TEMA 5 NOMBRES RACIONALS

1 INTRODUCCIÓ
  1.1 JUSTIFICACIÓ DEL CONTINGUT
  1.2. CONEIXMENTS PREVIS
2. CONSTRUCCIÓ DE Q   2.1 [illegible] DELS RACIONALS
  2.2 PROPIETATS IMMEDIATES DE LA DEFINICIÓ

3 SUMA DE NOMBRES RACIONALS
4 PRODUCTE DE NOMBRES RACIONALS
5 IMMERSIÓ DE Z EN Q

6. EL COS ORDENAT DEL nºs Q
  6.1 NUMERABILITAT DE Q
7 VALOR ABSOLUT ?
8 APLICACIÓ A L'AULA / INTERPRETACIÓ Nº RACIONAL

1. INTRODUCCIÓ

1.1. JUSTIFICACIÓ DEL CONTINGUT.

El contingut d'aquest tema s'estructura en quatre parts.

En una primera part construirem, ampliant l'anell dels enters, el conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals.

A la segona part definirem les operacions de suma i producte i estudiarem les seves propietats, dotant a $\mathbb{Q}$ d'estructura de cos.

A la tercera part estudiarem l'ordre en $\mathbb{Q}$ i veurem que és numerable.

Per acabar, a la quarta part, analitzarem la interpretació dels nombres racionals i la seva aplicació a l'aula.

La construcció d'aquest tema es basa en la legislació vigent, especialment, en el decret 175/2022 i en l'actual convocatòria d'oposicions.

1.2. UBICACIÓ I CONEIXEMENTS PREVIS.

Enmarquem els continguts d'aquest tema dintre del bloc de sabers de sentit numèric i els podem introduir al curs de 1r de l'ESO i ampliar a 2n.

Pel desenvolupament d'aquest tema necessitem coneixements previs sobre els nombres enters (tema 4) i sobre els conjunts numèrics i les classes d'equivalència (tema 11).

2. CONSTRUCCIÓ DE $\mathbb{Q}$

El conjunt dels nombres racionals ($\mathbb{Q}$) sorgeix de la necessitat d'ampliar els nombres enters ($\mathbb{Z}$) per a que l'equació $a\cdot x+b=0, a\neq 0$, sempre tingués solució.

La relació que definim a continuació té com a objectiu estendre els enters de forma natural i verificar que $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ de forma canònica.

2.1. RELACIÓ D'EQUIVALÈNCIA ALS RACIONALS.

Simbolitzem $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ i considerem

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* := \{(a,b) \,/\, a\in\mathbb{Z} \text{ i } b\in\mathbb{Z}^*\}$$

que rep el nom del conjunt de les fraccions.

Definim a $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ una relació $\sim$ de forma que:

$$\frac{a}{b}\sim\frac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d = b\cdot c$$

Aquesta relació és d'equivalència ja que verifica les propietats:

- Reflexiva: $\frac{a}{b}\sim\frac{a}{b}$ donat que $a\cdot b = b\cdot a$
- Simètrica: $\frac{a}{b}\sim\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{c}{d}\sim\frac{a}{b}$ ja que $a\cdot d = b\cdot c \Leftrightarrow cb = da$.
- Transitiva: $\frac{a}{b}\sim\frac{c}{d}$ i $\frac{c}{d}\sim\frac{e}{f} \Rightarrow a\cdot d = bc$ i $cf = de$

$\Rightarrow a\cdot df = b\cdot cf = b\cdot de \Rightarrow adf = bde$ i com $d\neq 0$

$\Rightarrow af = b\cdot e \Rightarrow \frac{a}{b}\sim\frac{e}{f}$.

2.2. CONJUNT QUOCIENT I PROPIETATS

Definim $\mathbb{Q}$ com el conjunt quocient $\mathbb{Q} := \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\sim$ i l'anomenem conjunt dels nombres racionals, els elements que el formen són les classes d'equivalència que representem per:

$$\left\{\frac{a}{b}\right\} := \{(x,y)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \,/\, (a,b)\sim(x,y)\}$$

Cadascuna de les classes d'equivalència s'anomena nombre racional.

Veiem algunes propietats immediates de la definició de nombre racional:

PROPIETAT 1.-

$\forall h\in\mathbb{Z}^* \Rightarrow \frac{a}{b}\sim\frac{a\cdot h}{b\cdot h}$ (Amplificació / Reducció de fraccions)

dem.- $\frac{a}{b}\sim\frac{a\cdot h}{b\cdot h} \Leftrightarrow a\cdot b\cdot h = b\cdot a\cdot h$ cert ja que $b\cdot h\neq 0$.

