1 Definició i resultats fonamentals

Al llarg de tota l'exposició ens centrarem en funcions reals de variable real que, si no es diu el contrari, estaran definides sobre un interval $I \subseteq \mathbb{R}$.

Definició. Sigui $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $a \in I$. Anomenem *derivada de f en a* al valor

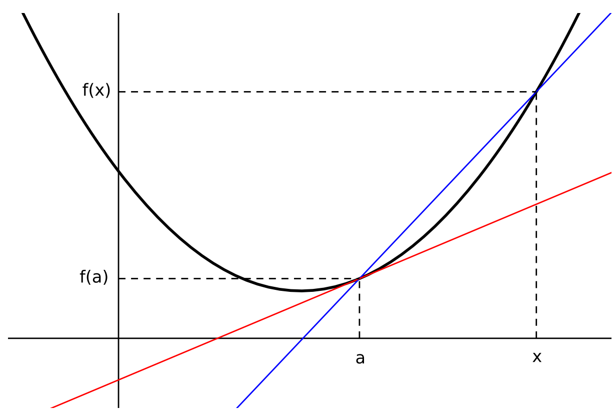
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

sempre que existeixi i sigui finit. En tal cas direm que f *és derivable en a* i designarem aquest valor per $f'(a)$. El quocient de la definició s'anomena *quocient incremental*. També direm que f *és derivable en I* si ho és en tots els punts de I.

Sovint farem el canvi de variable $x = a + h$ i expressarem el límit anterior com

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Interpretació geomètrica.



El quocient incremental $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ coincideix amb el pendent de la recta secant a f que passa pels punts $(a, f(a))$ i $(x, f(x))$, de color blau en el gràfic. Per tant, si a és fix i fem que $x \to a$, aquesta secant tendeix a la recta tangent a la gràfica de f en el punt a (de color vermell), de manera que el límit del quocient incremental quan $x \to a$, que és el que hem definit com $f'(a)$, representa el pendent d'aquesta recta tangent.

Exemple. Suposem que una partícula es mou al llarg de l'eix d'abscisses segons una funció $x(t)$ que ens dóna la seva posició en tot instant de temps. La seva velocitat mitjana entre els instants de temps t i $t + h$, amb $h > 0$, es defineix com la variació que pateix la posició dividit per l'increment de temps, això és,

$$v_m[t, t+h] = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

Té lògica definir la *velocitat instantània* en l'instant t com el límit d'aquesta velocitat mitjana quan l'increment de temps h és arbitràriament petit, això és,

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h},$$

que no és altra cosa que $x'(t)$. Per tant, la velocitat instantània en un instant de temps t és la derivada de la posició en aquest instant t.

Definició. La funció f' que assigna a cada punt $x \in I$ la derivada $f'(x)$ s'anomena la *funció derivada*.

Exemples. Calculem les funcions derivades d'algunes funcions elementals:

a. La funció constant $f(x) = k$ té derivada nul·la en tots els punts. En efecte,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

b. La derivada de la funció potencial $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, és $f'(x) = nx^{n-1}$. En efecte,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a}(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + a^{n-1}) = na^{n-1}.$$

c. La derivada de la funció exponencial $f(x) = a^x$ és $f'(x) = a^x \ln a$. En efecte,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h};$$

fem el canvi de variable $y = a^h - 1 \Rightarrow h = \log_a(y+1)$ i quan $h \to 0$ també $y \to 0$:

$$= a^x \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log_a(y+1)} = a^x \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a(1+y)} = a^x \lim_{y\to 0} \frac{1}{\log_a(1+y)^{1/y}},$$

i fent finalment el canvi $y = 1/z$ tenim que $y \to 0 \Rightarrow z \to \infty$ i

$$= a^x \lim_{z\to\infty} \frac{1}{\log_a\left(1+\frac{1}{z}\right)^z} = a^x \frac{1}{\log_a e} = a^x \ln a$$

en virtut de la fórmula de canvi de base dels logaritmes ($\log_a e \ln a = \log_a a = 1$). En particular, la derivada de e^x és ella mateixa.

