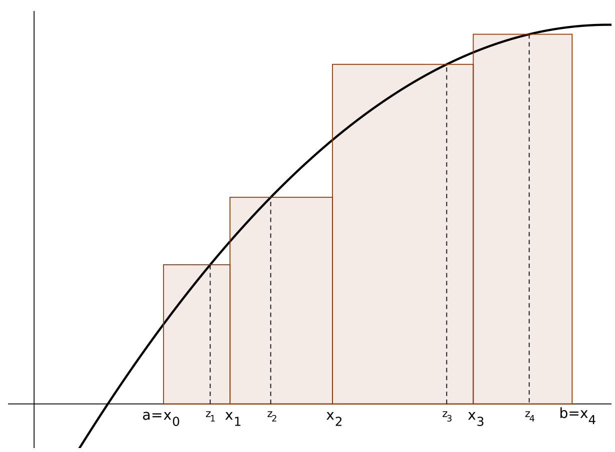
1 Introducció

Al llarg de tota l'exposició suposarem que f és una funció real definida en un interval $[a,b]$ i fitada. L'objectiu és definir i calcular l'àrea de la regió del pla limitada per la gràfica de $y = f(x)$, les rectes verticals $x = a$ i $x = b$ i l'eix d'abscisses. Durant aquest procés haurà de quedar molt clar per a quines funcions tindrà sentit parlar d'aquesta àrea: seran les funcions que anomenarem *integrables*.



El procés que triem per donar aquesta definició d'àrea consisteix a aproximar la regió mitjançant la unió d'un nombre finit de rectangles, per als quals tenim una noció natural d'àrea. Per ferho, considerarem un nombre finit de punts $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ i associarem a cada interval $[x_{i-1}, x_i]$ un rectangle que el té per base i que té per altura el valor de la funció en un punt $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$. La suma d'aquestes àrees serà, doncs,

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1}).$$

El següent pas serà considerar el límit d'aquesta expressió quan $n \to +\infty$, que equival a agafar un nombre cada cop més gran de subdivisions de $[a,b]$ (per tant, de rectangles), i definir l'àrea com el valor d'aquest límit, sempre que existeixi i sigui finit. Aquesta àrea serà la que anomenarem *integral* de f entre a i b.

En la Física apareixen sovint aquest tipus de sumes. Per exemple, suposem que una partícula es mou al llarg de l'eix d'abscisses amb una velocitat que ve donada per una funció $v(t)$, per a cada instant de temps t. Si volem calcular l'espai recorregut en un interval de temps $[a,b]$ és natural dividir-lo en petits intervals $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, de manera que en cadascun d'ells $[t_{i-1}, t_i]$ la velocitat de la partícula serà aproximadament constant a $v(z_i)$, per a $z_i \in [t_{i-1}, t_i]$. L'espai recorregut serà aleshores aproximadament $\sum_{i=1}^{n} v(z_i)(t_i - t_{i-1})$, i aquesta aproximació serà millor com més petits siguin els intervals $[t_{i-1}, t_i]$.

A partir d'aquesta definició d'àrea no serà difícil calcular àrees d'altres regions més complexes, per exemple, la regió compresa entre les gràfiques de dues funcions f i g, amb $f \geq g$ (una diferència d'integrals ens donarà la solució).

