1 Definicions

Un *políedre convex* és una regió fitada de l'espai definida per un nombre finit de plans, de forma que l'interior d'aquesta regió queda completament contingut en un semiespai de cada pla. La part de cada pla que queda delimitada per les interseccions amb els altres plans és un polígon que anomenarem *cara* del políedre. Un costat compartit per dues cares és una *aresta*, i els extrems de les arestes són els *vèrtexs*.

Direm que un políedre té els seus vèrtexs (resp. cares, arestes) *homogenis* si per a qualsevol parella existeix una isometria del grup de simetries del políedre que transforma un d'ells en l'altre.

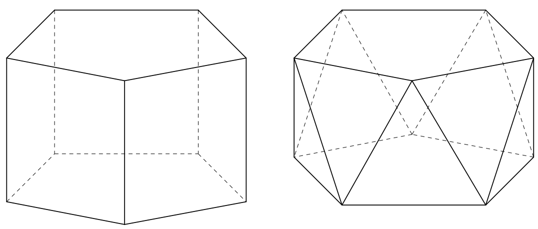
En aquesta exposició ens ocuparem dels políedres convexos *uniformes*, que són aquells les cares dels quals són polígons regulars d'una o més classes i, a més a més, tenen vèrtexs homogenis. Els políedres uniformes convexos se solen classificar en tres grans grups:

- **Regulars:** a més de tenir els vèrtexs homogenis, també tenen les cares i les arestes homogènies. Són els també anomenats *sòlids platònics*. Els construirem i demostrarem que només n'hi ha cinc.
- **Quasiregulars:** tenen vèrtexs i arestes homogènies, però no les cares. Només n'hi ha dos de convexos, que són dos sòlids arquimedians: el *cuboctàedre* i el *icosidodecàedre*.
- **Semiregulars:** tenen els vèrtexs homogenis, però no les arestes ni les cares. Com a exemples tenim una família de *prismes* i *antiprismes* (que emprarem per a la construcció dels políedres regulars) i 11 sòlids arquimedians que descriurem en l'última secció.

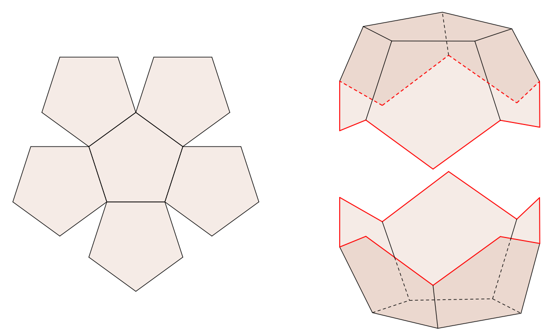
2 Construcció dels sòlids platònics

Els políedres més familiars són les *piràmides* i els *prismes*. Només ens ocuparem de les piràmides regulars rectes, que tenen per base un n-gon regular i per cares laterals n triangles isòsceles, i dels prismes regulars rectes, que tenen per bases dos n-gons regulars i per cares laterals n rectangles, de forma que en cada vèrtex hi concorren dos rectangles i un n-gon. Sempre es pot ajustar l'altura d'un prisma fins aconseguir que els rectangles es converteixin en quadrats i d'aquesta manera s'aconsegueix un políedre uniforme. Quan $n = 4$ es té un *cub*, que no només és uniforme: també és regular perquè té les cares i les arestes homogènies.

Quan $n < 6$, es pot ajustar l'altura d'una piràmide n-gonal fins aconseguir que els triangles isòsceles es converteixin en equilàters. Quan $n = 6$ ja no podem perquè els sis triangles equilàters de les cares laterals caurien plans sobre la base en comptes de formar un angle sòlid; en efecte, la suma dels angles en el vèrtex superior seria igual a $6 \cdot \pi/3 = 2\pi$. En el cas de $n = 3$ tenim una piràmide triangular en què totes les cares són triangles equilàters: això és un *tetràedre* regular.



