1 Els polinomis de Taylor

Un aspecte important en l'estudi de les funcions és l'aproximació per polinomis, pel fet que en certa forma els polinomis són les funcions més senzilles que hi ha. El nostre objectiu serà, donada una funció real f definida en un interval obert $I \subset \mathbb{R}$ i un punt $a \in I$, trobar quins són els polinomis que millor aproximen f en un entorn de a, sota certes condicions. Donem una definició formal d'aquest concepte de "bona aproximació":

Definició. Direm que dues funcions f i g tenen un *ordre de contacte superior a n en a* si $f(x) - g(x) = o((x-a)^n)$ quan $x \to a$, és a dir, si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Dit d'una altra manera, $f(x) - g(x)$ és un infinitèsim d'ordre superior a $(x-a)^n$ quan $x \to a$. Per exemple, si $g(x) = mx + b$ és una funció afí, dir que f i g tenen un ordre de contacte superior a 1 en $x = a$ equival a dir que la gràfica de g és la recta tangent a la gràfica de f en $x = a$.

Tal com hem dit, donada una funció f definida en I, un punt $a \in I$ i un $n \in \mathbb{N}$, anem a trobar quins són els polinomis de grau menor o igual que n que tenen un ordre de contacte amb f superior a n en a. Primer de tot provem que un polinomi així, en cas d'existir, és únic:

Teorema. *Sigui $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$. Si existeix un polinomi de grau més petit o igual que n que té en el punt a un ordre de contacte amb f superior a n, és únic.*

Demostració. Siguin $p_n(x)$ i $q_n(x)$ dos polinomis de grau menor o igual a n tals que $f(x) - p_n(x) = o((x-a)^n)$ i $f(x) - q_n(x) = o((x-a)^n)$ quan $x \to a$. Llavors $p_n(x) - q_n(x)$ és un polinomi de grau més petit o igual que n i també $p_n(x) - q_n(x) = o((x-a)^n)$ quan $x \to a$. Si escrivim

$$p_n(x) - q_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n,$$

el fet que això sigui $o((x-a)^n)$ implica, en particular, que és $o(x-a)$, és a dir, és un infinitèsim quan $x \to a$, de manera que ha de ser necessàriament $a_0 = 0$. Llavors tenim que $p_n(x) - q_n(x) = a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n = o((x-a)^n)$, $x \to a$, o de forma equivalent, que $a_1 + \ldots + a_n(x-a)^{n-1} = o((x-a)^{n-1})$, $x \to a$, de manera que $a_1 = 0$. Reiterant el procés, trobem que tots els a_i són zero, això és, $p_n(x) = q_n(x)$. $\square$

Vist això, el següent resultat ens donarà una condició suficient per a l'existència d'un polinomi així, i ens dirà com és aquest polinomi. La demostració fa servir la *regla de l'Hôpital*, que enunciem sense demostració:

Teorema (regla de l'Hôpital). *Siguin f, g dues funcions derivables en (a, b) on $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ i $g'(x) \neq 0$ en tot x. Suposem que:*

- *existeix* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,
- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ *o bé* $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

Aleshores

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

i tenim un resultat anàleg per a $x \to b$.

Teorema. *Sigui $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció $n-1$ vegades derivable en I, tal que $f^{(n-1)}$ sigui derivable en $x = a$. Llavors, el polinomi*

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

té en el punt a un ordre de contacte amb f superior a n. Aquest polinomi s'anomena polinomi de Taylor de f en a d'ordre n.

Demostració. Cal provar que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Aplicant $n-1$ cops la regla de l'Hôpital, veiem que si existeix el límit

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - p_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - (f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)(x-a))}{n!(x-a)}$$

aleshores existeix l'anterior (amb derivades d'ordre $n-2$) i són iguals. Ara bé, que aquest límit existeixi i valgui zero és justament la hipòtesi que $f^{(n-1)}$ sigui derivable en a. Cal notar que sempre estem en les hipòtesis per poder aplicar la regla de l'Hôpital, perquè

$$\lim_{x\to a} f^{(k)}(x) - p_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(a) - p_n^{(k)}(a) = 0$$

per a tot $k = 0, \ldots, n-2$, ja que $f^{(k)}$ és contínua en ser derivable, i totes les derivades de $p_n(x)$ i de $f(x)$ coincideixen fins a ordre n. D'altra banda, és evident que, també, totes les derivades de $(x-a)^n$ fins a ordre $n-1$ tenen límit zero quan $x \to a$. $\square$

2 Càlcul de la resta de Taylor

En aquesta secció donarem expressions simples de la diferència entre la funció $f(x)$ i el polinomi de Taylor d'ordre n. Aquesta diferència és la que anomenem *resta de Taylor d'ordre* n, i la notem per $R_n(x,a)$.