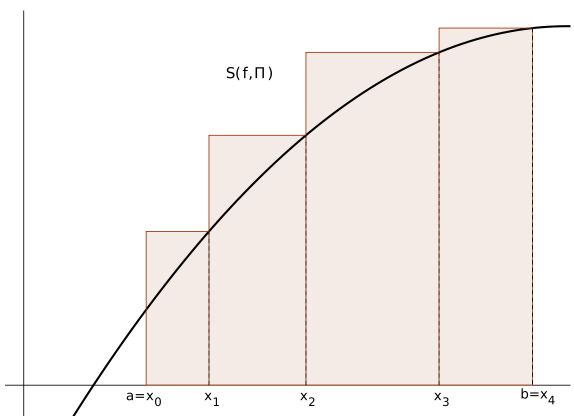
2 Definicions i resultats fonamentals

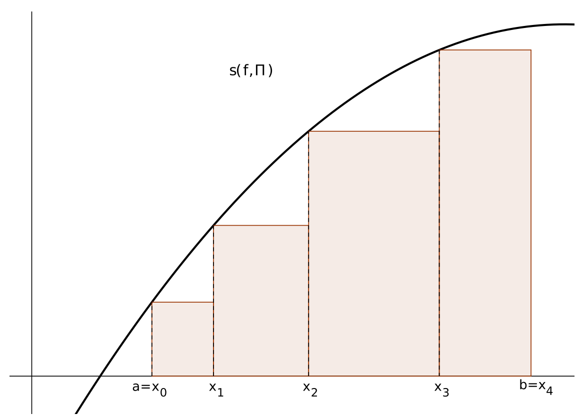
Definició. Una *partició* Π de l'interval $[a,b]$ és un nombre finit de punts x_i, $i = 0, \ldots, n$, tals que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Escriurem $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Direm que una partició Π' és *més fina* que una partició Π si tot punt de Π pertany a Π', és a dir, si Π' s'obté de Π afegint-li punts.

Definició. Anomenem *suma superior* i *suma inferior* de f associada a la partició Π als valors

$$S(f,\Pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \qquad \text{on } M_i = \sup_{x \in [x_{i-1},x_i]} f(x),$$
$$s(f,\Pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \qquad \text{on } m_i = \inf_{x \in [x_{i-1},x_i]} f(x),$$

respectivament. De forma gràfica, aquestes dues sumes s'interpreten com les sumes de les àrees dels rectangles d'altura màxima i mínima, respectivament, en cada interval $[x_{i-1}, x_i]$, com mostren les figures:





És evident que, per a una mateixa partició Π, $s(f,\Pi) \leq S(f,\Pi)$, i tampoc no és difícil intuir que qualsevol suma inferior serà més petita o igual que qualsevol suma superior, siguin quines siguin les particions que triem. Per demostrar-ho formalment, veiem primer un lema que ens assegura una altra cosa prou intuïtiva: com més fina és una partició, més petita és una suma superior i més gran és una suma inferior.

Lema. *Si* Π' *és una partició obtinguda a partir de* Π *afegint-hi un punt, llavors*

$$S(f,\Pi) \geq S(f,\Pi') \quad i \quad s(f,\Pi) \leq s(f,\Pi').$$

Demostració. Siguin $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ i $\Pi' = \{x_0, \dots, x_{i-1}, c, x_i, \dots, x_n\}$. Si

$$M' = \sup_{x \in [x_{i-1}, c]} f(x) \quad \text{i} \quad M'' = \sup_{x \in [c, x_i]} f(x),$$

llavors és clar que $M' < M_i$ i $M'' < M_i$, amb la qual cosa

$$\begin{aligned} S(f,\Pi) &= \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j = \sum_{j=1}^{i-1} M_j \Delta x_j + M_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{j=i+1}^{n} M_j \Delta x_j = \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} M_j \Delta x_j + M_i(c - x_{i-1}) + M_i(x_i - c) + \sum_{j=i+1}^{n} M_j \Delta x_j \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^{i-1} M_j \Delta x_j + M'(c - x_{i-1}) + M''(x_i - c) + \sum_{j=i+1}^{n} M_j \Delta x_j = S(f, \Pi'). \end{aligned}$$

De forma semblant es demostra que $s(f, \Pi) \leq s(f, \Pi')$. □

Teorema. *Si* Π_1 *i* Π_2 *són dues particions de* $[a, b]$, *llavors* $s(f, \Pi_1) \leq S(f, \Pi_2)$.

Demostració. Sigui Π la partició obtinguda ajuntant els punts de les dues particions (per tant, Π és més fina que Π_1 i Π_2). Llavors, segons el lema anterior,

$$s(f, \Pi_1) \leq s(f, \Pi) \leq S(f, \Pi) \leq S(f, \Pi_2). \qquad \square$$

Una conseqüència d'això és que el conjunt de sumes inferiors és fitat superiorment i el de sumes superiors és fitat inferiorment, per tant podem parlar del suprem i de l'ínfim d'aquests conjunts:

Definició. Anomenem *integral inferior* de f en $[a, b]$ al suprem de les sumes inferiors, i *integral superior* a l'ínfim de les sumes superiors. Els notem, respectivament, com

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_{\Pi} s(f, \Pi), \qquad \overline{\int_a^b} f = \inf_{\Pi} S(f, \Pi).$$

