TEMA 1: NÚMEROS NATURALES. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Índice

1. Introducción

Los números naturales surgen de la necesidad del hombre de contar objetos en la vida cotidiana. Así, tradicionalmente, desde este enfoque, se han entendido como aquellos que empiezan en el 1, puesto que el acto de contar implica la presencia de almenos un elemento. De hecho, esta es la primera concepción que se les enseña a los niños: vincular los números naturales con cantidades positivas, por lo que contar "nada" carece de sentido inicial.

Sin embargo, este aspecto ha estado sujeto a controversia. Matemáticos como Peano y Dedekind incluyeron el 0 en su definición por razones formales y estructurales. Al incluir el 0, el conjunto de números naturales tiene neutro para la suma, lo que lo convierte en un monoide. En caso contrario, se le llama semigrupo. Este cambio en su estructura algebraica tiene implicaciones profundas en campos como: la teoría de números y álgebra abstracta. Así, la elección de incluir el 0 o no, depende del contexto y de las necesidades pedagógicas. En este tema consideramos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, cabe destacar que esta distinción se puede denotar como: $\mathbb{N}^+$, $\mathbb{N}^*$

2. Construcción de $\mathbb{N}$

Pese a que los números naturales puede construirse mediante la teoría de c/tos, usando el axioma de infinitud, en este tema optamos por la vía axiomática que iniciaron Dedekind y Peano

2.1. Conjuntos N de Peano

Defn.- Diremos que un c/to N es de Peano si cumple:

$\boxed{A1}$ $1 \in N$

$\boxed{A2}$ $\exists\, S : N \to N$ denominada función siguiente
$a \to S(a)$

$\boxed{A3}$ $\forall a \in N \Rightarrow S(a) \neq 1$

$\boxed{A4}$ La función S es inyectiva

$\boxed{A5}$ Axioma de inducción

$$\forall K \subseteq N \begin{cases} 1 \in K \\ \forall a \in K,\ S(a) \in K \end{cases} \Longrightarrow K = N$$

Por los axiomas anteriores se puede demostrar que

Proposición 1.- (el siguiente es diferente)

$\forall n \in N$ se tiene que $n \neq S(n)$

$\boxed{D}$ Sup $K := \{n \in N : n \neq S(n)\}$. Entonces $1 \in K$ por $\boxed{A.3}$. Luego $K \neq \emptyset$.

Supongamos que $x \in K \Rightarrow S(x) \neq x$

Entonces si $S(x) \notin K \Rightarrow S(S(x)) = S(x)$

$\underset{\boxed{A4}}{\Longrightarrow} S(x) = x$ ⚡ $\Longrightarrow S(x) \in K \underset{\boxed{A5}}{\Longrightarrow} K = N$

Proposición 2 .- $\forall\ 1 \neq n \in \mathbb{N}\ \ \exists!\ m \in \mathbb{N} : n = S(m)$

(tiene un único anterior)

$\boxed{D}$ La demostración se hace por R.A.

Sup $\exists\ 1 \neq x \in \mathbb{N} : S(y) \neq x\ \ \forall y \in \mathbb{N}$

~~Proposición 2~~

2.2. Suma en N

Proposición 3 .- Existe una única aplicación llamada suma tal que
$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(x, y) \longrightarrow f(x,y)$$
que satisface

i) $f(x,1) = S(x)$

ii) $f(x, S(y)) = S(f(x,y))$ $\quad \forall x, y \in \mathbb{N}$

$\boxed{D}$ Existencia:

Supongamos $M = \{x \in \mathbb{N} : \exists f_x : \{x\} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que cumple i), ii)$\}$

Entonces, definimos

$$f_1 : \{1\} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad f_1(1,1) = S(1)$$
$$(1, x) \longrightarrow S(x)$$
$$f_1(1, S(x)) = S(S(x)) = S(f_1(1,x))$$

Así, tenemos que $1 \in M \neq \emptyset$

Ahora supongamos que $x \in M$, entonces

$$\exists f_x : \{x\} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad f_x(x,1) = S(x)$$
$$(x, y) \longrightarrow f_x(x,y) \qquad f_x(x, S(y)) = S(f_x(x,y))$$

Entonces se define a partir de f_x:

$$f_{S(x)} : \{S(x)\} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(S(x), y) \longrightarrow S(f_x(x,y))$$

Veamos que

$$f_{S(x)}(S(x), 1) = S(f_x(x,1)) = S(S(x)) \checkmark$$

$$f_{S(x)}(S(x), S(y)) = S(f_x(x, S(y))) = S(S(f_x(x,y))) = S(f_{S(x)}(S(x), y)) \checkmark$$

De ahora en adelante podremos usar la notación más común $x+y := f(x,y)$.

