TEMA 14: ECUACIONES. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES | APROXIMACIÓN NUMÉRICA DE RAÍCES |

Index

1. Introducción

El estudio de las ecuaciones y su resolución tiene una larga historia. En el Papiro de Rhind (1650 a.C) los egipcios ya utilizaban la expresión para resolver problemas prácticos, por ejemplo

$$aha + \frac{aha}{7} = 19$$

En mesopotamia las tablillas de arcilla contienen procedimientos numéricos para resolver problemas cuadráticos. Los griegos, con Euclides y sus Elementos vincularon sobre todo el álgebra y la geometría.

Algunos de los personajes más relevantes en cuanto a esta temática son: Diofanto, Al-Khwarizmi y Bhaskara, quienes desarrollaron las ecuaciones de 2 grado; Cardano y Ferrari, resolvieron 3 y 4 grado y

Galois y Abel quienes consiguieron, antes de fallecer prematuramente, demostrar la no existencia de fórmulas para ecuaciones de 5 grado y superior.

2. Concepto de ecuaciones algebraicas

En este tema abordaremos principalmente el estudio de las ecuaciones algebraicas, íntimamente ligadas con el estudio de los polinomios:

Defⁿ.- Una ecuación algebraica es una expresión del tipo $p(x) = 0$, donde $p(x)$ es un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$, en una o varias variables.

Nota: Nos centraremos en polinomios de una sola variable. Es decir

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \text{\_\_\_\_} + a_0 = 0$$

A los a_i se les llama coeficientes. A x se le llama incógnita.

Habitualmente, se asume que $p(x) \in K[x]$, luego

$$a_i \in K \quad \forall i = 1, \dots, n \quad , \quad K \text{ cuerpo}$$

Observemos que K podría ser $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C} \dots$

Defⁿ.- Si $p(x) = 0$ es una ecuación algebraica de grado n, diremos que $x = a$ es una raíz de $p(x)$ si cumple que $p(a) = 0$

Nota: Al encontrarnos en un tema de ecuaciones, nuestro objetivo no es encontrar alguna raíz, sino encontrarlas todas.

Ejemplos.- 1. La ecuación $x^2 - x - 1 = 0$ tiene solución en $\mathbb{R}$ y es algebraica con raíces $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

2. La ecuación $\sin(x) - x = 0$ NO es algebraica

3. Resolución de ecuaciones

De acuerdo con el T^a fundamental del algebra toda ecuación de grado n tiene n raíces en el cuerpo $\mathbb{C}$. Así, la resolución depende

- El grado $\underline{\underline{n}}$ del polinomio
- El cuerpo K en el que trabajamos

3.1. Ecuación de 1r grado (lineales)

Sea K cuerpo, entonces toda ecuación de primer grado se denota como

$$ax+b=0 \quad ; \quad a,b \in K$$

Luego, si aplicamos las propiedades de los cuerpos se obtiene

$$ax+b-b=-b \implies ax=-b \implies$$
$$\implies a^{-1}ax=-a^{-1}b \implies x=-\frac{b}{a}$$

Gracias al inverso multiplicativo y el opuesto para $(K,+)$. Así, tiene una única solución

Nota pedagógica

a) El alumnado debe entender que la resolución se obtiene llevando a cabo operaciones equivalentes a ambos lados: TRANSPOSICIÓN MECANIZADA

b) Aunque usemos comunmente la letra "x", sería conveniente variar el uso de letras.

3.2. Ecuaciones de 2n grado

Las ecuaciones cuadráticas (2n grado) son aquellas que podemos expresar por

$$ax^2+bx+c=0 \quad ; \quad a,b,c \in K$$

i) Si $b \neq 0$, $c \neq 0 \Rightarrow$ diremos que es completa

En otro caso, se dice incompleta, las cuales se pueden resolver fácilmente. Sin embargo, las completas, procedemos mediante:

$$4a(ax^2+bx+c) = 4a \cdot 0 = 0$$ 1r) Multiplicar por 4a

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

2n) Completamos el cuadrado perfecto con b^2

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$$

3r) Tomamos raíces

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2-4ac}$$

4t) Aislamos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\boxed{\text{Nota pedagógica}}$ Este proceso se puede llevar a cabo manipulativamente, lo cual puede ayudar al alumnado a comprender la importancia de la fórmula.

