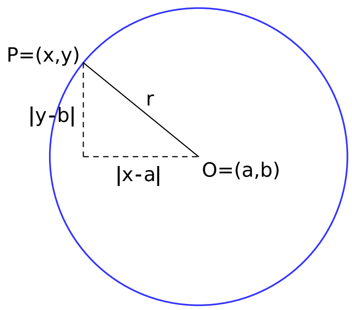
1 Introducció



Donats un punt O del pla i una constant real $r > 0$, es defineix la *circumferència de centre O i radi r* com el lloc geomètric dels punts del pla que es troben a una distància r de O. Si prenem coordenades cartesianes, un punt genèric $P = (x, y)$ pertany a la circumferència de centre $O = (a, b)$ i radi r si i només si $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$, com a conseqüència immediata del teorema de Pitàgores.

Al llarg de l'exposició suposarem certs uns quants resultats bàsics de la geometria euclidiana, com per exemple que la circumferència és simètrica respecte de qualsevol recta que passi pel seu centre, o que una recta tangent a una circumferència en un punt T és ortogonal al radi que uneix T amb el centre.

2 Angles en la circumferència

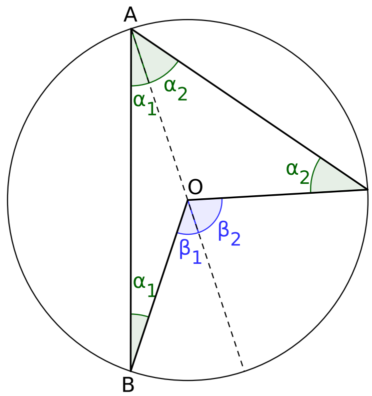
Un angle pot tenir diverses posicions respecte d'una circumferència. Direm que és

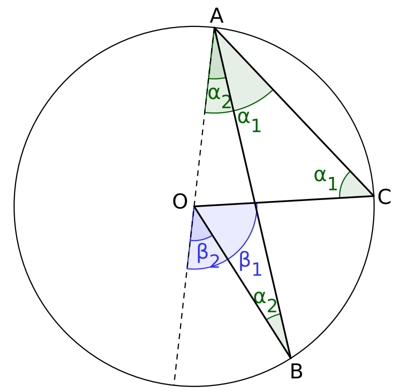
- *central*, si el seu vèrtex és al centre de la circumferència, de manera que els costats que el defineixen són dos radis;
- *inscrit*, si té el vèrtex sobre la circumferència i els costats que el defineixen són dues cordes;
- *semiinscrit*, si té el vèrtex sobre la circumferència, un costat és una corda i l'altre és tangent a la circumferència;
- *interior*, si el seu vèrtex és a l'interior de la circumferència (diferent del centre);
- *exterior*, si el seu vèrtex és a l'exterior de la circumferència.

Evidentment, un angle central té la mateixa amplitud que la de l'arc que abasta. Ara veurem uns resultats que fan referència als altres tipus d'angles.

Teorema. *Sigui $\angle BAC$ un angle inscrit en una circumferència i $\angle BOC$ el corresponent angle central. Llavors $\angle BOC = 2\angle BAC$.*

Demostració. Distingim dos casos segons si O cau dins o fora de la regió angular definida per $\angle BAC$. En el primer cas (figura de l'esquerra), escrivim $\angle BAC = \angle BAO + \angle OAC = \alpha_1 + \alpha_2$.





Com $OA = OB = OC$, els triangles $\triangle AOB$ i $\triangle AOC$ són isòsceles, de manera que $\angle OBA = \alpha_1$ i $\angle OCA = \alpha_2$. Però aleshores $\angle AOB = \pi - 2\alpha_1 \Rightarrow \beta_1 = 2\alpha_1$, $\angle AOC = \pi - 2\alpha_2 \Rightarrow \beta_2 = 2\alpha_2$ i per tant $\angle BOC = \beta_1 + \beta_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\angle BAC$.

