1 Introducció

Les equacions sorgiren a l'antiguitat de la necessitat de resoldre problemes pràctics i geomètrics. Al *papir Rhind*, datat al voltant del 2.000 a.C., ja apareixen problemes equivalents a la resolució d'equacions lineals senzilles, que es solucionen amb un algorisme similar al de la *regula falsi*.

A Babilònia l'àlgebra va assolir un nivel molt més alt que a Egipte: els mesopotàmics dominaven la resolució de les equacions de segon grau i operaven amb facilitat transposant termes, eliminant denominadors i factorizant expressions.

Al s.IX el matemàtic àrab al-Khwarizmi publicà *Kitab al-jabr wa'l muqabala*; del seu nom i del títol de la seva obra n'hem obtingut els mots *algorisme* i *àlgebra*. En el text fa un estudi complet de les equacions de segon grau a coeficients enters, acompanyades de comprovacions geomètriques.

Al s.XVI Cardano publicà el seu *Ars Magna*, on divulgava la resolució de les equacions generals de graus 3 i 4, tot i que els seus descobridors foren, respectivament, Scipione del Ferro i Niccolo Tartaglia per la cública, i Ludovico Ferrari per la quàrtica.

Al s.XIX Abel fou el primer en demostrar que no existeix cap fórmula que ens proporcioni les solucions d'una equació general de grau superior a 4 expressades en termes d'operacions algebraiques elementals (sumes, restes, productes, quocients, potències i radicals) sobre els seus coeficients. Galois també va provar-ho, i a més a més va caracteritzar les equacions resolubles, estudiant els grups de permutacions de les seves arrels.

A llarg del tema ens centrarem en les equacions algebraiques, tot i que l'últim apartat sobre mètodes aproximats de resolució és aplicable a equacions de qualsevol tipus.

2 Observacions generals

En virtut del teorema fonamental de l'àlgebra sabem que tot polinomi de grau n a coeficients reals té exactament n arrels complexes comptant les seves multiplicitats. A més, si $z \in \mathbb{C}$ és una arrel de $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$, també $\bar{z}$ ho és, perquè $p(\bar{z}) = \overline{p(z)} = \bar{0} = 0$, i aleshores $(x-z)(x-\bar{z}) | p(x)$, però $(x-z)(x-\bar{z}) = x^2 - 2\mathrm{Re}(z)x + |z|^2 \in \mathbb{R}[x]$ i és clarament irreductible, perquè si no ho fos tindria un factor lineal i, en conseqüència, una arrel real. Per tant, els polinomis irreductibles de $\mathbb{R}[x]$ són, com a molt, de grau 2, i tota equació algebraica de grau senar té almenys una arrel real.

D'altra banda, és fàcil detectar les arrels múltiples d'un polinomi gràcies al següent resultat:

Proposició. *Si α és una arrel de $p(x)$ amb multiplicitat m, llavors també és arrel de $p'(x)$ amb multiplicitat $m-1$.*

DEMOSTRACIÓ: Escrivim $p(x) = (x-\alpha)^m \cdot q(x)$ on $q(\alpha) \neq 0$. Llavors

$$p'(x) = m(x-\alpha)^{m-1}q(x) + (x-\alpha)^m q'(x) = (x-\alpha)^{m-1}(mq(x) + (x-\alpha)q'(x)) = (x-\alpha)^{m-1}s(x)$$

amb $s(\alpha) = mq(\alpha) \neq 0$, per tant α és arrel de $p'(x)$ de multiplicitat $m-1$. $\square$

Aplicant reiteradament aquesta proposició tenim que si α és una arrel de $p(x)$ amb multiplicitat m, llavors $p(\alpha) = p'(\alpha) = p''(\alpha) = \cdots = p^{(m-1)}(\alpha) = 0$ i $p^{(m)}(\alpha) \neq 0$, i a la pràctica per trobar α calcularem $\mathrm{mcd}(p(x), p'(x))$ per obtenir els factors comuns $x - \alpha$.

