# 1 La funció exponencial

El nostre objectiu és arribar a definir la funció exponencial de base real positiva i exponent real. Per fer-ho, començarem definint la potència d'exponent natural i anirem ampliant progressivament el conjunt numèric per a l'exponent, de manera que es mantinguin les propietats.

## 1.1 Potència de base real no nul·la i exponent natural o enter

Sigui $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. En aquesta exposició suposarem que $0 \notin \mathbb{N}$. Definim la potència de base real no nul·la i exponent natural mitjançant la funció

$$\begin{aligned} f_a : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f_a(n) = a^n \end{aligned}$$

on $a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n}$. Les propietats associativa i commutativa del producte de $\mathbb{R}$ ens donen les següents propietats per a les potències:

$$a^{n+m} = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n+m} = \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n} \cdot \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{m} = a^n \cdot a^m, \tag{1}$$

$$(a \cdot b)^n = \overbrace{(a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}^{n} = \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n} \cdot \overbrace{b \cdot \ldots \cdot b}^{n} = a^n \cdot b^n, \tag{2}$$

$$(a^m)^n = \overbrace{a^m \cdot \ldots \cdot a^m}^{n} = \overbrace{(\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{m}) \cdot \ldots \cdot (\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{m})}^{n} = a^{m \cdot n}. \tag{3}$$

La propietat (1) es pot generalitzar fàcilment al cas de $k$ sumands: $a^{n_1 + \cdots + n_k} = a^{n_1} \cdot \ldots \cdot a^{n_k}$. A més, aquesta propietat equival a dir que $f_a$ és un homomorfisme entre $(\mathbb{N}, +)$ i $(\mathbb{R}^*, \cdot)$: $f_a(n+m) = f_a(n) \cdot f_a(m)$.

Mirem ara d'estendre el domini de $f_a$ a $\mathbb{Z}$, de manera que cal definir $a^0$ i $a^{-n}$. Si volem que es segueixi verificant la propietat fonamental (1) per tal que $f_a$ segueixi sent un homomorfisme, tindrem

$$a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0,$$

i com això ha de valer per a tot $n$, haurà de ser $a^0 = 1$. A partir d'aquí, escrivim

$$1 = a^0 = a^{n-n} = a^n \cdot a^{-n},$$

de manera que cal definir $a^{-n} = (a^n)^{-1} = 1/a^n$.

## 1.2 Potència de base real positiva i exponent racional

Per poder estendre $f_a$ a $\mathbb{Q}$ hem d'imposar una restricció sobre la base: a partir d'ara considerarem només $a > 0$; més endavant veurem per què. Veiem primer quina és la forma natural de definir $a^{1/n}$:

$$a = a^1 = a^{n/n} = a^{n \cdot 1/n} = (a^{1/n})^n,$$

de manera que $a^{1/n}$ ha de ser un nombre real (que prendrem positiu) tal que, en aixecar-lo a $n$, resulti $a$. Això, per definició, és el que anomenem *arrel $n$-èsima de $a$*: $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$. És fàcil demostrar l'existència d'aquest nombre si, fixat $n$, considerem la funció potencial $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ amb $g(x) = x^n$. És contínua en ser un polinomi, és creixent (ja que si $x < y$ llavors $x^2 < y^2$, i per inducció $x^n < y^n$) i no és fitada superiorment, això és, $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$. Tot això ens diu que $g$ és una bijecció, en particular, que és exhaustiva: per a tot $a \in \mathbb{R}^+$, existeix $b \in \mathbb{R}^+$ tal que $b^n = a$. Aquest $b$ és l'arrel $n$-èsima.

Ara ja podem passar a definir $a^{m/n}$:

$$a^{m/n} = a^{m \cdot 1/n} = (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

L'última igualtat es dedueix elevant a $n$ l'expressió $(\sqrt[n]{a})^m$, aplicant les propietats de les potències d'exponent natural i veient que coincideix amb $a^m$. La injectivitat de $g(x) = x^n$ ens assegura que els dos nombres inicials també coincideixen.

Igual que en $\mathbb{Z}$, definirem $a^{-m/n} = (a^{m/n})^{-1}$ i $a^0 = 1$.