CONSEQÜÈNCIES:-

i) tot nombre racional té representant amb denominador positiu donat que $\frac{a}{b}\sim\frac{a\cdot(-1)}{b\cdot(-1)}$.

ii) Donat dos nombres racionals sempre tenen representants amb el mateix denominador (reduir a denominador comú).

En efecte, si $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ són dos nombres racionals i

$mcm(b,d) = m \Rightarrow m = b\cdot b'$ i $m = d\cdot d'$ amb $mcd(b',d') = 1$.

Llavors, $\frac{a}{b}\sim\frac{a\cdot b'}{b\cdot b'}\sim\frac{a_1}{m}$ i $\frac{c}{d}\sim\frac{c\cdot d'}{d\cdot d'}\sim\frac{c_1}{m}$.

iii) tot nombre racional té un representant $\frac{a}{b}$ tal que $mcd(a,b)=1$. En efecte, si $\frac{a_1}{b_1}$ és racional amb $mcd(a_1,b_1)=d \Rightarrow a_1=d\cdot a$ i $b_1=d\cdot b$ amb $mcd(a,b)=1 \Rightarrow$

$$\frac{a_1}{b_1} \sim \frac{d\cdot a}{d\cdot b} \sim \frac{a}{b}.$$

Aquest representant se l'anomena fracció irreductible.

PROPIETAT 2.- $\left\{\frac{0}{b}\right\}$ $\forall b \in \mathbb{Z}^*$ formen una classe, el nombre racional anomenat zero.

dem.- $\frac{0}{b} \sim \frac{a}{c} \Leftrightarrow 0\cdot c = a\cdot b \Leftrightarrow a=0$ donat que $b \neq 0$ i $\mathbb{Z}$ és domini d'integritat.

PROPIETAT 3.- $\left\{\frac{b}{b}\right\}$ $\forall b \in \mathbb{Z}^*$ formen una classe que defineix el nombre racional 1.

dem.- $\frac{b}{b} \sim \frac{a}{c} \Leftrightarrow bc = b\cdot a \Leftrightarrow c=a$ ja que $b.c \neq 0$.

3. EL COS $\mathbb{Q}$ DELS RACIONALS

3.1 SUMA DE RACIONALS

Siguin $\alpha = \left\{\frac{a}{b}\right\}$ i $\beta = \left\{\frac{c}{d}\right\}$ dos nombres racionals definim la seva suma (addició) com l'aplicació

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} &\xrightarrow{+} \mathbb{Q} \\ (\alpha,\beta) &\longrightarrow \alpha+\beta := \left\{\frac{a}{b}\right\} + \left\{\frac{c}{d}\right\} = \left\{\frac{ad+bc}{bd}\right\} \end{aligned}$$

Es pot comprovar fàcilment que aquesta aplicació està ben definida, és a dir, que no depèn dels representants escollits

Les propietats elementals de l'operació suma són:

- És llei de composició interna: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{Q}$
- Associativa: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
- Commutativa: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- Existència i unicitat de l'element neutre, el $\{\frac{0}{b}\}\ \forall b \in \mathbb{Z}^*$
- Existència i unicitat de l'oposat de tot element de $\mathbb{Q}$.

  L'oposat de $\alpha = \{\frac{a}{b}\}$ és $-\alpha = \{-\frac{a}{b}\}$

Obviem en aquest cas les demostracions.

Així, siguin α, β dos nombres racionals, l'equació $\alpha + x = \beta$ admet solució en $\mathbb{Q}$, $x = (-\alpha) + \beta$, que s'anomena diferència entre β i α i es representa $\beta - \alpha$.

L'operació diferència també està ben definida però, en aquest cas no és commutativa

3.2. PRODUCTE DE RACIONALS

Donats $\alpha := \{\frac{a}{b}\}$ i $\beta := \{\frac{c}{d}\}$ dos nombres racionals, definim el seu producte com l'aplicació:

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \xrightarrow{\ \cdot\ } \mathbb{Q}$$

$$(\alpha, \beta) \longrightarrow \alpha \cdot \beta = \left\{\frac{a}{b}\right\} \cdot \left\{\frac{c}{d}\right\} = \left\{\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right\}$$

D'igual manera que al cas anterior, aquesta aplicació està ben definida, no depèn dels representants escollits.

