TEMA 12: ESPACIOS VECTORIALES. VARIEDADES LINEALES. APLICACIONES ENTRE ESPACIOS VECTORIALES. TEOREMAS DE ISOMORFIA. I

Índice:

1. Introducción

Los espacios vectoriales son una herramienta esencial en matemáticas porque nos permiten trabajar con cantidades que tienen magnitud y dirección, como las fuerzas en Física. Introducidos en el siglo XIX por matemáticos como Grassmann y Hamilton representaron un gran avance al conectar conceptos geométricos con álgebra.

Así, los conceptos que presentamos en este Tema son fruto del desarrollo matemático de dicho siglo y que ~~permitieron ab~~ originaron una teoría más abstracta fundamental para el desarrollo matemático posterior simplificando problemas complejos.

2. Espacios vectoriales. Variedades lineales.

Consideremos dos cjtos, $V \neq \emptyset$ y K un cuerpo; junto con dos leyes de composición: una interna en V $(+)$ y otra externa $(\cdot)$. Concretamente:

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$(u, v) \longrightarrow u+v$$

$$\cdot : K \times V \longrightarrow V$$
$$(\alpha, u) \longrightarrow \alpha u$$

<u>Def</u>^{n}.- Un espacio vectorial (e.v) V sobre K, o K-espacio vectorial (K-e.v) es un cjto $V \neq \emptyset$ cumpliendo que:

a) $(V, +)$ grupo abeliano

b) La operación externa "$\cdot$", llamada producto por escalares de K verifica

- $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v, \ \forall \alpha \in K, \forall u, v \in V$
- $(\alpha+\beta) u = \alpha u + \beta u, \ \forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in V$
- $(\alpha \cdot \beta) u = \alpha(\beta u); \ \forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in V$
- $1 u = u \quad \forall u \in V$, siendo 1 la unidad en K.

<u>Nota</u>.- Los elementos de V se llaman vectores. $0 = \vec{0}$ es el elemento neutro de $(V, +)$, y $-u$ es el opuesto de u en $(V, +)$. Así

$$u + \vec{0} = u \quad \forall u \in V$$

$$u + (-u) = \vec{0} \quad \forall u \in V$$

En todo el tema obviaremos "$\cdot$" cuando escribamos el producto, además $0 := \vec{0}$ y llamaremos escalares a los elementos de K

Propiedades.- Sea V un K-e.v. Entonces para cada $u, v, w \in V$ se tiene:

a) Ley de simplificación:

$$u + v = u + w \Rightarrow v = w$$

b) $0 \cdot u = \vec{0}$

c) $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

d) Si $\alpha u = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0 \vee u = \vec{0}$

e) $(-\alpha) \cdot u = -(\alpha u)$

f) Si $\alpha u = \beta u$ con $u \neq \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta$

g) Si $\alpha u = \alpha v$ con $\alpha \neq 0 \Rightarrow u = v$

Ejemplo 1.- • Sea K^n las n-tuplas $(x_1, \ldots, x_n)$ tales que $x_i \in K$ $\forall i = 1, \ldots, n$.

K^n es un K-ev para

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

Dado $\alpha \in K$, entonces

$$\alpha (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

Ejemplo 2.- El cjto de funciones continuas en $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$-e.v. Con la suma de funciones.

2.1 Subespacios vectoriales

Defn.- Sea V un K-e.v. Un cjto $S \neq \emptyset$ tal que $S \subset V$ es un subespacio vectorial de V si S es un K-e.v. Denotamos $S \leq V$ o S es K-s.ev de V

Nota.- Observemos que $S = \{\vec{0}\}$ es un K-e.v. de V. Además, diremos que S es un subespacio vectorial propio si $S \neq \{0\}$, $S \neq V$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (caracterización de s.e.v)

Sea V K-e.V. Entonces $\{0\} \neq S \subseteq V$

$$S \text{ s.e.V} \iff \begin{array}{l}\forall u,v \in S \\ \forall \alpha,\beta \in K\end{array} \quad \alpha u + \beta v \in S$$

