Tema 1: Números naturales. Sistemas de numeración.

1. INTRODUCCIÓN.

1.1. Introducción histórica
1.2. Justificación del contenido.
1.3. Conocimientos previos.

2. CONSTRUCCIÓN DE $\mathbb{N}$.

2.1. Axiomas de Peano.
2.2. Principio de inducción.

3. OPERACIONES.

3.1. Suma en $\mathbb{N}$
3.2. Producto en $\mathbb{N}$.

4. ORDEN EN $\mathbb{N}$

4.1. Definición. (orden)
4.2. Definición (relación de orden).
4.3. Proposición.
4.4. Definición (conjunto ordenado y bien ordenado).
4.5. Proposición (Principio del buen orden)
4.6. Teorema del extremo.
4.7. Compatibilidad.

5. SISTEMAS DE NUMERACIÓN.

5.1. Definición.
5.2 Tipos.
5.3. Teorema de la división euclídea
5.4. Teorema fundamental de la numeración
5.5. Breve historia sobre sistemas de numeración.

6. ASPECTOS DIDÁCTICOS.

6.1. Ubicación.

6.2. PROPUESTA didáctica.

7. BIBLIOGRAFIA.

- - - - - - - - - - - - - - - -

SUPRIMIBLE

→ unicidad de la suma

Tema 1: Números naturales. Sistemas de numeración.

1. INTRODUCCIÓN.

1.1. Introducción histórica.

En 1960 se descubrió un peroné de babuino con muescas que han sido interpretadas como marcas utilizadas para el conteo, como un posible calendario lunar, como una serie de elementos de estructura aritmética, o simplemente como marcas que proporcionan un buen agarre, sin aparente significado matemático. Se trata del hueso de Ishango, que ~~data de~~ tiene 20.000 años de antigüedad.

Pese a la falta de evidencia del caso del hueso de Ishango, sí se conocen otras muestras históricas más recientes que evidencian marcas de conteo. Hace 10.000 años, en Oriente Medio, la gente usaba piezas de barro para llevar un registro numérico; hace 4.000 años, dichas piezas se unían con una cuerda a modo de collar; a partir del 3500aC se inscribían símbolos en sobres para indicar el número de piezas. Y así, a partir de dichos símbolos, se dieron las bases de todos los sistemas subsiguientes de notación numérica y, posiblemente, de la propia escritura.

Así pues, los números naturales ($\mathbb{N}$) surgen de la necesidad del ser humano de contar, pero también sirven para establecer un orden entre elementos de una sucesión o bien para medir el tamaño de conjuntos finitos. No obstante, el concepto de número no es fácil de definir pese a haber sido esencial a lo largo de la historia. El concepto de número natural hace referencia a la abstracción de aquello que tienen en común todos los conjuntos con el mismo número de elementos; no son ni los elementos, ni el conjunto, ni las cifras que sirven de representación, sino el concepto abstracto que yace detrás de esta idea.

1.2. Justificación del contenido.

El tema se ha estructurado en tres bloques diferenciados. En primer lugar, las secciones 2, 3 y 4 hacen referencia a la construcción axiomática de los números naturales, la definición de las operaciones que pueden establecerse entre ellos y la relación de orden que subyace en el conjunto.

En segundo lugar, la sección 5 define los sistemas de numeración, los clasifica según la tipología y presenta un resultado que relaciona de forma unívoca cada número natural con su representación única en un sistema de numeración arbitrario.

Finalmente, antes de incluir la bibliografía, la 6a sección establece una relación entre el tema tratado y el currículum vigente, incluyendo una propuesta didáctica.

1.3. Conocimientos previos.

El tema en sí resulta bastante autocontenido, de forma que se ofrecen las definiciones y/o resultados previos necesarios, a lo largo de cada sección, para poder seguir sin ambigüedades el contenido del tema en cuestión.

2. CONSTRUCCIÓN DE $\mathbb{N}$.

Pese a que el conjunto de números naturales puede construirse mediante clases de equivalencia obtenidas por la relación de coordinabilidad entre conjuntos, en este tema optamos por la vía axiomática que introdujo Giuseppe Peano a finales del siglo XIX.

2.1. Axiomas de Peano.

Existe un conjunto no vacío $\mathbb{N}$, un elemento distinguido de $\mathbb{N}$ (0) y una aplicación "s" denotada "sucesor de" tales que se verifican los siguientes axiomas.

