Tema 2: Fundamentos y aplicaciones de la teoría de grafos. Diagramas de árbol.

1 INTRODUCCIÓN
- 1.1. Introducción histórica
- 1.2. Justificación del contenido.
- 1.3. Conocimientos previos.

2. GRAFOS
- 2.1. Definiciones y elementos característicos
  - 2.1.1. Definición (grafo)
  - 2.1.2 Definición (grafo simple)
  - 2.1.3 Ejemplo
  - 2.1.4 Definición (elementos caracterist.)
- 2.2. Tipos de grafos.
  - 2.2.1. Subgrafo
  - 2.2.2. Digrafo
  - 2.2.3. Grafo nulo (trivial).
  - 2.2.4. Grafo completo.
  - 2.2.5. Grafo regular.
  - 2.2.6. Grafo bipartido.

3. OPERACIONES.
- 3.1. Definición (grafos isomorfos)
- 3.2. Unión.
- 3.3. Definición (grafo complementario).
- 3.4. Suma.

4. SECUENCIA DE ARISTAS.
- 4.1. Definición (camino)
- 4.2. Definiciones (tipos de caminos)
- 4.3 Grafo conexo.
- 4.2. Teorema. conexo $\longrightarrow |A| \geq |V| - 1$.

5. GRAFOS EULERIANOS Y HAMILTONIANOS.

5.1. Definición (grafo euleriano)

5.2 Teorema G conexo $\Leftrightarrow$ $\delta(v)$ par.

5.3. Definición (grafo hamiltoniano).

6. ÁRBOLES

6.1. Definición (árbol)

6.2. Definición (bosque).

6.3. Ejemplo.

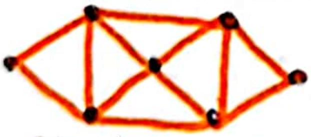
6.4. Teorema. $|A| = |V| - 1$.

6.5. Teorema $\begin{cases} 1) \ G \text{ árbol} \\ 2) \ G \text{ conexo } |A| = n-1 \\ 3) \ G \text{ sin ciclos } |A| = n-1. \end{cases}$

OJO Revisar notació de subgraf.

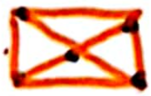
Könisberg.

Euleriano

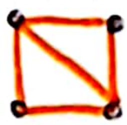


SEMIEULERIANO

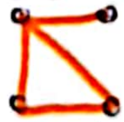
NO euleriano



Hamiltoniano



semihamit.



no hamilt.

Tema 2: Fundamentos y aplicaciones de la teoría de grafos. Diagramas en árbol.

