

Tema 55

Geometría Fractal

55.1 Introducción

La Geometría Fractal es uno de los campos de la Matemática de más reciente aparición. Se enmarca en el contexto de la Teoría Geométrica de la Medida, y aunque su delimitación exacta y definitiva está por establecer, podemos decir que se ocupa del estudio de una amplia gama de objetos matemáticos (fractales) cuya complejidad escapa a los alcances de la Geometría tradicional.

El término FRACTAL fue acuñado en 1977 por Benoît B. Mandelbrot para designar ciertas realidades matemáticas con propiedades contrarias a la intuición y antagónicas a las de las variedades regulares estudiadas por la Geometría Diferencial.

No existe una definición rigurosa que delimite con precisión matemática si un determinado conjunto es o no un fractal. No obstante, la mayoría de los autores coinciden en considerar que un fractal es el producto final que se origina a través de la iteración de un proceso geométrico. Éste suele ser de naturaleza muy simple, y origina en las sucesivas iteraciones conjuntos de determinada dimensión, fija a lo largo del proceso, que se modifica al convertir la iteración en infinita.

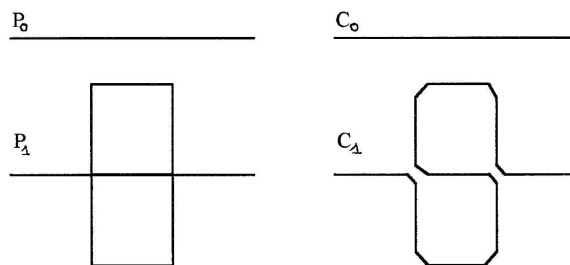
Dentro de la ambigüedad que encierra el párrafo anterior, podemos decir que el carácter “fractal” de un conjunto viene dado por esa modificación de la dimensión en el paso al límite que hace al producto final esencialmente distinto de los elementos que lo generan. Algunos autores admiten que no sea la dimensión lo que se modifique en el paso al límite, sino alguna otra propiedad de regularidad geométrica.

55.2 Algunos ejemplos de fractales

55.2.1 Curva de Peano

En 1980, Peano construyó una curva que llena una superficie. Una versión simplificada de su construcción es la siguiente:

Partimos de un intervalo de longitud 1 (por ejemplo $[0, 1] \times \{0\}$ en \mathbb{R}^2) al que llamaremos P_0 y C_0 indistintamente, con una parametrización que lo recorra de izquierda a derecha. P_0 lo transformamos en una línea P_1 formada por nueve intervalos de longitud $\frac{1}{3}$. El primero de éstos es el primer tercio de P_0 ; a continuación se gira a la derecha 90° y se avanza la misma distancia, repitiendo esta acción 3 veces hacia la izquierda, otras 3 a la derecha y una última a la izquierda. El último tramo coincide con el último tercio de P_0 .

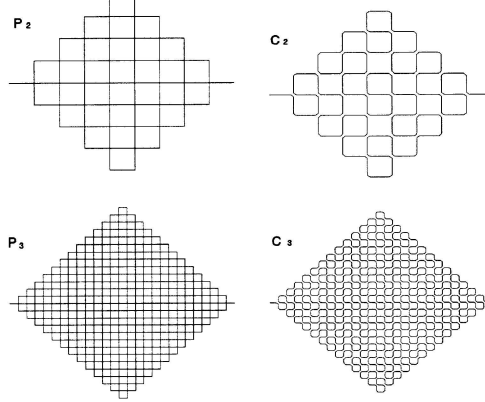


La parametrización de P_1 debe hacerse de forma que coincida con la de P_0 en sus tercios inicial y final, y el central de P_0 se transforme en los otros 7, recorridos a mayor velocidad. De esta forma se garantiza que cualquier punto de P_0 se aleja al pasar de P_1 en una distancia inferior a $\frac{1}{2}$ ($\frac{\sqrt{2}}{3}$ es una cota fácil de comprobar).

C_1 se construye a partir de P_1 sustituyendo una pequeña parte al final de cada segmento (por ejemplo, la décima parte), y la inicial del siguiente, por un pequeño tramo recto que una ambos segmentos formando con ellos un ángulo de 45° .

Si repetimos esta construcción con cada uno de los 9 intervalos que forman P_1 obtenemos las curvas P_2 y C_2 , de forma que los puntos de P_1 se alejan al pasar a P_2 en distancias inferiores a $\frac{1}{6}$. Reiterando el proceso construimos las sucesiones de curvas P_n y C_n , de forma que los puntos de P_n se alejan al pasar a P_{n+1} una cantidad inferior a $\frac{1}{2} \frac{1}{3^n}$, y los de C_n se alejan de los de P_n en menos

de $\frac{1}{10} \frac{1}{3^n}$.



La curva límite de la sucesión C_n es la curva de Peano.

Propiedades:

(1) Los puntos de C_n y los de P_n se encuentran entre sí a una distancia inferior a $\frac{1}{10} \frac{1}{3^n}$. Esto garantiza que los límites de ambas sucesiones de curvas coinciden.

(De hecho, la construcción puede realizarse sin utilizar las curvas C_n , pero éstas presentan la ventaja de no pasar dos veces por el mismo punto).

(2) Cada punto de P_n se aleja al pasar a P_{n+1} una cantidad inferior a $\frac{1}{2} \frac{1}{3^n}$.

Por tanto, el alejamiento al pasar al límite es inferior a $\sum_{t=n}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{3^t} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Esto prueba que la convergencia es uniforme, y que la curva de Peano es continua.

(3) La curva de Peano pasa por todos los puntos de un cuadrado, según veremos en la proposición siguiente. Estamos, por tanto, ante una curva continua que llena una superficie, resultado que puede considerarse a priori como contrario a toda intuición.

Proposición 1 *La curva de Peano contiene a todos los puntos interiores al cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.*

Demostración:

Las curvas P_n se han construido de forma que pasen por todos los puntos de dicho cuadrado que tengan coordenadas racionales con denominadores de la forma 3^n , y además que tales puntos permanezcan fijos con las parametrizaciones de las P_i posteriores. Basta, por tanto, hacer notar que todo punto del cuadrado es límite de alguna sucesión de puntos de coordenadas racionales con denominador potencia de 3, lo que, junto con la continuidad de la curva de Peano, prueba el resultado. C.Q.D. \square

Tenemos, por tanto, un conjunto de dimensión 2 parametrizable utilizando un único parámetro. Más aún, las curvas C_n se han construido de forma que sean inyectivas, por lo que cada una de ellas es homeomorfa a un intervalo, y sin

embargo su límite es de una dimensión superior. Incluso sería sencillo rehacer la construcción, sustituyendo los pequeños segmentos oblicuos de C_n por arcos de 90° de pequeñas circunferencias para obtener la curva de Peano como límite de curvas diferenciables.

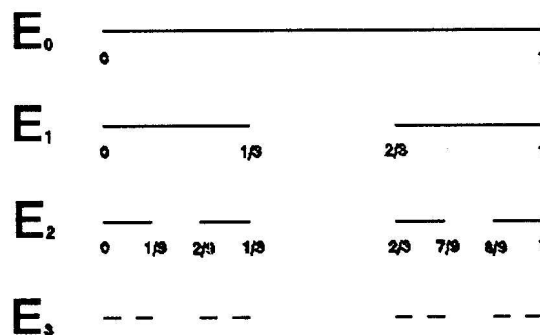
El sorprendente aumento de dimensión al pasar al límite nos permite situar a la curva de Peano en el contexto de la Geometría Fractal.

55.2.2 El conjunto de Cantor

Este conjunto fue propuesto por George Cantor en 1884.

El proceso geométrico que define el conjunto de Cantor consiste en dividir un segmento en tres partes iguales y suprimir la central, repitiendo indefinidamente la operación con cada uno de los segmentos más pequeños que vamos obteniendo.

Partimos del intervalo unidad, $E_0 = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Dividimos dicho intervalo en tres partes iguales y prescindimos del intervalo central, obteniendo: $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Cada uno de los intervalos que forman E_1 se dividen a su vez en tres partes iguales, prescindiendo del intervalo abierto central, obteniendo: $E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Si continuamos este proceso indefinidamente obtenemos para todo k natural un conjunto E_k formado por 2^k segmentos cerrados, cada uno de longitud 3^{-k} .



Dichos conjuntos forman una sucesión decreciente, $E_k \supset E_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$, cuyo conjunto límite $E := \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ se denomina conjunto ternario de Cantor.

Propiedades:

1.- El conjunto de Cantor es no vacío, pues contiene, entre otros, a los extremos de los intervalos que lo generan.

2.- Es un conjunto cerrado, por ser intersección de cerrados. Además, estando acotado por 0 y 1, es un compacto de \mathbb{R} .

3.- Todo punto es límite de las sucesiones formadas por los extremos de los intervalos de tamaño 3^{-k} que lo contienen. Por tanto en el conjunto de Cantor no hay puntos aislados.