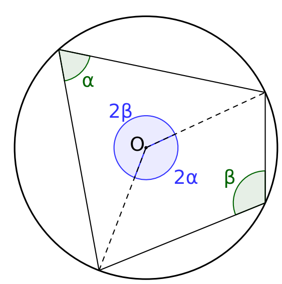
En el segon cas (figura de la dreta), $\angle BAC = \angle OAC - \angle BAO = \alpha_1 - \alpha_2$. Aquests dos angles ja es troben en la posició del cas anterior, de manera que $\beta_1 = 2\alpha_1$, $\beta_2 = 2\alpha_2$ i $\angle BOC = \beta_1 - \beta_2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\angle BAC$. □

Corol·lari 1. *Dos angles inscrits que abasten el mateix arc tenen la mateixa amplitud.*

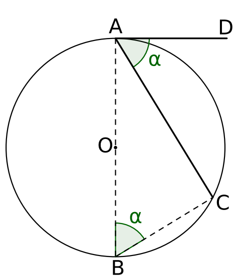
Demostració. Evident, perquè defineixen el mateix angle central. □

Corol·lari 2. *Un angle inscrit que abasta mitja circumferència és recte.* □

Corol·lari 3. *Dos angles inscrits α, β que abasten arcs de circumferència complementaris compleixen $\alpha + \beta = \pi$. Altrament dit, els angles oposats d'un quadrilàter cíclic són suplementaris.*



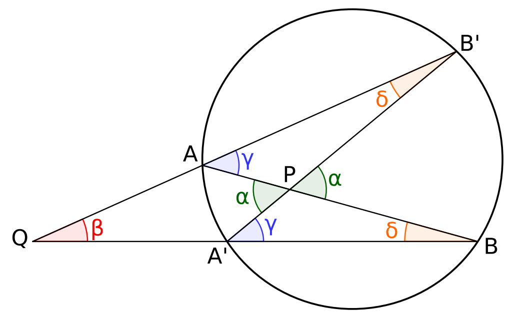
Demostració. A la vista de la figura, la suma dels angles centrals és $2(\alpha + \beta) = 2\pi$ i per tant $\alpha + \beta = \pi$. □



Teorema. *Un angle semiinscrit α té la mateixa amplitud que un d'inscrit que abasta un arc igual que el que queda comprès dins de la regió angular definida per α.*

Demostració. Segons la figura, sigui $\angle CAD$ l'angle semiinscrit, en què CA és una corda i el segment AD és tangent a la circumferència en A. Sigui AB un diàmetre; llavors $\angle BAC = \pi/2 - \alpha$, $\angle ACB$ és recte en abastar mitja circumferència i, per tant, $\angle ABC = \alpha$. Així, qualsevol angle que abasti el mateix arc que $\angle ABC$ (que és el que cau dins la regió angular $\angle CAD$) tindrà la mateixa amplitud α. $\square$

Teorema. *Un angle interior α té la mateixa amplitud que la suma de dos inscrits que abasten els arcs que defineixen els costats de α i les seves prolongacions en tallar la circumferència. Un angle exterior β, els costats del qual tallen la circumferència en ésser prolongats, té la mateixa amplitud que la diferència de dos inscrits que abasten els arcs que defineixen els costats prolongats de β en tallar la circumferència. Gràficament, segons la figura, $\alpha = \gamma + \delta$ i $\beta = \gamma - \delta$.*



Demostració. Si posem $\alpha = \angle APA'$ llavors $\angle APB' = \pi - \alpha$, però com la suma dels angles del triangle $\triangle APB'$ ha de ser π deduïm que $\alpha = \gamma + \delta$. De manera semblant, si posem $\beta = \angle AQB$ i observem el triangle $\triangle AQB$, l'angle en A és $\pi - \gamma$ i, com la suma dels tres angles és π, ha de ser $\beta = \gamma - \delta$. $\square$

3 Potència d'un punt respecte d'una circumferència

Sigui s una circumferència de centre O i radi r, i sigui P un punt del pla. S'anomena *potència de P respecte de s*, i es nota $\text{pot}_s P$ el valor

$$\text{pot}_s P = OP^2 - r^2.$$

Amb aquesta definició es veu que els punts de l'exterior de la circumferència ($OP > r$) tenen potència positiva, els de la circumferència ($OP = r$) tenen potència 0 i els de l'interior ($OP < r$), potència negativa. El punt de menor potència és O amb $\text{pot}_s O = -r^2$.

