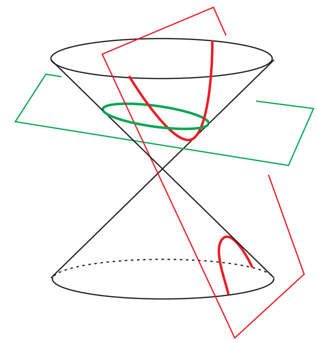
1 Definició. Esferes de Dandelin



Les *seccions còniques* són les diferents famílies de corbes planes que s'obtenen en intersecar un con complet amb un pla. Si el pla és perpendicular a l'eix del con s'obté una *circumferència*. Si α és l'angle que formen les generatrius del con amb l'eix ($0 < \alpha < \pi/2$) i el pla forma un angle amb l'eix comprès entre α i $\pi/2$, llavors la secció és fitada i queda completament inclosa en una de les dues branques del con; és una *el·lipse*. Si l'angle del pla és exactament α, llavors el pla és paral·lel a una generatriu, la secció no és fitada però segueix estant continguda en una branca del con; es tracta d'una *paràbola*. Finalment, si l'angle del pla està comprès entre 0 i α, talla les dues branques del con i com a resultat la corba que s'obté està formada per dues branques no connexes; tenim una *hipèrbola*. La figura mostra una el·lipse en verd i una hipèrbola en vermell.

Com el con és una superfície de revolució obtinguda en fer girar una generatriu al voltant de l'eix, és clar que la circumferència és el lloc geomètric dels punts del pla de la secció que es troben a una distància fixa del seu centre. El següent resultat ens assegura que les altres tres classes de còniques també es poden definir com un lloc geomètric a partir de relacions mètriques.

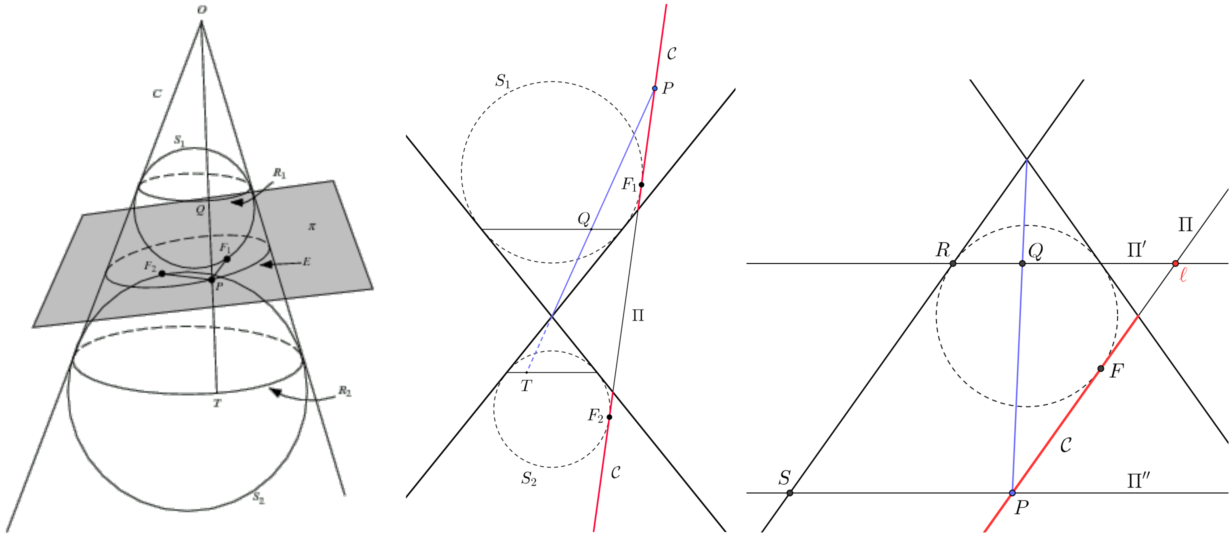
Teorema de Dandelin. *Sigui $\mathcal{C}$ una cònica obtinguda per la secció d'un pla Π amb un con complet. Llavors,*