Com tota suma inferior és més petita o igual que tota suma superior, la desigualtat es conserva en passar al suprem i a l'ínfim, i per tant

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Pel que comentàvem al principi, tindrà lògica parlar de l'àrea delimitada per la gràfica de f, l'eix d'abscisses i les rectes $x = a$, $x = b$ quan aquests dos valors coincideixin:

Definició. Direm que f, definida i fitada en $[a,b]$ és *integrable en el sentit de Riemann* (o, simplement, *integrable Riemann*) si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. A aquest valor comú l'anomenarem la *integral de Riemann* de f en $[a,b]$, i l'escriurem $\int_a^b f$.

Vegem un criteri que permetrà de provar que alguns tipus importants de funcions són integrables Riemann:

Teorema. *Una funció f és integrable Riemann si i només si per a cada $\varepsilon > 0$ existeix una partició Π tal que*

$$S(f,\Pi) - s(f,\Pi) < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓ. Si f és integrable Riemann, per a cada $\varepsilon > 0$ existeixen particions Π_1 i Π_2 tals que

$$S(f,\Pi_1) - \int_a^b f < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \int_a^b f - s(f,\Pi_2) < \frac{\varepsilon}{2},$$

perquè $\int_a^b f$ és tant l'ínfim de les sumes superiors com el suprem de les sumes inferiors. Sumant ambdues desigualtats obtenim $S(f,\Pi_1) - s(f,\Pi_2) < \varepsilon$, i si prenem Π una partició més fina que Π_1 i Π_2, aleshores

$$S(f,\Pi) - s(f,\Pi) < S(f,\Pi_1) - s(f,\Pi_2) < \varepsilon,$$

com volíem veure.

Recíprocament, si es compleix aquesta condició es complirà també

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \le S(f,\Pi) - s(f,\Pi) < \varepsilon,$$

i com això val per a qualsevol ε, se'n segueix que $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ i per tant f és integrable Riemann. $\square$

Teorema. *Tota funció f contínua en $[a,b]$ és integrable Riemann.*

DEMOSTRACIÓ. Si f és contínua en $[a,b]$ és uniformement contínua, això és, donat $\varepsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tal que $|x' - x''| < \delta$ implica $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/(b-a)$. Si Π és una partició tal que la longitud Δx_i de tots els intervals és menor que δ, per a cada i es complirà $M_i - m_i \le \varepsilon/(b-a)$ i per tant

$$S(f,\Pi) - s(f,\Pi) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \le \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

amb la qual cosa, pel teorema anterior, f és integrable Riemann. $\square$

En la línia d'aquest teorema, i amb una demostració semblant, es pot veure fàcilment que tota funció monòtona (creixent o decreixent) també és integrable Riemann.

Exemples.

a. La funció definida per $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ i $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ no és integrable Riemann en $[a, b]$. En efecte, per a qualsevol partició la suma inferior val 0 i la suma superior val $b - a$ perquè cada interval de la partició hi ha punts racionals i irracionals, de forma que $m_i = 0$ i $M_i = 1$, i llavors $0 = \underline{\int}_a^b f \neq \overline{\int}_a^b f = b - a$.

b. La funció $f(x) = x$ és integrable en ser contínua. Calculem la integral $\int_0^2 f$ a partir de les sumes inferiors i superiors: per a cada n, prenem la partició Π que consisteix a subdividir l'interval $[0, 2]$ en $2n$ subintervals de longitud $1/n$. Aleshores, $x_i = i/n$ per a $i = 0, \ldots, 2n$, $m_i = (i - 1)/n$, $M_i = i/n$, per tant

$$s(f, \Pi) = \sum_{i=1}^{2n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{2n} \frac{i-1}{n}\frac{1}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{2n}(i-1)}{n^2} = \frac{(2n-1)2n}{2n^2} = 2 - \frac{1}{n},$$
$$S(f, \Pi) = \sum_{i=1}^{2n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{2n} i}{n^2} = \frac{2n(2n+1)}{2n^2} = 2 + \frac{1}{n},$$

llavors $\underline{\int}_0^2 f = \lim_{n\to+\infty}(2 - \frac{1}{n}) = 2$, $\overline{\int}_0^2 f = \lim_{n\to+\infty}(2 + \frac{1}{n}) = 2$, de manera que $\int_0^2 f = 2$.

