Tema 3: Técnicas de recuento. Combinatoria.

1. INTRODUCCIÓN.

1.1. Introducción histórica.
1.2. Justificación del contenido.
1.3. Conocimientos previos.

2. VARIACIONES.

2.1. Variaciones con repetición.
2.1.1. Definición.
2.1.2 Ejemplo.

2.2. Variaciones ordinarias
2.2.1. Definición.
2.2.2. Ejemplo.

3. PERMUTACIONES

3.1. Factorial de un número.
3.2. Permutación ordinaria.
3.2.1. Definición.
3.2.2. Ejemplo.

3.3. Permutación con repetición.
3.3.1 Definición.
3.3.2. Ejemplo.

4. COMBINACIONES.

4.1. Combinaciones sin repetición (ordinarios)
4.1.1. Definición.
4.1.2 Ejemplo.
4.2. Combinaciones con repetición
4.2.1. Definición.
4.2.2. Ejemplo.

5. NÚMEROS COMBINATORIOS.

5.1. Combinatorios y propiedades.

5.2. Triángulo de Tartaglia.

5.3. Enésima potencia de un binomio.

Fórmula binomio de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i$$

OJO m elementos de n en n

$$VR_{m,n} = m^n$$

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdots (m-(n-1)) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

$$P_m = m!$$

$$PR_m^{abc} = \frac{m!}{a!b!c!}$$

$$C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!n!} = \binom{m}{n}$$

$$CR_{m,n} = C_{m+1,n} = \frac{(m+1)!}{(m+1-n)!n!} = \binom{m+1}{n}$$

Escaneado con CamScanner

Tema 3 Técnicas de recuento. Combinatoria.

1. Introducción.

1.1. Introducción histórica

Aunque se cree que las primeras consideraciones sobre recuentos de objetos se hacían en la antigüedad clásica no aparecen documentadas hasta el siglo X a través de textos hindúes, donde se presenta por primera vez el comúnmente conocido como triángulo de Tartaglia.

Muchos de estos resultados no trascienden, y no es hasta el siglo XVI - XVII cuando se retoman en Europa gracias a Cardano, Pascal y Fermat y debido principalmente al auge de los juegos de azar y al gran interés de los jugadores por mejorar sus resultados.

1.2 Justificación del contenido.

El tema está estructurado en función del tipo de recuentos existentes. Trabajaremos uno por uno mediante su formulación académica y formal, para a continuación ejemplificarlos con casos reales.

Para ello, principalmente tenemos dos grandes bloques diferenciados principalmente por recuentos donde importa el orden y donde no. Notemos además que, en este tema, son pocos los resultados que pueden probarse, por lo que buscaremos trabajar y desarrollar al máximo todos los resultados posibles.

1.3. Conocimientos previos

Dadas las características del tema (i.e. pertenece al bloque de números) recurriremos principalmente al uso de operaciones aritméticas básicas. Por ello, no necesitamos dar por sentados grandes conocimientos previos, tan sólo las operaciones matemáticas esenciales.

Tras esta breve pero ilustradora introducción, comencemos a introducir los diferentes tipos de recuentos.

2. VARIACIONES

2.1 VARIACIONES CON REPETICIÓN.

Se llaman variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n a los diferentes grupos que pueden formarse de modo que, en cada grupo haya n elementos pudiendo repetirse alguno de estos elementos, una o varias veces. Además, se consideran diferentes los grupos que difieren en algún elemento o en el orden de colocación.

Notación: $VR_{m,n}$.

Veamos las posibilidades para el conjunto: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$.

- Monarias $VR_{m,1} = m$.
- Binarias

$$m\text{ elementos}\left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hspace{6cm}}^{m\text{ elementos}}} \\ a_1a_1 & a_1a_2 & \dots & a_1a_m \\ a_2a_1 & a_2a_2 & \dots & a_2a_m \\ \vdots & & & \vdots \\ a_ma_1 & \dots & \dots & a_ma_m \end{array}\right.$$

- m elementos distintos entre sí.
- Pueden repetirse (por tanto n puede ser mayor que m)
- El orden sí importa.