A1) $0 \in \mathbb{N}$

A2) $\forall n \in \mathbb{N}, s(n) \in \mathbb{N}$

A3) $0 \notin s(\mathbb{N})$. ($\nexists n \in \mathbb{N} / 0 = s(n)$)

A4) $\forall a, b \in \mathbb{N}$ si $s(a) = s(b) \Rightarrow a = b$ (inyectividad de

A5) si $A \subset \mathbb{N}$ verifica que

i) $0 \in A$

ii) si $n \in A$, entonces $s(n) \in A$

entonces $A = \mathbb{N}$. (Axioma de inducción completa)

NOTA
En els apunts de Bàsica, enuncia els principis d'inducció a partir d'un n_0.
Aquest no pot ser 0 o 1 o el que siga.
Per a justificar NOTA 2

NOTA 1

Podemos observar que A1 implica que $\mathbb{N} \neq \emptyset$, A2, A3 y A4 que siempre puede escogerse un elemento más distinto a los anteriores y A5 caracteriza biunívocamente a $\mathbb{N}$.

NOTA 2

Pese a que existe una polémica abierta entre pertenencia o no del 0 a los naturales, en este tema se ha considerado que $0 \in \mathbb{N}$ por ser esta la formulación original que realizó Peano. No obstante, todo el tema puede tratarse con igual rigurosidad y sin entrar en contradicciones si se considera $1 \in \mathbb{N}$ como el elemento inicial del conjunto.

De todos los axiomas mencionados, cabe destacar en especial la relevancia del A5, puesto que este nos permite demostrar múltiples propiedades de los números naturales a través de un razonamiento inductivo.

2.2. Principio de inducción.

Sea P una propiedad relativa a los números naturales.
Supongamos que:

i) 0 verifica P.

ii) si n verifica P entonces $s(n)$ verifica P.

Entonces, todo número natural verifica P.

demo:

Basta considerar $A = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ verifica } P\}$

Tenemos pues que

- $0 \in A$, ya que por hipótesis i) 0 verifica P.
- Dado $n \in A$, entonces $s(n) \in A$ por la hipótesis 2.

Así pues, como se verifican las dos condiciones de A5, podemos concluir que $\boxed{A = \mathbb{N}}$

como hemos mencionado, este resultado nos permite garantizar, por ejemplo, que la suma de los n primeros números naturales siempre será $\frac{n(n+1)}{2}$ sea cuál sea el n escogido.

Pasemos ahora a definir las operaciones que pueden realizarse dentro del conjunto de naturales.

3. OPERACIONES.

3.1. SUMA en IN.

Existe una única aplicación $f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $(n,m) \longmapsto f(n,m) = n+m$, llamada suma que verifica que:

i) $f(n,0) = n$

ii) $f(n, s(m)) = s(f(n,m))$

Comprobamos pues que existe (está bien definida) y es única.

demo:

Existencia:

sea $K = \{n\in\mathbb{N} \,/\, f_n : \{n\}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\}$ verifica i) y ii).

Por tanto, tenemos que $0\in K$, ya que $\exists f_0 : \{0\}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $(0,n) \longmapsto f(0,n) = 0$. verificando las condiciones iniciales.

Definimos $f_{s(n)}(s(n), m) = s(f_n(n,m))$, que también verifica las propiedades.

- $f_{s(n)}(s(n),0) = s(f_n(n,0)) \underset{i)}{=} s(n)$
- $\underbrace{f_{s(n)}(s(n),m)}_{s(n)+m} = \underbrace{s(f_n(n,m))}_{s(n+m)}$

Por tanto, $s(n)\in K$, y por AS, $K = \mathbb{N}$, y así hemos probado la existencia.

Unicidad:

Supongamos que $\exists$ dos aplicaciones f, g que verifican las condiciones del enunciado.

Fijamos $x\in\mathbb{N}$, y aplicamos inducción sobre $K_x := \{y\in\mathbb{N} \,/\, f(x,y) = g(x,y)\}$

- $0\in K_x$, ya que $f(x,0) = 0 = g(x,0)$.
- Dado $y\in K_x$, tenemos que $f(x,y) = g(x,y) \Rightarrow s(f(x,y)) = s(g(x,y)) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x, s(y)) = g(x, s(y)) \Rightarrow s(y)\in K_x$

Por tanto, $K_x = \mathbb{N}$ y dado que se cumple $\forall x\in\mathbb{N}$, deducimos que $f=g$.

