1 Conceptes i resultats previs

Definició. Una *permutació* es una bijecció σ d'un conjunt finit A sobre ell mateix: $\sigma : A \longrightarrow A$. Per simplificar, suposarem que $A = \mathbb{N}_n = \{1, \ldots, n\}$.

És evident que la composició de permutacions també és una permutació, i amb l'operació de composició es verifiquen les propietats associativa, d'existència d'element neutre (la permutació identitat) i d'existència d'element invers. Això ho resumim dient que el conjunt de permutacions d'un conjunt de n elements amb la composició té estructura de *grup*. Anomenem *grup simètric* aquest grup, i el notem com $\mathcal{S}_n$. L'ordre de $\mathcal{S}_n$ és $n!$, i per a $n \geq 3$, $\mathcal{S}_n$ no és commutatiu.

Seguidament, donem una definició i dos resultats (sense demostració) que ens permetran definir el *signe* d'una permutació, perquè ho necessitarem per definir els determinants.

Definició. Una *transposició* és una permutació que intercanvia dos elements de $\mathbb{N}_n$ i deixa invariants la resta, això és, σ és una transposició si i només si $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ per a certs $i, j \in \mathbb{N}_n$, i $\sigma(k) = k$ per a tot k diferent de i, j.

Proposició. *Tota permutació es pot escriure com a composició de transposicions.*

Proposició. *Si $\sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_p$ i $\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_q$ són dues descomposicions d'una mateixa permutació com a composició de transposicions, llavors p i q són de la mateixa paritat.*

Gràcies a aquest resultat, la següent definició té sentit:

Definició. Direm que una permutació σ és *parella* si descompon en un nombre parell de transposicions, i *senar* en cas contrari. Definim l'*aplicació signe* com $\varepsilon : \mathcal{S}_n \longrightarrow \{+1, -1\}$ tal que

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{si } \sigma \text{ és parella,} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ és senar.} \end{cases}$$

2 Formes multilineals alternades. Determinant de n vectors

Ara el nostre objectiu és definir una aplicació (que anomenarem *determinant*) que associï una matriu $n \times n$ sobre un cos K a un element de K, però de tal forma que es verifiquin unes condicions de les quals es derivaran unes propietats que ens seran de gran utilitat. Aquestes condicions que imposarem seran tres:

- Si multipliquem per $a \in K$ els elements d'una columna de la matriu, el seu determinant queda multiplicat per a.
- Si una columna de la matriu és suma de dues, el seu determinant és la suma dels determinants calculats amb cada columna-sumand.
- Si dues columnes de la matriu són iguals, el seu determinant és 0.

Com les condicions es refereixen a les columnes, és convenient considerar les matrius com un conjunt de n vectors columna de K^n, i per fer-ho més general, en comptes de considerar K^n considerarem un K-espai vectorial E de dimensió n.

Definició. Sigui E un K-espai vectorial de dimensió n. Una *n-forma lineal alternada* (o *forma multilineal alternada*) és una aplicació

$$D : \overbrace{E \times \ldots \times E}^{n} \longrightarrow K$$

que compleix:

(a) $D(v_1, \ldots, av_i, \ldots, v_n) = aD(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) \quad \forall a \in K, \forall i = 1, \ldots, n.$

(b) $D(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_n) = D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + D(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_n) \quad \forall i = 1, \ldots, n.$

(c) $D(v_1, \ldots, v_n) = 0$ si $v_i = v_j$ per a algun $i \neq j$.

Estudiem ara, a partir d'aquesta definició, quines propietats verifiquen les n-formes lineals alternades:

Propietat 1. *$D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -D(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$, això és, si permutem dos vectors, el resultat canvia de signe (d'aquí el nom d'*alternada*).*

Demostració. Escrivim

$$\begin{aligned}
0 &\overset{(c)}{=} D(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_n) = \\
&\overset{(b)}{=} D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + \\
&\quad + D(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + D(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = \\
&\overset{(c)}{=} D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + D(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n),
\end{aligned}$$

i passant un dels dos sumands al membre esquerre, tenim el resultat que volíem. □

Propietat 2. *Per a tota permutació $\sigma \in \mathcal{S}_n$ de signe $\varepsilon(\sigma)$, es té*

$$D(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) D(v_1, \ldots, v_n).$$

Demostració. Si σ és una transposició, aquesta propietat es redueix a l'anterior. En general, podem descompondre σ com a producte de transposicions i aplicar reiteradament la propietat anterior. $\square$

Propietat 3. *Si un vector $v_i = \vec{0}$, aleshores $D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = 0$.*