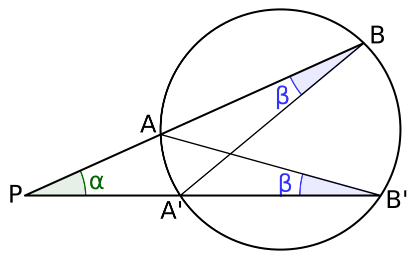
Observem també que si prenem coordenades cartesianes i escrivim l'equació de s com $(X-a)^2 + (Y-b)^2 - r^2 = 0$, on $O = (a, b)$, llavors la potència d'un punt $P = (x, y)$ és $OP^2 - r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2$, que no és altra cosa que el membre esquerre de l'equació de s havent substituït les indeterminades X, Y per les coordenades (x, y) de P.

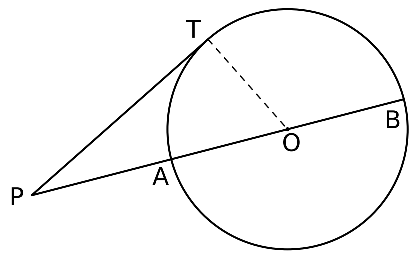
Teorema. *Sigui P un punt exterior a s. Siguin ℓ, ℓ' dues rectes per P tals que $\ell \cap s = \{A, B\}$, $\ell' \cap s = \{A', B'\}$ i sigui PT tangent a s en T. Llavors*

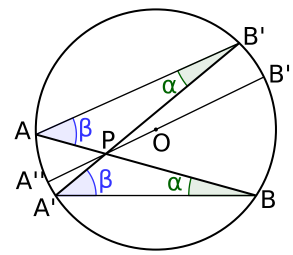
$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB' = PT^2 = \text{pot}_s P.$$

Si P és interior a s, amb les mateixes notacions que en el cas anterior es té

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB' = -\mathrm{pot}_s P.$$







Demostració. Si observem la figura de l'esquerra veiem que els triangles $\triangle PAB'$ i $\triangle PBA'$ són semblants perquè comparteixen l'angle α i $\angle ABA' = \angle AB'A' = \beta$ perquè abasten el mateix arc. Llavors

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB'}{PB} \;\Rightarrow\; PA \cdot PB = PA' \cdot PB',$$

de manera que el producte no depèn de la recta ℓ que triem. Per tant, si triem la recta que passa per P i per O (figura central) i r és el radi de s, tindrem que

$$PA \cdot PB = (OP - r)(OP + r) = OP^2 - r^2 = \mathrm{pot}_s P.$$

Ara, si T és un punt de s de manera que PT és tangent a s, el radi OT és ortogonal a PT i, aplicant el teorema de Pitàgores a $\triangle PTO$ obtenim $PT^2 = OP^2 - OT^2 = OP^2 - r^2 = \mathrm{pot}_s P$.

Finalment, si P és interior a s (figura de la dreta), els triangles $\triangle PAB'$ i $\triangle PA'B$ són semblants perquè $\angle AB'P = \angle AB'A' = \angle A'BA = \angle A'BP = \alpha$ en abastar el mateix arc i també $\angle B'AP = \angle B'AB = \angle BA'B' = \angle BA'P = \beta$ per la mateixa raó. Així, igual que abans,

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB'}{PB} \;\Rightarrow\; PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$

i el producte no depèn de la recta per P triada. Si considerem la recta per P, O i anomenem A'', B'' les interseccions amb s tindrem

$$PA'' \cdot PB'' = (r - OP)(r + OP) = r^2 - OP^2 = -\mathrm{pot}_s P. \qquad \square$$

4 Eix radical i centre radical

Siguin s_1, s_2 dues circumferències del pla euclidià. S'anomena *eix radical de* s_1, s_2 el lloc geomètric dels punts del pla que tenen la mateixa potència respecte de les dues circumferències. Això és

$$E = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{pot}_{s_1} P = \mathrm{pot}_{s_2} P\}.$$

Cal notar que si s_1, s_2 són concèntriques aquest lloc geomètric només existeix si $s_1 = s_2$. En efecte, si O és el centre comú i r_1, r_2 són els respectius radis,

$$\mathrm{pot}_{s_1} P = \mathrm{pot}_{s_2} P \Leftrightarrow OP^2 - r_1^2 = OP^2 - r_2^2 \Leftrightarrow r_1 = r_2 \Leftrightarrow s_1 = s_2,$$

i en tal cas el lloc geomètric és, òbviament, tot $\mathbb{R}^2$. En cas contrari, el següent resultat descriu la forma d'aquest conjunt:

Teorema. *Siguin s_1, s_2 dues circumferències no concèntriques. Llavors, l'eix radical de s_1, s_2 és una recta ortogonal a la línia de centres.*

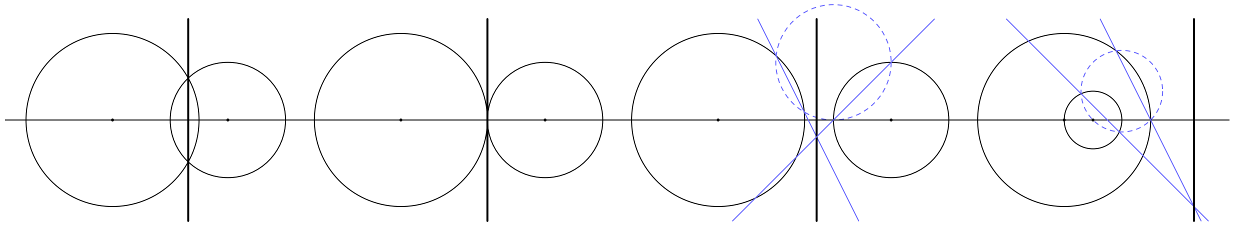
DEMOSTRACIÓ. La manera més fàcil de veure-ho és prenent coordenades cartesianes, essent l'eix d'abscisses la recta de centres. Així, si s_1 i s_2 tenen per centres $(a_1, 0)$ i $(a_2, 0)$, i per radis r_1, r_2 respectivament, les seves equacions seran

$$s_1 : X^2 + Y^2 - 2a_1X + c_1 = 0, \qquad s_2 : X^2 + Y^2 - 2a_2X + c_2 = 0,$$

on $c_1 = a_1^2 - r_1^2$, $c_2 = a_2^2 - r_2^2$. Llavors, un punt $P = (x, y)$ té la mateixa potència respecte de s_1 i de s_2 si i només si

$$x^2 + y^2 - 2a_1x + c_1 = x^2 + y^2 - 2a_2x + c_2 \Leftrightarrow -2a_1x + c_1 = -2a_2x + c_2 \Leftrightarrow x = \frac{c_1 - c_2}{2(a_1 - a_2)},$$

que és l'equació d'una recta ortogonal a l'eix d'abscisses, això és, a la recta de centres. $\square$

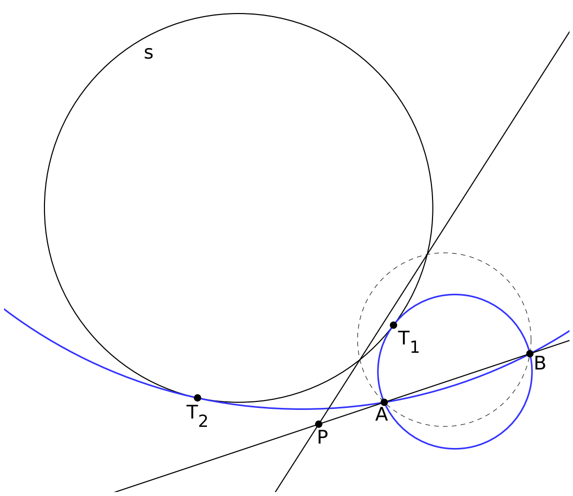


La figura mostra diferents posicions relatives de s_1, s_2 i la manera d'obtenir geomètricament l'eix radical en cada cas. Si s_1, s_2 es tallen en 2 punts o bé són tangents en un punt (1a i 2a figures), els punts de contacte tenen la mateixa potència respecte de les dues circumferències (concretament, potència 0), per tant l'eix radical és la recta que passa per qualsevol d'aquests punts i és ortogonal a la línia de centres. En el cas que s_1, s_2 no es tallin (figures 3a i 4a) fem ús d'una circumferència auxiliar s' (en blau i traç discontinu a la figura) que talli s_1 i s_2. Es tracen els eixos radicals de $\{s', s_1\}$ i de $\{s', s_2\}$ (en blau i traç continu). Aleshores, el punt d'intersecció dels dos eixos és un punt P tal que $\mathrm{pot}_{s_1} P = \mathrm{pot}_{s'} P = \mathrm{pot}_{s_2} P$ i per tant P pertany a l'eix radical de $\{s_1, s_2\}$. S'acaba, com abans, traçant la perpendicular per P a la línia de centres.