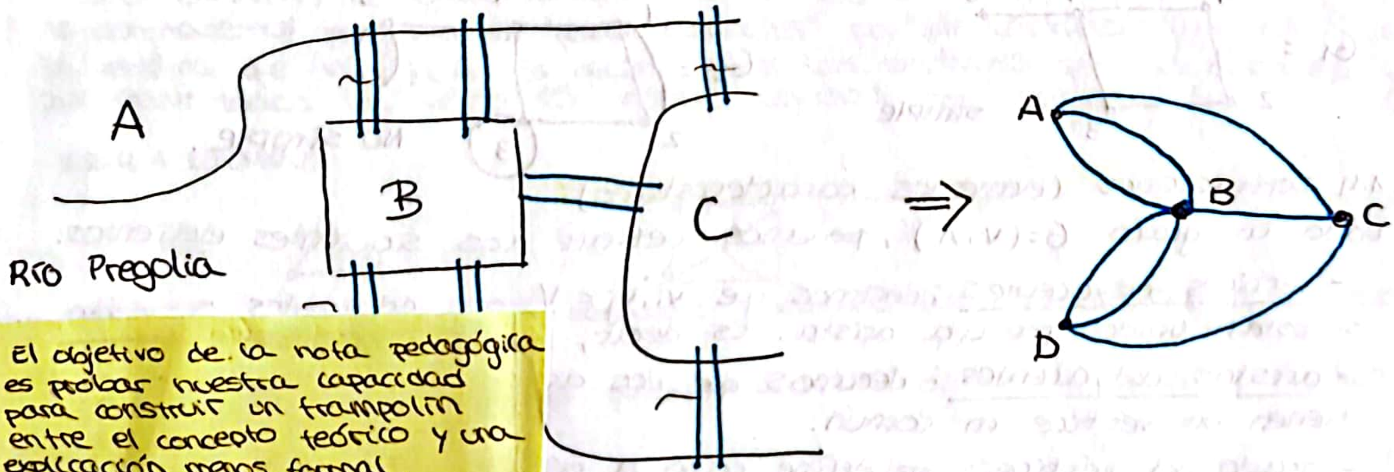
1. Introducción

1.1 Introducción histórica

El origen de la teoría de grafos se remonta al siglo XVIII, cuando Leonard Euler recurrió al concepto de grafo para resolver un problema mediante una simplificación esquemática de la realidad.

El concepto en sí surgió de forma casi anecdótica cuando Euler trató de resolver el famoso problema de los siete puentes de Könisberg (actual Kaliningrado). El problema consistía en determinar si, partiendo de un punto cualquiera de la ciudad existía un recorrido que permitiese pasar una única vez por cada uno de los siete puentes que atravesaban la ciudad. Para entender mejor el problema debemos tener en cuenta que Könisberg tenía una orografía bastante peculiar.

En el siguiente dibujo se muestra una representación de la ciudad prusiana junto con la simplificación del problema que utilizó Euler para resolver el problema. Notemos que en él los objetos de llegada se reducen a puntos mientras que los puentes (vías de comunicación) pasan a ser líneas.



El objetivo de la nota pedagógica es probar nuestra capacidad para construir un trampolín entre el concepto teórico y una explicación menos formal.

Dichas representaciones a través de grafos han sido útiles posteriormente en la resolución de otros problemas donde la sustitución de un diseño geográfico por un diseño topológico ha permitido la resolución del teorema de los cuatro colores o bien clarificar el mapa de estaciones de metro (originalmente en 1931, por Harry Beck).

1.2. Conocimientos previos:

Dadas las características del tema no necesitaremos grandes conocimientos, tan sólo lo referente a la aritmética básica vista en el tema 1, algunos conceptos básicos de teoría de conjuntos (Tema 11) y un mínimo de combinatoria (Tema 3). Todo ello sin incurrir en contradicciones

1.3. Justificación del contenido

El tema consta de dos bloques diferenciados: una primera parte dedicada al formalismo de la teoría de conjuntos, y una segunda parte a conceptos más prácticos y aplicaciones.

Respecto a la parte de resolución y demostración de teoremas sólo demostraremos los más importantes y dejaremos enunciado el resto por cuestiones de tiempo.

2. GRAFOS

Un grafo es un conjunto de vértices y aristas que sirven para representar ciertas manifestaciones de la realidad, como bien circuitos electrónicos, planos de carreteras... Nos ayudan a estudiar sus comunicaciones, a describir cómo se conecta un conjunto de puntos...

2.1 Definiciones y elementos característicos

2.1.1 Definición (grafo)

Se define un grafo como un par ordenado de conjuntos (V, A) donde V es un conjunto finito cuyos elementos denotaremos como vértices de G, y donde A es un conjunto de subconjuntos de 2 elementos de V. Estos elementos se conocen como aristas de G

Notación:

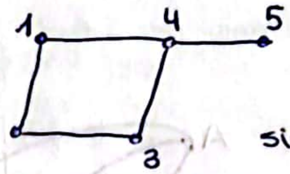
$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$A = \{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V\}$$

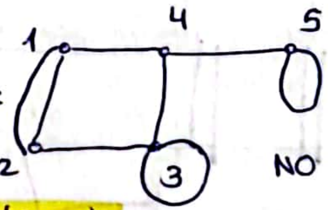
2.1.2 Definición (grafo simple)

Se define como grafo simple aquel grafo donde a cada par $\{v_i, v_j\}$ $i \neq j$ le corresponde una única arista. En caso contrario sería un grafo no simple (llamado también multigrafo).