4.- El conjunto de Cantor es totalmente desconexo (sus componentes conexas son unitarias). En efecto, dos puntos P y Q no pueden estar en la misma componente conexa, pues siempre existirá k con $3^{-k} < |P - Q|$, lo que garantiza la existencia de puntos intermedios que no pertenecen a E_k y por tanto a E .

Las propiedades 1, 2 y 3 son comunes a E y a los conjuntos E_k que lo generan. No ocurre así con la 4, pues los E_k son conjuntos cuyas componentes conexas son intervalos. No obstante, ésta propiedad no heredada no debe considerarse sorprendente, pues una característica esencial del método de construcción es la progresiva desconexión del conjunto.

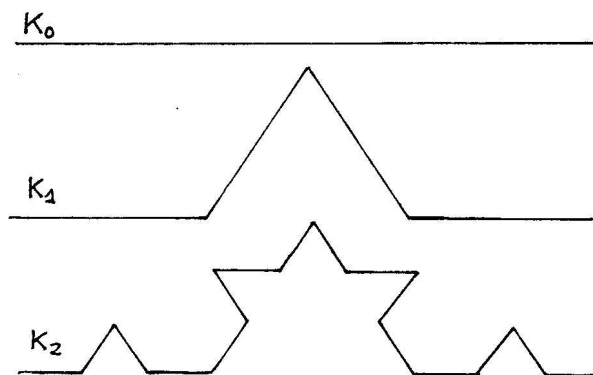
La verdadera paradoja se presenta al intentar dar una medida al conjunto de Cantor, como veremos más adelante.

55.2.3 La curva de Koch

Esta sorprendente curva fue propuesta por el matemático sueco Helge von Koch en el año 1904. Es una curva continua y cerrada que no tiene tangente en ningún punto, es decir, no es diferenciable en ningún punto. Además es de longitud infinita, aunque encierra un área finita y más aún: dados dos puntos cualesquiera de la curva, la longitud de arco entre ellos es infinita.

Veamos el proceso de construcción de esta curva: Partiendo de un segmento rectilíneo del plano (por ejemplo, $K_0 = [0, 1] \times \{0\}$), se divide éste en tres partes iguales, sustituyendo la central por dos segmentos que, junto con el suprimido, formarían un triángulo equilátero situado por encima de K_0 . Se obtiene así una poligonal K_1 , de longitud $\frac{4}{3}$. Con cada uno de los 4 segmentos de dicha poligonal se repite el proceso, de forma que los nuevos triángulos equiláteros construidos para segmentos contenidos en el segmento inicial K_0 , queden por encima de éste, y los demás siempre hacia el exterior del triángulo de la fase anterior. Así obtenemos una poligonal K_2 de longitud $\frac{16}{9}$. Continuando el proceso, obtenemos poligonales K_n de longitud $\left(\frac{4}{3}\right)^n$, y formadas por segmentos de tamaño $\frac{1}{3^n}$ para

cada $n \in \mathbb{N}$. El límite de tales poligonales recibe el nombre de curva de Koch.



Propiedades:

1. Observemos que en cada fase, los puntos K_{j+1} se alejan de K_j una cantidad inferior a $\frac{1}{3^{j+1}}$, y por tanto, los puntos de K se alejan de K_j una cantidad inferior a $\sum_{t=j+1}^{\infty} \frac{1}{3^t} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{j+1}$. Esto prueba que la convergencia al límite es uniforme, de donde se deduce que la curva de Koch es continua.

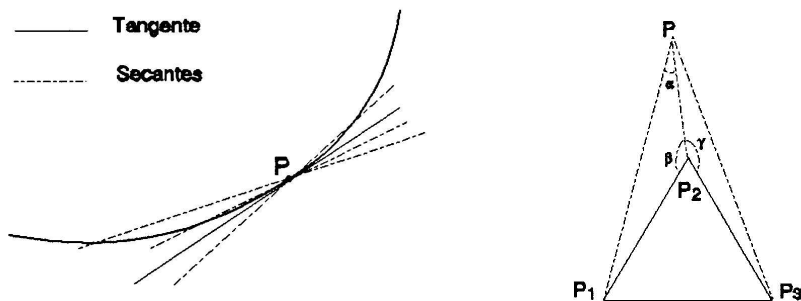
2. Sin embargo la curva de Koch no es diferenciable en ningún punto, como veremos en la proposición siguiente. Si bien hoy en día cualquier matemático está familiarizado con la existencia de funciones continuas que no son derivables en ningún punto, en su día fueron consideradas paradojas contrarias a toda intuición.

Proposición 2 *La curva de Koch no es diferenciable.*

Demostración:

Si una curva es diferenciable en un punto P , en un entorno suyo las secantes que unen P con cualquier otro punto de la curva deben ser suficientemente próximas a la tangente, lo que obliga a que dos de tales secantes formen entre sí un ángulo arbitrariamente próximo a 0 o a π , y por tanto su seno sea

arbitrariamente pequeño. Veamos que esto no es posible en la curva de Koch.



Sea P un punto de la curva de Koch. En todo entorno suyo podemos encontrar tres puntos P_1 , P_2 y P_3 pertenecientes a K , que sean vértices consecutivos de algún K_j y formen un triángulo equilátero de lado $a = \frac{1}{3^j}$.

Según se observó en la propiedad 1, la distancia de P a uno de los lados de éste triángulo es menor que $\frac{a}{2}$, que a su vez es menor que a . Por tanto, la distancia a cualquiera de los vértices está acotada por $2a$. Tenemos entonces que en el triángulo PP_1P_2 de la figura se verifica que $d(P_1, P_2) = a$ y que $d(P, P_1) < 2a$. Por el teorema del seno, concluimos que $\sin \beta < 2 \sin \alpha$.

Según se observó antes, si K fuese diferenciable en P tendríamos que $\sin \alpha$ (y por tanto $\sin \beta$) podría elegirse suficientemente pequeño. Por tanto, β sería arbitrariamente próximo a 0 o a π , lo que entra en contradicción con el hecho de que el ángulo de vértice P_2 del triángulo equilátero mida $\frac{\pi}{6}$. C.Q.D. \square

Resultados como el anterior fueron en su día considerados sorprendentes. La no diferenciabilidad de una curva se concebía en “vértices” aislados, pero era contrario a la intuición que una curva estuviese formada sólo por “vértices”.

Las curvas K_j se han construido diferenciables salvo en los vértices. Se puede hacer una pequeña modificación similar a la citada al construir la curva de Peano para “redondear” los vértices y obtener la curva de Koch como límite de curvas diferenciables en todos los puntos.

Al igual que ocurre con el conjunto de Cantor, la curva de Koch también presenta otras paradojas en relación con su medida, según veremos a continuación.

55.3 Elementos de la Teoría de la Medida de Lebesgue

Definición 3 Se dice que una función $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue-medible sii $\exists \{\varphi_n\} \subset C_{oo}(\mathbb{R}^k)$ t.q. $f = \lim \varphi_n$ c.p.d.

Notaremos $M(\mathbb{R}^k) := \{f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es Lebesgue-medible}\}$.

Se tiene que toda función Lebesgue-integrable es Lebesgue-medible, esto es,

$$L^1(\mathbb{R}^k) \subset M(\mathbb{R}^k)$$

(recuérdese que $C_{oo}(\mathbb{R}^k) \subset R(\mathbb{R}^k) \subset L^1(\mathbb{R}^k)$)¹.

Es inmediato comprobar las siguientes **propiedades**.

Sean $f, g \in M(\mathbb{R}^k)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

- (i) $\alpha f, f + g, fg \in M(\mathbb{R}^k)$
- (ii) $|f|^p \in M(\mathbb{R}^k) \quad \forall p > 0$
- (iii) $f \vee g, f \wedge g, f^+, f^- \in M(\mathbb{R}^k)$

Además, se tienen los siguientes **teoremas**:

- (1) Una función es Lebesgue-medible si, y sólo si, es límite c.p.d. de una sucesión de funciones Lebesgue-integrables.
- (2) Toda función continua c.p.d. es Lebesgue-medible

Definición 4 Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^k$ se dice Lebesgue-medible sii $\chi_A \in L^1(\mathbb{R}^k)$.

Notaremos $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^k)$ a la clase de los subconjuntos de \mathbb{R}^k que son Lebesgue-medibles.

Definición 5 Se dice que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$ es una σ -álgebra sii se verifican las siguientes propiedades:

- (1) $\emptyset \in \mathcal{A}$
- (2) $\forall A \in \mathcal{A}, \quad A^c \in \mathcal{A}$
- (3) $\forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Se tiene que $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^k)$ es una σ -álgebra, que llamaremos σ -álgebra de Lebesgue de \mathbb{R}^k .

Example 6 Los conjuntos de medida cero, los abiertos y los cerrados son conjuntos Lebesgue medibles.