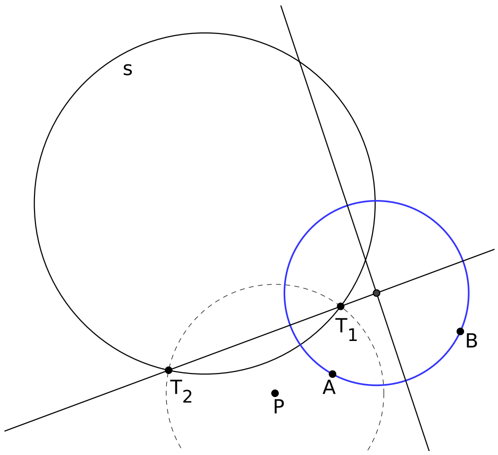
Dues circumferències s_1, s_2 de centres O_1, O_2 que es tallen ortogonalment en punts T, U fan que els radis també siguin ortogonals en els punts de tall, això és, $O_1T \perp O_2T$ i $O_1U \perp O_2U$. Altrament dit, les rectes O_1T i O_1U són tangents en T i en U, respectivament, a s_2; també a la inversa, O_2T i O_2U són tangents en T i en U, respectivament, a s_1. Així, si s és una circumferència de centre O i radi r que talla ortogonalment a unes altres dues s_1, s_2 en uns punts $T \in s_1$, $U \in s_2$, tindrem que $r = OT = OU$ i a més a més els radis OT, OU són tangents a s_1, s_2 respectivament. Per tant, $\mathrm{pot}_{s_1} O = OT^2 = OU^2 = \mathrm{pot}_{s_2} O$. D'aquesta manera, hem provat

Teorema. *Si s és una circumferència ortogonal a s_1, s_2, llavors el centre de s es troba sobre l'eix radical de s_1, s_2.* □

Aquest resultat, juntament amb la dualitat tangència-ortogonalitat, fa que l'eix radical sigui un objecte útil per resoldre problemes clàssics de tangències i d'ortogonalitat. Veiem-ne un parell d'exemples.



Donada una circumferència s i dos punts A, B, trobar les circumferències que passen per A, B i són tangents a s. Primer de tot cal observar que tot el feix de circumferències per A, B tenen un eix radical comú, que és la recta per A, B. D'altra banda, dibuixem una circumferència auxiliar s' (amb traç discontinu en la figura) i tracem l'eix radical d'aquesta amb s, que talla la recta per A, B en un punt P. Aquest P, en trobar-se sobre els dos eixos radicals, té la mateixa potència respecte de s i de s', però també respecte de totes les circumferències per A, B (dit d'una altra manera, P és fix independentment de la circumferència auxiliar s' que triem). En particular, si s_1 i s_2 són les circumferències tangents que cerquem, P estarà sobre l'eix radical de $\{s, s_1\}$ i sobre el de $\{s, s_2\}$, però aquests eixos són les rectes pels punts de tangència T_1, T_2. Així doncs, només cal obtenir T_1, T_2 traçant les tangents a s per P. Les circumferències solució (en blau) passen per A, B, T_1 i per A, B, T_2.



Donada una circumferència s i dos punts A, B, trobar la circumferència que passa per A, B i és ortogonal a s. Suposem que hem construït P, T_1 i T_2 com en el cas anterior. Llavors, per la manera com hem obtingut P, sabem que la circumferència s'' de centre P i que passa per T_1, T_2 (amb traç discontinu en la figura) és ortogonal a s i a totes les del feix per A, B. En particular, ho és a la que estem cercant, de forma que, gràcies a l'últim teorema, el centre de la nostra circumferència solució es trobarà sobre l'eix radical de $\{s, s''\}$, que és la recta per T_1, T_2. Però el centre també es trobarà, òbviament, sobre la mediatriu de A, B. Per tant, la intersecció de les dues rectes ens dóna el centre de la circumferència cercada (en blau a la figura).