2.1.3 EJEMPLO

$G_1 =$ 

simple

$G_2 =$ 

NO simple.

2.1.4 Definiciones (elementos característicos)

Dado un grafo $G = (V, A)$, podemos definir los siguientes elementos:

- vértices adyacentes: decimos que $v_i, v_j \in V$ son adyacentes si y sólo si están unidos por una arista. Es decir, $(v_i, v_j) \in A$.
- aristas adyacentes: decimos que dos aristas son adyacentes si tienen un vértice en común.
- grado del vértice: se define como el número de aristas que concurren en él. Se denota como $g(v_i)$ donde $v_i \in V$.
- Lazo: arista formada por (v_i, v_i), $v_i \in V$.
- Matriz de adyacencia: Sea $G = (V, A)$ un grafo con n vértices de forma que $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. La matriz de adyacencia de G, respecto de la relación escogida de los vértices, es la matriz cuadrada $n \times n$, $A_G = (a_{ij})$ definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i v_j \in A \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Notemos que la matriz de adyacencia siempre es simétrica y, además la diagonal principal siempre será 0 en caso de que esté asociada a un grafo simple.

EJEMPLO:

Si tomamos 2.1.3 y el grafo G_1 su matriz asociada es $A_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.2 Tipos de grafos

A continuación definiremos una serie de tipos de grafos que aparecen ~~pueden deducirse~~ fácilmente tras conocer los elementos característicos.

2.2.1 Subgrafo

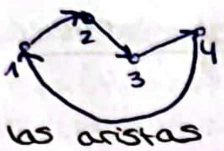
Sean $G=(V,A)$ y $H=(V',A')$ dos grafos. Diremos que H es un subgrafo de G si $V' \subset V$ y $A' \subset A$.

Como puede verse ~~Por ejemplo,~~ en el ejemplo 2.1.3 tenemos que G_1 es un subgrafo de G_2.

2.2.2 Digrafo (o grafo orientado)

Un digrafo es aquel grafo en que los pares de vértices que definen las aristas están orientados.

2.2.2.1 EJEMPLO



A las aristas orientadas se las llama arcos.

2.2.3 Grafo nulo (o trivial)

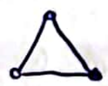
Es aquel grafo que tiene n vértices pero no tiene aristas. Lo denotamos por $N_n = (V, \emptyset)$ ← no sé si esta notación sería correcta.

2.2.4 Grafo completo.

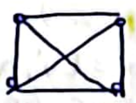
Sea $G=(V,A)$ un grafo simple. Diremos que G es un grafo completo, y lo denotaremos por K_n si para cualquier par de vértices $v_i, v_j \in V$ / $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$ $i \neq j$ se verifica que $(v_i,v_j) \in A$. Es decir todos los vértices son adyacentes y por ende todos los vértices están unidos por aristas.

2.2.4.1 EJEMPLO

K_3



K_4



Podría verse como el conjunto formado por los polígonos con todas las diagonales posibles.

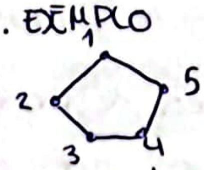
Notemos que en este caso puede calcularse de forma sencilla el número de aristas posibles:

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

2.2.5 Grafo regular.

Dado $G=(V,A)$ diremos que G es un grafo regular si $g(v_1)=g(v_2)=\dots$ $\dots=g(v_n)$ $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ donde n es el número de vértices del grafo. Es decir, son regulares aquellos grafos donde todos los vértices están conectados por el mismo número de aristas.

2.2.5.1. EJEMPLO



Notemos que los grafos completos son grafos regulares donde todos los vértices tienen grado máximo. Es decir, grado $n-1$. Son los grafos completos que denotamos por $K_{n,n-1}$?.