Definición 7 Una función de conjuntos $\varphi : \mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^k) \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ es una medida sii verifica las siguientes propiedades:

- (1) φ es no negativa (sii $\forall C \in \mathcal{C}$ se verifica que $\varphi(C) \geq 0$)
- (2) φ es σ -aditiva (sii $\forall A \in \mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^k) : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ con $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ y

disjuntos dos a dos, se verifica que $\varphi(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(A_n)$)

¹ Se definen dichos conjuntos como sigue: $C_{oo}(\mathbb{R}^k) := \{f \in C(\mathbb{R}^k) : \text{sop}(f) \text{ es compacto}\}$ donde $\text{sop}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^k : f(x) \neq 0\}}$, $R(\mathbb{R}^k) := \{f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es Riemann - integrable}\}$, y $L^1(\mathbb{R}^k) := \{f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es Lebesgue - integrable}\}$.

Definición 8 Dado $A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^k) : \chi_A \in L^1(\mathbb{R}^k)$, definimos la medida de Lebesgue k -dimensional de A y la notamos $\lambda_k(A)$, como el número real

$$\lambda_k(A) := \int_{\mathbb{R}^k} \chi_A$$

Dado un conjunto $A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^k) : \chi_A \notin L^1(\mathbb{R}^k)$, diremos que A tiene medida k -dimensional de Lebesgue infinita y escribiremos $\lambda_k(A) = +\infty$.

El siguiente resultado nos dice entre otras cosas, que la medida de Lebesgue es una medida.

Teorema 9 Sean $A, B, A_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^k)$, $n \in \mathbb{N}$. La medida de Lebesgue $\lambda : \mathfrak{M}(\mathbb{R}^k) \rightarrow [0, +\infty]$ tiene las siguientes propiedades:

- (1) $\lambda(\emptyset) = 0$
- (2) A es un conjunto de medida cero si, y sólo si, $\lambda(A) = 0$
- (3) Si $A \subset B$ entonces $\lambda(A) \leq \lambda(B)$
- (4) Si A es acotado, entonces $\lambda(A) < +\infty$
- (5) $\lambda(A \cup B) \leq \lambda(A) + \lambda(B)$
- (6) Si $A_n \cap A_m = \emptyset$ siempre que $n \neq m$, se verifica que:

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(A_n) \quad (\sigma\text{-aditividad de la medida})$$

- (7) Si $A \subset B$ y $\lambda(A) < +\infty$, entonces $\lambda(B - A) = \lambda(B) - \lambda(A)$

- (8) Si $A_n \subset A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(A_n)$

- (9) Si $A_n \supset A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $\lambda(A_p) < +\infty$ para algún $p \in \mathbb{N}$ entonces $\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(A_n)$

- (10) $\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(A_n) \quad (\sigma\text{-subaditividad de la medida})$

Aunque la medida de Lebesgue es relativamente reciente, el manejo de distintas medidas para las distintas dimensiones ha acompañado a la matemática a lo largo de toda su historia. Sin embargo, al intentar medir conjuntos “extraños” como el conjunto de Cantor y la curva de Koch, surgen algunas paradojas, como veremos a continuación.

55.4 La medida de Lebesgue de los fractales estudiados

55.4.1 La medida de Lebesgue del conjunto de Cantor

En adelante, utilizaremos la siguiente nomenclatura para referirnos a los puntos del conjunto de Cantor y a los intervalos que intervienen en el proceso de su construcción.

Al dividir un segmento en tres partes iguales las nombraremos añadiendo al nombre del segmento subíndices 0, 1 y 2 respectivamente, en orden creciente. Así, $E_0 = [0, 1]$ se divide en $E_{00} = [0, \frac{1}{3}]$ y $E_{01} =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ y $E_{02} = [\frac{2}{3}, 1]$, con lo que al suprimir el intervalo central tendremos:

$$E_1 = E_{00} \cup E_{02}$$

y análogamente

$$E_2 = E_{000} \cup E_{002} \cup E_{020} \cup E_{022}$$

$$E_3 = E_{0000} \cup E_{0002} \cup E_{0020} \cup E_{0022} \cup E_{0200} \cup E_{0202} \cup E_{0220} \cup E_{0222}$$

y en general, E_n será la unión de 2^n intervalos de longitud 3^{-n} numerados con subíndices $0a_1...a_n$ siendo cada $a_i \in \{0, 2\}$.

Los puntos del conjunto de Cantor se determinan biunívocamente por las sucesiones de intervalos encajados $E_0 \supset E_{0a_1} \supset E_{0a_1a_2} \supset \dots$. Al número determinado por tal sucesión lo representaremos por $0'a_1a_2a_3\dots$

Reparando en la analogía del proceso anterior con la división de $[0, 1]$ en 10 décimas, cada una de éstas en 10 centésimas, etc. observamos que el conjunto de Cantor está formado por los números de $[0, 1]$ que se expresan en base 3 utilizando las cifras 0 y 2.

Proposición 10 *El conjunto ternario de Cantor, E , no es numerable².*

Demostración:

Supongamos que tenemos una sucesión $\{a^k\}$ de elementos de E . Para todo k natural, sea $b_k = 0$ si la k -ésima cifra de a^k es 2 y sea $b_k = 2$ si la k -ésima cifra de a^k es 0.

El número $0'b_1b_2b_3\dots$ es un elemento de E que no está en $\{a^k\}$, pues difiere en al menos una cifra decimal de cada uno de los que forman la sucesión. Como esto es aplicable a toda sucesión, concluimos que ninguna numeración es sobreyectiva y por tanto E no es numerable. C.Q.D. \square

La demostración anterior es análoga a la que suele darse para probar que un intervalo real no es numerable. Es más, la notación elegida para los elementos de E permite, sustituyendo la cifra 2 por 1, establecer una biyección entre E y $[0, 1]$ con sus elementos escritos en base 2. Por tanto, el conjunto ternario de Cantor y el intervalo unidad cerrado tienen el mismo cardinal.

Proposición 11 $\lambda_1(E) = 0$

Demostración:

²Recuérdese que un conjunto A es numerable sii es equipotente a un subconjunto de \mathbb{N} , es decir, si $\exists f : A \rightarrow \mathbb{N}$ inyectiva o equivalentemente $\exists f : \mathbb{N} \rightarrow A$ sobreyectiva.

Como cada E_k es unión finita de intervalos, se tiene que E es medible. Además, por aditividad $\lambda_1(E_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k$, de donde $E \subset E_k$ y por tanto:

$$0 \leq \lambda_1(E) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

luego $\lambda_1(E) = 0$ ya que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$. C.Q.D. \square

Las propiedades anteriores nos muestran que estamos ante un conjunto no numerable³ de medida 1-dimensional de Lebesgue 0. Demasiado grande para medirse en dimensión 0, pero demasiado pequeño para tener medida de Lebesgue positiva en dimensión 1.

55.4.2 La medida de Lebesgue de la curva de Koch

Podemos establecer una parametrización de la curva de Koch como sigue:

Sea $f_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la parametrización de K_0 definida por $f_0(t) = (t, 0)$. La transformación de K_0 en K_1 se formaliza a través de la función:

$$f_1(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{si } t < \frac{1}{3} \\ \left(t, \left(t - \frac{1}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3}\right) & \text{si } \frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3} \\ \left(t, \left(\frac{2}{3} - t\right) \sin \frac{\pi}{3}\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t < \frac{2}{3} \\ (t, 0) & \text{si } \frac{2}{3} < t \end{cases}$$

que parametriza K_1 .

Esta transformación puede llevarse a cualquier segmento del plano, haciéndola actuar tras una semejanza que aplique dicho segmento en K_0 y componiendo a continuación con la semejanza inversa. Así, podemos definir por recurrencia parametrizaciones f_i de cada K_i , cuyo límite f es una parametrización de K .

Propiedades:

1.- Observemos que, por como es la construcción de las parametrizaciones, los vértices de K_i permanecen fijos en las parametrizaciones posteriores. Así, si $f_i(t)$ es un vértice de K_i , se cumple que $f_j(t) = f_i(t)$ para todo $j > i$, y por lo tanto $f(t) = f_i(t)$.

2.- f es una parametrización continua, por ser límite uniforme de funciones continuas.

3.- Además es inyectiva, pues si $t \neq t'$ se puede encontrar i con $f_i(t)$ y $f_i(t')$ separados una distancia superior a $\frac{1}{3^i}$, lo que junto a la propiedad 1, prueba la inyectividad de f . Así, f es un homeomorfismo.

³ En los números naturales, o en cualquier conjunto numerable, consideramos la σ -álgebra formada por todos sus subconjuntos. La aplicación que a cada subconjunto acotado le hace corresponder su número de elementos, e infinito a los no acotados, es una medida que llamaremos medida 0- dimensional.

Proposición 12 $\lambda_2(K) = 0$

Demostración:

Cada K_i está formado por 4^i intervalos de longitud $\frac{1}{3^i}$ cada uno. La proximidad de los puntos de K a K_i observada antes, permite recubrir K por 4^i cuadrados de lado $\frac{1}{3^i}$, de donde la medida de K es inferior a $\left(\frac{4}{9}\right)^i$, y al ser esto cierto par todo i , concluimos que la medida de K es 0. C.Q.D. \square

En el contexto de la medida de Lebesgue no está claro lo que significa el concepto de longitud aplicado a la curva de Koch. La medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n es n dimensional. El cálculo diferencial permite introducir medidas de dimensión inferior para variedades diferenciables, pero la curva de Koch no lo es.