Demostració. Com que $v_i = 0 \cdot v_i$, tenim

$$D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) \overset{\text{(a)}}{=} 0 D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = 0. \qquad \square$$

Propietat 4. *Si $v_i = \sum_{j \neq i} a^j v_j$, aleshores $D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = 0$, això és, si un vector és combinació lineal dels altres, el resultat és 0.*

Demostració. En efecte, per les condicions (a) i (b) de la definició,

$$D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = \sum_{j \neq i} a^j D(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n),$$

però a cada sumand el vector v_j ocupa els llocs i i j, i per tant tots els sumands valen 0. $\square$

Propietat 5. *$D(v_1, \ldots, v_i + \sum_{j \neq i} a^j v_j, \ldots, v_n) = D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$, això és, si a un vector li sumem una combinació lineal dels altres, el resultat no varia.*

Demostració. Es dedueix immediatament de (b) i de la propietat anterior. $\square$

Propietat 6. *D queda determinada pel valor que pren sobre una base $e_1, \ldots, e_n$ de E.*

Demostració. Per comprovar-ho, calculem $D(v_1, \ldots, v_n)$. Si escrivim $v_i = \sum_{j=1}^n a_i^j e_j$,

$$\begin{aligned} D(v_1, \ldots, v_n) &= D\left(\sum_{j=1}^n a_1^j e_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_n^j e_j\right) \overset{\text{(b)}}{=} \sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^n D(a_1^{j_1} e_{j_1}, \ldots, a_n^{j_n} e_{j_n}) \\ &\overset{\text{(a)}}{=} \sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^n a_1^{j_1} \ldots a_n^{j_n} D(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}), \end{aligned}$$

però, per (c), $D(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = 0$ sempre que dos dels subíndexs siguin iguals. Per tant, en aquesta expressió només sobreviuran aquells sumands en què els $j_1, \ldots, j_n$ siguin els mateixos $1, \ldots, n$ permutats, de manera que podem reescriure-ho com

$$D(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_1^{\sigma(1)} \ldots a_n^{\sigma(n)} D(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) \overset{\text{P2}}{=} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_1^{\sigma(1)} \ldots a_n^{\sigma(n)} D(e_1, \ldots, e_n),$$

però l'element $\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_1^{\sigma(1)}\dots a_n^{\sigma(n)}\in K$ només depèn de les coordenades dels $\{v_i\}$ en la base $\{e_i\}$, de manera que $D(v_1,\dots,v_n)$ queda perfectament determinada si coneixem $D(e_1,\dots,e_n)$. □

Definició. Anomenarem *determinant dels vectors* $v_1,\dots,v_n$ *en la base* $e_1,\dots,e_n$ l'element

$$\det_{(e_i)}(v_1,\dots,v_n)=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_1^{\sigma(1)}\dots a_n^{\sigma(n)}.$$

Amb aquesta notació, podem reescriure la propietat anterior com

$$D(v_1,\dots,v_n)=\det_{(e_i)}(v_1,\dots,v_n)D(e_1,\dots,e_n).$$

Propietat 7. *Sigui $e_1,\dots,e_n$ una base de E. Donat un $k\in K$ existeix una única n-forma lineal alternada D tal que $D(e_1,\dots,e_n)=k$.*

Demostració. Pel que acabem de veure, si D existeix haurà de ser $D(v_1,\dots,v_n)=\det_{(e_i)}(v_1,\dots,v_n)\,k$. Per tant, hem de comprovar que D, definida d'aquesta manera, és sempre una n-forma lineal alternada. Comprovem les condicions (a), (b) i (c):

$$\begin{aligned}D(v_1,\dots,av_i,\dots,v_n)&=\det_{(e_i)}(v_1,\dots,av_i,\dots,v_n)\,k=\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_1^{\sigma(1)}\dots aa_i^{\sigma(i)}\dots a_n^{\sigma(n)}\right)k=\\&=a\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_1^{\sigma(1)}\dots a_i^{\sigma(i)}\dots a_n^{\sigma(n)}\right)k=a\,D(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n),\end{aligned}$$

que és (a). Per comprovar (b),

$$\begin{aligned}&D(v_1,\dots,v_i+w_i,\dots,v_n)=\det_{(e_i)}(v_1,\dots,v_i+w_i,\dots,v_n)\,k=\\&=\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_1^{\sigma(1)}\dots(a_i^{\sigma(i)}+b_i^{\sigma(i)})\dots a_n^{\sigma(n)}\right)k=\\&=\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_1^{\sigma(1)}\dots a_i^{\sigma(i)}\dots a_n^{\sigma(n)}+\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_1^{\sigma(1)}\dots b_i^{\sigma(i)}\dots a_n^{\sigma(n)}\right)k=\\&=D(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n)+D(v_1,\dots,w_i,\dots,v_n).\end{aligned}$$