Disposem d'una altra caracterització de la condició d'integrabilitat (que no demostrarem), en funció de les sumes de què parlàvem al principi:

Definició. Sigui f una funció fitada en $[a, b]$, $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partició de $[a, b]$ i $z_i \in [x_i, x_{i-1}]$. Anomenem *suma de Riemann* associada a Π i als punts z_i a la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Teorema. *Una funció f fitada en $[a, b]$ és integrable Riemann si i només si hi ha un nombre A amb la propietat següent: per a cada $\varepsilon > 0$ existeix una partició Π_0 tal que si Π és més fina que Π_0 i $\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i$ és una suma de Riemann associada a Π, es compleix*

$$\left| A - \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

En aquest cas, $A = \int_a^b f$.

El següent teorema expressa que les funcions integrables Riemann formen un $\mathbb{R}$-espai vectorial i que l'aplicació que assigna a cada funció la seva integral és una aplicació lineal:

Teorema. *Siguin f, g dues funcions fitades i integrables Riemann en $[a, b]$, i $k \in \mathbb{R}$. Llavors les funcions $f + g$ i kf són integrables Riemann i es compleix*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \qquad \int_a^b (kf) = k \int_a^b f.$$

DEMOSTRACIÓ. En virtut del resultat anterior, donat $\varepsilon > 0$ existeix una partició Π_0 (podem prendre la mateixa per a f i per a g) tal que si Π és més fina que Π_0 es compleix

$$\left| \int_a^b f - \sum_{i=0}^{n} f(z_i)\Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left| \int_a^b g - \sum_{i=0}^{n} g(z_i)\Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

de forma que

$$\left| \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) - \sum_{i=0}^{n} (f+g)(z_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon,$$

la qual cosa, altre cop gràcies al teorema anterior, ens diu que $f+g$ és integrable i $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. De forma similar es veu per al producte per escalars: donat $\varepsilon > 0$ existeix Π_0 tal que si Π és més fina que Π_0 es complirà

$$\left| \int_a^b f - \sum_{i=0}^{n} f(z_i)\Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{|k|},$$

de forma que

$$\left| k\int_a^b f - \sum_{i=0}^{n} (kf)(z_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon,$$

la qual cosa ens diu que kf és integrable i $\int_a^b (kf) = k \int_a^b f$. □

El mateix resultat és cert per al producte i el quocient de funcions integrables, però és un xic més complicat de veure. És conseqüència del següent teorema (que no demostrem) i el corol·lari posterior:

Teorema. *Si f és integrable Riemann en $[a, b]$, $f([a, b]) \subseteq [c, d]$ i g és una funció contínua en $[c, d]$, aleshores $g \circ f$ és integrable Riemann en $[a, b]$.*

Corol·lari. *Si f i g són integrables Riemann, també ho són f^2, $1/f$ (si $f \neq 0$) i fg.*

Demostració. Per a f^2 i $1/f$ només cal aplicar el teorema anterior prenent $g(t) = t^2$ i $g(t) = 1/t$ respectivament. La integrabilitat de fg és conseqüència de la relació

$$fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right). \qquad \square$$

Finalment, cal remarcar la propietat d'additivitat de la integral com a funció de l'interval d'integració.

Teorema. *Si f és integrable Riemann en $[a,b]$, també ho és en tot subinterval. Recíprocament, si $a < c < b$ i f és integrable Riemann en $[a,c]$ i en $[c,b]$, llavors també ho és en $[a,b]$ i es compleix*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

3 Relació entre integració i derivació

Una funció $F(x)$ que verifica $F'(x) = f(x)$ es diu que és una *primitiva* de la funció f. El resultat següent proporciona una eina potentíssima que permet calcular integrals (això és, àrees) quan coneixem una primitiva de la funció a integrar. Relaciona dos conceptes en principi tan diferents com la derivació i la integració, i constitueix un dels pilars bàsics del càlcul. És per això que s'anomena el teorema fonamental del càlcul:

Teorema fonamental del càlcul. *Sigui f una funció fitada i integrable Riemann en $[a,b]$. La funció $F(x) = \int_a^x f$, amb $x \in [a,b]$ és aleshores contínua. És derivable en tot punt c en el qual f és contínua, i llavors $F'(c) = f(c)$.*

Demostració. Provem primer que F és uniformement contínua en $[a,b]$. Sigui $K = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ i $\varepsilon > 0$. No és difícil comprovar que si f és integrable, també ho és $|f|$ i a més es té $|\int_x^y f| \le \int_x^y |f|$ per a qualsevol $x < y$. Prenem, doncs, $y - x < \varepsilon/K$ i llavors

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_a^y f - \int_a^x f\right| = \left|\int_x^y f\right| \le \int_x^y |f| \le K(y-x) < \varepsilon,$$

i per tant F és uniformement contínua.