Teorema (fórmula de Taylor). *Sigui f una funció $n+1$ vegades derivable en I. Aleshores, per a $a, x \in I$ es compleix*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x,a)$$

on la resta de Taylor $R_n(x,a)$ és una funció que pot expressar-se de les següents formes:

a. ***Resta de Lagrange:*** *existeix un punt c en l'interior de l'interval determinat per x i a tal que*
$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

b. ***Resta de Cauchy:*** *existeix un punt c en l'interior de l'interval determinat per x i a tal que*
$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-a)(x-c)^n.$$

c. ***Resta integral:*** *si $f^{(n+1)}$ és integrable en l'interval determinat per x i a, llavors*

$$R_n(x,a) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt.$$

DEMOSTRACIÓ. Considerem x fix i construïm la funció

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Observem que $F(x) = 0$, $F(a) = R_n(x,a)$ i que

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Si ara considerem una funció g contínua en l'interval tancat definit per a i x, derivable en l'interior i tal que g' no s'anul·li (i, en particular, gràcies al teorema de Rolle tindrem també que $g(x) \neq g(a)$), estem en condicions d'aplicar el teorema del valor mitjà de Cauchy per a les funcions F i g: hi haurà un c entre a i x tal que

$$\frac{F(x) - F(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{F'(c)}{g'(c)}.$$

Si substituïm $F(x)$, $F(a)$ i $F'(c)$ segon el que hem calculat més amunt, obtenim

$$R_n(x, a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n \frac{g(x) - g(a)}{g'(c)}.$$

En particular, si prenem $g(t) = (x - t)^{n+1}$, tenim que $g(x) = 0$, $g(a) = (x - a)^{n+1}$ i $g'(c) = -(n + 1)(x - c)^n$, de manera que

$$R_n(x, a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n \frac{-(x - a)^{n+1}}{-(n + 1)(x - c)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1},$$

que correspon a l'expressió de la resta de Lagrange. Si prenem $g(t) = x - t$, tenim $g(x) = 0$, $g(a) = x - a$ i $g'(c) = -1$, per tant

$$R_n(x, a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n \frac{-(x - a)}{-1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - a)(x - c)^n,$$

corresponent a l'expressió de la resta de Cauchy. Finalment, si $f^{(n+1)}$ és integrable sobre l'interval definit per a i x, el teorema fonamental del càlcul ens diu que

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)dt \;\Rightarrow\; R_n(x, a) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n \, dt. \qquad \square$$

3 Aplicacions dels polinomis de Taylor

3.1 Convergència de la sèrie de Taylor i aproximació de nombres

Si f és una funció indefinidament derivable, podem considerar-ne polinomis de Taylor de grau arbitràriament gran. Obtenim llavors la sèrie de potències

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n,$$

anomenada *sèrie de Taylor de f en a*. El fet que f sigui indefinidament derivable en a no garanteix que sigui igual a la seva sèrie de Taylor en un entorn de a. Per exemple, es pot demostrar que la funció definida per $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ i $f(0) = 0$ és indefinidament derivable en $x = 0$ i $f^{(n)}(0) = 0$ per a tot n. Llavors, la seva sèrie de Taylor és idènticament nul·la, i per tant no coincideix amb f en cap entorn de 0. Si recordem que $f(x) = p_n(x) + R_n(x, a)$, una condició necessària i suficient perquè això passi és que $\lim_{n\to+\infty} R_n(x, a) = 0$ per a tot x de l'entorn de a que estiguem considerant. Per exemple, si es compleix que $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$ per a una certa M i per a tots els x de l'entorn, llavors les restes de Taylor $f^{(n)}(c)(x-a)^n/n!$ tendeixen a 0 perquè l'infinit exponencial és d'ordre inferior que l'infinit factorial.

Quan sabem que les restes de Taylor tendeixen a zero, podem aproximar valors de $f(x)$ mitjançant la seva sèrie de Taylor. A tall d'exemple, veiem com s'hauria de procedir per calcular una aproximació del nombre e amb un error més petit que 10^{-4}. Prenent $f(x) = e^x$, per a tot n tenim $f^{(n)}(x) = e^x$, i llavors la fórmula de Taylor amb resta de Lagrange aplicada a $f(x)$ al voltant de $a = 0$ és

$$e^x = p_n(x) + R_n(x, 0) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},$$

amb c entre 0 i x. Per calcular una aproximació al nombre e, avaluem aquesta expressió en $x = 1$:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!},$$

amb $c \in (0, 1)$. Llavors podem fitar $e^c < 3$ i imposar que la resta de Taylor sigui inferior a 10^{-4}:

$$\frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-4} \;\Rightarrow\; (n+1)! > 30\,000,$$

i n'hi ha prou amb prendre $n = 7$. Per tant, la suma $1 + 1/1! + 1/2! + \ldots + 1/7!$ aproxima el nombre e amb un error inferior a 10^{-4}.