Si girem un angle de π/n una de les dues cares n-gonals d'un prisma i canviem els rectangles laterals per triangles, tal com mostra la figura, obtenim un *antiprisma* n-gonal, que segueix tenint per bases dos n-gons regulars i per cares laterals $2n$ triangles isòsceles. L'altura de l'antiprisma sempre es pot ajustar fins que els triangles isòsceles es converteixin en equilàters, obtenint així un políedre uniforme en què en cada vèrtex hi concorren tres triangles i un n-gon. L'antiprisma uniforme per a $n = 3$ està format per vuit triangles equilàters: és l'*octàedre* regular. Quan $n = 5$, com el de la figura, el podem combinar amb dues piràmides pentagonals sobre cada base i formem l'*icosàedre* regular, amb vint cares que són triangles equilàters dels quals concorren cinc en cada vèrtex.

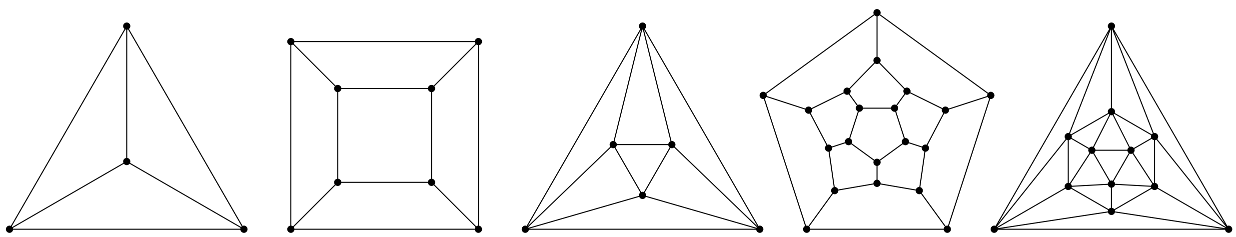


Hem construït quatre dels cinc políedres regulars convexos, que apareixen en el *Timeu* de Plató (d'aquí el nom de *sòlids platònics*) simbolitzant els quatre elements: terra, foc, aire i aigua. El cinquè, el *dodecàedre* regular, el va descriure com una forma que embolcava l'univers sencer i que els alquimistes de l'Edat Mitjana prendrien com a hipotètic cinquè element: la *quinta essència* o *èter*. Es pot construir un model de dodecàedre regular encaixant dos "bols" construïts a partir de cinc pentàgons regulars traçats sobre els costats d'un sisè. La figura mostra el desenvolupament pla d'aquests bols i la manera com encaixen. Podem estar segurs que encaixen perfectament perquè les deu arestes lliures de cada bol (en vermell a la figura) estan disposades de la mateixa manera que les arestes laterals d'un antiprisma pentagonal.

Cada políedre regular es caracteritza mitjançant un *símbol de Schläfli* $\{p, q\}$, que significa que està format per cares p-gonals de les quals concorren q en cada vèrtex. Així, el tetràedre regular és $\{3, 3\}$, el cub és $\{4, 3\}$, l'octàedre és $\{3, 4\}$, el dodecàedre és $\{5, 3\}$ i l'icosàedre és $\{3, 5\}$. El nombre de vèrtexs, arestes i cares es nota com V, A i C respectivament. En la següent secció veurem la relació que guarden aquests tres valors així com la seva relació amb els valors p i q.

3 Fórmula d'Euler i conseqüències

Imaginem que observem un políedre convex des del seu interior, concretament des d'un punt molt proper al centre d'una de les seves cares. Si dibuixem en perspectiva allò que veiem, la cara que queda "a l'esquena" apareix com un polígon gros l'interior del qual queda omplert per la resta de cares. Un diagrama així s'anomena *diagrama de Schlegel*. La següent figura mostra el diagrama de Schlegel per a cada sòlid platònic:



El diagrama de Schlegel mostra ràpidament quins vèrtexs pertanyen a quines arestes i a quines cares. Cada cara apareix en el diagrama com una regió envoltada per arestes, tret de la cara "a l'esquena", que des d'un punt de vista topològic podem identificar amb la regió infinita del pla que envolta el diagrama.