Veiem ara una primera conseqüència important de la derivabilitat d'una funció en un punt:

Teorema. *Si una funció f és derivable en un punt $a \in I$, també és contínua en a.*

Demostració. Partint de la definició,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0,$$

per tant podem escriure $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$ quan $x \to a$ (la notació $o(x-a)$ denota quelcom que, en dividir-ho per $x-a$, tendeix a 0 quan $x \to a$; en particular, $o(x - a)$ també tendeix a 0 quan $x \to a$). De manera que, prenent límits quan $x \to a$ en aquesta expressió, obtenim

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

cosa que equival a dir que f és contínua en a. $\square$

Òbviament, el recíproc no és cert, en general. Per exemple, $f(x) = |x|$ és una funció contínua en tot $\mathbb{R}$ però no és derivable en $x = 0$ perquè els límits laterals del quocient incremental són 1 per la dreta de $x = 0$ i -1 per l'esquerra de $x = 0$. En no coincidir, $f'(0)$ no existeix.

Teorema. *Si f, g són dues funcions derivables en $a \in I$, llavors també ho són les funcions $f + g$, fg i f/g (en aquest darrer cas, sempre que g no s'anul·li en un entorn de a), i les seves derivades en a són*

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Demostració. Apliquem la definició de derivada en cada cas. Per a la suma:

$$(f+g)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) + g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a)+g'(a).$$

Per al producte:

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x\to a} \left(f(x)\frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a)\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a).\end{aligned}$$

Per al cas del quocient només cal veure-ho per $(1/g)(x)$:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)g(a)} \frac{g(a) - g(x)}{x - a} = -\frac{g'(a)}{g(a)^2},$$

i ara aplicant la regla per a la derivada del producte:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} - f(a)\frac{g'(a)}{g(a)^2} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}. \quad \square$$

En el cas particular en què $f(x) = k$ constant, tenim que $(kg)'(a) = kg'(a)$.

Els dos teoremes següents completaran els instruments per al càlcul de derivades.

Teorema (regla de la cadena). *Siguin f, g dues funcions definides en uns intervals I, J respectivament, amb $f(I) \subseteq J$. Sigui f derivable en $a \in I$ i g derivable en $f(a) \in J$. Llavors la funció composta $g \circ f$ és derivable en a i la seva derivada és*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

DEMOSTRACIÓ. Altre cop serà d'utilitat emprar la notació d'infinitèsims: la condició de derivabilitat de f en a la podem escriure com

$$f(a+t) = f(a) + f'(a)t + o(t), \quad t \to 0,$$

(recordem que $o(t)/t \to 0$ quan $t \to 0$). De la mateixa manera, la condició de derivabilitat de g en $f(a)$ l'escrivim com

$$g(f(a)+h) = g(f(a)) + g'(f(a))h + o(h), \quad h \to 0.$$

Si ara posem $h = f'(a)t + o(t)$, tenim que

$$\begin{aligned} g(f(a+t)) &= g(f(a) + f'(a)t + o(t)) = g(f(a)+h) = g(f(a)) + g'(f(a))h + o(h) = \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)t + g'(f(a))o(t) + o(h), \end{aligned}$$

de manera que només cal provar que el terme $o(h)$ també és $o(t)$ quan $t \to 0$, cosa que és certa perquè quan $t \to 0$ també $h \to 0$, i

$$\frac{o(h)}{t} = \frac{o(h)}{h}\frac{h}{t} = \frac{o(h)}{h}\left(f'(a) + \frac{o(t)}{t}\right) \to 0 \cdot f'(a) = 0$$

quan $t \to 0$. □

Teorema (derivació de la funció inversa). *Sigui f definida en I i derivable en $x_0 \in I$, tal que $f'(x_0) \neq 0$ i existeix la inversa $f^{-1}(x)$ en $f(I)$. Llavors f^{-1} és derivable en $y_0 = f(x_0)$ i*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