Notemos además que si bien todos los polígonos regulares son grafos regulares, el recíproco no es cierto. Este ejemplo puede ser útil para ilustrar los fallos lógicos en secundaria.

2.2.6 GRAFO BIPARTIDO

Sea $G=(V,A)$ un grafo. Diremos que G es un grafo <u>bipartido</u> si el conjunto V está formado por dos conjuntos disjuntos de forma que los vértices de un mismo conjunto no pueden estar conectados entre sí por una arista. Las aristas van de un vértice de un grupo a un vértice del otro grupo.

Estos grafos tienen infinidad de aplicaciones prácticas en problemas de asignación: asignaturas, horarios, tareas.
De hecho se merecieron un premio Nobel por sus aplicaciones a procesos económicos.

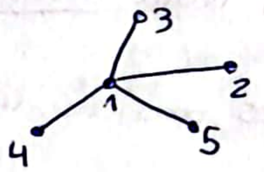
$$V = V_1 \cup V_2 \; / \; V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

Recibe el nombre de bipartido completo si existen todas las aristas completas.

Un caso particular de grafo bipartido es el <u>grafo estrella</u> donde tan sólo hay un vértice en un subgrupo.

2.2.6.1 EJEMPLO

$K_{1,5}$



Así pues, tras presentar la unión de conjuntos de forma indirecta para definir el concepto de grafo bipartido, pasamos al bloque de operaciones con grafos donde la unión de grafos será precisamente una de las operaciones a destacar.

3. OPERACIONES

3Trimbe 7. En primer lugar daremos unas definiciones previas.

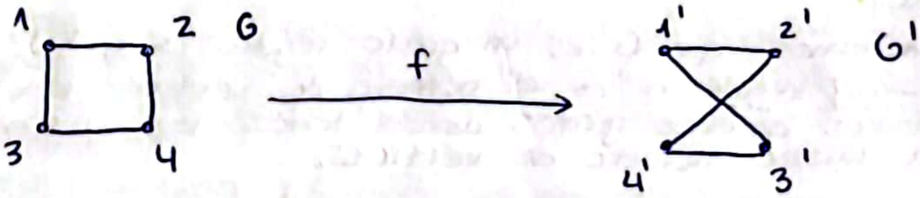
3.1 Definición. (Grafos isomorfos).

Dados dos grafos $G=(V,A)$ y $G'=(V',A')$ se dice que G y G' son <u>isomorfos</u>, y lo denotamos como $G \cong G'$, si existe una biyección $f: V \longrightarrow V'$ tal que $\forall u,v \in V$ se verifica que:

$$(u,v) \in A \iff (f(u), f(v)) \in A'$$

Es decir, existe una correspondencia biunívoca entre los vértices de G y G' siendo el número de aristas el mismo.

3.1.2 EJEMPLO.

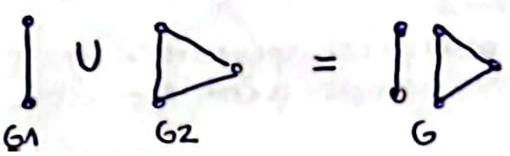


3.2 Unión

Sean $G_1=(V_1,A_1)$ y $G_2=(V_2,A_2)$ dos grafos disjuntos de modo que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Definimos la unión como un nuevo grafo $G=(V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2)$

3.2.1. EJEMPLO



NOTA:
La unión no es ley interna ya que la unión de dos grafos completos no produce un grafo completo.

Notemos además que, como resultado de esta operación se deduce la definición de un nuevo tipo de grafos.

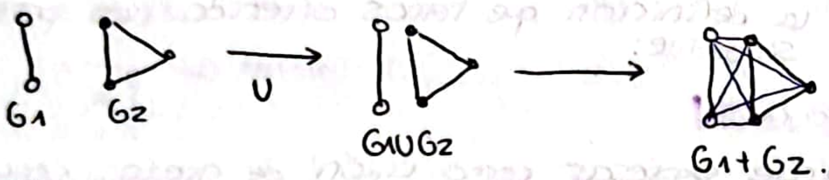
3.3. Definición (grafo complementario)

Dado un grafo $G=(V,A)$ y un subgrafo $G_1 \subseteq G$, se conoce como grafo complementario $\overline{G_1}$ a aquel que verifica que $\overline{G_1} \cup G_1 = G$.