$\boxed{D}$ $\boxed{\Rightarrow}$ es trivial por definición ~~$\alpha = \beta = 1$ y $\alpha = 1, \beta = 0$~~

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos S ~~s.e.v. de V~~. cumple que $\begin{array}{l}\forall u,v \in S \\ \forall \alpha,\beta \in K\end{array}$ $\alpha u + \beta v \in S$

Entonces,

Si $\alpha = 1$, $\beta = -1 \Rightarrow u - v \in S \Rightarrow (S, +)$ grupo

Además, $(V, +)$ abeliano $\Rightarrow (S, +)$ abeliano.

Al mismo tiempo es cerrado al producto por escalares, si $\alpha = 1$, $\beta = 0$ $\forall u \in S$

$$\alpha u \in S \Rightarrow S \leq V \quad \square$$

<u>Def</u>^{n}.- Sean $S_1, S_2 \leq V$ entonces

$$S_1 + S_2 = \{ s_1 + s_2 : s_1 \in S_1, s_2 \in S_2 \}$$

Se puede demostrar que $S_1 + S_2 \leq V$. Además, cuando $S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\}$ denotamos

$S_1 \oplus S_2$, llamada suma directa

2.2. Dependencia lineal

Supongamos que V- $\mathbb{K}$-ev.

<u>Def</u>^{n}. Decimos que $u \in V$ es una combinación lineal (c.l) de $u_1, \dots, u_n \in V$ si $\exists a_1, \dots, a_n \in K$ tales que

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$$

Si $S \subset V$, entonces denotamos como $\langle S \rangle$ el cjto de todas las combinaciones lineales de elementos de S.

Proposición.- $\langle S \rangle$ es el s.e.v más pequeño que contiene a S.

$\boxed{D}$ Evidentemente $\langle S \rangle \leq V$, $S \subset \langle S \rangle$.

Supongamos $F \leq V$ t.q. $S \subset F$.

Entonces, todas las combinaciones lineales de S estan incluidas $\Longrightarrow \langle S \rangle \subset F \Longrightarrow \langle S \rangle$ más pequeño de los s.e.v que contiene S. $\square$

Defn.- Si $\langle S \rangle = F$ diremos que S genera F o que es un sistema generador de F.

Ejemplo.- El plano: $P = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x,y \in \mathbb{R}\}$ es un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. Notemos que $\forall p \in P$

$$p = (x,y,0) = x(1,0,0) + y(0,1,0)$$ para algun $x,y \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle = P$$

Nota.- En algunos libros el concepto de variedad lineal es sinónimo de "subespacio vectorial". Sin embargo, es más habitual hablar de variedades lineales cuando trabajamos en espacios afines.

2.3. Bases de un espacio vectorial

Defn.- Un cjto de vectores de S se dice linealmente independiente (l.i) si $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ t.q

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

$s_i \in S \ \forall i$

En caso contrario, se dice que son linealmente dependientes (l. d

Proposición.- Sea $v_1, \dots, v_n$ l d $\iff$ algun v_i es c.l de los otros

Definición.- Una base B de V K-e.V es un cjto de vectores l.i tales que

$$\langle B \rangle = V$$

Proposición.- B ⊂ V es una base $\iff$ todo $v \in V$ se expresa de forma única como c.l de elementos de B

$\boxed{D}$ $\boxed{\Rightarrow}$ Sea $B \subset V$ una base $\Rightarrow \langle B \rangle = V$

$\forall v \in V = \langle B \rangle \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tales que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$ donde $b_i \in B$.

Sup $v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j$, entonces $\sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k) b_i = 0$

$\Rightarrow \beta_k = \alpha_k$ por ser B base.

$\boxed{\Leftarrow}$ Por hipotesis $\langle B \rangle = V$. Ahora falta demostrar que son l.i los elementos de B.