Por tanto, $VR_{m,2} = m \cdot m = m^2$

Notemos que tenemos los mismos elementos que en el caso de las variaciones ordinarias pero incluyendo las repeticiones de elementos.

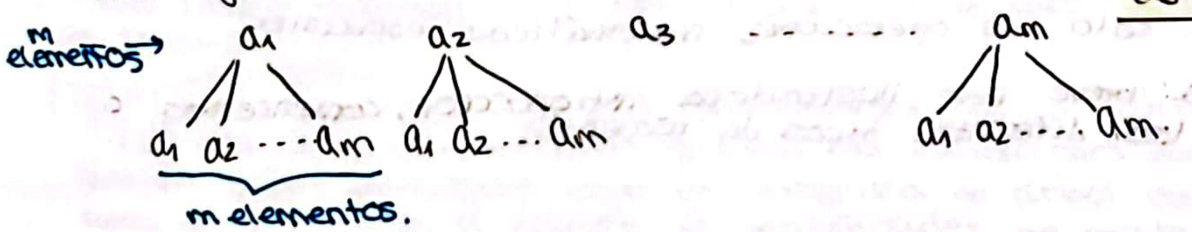
Podemos generalizar las variaciones con repetición como:

$$\boxed{VR_{m,n} = m^n}$$

NOTA

Al igual que en el caso anterior, podemos recurrir a árbol para representar todas las posibilidades existen en el segundo nivel incluiremos una posibilidad más. por

La nota es pedagógica. comentamos que como estos conceptos se trabajan en (4ºESO?) y los alumnos ya han visto previamente diag los utilizamos para ilustrar la fórmula de las VR para tomar denom

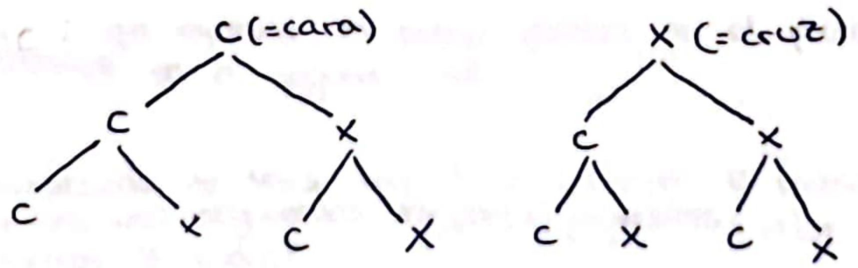


EJEMPLO

¿cuántos resultados posibles existen al lanzar una moneda al aire 3 veces?

$VR_{2,3} = 2^3 = 8$

En forma de árbol lo veríamos como



Todo ello nos permite conectar la parte de combinatoria con la probabilidad.

2.2. VARIACIONES ORDINARIAS.

Llamaremos <u>variación ordinaria</u> de m elementos tomados de n en n $(n \leq m)$ a los diferentes grupos que se pueden formar, de forma que los n elementos de un grupo sean distintos y donde los grupos se diferencian entre ellos, en algún elemento o en el orden de colocación.

Notación: $V_{m,n}$.

Veamos las posibles variaciones de un conjunto: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

- Monarias: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{m-1}, a_m$.

$$V_{m,1} = m$$

- Binarias:

$$\begin{array}{c} \\ m \text{ elementos} \end{array} \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hspace{6cm}}^{(m-1) \text{ elementos.}}} \\ a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_m \\ a_2a_1 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_m \\ a_3a_1 & a_3a_2 & \cdots & a_3a_m. \\ \vdots & & & \\ a_ma_1 & \cdots & \cdots & a_{m-1}a_m \end{array} \right.$$

- m elementos distintos entre sí
- No existen repeticiones $(n \leq m)$.
- El orden de la colocación/elección importa.

Por tanto, $V_{m,2} = m \cdot (m-1)$.

- Ternarias:

Para hacer una representación como las anteriores en este caso deberíamos recurrir a una matriz tridimensional.