Nota.- Observemos que, $\Delta = b^2 - 4ac$ llamado discriminante es muy importante para la resolución de dicha ecuación ya que, si:

- $\Delta > 0 \Rightarrow$ 2 raíces $\neq$s en $\mathbb{R}$
- $\Delta = 0 \Rightarrow$ 1 raíz en $\mathbb{R}$ (doble)
- $\Delta < 0 \Rightarrow$ No hay ninguna raíz real

3.3. Ecuaciones de 3r grado

Toda ecuación de 3r grado se puede expresar como $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$
$a, b, c, d \in K$

Notemos que podemos considerar $a = 1$, en otro caso, multiplicamos por a^{-1} toda la expresión. Entonces hay que resolver

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \; ; \; a, b, c \in K$$

N. Tartiaglia ideó una forma de resolverlas, de la siguiente manera:

$\boxed{\text{1r paso}}$: Realizamos el cambio de variable

$$y - \frac{a}{3} = x$$

Así, se nos queda una expresión del tipo

$$y^3 + py + q = 0$$

$\boxed{\text{2n paso}}$: Hacemos el cambio $y = u + v$

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^3 + v^3 + pu + pv + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + \left[(u+v)(3uv + p)\right] + q = 0$$

$\boxed{\text{3r paso}}$: Dado que hemos hecho 2 variables de 1 (y), podemos imponer $3uv + p = 0$

$$\left.\begin{array}{l} u^3 + v^3 + q = 0 \\ 3uv + p = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \Rightarrow u^3v^3 = \frac{-p^3}{27} \end{array}\right.$$

Por Cardano-Vietta, μ^3, v^3 son solución de

$$z^2 - qz - \frac{p^3}{27} = 0 \qquad \begin{pmatrix} (z+a)(z+b)=0 \\ z^2+(a+b)z+ab=0 \end{pmatrix}$$

Así $\mu^3, v^3 \in \left\{ \dfrac{q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \right\}$

$\boxed{\text{4t paso}}$ Deshacemos los cambios de variable y obtenemos $\underline{\underline{x}}$

3.4. Ecuación de 4t grado

G. Cardano y L. Ferrari estudiaron de forma exhaustiva las ecuaciones de 3r y 4t grado. El método Ferrari, ideado por él mismo, junto con la supervisión de G. Cardano consiguió resolver las ecuaciones de dicho grado, por medio del método de Tartaglia.

Por motivos de tiempo no lo desarrollaremos completamente. Será suficiente con esquematizar el proceso. $x^4 + ax^3 + bx^3 + cx + d = 0$
$a, b, c, d \in K$

$\boxed{\text{1r paso}}$ Con el cambio $\boxed{x = y - \frac{a}{4}}$ se tiene una ecuación sin término cúbico

$\boxed{\text{2n paso}}$ Añadir una variable μ tal que al imponer una condición $(Ay+B)^2$. Hay que resolver una ec. 3r grado

$\boxed{\text{3r paso}}$ Resolvemos 2 ecuaciones cuadráticas

3.5. Ecuaciones de 5 grado o superior

Una vez en Ars Magna, el famoso libro de G. Cardano, se dieron por resultas las ecuaciones de 3r y 4t grado, muchos matemáticos comenzaron con la resolución de 5 grado. Siguiendo la misma idea: determinar sus raíces a partir de sus coeficientes. Sin embargo, no sabían que era una tarea imposible.