No obstante lo anterior, cualquier definición razonable de longitud que permita medir la curva de Koch, debe darnos para ésta un valor superior a la longitud de cada K_i , pues según hemos visto la parametrización f de K recorre los vértices de K_i en el mismo orden que f_i , y ésta lo hace con la menor longitud posible (tramos rectos). Como la longitud de K_i es $\left(\frac{4}{3}\right)^i$, concluimos que la medida 1-dimensional de Lebesgue de la curva de Koch (si tiene sentido) ha de ser infinita, esto es, $\lambda_1(K) = +\infty$.

Así pues, la curva de Koch es un conjunto demasiado pequeño para tener medida 2-dimensional de Lebesgue positiva, pero demasiado grande para poder asignarle medida 1-dimensional de Lebesgue finita.

Ejemplos como el conjunto ternario de Cantor, la curva de Koch, el triángulo de Sierpinski (que no se ha visto), y otros, llevaron a Caratheodory, Hausdorff, y otros matemáticos, a plantear, entre los años 1915 y 1920, las limitaciones del concepto tradicional de dimensión, así como la necesidad de considerar dimensiones no enteras o “fractales”, lo cual supuso una de las mayores revoluciones de la Teoría de la Medida.

55.5 Dimensión fractal

55.5.1 Conjuntos autosemejantes. Dimensión de semejanza

Definición 13 *La imagen de un subconjunto de \mathbb{R}^n por una homotecia de razón r compuesta con un movimiento se denomina copia semejante de razón r de dicho subconjunto.*

Definición 14 *Un conjunto acotado en \mathbb{R}^n diremos que es autosemejante de N copias y razón r si podemos expresarlo como unión disjunta de N copias semejantes de razón r .*

Example 15 El intervalo $[0, 1[$ es autosemejante de 2 copias y razón $\frac{1}{2}$, por ser $[0, 1[= [1, \frac{1}{2}[\cup [\frac{1}{2}, 1[$. Lo mismo ocurre con cualquier intervalo semiabierto. \square

Obsérvese que los parámetros, número de copias y razón no son únicos. Un intervalo puede expresarse en general como unión de k copias de razón $\frac{1}{k}$ para todo k natural.

Example 16 El rectángulo semiabierto $[0, 1[\times [0, 1[$ es autosemejante de 4 copias y razón $\frac{1}{2}$, por ser

$$[0, 1[\times [0, 1[= \left[0, \frac{1}{2}\right[\times \left[0, \frac{1}{2}\right[\cup \left[0, \frac{1}{2}\right[\times \left[\frac{1}{2}, 1\right[\cup \left[\frac{1}{2}, 1\right[\times \left[0, \frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{1}{2}, 1\right[\times \left[\frac{1}{2}, 1\right[$$

En general, cualquier rectángulo semiabierto es autosemejante de k^2 copias y razón r , siendo $k = r^{-1}$ y r un número natural.

Análogamente, las cajas semiabiertas de \mathbb{R}^n (producto cartesiano de n intervalos semiabiertos) son autosemejantes de N copias y razón r , siendo $N = r^{-n}$ y r el inverso de cualquier número natural.

Example 17 El conjunto ternario de Cantor, E , es autosemejante de 2 copias y razón $\frac{1}{3}$, pues

$$E = \left(E \cap \left[0, \frac{1}{3}\right]\right) \cup \left(E \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right]\right)$$

Example 18 La curva de Koch es autosemejante de 4 copias y razón $\frac{1}{3}$.

Para cumplir con rigor la definición anterior, debemos considerar la curva de Koch semiabierta, prescindiendo del punto final $(1, 0)$. Más adelante se cita una definición menos restrictiva de autosemejanza aplicable a la curva completa. De momento, la presencia o no de éste punto es irrelevante a la hora de considerar sus propiedades métricas.

Remark 19 En el ejemplo del rectángulo semiabierto hemos visto que el número N de copias y la razón r en el caso de las cajas de \mathbb{R}^n se relacionan con la dimensión n a través de la expresión $N = r^{-n}$ (o lo que es lo mismo, $n = -\frac{\log N}{\log r}$). Esta igualdad refleja fielmente el concepto tradicional de dimensión, que es el exponente al que se elevan las variaciones de las “longitudes” para obtener la variación de la medida correspondiente. Por ejemplo, la dimensión 3 de un cubo significa que si reducimos su lado a la mitad, su volumen se reduce en $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, y por tanto necesitamos $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$ copias para reconstruir el cubo original. Esto se generaliza con los dos resultados que siguen:

Proposición 20 Si $A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ y B es una copia semejante de razón r de A entonces:

$$\lambda_n(B) = r^n \lambda_n(A)$$

Demostración:

El resultado es evidente para cajas. Para otros conjuntos medibles basta observar que la semejanza establece una biyección natural entre los recubrimientos numerables por cajas de A y de B , cumpliéndose la propiedad para la medida de cada caja, y por tanto para sus sumas numerables y para el ínfimo de tales sumas. C.Q.D.□

Corolario 21 Si $A \subset \mathbb{R}^n$ autosemejante de N copias y razón r , y tal que $\lambda_n(A) > 0$, entonces $N = r^{-n}$ y por tanto:

$$n = -\frac{\log N}{\log r}$$

Demostración:

La proposición anterior y la aditividad de la medida garantizan el resultado. C.Q.D.□

El resultado anterior nos motiva a definir el siguiente concepto de dimensión para conjuntos autosemejantes.

Definición 22 Se llama *dimensión de semejanza de un conjunto autosemejante de N copias y razón r* al número

$$n = -\frac{\log N}{\log r}$$

Según lo visto en la nota anterior y en el corolario, la definición anterior es compatible con el concepto tradicional de dimensión de un conjunto, y además refleja su relación con la variación de las medidas a través de semejanzas. Es por tanto una generalización válida, aunque solo aplicable a conjuntos autosemejantes.

Example 23 Una caja de \mathbb{R}^n tiene dimensión de semejanza n , igual ocurre para cualquier conjunto de medida positiva, según se ha visto en el corolario. No ocurre así para conjuntos de medida 0, como vamos a ver a continuación.

Example 24 El conjunto de Cantor tiene dimensión de semejanza $n = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.63093\dots$ resultado consecuente con la observación realizada anteriormente de ser “demasiado grande en dimensión 0 y demasiado pequeño en dimensión 1”.

Example 25 La curva de Koch tiene dimensión de semejanza $n = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2619\dots$ comprendida entre 1 y 2, como cabía esperar.

Se ha definido la autosemejanza para conjuntos, no para funciones. No vamos a valorar entonces la posible autosemejanza de la curva de Peano, que como conjunto es muy simple (un cuadrado), pero lo importante es su parametrización. No obstante, observemos la relación de sustituir un intervalo por 9 de longitud $\frac{1}{3}$ de la original, con la dimensión 2 del conjunto final obtenido.

Mandelbrot utilizó por primera vez el término fractal precisamente para referirse a conjuntos de dimensión no entera, si bien, tal y como se indicó al principio del tema, el concepto no está definido de forma precisa, y algunos conjuntos de dimensión entera pueden considerarse fractales por las características de su construcción.

55.5.2 Medida y dimensión de Hausdorff

El concepto de dimensión de semejanza resulta bastante limitado por aplicarse a una familia de conjuntos muy restringida. Además, la existencia de dimensiones no enteras plantea el problema de como medir en tales dimensiones.

En 1918, Hausdorff abordó estos problemas generalizando los conceptos de dimensión y medida a una familia muy amplia de conjuntos.

Se basó para ello en la siguiente idea de Caratheodory: En la recta tomamos como unidad de longitud el segmento de diámetro 1. En el plano, tomamos como unidad de área el círculo de diámetro 1 (prescindiendo del factor $\frac{\pi}{4}$). En el espacio tridimensional, tomamos como unidad de volumen la esfera de diámetro 1. Se observa entonces que una esfera de diámetro d tiene volumen d^3 , el mayor círculo plano contenido en dicha esfera tiene área d^2 , y el mayor segmento rectilíneo contenido tiene longitud d . Así, podemos considerar que las esferas de diámetro d tienen una medida d^s si las utilizamos para medir objetos de dimensión s recubriéndolos por tales esferas.

Hausdorff generalizó esta idea a valores no enteros definiendo la medida que hoy lleva su nombre.

Definición 26 Dado $s \in \mathbb{R}_0^+$ y una esfera n -dimensional E de \mathbb{R}^n , cuyo diámetro representaremos por $d(E)$, llamaremos tamaño s -dimensional de E a $d(E)^s$.