(a) *si $\mathcal{C}$ és una el·lipse, llavors $\mathcal{C}$ és el lloc geomètric dels punts $P \in \Pi$ tals que la suma de distàncies de P a dos punts fixos, anomenats* focus *de l'el·lipse, és una constant;*

(b) *si $\mathcal{C}$ és una hipèrbola, llavors $\mathcal{C}$ és el lloc geomètric dels punts $P \in \Pi$ tals que la diferència de distàncies en valor absolut de P a dos punts fixos, anomenats* focus *de la hipèrbola, és una constant;*

(c) *si $\mathcal{C}$ és una paràbola, llavors $\mathcal{C}$ és el lloc geomètric dels punts $P \in \Pi$ que equidisten d'un punt fix, anomenat* focus *de la paràbola, i d'una recta fixa, anomenada* directriu *de la paràbola.*

Demostració. Considerarem una construcció geomètrica diferent per a cada cas. Si $\mathcal{C}$ és una el·lipse, considerem dues esferes S_1, S_2 (anomenades *esferes de Dandelin*) tangents internament al con en circumferències R_1, R_2 respectivament, i també tangents a Π en punts F_1, F_2, tal com mostra la figura de l'esquerra.



Llavors, si $P \in \mathcal{C}$ considerem la generatiu per P, que talla les circumferències de tangència en punts Q, T respectivament. Com PF_1 i PQ són tangents a l'esfera tenim $PF_1 = PQ$ i, de igual manera, $PF_2 = PT$, per tant $PF_1 + PF_2 = PQ + PT = QT$, que és un segment de generatriu entre les circumferències R_1 i R_2 que no depèn de P, per tant hem provat el que volíem: els focus són F_1, F_2 i la constant és la mida de QT.

Si $\mathcal{C}$ és una hipèrbola, considerem una situació semblant amb dues esferes de Dandelin S_1, S_2 tangents interiorment al con i al pla Π, aquest cop cada una en una branca diferent del con. En la figura del centre es mostra un projecció de la situació sobre el pla yz (prenem una referència en què l'eix z és l'eix del con i l'eix x és paral·lel al pla Π, de manera que veiem la projecció de Π com una recta). Si $P \in \mathcal{C}$, la generatriu per P talla les circumferències de tangència en Q, T i llavors, com abans, $|PF_1 - PF_2| = |PQ - PT| = QT$ (ja que P no es troba entre Q i T) i de nou hem provat que els focus són F_1, F_2 i la constant és la mida de QT.

Finalment, si $\mathcal{C}$ és una paràbola només podem traçar una esfera de Dandelin, com mostra la figura de la dreta, en què veiem una projecció igual que l'anterior. Considerem el pla Π' que conté la circumferència de tangència i sigui ℓ la recta $\Pi \cap \Pi'$, que projectada en la figura apareix com un únic punt. Considerem un altre pla Π'' per P, paral·lel a Π', i considerem el segment RS sobre la generatriu paral·lela a Π, amb $R \in \Pi'$, $S \in \Pi''$. Llavors, si $P \in \mathcal{C}$ i Q és la intersecció de la generatriu per P amb la circumferència de tangència, $PF = PQ = RS$, però com aquest segment és paral·lel a Π, mesura el mateix que la distància de P a ℓ (totes dues mesures les veiem projectades en verdadera magnitud). Així, hem vist allò que volíem: $PF = d(P, \ell)$. $\square$

Tot i que no ho demostrarem aquí, el recíproc d'aquest teorema també és cert, això és, donada una cònica $\mathcal{C}$ definida com a lloc geomètric, existeixen un con i un pla tals que la seva intersecció és $\mathcal{C}$.

2 Equacions canòniques

D'ara en endavant ens serà més còmode treballar amb la definició de les còniques com a lloc geomètric.