També és senzill trobar les arrels racionals d'un polinomi de $\mathbb{Q}[x]$. Multiplicant el polinomi pel m.c.m. dels denominadors dels coeficients obtenim un polinomi a coeficients enters que té les mateixes arrels que l'inicial, per tant el problema es redueix a trobar els zeros racionals d'un polinomi de $\mathbb{Z}[x]$:

Proposició. *Si p/q, amb $\mathrm{mcd}(p,q) = 1$, és un zero del polinomi $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ de $\mathbb{Z}[x]$, aleshores $p|a_0$ i $q|a_n$.*

DEMOSTRACIÓ: Si p/q n'és un zero aleshores tindrem

$$a_0 + a_1\frac{p}{q} + \cdots + a_n\frac{p^n}{q^n} = 0,$$

expressió que és equivalent a $a_0q^n + a_1p\,q^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0$ un cop l'hem multiplicada per q^n. Si passem el terme a_0q^n al membre dret canviat de signe, el membre esquerre és divisible per p, de manera que $p|a_0q^n$. Fent el mateix amb el terme a_np^n obtenim que $q|a_np^n$. Però com $\mathrm{mcd}(p,q) = 1$, gràcies al teorema d'Euclides deduïm que $p|a_0$ i $q|a_n$, com volíem veure. $\square$

3 Equacions algebraiques de grau inferior a 5

3.1 Equacions de primer i segon grau

L'equació de primer grau és $ax + b = 0$ amb $a \neq 0$ que clarament té la solució $x = -b/a$. Per resoldre l'equació general de segon grau, $ax^2 + bx + c = 0$ amb $a \neq 0$, la transformem en una equació equivalent multiplicant-la per $4a$ i sumant $b^2 - 4ac$ a ambdós membres; d'aquesta manera aconseguim tenir un quadrat al membre esquerre:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \;\Leftrightarrow\; (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \;\Leftrightarrow\; x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Hi ha equacions de grau superior que podem reduir a quadràtiques mitjançant un canvi de variable; per exemple, la biquadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$ es redueix a una de segon grau fent el canvi $x^2 = t$, i en general per resoldre $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ farem el canvi $x^n = t$.

3.2 Equacions de tercer grau

Partint de l'equació general $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, podem suposar sense pèrdua de generalitat que $a = 1$, perquè podem obtenir una equació equivalent dividint-la per a. A més a més, gràcies a la simetria de la cúbica respecte del seu punt d'inflexió, fent el canvi de variable $x = y - b/3$ s'elimina el terme en x^2, obtenint una equació de la forma $y^3 + py + q = 0$. Ara, escrivint $y = u + v$ obtenim $(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$, expressió que, operant i agrupant, es converteix en $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$. En haver introduït una variable auxiliar addicional, podem imposar una restricció, concretament $3uv + p = 0$, cosa que aleshores implica $u^3 + v^3 = -q$. Així doncs tenim el sistema d'equacions

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q \\ u^3 v^3 &= -p^3/27, \end{aligned}$$

de manera que, en virtut de les fórmules de Viète, u^3 i v^3 són les arrels α, β de l'equació de segon grau $z^2 + qz - p^3/27 = 0$. Llavors, les solucions de la cúbica seran $y_1 = \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$, $y_2 = \rho\sqrt[3]{\alpha} + \rho^2\sqrt[3]{\beta}$ i $y_3 = \rho^2\sqrt[3]{\alpha} + \rho\sqrt[3]{\beta}$, on ρ és una arrel cúbica complexa de la unitat: $\rho = e^{2\pi i/3}$. Si α, β són dos nombres reals llavors y_1 és una solució real, i y_2, y_3 són solucions complexes conjugades. En canvi, si α, β són complexos conjugats llavors les tres solucions y_1, y_2, y_3 són reals.

3.3 Equacions de quart grau

Igual que amb la cúbica, suposem que el coeficient principal és 1, de manera que l'equació a resoldre és $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Fent el canvi de variable $x = y - b/4$ s'elimina el terme en x^3, i la quàrtica es converteix en $y^4 + py^2 + qy + r = 0$, o de forma equivalent, $y^4 + py^2 = -qy - r$. Sumem $p^2/4$ a ambdós membres per completar el quadrat al membre esquerre:

$$\left(y^2 + \frac{p}{2}\right)^2 = -qy - r + \frac{p^2}{4}.$$

Introduïm també un paràmetre auxiliar u de la següent manera:

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + u\right)^2 = -qy - r + \frac{p^2}{4} + 2u\left(y^2 + \frac{p}{2}\right) + u^2,$$

i calculem u perquè que el membre dret sigui un quadrat perfecte $(Ay+B)^2$. Això passarà quan el discriminant d'aquesta expressió, vista com un polinomi de segon grau en y, valgui 0. Imposar això equival a resoldre una cúbica en u, cosa que ja hem vist com fer. Un cop trobats aquests valors de u tindrem que $A = \sqrt{2u}$, $B = \sqrt{u^2 + pu - r + p^2/4}$, i podem eliminar els quadrats dels dos membres, obtenint l'expressió

$$y^2 + \frac{p}{2} + u = \pm\left(Ay + B\right),$$

per tant la quàrtica inicial ha quedat reduïda a resoldre una parella d'equacions de segon grau.

4 Fitació i separació d'arrels

Degut a la complicació dels càlculs per resoldre la cúbica i la quàrtica, i al fet que no hi ha fórmules per equacions de grau superior, és necessari trobar mètodes numèrics per a la seva resolució. Comencem per veure dos resultats per fitar les arrels d'un polinomi.

Proposició (mètode de Laguerre). *Si la divisió entera del polinomi $p(x)$ per $x - \alpha$ amb $\alpha > 0$ proporciona un polinomi quocient amb tots els coeficients positius, i el residu també és positiu, aleshores α és una fita superior de les arrels de $p(x)$.*

Demostració: Escrivim la divisió entera de $p(x)$ per $x - \alpha$ com $p(x) = (x-\alpha)q(x) + r$. Llavors si $\beta > \alpha > 0$ tenim que $p(\beta) = (\beta - \alpha)q(\beta) + r > 0$ perquè $\beta - \alpha > 0$, $r > 0$ i $q(\beta) > 0$ en ser $\beta > 0$ i tots els coeficients de $q(x)$ positius, de manera que no hi ha arrels de $p(x)$ més grans que α. $\square$

Proposició (mètode de Newton). *Si α és un nombre real que fa positiu $p(x)$ i totes les seves derivades, llavors α és fita superior de les arrels de $p(x)$.*

Demostració: Si $p(x)$ és de grau n i escrivim el seu desenvolupament de Taylor al voltant de α obtenim

$$p(x) = p(\alpha) + \frac{p'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{p''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n,$$

de manera que si $x = \beta > \alpha$, tots els termes $(\beta - \alpha)^k$ són positius, i per hipòtesi també ho són $p^{(k)}(\alpha)$, per tant tots els termes del desenvolupament de Taylor són positius i β no pot anul·lar $p(x)$. $\square$

No es pot dir que un mètode sigui millor que l'altre; tot depèn del polinomi que estiguem estudiant. A la pràctica emprarem tots dos mètodes per trobar la millor fita possible.

Observem que trobar una fita inferior de les arrels de $p(x)$ equival a trobar-ne una de superior per les arrels de $p(-x)$ i canviar-la de signe. També cal observar que si el coeficient principal de $p(x)$ és negatiu, el mètode de Laguerre sempre falla, perquè el coeficient principal del quocient també serà negatiu. Aleshores només cal treballar amb $-p(x)$ en comptes de $p(x)$, perquè tots dos polinomis tenen les mateixes arrels.

Tot seguit veiem un potent resultat que ens permetrà comptar quantes arrels reals té un polinomi, i també aïllar-les, és a dir, trobar intervals (a, b) que continguin exactament una arrel.

Teorema de Sturm. *Sigui $p(x)$ un polinomi sense arrels múltiples. Construïm la successió de polinomis de grau decreixent $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \ldots$ de la següent manera:*

- $p_0(x) = p(x)$,
- $p_1(x) = p'(x)$,
- $p_i(x)$, *per* $i > 1$, *és el residu de la divisió entera de* $p_{i-2}(x)$ *per* $p_{i-1}(x)$ *canviat de signe, és a dir,* $p_i(x) = p_{i-1}(x)q_{i-2}(x) - p_{i-2}(x)$.