Les propietats elementals de l'operació suma són:

- Llei de composició interna: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha \cdot \beta \in \mathbb{Q}$
- Associativa: $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
- Commutativa: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \gamma$
- Existència i unicitat de l'element neutre, el $\{\frac{b}{b}\} \forall b \in \mathbb{Z}^*$
- Existència i unicitat de l'invers de tot racional distint de zero. L'invers de $\alpha = \{\frac{a}{b}\}$ és $\alpha^{-1} = \{\frac{b}{a}\}$ sempre i quan $a \neq 0$.
- Distributiva respecte de la suma: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma = (\alpha + \beta) \cdot \gamma$.

No realitzem les proves, que s'obtenen directament de la definició.

Així, si α, β són dos nombres racionals, l'equació $\alpha \cdot x = \beta$, amb $\alpha \neq 0$, admet solució en $\mathbb{Q}$, doncs multiplicant la igualtat per l'invers de α, α^{-1}, tenim:

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} \cdot x = \alpha^{-1} \cdot \beta = \beta \cdot \alpha^{-1} \Rightarrow x = \beta \cdot \alpha^{-1}.$$

Per tant, la divisió en $\mathbb{Q}$ sempre és possible, excepte quan el divisor és 0, ho escrivim $x = \beta : \alpha$.

Amb totes aquestes propietats tenim que $(\mathbb{Q}, +)$ és un grup additiu abelià i $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, sent $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, és un grup multiplicatiu amb propietat distributiva. Per tant, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ té estructura de cos commutatiu.

4. INMERSIÓ DE $\mathbb{Z}$ EN $\mathbb{Q}$

Veiem, en aquest apartat, que $\mathbb{Q}$ amplia de manera efectiva a $\mathbb{Z}$, és a dir, que existeix un isomorfisme entre $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ i una part de $\mathbb{Q}$. Definim l'aplicació:

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$x \longrightarrow \left\{ \frac{x}{1} \right\}$$

Veiem que és un isomorfisme.

- f és homomorfisme: Donats $a, b \in \mathbb{Z}$ llavors:

$$f(a+b) = \left\{ \frac{a+b}{1} \right\} = \left\{ \frac{a}{1} \right\} + \left\{ \frac{b}{1} \right\} = f(a) + f(b).$$
$$f(a \cdot b) = \left\{ \frac{a \cdot b}{1} \right\} = \left\{ \frac{a}{1} \right\} \cdot \left\{ \frac{b}{1} \right\} = f(a) \cdot f(b)$$

- f és bijectiva:
  - f és injectiva: siguin $a, b \in \mathbb{Z}$ / $f(a) = f(b)$ llavors:

    $$\left\{ \frac{a}{1} \right\} = \left\{ \frac{b}{1} \right\} \Leftrightarrow a \cdot 1 = 1 \cdot b \Leftrightarrow a = b$$
  - f és sobrejectiva per definició.

Així, f és un isomorfisme, pel qual podem identificar el nombre enter x com el nombre racional $\left\{ \frac{x}{1} \right\}$.

Per tant, podem considerar $\mathbb{Z}$ com un subconjunt de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, i com que $\mathbb{N}$ es pot identificar com $\mathbb{Z}^*$ tenim que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

4.1. PROPIETATS DEL COS $\mathbb{Q}$

i) Per ser $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ un cos commutatiu, és domini d'integritat, és a dir, no té divisors de zero no trivials:

$$\forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{Q} \quad \alpha\cdot\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \ \vee \ \beta = 0$$

ii) Tota equació $ax=b$, $a\neq 0$, $a,b\in\mathbb{Q}$ te solució $x=a^{-1}\cdot b$

iii) En $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ els únics ideals que existeixen són els impropis, és a dir, l'ideal $\{0\}$ i el mateix $\mathbb{Q}$.

iv) $\mathbb{Q}$ és el cos de les fraccions de l'anell $\mathbb{Z}$.

5. ORDRE A $\mathbb{Q}$

Anem a establir una relació d'ordre total en $\mathbb{Q}$:

Sigui $\alpha = \left\{\frac{a}{b}\right\} \in \mathbb{Q}$

Def.- Direm que α és un racional positiu si $a\cdot b\in\mathbb{Z}^+$. En cas contrari, α és un racional negatiu. Considerem $\mathbb{Q}^+$ i $\mathbb{Q}^-$, respectivament, els conjunts dels racionals positius i negatius.