$\vec{0} = 0 b_1 + \dots + 0 b_n$ pero como es única

$\Rightarrow B = \{b_1, \dots, b_n\}$ l. ind □

TEOREMA (de Steinitz) Si $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de V K-e.v, y $v_1, \dots, v_m$ l.i. Entonces, se pueden sustituir m vectores de B por $v_1, \dots, v_m$ obteniendo una nueva base B' de V. En particular, $m \leq n$

Corolario.- Sea V un K-e.v de dimensión finita. Entonces, todas las bases tienen el mismo número de elementos.

$\boxed{D}$ Sup. $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base de V. Entonces, $B' = \{v_1, \dots, v_k\}$ otra base de V.

Si $k > n \Rightarrow v_{n+1} \in V = \langle B \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow v_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ para algunos $\alpha_i \in K \; \forall i$

Como B base, podemos sustituir en B' los n vectores l.i de B, por sus n primeros vectores, en virtud del T^a^ Steinitz. Luego,

$$B'' = \{u_1, \dots, u_n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, \dots, v_k\} \text{ es base } ↯$$

$\Rightarrow k \leq n$. Si $k < n \Rightarrow$ ↯ con = razonamiento $\Rightarrow k = n$ $\square$

Def^n^.- Si V es un K-e.v que tiene una base finita, llamamos dimensión de V al número de elementos de la base B de V. Es decir

$$\dim(V) = |B|$$

En caso contrario, V es de dimensión infinita.

Escaneado con CamScanner

Ejemplos: En el $\mathbb{K}$-e.v K^n el c.to

$$B = \{(1,0,\ldots,0), (0,1,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1)\}$$

es una base de K^n llamada base canónica.

Nota: Como todo $v \in V$ se expresa de f. única como c.l. de elementos de la base B. A dichos escalares que conforman la c.l se les llama coordenadas

TEOREMA (extensión de la base) Si $\dim(V) = n$ y tenemos $\{v_1,\ldots,v_m\}$ l.i entonces $\exists\, v_{m+1},\ldots,v_n \in V$: $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es base de V

TEOREMA Sea V K-e.v, $\dim(V)=n$, $v_1,\ldots,v_n \in V$. Entonces, son equivalentes:

i) $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es base de V

ii) $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es lin. ind

iii) $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es sist. generador de V.

D) i) $\rightarrow$ ii) por def$^{\underline{n}}$

ii) $\rightarrow$ iii) podemos completar $\{v_1,\ldots,v_n\}$ para encontrar una base pero como $\dim(V)=n$

$\Longrightarrow \langle\{v_1,\ldots,v_n\}\rangle = V$

iii) $\rightarrow$ i) Supongamos que $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es lin. ~~indep~~dep. Si reordenamos índices es claro que $\langle v_1,\ldots,v_n\rangle = \langle v_2,\ldots,v_n\rangle$, luego completamos para encontrar una base $\nexists$ ya que $\dim(V)=n$ $\langle v_1,\ldots,v_n\rangle$ es S.G

2.4 Suma, intersección de subespacios

Proposición. - Sean $F, G \leq V$ K-e.v. Entonces $F \cap G, F+G \leq V$ y $F+G$ es el más pequeño que contiene a $F \cup G$.

$\boxed{D}$ • Sean $u, w \in F \cap G$; $\alpha, \beta \in K$

Como $F, G \leq V \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha u \in F \cap G \\ \beta w \in F \cap G\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha u + \beta w \in F \cap G \Rightarrow F \cap G \leq V$

• Si $u, v \in F+G \Rightarrow \begin{array}{l} u = f_1 + g_1 , \\ v = f_2 + g_2 , \end{array} \begin{array}{l} f_i \in F \\ g_i \in G \end{array} \forall i$

$\Rightarrow \alpha u + \beta v = \alpha (f_1 + g_1) + \beta (f_2 + g_2) =$

$= \underbrace{\alpha f_1 + \beta f_2}_{\in F \leq V} + \underbrace{\alpha g_1 + \beta g_2}_{\in G \leq V} \in F + G \leq V$