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ llamamos w - recubrimiento de A a toda sucesión $\{E_k\}$ de esferas de diámetro menor o igual que w , que recubran A :

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \quad d(E_k) \leq w$$

Llamamos tamaño s -dimensional de un recubrimiento de A a la suma de los tamaños s -dimensionales de las esferas que lo forman.

Llamamos tamaño s -dimensional a escala w de un conjunto A (y lo representamos por $H_w^s(A)$) al ínfimo de los tamaños s -dimensionales de los w - recubrimientos de A , es decir,

$$H_w^s(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} d(E_k)^s : \{E_k\} \text{ es un } w \text{ - recubrimiento de } A \right\}$$

Llamamos medida de Hausdorff s -dimensional de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ (representada por $H^s(A)$) al límite de sus tamaños s -dimensionales a escala w , cuando $w \rightarrow 0$, es decir,

$$H^s(A) = \lim_{w \rightarrow 0} H_w^s(A)$$

La validez de esta medida viene justificada por las siguientes propiedades, que citamos sin demostración.

Propiedades:

- 1.- La medida s-dimensional cumple los requisitos de una medida exterior en la σ - álgebra formada por todos los subconjuntos de \mathbb{R}^n .
- 2.- Cumple además los de una medida si la restringimos a la σ - álgebra de BOREL (la menor σ - álgebra que contiene a las cajas de \mathbb{R}^n).
- 3.- La medida de Hausdorff n-dimensional en \mathbb{R}^n es igual a la de Lebesgue multiplicada por un valor constante:

$$H^n(A) = cte \lambda_n(A)$$

Las medidas s-dimensionales permiten establecer distintas mediciones para un mismo conjunto. La experiencia con dimensiones enteras nos indica, sin embargo, que cualquier intento de medir un conjunto de determinada dimensión con criterios de medida de dimensión inferior nos lleva irremediabilmente al valor infinito; y al contrario, utilizar medidas de dimensión superior nos conduce con seguridad al valor 0.

Una de las principales aportaciones de Hausdorff a la Teoría de la Medida es la generalización de esta realidad a dimensiones no enteras.

Teorema 27 Si $A \subset \mathbb{R}^n$, existe un único $s \in \mathbb{R}$ tal que:

$$H^t(A) = \begin{cases} \infty & \text{si } t < s \\ 0 & \text{si } t > s \end{cases}$$

Demostración:

Si $w < 1$, $\{E_k\}$ es un w - recubrimiento y $t > r$, se verifica:

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(E_k)^t = \sum_{k=1}^{\infty} d(E_k)^{t-r} d(E_k)^r \leq w^{t-r} \sum_{k=1}^{\infty} d(E_k)^r$$

de donde $H_w^t(A) \leq w^{t-r} H_w^r(A)$, y haciendo $w \rightarrow 0$, concluimos que si $H_w^r(A) < \infty$, entonces $H_w^t(A) = 0$. Esto demuestra que $s = \inf \{t : H^t(A) = 0\}$ cumple las condiciones del enunciado.

Para garantizar la existencia de tal ínfimo, $\{t : H^t(A) = 0\}$ debe ser no vacío. Esto es cierto, pues si $t > n$, cualquier conjunto de medida de Lebesgue finita en \mathbb{R}^n tiene medida de Hausdorff s-dimensional 0, y como \mathbb{R}^n puede expresarse como unión numerable de conjuntos de medida de Lebesgue finita, concluimos que la medida de Hausdorff de \mathbb{R}^n , y por tanto de cualquier subconjunto suyo, es 0 para dimensiones superiores a 0. C.Q.D.□

El teorema anterior motiva la siguiente definición.

Definición 28 Se llama *dimensión de Hausdorff* de $A \subset \mathbb{R}^n$ a:

$$s = \inf \{t : H^t(A) = 0\}$$

Este concepto amplía la dimensión de semejanza antes definida. El matemático australiano J. Hutchinson desarrolló en 1981 una teoría de autosemejanza con una definición menos restrictiva que la vista aquí, pues admite que las copias semejantes sean de razones distintas, y además se solapen en subconjuntos de medida 0 en la dimensión del conjunto total. En los fundamentos de su teoría, Hutchinson generaliza el concepto de dimensión de semejanza anteriormente expuesto, y demuestra su coincidencia con la dimensión de Hausdorff.

En la actualidad, la autosemejanza de Hutchinson es uno de los campos de mayor investigación en Geometría Fractal.

El teorema 23 y la definición 24 proporcionan el contexto natural para estudiar las propiedades métricas de conjuntos que escapan a los límites de la Geometría Diferencial, estableciendo el marco de trabajo adecuado para la Geometría Fractal.

55.6 La Geometría Fractal en la naturaleza

55.6.1 Los trabajos de Mandelbrot

A finales del siglo XIX y principios del XX, según se iban estableciendo las bases de la Teoría Geométrica de la Medida, fueron muchos los matemáticos que centraron su trabajo en la búsqueda de conjuntos de propiedades extrañas, como los citados anteriormente, pretendiendo evidenciar que el formalismo matemático llevaba a definiciones no adecuadas para el concepto intuitivo que se pretendía definir.

No obstante, en general se consideró que tales ejemplos no eran sino artificios ajenos a la realidad, que nada aportaban al verdadero desarrollo de la ciencia. Incluso Hermite, uno de los más reconocidos matemáticos del momento, llegó a calificar de “plaga lamentable” la proliferación de construcciones que consideraba absurdamente patológicas.

Esta concepción cambió radicalmente para gran parte de la comunidad científica a raíz de los trabajos de Benoît B. Mandelbrot, que provocaron la rápida expansión de la Geometría Fractal en la década de los 80.

Mandelbrot, en su obra de 1977 “The Fractal Geometry of Nature”, descubrió que tales ejemplos de conjuntos patológicos podían considerarse modelos adecuados para describir situaciones reales muy variadas y de gran interés científico y práctico. Resumimos a continuación algunas de sus ideas:

Introducción

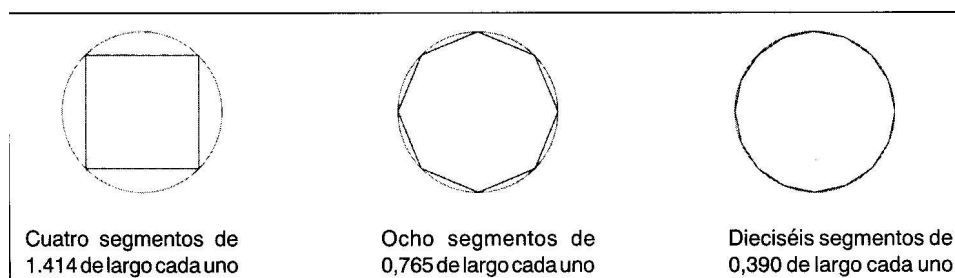
En los fractales, de lo que se trata es de mirar con detenimiento y llegar a ver algo más. En ellos, se concentran protuberancias que, de por sí, tienen protuberancias, agrietamientos con corvaduras dentro de corvaduras, y átomos que resultan ser universos. Los fractales tienen mucho que ver con la rica estructura de nuestro universo, que abarca todas las escalas, desde las incontables galaxias

que se hallan a distancias inimaginables, hasta los misteriosos destellos eléctricos y vibraciones internas del campo subatómico. Veamos cómo mirar más de cerca los resultados en los fractales.

¿Cuánto mide la costa de Bretaña?

Esta pregunta, aparentemente sencilla, plantea un importante problema y nos da la oportunidad de profundizar en la pregunta “¿Qué es un fractal?”

Piense cómo hallar la longitud aproximada del “litoral” de un círculo de radio 1. Estamos seguros que recordará cómo calcularlo, de la geometría que dio en bachillerato: utilizando la fórmula para hallar la circunferencia de un círculo. Esto es 2π ó 6,28 aproximadamente. Podríamos llegar a un resultado parecido, inscribiendo un cuadrado dentro del círculo y estimando que la circunferencia del círculo es la suma de los lados del cuadrado, como aparece en la figura siguiente:



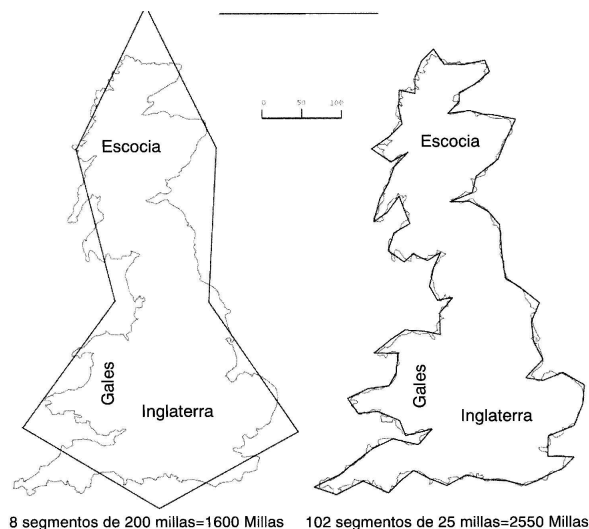
Si los resultados no se ajustan lo suficiente, todo lo que deberá hacer será crear un polígono con más caras. La circunferencia de un polígono inscrito se va acercando, cada vez más, a un valor límite, que resulta ser la circunferencia “real”.