Podemos generalizar las variaciones como:

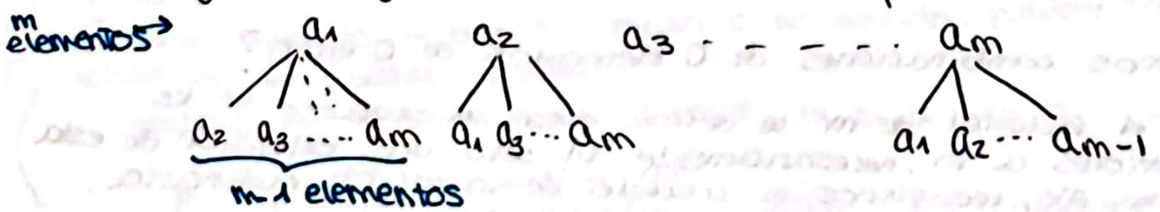
$$\boxed{V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1))}$$

NOTA 1

Más adelante veremos otra expresión para las variaciones haciendo uso del factorial.

NOTA 2 → pedagógica. ↳ forma alternativa en el aula (más sencilla, usa recurso familiar: el árbol)

Más allá de la representación gráfica, las variaciones ordinarias también pueden entenderse como un diagrama de árbol donde cada rama se bifurca en el número de posibilidades que existe para escoger el siguiente elemento. Veámoslo para variaciones binarias.



De forma que existen m posibilidades en el primer nivel, y $m-1$ posibilidades en el segundo nivel.

<u>EJEMPLO</u>

En un campeonato de tenis hay 9 concursantes. El podio lo forman el ganador y los dos siguientes mejores jugadores. ¿De cuántas formas se puede formar el podio?

$$V_{9,3} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504 \text{ posibilidades.}$$

Veremos a continuar con un caso particular de variaciones ordinarias que permite introducir de forma coherente el concepto de factorial.

3. PERMUTACIONES

Las permutaciones son un caso particular de variaciones ordinarias de m elementos de m en m. Es decir, el número de elementos coincide con el tamaño de los grupos.

Para definirlas con mayor rigor introducimos a continuación la siguiente definición:

3.1 Factorial de un número natural.

Se llama factorial de $m \in \mathbb{N}$ al producto de m factores consecutivos desde m hasta la unidad.

Notación: $m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

PROPIEDADES

i) $0! = 1$

ii) $n! \cdot (n+1) = (n+1)!$ (por definición).

iii) $n! \cdot (n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot m = m!$

m factores

NOTA: La conexión entre el concepto de factorial, permutación y variación ordinaria de m elementos de m en m, nos permite entender y justificar la primera de las propiedades. Lo veremos tras definir permutación ordinaria.

3.2 Permutación ordinaria.

Se llama permutación ordinaria de m elementos al conjunto formado por todas las formas posibles de ordenar m elementos diferenciando dos permutaciones entre sí por el orden de colocación. Esto implica que la permutación de m elementos se identifica con una variación de m elementos de m en m.

Notación: P_m

Y por tanto, $\boxed{P_m = V_{m,m}} = m(m-1)\cdot(m-2)\cdot \ldots \cdot (m-(m-1)) =$
$= m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 1 = \boxed{m!}$

(*) Utilizamos esto para probar $0! = 1$.

Así pues, dado que $V_{m,m} = m!$, si retomamos el caso de $0!$ obtenemos que:

$V_{0,0} = 0!$

¿cómo hacemos combinaciones de 0 elementos de 0 en 0?

Suprimible

(Puesto que el factorial de m se define como el producto de los números inferiores a m, necesariamente 0! será una extensión de esta definición. Para ello, recurrimos al concepto de variación ordinaria.)

Un conjunto de 0 elementos hace referencia a un conjunto vacío: $\emptyset$.

¿Y cuántas formas tenemos de ordenar el conjunto vacío?

1 sola posibilidad, no hacer nada.

Esta explicación se basa en un principio intuitivo. Podrían ofrecerse otros motivos o justificaciones relacionadas con la definición de número combinatorio, pero hemos decidido incluir esta por su valor didáctico a la hora de introducir el concepto de factorial.