La circumferència és el lloc geomètric dels punts $P=(x,y)$ que disten una constant $r>0$, el *radi*, d'un *centre* O. Llavors, si prenem coordenades fixant l'origen en O tindrem que la condició donada és

$$PO=r \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=r \Rightarrow x^2+y^2=r^2,$$

i podem estar segurs que en elevar al quadrat no apareixen solucions falses, perquè tant $\sqrt{x^2+y^2}$ com r són no negatius.

L'el·lipse és el lloc geomètric dels punts $P=(x,y)$ tals que la suma de distàncies PF_1+PF_2 és una constant que anomenarem $2a$. Prenem les coordenades de manera que els focus siguin $F_1=(c,0)$, $F_2=(-c,0)$ amb $c>0$. Si emprem la desigualtat triangular tenim que

$$2a=PF_1+PF_2\geq F_1F_2=2c,$$

de manera que la condició necessària perquè l'el·lipse existeixi és $c\leq a$. Imposant la condició mètrica obtenim

$$\begin{aligned}
PF_1+PF_2=2a &\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x-c)^2+y^2=4a^2+(x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx \Rightarrow a^2\left((x+c)^2+y^2\right)=\left(a^2+cx\right)^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right),
\end{aligned}$$

i com sabem que $a^2-c^2\geq 0$, posem $a^2-c^2=b^2$, de manera que queda

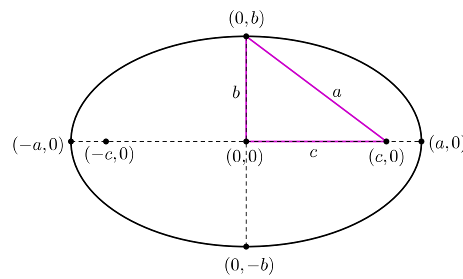
$$\Leftrightarrow b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

i aquesta última és la que anomenem equació canònica de l'el·lipse (suposem $a>c$, això és, $b\neq 0$). Hi ha hagut dos moments en què hem elevat al quadrat tots dos membres. El primer cop no comportava cap problema perquè a tots dos membres hi havia valors positius, però el segon cop això no era tan evident i, per aquest motiu, hem perdut l'equivalència i poden haver aparegut solucions fictícies. Per assegurar-nos que no és així, partim d'un punt (x,y) que verifiqui l'equació $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ i comprovem que es compleix l'última equació abans d'haver perdut el "$\Leftrightarrow$", que és $a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$. En efecte, emprant

$a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2$ i la relació $a^2 - c^2 = b^2$, manipulem el membre esquerre:

$$\begin{aligned} a\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= \sqrt{a^2(x+c)^2+a^2y^2} = \sqrt{a^2(x+c)^2+a^2b^2-b^2x^2} = \\ &= \sqrt{(a^2-b^2)x^2+2a^2cx+a^2(b^2+c^2)} = \sqrt{c^2x^2+2a^2cx+a^4} = \\ &= \sqrt{\left(a^2+cx\right)^2} = \left|a^2+cx\right|, \end{aligned}$$

que coincideix amb $a^2 + cx$ sempre que $a^2 + cx \geq 0$, però només cal observar que l'equació $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ implica $x^2/a^2 \leq 1$, això és, $|x| \leq |a| = a$ i, en particular, $x \geq -a$. Aleshores $cx \geq -ca$ i $a^2 + cx \geq a^2 - ca = a(a - c) > 0$, com volíem veure.



De l'equació canònica obtenim que la corba passa per quatre punts particulars, $(\pm a, 0)$ i $(0, \pm b)$, que són els extrems dels diàmetres major i menor. El valor a és el *semieix major* de l'el·lipse i b n'és el *semieix menor*. Observem també que l'equació $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$ indica que l'el·lipse s'ha obtingut a partir d'una circumferència $x^2 + y^2 = 1$, havent aplicat uns canvis d'escala $x' = ax$ i $y' = by$ sobre els eixos x i y respectivament. En el cas extrem $a = c$, l'equació canònica ja no és vàlida perquè l'el·lípse degenera en el segment F_1F_2.