Notemos que la operación suma verifica las siguientes propiedades:

- Existencia de elemento neutro 0 : $n+0 = n$.
- Conmutatividad : $n+m = m+n$
- Asociatividad : $(n+m)+p = n+(m+p)$.

Todas estas propiedades pueden demostrarse aplicando nuevamente el Axioma de inducción completa.

Además, a partir de la definición de suma se deducen otras propiedades como:

- $s(n) = n+1. \rightarrow n+1 = s(n+0) = s(n)$.
- si $n+m=0 \Rightarrow n=0 \wedge m=0$

3.2 PRODUCTO EN $\mathbb{N}$.

Existe una única aplicación $f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ llamada producto que verifica que:

$$(n,m) \longmapsto f(n,m) = n\cdot m$$

1) $f(n,0)=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$.
2) $f(n,s(m)) = f(n,m)+m$

Lo demostraríamos de forma análoga al caso anterior considerando $f_n: \{n\}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ y definiendo $f_{s(n)}(s(n),m)=f_n(n,m)+n$

se comprueba de forma análoga a la suma en
y unicidad.

En cambio, el producto verifica propiedades distin

- Conmutatividad: $n\cdot m = m\cdot n$
- Asociatividad: $(n\cdot m)\cdot p = n\cdot(m\cdot p)$
- Distributividad respecto de la suma: $(n+m)\cdot p = np+mp$

$$n\cdot(m+p) = n\cdot m + np.$$

- Existencia de elemento neutro: $n\cdot 1 = 1\cdot n = n$.
- Existencia de elemento absorbente: $n\cdot 0 = 0\cdot n = 0$.

Ya que en el caso anterior no las probamos, demostraremos en este caso una de ellas. El resto se demuestran de forma análoga recurriendo al axioma A_5.

3.2.1 Conmutatividad.

Dem:

sea $K=\{n\in\mathbb{N} \,/\, n\cdot m = m\cdot n \ \ \forall m\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{N}$

- $0\in K$

sea $J=\{n\in\mathbb{N} \,/\, n\cdot 0 = 0\cdot n\} \longrightarrow 0\in J$ y si $j\in J$ entonces $s(j)\cdot 0 = 0$

y $0\cdot s(j) \underset{def}{=} 0\cdot j + 0 \underset{HI}{=} j\cdot 0 + 0 = 0$.

- Si $n\in K \Rightarrow s(n)\in K$.

Si $n\in K$ entonces se tiene que $m\cdot s(n) \underset{def}{\overset{II.I}{=}} m\cdot n + m \underset{HI}{=} n\cdot m + m =$ 3. elem neutro.

$= n\cdot m + 1\cdot m \underset{distr.}{=} (n+1)\cdot m = s(n)\cdot m$

Por tanto, $s(n)\in K$.

Y por A_5, $K=\mathbb{N}$.

Igual que en el caso anterior, se deducen algunas propiedades de la definición de producto en $\mathbb{N}$.

- $n\cdot 1 = n \rightarrow n\cdot 1 = n\cdot s(0) = n\cdot 0 + n = n$.
- $n\cdot m = 0 \Rightarrow n=0 \vee m=0$.

4. ORDEN EN $\mathbb{N}$:

4.1. Definición:

Dados $a, b \in \mathbb{N}$, decimos que a es menor que b, y lo expresamos como $a<b$, si existe un $c \in \mathbb{N}$, $c \neq 0$ tal que $a+c=b$.

La definición de a menor o igual que b, expresando como $a \leq b$, es análoga pero permitiendo que $c=0$.

4.2. Definición (Relación de orden):

Se dice que una relación binaria $\mathcal{R}$ sobre el conjunto A es una relación de orden en A si verifica las propiedades reflexiva ($a\mathcal{R}a$), antisimétrica ($a\mathcal{R}b$, $b\mathcal{R}a \Rightarrow a=b$) y transitiva ($a\mathcal{R}b$, $b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$).

4.3. Proposición

La relación $\leq$ es de orden en $\mathbb{N}$.

demo:

- reflexiva $\quad a+0=a \Rightarrow a \leq a$.
- antisimétrica $\quad$ si $a \leq b$, y $b \leq a \Rightarrow \exists c, d \in \mathbb{N} \ / \ a+c=b$, $b+d=a$.
  De forma que: $a+b=a+c+b+d \Rightarrow c+d=0 \Rightarrow c=d=0$.
  propiedad deducida de la suma.
  Por tanto, $a=b$.
- transitiva $\quad$ si $a \leq b$, $b \leq c \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{N} \ / \ a+x=b$, $b+y=c$
  $\Rightarrow a+x+y=b+y=c$
  Por tanto, $a \leq c$ por definición.