Sigui $p_m(x)$ l'últim polinomi no idènticament nul de la successió, i considerem llavors la successió finita $\{p_0(x), p_1(x), \ldots, p_m(x)\}$, que anomenarem cadena de Sturm *de $p(x)$. Sigui $N(x)$ la funció que compta el nombre de canvis de signe que pateix la cadena de Sturm en el punt x (ignorant els zeros). Llavors, si $a < b$ i $p(a), p(b) \neq 0$, el nombre d'arrels reals de $p(x)$ en (a, b) és exactament $N(a) - N(b)$.*

Demostració: Primer de tot cal observar que, per construcció dels p_i de la cadena, $p_m(x) = \mathrm{mcd}(p(x), p'(x))$, perquè la cadena resulta d'un algorisme d'Euclides on només hem canviat de signe els residus successius, cosa que no afecta el mcd. Llavors, a la força $p_m(x)$ és una constant no nul·la, perquè si fos un polinomi voldria dir que $p(x)$ té arrels múltiples, en contra de la hipòtesi.

També cal notar que, donat $\alpha \in \mathbb{R}$, la cadena de Sturm avaluada en α no pot contenir mai dos zeros consecutius. En efecte, si $p_i(\alpha) = p_{i+1}(\alpha) = 0$, llavors per construcció de la cadena $p_{i+2}(\alpha) = p_{i+1}(\alpha)q_i(\alpha) - p_i(\alpha) = 0$, i per inducció veiem que el zero es propagaria fins al final de la cadena, això és, $p_m(\alpha) = 0$ en contradicció amb el què hem observat abans.

Ara es tracta de veure que la funció $N(x)$ es manté constant en $a < x < b$, llevat dels punts on $p(x)$ s'anul·la, i que en aquests punts $N(x)$ es redueix exactament en una unitat, de forma que el còmput total d'arrels de $p(x)$ en (a, b) serà $N(a) - N(b)$. Com els polinomis $p_i(x)$ són funcions contínues i $N(x)$ compta canvis de signe dels $p_i(x)$, els únics punts susceptibles de fer variar $N(x)$ són els zeros dels $p_i(x)$. Així doncs, sigui $\alpha \in \mathbb{R}$ un zero d'algun $p_i(x)$ i distingim dos casos: $p_i(\alpha) = 0$ per $i > 0$, i $p_0(\alpha) = p(\alpha) = 0$.

Si $p_i(\alpha) = 0$ amb $i > 0$, anem a veure que aquest zero de $p_i(x)$ no contribueix a cap canvi en la funció $N(x)$, això és, $N(x)$ es manté constant en un entorn de α. Efectivament, com $p_{i-1}(x)+p_{i+1}(x) = p_i(x)q_{i-1}(x)$, tindrem que $p_{i-1}(\alpha)+p_{i+1}(\alpha) = 0$, i com a la cadena no hi ha dos zeros consecutius deduïm que $p_{i-1}(\alpha)$ i $p_{i+1}(\alpha)$ tenen signes diferents. Així doncs, per qualsevol β en un entorn prou petit de α, la part de la cadena $\{p_{i-1}(\beta), p_i(\beta), p_{i+1}(\beta)\}$ pateix un únic canvi de signe, i per tant no contribueix a un canvi en $N(x)$.

Ara, si $p(\alpha) = 0$, tindrem que $p'(\alpha) \neq 0$ i per tant $p(x)$ és localment creixent o decreixent en un entorn de α. Si és creixent tindrem que, per a un β de l'entorn de α amb $\beta < \alpha$, $p(\beta) < 0$ i $p'(\beta) > 0$, mentre que si $\beta > \alpha$, $p(\beta) > 0$ i $p'(\beta) > 0$. De forma similar, si $p(x)$ és decreixent en un entorn de α, tindrem $p(\beta) > 0$ i $p'(\beta) < 0$ per $\beta < \alpha$, mentre que $p(\beta) < 0$ i $p'(\beta) < 0$ per $\beta > \alpha$. En qualsevol cas veiem que, en un entorn de α, la part de la cadena $\{p(\beta), p'(\beta)\}$ passa de tenir un canvi de signe a no tenir-ne cap, de manera que $N(x)$ disminueix en una unitat en α, i el teorema queda provat. $\square$