Notemos además que la expresión inicial de $V_{m,n}$ puede reescribirse utilizando factoriales:

$$V_{m,n} = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1)) = \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))(m-n)\cdot\ldots}{(m-n)\cdot\ldots\cdot 1}$$

$$= \frac{m!}{(m-n)!} \Rightarrow \boxed{V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}}$$

EJEMPLO (Este ejemplo antes) Al introducir factoriales

¿De cuántas formas distintas pueden sentarse 5 personas en 5 butacas diferentes?

$$P_5 = 5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120 \text{ formas}$$

3.3 Permutaciones con repetición

Las permutaciones con repetición hacen referencia a la combinación de m elementos en grupos de m en m donde no todos los elementos son distintos entre sí. Es decir tenemos a elementos de una clase, b elementos de otra clase ... y así hasta llegar a los m elementos.

Notación: $P_m^{a,b,c\ldots}$

Para poder calcular este tipo de permutación vamos a relacionarlas en primer lugar con las permutaciones ordinarias. Notemos que en las permutaciones con repetición al haber elementos iguales prescindimos de sus permutaciones. De forma que para expresar una permutación ordinaria a partir de una con repetición, deberemos añadir la permutación de los elementos iguales.

$$P_m^{a,b,c}\cdot a!\cdot b!\cdot c! = P_m$$

$$\Rightarrow P_m^{a,b,c} = \frac{P_m}{a!\cdot b!\cdot c!} = \frac{m!}{a!\cdot b!\cdot c!}$$

Donde a, b y c hacen referencia al número de veces que se repite cada uno de los elementos iguales.

EJEMPLO

¿Cuántas palabras diferentes, tengan o no sentido, pueden formarse con las letras de la palabra BANANA?

Veamos que la A se repite 3 veces, la N se repite 2 veces.

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3!\,2!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot2!} = \frac{120}{2} = 60 \text{ palabras diferentes.}$$

Con este último apartado finalizamos los tipos de recuento donde sí importa el orden de colocación. Pasemos ahora a aquellos recuentos donde el orden no es importante.

4. COMBINACIONES.

4.1. COMBINACIONES SIN REPETICIÓN

Llamamos combinaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n $(n \leq m)$ a los diferentes grupos que se pueden formar con n de esos m elementos de modo que los grupos serán diferentes sólo si se diferencian en algún elemento pues, no importa el orden de colocación.

Notación: $C_{m,n}$.

Veamos diferentes tipos. Sea $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$.

- Monarias:

$$a_1, a_2, \dots, a_m \longrightarrow C_{m,1} = m.$$

- Binarias:

$$\begin{array}{c|l} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{m-1 \text{ elementos}} \\ & a_1a_2 \quad a_1a_3 \cdots\cdots a_1a_m \\ m & \qquad\quad a_2a_3 \cdots\cdots a_2a_m \\ \text{filas} & \qquad\qquad\ddots\; a_3a_4 \cdots a_3a_m \\ & \qquad\qquad\qquad\ddots \\ & \qquad\qquad\qquad\quad a_{m-1}a_m \end{array}$$

Notemos que al tener una forma triangular, en este caso estamos contemplando la mitad de casos que en el caso de las variaciones, ya que estamos eliminando los "elementos simétricos" al no importar el orden.

Por tanto, $C_{m,2} = \dfrac{m \cdot (m-1)}{2}$

- Generalización

Tras estudiar el caso de combinaciones binarias, podemos apreciar como las combinaciones sin repetición son en esencia variaciones sin repetición de las que hemos suprimido aquellos casos donde se repiten los mismos elementos en orden distinto. Es decir al considerar n elementos del conjunto A y agruparlos entre sí, sólo seleccionamos una de dichas agrupaciones. Prescindiendo, pues, del resto de permutaciones. Así pues:

$$C_{m,n} \cdot P_n = V_{m,n}$$

Que, dicho sea en otras palabras: a las combinaciones sin repetición de m elementos de n en n les falta añadir las permutaciones de n elementos (donde sí importa el orden) para llegar a ser variaciones sin repetición de m elementos de n en n.

De forma que, $C_{m,n} = \dfrac{V_{m,n}}{P_n} = \dfrac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \dfrac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$

NOTA

Esta última expresión de las combinaciones sin repetición nos permite introducir más adelante otro nuevo tipo de números.