Sea $H \leq V$ que contiene a $F \cup G$, entonces $F+G \subseteq H \Rightarrow F+G$ es el menor que contiene $F \cup G$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ Si $F, G \leq V$ K-e.v de dimensión finita. Entonces, $F, G, F\cap G, F+G$ son de dimensión finita y cumplen que

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(F \cap G) + \dim(F+G)$$

Escaneado con CamScanner

3. Espacio vectorial cociente

Def^n.- Sea V un K-e.V, $F \leq K$. Decimos que u y v están relacionadas módulo F si $u - v \in F$

Nota.- El hecho de que $F \leq V$ garantiza que sea una clase de equivalencia

Así, definimos el c^to cociente que denotamos por $V/_F$ y en el que la suma y producto por escalar no depende de los representantes, por medio de las clases de equivalencia

$$[u] = \{u + f : f \in F\}$$

$$+) \quad [u] + [v] = [u+v] \quad \forall u, v \in V$$

$$\cdot) \quad \alpha [u] = [\alpha u] \quad \forall \alpha \in K$$

Esto dota al c^to $V/_F$ de estructura de K-e.V

Proposición.- Si V es K-e.v de dimensión finita, $F \leq V$.

$\Longrightarrow$ $V/_F$ dim. finita y

$$\dim(V/_F) = \dim(V) - \dim(F)$$

$\boxed{D}$ Se considera B_F una base de F se completa para tener una B base de V y se toman clases de equivalencia.

4. Aplicaciones lineales

Defª.- Sean U, V K-e.v. Una aplicación $f: U \to V$ que respeta las operaciones y estruct. vectoriales se le llama aplicación lineal (a.l)

Es decir,

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad \forall u, v \in V$$

Propiedades.- Sea U, V K-e.v y $f: U \to V$ a.l. Entonces:

a) $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(u_i)$ $\quad \alpha_i \in K$, $u_i \in U$ $\forall i$

b) $f(\vec{0}) = \vec{0}$

c) $f(-u) = -f(u)$

d) Si f, g son a.l $\Rightarrow f \circ g$ a.l.

Ejemplo.- Como hemos visto en la sección anterior las propiedades de tomar clases,

$$f: V \longrightarrow V/F \qquad \text{es una}$$
$$u \longrightarrow [u] \qquad \text{a.l}$$

Proposición.- Sean U, V K-e.v y $f: U \to V$ una a.l. Si $G \leq U \Rightarrow f(G) \leq V$
$H \leq V \Rightarrow f^{-1}(H) \leq U$

4.1. Núcleo e imagen de una a.l

Defª.- Sea $f: U \to V$ una a.l. El núcleo de f es cjto $\text{Ker}(f) := \{u \in U : f(u) = \vec{0}\}$.
La imagen de f es el cjto $\text{Im} f := \{f(u) : u \in U\}$

Prop. – El núcleo $\ker f$ y la imagen $\operatorname{Im} f$ son S.e.v ~~de~~ $\mathcal{V}$.

$\boxed{D}$ $\ker f = f^{-1}(\{\vec{0}\}) \leq \mathcal{U}$

$\operatorname{Im} f = f^{*}(\mathcal{U}) \leq V$ por la prop anterior $\square$

Prop. – Si $f: \mathcal{U} \to V$ es una a.l. y $\mathcal{U}$ un K-e.v. de dim. finita. Entonces, $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ son de dim finita con

$$\dim(\mathcal{U}) = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)$$

$\boxed{D}$ Como $\mathcal{U}$ dim finita $\Rightarrow$ $\ker f \leq \mathcal{U}$ dim finita. Sea B' una base del $\ker f$ la completamos hasta tener $B = \{\underbrace{b_1, \ldots, b_m}_{\in \ker f}, \underbrace{b_{m+1}, \ldots, b_n}_{\in \mathcal{U} \setminus \ker f}\}$ una base de $\mathcal{U}$.

