JORGE MORRA

Tema 14. Ecuaciones. Resolución de ecuaciones. Aproximación numérica de raíces.

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

Tema 14. Ecuaciones. Resolución de ecuaciones. Aproximación numérica de raíces.

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

Prólogo

Tiene delante el lector el decimocuarto cuadernillo de la serie ”Oposiciones Matemáticas”, concretamente el de ecuaciones, resolución de ecuaciones y aproximación numérica de raíces.

Como ya expuse en prólogos anteriores, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *”ese algo”* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *”entretenerlos”*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles un cuento?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de la Historia y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar, aunque no probemos todo porque no va a ser posible con todas las proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos. Pero, insisto, es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la ”guinda” al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas. Básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *”a conciencia”*.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *”A conciencia”* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* del tema que escribamos. Pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este decimocuarto cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran o bien conocer algo más de esta ciencia o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es. Si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, julio de 2020

Índice

Página

1. ¿Cómo preparar este tema?

Como en todos los temas hasta ahora es importante leer y entender todo el contenido al completo, desde la primera hasta la última línea. Siempre insisto en lo mismo porque en ocasiones tendemos a saltarnos partes de un texto ya que lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso le pido al lector que no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, ya tendrá una idea de lo que le quiero contar, ahora viene la parte más difícil, que es la de sintetizar, resumir y concretar lo que quiere escribir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas, o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le debe dar tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

El nombre del tema y los puntos a tratar son, de forma objetiva, muy extensos. El concepto de ecuación, de sus tipos y de la resolución de las mismas comienza en los colegios e institutos con las ecuaciones de primer grado con una incógnita y no acaba ni siquiera en el último año de universidad. Ello es debido a que la idea de ecuación surge casi a partir de cualquier problema que podamos plantearnos. Es por ello que nosotros nos limitaremos, en una primera parte, a ecuaciones algebraicas, es decir, aquellas del tipo $p(x) = 0$ con $p(x)$ un polinomio sobre un cuerpo que habitualmente serán los reales; y en una segunda parte a aquellas que se identifican con funciones al menos de clase 2 definidas sobre $\mathbb{R}$.

El tema al completo contiene muchos resultados y conceptos. El lector encontrará probados los teoremas y proposiciones más importantes, habiéndonos quedado bastantes sin demostrar. Es aconsejable que los restantes se intenten, las demostraciones que se dejan para el lector deben pensarse como ejercicios del tema que nos ayudarán a comprenderlo en su totalidad.

- La sección *introducción* es importante y en este caso, extensa. Debe exponerse una síntesis de la resolución de ecuaciones en Babilonia y Grecia; así como una referencia a los matemáticos Diofanto y Al-Jwarizmi. La parte de los matemáticos del Renacimiento es más importante y debe hacerse un mayor hincapié sobre ella.

- La sección *resolución de ecuaciones* está dividida en varias subsecciones. Debe definirse el concepto de ecuación algebraica y enunciar las fórmulas de Viète. La resolución de la ecuación cuadrática debe desarrollarse, así como la primera parte de la ecuación cúbica. De ésta última no es necesario demostrar el teorema 3.11, sino solamente enunciarlo. La parte del método de Ferrari debe incluirse al completo. De la subsección correspondiente a las ecuaciones de grado mayor o igual que cinco, es importante enunciar las proposiciones pero no demostrarlas.

- De la sección *aproximación numérica de raíces* es importante su desarrollo y explicación de todos los métodos, aunque solamente la demostración de uno de ellos. En este caso el lector puede optar por el de la *regula falsi* o por el de *Newton-Raphson*.

Tampoco es necesaria la demostración del teorema de Bolzano, del Valor Medio o de la proposición 4.1, solamente enunciarlos.

- La última sección, *conclusiones*, recopila lo tratado y desarrollado en el tema.