EJEMPLO

¿Cuál es el número de combinaciones de la primitiva?

$$C_{49,6} = \frac{49!}{43! \cdot 6!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!}$$

4.2. COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Se llaman combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n a las diferentes agrupaciones de n elementos, iguales o distintos que se pueden hacer, de forma que dos combinaciones difieren en al menos un elemento sin importar el orden.

Notación: $CR_{m,n}$.

Veamos qué tipos existen; sea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

- Monarias:

$$a_1, a_2, \dots, a_m$$

$$CR_{m,1} = m.$$

- Binarias:

$$\left.\begin{array}{l} \overbrace{a_1a_1 \quad a_1a_2 \cdots\cdots\cdots a_1a_m}^{m \text{ elementos}} \\ \quad a_2a_2 \quad a_2a_3 \cdots\cdots a_2a_m \\ \qquad a_3a_3 \cdots \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad a_ma_m \end{array}\right\} \begin{array}{c} m+1 \\ \text{elementos} \\ \text{(filas)} \end{array}$$

Notemos que en este caso tenemos los mismos casos que en las combinaciones sin repetición pero añadiendo el elemento a_ia_i $i \in \{1, \dots, m\}$ a cada columna, y apareciendo una última fila más.

Por tanto, $CR_{m,2} = \dfrac{m\cdot(m+1)}{2}$

De forma que, si intentamos relacionarlo con la expresión para combinaciones sin repetición, obtendríamos que:

$$CR_{m,2} = \frac{m\cdot(m+1)}{2} = C_{m+1,2}$$

- Generalización:

En general, este tipo de combinaciones podría expresarse para un n cualquiera como:

$$CR_{m,n} = C_{m+1,n} = \frac{(m-1+n)!}{(m-1)!\cdot n!} \; ?$$

Y de esta forma la fórmula se entiende fácilmente al haber construido $CR_{m,n}$ a partir de $C_{m+1,n}$.

Veamos un ejemplo:

EJEMPLO

¿Cuántas fichas tiene el juego del dominó?

→ Cada ficha de dominó está formada por dos agrupaciones de puntos que varían desde 0 hasta 6. (7 posibilidades). Y hemos comentado que en cada ficha aparecen 2 de estas posibilidades.

$$CR_{7,2} = \frac{(7-1+2)!}{(7-1)!\cdot 2!} = \frac{8!}{6!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}\cdot 2!} = 28 \text{ fichas.}$$

Pasemos finalmente al último apartado que nos permitirá expresar los diferentes tipos de combinaciones mediante un tipo de números íntimamente relacionados.

5. NÚMEROS COMBINATORIOS

5.1. Combinatorios y propiedades

Definimos el número combinatorio $\binom{m}{n}$ (leído como m sobre n) como la siguiente expresión:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} \quad \text{donde} \quad 0 \leq n \leq m.$$

Los números combinatorios cumplen las siguientes propiedades:

i) $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$

ii) $\binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} = m$

Ambas propiedades son fácilmente comprobables aplicando la definición.

iii) $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$

Ésta también se deduce fácilmente, ya que únicamente cambian de orden los factores que se multiplican en el denominador:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} \quad y \quad \binom{m}{m-n} = \frac{m!}{(m-(m-n)) \cdot (m-n)!} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

iv) FÓRMULA DE STIFEL.

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$$

Dicha fórmula puede generalizarse además si la aplicamos recorrentemente al término de la derecha:

$$\binom{m-1}{n} = \binom{m-2}{n-1} + \binom{m-2}{n}$$

$$\binom{m-2}{n} = \binom{m-3}{n-1} + \binom{m-3}{n}$$

v) $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \cdots\cdots + \binom{n-1}{n-1}$

Esta propiedad nos permite agrupar los combinatorios de forma sencilla.

NOTA:
Esta propiedad, como veremos a continuación, está íntimamente relacionada con el triángulo de Tartaglia.

5.2 Triángulo de Tartaglia

El triángulo de Tartaglia, también es conocido como triángulo de Pascal, y con otros muchos nombres, ya que el conocimiento de dicho triángulo es anterior a ambos personajes. Los historiadores han rastreado su origen hasta el "Chandas shastra", un texto sánscrito atribuido a Pingala, escrito en algún momento entre el 500 a.C. y el 200 a.C.