Finalment, per veure (c) suposem que $v_i=v_j$, per tant llurs coordenades són idèntiques ($a_i^\ell=a_j^\ell$ per a tot ℓ). Aleshores,

$$\det_{(e_i)}(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n)=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_1^{\sigma(1)}\dots a_i^{\sigma(i)}\dots a_j^{\sigma(j)}\dots a_n^{\sigma(n)}.$$

Considerem un sumand qualsevol $\varepsilon(\sigma)a_1^{\sigma(1)}\dots a_i^{\sigma(i)}\dots a_j^{\sigma(j)}\dots a_n^{\sigma(n)}$ i comparem-lo amb el sumand corresponent a $\tau=\sigma\circ(i,j)$, on (i,j) representa la transposició que permuta els elements i,j:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\tau)a_1^{\tau(1)}\dots a_i^{\tau(i)}\dots a_j^{\tau(j)}\dots a_n^{\tau(n)} &= -\varepsilon(\sigma)a_1^{\sigma(1)}\dots a_i^{\sigma(j)}\dots a_j^{\sigma(i)}\dots a_n^{\sigma(n)} = \\ &= -\varepsilon(\sigma)a_1^{\sigma(1)}\dots a_j^{\sigma(j)}\dots a_i^{\sigma(i)}\dots a_n^{\sigma(n)}.\end{aligned}$$

Per tant, per a cada sumand sempre n'hi ha un altre que l'anul·la, de manera que al final tindrem $\det_{(e_i)}(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n)=0$ i per tant $D(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n)=0$ si $v_i=v_j$. □

Proposició. *$v_1,\dots,v_n$ són linealment independents si i només si* $\det_{(e_i)}(v_1,\dots,v_n)\neq 0$.

Demostració. Si $v_1,\dots,v_n$ són linealment independents formen una base, i per la propietat 7 podem triar una n-forma D que no s'anul·li sobre ells. Però també sabem que $D(v_1,\dots,v_n)=\det_{(e_i)}(v_1,\dots,v_n)D(e_1,\dots,e_n)$, i per tant $\det_{(e_i)}(v_1,\dots,v_n)\neq 0$. Recíprocament, siguin $v_1,\dots,v_n$ linealment dependents i triem $D=\det_{(e_i)}$. Llavors, per la propietat 4, $\det_{(e_i)}(v_1,\dots,v_n)=D(v_1,\dots,v_n)=0$. □

3 Determinant d'una matriu i d'un endomorfisme

Sigui A una matriu $n\times n$ sobre K:

$$A=\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Amb tot el que hem vist fins ara, és natural considerar A com una col·lecció de vectors columna $a_i=(a_i^1,\dots,a_i^n)$ i definir el *determinant de A* com

$$\det A=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_1^{\sigma(1)}\dots a_n^{\sigma(n)}.$$

Proposició. *Si A és una matriu $n\times n$ i A^t és la seva transposada, llavors* $\det A=\det A^t$.

Demostració. Siguin $A=(a_i^j)$ i $A^t=(b_i^j)$ on $b_i^j=a_j^i$. Aleshores

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_1^{\sigma(1)}\dots a_n^{\sigma(n)}=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma^{-1}(1)}^1\dots a_{\sigma^{-1}(n)}^n = \\ &= \sum_{\tau\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\tau)a_{\tau(1)}^1\dots a_{\tau(n)}^n=\sum_{\tau\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\tau)b_1^{\tau(1)}\dots b_n^{\tau(n)}=\det A^t. \quad \square\end{aligned}$$

Per definir el determinant d'un endomorfisme procedirem d'una forma que ens permetrà deduir uns resultats importants. Primer de tot notarem $\mathcal{A}(E)$ el conjunt de les n-formes lineals alternades sobre el K-espai vectorial E. És fàcil veure que $\mathcal{A}(E)$ té estructura de K-espai vectorial definint-hi les operacions $(D_1 + D_2)(v_1, \ldots, v_n) = D_1(v_1, \ldots, v_n) + D_2(v_1, \ldots, v_n)$ i $(aD)(v_1, \ldots, v_n) = aD(v_1, \ldots, v_n)$. A més, quan fixem una base $e_1, \ldots, e_n$ de E, la propietat 7 ens assegura que "hi ha tantes n-formes com elements de K", això és, tenim un isomorfisme $\mathcal{A}(E) \cong K$, de manera que $\mathcal{A}(E)$ té dimensió 1.