2. Introducción

clase

La idea de ecuación surge en el momento en el que el hombre necesita encontrar las condiciones en las que un problema puede resolverse. Comienza cuando lo que quiere no es conocer el resultado de una operación, sino cuando se cuestiona cuáles deben ser los datos iniciales para que dicho resultado sea válido. La forma de su planteamiento no es trivial, de hecho, las primeras ecuaciones que nos encontramos a lo largo de la historia se deben a los egipcios. En el papiro de Amhes, que data aproximadamente de año 1650 a. C., además de una mayoría de problemas de naturaleza aritmética, descubrimos otros equivalentes a lo hoy conocemos como de resolución de ecuaciones. Concretamente, y por hacer mención a alguno de los que contiene, el 24 pide el cálculo del valor del *aha* o *montón* sabiendo que el *aha* más un séptimo del *aha* es 19. Es fácil observar que el *aha* es lo que nosotros denominamos actualmente con la letra x, nuestra incógnita en una ecuación. Son problemas en los que se resuelven ecuaciones lineales en la forma $a + ax = b$ donde a y b son números conocidos. La forma de resolución era por aproximación, daban un primer valor a la incógnita y por proporciones iban *acercándose* a la solución.

Algunos siglos más tarde los babilonios no se centraron en las ecuaciones lineales de los egipcios pues probablemente las consideraron demasiado elementales. Resultaban mucho más interesantes para ellos la resolución de las ecuaciones en las que la incógnita aparecía elevada a una segunda potencia. Evidentemente los babilonios nunca resolvieron algebraicamente este tipo de ecuaciones, ésta se reserva al renacimiento, además solamente encontramos ejemplos de ellas en algunas Tablillas[1] que han llegado hasta nuestros días. Por ejemplo en la Tablilla BM 13901 se puede leer:

> "He sumado siete veces el lado de mi cuadrado y once veces el área, obteniendo 6; 15."

donde 6; 15 está escrito en sistema sexagesimal, y podemos traducirlo por $6\frac{15}{60}$, o bien $6\frac{1}{4}$, o bien también $\frac{25}{4}$. A continuación se muestra la forma de llegar a la solución:

a) Multiplicar 11 por $\frac{25}{4}$, obteniendo $\frac{275}{4}$.

b) Dividir 7 entre 2, que es $\frac{7}{2}$.

c) Elevar $\frac{7}{2}$ al cuadrado, llegando a $\frac{49}{4}$.

d) Sumar lo anterior a $\frac{275}{4}$ oteniendo $\frac{324}{4}$, que es exactamente 9.

e) Tomar su raíz cuadrada, $\sqrt{9}$, que es 3.

f) Restar $\frac{7}{2}$, dando $\frac{11}{2}$.

[1]Pequeña tabla de arcilla que contenían conocimientos matemáticos de la época. Se descubrieron a mediados del siglo XIX y su número es alrededor de las 400.

g) Dividir lo anterior entre 11, llegando a $\frac{1}{2}$

Es decir, la longitud del lado del cuadrado es $\frac{1}{2}$ (en notación sexagesimal $0,30$).

Puede el lector partir de una ecuación de segundo grado como las conocemos actualmente, $ax^2 + bx + c = 0$, y seguir los pasos anteriores. Llegará a la fórmula que la resuelve:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sin embargo, aunque entendemos que sabían resolver ecuaciones de segundo grado porque los ejemplos encontrados en las Tablillas no eran precisamente elementales, no encontramos justificación alguna de que tales procedimientos fueran correctos.

Pero además de las de segundo grado, los babilonios también resolvieron ecuaciones cúbicas, entre ellas algunas muy elementales como $x^3 = a$, y otras no tanto, $x^3+x^2 = a$. Además reconocieron a las bicuadradas, $ax^4 + bx^2 = c$, o también a las del tipo $ax^8 + bx^4 = c$ como de segundo grado. Tenemos razones obvias para pensar que el álgebra en Mesopotamia alcanzó un mayor nivel que la egipcia.