Siguin s_1, s_2, s_3 tres circumferències. Si no n'hi ha dues de concèntriques, considerem els eixos radicals r_{12}, r_{23} i r_{13} de $\{s_1, s_2\}$, $\{s_2, s_3\}$ i $\{s_1, s_3\}$ respectivament. Si els centres estan alineats, els dos primers seran paral·lels i també r_{13} serà paral·lel als altres dos. En cas contrari, r_{12} i r_{23} es tallaran en un punt P que verificarà $\mathrm{pot}_{s_1} P = \mathrm{pot}_{s_2} P$ i també $\mathrm{pot}_{s_2} P = \mathrm{pot}_{s_3} P$, de forma que P també es troba sobre r_{13}. D'aquesta manera, hem provat:

Teorema. *Si s_1, s_2, s_3 són tres circumferències de centres no alineats, els seus eixos radicals presos dos a dos concorren en un punt. Aquest punt s'anomena* centre radical *de s_1, s_2, s_3.*$\square$

Veiem un resultat de la geometria del triangle on intervé el centre radical:

Teorema. *Sigui $\triangle ABC$ un triangle i considerem les tres circumferències que tenen per diàmetres els tres costats del triangle. Llavors, el centre radical de les circumferències és l'ortocentre de $\triangle ABC$.*

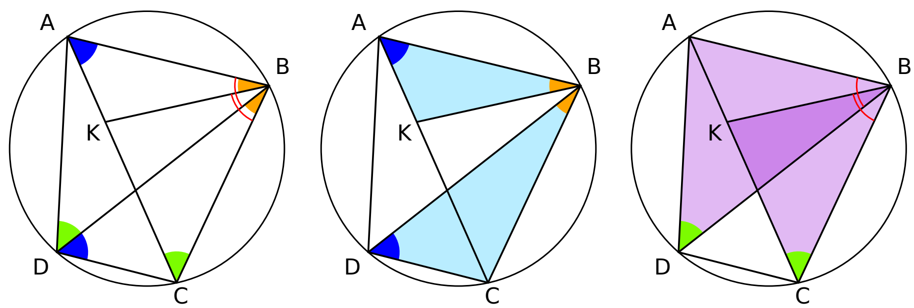
Demostració. Siguin s_{AB} i s_{AC} les circumferències que tenen AB i AC per diàmetre, respectivament. Els seus centres són els punts mitjos de AB i AC de forma que, pel teorema de Tales, la línia de centres és paral·lela al costat BC. D'altra banda, com el punt A és comú a s_{AB} i a s_{AC}, l'eix radical d'ambdues passa per A i és ortogonal a BC, això és, es tracta de l'altura de $\triangle ABC$ per A. Raonant igual amb els altres costats, concloem que els eixos radicals són les altures del triangle i, per tant, concorren en l'ortocentre. $\square$

5 El teorema de Ptolemeu

Acabem l'exposició amb un important teorema de la geometria euclidiana, que generalitza el teorema de Pitàgores.

Teorema de Ptolemeu. *Sigui $ABCD$ un quadrilàter inscrit en una circumferència. Aleshores la suma dels productes de costats oposats coincideix amb el producte de les diagonals, això és,*

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD.$$



Demostració. Pel teorema dels angles inscrits que abasten igual arc, tenim que $\angle BAC = \angle BDC$ i $\angle ADB = \angle ACB$. Sigui K un punt sobre AC tal que $\angle ABK = \angle CBD$ i notem que $\angle CBK = \angle ABD$. Llavors, comparant els angles, veiem que els triangles $\triangle ABK$ i $\triangle DBC$ són semblants, a l'igual que $\triangle ABD$ i $\triangle KBC$. Per tant,

$$\begin{aligned}\frac{AK}{AB} = \frac{CD}{BD} \quad \text{i} \quad \frac{CK}{BC} = \frac{DA}{BD} &\Rightarrow AK \cdot BD = AB \cdot CD \quad \text{i} \quad CK \cdot BD = BC \cdot DA \Rightarrow \\ &\Rightarrow AK \cdot BD + CK \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA \Rightarrow \\ &\Rightarrow (AK + CK) \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA \Rightarrow \\ &\Rightarrow AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA,\end{aligned}$$

com volíem veure. □

Observem que si el quadrilàter inscrit és un rectangle, el resultat que s'obté és el teorema de Pitàgores, per això diem que aquest el generalitza.

Finalment cal mencionar que, tot i que només hem demostrat el teorema en un sentit, el recíproc també és cert: si en un quadrilàter es verifica aquesta igualtat, llavors és inscriptible. En general, si el quadrilàter no és inscriptible, es té la desigualtat $AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD$.