Fórmula d'Euler. *Tot graf connex format per V vèrtexs (amb $V > 0$) i A arestes que descompon el pla en un nombre C de regions disjuntes, verifica la fórmula*

$$V - A + C = 2.$$

(En particular, com el diagrama de Schlegel d'un políedre és un graf com el de l'enunciat, on les regions corresponen a les cares, també verificarà aquesta relació.)

Demostració. Qualsevol graf connex es pot arribar a construir, aresta a aresta, a partir del graf més simple que consisteix en un únic vèrtex aïllat. En aquesta situació inicial, la fórmula es verifica trivialment: $V - A + C = 1 - 0 + 1 = 2$. A cada pas de la construcció, la nova aresta connecta un vèrtex existent amb un de nou, o bé dos vèrtexs que ja existien. En el primer cas, V i A s'incrementen en una unitat i C no varia; en el segon, V no varia mentre que A i C s'incrementen en una unitat (si el nombre de regions no augmentés voldria dir que la nova aresta uneix dues parts del graf que no estan connectades, cosa que per construcció no és possible). En qualsevol dels dos casos, el valor $V - A + C$ no canvia i per tant el valor 2 és constant durant tota la construcció. $\square$

Considerem altre cop el símbol de Schläfli d'un políedre regular, $\{p, q\}$. Fer el producte qV equival a comptar el nombre de cares del políedre tants cops com vèrtexs té una cara, això és, tants cops com costats té una cara; per tant $qV = pC$, però fer pC equival a comptar les arestes del políedre dos cops perquè cada aresta és compartida per dues cares. Així doncs, tenim les igualtats

$$qV = 2A = pC.$$

Manipulem aquesta expressió, tot combinant-la amb la fórmula d'Euler:

$$\frac{V}{\frac{1}{q}} = \frac{A}{\frac{1}{2}} = \frac{C}{\frac{1}{p}} = \frac{V - A + C}{\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p}} = \frac{2}{\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p}} = \frac{4pq}{2p + 2q - pq},$$

de manera que

$$V = \frac{4p}{2p + 2q - pq}, \qquad A = \frac{2pq}{2p + 2q - pq}, \qquad C = \frac{4q}{2p + 2q - pq}.$$

Com aquests nombres han de ser positius, els possibles valors de p i q queden restringits per la desigualtat $2p + 2q - pq > 0$ o, de forma equivalent,

$$(p - 2)(q - 2) < 4.$$

Així, com p i q són enters positius més grans o iguals que 3 (tot polígon té com a mínim tres costats i en tot vèrtex convergeixen almenys tres cares), deduïm que les úniques possibilitats per aquest producte són $1 \cdot 1$ o bé $2 \cdot 1$ o bé $1 \cdot 2$ o bé $3 \cdot 1$ o bé $1 \cdot 3$, que equivalen a les següents possibilitats per a $\{p, q\}$: $\{3, 3\}, \{4, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 3\}, \{3, 5\}$. Com en la secció anterior hem construït aquests cinc políedres regulars, hem demostrat:

Teorema. *Existeixen exactament cinc políedres regulars convexos: el tetràedre* $\{3, 3\}$, *el cub* $\{4, 3\}$, *l'octàedre* $\{3, 4\}$, *el dodecàedre* $\{5, 3\}$ *i l'icosàedre* $\{3, 5\}$. □

Podríem haver deduït el mateix resultat d'una forma més elemental: a cada vèrtex hi concorren q cares p-gonals, de forma que cadascuna contribueix en un angle $(p - 2)\pi/p$. Perquè en aquest vèrtex s'hi pugui formar un angle sòlid, les q cares han de sumar un angle total inferior a 2π, això és,

$$q\frac{p - 2}{p}\pi < 2\pi,$$

i d'aquí se'n dedueix la mateixa desigualtat que abans, $2p + 2q - pq > 0$.