Este procedimiento, matemáticamente correcto y evidentemente claro, sirve en muchos más casos generales que el que ilustra este ejemplo. La estimación de las distancias de las curvas, hallando una aproximación de las mismas mediante líneas rectas, es un método probado y efectivo, que los topógrafos emplean cuando llevan a cabo mediciones de terreno. Imagine la cara de un polígono como un gigantesco segmento de medida. Si la curva que está siendo medida “se comporta bien”, es decir, es continua y homogénea, el resultado puede ajustarse tanto como se desee, haciendo los segmentos de medida aproximada más y más pequeños.

Es de suponer, por tanto, que esta misma lógica puede utilizarse para hallar la longitud de la costa de Bretaña. ¿O no?

Intentemos el mismo truco sobre un mapa de Bretaña, utilizando 200 instrumentos de medida y una distancia de 25 millas. La figura siguiente muestra las aproximaciones del instrumento de medida sobre un mapa de Bretaña, y los

resultados numéricos.



Lo que resulta extraño es que, según se va haciendo más pequeño el instrumento de medida, la estimación de la costa parece aumentar mucho más de lo que imaginábamos al hacer la aproximación de la circunferencia. ¿Qué ocurre?

No resulta difícil averiguar dónde radica la dificultad. La costa de Bretaña es muy irregular, al encontrarse llena de todo tipo de bahías, grandes y pequeñas, ensenadas, diminutos ríos, y rocosas costas de gran complejidad. Un instrumento de medida bastante largo no se dobla con tantos recodos y curvas, y corta directamente sobre estos. Un instrumento de medida más pequeño se ajusta perfectamente en cada uno de estos recovecos y bahías, incrementando, de este modo, el cálculo aproximado de la longitud. Imagine hacer este ejercicio a gatas, midiendo la costa de Bretaña con un regla de una pulgada de largo. Cada pequeña roca que rodeara aumentaría su cálculo aproximado de la costa. ¡El resultado de su estimación sería astronómico!

Existe una diferencia fundamental entre una curva como un círculo y otra como la costa de Bretaña. La diferencia separa las formas de la geometría clásica, también denominada euclídea, de las de la geometría fractal.

Las montañas como fractales

¿Se ha dado cuenta alguna vez de lo difícil que resulta calcular la distancia que hay hasta una lejana montaña? Las colinas próximas y las montañas que uno ve a lo lejos tienen una apariencia muy similar. Una montaña es, por lo tanto, un fractal. Su escabrosidad es la misma a distintas escalas. De hecho, la característica fractal de las colinas y las montañas resulta ser, rápidamente, algo bastante práctico para un excursionista. Una caminata de dos horas hacia la cima puede convertirse en todo un día atravesando barrancos y cañones que de lejos resultaban imperceptibles. Lo divertido de trepar por rocosas laderas

se debe, en parte, a que la dimensión fractal de la montaña se aplica a todas las escalas, incluyendo la escala del ser humano. La figura 2.4 muestra una cordillera de montañas cubiertas de nieve, vista desde el transbordador espacial. El límite de las nieves perpetuas marca las lindes de rotura de los barrancos, constituyendo una dimensión fractal y un modelo increíblemente parecido a algunos de los fractales generados por ordenador de los que hablaremos más adelante.



Figura 2.4. Las montañas cubiertas de nieve son fractales desde el espacio

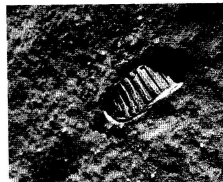


Figura 2.5. Huella en la luna

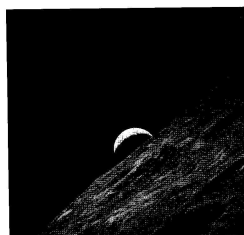


Figura 2.6. Salida de la tierra

Un buen ejemplo de fractal lo encontramos en la memorable imagen de la huella en la Luna (véase figura). Junto a la huella puede apreciarse la pedregosa corteza de la superficie lunar. Contemple ahora la vista de la Tierra, elevándose ante sus ojos, y la Luna (véase figura). Aunque esta imagen es más conocida por su excelente vista de la Tierra, fíjese en el paisaje lunar y compárelo con la superficie lunar de la imagen de la huella. Quite la huella de la imagen y la superficie de la Luna, vista a una distancia de dos pies, parecerá un paisaje lunar visto a doscientas millas de distancia. Cuando una diminuta parte de un fractal se asemeja a todo su conjunto, decimos que el fractal es autosimilar o autosemejante. Recuerde que aunque un objeto autosimilar es, por lo general, un fractal, no todos los fractales son autosimilares. Aunque un fractal se define por una irregularidad que ha de existir a todas las escalas, esta irregularidad no necesita tener siempre el mismo aspecto.

Las olas como fractales

No hace demasiado tiempo, antes de que la investigación sobre la turbulencia (complejos movimientos de aire o líquidos) hubiera avanzado, se creía que las ondulaciones sobre la superficie de un lago se repartían uniformemente. Puede constatar que esto no es cierto y que el patrón de las ondas es absolutamente desigual, observando más de cerca una masa de agua en un día de viento. En la superficie de un lago siempre hay zonas en calma. Aunque pudieran ser

menos en un día de viento, y más en un día de calma, éstas siempre están ahí. Si observa detenidamente las zonas rugosas de la superficie (las zonas llenas de pequeñas olas), comprobará que éstas no son completamente “rugosas” y que contienen pequeñas zonas vítreas en calma. La superficie de un lago es sumamente compleja, hallándose compuesta de un patrón anidado de zonas en calma y zonas de agitación que se prolonga cuanto más nos acercamos. Esta mezcla de calma y agitación anidada es una característica de los fractales. En definitiva, podemos afirmar que la superficie de un lago tiene dimensión fractal.

El sistema circulatorio humano

La sangre fluye desde el corazón por arterias y regresa a éste por venas. Pero ¿qué sucede entre medias?. Las arterias y las venas se encuentran comunicadas por una red de vasos sanguíneos cada vez más pequeños, que sucesivamente se bifurcan hasta finalmente encontrarse en capilares microscópicos. Un estupendo artículo del Scientific American de Febrero de 1990, titulado “Chaos and Fractals in Human Physiology”, describe e ilustra gráficamente este fenómeno. Los patrones de ramificación son una cualidad característica de algunos fractales.

Helechos fractales

Un ejemplo más común de ramificación fractal podemos encontrarlo en el reino vegetal. Los árboles, arbustos y flores, se desarrollan con un patrón de expansión de bifurcaciones de claro carácter fractal. La figura siguiente muestra un helecho fractal generado por ordenador, basado en un esquema, aparentemente sencillo, de simetría y autosimilitud. (El helecho fue creado utilizando Fractint).



El tiempo: Fractales caóticos

Algunos de los más potentes superordenadores ejecutan complicados modelos matemáticos, en un intento de mejorar los partes meteorológicos, si bien los resultados obtenidos hasta el momento no han pasado de ser mediocres. Una importante inversión en la potencia de proceso de datos de la máquina tan sólo posibilita una predicción muy ajustada en el tiempo. Esto no se debe a ningún fallo en el funcionamiento de la máquina o a una incapacidad por parte de los matemáticos, y sí, más bien, al caos de las fuerzas subyacentes en los fenómenos meteorológicos. La meteorología es como el flujo de agua de las cataratas del Niágara. Si uno lanza una hoja desde lo alto de las cataratas, ¿dónde se encontrará ésta unos minutos más tarde? Mientras que un ordenador personal puede fácilmente proyectar la órbita de la nave espacial Voyager más allá del Sistema Solar, ni el más enorme superordenador sería capaz de predecir con exactitud la trayectoria de nuestra desventurada hoja. Esta es la diferencia entre los sistemas dinámicos de “buen comportamiento y los caóticos”.

Los fenómenos meteorológicos son un magnífico ejemplo de sistema dinámico. Existen momentos de relativa calma y previsibilidad, como las superficies de calma en un lago agitado.

Pero, como sabe cualquiera que haya visto una predicción meteorológica en televisión, siempre existen frentes en movimiento, zonas de bajas presiones con enormes brazos espirales desplazándose lentamente hacia el este, y huracanes formándose en el golfo.

Las imágenes obtenidas por satélite de los fenómenos meteorológicos, forman ya parte de nuestra cultura. Éstas imágenes poseen una cierta belleza y, desde nuestra perspectiva actual, un definido carácter fractal.

Si el hombre del tiempo pudiera hacer un zoom sobre una imagen de satélite, el público se vería obsequiado con una sucesión de imágenes igualmente ricas en detalles. Por ejemplo, las zonas de bajas presiones a una escala más reducida, darían paso a una imagen que identificaría los torbellinos que se dan alrededor de su ciudad.