Sigui ara $\varepsilon > 0$ i suposem que f és contínua en c, de manera hi ha un $\delta > 0$ tal que si $|x - c| < \delta$, $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Sigui, doncs, $0 < h < \delta$ amb $c + h \in [a,b]$. Aleshores,

$$\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f - \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(c)\right| \le \frac{1}{h}\int_c^{c+h} |f - f(c)| < \frac{1}{h}\varepsilon h = \varepsilon,$$

i de forma semblant es fa si $h < 0$. Tot plegat demostra que F és derivable en c i que $F'(c) = \lim_{h\to 0}(F(c+h) - F(c))/h = f(c)$. $\square$

Corol·lari (regla de Barrow). *Sigui f una funció contínua en $[a,b]$ i g una primitiva de f en aquest interval. Per a tot $x \in [a,b]$ es compleix*

$$\int_a^x f = g(x) - g(a).$$

En particular, $\int_a^b f = g(b) - g(a)$.

Demostració. El teorema anterior ens diu que $F(x) = \int_a^x f$ és una primitiva de f. D'altra banda, dues primitives d'una mateixa funció han de diferir en una constant, perquè llur diferència té derivada zero. Així doncs, $F(x) - g(x) = k$, i com que $F(a) = 0$ tindrem $k = -g(a)$ i per tant $F(x) = g(x) - g(a)$ tal com volíem provar. $\square$

Existeix una generalització d'aquest corol·lari, deguda a Cauchy, que assegura que el resultat també és cert encara que f no sigui contínua, sempre que tingui una primitiva. A vegades se l'anomena **segon teorema fonamental del càlcul**.

4 Ampliacions del concepte d'integral

La noció d'integral es pot estendre fàcilment a funcions no fitades i a funcions definides sobre tota la recta real (o sobre una semirecta). Aquesta extensió es fa mitjançant un pas al límit de les integrals vistes fins ara, i s'obté l'anomenada *integral impròpia de Riemann*. Per exemple, si considerem la funció $f(x) = 1/x^3$, una primitiva n'és $g(x) = -1/(2x^2)$. Llavors, té lògica definir l'àrea de la regió del pla no fitada delimitada per la gràfica de f, l'eix d'abscisses i la recta vertical $x = 1$ com

$$\lim_{k\to+\infty} \int_1^k f = \lim_{k\to+\infty} (g(k) - g(1)) = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Això ho notem com $\int_1^{+\infty} f$. De manera semblant, la funció $f(x) = 1/\sqrt{x}$ no és fitada en $(0,4]$ i podem definir l'àrea de la regió que delimita f, les rectes $x = 0$ i $x = 4$, i l'eix d'abscisses. Com una primitiva de f és $g(x) = 2\sqrt{x}$, definiríem aquesta àrea com

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^4 f = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (g(4) - g(\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (4 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 4,$$

i escrivim aquest valor com $\int_0^4 f$.

D'altra banda, la integral de Riemann no és pas l'única manera d'afrontar el problema del càlcul de l'àrea d'una regió, tot i que pugui semblar la més intuïtiva. Henry Lebesgue (s.XIX-XX) va desenvolupar una nova tècnica d'integració, basada en la teoria de la mesura, que generalitzava la integral de Riemann (això és, tota funció integrable en el sentit de Riemann també ho és en el sentit de Lebesgue i tenen el mateix valor). Les integrals de Lebesgue tenen una gran importància en l'anàlisi real (per exemple en les sèries de Fourier) degut a les bones propietats de convergència. Així, és fàcil trobar successions $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ de funcions integrables Riemann tals que $\lim_n f_n(x) = f(x)$ amb f fitada i que no és integrable Riemann. En canvi, aquesta situació no es presenta amb la integral de Lebesgue (teorema de convergència monòtona).