Como ejemplo ilustrativo de este tipo de grafos podemos recurrir al ejemplo 3.2.1, donde G sería el grafo completo y G_1 sería un subgrafo de G y complementario de G_2, y viceversa.

3.4 SUMA DE GRAFOS.

Dados $G_1=(V_1,A_1)$ y $G_2=(V_2,A_2)$ dos grafos disjuntos definimos la suma de grafos como una operación binaria entre grafos consistente en la unión de ambos grafos $(G_1 \cup G_2)$ a la que se le añade el trazado de todas las aristas posibles desde cada vértice de G_1 a G_2.



Notemos que en este caso la suma sí es ley interna.

Veamos a continuación un nuevo grupo de grafos atendiendo a una restricción particular.

4. SECUENCIAS DE ARISTAS.

Muchos problemas de grafos requieren estudiar el modo en que sus vértices pueden estar conectados.

4.1 Definición (camino).

Sea $G=(V,A)$ un grafo. Se llama camino de longitud n en G a una sucesión de vértices y de aristas con un vértice inicial V_0 y un vértice final V_m donde el número de aristas que conecta V_0 con V_m es n. Este número marca la longitud del camino.

NOTA:
Para conocer el número de caminos de longitud n que existen dentro de un grafo podemos recurrir a la matriz de adyacencia. Para ello, debemos elevarla a n y fijarnos en la entrada de los vértices que une el camino.

EJEMPLO 2.13.

$$A_{G_1}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

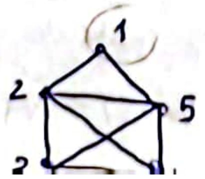
nº caminos long 2 que unen 1 y 5

4.2 Definiciones.

Sea $G=(V,A)$ un grafo. Definimos los siguientes tipos de

- camino cerrado: si $V_n = V_0$.
- camino simple (o cola): aquel en que todas las arist
- trayectoria: camino simple en que todos los vértice
- ciclo: trayectoria cerrada.

4.2.3 EJEMPLO.



$2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 3$ es un camino simple

$2 \to 3 \to 4 \to 5$ es una trayectoria

$2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 2$ es un ciclo.

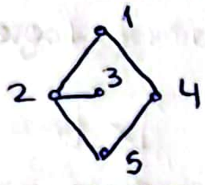
Tras definir el concepto de camino, podemos introducir un tipo muy importante de grafos.

4.3 GRAFO CONEXO (Definición)

Sea $G=(V,A)$ un grafo. Diremos que G es conexo si todo par de vértices pertenecientes a G tiene un camino dentro de G que los una.

En caso contrario, diremos que el grafo es disconexo y cada uno de sus subgrafos conexos maximales será lo que se define como componentes conexas.

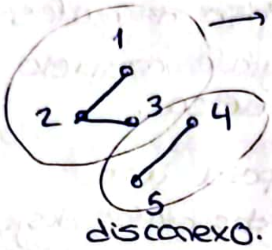
4.3.1 EJEMPLO



conexo

→ subgrafo: componente conexa.

→ subgrafo: comp. conexa.



disconexo.

suprimible?? sí.

Notemos que el grafo conexo también puede definirse una vez introducida la operación de unión de grafos, de forma que el grafo conexo se entiende como aquel grafo que no puede ser expresado como unión de dos grafos. Y esta idea más allá de la definición que hemos ofrecido nos permite probar resultados como el siguiente:

4.4 Teoremas de grafos conexos.

4.4.1 Todo grafo se puede expresar como unión de grafos conexos.
comp. conexas

La demostración resulta trivial dado este último comentario. Si el conexo es el único grafo que no surge como la unión, este debe ser el elemento básico para construir nuevos grafos mediante uniones.

