment $B''C''$ en ser B'' i C'' els punts mitjos de HB i HC.

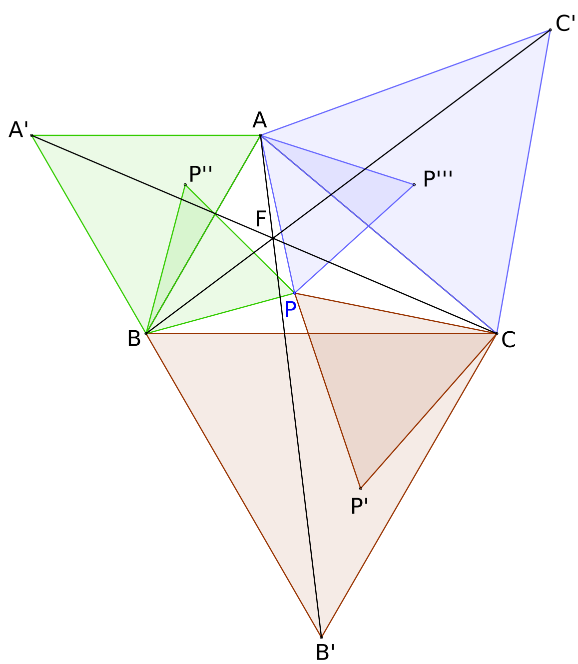
El mateix raonament sobre els triangles $\triangle ABH$ i $\triangle ACH$ ens mostra que els segments $C'B''$ i $B'C''$ són paral·lels a AH i, en conseqüència, perpendiculars a BC. Per tant, el quadrilàter $B'C'B''C''$ és un rectangle i els quatre punts són sobre una circumferència que té per diàmetres $B'B''$ i $C'C''$. Els punts E i F també pertanyen a aquesta circumferència perquè $\angle B'EB''$ i $\angle C'FC''$ són angles rectes construïts sobre els diàmetres $B'B''$ i $C'C''$.

Un raonament idèntic mostra que el quadrilàter $A'C'A''C''$ és també un rectangle, de manera que els quatre punts es troben sobre una circumferència, que és la mateixa que abans en ser $C'C''$ un diàmetre comú. El punt D també hi pertany perquè $\angle A'DA''$ és recte i construït sobre el diàmetre $A'A''$. $\square$

Considerem el circumcentre O com a intersecció de les mediatrius per A' i per C' i observem els triangles $\triangle A''HC''$ i $\triangle A'OC'$. És immediat veure que tenen els costats paral·lels i que tenen un costat igual ($A''C'' = A'C'$). Amb això concloem que una simetria respecte del centre de la circumferència dels 9 punts transforma un triangle en l'altre, de manera que:

Corol·lari. *El centre de la circumferència dels 9 punts és el punt mig entre H i O; en particular, es troba sobre la recta d'Euler.* $\square$

8 El punt de Fermat



Com a motivació plantegem el següent problema: suposem que hi ha tres poblacions A, B, C i es vol construir un centre comercial que les abasteixi. ¿En quin punt cal construir el centre perquè la suma dels tres trams de carretera que s'hauran de construir des del centre cap a les poblacions sigui la més petita possible? En altres paraules, donat un triangle $\triangle ABC$ cerquem un punt P que faci que la suma $PA + PB + PC$ sigui mínima. Aquest punt s'anomena *punt de Fermat* del triangle.

Suposarem que els angles de $\triangle ABC$ són més petits que $2\pi/3$. Comencem triant un P qualsevol i considerem el punt P' resultant d'aplicar a P una rotació d'angle $\pi/3$ en sentit directe al voltant de C. Considerem també el punt B', imatge de B per la mateixa rotació. Degut a l'angle girat, els triangles $\triangle CPP'$ i $\triangle CBB'$ són equilàters, de manera que $PC = PP'$ i $PB = P'B'$. Per tant, la suma $PA + PB + PC$ coincideix amb la longitud de la poligonal $APP'B'$. Com les posicions de A i de B' no depenen de la tria de P, aquesta poligonal tindrà longitud mínima quan sigui una línia recta; en particular, P es trobarà sobre AB'.

Raonant de la mateixa manera però fent les rotacions amb centre en els altres vèrtexs, trobem que P també es troba sobre BC' i sobre CA'. Per tant, hem demostrat:

Teorema. *Si es dibuixen triangles equilàters $\triangle BCB'$, $\triangle CAC'$, $\triangle ABA'$ sobre els costats d'un triangle $\triangle ABC$, els segments AB', BC' i CA' concorren en el punt de Fermat F.* $\square$

Per la forma com s'ha fet la construcció no és difícil veure que els angles $\angle AFB$, $\angle BFC$ i $\angle CFA$ mesuren $2\pi/3$. Si el triangle $\triangle ABC$ té un angle més gran que $2\pi/3$, llavors la construcció que hem fet no és vàlida i el punt de Fermat F coincideix amb el vèrtex corresponent a aquest angle.