Notem que si $\alpha\in\mathbb{Q}^+\setminus\{0\}$, el seu oposat $-\alpha\in\mathbb{Q}^-$ i viceversa. A més, en $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ la suma i el producte de dos racionals positius és altre racional positiu.

Def.- Donats dos nombres racionals, $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$, direm que α és menor que β, i ho escriurem $\alpha<\beta$, si $\beta-\alpha\in\mathbb{Q}^+\setminus\{0\}$. Anàlogament, direm que α és menor o igual que β, i escriurem $\alpha\leq\beta$ si $\beta-\alpha\in\mathbb{Q}^+$, és a dir, si $\beta-\alpha>0$ o $\beta-\alpha=0$

La relació $\leq$ és d'ordre total en $\mathbb{Q}$ donat que verifica les propietats:

- Reflexiva: $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$ $\alpha \leq \alpha$ donat que $\alpha - \alpha = 0 \in \mathbb{Q}^+$
- Simètrica: si $\alpha \leq \beta$ i $\beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$
- Transitiva: si $\alpha \leq \beta$ i $\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$.
- Tots els elements de $\mathbb{Q}$ són comparables: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} : \alpha \leq \beta$ o $\beta \leq \gamma$.

Per tant, el conjunt $(\mathbb{Q}, \leq)$ és totalment ordenat. Tanmateix, no defineix un bon ordre donat que no existeix cap element que sigui anterior als demés i tot nombre racional no posseeix posterior.

Com a conseqüències de la relació $\leq$ a $\mathbb{Q}$ tenim que:

- tot racional positiu és major que zero: $\forall \alpha \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}, \alpha > 0$
- tot racional negatiu és menor que el zero: $\forall \alpha \in \mathbb{Q}^-$ $\alpha < 0$.
- tot racional negatiu és menor que tot racional positiu:

$$\forall \alpha \in \mathbb{Q}^-, \forall \beta \in \mathbb{Q}^+ \Longrightarrow \alpha < \beta.$$

5.1. PROPIETATS DE LA RELACIÓ D'ORDRE:

a) La relació d'ordre $\leq$ és compatible amb la suma de racionals:

si $\alpha \leq \beta$, $\forall \gamma \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ o també

si $\alpha \leq \alpha'$ i $\beta \leq \beta' \Rightarrow \alpha + \alpha' \leq \beta + \beta'$

b) La relació d'ordre $\leq$ no és compatible amb el producte, només es conserva si es multiplica per un nombre positiu:

$$\text{Si } \alpha \leq \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma & \forall \gamma \in \mathbb{Q}^+ \\ \alpha \cdot \gamma \geq \beta \cdot \gamma & \forall \gamma \in \mathbb{Q}^- \end{cases}$$

Amb aquestes propietats diem que $(\mathbb{Q},+,\cdot,\leq)$ és un cos totalment ordenat.

c) Es verifica la propietat arquimediana:

$$\text{Si } 0<\alpha<\beta \Rightarrow \exists n\in\mathbb{N} \,/\, n\cdot\alpha>\beta$$

Així $(\mathbb{Q},+,\cdot,\leq)$ és un cos ordenat arquimedià.

d) Si $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ i $\alpha\in\mathbb{Q} \,/\, 0\leq\alpha\leq 1$, llavors:

$$\frac{a}{b}\leq \alpha\cdot\frac{a}{b}+(1-\alpha)\cdot\frac{c}{d}\leq\frac{c}{d}$$

Com a conseqüència, els racionals $\frac{1}{m}$, en ser $0\leq\alpha\leq 1$ estan en l'interval $[0,1]$.

e) Entre dos nombres racionals existeixen infinits nombres racionals (tants com hi ha a l'interval $[0,1]$).

Diem, doncs, que $\mathbb{Q}$ és dens en tota la recta.

6. VALOR ABSOLUT D'UN NOMBRE RACIONAL

Sigui $\alpha=\left\{\frac{a}{b}\right\}\in\mathbb{Q}$ definim el valor absolut d'α, $|\alpha|$, com:

$$|\alpha|:=\frac{|a|}{|b|}$$

PROPIETATS.- (Les mateixes que es verifiquen a $\mathbb{Z}$)

i) $|\alpha|\geq 0$ i $|\alpha|=0 \Leftrightarrow \alpha=0$

ii) $\alpha\leq|\alpha|$ i $|\alpha|=\begin{cases}\alpha & \text{si } \alpha\geq 0\\ -\alpha & \text{si } \alpha<0\end{cases}$

iii) $|-\alpha| = |\alpha|$

iv) Si $|\alpha| \leq a, a \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow -a \leq \alpha \leq a$

v) $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

vi) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

7. EL CONJUNT DELS RACIONALS ÉS NUMERABLE

Diem que un conjunt és numerable si es pot posar com a correspondència bijectiva amb el conjunt dels naturals $\mathbb{N}$. Així, per demostrar que $\mathbb{Q}$ és numerable bastarà en definir una bijecció entre $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{N}$.