4.4. Definición (conjunto ordenado y bien ordenado):

Un conjunto ordenado es un conjunto A junto con una relación de orden $\leq$ sobre él. Se denota $(A, \leq)$.

Un conjunto bien ordenado es un conjunto ordenado donde todo subconjunto no vacío tiene un mínimo.

4.5 Proposición (Principio del Buen orden):

El conjunto $(\mathbb{N}, \leq)$ es bien ordenado. Es decir, todo subconjunto no vacío de números naturales tiene un primer elemento.

Además, este primer elemento es único y se denota como mínimo del conjunto.

demo:

En primer lugar, demostraremos que es bien ordenado.

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$.

Supongamos por reducción al absurdo que no existe ningún elemento de A ~~conjunto~~ que sea menor o igual que el resto, es decir, que no tiene primer elemento.

Definimos $C := \{c \in \mathbb{N} \ / \ c \leq a \quad \forall a \in A\}$

Veamos por inducción que $C=\mathbb{N}$.

i) $0 \in C$

Evidente, ya que en caso contrario 0 sería el primer elemento de A.

ii) Si $c \in C$, entonces $c \leq a \quad \forall a \in A$.

Pero si c fuese igual a a ($c=a$), entonces $c \in A$, por tanto $c<a$.

Entonces $c+1 \leq a \quad \forall a \in A$, pero si $c+1=a$, de nuevo $c+1 \in A$, por tanto $c+1<a$

Por tanto, si $c \in C \Rightarrow c+1 \in C$

Por el axioma A_5 de inducción concluimos que $C = \mathbb{N}$, lo cual contradice que $A \neq \emptyset$, ya que $A \cup C = \mathbb{N}$ por cómo está definido C. Por tanto, si $C = \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow A = \emptyset$.

Por tanto, hemos llegado a un absurdo.

Pasamos ahora a probar la unicidad del primer elemento.

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$.

Supongamos que $a_1, a_2 \in A$ son ambos el primer elemento de A, es decir $a_1 \leq a \;\; \forall a \in A$, ; $a_2 \leq a \;\; \forall a \in A$.

Entonces, tenemos que $a_1 \leq a_2$ y $a_2 \leq a_1$, y por la propiedad antisimétrica llegamos a que $\boxed{a_1 = a_2}$.

4.6. Teorema del extremo (Axioma del supremo)

Todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ y acotado superiormente tiene un máximo.

<u>demo:</u>

Sea $S := \{x \in \mathbb{N} \,/\, a \leq x \;\; \forall a \in A\} \neq \emptyset$. el conjunto de las cotas superiores de A.

Por el principio del buen orden, existe $m := \min(S)$ y vamos a comprobar que también $m = \max(A)$.

- Si $m = 0 \Rightarrow A = \{0\} \Rightarrow \max(A) = 0$ ✓.
- Si $m \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \,/\, n+1 = m$ y $n \notin S$. $\Rightarrow \exists a \in A \,/\, \underbrace{n < a}$ $\Rightarrow m = n+1 \leq a$
  $\Rightarrow m \in A$ y $m = \max(A)$.

com que S és el conjunt de fites superiors, llavors no pot ser que n és i $n \notin A$ necessàriament aquest $n \in A$

4.7. Compatibilidad.

La relación de orden $\leq$ es compatible con la suma y el producto en $\mathbb{N}$. Es decir,

- si $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c \;\; \forall c \in \mathbb{N}$.
- si $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c \;\; \forall c \in \mathbb{N}$.

NOTA

Si consideramos la relación de orden estricta $<$, entonces, al igual que en la definición 4.1, debemos excluir el caso en que $c = 0$.

5. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

5.1. Definición.

Un sistema de numeración es un conjunto finito de símbolos denotados como <u>dígitos</u> o <u>cifras</u> del sistema, y un conjunto de <u>reglas de generación</u> que nos permiten representar cualquier número natural.

El cardinal del conjunto de dígitos se denomina <u>base</u> del sistema.

5.2. Tipos.

Existen diferentes tipos de sistemas de numeración: posicionales y no posicionales. En el tema nos centraremos en los sistemas posicionales debido a las ventajas que ofrecen en cuanto a cálculo y manipulación frente a los no posicionales. Por ello se establecieron los sistemas posicionales de forma unánime.