Luego $f(u) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\right) =$

$\forall u \in \mathcal{U}$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underbrace{f(b_i)}_{\vec{0}}{}^{\in \ker f} + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j f(b_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(b_j) \Rightarrow \langle f(b_{m+1}), \ldots, f(b_n) \rangle = \operatorname{Im} f$$

Además es base por serlo B de $\mathcal{U}$ $\square$

$$\Rightarrow \dim(\mathcal{U}) = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)$$

Proposición - Una a.l. es inyectiva $\Longleftrightarrow \ker f = \{0\}$

supray. $\Longleftrightarrow \operatorname{Im} f = V$

Def^n. - Un isomorfismo $f: U \to V$ es una a.l. biyectiva. Si $U = V$ se llama automorfismo

Def^n - Decimos que U y V son isomorfos si $\exists f$ un isomorfismo entre ellos. Se denota como $U \cong V$.

Prop. - Si U, V dim. finita.

$$U \cong \Longleftrightarrow \dim(U) = \dim(V)$$

5. TEOREMES DE ISOMORFIA

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ Si $f: U \to V$ ap. l entonces

$$U/\ker f \cong \operatorname{Im} f$$

$\boxed{D}$ Definimos la aplicación

$$g: U/\ker f \to \operatorname{Im} f$$
$$[u] \to g([u]) = f(u)$$

Se puede ver que está bien definida.

Sea $x \in \operatorname{Im} f$, luego $\exists y \in U : f(y) = x$

$\Longrightarrow g([y]) = f(y) = x \Longrightarrow g$ supray.

Sea $[x] \in \ker g \Longrightarrow g([x]) = f(x) = 0$

$\Longrightarrow x \in \ker f \Longrightarrow [x] = [0] \Longrightarrow \ker g = \{[0]\}$

$\Longrightarrow g$ inyectiva $\Longrightarrow U/\ker f \cong \operatorname{Im} f$ $\square$

Corolario 1 - Si $F, G \leq \mathcal{U}$ entonces

$$F+G/_F \cong G/_{F\cap G}$$

(D) Veamos que si $f: G \longrightarrow F+G/_F$
es una a.l. supray $u \longrightarrow [u] =: f(u)$

Entonces, en virtud del resultado anterior

$$G/_{\ker f} \cong \operatorname{Im} f = F+G/_F$$

Si $\ker f = F \cap G$ ya lo tenemos

$\left[\begin{array}{l} \text{Sup. } x \in \operatorname{Im} f \implies x = f(u) = [u], \\ u \in G \implies \text{es claro que es supray.} \end{array}\right]$

Sup $x \in \ker f \subseteq G \implies f(x) = [\vec{0}] \implies x \in F$

$\implies x \in F \cap G \implies \ker f = F \cap G$ □

Corolario 2 - Si $F \subset G$, $F, G \leq \mathcal{U}$ entonces

$$(\mathcal{U}/_F)/_{(G/_F)} \cong \mathcal{U}/_G$$

Observación - Los T^{a} anteriores se pueden demostrar por dimensiones si son de dimensión finita ya que $\mathcal{U} \cong V \iff \dim(\mathcal{U}) = \dim(V)$

Demostraremos el corolario 2 sólo para $\mathcal{U}, V$, dimensión finita.

D] Sabemos que $\dim(U/F) = \dim(U) - \dim(F)$

$\dim(G/F) = \dim(G) - \dim(F)$

$$\Rightarrow \dim\left(\frac{(U/F)}{(G/F)}\right) = \dim(U) - \dim(F) - (\dim(G) - \dim(F)) =$$

$$= \dim(U) + \dim(F) - \dim(G) + \dim(F)$$

$$= \dim(U) - \dim(G) = \dim(U/G)$$

$$\Rightarrow \frac{(U/F)}{(G/F)} \cong U/G$$

2h

6. Conclusiones