La suma total dels angles que concorren en un vèrtex, que hem vist que és $q(p - 2)\pi/p$, difereix de 2π en un angle que és funció del nombre de vèrtexs V. En efecte, fent servir l'expressió de V en funció de p i q podem escriure

$$2\pi - q\frac{p - 2}{p}\pi = \left(\frac{2p + 2q - pq}{p}\right)\pi = \frac{4\pi}{V}.$$

4 Sòlids arquimedians

S'anomena *políedre arquimedià* o *sòlid arquimedià* a tot políedre convex uniforme (això és, que té per cares polígons regulars i vèrtexs homogenis) que no sigui ni un políedre regular, ni un prisma ni un antiprisma.

Es poden obtenir a partir del truncament de vèrtexs d'un políedre regular i de successives operacions sobre els políedres truncats (s'entén per *truncament* d'un vèrtex l'operació de tallar o *escapçar* el políedre al voltant d'aquest vèrtex, tot creant una nova cara). Els truncaments per aconseguir sòlids arquimedians són uniformes, això és, s'escapça cada vèrtex amb un pla ortogonal a l'eix pel vèrtex perquè la nova cara sigui un polígon regular; a més, es tria el pla adequat perquè les cares originals també quedin convertides en polígons regulars.

Així, si es fa un truncament uniforme sobre el políedre regular $\{p, q\}$ s'obtenen noves cares q-gonals que substitueixen els antics vèrtexs i les antigues cares p-gonals dupliquen les arestes i es tornen $2p$-gons. Per tant, cada vèrtex del nou políedre està envoltat per un q-gon i dos $2p$-gons; direm que la *configuració dels vèrtexs* és $(q.2p.2p)$.

Calculem ara les cares C', les arestes A' i els vèrtexs V' del políedre truncat. Després del truncament, el nombre de vèrtexs V del políedre inicial queda multiplicat per q, però ja hem vist que $2A = qV = V'$. D'altra banda, el nombre de cares s'incrementa en V, i aplicant la fórmula d'Euler tenim $C' = C + V = A + 2$. Finalment, com les antigues cares p-gonals dupliquen les arestes i les noves V cares són q-gonals, les arestes del políedre truncat seran

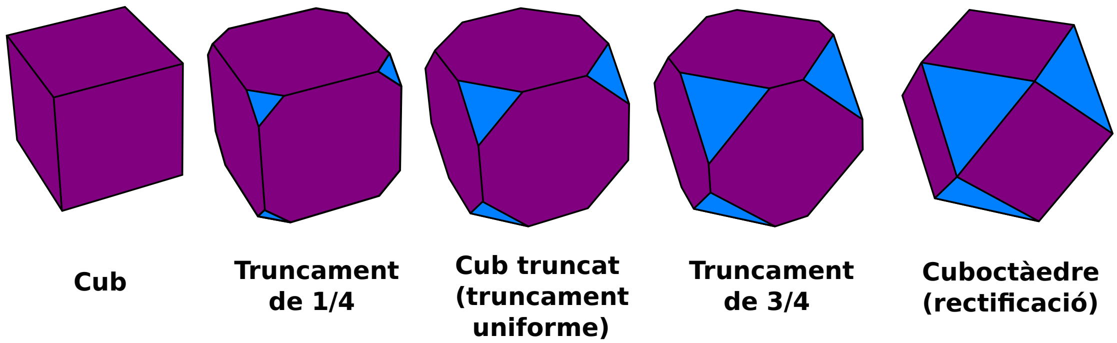
$$A' = \frac{2p \cdot C + qV}{2} = \frac{2 \cdot 2A + 2A}{2} = 3A,$$

cosa que també podíem haver deduït aplicant la fórmula d'Euler: $A' = C' + V' - 2 = A + 2 + 2A - 2 = 3A$. Per tant, hem provat:

Proposició. *El políedre arquimedià obtingut per truncament uniforme d'un de regular de A arestes té $2A$ vèrtexs, $3A$ arestes i $A + 2$ cares.* □

Així, ja tenim cinc sòlids arquimedians: el *tetràedre truncat*, amb una configuració de vèrtexs (3.6.6), el *cub truncat* (3.8.8), l'*octàedre truncat* (4.6.6), el *dodecàedre truncat* (3.10.10) i l'*icosàedre truncat* (5.6.6), que té la forma d'una pilota de futbol.

Si partim d'un truncament uniforme i l'ampliem, fent més grosses les noves cares q-gonals, fins arribar al punt que es toquin en un vèrtex i les cares $2p$-gonals tornin a convertir-se en p-gonals (com mostra la figura de sota), tenim un cas especial de truncament anomenat *rectificació*.

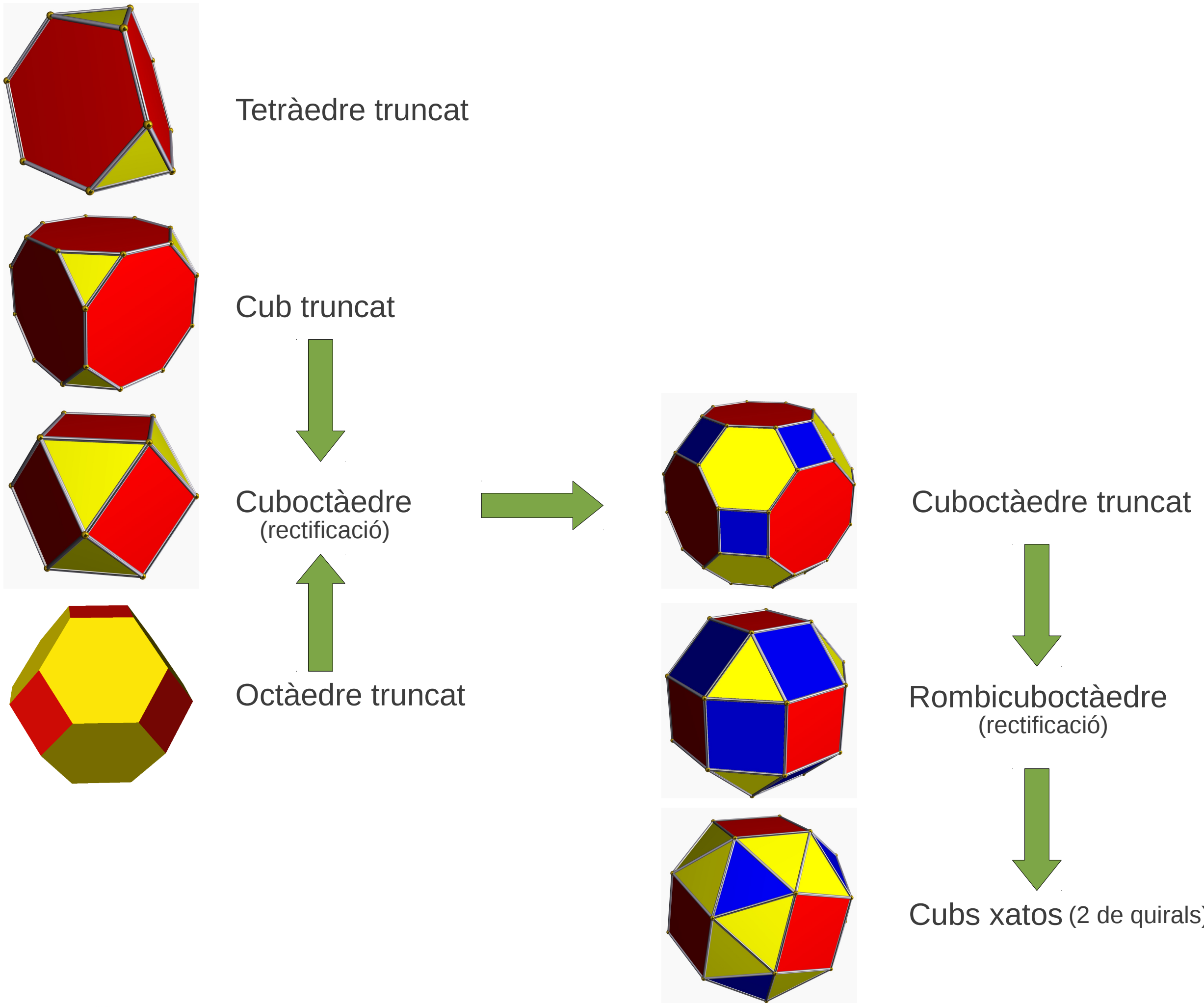


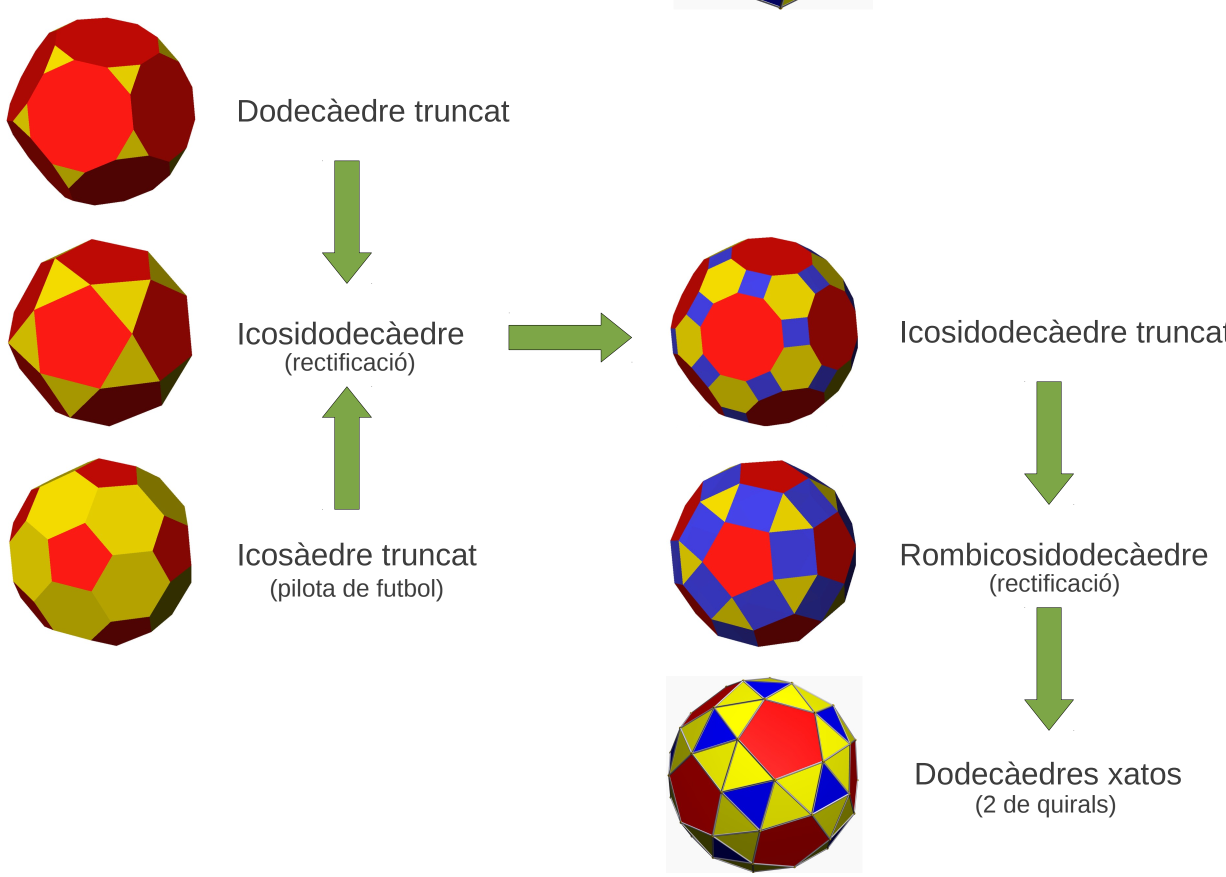
D'aquesta manera, tant si partim d'un cub truncat com d'un octàedre truncat, fent la rectificació arribem a la mateixa figura, un *cuboctàedre*. De la mateixa manera, si partim del dodecàedre truncat o de l'icosàedre truncat, la rectificació ens porta a l'*icosidodecàedre* (observem que si es parteix del tetràedre truncat, la rectificació proporciona un octàedre regular). Aquests dos sòlids arquimedians són els únics quasiregulars: també tenen les arestes homogènies. En efecte, ens els que hem construït fins ara una aresta podia pertànyer a dues cares $2p$-gonals o bé a una $2p$-gonal i una q-gonal, però en el cas especial de la rectificació, la configuració dels vèrtexs és $(q.p.q.p)$, cosa que fa que tota aresta pertanyi a una cara p-gonal i a una q-gonal. Aquesta situació fa que el cuboctàedre i l'icosidodecàedre es puguin tornar a truncar de manera uniforme per generar uns altres dos sòlids arquimedians semiregulars: el *cuboctàedre truncat* (4.6.8) i l'*icosidodecàedre truncat* (4.6.10). Com abans, en aquests dos es pot degenerar el truncament fins a la rectificació i obtenim, respectivament, els anomenats *rombicuboctàedre* (3.4.4.4) i *rombicosidodecàedre* (3.4.5.4).