Per fer-ho, els representen els racionals pels seus representants canònics i s'ordenen tenint en compte la suma dels valors absoluts del numerador i del denominador, aplicant el criteri de $\leq$ per als que tinguin la mateixa suma.

Obtenim, d'aquesta manera, la següent successió de racionals:

$$\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \ldots$$

Així, establim la bijecció de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{N}$ associant a cada terme de la successió els valors naturals $0, 1, 2, 3, \ldots$ respectivament. Per tant, $\mathbb{Q}$ és numerable.

Es diu que el cardinal dels conjunts numerables és $\aleph_0$ (aleph zero, primera lletra de l'alfabet hebreu)

8. INTERPRTACIÓ DELS NOMBRE RACIONALS

APLICACIÓ A L'AULA

Més enllà de la ~~construcció~~ seva definició formal dels nombres racionals es poden interpretar d'altres maneres més intuïtives i pràctiques, útils a l'hora d'introduir-los a l'estudiant.

8.1 RACIONAL COM A DIVISIÓ

Als nombres enters, diem que b divideix a si $\exists k \in \mathbb{Z} / a = k \cdot b$ ~~o, equivalent~~ (quocient de la divisió entera de b entre a), ho podem expressar com $a : b = k$, però també amb notació de nombres racionals $\frac{a}{b}$.

Així, una ~~fracció~~ racional $\left\{\frac{a}{b}\right\}$ es pot interpretar com la divisió d'a entre b, $a:b$. per exemple $\frac{8}{4} = 8:4 = 2$.

8.2 RACIONAL COM A DECIMAL

Els nombres decimals sorgeixen de generalitzar el concepte de racional com a divisió quan aquesta no és exacta. → ~~Pots~~

~~Una fracci~~ Segons els resultats de la divisió, els decimals es poden classificar en exactes $\left(\frac{1}{2} = 0'5\right)$, periòdics purs $\left(\frac{1}{3} = 0'\hat{3}\right)$ o periòdics mixts $\left(\frac{127}{18} = 1'0\hat{5}\right)$.

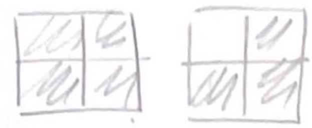
8.3 RACIONAL COM A FRACCIÓ

Una manera prou ~~[illegible]~~ comuna d'introduir els nombres racionals a l'aula és com un "tot" o "total" (unitat) dividits en parts iguals. La fracció indica la relació que existeix entre un nombre de parts i el nombre total de parts.

~~Aquesta forma d'inter~~

Així, el ~~símbol~~ racional $\left|\frac{a}{b}\right|$ designa, respecte a aquesta interpretació, "a" parts entre "b" parts iguals ~~en~~ que es divideix la unitat, per exemple:

3 de les 5 = $\frac{3}{5}$

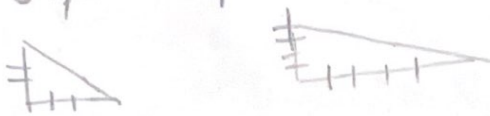


1 unitat + 3 de les 4 parts = $1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

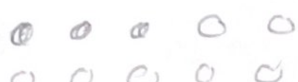
Aquesta forma d'interpretar un racional és molt útil pel càlcul de probabilitats i els percentatges.

3.4. RACIONAL COM A RAÓ

En utilitzar un racional com una fracció el que hem fet és comparar una part amb un tot. Així, els nombres racionals són un "índex comparatiu" entre dos quantitats d'una magnitud, és a dir, són raons que indiquen la relació part-part o tot-tot, p.e



Les dimensions d'A son $\frac{3}{5}$ de les de B



La raó entre les boles blaves i blanques és de 3/5

~~Aquest és apresent en les~~

Aquesta interpretació és molt emprada en l'escala de mapes ⇒ Connex amb dibuix

Recursos didàctics.— Usant postussets, quadrats dividits en rectangles, i.e., identificar fraccions i figures, joc de cartes.

Jugar amb les notes musicals ⇒ interdisciplina amb la música (rodones, fuses, semifuses)