Fixem ara un endomorfisme $f \in \mathrm{End}(E)$ i considerem l'aplicació $\hat{f} : \mathcal{A}(E) \longrightarrow \mathcal{A}(E)$ definida per $\hat{f}(D)(v_1, \ldots, v_n) = D(f(v_1), \ldots, f(v_n))$. Gràcies a la linealitat de f es veu molt fàcilment que $\hat{f}$ també és lineal. Per tant, $\hat{f}$ és un endomorfisme de $\mathcal{A}(E)$, però com $\mathcal{A}(E)$ té dimensió 1, $\hat{f}$ és a la força una homotècia: $\hat{f}(D) = \lambda D$.

Definició. Anomenem *determinant de l'endomorfisme* f la raó d'aquesta homotècia:

$$\hat{f} = (\det f)I.$$

Per calcular explícitament $\det f$ escollim una base $e_1, \ldots, e_n$ de E i una n-forma $D \neq 0$. Llavors, amb la definició que hem donat, tenim

$$\hat{f}(D)(e_1, \ldots, e_n) = (\det f)D(e_1, \ldots, e_n), \tag{1}$$

però també, per definició de $\hat{f}$,

$$\hat{f}(D)(e_1, \ldots, e_n) = D(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \det_{(e_i)}(f(e_1), \ldots, f(e_n))D(e_1, \ldots, e_n), \tag{2}$$

i com les equacions (1) i (2) són iguals, tenim que $\det f = \det_{(e_i)}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$. Ara bé, si A és la matriu associada a f en la base $\{e_i\}$, els vectors $\{f(e_i)\}$ són les columnes de A, i podem concloure que

$$\det f = \det A.$$

Corol·lari 1. *Sigui $f \in \mathrm{End}(E)$. Totes les matrius associades a f, en diferents bases, tenen el mateix determinant.* □

Corol·lari 2. *Si A i B són dos matrius $n \times n$ sobre K, i I és la matriu identitat, llavors*

$$\det(AB) = \det A \det B \quad i \quad \det I = 1.$$

Demostració. A partir de la definició és fàcil veure que si $f, g \in \mathrm{End}(E)$ i $I_E \in \mathrm{End}(E)$ és la identitat, llavors $\widehat{g \circ f} = \hat{f} \circ \hat{g}$, i $\widehat{I_E} = I_{\mathcal{A}(E)}$, de la qual cosa es dedueix que $\det(g \circ f) = \det f \det g$, i $\det I_E = 1$. Com la matriu associada a una composició d'endomorfismes és el producte de les matrius associades, i la matriu I és l'associada a l'endomorfisme I_E, tenim els resultats que volíem. □

Corol·lari 3. *Si A és una matriu $n \times n$ invertible, llavors* $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$. *En particular,* $\det A \neq 0$.

Demostració. $A\,A^{-1} = I \Rightarrow \det A\ \det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$. □

4 Càlcul del rang d'una matriu

El rang d'una matriu és el nombre de vectors columna linealment independents. Ja hem vist que si A és una matriu $n \times n$, $\det A \neq 0$ si i només si els vectors columna són linealment independents, això és, $\mathrm{rang} A = n$. Ara ampliarem aquest criteri per poder decidir quan k vectors, amb $k < n$, són independents, o, més en general, quants vectors independents hi ha en una col·lecció arbitrària.

Considerem fixada una base $e_1, \ldots, e_n$ de E i introduïm unes notacions:

Definició. Anomenem $C_{p,n}$ el conjunt de subconjunts de p elements de $\{1, \ldots, n\}$. Si $L \in C_{p,n}$, L' indicarà el complementari de L, és a dir, els elements de $\{1, \ldots, n\}$ que no són a L. Designem per $f_L \in \mathcal{S}_n$ la permutació que verifica $\{f_L(1), \ldots, f_L(p)\} = L$ amb $f_L(1) < \ldots < f_L(p)$, i $\{f_L(p+1), \ldots, f_L(n)\} = L'$ amb $f_L(p+1) < \ldots < f_L(n)$.

Un *menor d'ordre* p d'una matriu A és la matriu $p \times p$ formada pels elements de A situats en p files i p columnes prefixades. Això és, els elements $L = \{i_1, \ldots, i_p\}, H = \{j_1, \ldots, j_p\}$ de $C_{p,n}$ defineixen el menor (a_i^j) amb $i \in L, j \in H$. Denotarem per A_L^H el determinant d'aquest menor.