La hipèrbola és el lloc geomètric dels $P = (x, y)$ tals que $|PF_1 - PF_2| = 2a$ i, com abans, prenem $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$ amb $c > 0$. En aquest cas, si apliquem dos cops la desigualtat triangular tenim $PF_1 + F_1F_2 \geq PF_2$ i $PF_2 + F_1F_2 \geq PF_1$, i combinant les dues desigualtats podem escriure $-F_1F_2 \leq PF_1 - PF_2 \leq F_1F_2$, de forma que

$$2a = |PF_1 - PF_2| \leq F_1F_2 = 2c,$$

i per tant, perquè la hipèrbola existeixi ha de ser $a \leq c$. Ara, com la condició mètrica conté un valor absolut, la podem desdoblar en dues condicions:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a \;\Leftrightarrow\; PF_1 - PF_2 = 2a \quad \text{o bé} \quad PF_2 - PF_1 = 2a.$$

Desenvolupem cada una per separat:

$$\begin{aligned} PF_1 - PF_2 = 2a &\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x+c)^2+y^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-c)^2+y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = -a^2 - cx \Rightarrow a^2\left((x+c)^2+y^2\right) = \left(a^2+cx\right)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(c^2-a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2-a^2\right), \end{aligned}$$

i com sabem que $c^2 - a^2 \geq 0$, posem $c^2 - a^2 = b^2$, de manera que queda

$$\Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ara desenvolupem l'altra equació:

$$\begin{aligned} PF_2 - PF_1 = 2a &\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x+c)^2+y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = -a^2 + cx \Rightarrow a^2\left((x-c)^2+y^2\right) = \left(a^2 - cx\right)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(c^2-a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2-a^2\right), \end{aligned}$$

de manera que obtenim exactament la mateixa equació canònica $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Tal com hem fet per a l'el·lipse, cal comprovar que tota solució de $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ verifica una de les dues equacions originals. De l'equació canònica deduïm que $x^2/a^2 \geq 1$, això és, $|x| \geq |a| = a$, que equival a $x \leq -a$ o bé $x \geq a$. En el primer cas podem escriure

$$x \leq -a \Leftrightarrow cx \leq -ca \Leftrightarrow a^2 + cx \leq a^2 - ca = a(a-c) \leq 0,$$

i llavors

$$\begin{aligned} a\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= \sqrt{a^2(x+c)^2+a^2y^2} = \sqrt{a^2(x+c)^2+b^2x^2-a^2b^2} = \\ &= \sqrt{(a^2+b^2)x^2+2a^2cx+a^2(c^2-b^2)} = \sqrt{c^2x^2+2a^2cx+a^4} = \\ &= \sqrt{(a^2+cx)^2} = \left|a^2+cx\right| = -a^2-cx, \end{aligned}$$

que és una de les equacions que hem obtingut abans d'haver perdut el "$\Leftrightarrow$" i retrocedint arribem a $PF_1 - PF_2 = 2a$. En el cas que $x \geq a$ tenim

$$x \geq a \Leftrightarrow cx \geq ca \Leftrightarrow -a^2 + cx \geq -a^2 + ca = a(-a+c) \geq 0,$$

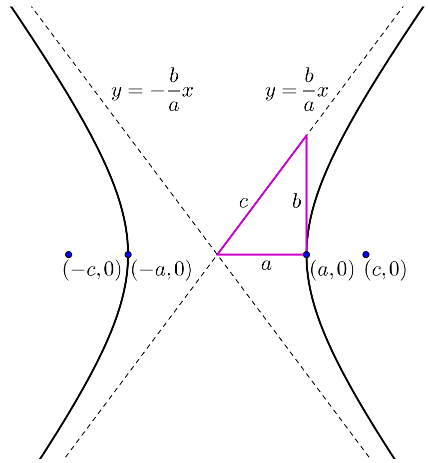
i llavors

$$\begin{aligned} a\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= \sqrt{a^2(x-c)^2+a^2y^2} = \sqrt{a^2(x-c)^2+b^2x^2-a^2b^2} = \\ &= \sqrt{(a^2+b^2)x^2-2a^2cx+a^2(c^2-b^2)} = \sqrt{c^2x^2-2a^2cx+a^4} = \\ &= \sqrt{(a^2-cx)^2} = \left|a^2-cx\right| = -a^2+cx, \end{aligned}$$

que és l'altra equació abans de perdre el "$\Leftrightarrow$" i retrocedint arribem a $PF_2 - PF_1 = 2a$.