Otro resultado relativo a grafos conexos sería el siguiente

4.4.2. Si $G=(V,A)$ es un grafo conexo $\Longrightarrow |A| \geq |V|-1$. → nº aristas y nº vértices resp

Demostramos el resultado por inducción sobre $n=|V|$

• caso inicial si $n=1$

En este caso solo hay un vértice y ninguna arista, luego el único grafo con un vértice ya es conexo y verifica que $|A|=0=|V|-1$

• Paso inductivo supongamos que se cumple para n y lo probamos para $n+1$.

Escogemos un vértice V_0 con $g(V_0)=K$. Si quitamos de G el vértice V_0 junto con sus aristas asociadas entonces como mucho pueden quedar K componentes conexas. Denotamos estas componentes conexas como $G_i=(V_i,A_i)$ con $i=1,\dots,\ell\leq K$

Puesto que $K<n+1$, podemos aplicar la hipótesi inductiva sobre cada componente conexa, obteniendo que: $|A_i|\geq|V_i|-1$.

Si sumamos:

$$\sum_{i=1}^{\ell}|A_i| \geq \sum_{i=1}^{\ell}(|V_i|-1) = \left(\sum_{i=1}^{\ell}|V_i|\right)-\ell.$$

$\sum_{i=1}^{\ell}|V_i| = |V|-1$

No estem afegint ni llevant res, simplement expressem els vèrtexs de les comp. connexes en funció dels vèrtexs

Y si ahora añadimos el vértice que habíamos qui[tado] el vértice entonces:

$$|A| = k+\sum_{i=1}^{\ell}|A_i| \geq \left(\sum_{i=1}^{\ell}|V_i|\right)+(k-\ell) = |V|-1+(k-\ell)$$

5. GRAFOS EULERIANOS Y HAMILTONIANOS

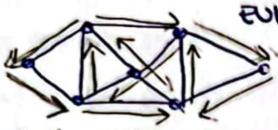
Continuamos en esta sección con una característica importa de los grafos relacionada con su construcción que, además, fue el estudio de esta característica la que dio pie al estudio de Euler para intentar resolver el problema de los puentes de Könisberg.

5.1 Definición (Grafo Euleriano).

Un grafo es euleriano si podemos encontrar un ciclo (trayectoria cerrada) que pase por todos los vértices y por todas las aristas, por estas últimas sólo 1 vez.

Notemos que al ser un ciclo el vértice final coincidirá con el inicial.
Notemos que los vértices sí pueden repetirse en el camino.

5.1.1 EJEMPLO

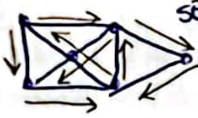


EULERIANO

Def. informal:
→ grafo euleriano cuando se puede trazar sin levantar lápiz sin dibujar 2 veces la misma arista y coincid. inic y fin

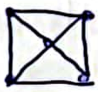
Si el ciclo no es cerrado (trayectoria abierta) entonces se lo conoce como semieuleriano.

5.1.2 EJEMPLO



SEMIEULERIANO.

5.1.3 EJEMPLO



NO EULERIANO.

NOTA HISTÓRICA

Como vemos el problema de los puentes de Könisberg puede reducirse a probar si existe un ciclo euleriano que permita pasar por todos los puentes sin repetir ninguno y acabando en el mismo lugar de donde se partió. Euler resolvió el problema y demostró que no lo es.

Un resultado bastante potente que nos permite determinar si un grafo contiene un ciclo euleriano es el siguiente.

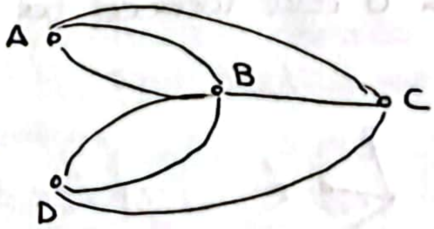
5.2. Teorema

Sea $G=(V,A)$ un grafo. G tendrá un ciclo euleriano si y solo si:

1) G es conexo
2) Cada vértice de G tiene grado par.