Además, se cumplen las propiedades siguientes. $\forall a,b,c \in \mathbb{N}$:

Asociativa: $(a+b)+c = a+(b+c)$

Commutativa: $a+b = b+a$

Al mismo tiempo, por la def$^{\underline{n}}$ de f heredada de la Proposición anterior:

- $x+1 := f(x,1) = S(x)$
- $x+S(y) = f(x,S(y)) = S(x+y)$

2.3. Producto en $\mathbb{N}$

Proposición 4.- Existe una única aplicación g llamada producto tal que

$$g: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \quad \text{con} \quad g(x,1) = x$$
$$(x,y) \longrightarrow g(x,y) \qquad g(x,S(y)) = g(x,y)+x$$
$$\forall x,y \in \mathbb{N}$$

$\boxed{D}$ La prueba es simétrica a la de la Prop 3. El cambio es en la definición de las funciones en $\mathcal{M}$.

Denotaremos el producto usando

$$x\cdot y := g(x,y),$$

así notemos que por definición se cumple

$$x\cdot 1 = g(x,1) = x.$$

Proposición 5.- $\forall x \in \mathbb{N} \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

$\boxed{D}$ Supongamos que $M = \{x \in \mathbb{N} : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x\}$

Entonces, $1 \in M \neq \emptyset$. Luego, si $x \in M$

tenemos que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ ⊛

Sabemos que $S(x) \cdot 1 = S(x)$, entonces por

la definición de producto

$$1 \cdot S(x) = g(1, S(x)) = g(1, x) + 1$$
$$= 1 \cdot x + 1 \overset{⊛}{=} x + 1 = S(x) \Rightarrow S(x) \in M$$

$\Rightarrow M = \mathbb{N}$ por A5 $\square$

Por tanto, deducimos la

Existencia de el. neutro: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{N}$

Además se puede demostrar las propiedades

1. Asociativa $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{N}$
2. Commutativa $a \cdot b = b \cdot a$
3. Distributiva $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

2.4. Orden en $\mathbb{N}$

Defⁿ.- Decimos que una relación binaria R $(\sim)$ es de orden $\boxed{\text{estricto}}$ si cumple:

1) Antireflexiva: $a \nsim a$
2) Antisimétrica: $\left.\begin{array}{l} a \sim b \\ b \sim a \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$
3) Transitiva: $\left.\begin{array}{l} a \sim b \\ b \sim c \end{array}\right\} \Rightarrow a \sim c$

Será de orden $\boxed{\text{total}}$ si:

1') Reflexiva: $a \sim a$

2) y 3) anteriores.

Def^n.- Dados $a, b \in N$, decimos que a es menor que b $(a < b)$ si $\exists c \in N : a + c = b$

Diremos que a es menor o igual que b $(a \leq b)$ si $a < b$ ó $a = b$.

Nota.- Se puede observar que la relación $<$ es de orden estricto.

Proposición 6.- La relación $\leq$ es de orden total

Lema.- $\forall x, y \in N \Rightarrow x + y \neq x$

$\boxed{D}$ Se hace por $\boxed{A5}$ considerando

$$M = \{ x \in N : x + y \neq x \quad \forall y \in N \}$$

$1 \in M$ pq no tiene anterior por $\boxed{A3}$.