DEMOSTRACIÓ. Com f és derivable en x_0, també és contínua, i llavors també ho serà f^{-1} en $y_0 = f(x_0)$. Per tant, si $y = f(x)$ és equivalent dir $x \to x_0$ que dir $y \to y_0$ i aleshores

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad \square$$

Exemples. Veiem com podem aplicar els dos darrers resultats per trobar les derivades d'altres funcions elementals:

a. Si $y = x^n = f(x)$ llavors $x = y^{1/n} = f^{-1}(y)$, i aplicant el darrer resultat

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n(y^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1},$$

la qual cosa ens diu que la funció potencial amb exponent fraccionari es deriva segons la mateixa regla que per a l'exponent natural.

b. Si $y = e^x = f(x) = f'(x)$ llavors $x = \ln y = f^{-1}(y)$ i aleshores

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

c. Si considerem la funció potencial general $f(x) = x^\alpha$ amb $\alpha \in \mathbb{R}$, podem expressar-la com $f(x) = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$, i llavors, aplicant la regla de la cadena,

$$f'(x) = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1},$$

i tornem a tenir la regla que ja ens servia per a exponents fraccionaris. Aquesta tècnica, coneguda com *derivació logarítmica*, és la que s'usa per calcular les derivades de funcions de la forma $f(x)^{g(x)}$, escrivint $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.

2 Els teoremes del valor mitjà

Abans d'enunciar i demostrar els tres teoremes clàssics del valor mitjà per a funcions derivables (Rolle, Cauchy i Lagrange) necessitarem un resultat previ important sobre els extrems relatius d'una funció derivable:

Definició. Direm que una funció f té en el punt a de l'interior de I un *màxim relatiu* (resp. *mínim relatiu*) si existeix un entorn V de a tal que $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$) per a tot $x \in V$. Un màxim o mínim relatiu s'anomena *extrem relatiu* de f.

Teorema. *Si f és una funció que té un extrem relatiu en a i f és derivable en a, llavors* $f'(a) = 0$.

Demostració. Suposem que a és un màxim relatiu. Llavors en tot un entorn de a tenim $f(x) - f(a) \leq 0$ i els límits laterals del quocient incremental seran

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0, \qquad \lim_{x\to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0,$$

perquè $x \to a^+$ implica $x - a > 0$, i $x \to a^-$ implica $x - a < 0$. Per hipòtesi f és derivable en a, de manera que els límits laterals han de coincidir i ha de ser $f'(a) = 0$. El raonament és idèntic en cas que a sigui un mínim relatiu. $\square$

Teorema de Rolle. *Sigui f una funció contínua en $[a, b]$ i derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Llavors existeix un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

DEMOSTRACIÓ. Pel teorema de Weierstrass, la funció assoleix un màxim i un mínim absoluts en $[a, b]$. Si ambdós coincideixen amb $f(a) = f(b)$ llavors la funció és constant i f' és nul·la en tot (a, b). En cas contrari, en un punt $c \in (a, b)$ hi ha un extrem relatiu, en el qual $f'(c) = 0$ pel teorema anterior. $\square$

Teorema del valor mitjà de Cauchy. *Siguin f, g dues funcions contínues en $[a, b]$ i derivables en (a, b) tals que $g(a) \neq g(b)$ i les derivades de f i g no s'anul·len simultàniament en cap punt. Llavors existeix un $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