Actualmente, el que se utiliza en Europa proviene del indoarábigo. Este fue un sistema posicional de base 10 que también incluía el concepto del cero (entre s. V y VIII).

NOTA

Al final del tema se incluye un último apartado donde se mencionan y explican algunos de los sistemas no posicionales con mayor reconocimiento histórico.

Así pues, veamos a continuación un resultado que garantiza la existencia y la unicidad de la expresión de un número $n \in \mathbb{N}$ en una base b cualquiera. No obstante, primero introduciremos un teorema auxiliar.

5.3. Teorema de la división euclídea.

Dados $D, d \in \mathbb{N}$ con $d \neq 0$ existen unos únicos $q, r \in \mathbb{N}$ llamados cociente y residuo de la división entera de D entre d, tales que $D = dq + r$ con $r < d$.

demo:

- Si $D = 0$, entonces $q = r = 0$.
- Supongamos $D \neq 0$.

Para probar la existencia consideramos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} / d \cdot x \leq D\}$. Notemos que A es no vacío, ya que $0 \in A$ y además es acotado superiormente ya que D es cota. Por tanto, por el teorema del extremo (4.6) sabemos que existe $q \in \mathbb{N} / q = máx(A)$ que verifica que:

$$d \cdot q \leq D < d(q+1) = dq + d \Rightarrow D = d \cdot q + r \text{ con } r < d.$$

Veamos ahora la unicidad.

Supongamos que $\begin{array}{l} D = d \cdot q + r \\ D = d \cdot q' + r' \end{array}$ con $\underbrace{r \leq r'}_{\text{arbitrario}}$ y $r, r' < d$

Pero si $r \leq r' \Rightarrow r + h = r'$ con $h \in \mathbb{N} \Rightarrow d \cdot q + r = d \cdot q' + r + h \Rightarrow d \cdot q = d \cdot q' + h \Rightarrow$
$\Rightarrow d \cdot q' \leq d \cdot q \Rightarrow q' \leq q \Rightarrow q' + m = q$ con $m \in \mathbb{N}$.

Entonces $\left.\begin{array}{l} d \cdot q + r = d \cdot q' + d \cdot m + r \\ d \cdot q' + r' = d \cdot q' + r + h \end{array}\right\} \Rightarrow d \cdot m = h \Rightarrow r' = r + d \cdot m$

Si $m \neq 0$, entonces $r' \geq d$, lo cual contradice la hipótesis.
Por tanto, $m = 0 \Rightarrow h = 0$ y $r = r'$ y $q = q'$.

5.4. Teorema fundamental de la numeración.

Sea $b \in \mathbb{N}$, $b>1$. Entonces todo $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ puede escribirse de forma única como $n = n_0 + n_1 \cdot b + n_2 \cdot b^2 + \cdots + n_k \cdot b^k$ con $n_k \neq 0$, $n_i < b$ $\forall i \in \{0, \dots, k\}$.

<u>demo</u>:

Consideramos la división euclídea de n entre b, de forma que por 5.3 sabemos que $\exists\, c_1, n_0 \in \mathbb{N} /\; n = c_1 \cdot b + n_0$ con $n_0 < b$.

- si $c_1 < b$, consideramos $c_1 = n_1$ y ya hemos terminado. $(n = n_1 \cdot b + n_0)$
- si $c_1 \geq b$, entonces consideramos la división euclídea de c_1 entre b, de forma que por 5.3 sabemos que $\exists\, c_2, n_1 \in \mathbb{N} / c_1 = c_2 b + n_1$

Si sustituimos c_1 en la expresión de n, tenemos que:

$$n = c_2 \cdot b^2 + n_1 \cdot b + n_0 .$$

De forma que

- si $c_2 < b$, consideramos $c_2 = n_2$ y ya hemos terminado $(n = n_2 \cdot b^2 + n_1 b + n_0)$
- si $c_2 \geq b$, repetimos el proceso de forma análoga al caso anterior.

Puesto que la sucesión de cocientes es decreciente $c_1 > c_2 > c_3 > \dots$ y está acotada inferiormente $(c_i > 0\ \forall i)$, sabemos que el proceso terminará y obtendremos la expresión buscada.