3.2 Obtenció de desigualtats

La fórmula de Taylor és útil per provar certes desigualtats. Per exemple, anem a demostrar que $\cos x \geq 1 - x^2/2$ per a tot $x \in \mathbb{R}$. La fórmula de Taylor de $\cos x$ al voltant de $a = 0$ fins a ordre 2 amb resta de Lagrange ens diu que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\sin c}{3!}x^3$$

per a algun c entre 0 i x. Si $|x| \leq \pi$, $\sin c$ i x^3 tenen el mateix signe, i per tant $\cos x - (1 - x^2/2) \geq 0$ per a $|x| \leq \pi$. D'altra banda, si $|x| > \pi$ llavors

$$1 - \frac{x^2}{2} < 1 - \frac{\pi^2}{2} < 1 - \frac{9}{2} < -1 \leq \cos x,$$

i per tant la desigualtat és certa per a tot x.

3.3 Càlcul de límits

A vegades, a l'hora de calcular certs límits ens trobem amb indeterminacions que, si bé podem resoldre aplicant la regla de l'Hôpital diverses vegades, es resolen immediatament amb la fórmula de Taylor. Per exemple,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=\frac{1}{6}.$$

3.4 Estudi local de funcions

Si una funció és prou vegades derivable en l'entorn d'un punt, podem arribar a dir amb gran exactitud, gràcies a la fórmula de Taylor, quina és la forma de la seva gràfica al voltant d'aquest punt. Veiem primer unes definicions:

Definició. Direm que una funció f té en el punt a de l'interior de I un *màxim relatiu* (resp. *mínim relatiu*) si existeix un entorn V de a tal que $f(x)\le f(a)$ (resp. $f(x)\ge f(a)$) per a tot $x\in V$. Un màxim o mínim relatiu s'anomena *extrem relatiu* de f.

Definició. Sigui f derivable en a. Diem que f és *convexa en a* (resp. *còncava en a*) si existeix un entorn V de a tal que $f(x)-(f(a)+f'(a)(x-a))>0$ (resp. <0) per a tot $x\in V$, $x\neq a$, això és, si en un entorn de a la gràfica de f queda per sobre (resp. per sota) de la recta tangent a f en a. Diem que a és un *punt d'inflexió de f* si existeix un entorn V de a tal que $f(x)-(f(a)+f'(a)(x-a))$ és positiu quan $x<a$ i negatiu quan $x>a$, o a l'inrevés. És a dir, si a és un punt d'inflexió, la recta tangent a f en a travessa la gràfica de f.

Teorema. *Sigui f una funció derivable en un entorn d'un punt a i suposem que f' és derivable en a, això és, que existeix $f''(a)$. Llavors, si $f''(a)>0$ (resp. $f''(a)<0$), la funció és convexa (resp. còncava) en a. Si a és un punt d'inflexió, $f''(a)=0$.*

DEMOSTRACIÓ. Suposem primer que $f''(a)\neq 0$. Per la fórmula de Taylor podem escriure

$$f(x)-(f(a)+f'(a)(x-a))=\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+o((x-a)^2)=\left(\frac{f''(a)}{2!}+\alpha(x)\right)(x-a)^2,$$

on $\alpha(x)\to 0$ quan $x\to a$. Per tant, l'expressió anterior tindrà, per a x en un entorn de a, el mateix signe que $f''(a)$, fet que demostra la primera part de l'enunciat.

D'altra banda, si a és un punt d'inflexió la funció no és ni còncava ni convexa en a, i per tant la segona derivada ha de ser zero en a. $\square$

Teorema. *Sigui f una funció $n-1$ vegades derivable en un entorn d'un punt a. Suposem que $f^{(n-1)}$ és derivable en a i que*

$$f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad \text{però } f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Si n és parell, a és un punt de convexitat si $f^{(n)}(a) > 0$ i de concavitat si $f^{(n)}(a) < 0$.
Si n és senar, a és un punt d'inflexió.
Si n és parell i a més a més $f'(a) = 0$, la funció té un màxim o un mínim relatiu en el punt a segons que $f^{(n)}(a)$ sigui negatiu o positiu, respectivament.

Demostració. Exactament igual que en el teorema anterior, però utilitzant la fórmula de Taylor fins a l'ordre n, veiem que per a x en un entorn de a el signe de $f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))$ serà el de $f^{(n)}(a)(x-a)^n$.

Per a n parell el signe de $f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))$ no canvia en un entorn de a i hi haurà convexitat si $f^{(n)}(a) > 0$ i concavitat si $f^{(n)}(a) < 0$. Quan n és senar, el signe de $f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))$ canvia en canviar de signe $x-a$ i per tant a és un punt d'inflexió. Finalment, en el cas de concavitat o convexitat, si a més a més $f'(a) = 0$, el signe de $f(x) - f(a)$ no canvia en un entorn de a, que serà un màxim o un mínim relatiu segons que $f^{(n)}(a)$ sigui negatiu o positiu respectivament. $\square$