Ens hem d'assegurar que aquestes definicions són consistents, és a dir, que no depenen del representant que triem per a cada fracció: si $m/n = r/s$ (això és, $ms = nr$), cal veure que $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[s]{a^r}$. En efecte, elevant ambdues arrels a $ns$ obtenim $a^{ms} = a^{rn}$, que és cert. De manera semblant es veu que la definició també és correcta si l'exponent és negatiu.

Veiem per què no podem definir $a^{m/n}$ de manera consistent quan $a < 0$: per exemple, si $a = -1$ segons la definició tindríem que $(-1)^{1/3} = \sqrt[3]{-1} = -1$, però si prenem $2/6$ com a representant equivalent de la fracció de l'exponent, tindríem que $(-1)^{2/6} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$. Un altre exemple: $(-1)^{1/2} = \sqrt{-1}$, que no existeix a $\mathbb{R}$, i en canvi $(-1)^{2/4} = \sqrt[4]{(-1)^2} = \sqrt[4]{1} = 1$.

Tot seguit demostrem les propietats fonamentals de les potències d'exponent racional:

**Teorema.** *Siguin $a, b \in \mathbb{R}^+$ i $p, q \in \mathbb{Q}$. Aleshores,*

*I)* $a^{p+q} = a^p a^q$.

*II)* $(ab)^p = a^p b^p$.

*III)* $(a^p)^q = a^{pq}$.

*IV) Si* $a > 1$ *(resp.* $a < 1$*) i* $p < q$*, llavors* $a^p < a^q$ *(resp.* $a^p > a^q$*).*

*V) Si* $a < b$ *i* $p > 0$ *(resp.* $p < 0$*), llavors* $a^p < b^p$ *(resp.* $a^p > b^p$*).*

DEMOSTRACIÓ. Escrivim $p = m/n$, $q = r/s$, amb $m, n, r, s$ enters positius. Els altres casos es dedueixen fàcilment d'aquests. Per demostrar I) i III) s'eleven ambdós membres a la potència $ns$, i s'obtenen els resultats comuns $a^{ms+rn}$ per a I) i $a^{mr}$ per a II). De forma similar, per demostrar II) s'eleven els dos membres a $n$ i es comprova que el resultat és el mateix.

Veiem IV) en el cas $a > 1$. Provar que $a^p < a^q$ amb $p < q$ equival a veure que $a^{q-p} > 1$, però $q - p = c/d$ amb $c, d$ enters positius, i $a^{c/d} > 1$ si i només si $a^c > 1$ (elevant a $d$), cosa que és òbviament certa en ser $a > 1$. El cas $a < 1$ es prova de manera semblant.

Finalment, provar V) per al cas $p > 0$ equival a veure $(b/a)^p > 1$, cosa que es dedueix de IV) en ser $b/a > 1$. El cas $p < 0$ es prova de forma semblant. $\square$

## 1.3 Potència de base real positiva i exponent real

Ara es tracta de definir $a^x$ per a $a \in \mathbb{R}^+$ i $x \in \mathbb{R}$ qualsevol. Tenint en compte que tota successió de Cauchy $\{p_n\} \subset \mathbb{Q}$ defineix un nombre real $x$, sembla natural definir $a^x$ com el límit de la successió $\{a^{p_n}\}$. Per fer-ho, necessitem uns resultats previs:

**Lema.** *Si* $a \in \mathbb{R}^+$ *llavors la successió* $\{a^{1/n}\}$ *té límit* $1$.

DEMOSTRACIÓ. El cas $a = 1$ és trivial, perquè $\{1^{1/n}\}$ és la successió constant igual a 1. Suposem que $a > 1$. Donat $\varepsilon > 0$ hem de demostrar que $|a^{1/n} - 1| < \varepsilon$ per a $n > n_0$. Però

$$|a^{1/n} - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow a^{1/n} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow a^{1/n} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow a < (1 + \varepsilon)^n,$$

ara bé, desenvolupant $(1 + \varepsilon)^n$ mitjançant el binomi de Newton, tenim que

$$(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \binom{n}{2}\varepsilon^2 + \ldots + \binom{n}{n}\varepsilon^n > 1 + n\varepsilon,$$

de manera que n'hi ha prou que $a < 1 + n\varepsilon$ per a $n > n_0$, és a dir, és suficient prendre $n_0 > (a - 1)/\varepsilon$. El cas $a < 1$ es redueix a l'anterior perquè llavors $1/a > 1$ i

$$a^{1/n} = \frac{1}{\frac{1}{a^{1/n}}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{1/n}} \to \frac{1}{1} = 1. \qquad \square$$