Para probar la <u>unicidad</u> de la expresión suponemos que:

$$n = n_0 + n_1 b + \cdots + n_k b^k \qquad n = n_0 + b(n_1 + \cdots + n_k b^{k-1})$$
$$n = n_0' + n_1' b + \cdots + n_\ell b^\ell \quad \text{que pueden reescribirse como} \quad n = n_0' + b(n_1' + \cdots + n_\ell b^{\ell-1})$$

Ambas expresiones representan la división euclídea de n entre b, por tanto, por la unicidad de esta expresión (probada en 5.3) deducimos que $n_0 = n_0'$ y que $n_1 + n_2 b + \cdots + n_k b^{k-1} = n_1' + n_2 b + \cdots + n_\ell \cdot b^{\ell-1}$

Si repetimos el proceso terminamos llegando a que $n_i = n_i'$ $\forall i$ y $k = \ell$.

5.5. Breve historia sobre sistemas de numeración

Antes de que surgiesen los números para representar cantidades, el ser humano ya utilizaba otros métodos para contar, utilizando objetos como piedras, palos de madera, nudos o simplemente los dedos. Más adelante surgieron símbolos gráficos como recurso para contar, como por ejemplo marcas en un bastón o trazos en la tierra. Todos ellos son muestras de sistemas de numeración no posicionales.

A continuación incluimos una lista donde aparecen cronológicamente algunos de los sistemas (posicionales y no posicionales) más relevantes históricamente:

• 3000 aC - Egipcio - Aditivo, no posicional, con símbolos para las potencias de base 10.

• 2500 aC - Babilónico - Semiposicional, de base 10, aditivo hasta el 60 y posicional para números posteriores.

• 1500 aC - Chino - Híbrido aditivo/multiplicativo, no posicional. símbolos del 1 al 10 y potencias de base 10.

• 1.000 aC - Maya - Posicional de base 20 con el 5 como base auxiliar.

• 600 aC - Griego - Aditivo, no posicional. símbolos 1, 2, 3, ..., 10, 20, 30.

• s. V - VIII dC - Indoarábigo - Posicional, de base 10 y que incluía el concepto del cero.

Actualmente, los sistemas binario, octal y hexadecimal (bases 2, 8 y 16 respectivamente) son de gran importancia en el ámbito informático.

6. ASPECTOS DIDÁCTICOS.

6.1. Ubicación

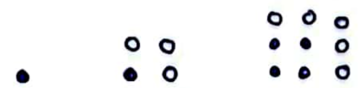
Tal como se establece en el Decreto 175/2022, de 27 de septiembre, de ordenación de las enseñanzas de la educación básica, el uso de números indoarábigos se trabaja como parte de los saberes impartidos entre 1º y 3º de la ESO. En particular, dado que posteriormente se trabajará el concepto de número entero y racional (fracciones en estos cursos), resulta apropiado incluir el trabajo de este tipo de números, y de los sistemas de numeración, en 1º de la ESO.

6.2. Propuesta didáctica.

Una actividad que permite conectar los números naturales con patrones geométricos es la representación de números figurados. A continuación se incluyen unos ejemplos:

Números cuadrados

n = 1 n = 2 n = 3



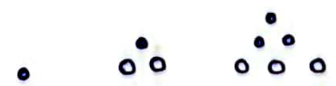
1 $1+3$ $1+3+5$

$\shortparallel$

1 4 9

números triangulares

n = 1 n = 2 n = 3

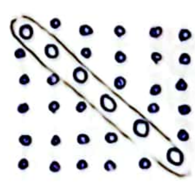


1 $1+2$ $1+2+3$

$\shortparallel$

1 3 6

cuadrado = diagonal + 2 triangulares



Estas disposiciones nos permiten encontrar fórmulas interesantes. En el caso de los números cuadrados, vemos como estos se identifican con la suma de los primeros números impares:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2.$$

Y también podemos ver que un número triangular de orden n es $1+2+\dots+n$. Y si relacionamos el número cuadrado de orden n con la suma de su diagonal y dos triangulares de orden n-1, podemos deducir la suma de los n-1 primeros números naturales.

$$n^2 = n + 2(1+2+\dots+n-1) \Rightarrow \boxed{1+2+\dots+n-1 = \frac{n^2-n}{2}}$$

De esta forma conectamos el concepto de número con representaciones geométricas e introducimos las sucesiones como recurso auxiliar para la identificación de ciertos patrones.

7. BIBLIOGRAFÍA.

- Números increíbles, Ian Stewart. Ed. Crítica.
- Gómez, B.: 1988, Numeración y Cálculo. Ed. Síntesis.
- Tahan, M.: ."El hombre que calculaba". Ed. RBA.