Si $x \in M \Rightarrow x + y \neq x \quad \forall y \in N$

Sup. $S(x) \notin M \Rightarrow \exists y \in N : S(x) = S(x) + y$

$\Rightarrow x + y = x$ ↯ $\Rightarrow M = N$

$\boxed{D \text{ Prop } 6}$

Reflexiva: Supongamos $a \in N$ entonces $a \leq a$ ya que $a = a$

Antisim: $\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ b \leq a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists v \in N : a + v = b \\ \exists u \in N : b + u = a \end{array}$

$\Rightarrow b + \underbrace{(u + v)}_{\in N} = b$ ↯ $\Rightarrow b = a$

Transitiva: Sea $\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ b \leq c \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists v \in N : a + v = b \\ \exists u \in N : b + u = c \end{array}$

$\Rightarrow$ ↯ $a + (v + u) = (a + v) + u = b + u = c$

$\Rightarrow a \leq c$

Def^n.- Un cjto ordenado $(A, \leq)$ es un cjto A junto con una relación de orden $\leq$.

Un conjunto bien ordenado es un cjto ordenado donde todo subconjunto tiene un mínimo

Prop 7.- (Principio b. ordenación)

Sea N cjto de Peano con una relación de orden $\leq$. Entonces $(N, \leq)$ está bien ordenado. ⚠

$\boxed{D}$ Supongamos $\emptyset \neq C \subset N$. Entonces,

si $1 \in C \Rightarrow \min(C) = 1$

si $1 \notin C \Rightarrow C \neq N$.

Consideremos el cjto

$$M := \{ x \in N : x \leq c \ \forall c \in C \}$$

Así $1 \in M \neq \emptyset$. Sabemos que $M \neq N$ porque si $M = N \Rightarrow C = \emptyset$. Así,

$$\exists x \in M : S(x) \notin M.$$

Por tanto $x < c \ \forall c \in C$. Luego, se tiene que $S(x) \leq c \ \forall c \in C$ pero como $S(x) \notin M$ tenemos que $\exists c' \in C : c' \leq S(x) \leq c \ \forall c \in C$

$\Rightarrow \min(C) = c'$ $\square$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (del extremo)

Todo subconjunto $A \subset N$, $A \neq \emptyset$ y acotado superiormente tiene un máximo

$\boxed{D}$ Como está acotado superiormente. Luego

$\exists x \in N : a \leq x \ \forall a \in A$.

$S = \{ y \in N : a \leq y \ \forall a \in A \} \neq \emptyset \ (x \in S)$

$\Rightarrow \exists \min(S) = s \in S$.

p.b.o

Si $s = 1 \Rightarrow A = \{1\}$

si $s \neq 1 \Rightarrow 1 \notin S \Rightarrow S \neq \mathbb{N}$.

Ahora bien s tiene anterior, es decir,

$\exists !\, m \in \mathbb{N} : s(m) = s$. Pero $m \notin S$

porque en ese caso sería el mínimo.

Entonces $\exists\, a' \in A : m < a' \leq s = s(m)$

$\Rightarrow a' = s = \min(S) \in A \Rightarrow a' = \max(A)$

$\square$

<u>Def</u>^{n}.- Un isomorfismo entre dos cjtos ordenados es un homomorfismo biyectivo que preserva el orden

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ Todos los cjtos de Peano son isomorfos

<u>$\boxed{D}$</u> Basta considerar $(A, \leq)$, $(A', \leq')$ cjtos de Peano y demostrar que

$$\begin{aligned} \varphi : A &\longrightarrow A' \\ a &\longrightarrow \varphi(a) = a' \end{aligned}$$

que ~~sati~~ cumple

- $\varphi(1) = 1'$
- $\varphi(s(a)) = s'(\varphi(a))$

es un isomorfismo.

<u>Def</u>^{n}.- Llamamos cjto de los números naturales $\mathbb{N}$ al representante de la clase de los cjtos de Peano. Se denota como

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

3. Sistemas de numeración

Def^n. - Un sistema de numeración es un cjto finito de símbolos llamados dígitos del sistema y un cjto de reglas de generación que nos permiten representar cualquier número natural.

El cardinal del cjto de dígitos se llama base

Ejemplo.- El sistema de numeración romana tenía los siguientes dígitos

$$D = \{I, V, X, L, C, D, M\}$$

$|D| = 7$ era la base.

Sin embargo, la generación y suma operativa debe ser compatible con reglas claras y sencillas.