En este puede probarse 1 implicación.

Por ello, pese a que el grafo asociado a la ciudad de Könisberg y sus puentes sí es conexo, no se cumple la segunda condición.

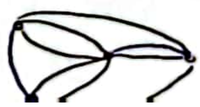


$g(A)=3$
$g(B)=5$
$g(D)=3$
$g(C)=3.$

Eso sí, bastaría con añadir o eliminar dos aristas para hacer que el grafo sí fuese euleriano.

ELIMINANDO 2.

AÑADIENDO 2.



NOTA:

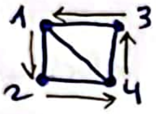
Aunque podamos llegar a conocer si un grafo es euleriano, puede complicarse la detección de un ciclo o camino euleriano en él. Para ello existen diferentes mecanismos, como por ejemplo el algoritmo de Fleury.

5.3 GRAFO HAMILTONIANO (Definición):

Un grafo es hamiltoniano si podemos encontrar un ciclo que pase por todos los vértices exactamente una única vez.

Por tanto, la diferencia entre euleriano y hamiltoniano radica en las aristas, ya que en el caso de los grafos hamiltonianos no se exige que el camino deba pasar por todas las aristas.

5.3.1 EJEMPLO



HAMILTONIANO.

Si el camino que encontramos no es un ciclo sino una trayectoria abierta entonces el grafo es semihamiltoniano.

5.3.2 EJEMPLO

SEMIHAMILTONIANO

5.3.3 EJEMPLO

NO HAMILTONIANO.

En este caso, a diferencia de en los grafos eulerianos, no existe un resultado (caracteriz) tan potente para determinar si un grafo es o no hamiltoniano.
No obstante este tipo de grafos tiene aplicaciones importantes en ámbitos como el diseño de rutas de mensajería y distribución de mercancías.

Veamos finalmente un tipo de grafos que también tiene aplicaciones importantes a nivel teórico y práctico.

6. ÁRBOLES

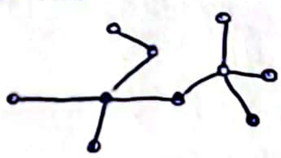
6.1. Definición:

Sea $G=(V,A)$ un grafo. Diremos que G es un árbol si es conexo y no tiene ciclos.

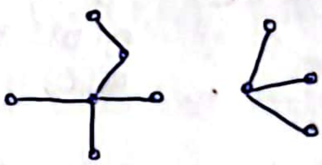
6.2 Bosque (Definición):

Diremos que G es un bosque si G es no conexo y todas sus componentes conexas no tienen ciclos. Es decir si G está formado por la unión de árboles.

6.3 EJEMPLO



ÁRBOL



BOSQUE

En este caso, existen además una serie de resultados importantes sobre este tipo de grafos.

Escaneado con CamScanner

6.4. Teorema

Sea $G=(V,A)$ un árbol, entonces $|A|=|V|-1$

Notemos que hemos probado un resultado similar previamente para grafos conexos. En esta ocasión la demostración procedería por inducción como la anterior.

Vamos a probar otro resultado importante que caracteriza este tipo de grafos. y para el que usaremos el teorema que acabamos de enunciar.

6.5 Teorema.

Sea $G=(V,A)$ un grafo con $|V|=n$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1) G es un árbol
2) G es conexo y $|A|=n-1$
3) G no tiene ciclos y $|A|=n-1$

¿puede ser? yo creo que sí.

Demo:

Las implicaciones de 1) $\longrightarrow$ 2) y de 1) $\longrightarrow$ 3) son evidentes por la definición de árbol y el Teorema 6.4

Por tanto necesitamos probar de 2) $\longrightarrow$ 1) y de 3) $\longrightarrow$ 1) y ya lo tendremos.

Para probar de $\boxed{2) \longrightarrow 1)}$ podemos recurrir al teorema 4.4.2 sobre grafos conexos.