E. Galois y N. H. Abel, dos matemáticos muy jóvenes demostraron independientemente y de forma correcta que las ecuaciones de quinto grado NO eran resolubles por cuadraturas. Es decir, no podemos encontrar una fórmula GENERAL que nos determine el valor de sus raíces.

La importancia de la teoría de Galois, fue fundamental para la época, ya que a través de la concepción de un nuevo objeto matemático llamado Grupo se originó el Álgebra moderna. Además, gracias a su teoría y la extensión de ella se observó que tampoco existen fórmulas para ecuaciones de grado superior a 5.

Dando por resuelto el estudio de todas las ecuaciones algebraicas.

3.6. Observaciones generales

Por el Tª Fundamental del Algebra, demostrado por C. F. Gauss sabemos que una ecuación de grado n tiene n raíces en los complejos

Este aspecto, nos permite deducir algunas propiedades de las raíces de una ecuación en $\mathbb{R}$.

2.6.1. Método Horner - Ruffini

Basado en el siguiente resultado

<u>Prop</u>.- Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ y $a \in \mathbb{K}$. Entonces

$$p(a) = 0 \iff x - a \mid p(x)$$

$\boxed{D}$ Por la división de polinomios

$$\exists !\, q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x] : p(x) = q(x)\cdot(x-a) + r(x)$$

$$\delta(r(x)) < \delta(x-a) = 1 \implies r(x) = r \in \mathbb{K}$$

Así $p(a) = 0 \iff r = 0 \iff x-a \mid p(x)$

<u>Ejemplo</u>.- Si aplicamos el resultado anterior podemos deducir un alg. vinculado con la división de polinomios.

$$x^3 - x^2 - 3x + 2 \;\; \underline{|x-2} \;\; \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -3 & +2 \\ 2 & & 2 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\implies$ el resto es $0 \implies x-2 \mid p(x)$

$\implies x = 2$ es raíz

result anterior

2.6.2. Otros resultados sobre raíces

Prop. - Sea a raiz de $p(x)$ tal que

$$p(x) = a_n x^n + \text{—} + a_0$$

Entonces $a \mid a_0$

$\boxed{D}$ $$a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \text{—} + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow a(a_n a^{n-1} + a_{n-1} a^{n-2} + \text{—} + a_1) = -a_0$$

$$\Rightarrow a \mid a_0 \quad \square$$

Veamos algunas características relacionadas con los números complejos.

Prop. - Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado n. Entonces

si $z \in \mathbb{C}$ es raiz $\Longrightarrow$ $\bar{z} \in \mathbb{C}$ es raiz

$\boxed{D}$ $0 = p(z) = a_n z^n + \text{—} + a_1 z + a_0$ donde

$\circledast$ $a_i \in \mathbb{R} \ \forall i \Rightarrow \overline{a_i} = a_i \ \forall i$

Si tomamos cojugados

$$\bar{0} = \overline{p(z)} \overset{\circledast}{=} p(\bar{z}) \Rightarrow \bar{z} \text{ es raiz}$$

Corolario. - Sea una ecuación en $\mathbb{R}$ de grado impar $\Rightarrow$ tiene almenos una raiz real

Corolario. - Sea una ecuación de grado par en $\mathbb{R}$ con una raiz real $\Rightarrow$ tiene otra raiz real

Observemos que hasta ahora hemos estudiado la resolución de ecuaciones, las cuales para cierto grado ya no dispondremos de una fórmula, pero eso no quiere decir que no tengan raíces. ¿Que hacemos en estos casos? Aproximar sus soluciones.

4. Aproximación de raíces en $\mathbb{R}$

Como comentábamos, necesitamos de métodos eficientes para la aproximación de raíces en $\mathbb{R}$.

Ejemplo.- $x^5 - x - 1 = 0$ NO es resoluble por cuadraturas

$\Rightarrow$ Luego para obtener sus raíces hay que aproximarlas.