Amb aquestes notacions enunciem, sense demostració, un potent resultat que ens permetrà calcular un determinant a partir de menors d'ordre inferior:

Regla de Laplace. *Fixat* $L \in C_{p,n}$,

$$\det A = \sum_{H \in C_{p,n}} \varepsilon(f_L)\varepsilon(f_H) A_L^H A_{L'}^{H'}.$$

Corol·lari. *Per a qualsevol* i, $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_i^j A_{i'}^{j'}$, *on* $j' = \{j\}'$ *i* $i' = \{i\}'$. *Aquesta expressió s'anomena* desenvolupament del determinant per la columna i.

Proposició. *El rang d'una matriu A és el més gran dels ordres dels menors de A amb determinant no nul.*

Demostració. Sigui $A = (a_i^j)$, i a_i el vector corresponent a la columna i. Sigui $r = \mathrm{rang} A$. Demostrem, primer, que tot menor d'ordre $p > r$ té determinant 0. Siguin $i_1, \ldots, i_p$ les columnes amb les quals s'ha format el menor. Per definició de rang, els vectors $a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}$ són linealment dependents i, per tant, un d'ells és combinació lineal dels altres. Amb més raó, en el menor considerat una de les columnes serà combinació lineal de la resta i el determinant serà 0.

Vegem ara que hi ha un menor d'ordre r amb determinant no nul. A la matriu A hi ha r columnes linealment independents; siguin $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$. El teorema de Steinitz ens assegura que podem substituir r vectors de la base $e_1, \ldots, e_n$ per aquests, i s'obté una nova base: $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}, e_{i_{r+1}}, \ldots, e_{i_n}$. En ser base, $\det_{(e_i)}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}, e_{i_{r+1}}, \ldots, e_{i_n}) \neq 0$. Observem que cada una de les $n-r$ últimes columnes és tota 0 excepte un lloc on apareix un 1. Si apliquem la regla de Laplace prenent $L = \{r+1, \ldots, n\}$, tots els determinants A_L^H seran zero excepte aquell pel al qual H correspon a les $n-r$ files que contenen un 1 (i, a més, aquest determinant val 1 o -1 perquè correspon a la matriu identitat d'ordre $n-r$ amb les columnes permutades). Així doncs, obtenim

$$0 \neq \det_{(e_i)}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}, e_{i_{r+1}}, \ldots, e_{i_n}) = \pm A_{L'}^{H'},$$

per tant, el menor corresponent a $A_{L'}^{H'}$, que és d'ordre r, és no nul. $\square$

Finalment, el següent resultat (que no demostrarem) complementa l'anterior com a eina per al càlcul del rang d'una matriu a partir de menors. Concretament, ens pot estalviar el càlcul de molts determinants:

Proposició. *Siguin $a_i = (a_i^1, \ldots, a_i^n)$, $i = 1, \ldots, r$, vectors linealment independents, i sigui*

$$M = \det \begin{pmatrix} a_1^{i_1} & \cdots & a_r^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{i_r} & \cdots & a_r^{i_r} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Un vector $v = (v^1, \ldots, v^n)$ és combinació lineal de $a_1, \ldots, a_r$ si i només si, per a tot j

$$\det \begin{pmatrix} a_1^{i_1} & \cdots & a_r^{i_1} & v^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{i_r} & \cdots & a_r^{i_r} & v^{i_r} \\ a_1^{j} & \cdots & a_r^{j} & v^{j} \end{pmatrix} = 0.$$

Aquesta operació d'afegir una columna i una fila a un menor no nul s'anomena orlar.

A la pràctica, però, és més habitual manipular la matriu per files o per columnes per aconseguir-la posar en forma triangular (mètode de Gauss). D'aquesta manera queda molt clar quin és el menor més gran amb determinant no nul que hi podem encabir, perquè el determinant d'un menor en forma triangular és el producte dels elements de la diagonal.

Els determinants tenen altres aplicacions pràctiques, com ara el càlcul de matrius inverses, la resolució de sistemes d'equacions lineals mitjançant la regla de Cramer i el càlcul d'àrees i volums:

- Si els vectors $u, v \in \mathbb{R}^2$ defineixen dos costats adjacents d'un paral·lelogram, llavors l'àrea d'aquest és $\det(u, v)$.
- Si $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ defineixen tres costats adjacents d'un paral·lelepípede, llavors el volum d'aquest és $\det(u, v, w)$.