Finalment, si es prenen les cares p-gonals d'aquests dos últims i es roten lleugerament en un sentit o en l'altre, es pot aconseguir que quedin orientades de manera que es puguin envoltar per una corona de cares triangulars. En funció del sentit de la rotació s'obté un sòlid o un altre, de forma que no tenen simetria especular (es diu que són dues formes *quirals*). Així, del rombicuboctàedre s'obtenen dos *cubs xatos* (3.3.3.3.4) i del rombicosidodecàedre s'obtenen dos *dodecàedres xatos* (3.3.3.3.5).

Aquests que hem construït són els únics sòlids arquimedians que existeixen. Una demostració de la no-existència d'altres (laboriosa, però que empra raonaments elementals) consisteix a considerar totes les possibles configuracions d'un vèrtex, imposant que la suma total dels angles de les cares que hi concorren sigui menor que 2π. Si es descarten els prismes i els antiprismes queda un nombre finit de possibilitats, que es poden anar descartant per reducció a l'absurd (per exemple, demostrant que una determinada configuració produiria vèrtexs amb configuracions diferents i, per tant, el sòlid no seria uniforme).

La següent figura mostra el procés d'obtenció dels 15 políedres arquimedians:


Tetràedre truncat
Cub truncat
Cuboctàedre
(rectificació)
Octàedre truncat
Cuboctàedre truncat
Rombicuboctàedre
(rectificació)
Cubs xatos (2 de quirals)


Dodecàedre truncat
Icosidodecàedre
(rectificació)
Icosàedre truncat
(pilota de futbol)
Icosidodecàedre truncat
Rombicosidodecàedre
(rectificació)
Dodecàedres xatos
(2 de quirals)