Veamos algunos de los métodos más comunes y famosos

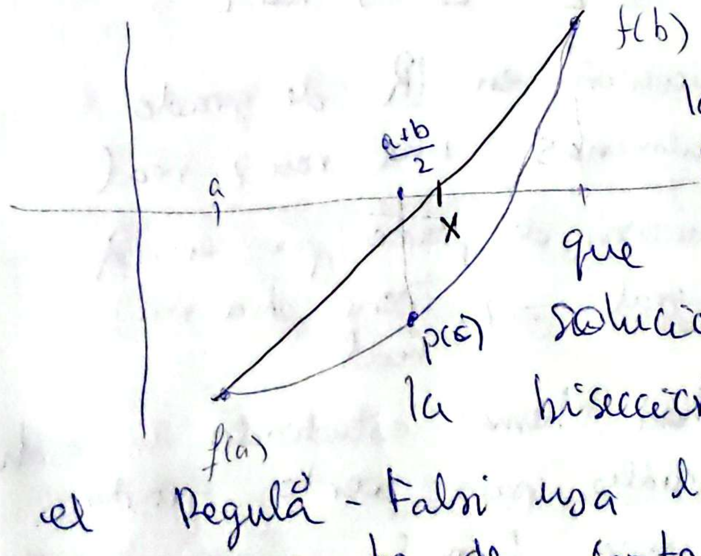
4.1. Método de la bisección y Regula-Falsi

Todo polinomio $p(x) \in K[x]$ es una composición de funciones continuas $\Rightarrow$ es una función continua

Así, supongamos que $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$;

$a < b$ y $p(a) \cdot p(b) < 0 \Rightarrow$ hay cambio de signo

Por el T$^{\underline{a}}$ de Bolzano $\Rightarrow \exists\, c \in]a,b[\,:\, p(c) = 0$



La diferencia entre la bisección y el Regula Falsi es la forma en la que se aproximan a la solución. Mientras que la bisección usa el punto medio, el Regula-Falsi usa la recta en $f(a)$ y $f(b)$ y su punto de corte con el eje OX.

Veamos cada uno ;

- Bisección

Sea $a < b$, $p(a) \cdot p(b) < 0$. Entonces definimos $c = \frac{a+b}{2}$. Luego $p(a) \cdot p(c) < 0$ ó $p(c) \cdot p(b) < 0$

Así, suponemos como en la Figura que $p(c) \cdot p(b) < 0$

$\Rightarrow$ Continuamos el proceso con c y b. Así, se construye $\{x_n\}_{n \geq 1}$ que es una sucesión de Cauchy $\Rightarrow$ convergente.

$$|x_{n+1} - x_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

- Regula Falsi

En este caso queremos conocer el punto de corte entre la recta que pasa por $f(a)$ y $f(b)$ y el eje OX. Entonces, como vemos en la figura, que

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad \text{cuando } y = 0$$

$$\Rightarrow 0 - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$\Rightarrow a - \frac{(b-a) f(a)}{f(b) - f(a)} =: x_0$$

Así tenemos un nuevo punto de corte repetimos el proceso ~~con~~ en función del signo de $p(x_0)$ y detenemos el proceso cuando las estimaciones difieren en poco. Este método converge más rápido que el anterior.

4.2. Método Newton - Raphson

La idea del método se basa en la aproximación de la raíz mediante la recta tangente y sus cortes en OX.

Así, sea x_1 una aproximación inicial. Sabemos que la recta tangente l en un punto es:

$$l: f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

Así el punto de corte viene dado por

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Luego $\{x_n\}_{n \geq 1}$ tal que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ es nuestro proceso iterativo

La convergencia de este método es de orden 2, es decir, superior a los dos anteriores.

Sin embargo, su convergencia no siempre está garantizada. Veamos:

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ Sea $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ que satisface:

i) $f(a) \cdot f(b) < 0$

ii) $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

iii) $f''(x)$ no cambia de signo en $]a,b[$

iv) $\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| < b-a \quad , \quad \left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| < b-a$

Entonces converge.