**Teorema.** *Si $\{p_n\} \subset \mathbb{Q}$ és una successió que té límit i $a \in \mathbb{R}^+$, llavors $\{a^{p_n}\}$ també té límit.*

Demostració. Tractem el cas $a > 1$ (la demostració és molt semblant si $a < 1$). La successió $\{p_n\}$ és fitada en ser convergent, de manera que $\{a^{p_n}\}$ també és fitada per una constant $K$. Anem a veure que $\{a^{p_n}\}$ és de Cauchy, i com $\mathbb{R}$ és complet per successions, serà convergent. Sigui $p_n \geq p_m$ (si fos $p_n < p_m$ raonaríem de la mateixa manera permutant els papers de $p_n$ i $p_m$). Tindrem

$$|a^{p_n} - a^{p_m}| = a^{p_m}(a^{p_n - p_m} - 1) \leq K(a^{p_n - p_m} - 1).$$

Donat $\varepsilon > 0$, sigui $1/r$ tal que $|a^{1/r} - 1| < \varepsilon/K$ (en virtut del lema anterior). Com $\{p_n\}$ és de Cauchy, per a $n, m > n_0$ serà $|p_n - p_m| < 1/r$ i llavors $a^{p_n - p_m} - 1 < a^{1/r} - 1$, amb la qual cosa

$$|a^{p_n} - a^{p_m}| < K(a^{1/r} - 1) < K\varepsilon/K = \varepsilon. \qquad \square$$

Amb això ja podem definir la funció exponencial de base real positiva i exponent real: si $a \in \mathbb{R}^+$ i $x \in \mathbb{R}$, sigui $\{q_n\} \subset \mathbb{Q}$ tal que $\lim\{q_n\} = x$. Llavors definim

$$a^x = \lim\{a^{q_n}\}.$$

Cal veure que la definició és consistent: sigui $\{q'_n\}$ una altra successió de racionals amb límit $x$. Per veure que $\lim\{a^{q_n}\} = \lim\{a^{q'_n}\}$ observem que

$$|a^{q_n} - a^{q'_n}| = a^{q'_n}|a^{q_n - q'_n} - 1| \leq K|a^{q_n - q'_n} - 1|,$$

i, igual que abans, com $q_n - q'_n \to 0$, l'expressió de dalt és arbitràriament petita.

Enunciem i demostrem ara les propietats de la funció exponencial:

**Teorema.** *Siguin $a, b \in \mathbb{R}^+$ i $x, y \in \mathbb{R}$. Aleshores,*

*I)* $a^{x+y} = a^x a^y$.

*II)* $(ab)^x = a^x b^x$.

*III)* $(a^x)^y = a^{xy}$.

*IV) Si $a > 1$ (resp. $a < 1$) i $x < y$, llavors $a^x < a^y$ (resp. $a^x > a^y$).*

*V) Si $a < b$ i $x > 0$ (resp. $x < 0$), llavors $a^x < b^x$ (resp. $a^x > b^x$).*

*VI) Si $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ amb $\{x_n\} \to x$, llavors $\{a^{x_n}\} \to a^x$.*

*VII) Si $a > 1$ (resp. $a < 1$), per a tot $K \in \mathbb{R}$ (resp. $\varepsilon > 0$) existeix $t$ tal que si $x > t$ llavors $a^x > K$ (resp. $a^x < \varepsilon$).*

Demostració. Les propietats I) i II) es dedueixen de la definició de $a^x$ i de les mateixes propietats per a exponents racionals.