La matemática griega actuó de forma distinta a la babilónica en la resolución de ecuaciones. Para los griegos la resolución de problemas en los que aparecía una ecuación no pasaba por algoritmos numéricos, sino por la geometría. Aparece así lo que podíamos denominar el *álgebra geométrica*, que aparece incluida de forma bastante completa en los *Elementos de Euclides*, y en un complemento de él, los *Datos*. En ocasiones puede parecer artificiosa porque los griegos no sumaban las áreas a los volúmenes o a las longitudes ya que entendían que eran en esencia elementos distintos. Notemos que una forma equivalente de planteamiento de ecuaciones del tipo $x^2 + c = bx$, que ya utilizaron los babilonios, era la de los sistemas $x + y = b$ y $x \cdot y = c$. Los pitagóricos consideraban este problema eminentemente geométrico, pues no era más que calcular cómo debía dividirse un segmento de longitud b sabiendo que el rectángulo que se formara con la división tenía que tener área c.

Las ecuaciones cúbicas tampoco fueron un impedimento en la geometría griega. Utilizando las cónicas fueron capaces de resolver tales ecuaciones, sin embargo el interés que demostraron por ellas decreció después de Arquímedes.

Diofanto puede ser considerado el padre del Álgebra moderna[2] porque en su *Arithmetica* utiliza sistemáticamente ciertas abreviaturas para potencias, operaciones, e incluso para representar los números desconocidos o las incógnitas; sin embargo en su obra se limita a la resolución de problemas, con gran artificio e ingenio en muchos de ellos, pero sin dar un procedimiento o método general. A este respecto el álgebra geométrica de Euclides está más cerca de lo que nosotros conocemos como álgebra que lo puede estar la de Diofanto. Además, en muchos de los problemas se limitaba a dar una única solución aunque a nuestro modo de ver el problema pudiera tener más de una. Podemos pensar que Diofanto no estaba resolviendo ecuaciones en su obra, sino resolviendo problemas para los que planteaba una ecuación. Ésta podía tener más soluciones como ecuación, pero no más soluciones para el problema.

[2] En realidad este título debería ser del matemático de origen árabe Al-Jwarizmi.

En los *Nueve Capítulos*, del escriba Liu Hui en la China de los siglos II y I a. C., encontramos la resolución de ecuaciones lineales, de forma similar a como lo hacían los egipcios; e incluso la resolución aproximada de ecuaciones de grados mayores utilizando un procedimiento similar a lo que después se ha llamado el *método de Horner*. De hecho, en siglos posteriores, se han encontrado más textos de otros matemáticos chinos en los que quedaba claro que conocían este método.

Posteriormente, en los siglos VIII y IX un matemático de origen persa, Muhammad ibn Musa al-Jwarizmi, publicó el *Al-jabr wa'l Muqalabah*, donde desarrollaba la idea de *trasponer* términos de una parte a otra de una ecuación, además de la posibilidad de cancelar términos iguales situados en cada uno de los miembros; conceptos básicos y muy utilizados en el Álgebra moderna de hoy día. Además en dicha obra Al-Jwarizmi da una exposición completa de la resolución de las ecuaciones cuadráticas, aunque omitiendo las soluciones que fueran negativas o cero. Es curioso además que tales exposiciones no fueran consideradas por él como demostraciones pues en el mismo *Al-jabr* expone la necesidad de realizar las mismas utilizando la geometría, algo similar a como ya pensaban los griegos.

Nos tenemos que trasladar unos cuantos siglos después, hasta el año 1545, en el que Girolamo Cardano (1501-1576) publica su *Ars Magna*. En dicha obra desarrolla no solo la solución de las ecuaciones cúbicas, sino también las cuárticas. No vamos a entrar en las discusiones históricas sobre el porqué fue Cardano el que lo hizo, solamente diremos que en realidad el descubridor original de las de grado 3 fue Niccolo Tartaglia[3], (1501-1557), y las de grado 4, Ludovico Ferrari (1522-1565), antiguo secretario de Cardano.