Si manipulem l'equació canònica de la hipèrbola tenim

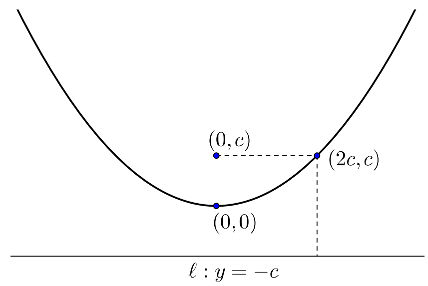
$$a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2 \Leftrightarrow a|y| = \sqrt{b^2x^2 - a^2b^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{|y|}{|x|} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{x^2}},$$



la qual cosa ens diu que, quan x creix arbitràriament en valor absolut, el quocient $|y|/|x|$ tendeix a b/a, altrament dit, que la hipèrbola té les asímptotes obliqües $y = \pm bx/a$. Amb l'equació també veiem que $(\pm a, 0)$ són dos punts particulars de la hipèrbola.

La paràbola és el lloc geomètric dels $P = (x, y)$ tals que $PF = d(P, \ell)$. Prenem $F = (0, c)$ i $\ell : y = -c$, de forma que

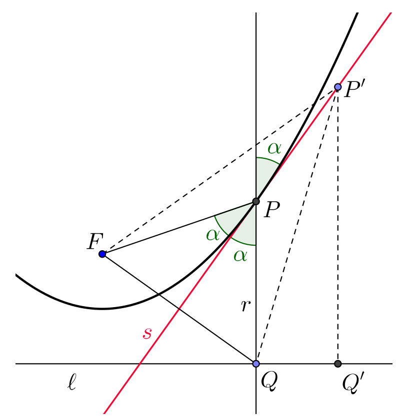
$$PF = d(P,\ell) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = |y + c| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + (y-c)^2 = (y+c)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 4cy,$$



De l'equació deduïm que tres punts particulars per on passa la paràbola són $(0, 0)$ i $(\pm 2c, c)$.

3 Propietats focals

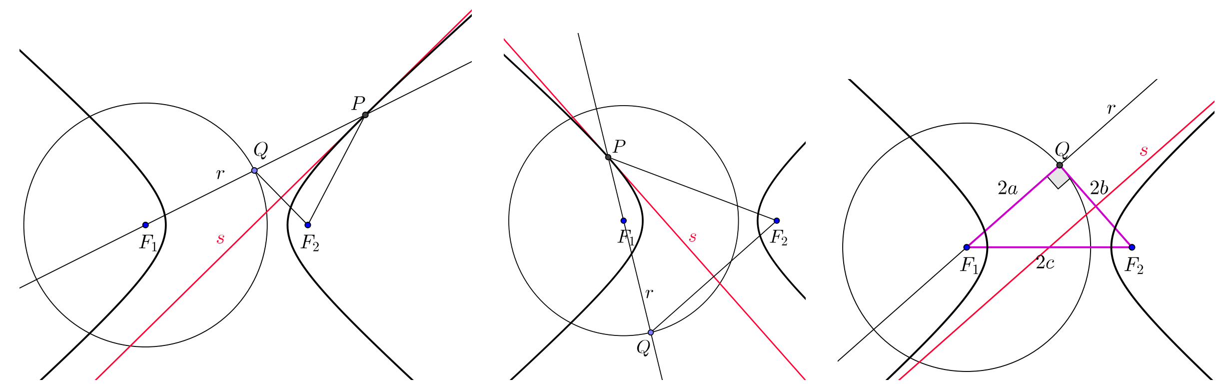
Si, donats el focus F i la directriu ℓ, volem dibuixar una paràbola com a lloc geomètric (per exemple, amb GeoGebra), podem fer la següent construcció: prenem un punt Q que es mogui lliurement sobre ℓ i considerem la recta r perpendicular a ℓ per Q i la mediatriu s del segment QF. El punt $P = r \cap s$ pertany a la paràbola perquè, en ser $P \in s$, tenim $PF = PQ$, i d'altra banda, en ser $P \in r$, tenim $PQ = d(P, \ell)$. Així, el lloc geomètric que descriu P quan Q recorre ℓ és, precisament, la paràbola cercada.