Provem IV), ja que necessitarem aquest resultat per demostrar III): sigui $a > 1$ (el cas $a < 1$ es demostra de forma semblant) i $x < y$. Per la propietat de densitat de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, podem prendre $p, q \in \mathbb{Q}$ tals que $x < p < q < y$. Llavors, si $\{p_n\} \to x$ i $\{q_n\} \to y$, d'un $n$ en endavant tindrem que també es verifica $p_n < p < q < q_n$, de forma que, gràcies a la mateixa propietat que estem provant per a exponents racionals, tindrem $a^{p_n} < a^p < a^q < a^{q_n}$; llavors, fent el pas al límit, obtenim $a^x \leq a^p < a^q \leq a^y$, i IV) queda provada.

La propietat V) per a $x > 0$ equival a veure que $(b/a)^x > 1$, cosa que es dedueix immediatament de IV). El cas $x < 0$ és semblant.

Per veure III) es parteix de dues successions $\{p_n\} \to x$, $\{q_n\} \to y$, de forma que $\{p_n q_n\} \to xy$ i $a^{xy} = \lim\{a^{p_n q_n}\} = \lim\{(a^{p_n})^{q_n}\}$. A partir de les propietats IV) i V), i amb una tècnica semblant a l'emprada per veure IV) es demostra que aquest límit és $(a^x)^y$. N'ometem els detalls.

Veure VI) equival a veure $\{a^{x_n - x}\} \to 1$, que és cert en ser-ho també per a $\{x_n\} \in \mathbb{Q}$.

Finalment, per a la VII), si $a > 1$ podem escriure $a = 1 + h$ amb $h > 0$. Llavors, si $x > t$ per a $t \in \mathbb{N}$, tenim

$$a^x = (1+h)^x > (1+h)^t > 1 + ht,$$

de forma que n'hi ha prou en prendre $t$ tal que $1 + ht > K$. El cas $a < 1$ es redueix a l'anterior considerant $a^x = 1/\left(\frac{1}{a}\right)^x$. $\square$

La propietat IV ens diu que la funció exponencial $a^x$ és estrictament creixent (resp. decreixent) quan $a > 1$ (resp. $a < 1$). La VI assegura la continuïtat de $a^x$, i VII ens diu que $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ si $a > 1$, i 0 si $a < 1$. També, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ si $a > 1$ i $+\infty$ si $a < 1$.

Amb tot això podem afirmar que la funció $f_a : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ definida per $f_a(x) = a^x$ és un isomorfisme continu de grups quan $a > 0$, $a \neq 1$. De fet, no es difícil provar que, recíprocament, tot morfisme continu de $(\mathbb{R}, +)$ en $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ és una funció exponencial $a^x$.

## 2 La funció logarítmica

Acabem de veure que la funció $f_a : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ definida per $f_a(x) = a^x$ és bijectiva. Considerem-ne doncs la funció inversa $g_a : (\mathbb{R}^+, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$; l'anomenarem *funció logarítmica de base* $a$ i la notarem per $g_a(x) = \log_a x$. Segons aquesta definició, en composar les dues funcions obtenim la funció identitat:

$$\log_a a^x = x, \quad a^{\log_a y} = y.$$

Seguidament veiem les propietats bàsiques de la funció logarítmica:

**Teorema.** *Siguin* $a, b, x, y \in \mathbb{R}^+$. *Aleshores*

*I)* *La funció* $g_a(x) = \log_a x$ *és contínua.*

*II)* $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

*III)* $\log_a(x^y) = y \log_a x$ *(també cert si* $y \leq 0$*).*

*IV)* $\log_a x = \log_a b \log_b x$ *(fórmula del canvi de base dels logaritmes)*