DEMOSTRACIÓ. Construïm la funció auxiliar

$$F(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x),$$

que verifica les hipòtesis del teorema de Rolle: és contínua en $[a, b]$ i derivable en (a, b) en ser-ho f i g, i $F(a) = F(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$. Per tant, existeix un $c \in (a, b)$ tal que

$$0 = F'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c).$$

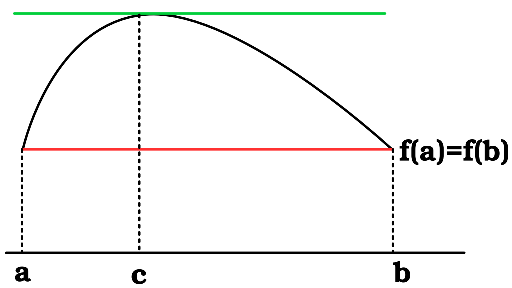
Com $g(b) - g(a) \neq 0$, també ha de ser $g'(c) \neq 0$ perquè en cas contrari també tindríem $f'(c) = 0$ en contra de la hipòtesi. Per tant, podem dividir aquesta expressió per $(g(b) - g(a))g'(c)$ i obtenim el resultat que volíem. $\square$

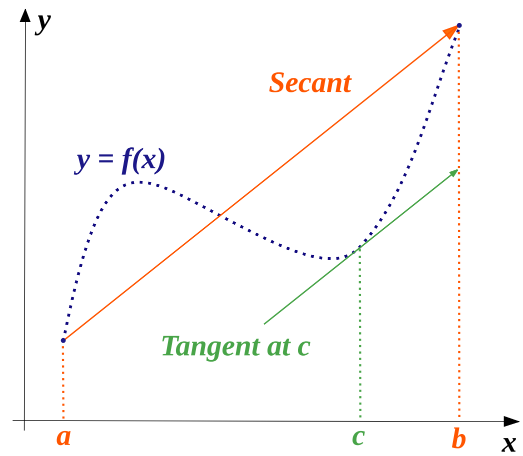
Teorema del valor mitjà de Lagrange. *Sigui f una funció contínua en $[a, b]$ i derivable en (a, b). Llavors existeix un $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

DEMOSTRACIÓ. És un cas particular del teorema anterior prenent $g(x) = x$. $\square$

Geomètricament, el teorema de Rolle ens diu que si $f(a) = f(b)$, en algun punt de (a, b) la recta tangent a la gràfica de f és horitzontal (figura de l'esquerra). El teorema de Lagrange ens diu que en algun punt de (a, b) la recta tangent a la gràfica de f és paral·lela a la secant pels punts $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ (figura de la dreta).





3 Aplicacions a l'estudi local d'una funció

Ja hem vist que una condició necessària perquè una funció derivable tingui un extrem relatiu en un punt, és que la derivada s'anul·li en aquest punt (el recíproc, òbviament, no és cert; per exemple, la funció $f(x) = x^3$ s'anul·la en $x = 0$ però no hi ha cap extrem relatiu). Veiem ara alguns resultats més que són conseqüència dels teoremes del valor mitjà.

Teorema. *Sigui f una funció derivable en (a, b). Llavors $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) per a tot x si i només si f és creixent (resp. decreixent) en (a, b).*

Demostració. Suposem que $f'(x) \geq 0$ per a tot x. Per definició de funció creixent en un interval, hem de veure que per a qualssevol $x_1, x_2 \in (a, b)$, llavors

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0.$$

Aplicant el teorema del valor mitjà de Lagrange a l'interval $[x_1, x_2]$, hi haurà un $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c),$$

i com $f'(c) \geq 0$, tenim el resultat que volíem. Recíprocament, si f és creixent el quocient incremental és sempre no-negatiu i llavors el límit, és a dir, la derivada, és també no-negatiu. La prova per a $f'(x) \leq 0$ és semblant. $\square$

Els següents teoremes donen condicions suficients per a l'existència d'extrems relatius.

Teorema. *Sigui f una funció contínua en $[a, b]$ i derivable en (a, b), i sigui $c \in (a, b)$. Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) per a tot $x < c$ i $f'(x) < 0$ (resp. $f'(x) > 0$) per a tot $x > c$, llavors f té un màxim relatiu (resp. mínim relatiu) en c.*

DEMOSTRACIÓ. En virtut del teorema anterior, la funció passa de ser creixent a decreixent (o a l'inrevés) en c, de manera que en c hi ha un màxim o un mínim relatius. $\square$

Les derivades successives ens poden donar més informació sobre el comportament d'una funció en un punt. Si f és derivable i f' també ho és, direm que f és *dues vegades derivable*, i a la derivada de f' la designarem per f''. En general direm que f és *n vegades derivable* si la funció derivada d'ordre $n-1$ és derivable, i designarem per $f^{(n)}$ la derivada d'ordre n.