Veiem un exemple d'aplicació dels mètodes de fitació vistos i del mètode de separació de Sturm: comptarem i aïllarem les arrels del polinomi $p(x) = x^3 + 4x^2 - x - 5$. Com $p(x) = (x - 2)(x^2 + 6x + 11) + 17$, el mètode de Laguerre ens diu que $x = 2$ és una fita superior de les arrels de $p(x)$. Si ara considerem $q(x) = -p(-x) = x^3 - 4x^2 - x + 5 \Rightarrow q'(x) = 3x^2 - 8x - 1,\ q''(x) = 6x - 8,\ q'''(x) = 6$, i el valor $x = 4$ fa positius $q(x)$ i les seves derivades, per tant, el mètode de Newton ens diu que $x = 4$ és fita superior de les arrels de $q(x)$, per tant $x = -4$ serà fita inferior de les arrels de $p(x)$.

Ara calculem la cadena de Sturm: $p_0(x) = p(x) = x^3 + 4x^2 - x - 5$, $p_1(x) = p'(x) = 3x^2 + 8x - 1$, $p_2(x) = 38x + 41$, $p_3(x) = 1$ (observem que podem simplificar els termes de la cadena multiplicant-los per qualsevol constant positiva, i el mètode segueix éssent vàlid), i construïm una taula de valors per estudiar els canvis de signe de la cadena:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$N(x)$
"$-\infty$"	$-$	$+$	$-$	$+$	3
0	$-$	$-$	$+$	$+$	1
"$+\infty$"	$+$	$+$	$+$	$+$	0

La taula ens diu que el nombre d'arrels negatives és $\lim_{x\to-\infty} N(x) - N(0) = 3 - 1 = 2$, i el de positives és $N(0) - \lim_{x\to+\infty} N(x) = 1 - 0 = 1$. Així doncs, com $x = 2$ era una fita superior de les arrels, l'única arrel positiva es trobarà a l'interval $(0, 2)$. Per separar les dues arrels negatives avaluem la cadena de Sturm en $x = -2$, que és un valor intermig entre $x = 0$ i la fita inferior $x = -4$:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$N(x)$
-2	$+$	$-$	$-$	$+$	2

Així doncs, com $N(-2) = 2$, tindrem una arrel negativa en l'interval $(-4, -2)$ i l'altra en $(-2, 0)$.

5 Mètodes aproximats de resolució

En aquest apartat estudiarem dos mètodes iteratius per trobar aproximacions tan precises com desitgem a zeros de funcions genèriques $f(x)$, partint d'una aproximació inicial al zero. Suposarem que el zero que estem cercant el tenim aïllat en un interval (a, b); per exemple, en el cas d'un polinomi, l'haurem aïllat amb el mètode de Sturm.

5.1 Mètode de la bisecció

Suposarem que f és una funció contínua i que $f(a)\cdot f(b) < 0$, és a dir, la funció f pren signes diferents en els extrems de l'interval (a, b). Llavors, el teorema de Bolzano ens assegura l'existència d'un punt $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$, que a més estem suposant que és únic.

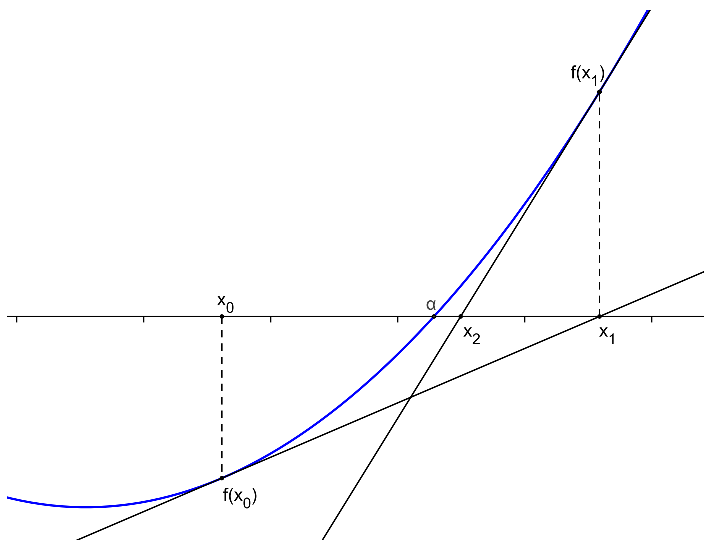
El mètode de la bisecció consisteix a prendre com a valors incials els extrems de (a, b): $x_0 = a$, $x_1 = b$, i llavors subdividim l'interval pel punt mitjà $x_2 = (x_0 + x_1)/2$. Si $f(x_2) = 0$ llavors $x_2 = \alpha$ i acabem el procés. En cas contrari, un dels dos intervals (x_0, x_2) o bé (x_2, x_1) verificarà $f(x_0) \cdot f(x_2) < 0$ o $f(x_2) \cdot f(x_1) < 0$, i ens quedarem amb aquell que ho verifiqui. A partir d'aquí, tornem a iterar el procés subdividint l'interval pel seu punt mig x_3 i quedant-nos amb el subinterval en els extrems del qual $f(x)$ prengui signes diferents.