Demostració. I) és immediata en ser $g_a$ la funció inversa d'una funció contínua. II) també és evident en ser $g_a$ un morfisme de grups entre $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ i $(\mathbb{R}, +)$: $g_a(xy) = g_a(x) + g_a(y)$. Per veure III) apliquem la funció exponencial de base $a$ a les dues bandes de la igualtat i comprovem que el resultat és el mateix (això ho podem fer gràcies a la injectivitat de $a^x$):

$$a^{\log_a(x^y)} = x^y, \quad a^{y \log_a x} = (a^{\log_a x})^y = x^y.$$

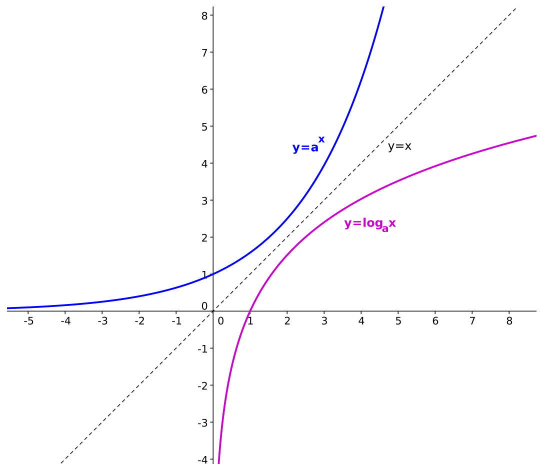
Apliquem la mateixa tècnica per provar IV):

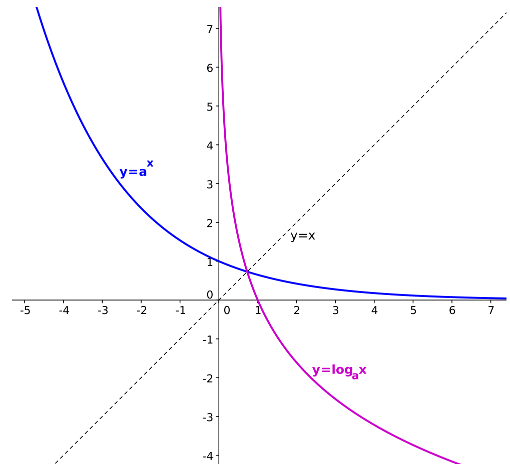
$$a^{\log_a x} = x, \quad a^{\log_a b \log_b x} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b x} = b^{\log_b x} = x. \quad \square$$

De forma similar a com passa amb la funció exponencial, les funcions logarítmiques són els únics morfismes continus de $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ a $(\mathbb{R}, +)$.

Estudiem el creixement de les funcions logarítmiques amb l'ajut d'uns gràfics, tenint en compte la simetria que guarden respecte de la recta $y = x$ amb les funcions exponencials:

La gràfica de l'esquerra correspon al cas $a > 1$ i la de la dreta a $0 < a < 1$.






# 3 Derivabilitat de $a^x$ i $\log_a x$

Abans de calcular les funcions derivades de $a^x$ i de $\log_a x$ estudiarem una successió que té una especial importància en relació a aquestes funcions. Es tracta de $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$. Desenvolupant mitjançant el binomi de Newton obtenim:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+n\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}= \\ &= 1+1+\frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n!}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{n^n}= \\ &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+ \\ &\quad +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Sota aquesta forma es veu prou clar que la successió és monòtona creixent, perquè en passar de $n$ a $n+1$ augmentem el nombre de sumands, que són tots positius, i cada un dels factors $1-\frac{r}{n}$ de cada sumand també creix. Finalment, la successió és fitada, perquè l'expressió anterior es pot fitar per

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

Així doncs, aquesta successió té límit. El límit es diu, per definició, el *nombre* $e$, i el seu valor aproximat és $2,7182818$. A partir d'aquesta successió es demostra que la funció $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ també té límit $e$ quan $x\to\pm\infty$.

És molt habitual trobar les funcions exponencials i logarítmiques expressades en base $e$: $e^x$ i $\log_e x=\ln x$ (*logaritme neperià* o *natural*). De seguida veurem el perquè en calcular la derivada de $f(x) = a^x$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h};$$

fem el canvi de variable $y = a^h - 1 \Rightarrow h = \log_a(y+1)$ i quan $h \to 0$ també $y \to 0$:

$$= a^x \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log_a(y+1)} = a^x \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a(1+y)} = a^x \lim_{y\to 0} \frac{1}{\log_a(1+y)^{1/y}},$$

i fent finalment el canvi $y = 1/z$ tenim que $y \to 0 \Rightarrow z \to \infty$ i

$$= a^x \lim_{z\to\infty} \frac{1}{\log_a\left(1+\frac{1}{z}\right)^z} = a^x \frac{1}{\log_a e} = a^x \ln a$$

en virtut de la fórmula de canvi de base dels logaritmes ($\log_a e \ln a = \log_a a = 1$). Per tant, la derivada de $a^x$ és $a^x \ln a$ i, en particular, la derivada de $e^x$ és ella mateixa.