Teorema (criteri de la derivada segona per a extrems relatius). *Sigui f una funció contínua en $[a,b]$ i derivable en (a,b), i sigui $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$. Suposem que existeix f'' en (a,b). Si $f'' < 0$ (resp. $f'' > 0$) en (a,b), llavors f té un màxim (resp. mínim) relatiu en c. El mateix resultat val si $f''(c) < 0$ (resp. $f''(c) > 0$) i f'' és contínua en c.*

DEMOSTRACIÓ. Si $f'' < 0$ en (a,b), apliquem el primer teorema d'aquesta secció a f' i obtenim que f' és decreixent en (a,b). Però $f'(c) = 0$, de manera que f' canvia de signe en c (passa de ser positiva a ser negativa). Llavors, pel teorema anterior, f té un màxim relatiu en c. La demostració per a $f'' > 0$ és anàloga.

Pel que fa a l'última afirmació, si f'' és contínua en c i $f''(c) < 0$, hi haurà un entorn de c en què f'' també serà negativa. Llavors podem prendre aquest entorn com a interval (a,b) del teorema, de forma que ens trobem en la mateixa situació i val el mateix resultat. $\square$

Finalment, definim les condicions de *convexitat* i de *concavitat* d'una funció i donem-ne una caracterització en funció de la derivada segona.

Definició. Una funció f és *convexa* (resp. *còncava*) en I si per a tot $a, b \in I$ el segment pels punts $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ queda per sobre (resp. per sota) de la gràfica de f.

Analíticament, la recta que passa pels punts $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ és

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad \text{o també} \qquad g(x) = f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b).$$

Dir que aquesta recta queda per sobre de la gràfica de f en (a,b) equival a dir

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \geq f(x) \qquad \text{o també} \qquad f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) \geq f(x)$$

per a qualsevol $x \in (a,b)$, i combinant les dues desigualtats ho podem escriure com

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Per tant, f és convexa en I si i només si per a qualssevol $x_1, x_2, x_3 \in I$ amb $x_1 < x_2 < x_3$ es té

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Si s'inverteix el sentit de les desigualtats obtenim, òbviament, la definició analítica per a la concavitat. Aquesta expressió ens serà de molta utilitat per al següent resultat:

Teorema. *Una funció f derivable en (a, b) és convexa (resp. còncava) si i només si f' és creixent (resp. decreixent) en (a, b), això és, si i només si $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$) per a tot $x \in (a, b)$.*

DEMOSTRACIÓ. Veiem-ho per al cas de funcions convexes. Suposem que f és convexa en (a, b) i considerem $x_1, x_2 \in (a, b)$ amb $x_1 < x_2$. Considerem y_1, y_2 tals que $x1 < y_1 < y_2 < x_2$ i, aplicant dues vegades la caracterització analítica per a la convexitat, podem escriure

$$\frac{f(y_1) - f(x_1)}{y_1 - x_1} \leq \frac{f(y_2) - f(x_2)}{y_2 - x_2}.$$

Si en aquesta desigualtat prenem el límit quan $y_1 \to x_1$ i $y_2 \to x_2$, obtenim $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, és a dir, f' és creixent. Recíprocament, suposem que f' és creixent i prenem $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ tals que $x_1 < x_2 < x_3$. Pel teorema del valor mitjà de Lagrange, existeixen c_1, c_2 tals que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_1), \qquad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(c_2),$$

i en ser $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ obtenim la desigualtat que ens proporciona la convexitat de f. L'última afirmació (f' creixent $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$) és conseqüència del primer teorema d'aquesta secció aplicat a f'. $\square$