Veamos pues su construcción:

El triángulo parte del número 1 en la cima. Imaginamos que a la misma altura del 1 se encuentran infinitos 0s. La fila siguiente se construye mediante la suma de los dos números posteriores, de forma que obviamos aquellas posiciones cuyo resultado da 0. De esta forma en la segunda fila sólo hay dos números no triviales. Si continuamos el proceso de forma recurrente obtenemos una figura como la siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Las propiedades de esta construcción (y sus aplicaciones) son inmediatas cuando se observa que dichos números corresponden a los números combinatorios $\binom{m}{n}$, donde m hace referencia a la fila escogida y n a la posición del número dentro de la fila (contando de izquierda a derecha, o viceversa, debido a la simetría).

Esto nos permite apreciar cómo la creación de los números como suma de los dos superiores concierda con la expresión de la fórmula de Stifel: Veámoslo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array}.$$

Notemos que por cómo está definido el combinatorio dentro del triángulo podemos garantizar que $m \geq n$.

→ NOTA PEDAGÓGICA → Capítulo séptima noche, el diablo de los números.

Veamos por último la relación que se establece entre los números combinatorios y el conocido binomio de Newton.

5.3. Enésima potencia de un binomio.

Los números combinatorios, además de en el cálculo de combinaciones, ya que si observamos su definición puede apreciarse como sirven para expresar este tipo de recuentos, aparecen también y son útiles en otros contextos.

En particular, los números combinatorios nos permiten dar una fórmula generalizada para el cálculo del binomio $(a+b)^n$, con $n \in \mathbb{N}$. | cómo son a y b.

Veámoslo para los primeros casos de n:

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = 1a + 1b$

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$\vdots$

Como puede apreciarse los coeficientes de los términos que van apareciendo concierdan con los que aparecen en cada n fila del triángulo.

De esta forma se construye la fórmula:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n;$$

o lo que es lo mismo: $\boxed{(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}\cdot b^i}$

que puede probarse fácilmente por inducción.
De hecho, el caso inicial ya lo hemos visto, por lo que únicamente quedaría ver el paso inductivo.

Tomando como hipótesi inductiva $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}\cdot b^i$, vamos a demostrarlo para $n+1$.

$$\Rightarrow (a+b)^{n+1} = (a+b)^n\cdot(a+b) \underset{\substack{\uparrow\\ H.I.}}{=} \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}\cdot b^i\right)(a+b) =$$

$$= a\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}\cdot b^i + b\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}\cdot b^i = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i+1}\cdot b^i + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}\cdot b^{i+1} =$$

$$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i+1}\cdot b^i + \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}a^{n-i+1}\cdot b^i =$$

cambio para ajustar exponentes.

$$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i+1}\cdot b^i + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}a^{n-i+1}\cdot b^i + \binom{n}{n+1-1}\cdot a^{n-n-1+1}\cdot b^{n+1}$$

$$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i+1}\cdot b^i + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}a^{n-i+1}\cdot b^i + \binom{n}{n}\cdot b^{n+1} =$$

$$= \underbrace{\binom{n+1}{0}}_{\text{Prop comb}}a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\Big[\underbrace{\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}}_{\text{fórm. Stifel.}}\Big]a^{n-i+1}\cdot b^i + \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{\text{Prop. comb.}}\cdot b^{n+1} =$$

$$= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}a^{n+1-i}\cdot b^i + \binom{n+1}{n+1}\cdot b^{n+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}a^{n+1-i}\cdot b^i$$

De esta forma finalizamos el desarrollo del tema, dejando estos contenidos y conocimientos para los siguientes temas donde serán requeridos. Especialmente, en el bloque de azar y probabilidad.

6. BIBLIOGRAFÍA.

- "Historia de la Matemática" C. Boyer. Ed. Alianza.
~~"[illegible]"~~ ?
- Enzensberger, H.M: 2013.: "El diablo de los números". Ed Siruela.
- Rosen, K.H: 2004. "Matemática Discreta y sus aplicaciones". Ed. Mc Graw Hill