D'aquesta manera construïm una successió de punts $x_0, x_1, x_2, \ldots$ que necessàriament serà convergent en ser una successió de Cauchy: a cada pas del procés dividim per la meitat l'interval anterior, de manera que al cap de n iteracions la mesura de l'interval és $\varepsilon_n = (b - a)/2^n \to 0$, per tant $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon_n$, i com tots els intervals contenen α forçosament serà $\lim\{x_n\} = \alpha$.

5.2 Mètode de Newton

Aquest mètode també consisteix a partir d'una aproximació x_0 a l'arrel buscada i construir una successió de punts $x_0, x_1, x_2, \ldots$ que hi convergeixi. Suposarem que la funció $f(x)$ és derivable en l'interval (a, b). Llavors, des del punt inicial x_0 es traça la tangent a la corba $f(x)$ pel punt $(x_0, f(x_0))$ i es considera el punt x_1 on aquesta recta talla l'eix x. A partir d'aquí s'itera el mètode. En general, si x_n és el punt obtingut en la n-èsima iteració, la recta tangent a $(x_n, f(x_n))$ té per equació $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$, i talla l'eix x en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$



Aturarem les iteracions quan x_n sigui prou proper a l'arrel α, això és, quan $|x_{n+1} - x_n|$ o $|f(x_n)|$ siguin prou petits. Al contrari del mètode de la bisecció, aquest no té per què convergir sempre (però quan ho fa la convergència és força ràpida, en general d'ordre quadràtic). El següent resultat ens dóna unes condicions suficients per a la seva convergència.

Proposició. *Sigui $f(x)$ una funció dues vegades derivable en (a, b) que verifica:*

- $f(a) \cdot f(b) < 0$
- $f'(x) \neq 0$ *per a tot* $x \in (a, b)$
- $f''(x)$ *no canvia de signe en* (a, b)

- $|f(a)/f'(a)| < b - a \;\; i \;\; |f(b)/f'(b)| < b - a$

Aleshores el mètode de Newton convergeix a l'arrel α de f en (a, b) per a qualsevol tria inicial de $x_0 \in (a, b)$.

Demostració: Les dues primeres condicions ens asseguren que l'arrel serà única i que el mètode no fallarà a causa de l'anul·lació del denominador de la fracció $f(x_n)/f'(x_n)$. La tercera condició ens diu que la funció és còncava o convexa en tot (a, b) i l'última condició assegura que la recta tangent a $f(x)$ en qualsevol punt de (a, b) mai se sortirà d'aquest interval.

Suposem que f és creixent i convexa en (a, b) (la resta de casos es proven de la mateixa manera), això és, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ i $f''(x) < 0$. Sigui $a < x_0 < \alpha$. Com $f(x)$ és convexa, la tangent a $f(x)$ en x_0 queda per sobre de la funció i per tant tindrem $x_0 < x_1 < \alpha$. En general, iterant el procés, $x_n < x_{n+1} < \alpha$, i així la successió $\{x_n\}$ és monòtona creixent i fitada superiorment per α, de manera que és convergent. A més a més, el seu límit serà α, perquè si prenem límits en l'expressió $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ obtenim $\ell = \ell - f(\ell)/f'(\ell)$ gràcies a la continuïtat de f i f'. D'aquesta expressió deduïm que $f(\ell) = 0$, això és, $\ell = \alpha$. Si el x_0 inicial verifica $\alpha < x_0 < b$, per la convexitat de f tindrem que $a < x_1 < \alpha$ i ja ens trobem en el cas anterior. $\square$