De esta forma si G es conexo, ya sabemos que $|A| \geq |V|-1$.

Pero, como $|V|=n$ y $|A|=n-1$ por hipótesis, sabemos que $|A|=|V|-1$ lo único que tenemos que probar es que G no tiene ciclos, y ya tendremos que es árbol.

Procedemos por reducción al absurdo.

Suponemos que G tiene un ciclo. Por tanto, existiría una arista que podríamos suprimir (de ese mismo ciclo) de forma que G' continuaría siendo conexo. Pero entonces tendríamos un grafo conexo G' donde $|A'|=|V'|-2$ pero ello contradice el Teorema 4.4.2.

subgrafo de G, porque hemos quitado una arista

Para probar de $\boxed{3) \longrightarrow 1)}$ procedemos igualmente por reducción al absurdo.

Suponemos que $G=(V,A)$ no tiene ciclos, que verifica $|A|=|V|-1$ ($|A|=n-1$) pero que no es conexo.

Podemos expresar pues $G_i=(V_i,A_i)$ con $i=1,\dots,k$, $k>1$ como todas las componentes conexas que conforman G. Obviamente, cada componente conexa es conexa, y además cada componente forma un árbol por no existir ciclos. Esto implica que $\forall i \; |A_i|=|V_i|-1$

Por tanto,

$$|A|=\sum_{i=1}^{k}|A_i| = \sum_{i=1}^{k}(|V_i|-1) = \left(\sum_{i=1}^{k}|V_i|\right)-k = n-k \underset{k>1}{<} n-1.$$

y llegamos a que $|A|<n-1$, lo cual contradice la hipótesis.

7. ASPECTOS DIDÁCTICOS.

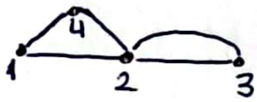
7.1. Ubicación.

Tal y como se establece en el Decreto 171/2022, por el cual se establecen las enseñanzas de bachillerato, la utilización de modelos matemáticos, incluyéndose en estos los grafos, aparece reflejado dentro del sentido espacial y conectado con el saber referido a la visualización, el razonamiento y la modelización geométrica.

7.2. Propuesta didáctica.

Para trabajar el concepto de grafo, y relacionarlo a su vez con otro concepto esencial en bachillerato como son las matrices, se propone la resolución del problema aparecido en la película "El indomable Will Hunting". El problema plantea:

Dado el grafo G:



1) Encontrar la matriz de adyacencia (A)

2) Encontrar la matriz que da el número de caminos de longitud 3 (A^3).

NOTA

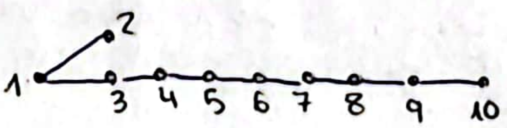
Existen 2 apartados más referidos a funciones que también podrían incluirse, pero consideramos apropiado establecer en primer lugar una conexión entre el concepto de grafo y matriz de adyacencia que, posteriormente, podrá ser ampliado.

También aparece en la misma película un problema referido a árboles que pide "hallar el conjunto de árboles no isomorfos con 10 nodos".

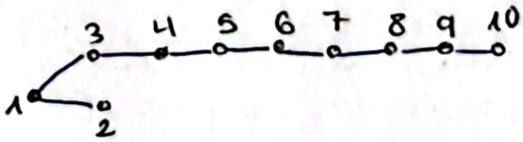
NOTA

El concepto de árbol no isomorfo ha sido presentado previamente al definir grafos isomorfos.

Por ejemplos, 2 árboles isomorfos con 10 nodos serían:



y



8. BIBLIOGRAFÍA.

- Grima, C.: 2021. "En busca del grafo perdido". Ed. Ariel.
- Boyer, C.: 1986. "Historia de la Matemática". Ed. Alianza.
- Rosen, K.H: 2004. "Matemática Discreta y sus aplicaciones". Ed. McGraw Hill