Las imágenes de satélite pueden considerarse una representación gráfica de las caóticas fuerzas dinámicas de la meteorología. Ya tenemos, pues, otra ruta hacia los fractales: las imágenes caóticas.

55.6.2 El conjunto de Mandelbrot

Definiciones y propiedades

El conjunto de Mandelbrot se representa por \mathcal{M} y se define como sigue:

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : z_0 = 0, z_{n+1} = z_n^2 + c \text{ está acotada}\}$$

o lo que es lo mismo \mathcal{M} está formado por todos los puntos $c \in \mathbb{C}$ tales que la órbita de z_0 (semilla) bajo la iteración de $z_{n+1} = z_n^2 + c$ no escapa a infinito.

Criterio de escape: $\mathcal{M} \subset \overline{D}(0, 2)$

Propiedades:

- (1) \mathcal{M} no es autosemejante
- (2) \mathcal{M} es conexo (Hubbard)
- (3) \mathcal{M} tiene dimensión fractal 2 (Shishikura, 1991)

El conjunto de Mandelbrot cobra vida: colores de tiempo de escape

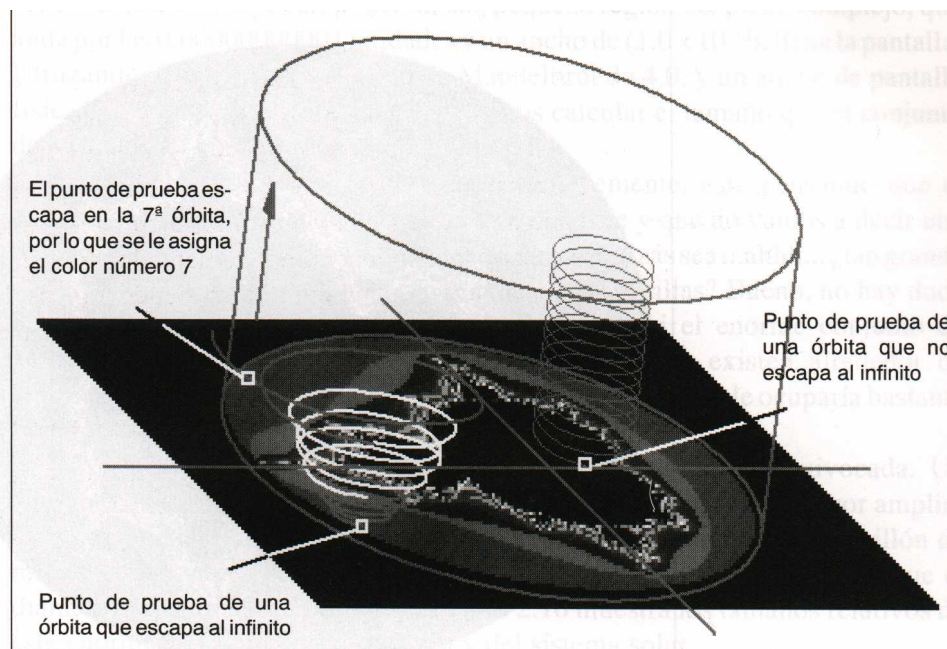
Aunque nuestro esquema de colores en blanco y negro para cada punto de prueba funciona bien y proporciona una bella imagen, existe una mejora más que añadir a un fractal de tiempo de escape para dar un toque adicional de belleza: el color.

Como ya hemos visto, el conjunto de Mandelbrot se define como el conjunto de puntos que no escapan de un círculo de radio 2, bajo la iteración de la fórmula $z_{n+1} = z_n^2 + c$. Y hemos visto que una imagen del conjunto de Mandelbrot puede hacerse con dos colores, uno para los colores del conjunto, y otro para los que están fuera de este.

Una variante coloreada de esta imagen puede conseguirse coloreando los puntos que no se encuentran en el conjunto de Mandelbrot, los que escapan del círculo, según el tiempo que tarde la órbita en escapar (“tiempo” = “número de órbitas”). Podemos utilizar el número de iteraciones para controlar el color final del pixel del punto de prueba. Así pues, si el punto de prueba escapara sólo en unas cuantas iteraciones, el color podría ser rojo, mientras que si este hecho se diera en muchas iteraciones, podría colorearse de azul.

La figura siguiente muestra una visión más gráfica de cómo funciona el color de tiempo de escape. La parte inferior del diagrama muestra las dos dimensiones, tan familiares para nosotros, del plano complejo, con dos puntos, a y b , designados para probar y colorear respectivamente. El eje vertical representa el

número de veces que la fórmula se itera.

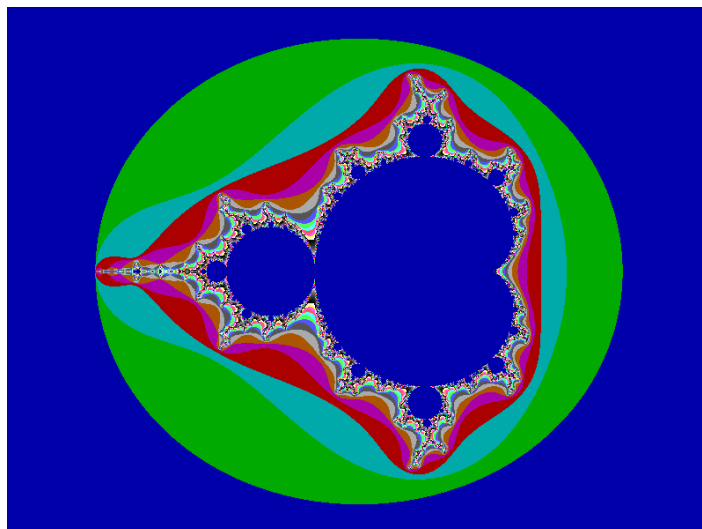


Imagine que el círculo de escape de radio 2 es como un cilindro que es forzado a alcanzar la tercera dimensión, con los valores de iteración de la escala vertical de colores. El grado de verticalidad alcanzado cuando la órbita escapa del cilindro, sirve para colorear el pixel puesto a prueba, de acuerdo con el color que corresponde a ese nivel. En nuestra figura, mostramos cómo el punto de prueba a forma una espiral que no llega nunca a escapar, por lo que que es coloreado de

El punto de prueba escapa en la 7ª órbita, por lo que se le asigna el color número 7 - Figura Siguiende. El color de tiempo de escape del conjunto de Mandelbrot "color interior" (azul en Fractint). El punto de prueba b forma una órbita que escapa en la 7a iteración, así es que se le asigna el color número 7. El efecto global de este esquema de colores divide el fractal de Mandelbrot en bandas que recuerdan a los arrozales en terrazas de la ladera de una montaña china. Cada banda representa una zona en donde las órbitas comenzaron con puntos en tales bandas, escapando en la misma iteración. Cerca del "borde del lago" del conjunto de Mandelbrot, estas bandas se hacen cada vez más irregulares y curvadas.

Las espectaculares franjas del conjunto de Mandelbrot, renderizadas con color de tiempo de escape, no deberían confundirse con el propio conjunto. Matemáticamente, el conjunto de Mandelbrot está compuesto de la sólida zona del lago coloreada. Las franjas llenas de colorido son puntos que se encuentran cerca del conjunto de Mandelbrot. Sin embargo, esta apreciación no siempre se hace, y es habitual considerar que el conjunto de Mandelbrot abarca toda la

imagen coloreada, lago y franjas.



55.6.3 ¿Qué uso práctico podemos dar a los fractales?

La segunda pregunta más habitual sobre fractales, tras “¿Qué son?”, es algo parecido a “¿Qué uso tienen en este mundo?”. Aunque indudablemente es una pregunta razonable, en cierto modo nos resulta irritante. Imagine que viaja a París para ver la Mona Lisa en el Louvre y que alguien le pregunta “Bonita, pero... ¿Para qué sirve?”. Veamos.

Educación matemática

Los fractales son educativos porque ilustran visualmente muchos conceptos matemáticos básicos y crean el vehículo perfecto para desafiar visualmente a las personas orientadas con esos conceptos. Aunque la valoración de las imágenes gráficas no puede sustituir al aprendizaje de los fundamentos abstractos de las matemáticas, la curiosidad por las espectaculares imágenes fractales puede llegar a motivar a un estudiante a escarbar en textos de matemáticas, en busca de los conceptos abstractos responsables de tal derroche visual.

Entre las disciplinas matemáticas afines a los fractales se hallan el Álgebra, la Geometría, los Números Complejos y el cálculo matemático. Los fractales resultan un tema excelente para trabajos de matemáticas de bachillerato e incluso de secundaria. Entre los temas de nivel universitario que están relacionados con los fractales se encuentran el Análisis Complejo, la Teoría de Medida y el estudio de los Sistemas Dinámicos.