Si ara posem $g(x) = \ln x$ tenim la identitat $e^{g(x)} = x$, i podem derivar a ambdues bandes aplicant la regla de la cadena:

$$e^{g(x)} g'(x) = 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{e^{g(x)}} = \frac{1}{x},$$

i, en general, com $\log_a x = \ln x / \ln a$, tindrem que la derivada de $\log_a x$ és $1/(x \ln a)$.

La sèrie de Taylor de $e^x$ al voltant de $x = 0$ és $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$, que és convergent per a tot $x \in \mathbb{R}$. Aquesta sèrie és la base per definir la funció analítica $e^z$ amb $z \in \mathbb{C}$.

# 4 Aplicacions de les funcions exponencial i logarítmica

A la vida real ens trobem amb freqüència models de creixement i de decreixement exponencials. Per exemple, en la banca: si tenim un dipòsit amb un capital inicial $C_0$ a un interès $i$ anual expressat en tant per 1, al cap d'un any el capital serà de $C = C_0(1+i)$. Si les capitalitzacions són semestrals (això és, dues l'any i en cadascuna es paga l'interès dividit per 2), al cap de l'any el capital serà de $C = C_0(1+i/2)^2$. En general, si hi ha $n$ capitalitzacions al llarg de l'any, el capital final és de $C = C_0(1+i/n)^n$. Per a un model financer de capitalització contínua, fem el pas al límit i obtenim $C = C_0 e^i$.

Una població aïllada (per exemple, una colònia de bacteris en un bassal) mostra un ritme de creixement proporcional a la mida de la població. Així, si la variable $x$ representa el nombre d'habitants (que podem prendre contínua per aplicar les eines del càlcul diferencial) i $t$ és el temps, l'equació diferencial que satisfà és $dx/dt = kx$ amb $k \in \mathbb{R}^+$. Si resolem l'equació obtenim una funció exponencial:

$$\frac{dx}{dt} = kx \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int kdt \Rightarrow \ln|x| = kt + C \Rightarrow x = e^{kt+C} = x_0 e^{kt},$$

on $x_0$ representa la població inicial en l'instant $t = 0$.

De manera similar, la velocitat de desintegració d'un material radioactiu és proporcional a la quantitat de material existent, de manera que verifica la mateixa equació diferencial però amb $k \in \mathbb{R}^-$ i la solució és la mateixa: $x = x_0 e^{kt}$ (decaïment exponencial amb $k < 0$). El valor $|k|$ s'anomena *constant de desintegració* del material. La datació de fòssils mitjançant la tècnica del carboni-14 està basada en aquesta equació.

Trobem també els logaritmes en multitud de branques de la ciència. Per exemple, el pH d'una dissolució es defineix com el logaritme decimal de la concentració inversa d'ions d'hidroni: $\mathrm{pH} = \log_{10}(1/[\mathrm{H}^+]) = -\log_{10}[\mathrm{H}^+]$. L'escala de Richter per quantificar l'efecte d'un terratrèmol és logarítmica de base 10, de manera que un augment d'una unitat en l'escala equival a un terratrèmol 10 cops més potent. També en astronomia s'usa una escala logarítmica per mesurar la magnitud o brillantor aparent d'un cos celeste, perquè la resposta de l'ull humà a la llum també és logarítmica. Finalment, els regles de càlcul foren uns instruments àmpliament emprats abans de les calculadores, que consistien en un regle graduat amb una escala logarítmica que lliscava sobre una part fixa dotada d'una altra escala idèntica. Gràcies a les propietats dels logaritmes, sumar dos nombres en una escala logarítmica equival a multiplicar-los, i restar-los equival a dividir-los. Així, aquests regles simplificaven sensiblement productes, quocients, potències i arrels.