No era el caso de la numeración romana

Antes de demostrar los resultados básicos de sist. de numeración vamos a considerar que $\mathbb{N} \ni 0$ dada la existencia del el. neutro en dichos sistemas.

Luego,

$$\begin{cases} a + 0 = 0 & \forall a \in \mathbb{N} \\ 0 \leq a & \forall a \in \mathbb{N} \\ a \cdot 0 = 0 & \forall a \in \mathbb{N} \end{cases}$$

T^a de la división euclidiana

Dados $D, d \in \mathbb{N}$ con $d \neq 0$, entonces $\exists!\ c, r \in \mathbb{N}$ tales que $D = c \cdot d + r$ con $r < d$

$\boxed{D}$ Si $D = 0 \Rightarrow c = r = 0 \quad \forall d \in \mathbb{N}$

Si $D \neq 0 \Rightarrow$ consideramos

$A = \{x \in \mathbb{N} : d\,x \leq D\} \neq \emptyset \; (0 \in A)$

$\Rightarrow \exists\, c = \max(A) \in A : S(c) \notin A$

$\Rightarrow \quad d \cdot c \leq D < d \cdot S(c) = d(c+1) = d \cdot c + d$

$\Rightarrow \exists\, c, r : c \cdot d + r = D$ con $\boxed{r < d}$

<u>Unicidad</u>

$D = d \cdot c_1 + r_1$ con $r_1, r_2 < d$, Sup s.p.g que

$D = d \cdot c_2 + r_2$ $\quad r_1 \leq r_2$

$\Rightarrow \exists\, h \in \mathbb{N} : r_1 + h = r_2$

$\Rightarrow D = d \cdot c_2 + r_1 + h = d\,c_1 + r_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} h = d \cdot (c_1 - c_2) \\ d c_2 + h = d c_1 \Rightarrow d c_2 \leq d c_1 \Rightarrow c_2 \leq c_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists\, v \in \mathbb{N} : c_2 + v = c_1$

$\Rightarrow \quad h = d \cdot v$ pero $h < d$

$\Rightarrow v = 0 \Rightarrow c_2 = c_1 \;, \; r_1 = r_2 \quad \square$

Tª Fundamental de la numeración

Sea $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$. Entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \neq 0$ $\exists! \, n_0, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$: $n_k \neq 0$ y

$$n = n_0 + \sum_{i=1}^{k} n_i b^i \, , \quad n_i < b \quad \forall i \in \{0, \ldots, k\}$$

$\boxed{D}$ La prueba se realiza llevando a cabo una división euclidiana iterativa sobre los cocientes c_i. La unicidad se prueba igual que el Tª anterior.

4. Breve historia sobre los sistemas de numeración

Hacia el 3000 a. C en Mesopotamia surgieron los primeros números como símbolos cuneiforme en tablillas de barro. Posteriormente, los imperios griego y romano adoptaron sistemas con gráficos diferentes.

El sistema actual, tiene origen indoarábigo, es un sistema posicional de base 10 que incluye el 0 y se desarrolló en India del s. V al VIII. Expandiendo se luego al mundo islámico y posteriormente a Europa.

Hoy en día, la base informática se base en el sistema binario de base 2. Este se debe a que solo tiene $D = \{0, 1\}$ y que simboliza si hay o no corriente.

5. Aspectos didácticos

Numeros cuadrados

$n=1$	$n=2$	$n=3$
□	□□	□□□
	□□	□□□
1	$1+3$	□□□
		$1+3+5$

.....

$$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$$

Números triangulares

o $n=1$

o
o o $n=2$

$2+1=3$

o
o o $n=3$
o o o

$3+3=6$

$$\Rightarrow 1+2+3+\dots+n=n^2-n$$

De esta forma podemos relacionar el concepto de número con la geometría y las sucesiones en la búsqueda de patrones.

6. Conclusiones

En este tema hemos construido el cjto $\mathbb{N}$ a través de la axiomática de Peano. Posteriormente hemos definido y presentado las bases de los sist de numeración. Finalizando con algunos aspectos pedagógicos para el aula de secundaria

7. Bibliografía

- Numeros increíbles, Ian Stewart. Ed. Crítica
- Gómez, B. (1998). Numeración y cálculo. Ed. Síntesis

2h 30'