A més, fixat un $Q \in \ell$, la mediatriu s és tangent a la paràbola en P. En efecte, si prenem un altre $P' \in s$, tenim que $P'F = P'Q > P'Q' = d(P', \ell)$, on Q' és el peu de la perpendicular a ℓ per P'. Per tant, tota la mediatriu s, llevat únicament del punt P, està continguda en la regió "exterior" a la paràbola $PF > d(P, \ell)$. Aquesta propietat fa que una partícula que viatja paral·lela a l'eix de la paràbola (això és, perpendicular a la directriu), passi per

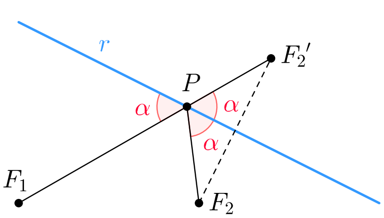
F després d'haver rebotat contra la seva superfície interior, perquè l'angle d'incidència α coincideix amb el de reflexió i el rebot és igual que si es produís contra la recta tangent. Per la mateixa raó, una partícula que emana de F s'allunya paral·lela a l'eix després d'haver rebotat en la superfície parabòlica.

Fem ara una construcció semblant per obtenir una hipèrbola: amb centre en un focus F_1 tracem la circumferència de radi $2a$ i prenem un punt Q sobre la circumferència. Sigui r la recta QF_1 i s la mediatriu del segment QF_2; llavors $P = r \cap s$ pertany a la hipèrbola.



En efecte, si Q es troba entre P i F_1 (figura de l'esquerra) llavors $PF_1 - PF_2 = PF_1 - PQ = QF_1 = 2a$; en cas contrari (figura central), $PF_2 - PF_1 = PQ - PF_1 = QF_1 = 2a$. La figura de la dreta mostra un cas límit en què les rectes r i s són paral·leles (això és, el triangle $\triangle F_1QF_2$ és rectangle) i no defineixen un punt sobre la hipèrbola; en aquest cas, s és una asímptota i retrobem la relació $a^2 + b^2 = c^2$ en el triangle $\triangle F_1QF_2$.

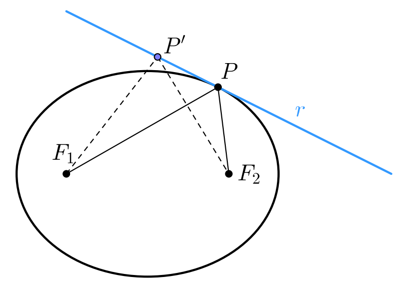
Tal com passava amb la paràbola, la mediatriu s torna a ser tangent a la hipèrbola en P. En efecte, si prenem $P' \in s$ diferent de P, en el primer cas tenim que $P'F_1 - P'F_2 = P'F_1 - P'Q < QF_1 = 2a$, i en el segon cas, $P'F_2 - P'F_1 = P'Q - P'F_1 < QF_1 = 2a$, de manera que en tots dos casos la recta s queda totalment inclosa (llevat de P) en la regió compresa entre les dues branques de la hipèrbola: $|PF_1 - PF_2| < 2a$. La interpretació física d'aquest fet és que si una partícula viatja en direcció a un dels focus i rebota en la hipèrbola, surt reflectida en direcció a l'altre focus.