Interpretación de los sistemas dinámicos caóticos mediante fractales

Aunque rara vez nos hemos parado a pensar en ello, la vida de una persona en nuestra complicada sociedad depende por completo de los sistemas dinámicos naturales y artificiales. Como ya se ha dicho anteriormente, un sistema dinámico es una colección de partes que interactúan entre sí y se modifican unas a otras a través del tiempo. Algunos ejemplos son: los sistemas de poder, el sistema meteorológico, los sistemas informáticos, las economías nacional e internacional, e incluso el ecosistema planetario. Decimos que los sistemas dinámicos pueden presentar comportamientos estables o caóticos. Aunque pudiera parecer que la palabra “caótico” esconde ciertas connotaciones negativas, no necesariamente es algo malo. Cuando uno asa un malvavisco ante una fogata, atravesando con los ojos las volutas de humo que se elevan al cielo girando, uno observa un sistema dinámico caótico formado por el aire, el fuego y la madera. Este tipo de caos es un placer, no un problema. Pero cuando las interrelaciones caóticas en los sistemas de poder provocan bloqueos, sí resultan algo malo (a pesar de que algunos criminales discrepen de esta apreciación). Los útiles algoritmos informáticos (ecuaciones) son, en ocasiones, estables para algunas entradas numéricas pero presentan un comportamiento caótico para otras. Este es un concepto que es importante entender: ciertas fórmulas “estallan” y, a veces, actúan impredeciblemente. Si un algoritmo como éste se utiliza para calcular la posición de una nave espacial justo antes de su reentrada, la experiencia de la parte caótica del algoritmo pudiera acarrear serias consecuencias.

Como ya hemos visto en el ejemplo del sistema meteorológico que hemos planteado, los fractales guardan una estrecha relación con el caos. De hecho, muchos fractales generados por ordenador se crean, precisamente, aplicando algoritmos de buen comportamiento en las partes en donde presentan un comportamiento caótico. Aunque el estudio de los fractales no puede ayudar demasiado, sí puede aumentar nuestro conocimiento acerca del comportamiento caótico de los sistemas dinámicos. Es más, la teoría de los fractales pudiera no sólo servirnos para predecir el tiempo. También puede ayudarnos a comprender los límites de nuestra capacidad de predicción.

Compresión de imágenes

Pasemos ahora, del caos y el tiempo, a analizar una aplicación de los fractales en informática.

La mayor parte de los usuarios de ordenadores personales se han encontrado alguna vez con programas de utilidad de compresión como ARJ y PKZIP, que permiten almacenar archivos de ordenador en una forma muy compacta. Estos programas de compresión aprovechan la redundancia del esquema de bits que constituyen su archivo. Dado que las imágenes gráficas consumen gran cantidad de espacio en disco, la necesidad de esta clase de compresión de archivos se hace fundamental a la hora de almacenar imágenes. Por ejemplo, uno de los nuevos adaptadores gráficos “super” VGA puede visualizar una imagen de 1024 pixels de ancho por 768 pixels de alto (los pixels son los pequeños puntos que forman

una imagen en la pantalla de un ordenador). Puesto que cada uno de estos pixels puede ser cualquier color entre 256, se necesitará un espacio de 8 bits (o 1 byte) para almacenar el color de cada pixel. Multiplique, y comprobará que para almacenar una imagen gráfica con esa resolución de pantalla, se necesitan 786.432 bytes. Esta imagen se llevará, sin duda, la mejor parte de un disco flexible de alta densidad. Tras llevar a cabo la compresión (con PKZIP, por ejemplo), la misma imagen puede almacenarse, a menudo, en menos de la mitad de espacio.

Aunque los fractales son imágenes complejas, lo que resulta asombroso es que, en muchos casos, pueden ser representadas por sencillas ecuaciones que consumen muy poco espacio. En algunos casos, es posible identificar los patrones de autosimilitud en una imagen de gráficos y comprimir la imagen almacenada, describiendo la autosimilitud en lugar de dibujar la imagen. Llevando este concepto un poco lejos, considere la posibilidad de llevar a cabo la identificación de los patrones de autosimilitud en cualquier imagen de gráficos y comprimir el almacenamiento, representando las imágenes con las reglas de generación de las fractales. Imagine lo potente que pudiera resultar una técnica así, reduciendo enormes cantidades de información a una sencilla fórmula compuesta de cinco o seis caracteres. MICHAEL BARNSLEY ha formado una empresa que se halla inmersa en una arriesgada operación comercial basada en la idea de la compresión de imágenes de gráficos. Las técnicas de compresión fractal pueden reducir el tamaño de una imagen hasta 100 veces, reduciendo megabytes de ficheros a decenas de kilobytes.

La posibilidad de comprimir y descomprimir imágenes es una de las claves para las nuevas aplicaciones multimedia. Si una sola imagen de alta resolución ya ocupa casi un megabyte de espacio en disco, piense que un minuto de video a movimiento completo de alta definición, ejecutando 30 frames por segundo, necesitaría 1800 veces más espacio, o casi un gigabyte (¡mil millones de bytes!). Las técnicas de compresión fractal resultan perfectas allí donde está esa revolución tecnológica que trae consigo animación, video y sonido a su ordenador.

Simulación generada por ordenador

Otra aplicación de los fractales con la que muy probablemente se halla topado, es la simulación generada por ordenador. Los efectos especiales del cine constituyen toda una industria que hace uso de un importante número de tecnologías distintas, que van desde los trabajos de animación hasta los modelos en miniatura. Ya hemos hablado del gran número de objetos naturales, desde montañas hasta planetas, que poseen naturaleza fractal. Con la llegada de las estaciones de trabajo de gráficos de alta resolución, resulta posible generar, mediante fórmulas fractales, imágenes por ordenador de montañas, arboles, bosques y flores de gran realismo. En la película Star Trek, todo el planeta Genesis era un paisaje fractal generado por ordenador. El juego de ordenador Starflight fue también pionero en el uso de los planetas fractales. Para la gente, las imágenes generadas por ordenador poseen una cualidad mecanicista, debida quizás al hecho de que las más populares herramientas para pintar y dibujar vienen equipadas

con un repertorio de formas regulares como líneas, círculos y cuadrados. Pero si el artista por ordenador puede completar éstas con herramientas que creen formas fractales con aspereza, textura, ramificación y nubosidad, entonces ese sentimiento mecanicista será sustituido por lo desenfadado del mundo natural.

Un nuevo medio artístico

Los fractales representan una oportunidad para que los artistas utilicen el ordenador como un nuevo medio para canalizar su creatividad. Los fractales aparecen en las portadas de libros, en papel pintado, en calendarios, en tarjetas de felicitación, en diseños textiles y en las obras de una galería de arte. El uso de los fractales en el arte no es nuevo. Artistas, desde Van Gogh a Escher, han incorporado diseños y texturas fractales en sus trabajos. La diferencia es que los primeros artistas utilizaron pincel y cúter de madera, mientras que hoy en día una nueva generación de artistas ha incorporado el ordenador en su juego de herramientas.

¡Los fractales son entretenidos!

Con independencia de que cada día resulte más fácil sostener la teoría de que los fractales son poco menos que importantes, de algún modo todas las pruebas que fundamentan la utilidad de estos y que se mencionaron en las secciones anteriores, no son del todo ciertas. Las personas adaptadas visualmente (que disfrutan del color, la textura y los diseños), sentirán, por naturaleza, una especial atracción por los fractales. Las que, además de imaginación visual, tengan curiosidad por las matemáticas (sin importar lo poco que realmente las hayan estudiado), sentirán una irresistible atracción por ellos. Si también tiene una cierta inclinación filosófica e interés por los gráficos por ordenador, entonces ¡usted y los fractales están hechos el uno para el otro!

La primordial aplicación práctica de los fractales es, sin duda, el puro placer de explorar, crear, colorear, diseñar, modificar y contemplar imágenes fractales.

55.6.4 Críticas al trabajo de Mandelbrot y respuestas a las mismas

El trabajo de Mandelbrot ha estado acompañado desde sus primeras publicaciones de una fuerte polémica. Por un lado, se ha criticado su enfoque en exceso empírico y falto de fundamentación teórica, y por otro, se ha argumentado que al ser el paso al infinito de una iteración lo que otorga sus propiedades fractales a los conjuntos generados, los fractales no pueden existir en la naturaleza.

La respuesta a la primera crítica se han encargado de darla sus colaboradores y discípulos. Es cierto que el trabajo de Mandelbrot se basa más en recopilación de datos y experimentos con ordenador que en demostraciones de teoremas rigurosas desde un punto de vista formal, pero no lo es menos que la mayoría de sus aportaciones han sido complementadas posteriormente con una arquitectura matemática sólida.

Sobre la segunda polémica, si bien sigue abierta, parece que la postura más extendida es que los fractales deben entenderse como modelos matemáticos, al igual que los números reales, las esferas o las ecuaciones de onda. Así, si alguien considera que en la realidad no existen fractales y por tanto es absurdo hablar de la dimensión fractal de una costa, puede tener razón si admite que igual de absurdo es hablar del diámetro de la Tierra (Miguel de Guzmán, 1993).