Per estudiar la propietat focal de l'el·lipse, abans veurem un problema clàssic: el *problema del bomber*. Suposem que un bomber es troba en un punt F_1 i ha d'anar a apagar un foc en el punt F_2 passant abans per un riu, representat per la recta r, per omplir la galleda (F_1 i F_2 estan a la mateixa riba del riu). ¿En quin punt P del riu ha d'omplir la galleda per recórrer la mínima distància possible? Geomètricament, es tracta de trobar $P \in r$ tal que $PF_1 + PF_2$ sigui mínim. La solució consisteix a considerar el punt F_2' simètric de F_2

respecte de r, perquè llavors $PF_1 + PF_2 = PF_1 + PF_2'$, que serà mínim quan F_1, P, F_2' estiguin alineats, això és, $P = r \cap F_1F_2'$. A més, per construcció, l'angle α amb què el bomber arriba a P des de F_1 és el mateix amb què surt cap a F_2, i P és l'únic punt de r que verifica això.

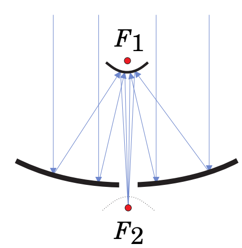
Si ara pensem que F_1, F_2 són els focus d'una el·lipse de constant $2a$ i P pertany a l'el·lipse, considerem la recta r que és bisectriu exterior de les rectes PF_1 i PF_2 (és a dir, la bisectriu que deixa al mateix costat F_1 i F_2). Observem que tenim la mateixa situació que en el problema del bomber i, per tant, qualsevol punt $P' \in r$ verificarà $P'F_1 + P'F_2 > PF_1 + PF_2 = 2a$, de manera que la recta r sencera, llevat del punt P, cau a l'exterior de l'el·lipse, cosa que ens diu que és tangent en P. D'aquí en deduïm la propietat focal: tota partícula que parteix d'un focus, passa per l'altre després de reflectir-se en la superfície de l'el·lipse.



4 Aplicacions i presència en el nostre entorn

Les propietats focals que hem vist fan que les còniques tinguin multitud d'aplicacions pràctiques en la tecnologia. Per exemple, la superfície d'una antena parabòlica (generada fent girar una paràbola al voltant del seu eix), quan està ben encarada i les ones arriben paral·leles a l'eix, després de reflectir-se en la superfície es concentren en el focus, on hi ha instal·lat el receptor. La llegenda explica que, durant el setge de Siracusa, Arquimedes va seguir aquest mateix principi per cremar els vaixells enemics concentrant-hi els raigs solars amb un mirall parabòlic. De manera semblant, els fars d'un cotxe són parabòlics, amb la bombeta col·locada en el focus perquè els raigs de llum surtin en la direcció de l'eix després de reflectir-se en la superfície interna.

Un telescopi modern fa servir una combinació de miralls de secció cònica: els raigs de llum paral·lels provinents del cel es reflecteixen en un mirall principal parabòlic que els fa confluir en el focus F_1. Per tornar-los a canviar de direcció i concentrar-los en un altre punt F_2 es fa servir un mirall secundari, que pot ser el·líptic o hiperbòlic (més habitual), com el que mostra la figura. En qualsevol dels dos casos, el mirall secundari té un focus en F_1 i l'altre en F_2.



En el camp de la Física, Kepler demostrà que els cossos celestes sotmesos a una força gravitatòria segueixen trajectòries còniques on un dels cossos es troba en un focus. Quan llencem un objecte obliquament, descriu una trajectòria parabòlica (en realitat és el·líptica, però el centre de la Terra està tan allunyat que, localment, es pot aproximar molt bé per una paràbola).

Pel que fa a l'arquitectura, les *sales dels xiuxiueigs* són sales amb voltes o parets el·líptiques, de manera que quan una persona xiuxiueja en un focus, una altra situada en l'altre focus l'escolta perfectament amplificada i sense ecos, perquè totes les ones sonores han recorregut la mateixa distància i s'han concentrat en el segon focus després de rebotar en l'estructura el·líptica. Exemples d'aquestes sales les trobem a la catedral de Sant Pau a Londres o en el Capitoli de Washington.