Cardano desarrolló en su *Ars Magna* que cualquier cúbica podía resolverse con operaciones aritméticas, raíces cuadradas y raíces cúbicas; y que cualquier cuártica seguía el mismo proceso, operaciones aritméticas, raíces cuadradas, raíces cúbicas y ahora raíces cuartas; así que, ¿por qué no pensar que las ecuaciones quínticas eran también resolubles de la misma forma?

Este problema estuvo abierto durante muchísimo tiempo. Matemáticos importantes de siglos posteriores, como por ejemplo Lagrange, intentaron encontrar las fórmulas correspondientes pero fallaron en el intento. Hasta 1799 en la que un matemático italiano, Paolo Fuffini (1765-1822), publicó su *Teoría general de ecuaciones*, en la que "demostraba" que la solución algebraica de una ecuación de grado 5 no era posible. Sin embargo la prueba era sumamente extensa y aunque la envió a matemáticos importantes contemporáneos, se pensó que podría tener errores y fue obviada completamente. No fue hasta 1923 en primer lugar, en el que un matemático noruego, Niels Henrik Abel (1802-1829) encontró una demostración de la imposibilidad de resolver algebraicamente la ecuación de grado 5; y hasta 1932 en segundo lugar con el trabajo de Evariste Galois[4] (1811-1832) cuando dio las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación algebfaica tuviera solución en radicales. Curiosamente este trabajo se perdió y fue publicado en 1946, y a título póstumo,

[3]Ni siquiera está claro si fue Tartaglia el que desarrolló todas las fórmulas de las ecuaciones cúbicas. Téngase en cuenta que una ecuación de grado 3 no era, en el siglo XVI, la misma que la que consideramos ahora. En aquel momento, sin considerar a los números negativos, tenían varias ecuaciones cúbicas distintas, y los procedimientos para su resolución diferían de una a otra.

[4]Galois fue un matemático francés de principios del siglo XIX. Con su trabajo se sentaron las bases para el estudio de lo que después se llamó la teoría de grupos de Galois.

por el conocido matemático francés Joseph Liouville (1809-1882).

Teorema 2.1 *Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes del cuerpo $\mathbb{Q}$, irreducible sobre $\mathbb{Q}$, entonces:*

a) Si por lo menos una raíz de la ecuación $p(x) = 0$ se expresa en radicales con los coeficientes de dicha ecuación, entonces el grupo de Galois de dicha ecuación es soluble sobre $\mathbb{Q}$.

b) Si el grupo de Galois de dicha ecuación $p(x) = 0$ sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ es soluble, con la particularidad de que la característica del cuerpo es igual a cero, o bien mayor que todos los órdenes de todos los factores de composición de dicho grupo, entonces todas las raíces de la ecuación se representan en radicales mediante sus coeficientes.

El teorema de Abel-Ruffini resultaba ser un corolario de éste último. Se cerraba de esta forma el problema de encontrar soluciones en radicales de una ecuación algebraica, independientemente de que, aplicando el *Teorema fundamental del Álgebra*, sepamos que existen tantas raíces reales o complejas como grado tenga la ecuación.

3. Resolución de ecuaciones

Definición 3.1 *Una ecuación algebraica es una ecuación del tipo $p(x) = 0$ dónde $p(x)$ es un polinomio de grado n, en una o varias variables.*

Nosotros nos centraremos en el caso particular de ecuaciones algebraicas en las que el número de variables es 1, es decir:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

Los elementos a_i con $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ se denominan coeficientes de la ecuación y a x se la llama incógnita.

Consideraremos además que el conjunto en el que se mueven los coeficientes será, como poco, un *Dominio Euclídeo*, D, aunque mayoritariamente trabajaremos con estructuras de cuerpo, como los racionales, los reales o los complejos.

Definición 3.2 *Si $p(x) = 0$ es una ecuación algebraica de grado n, diremos que $x = a$ es una raíz o una solución, si $p(a) = 0$, es decir:*

$$a_x a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_0 = 0$$

Al encontrarnos con un tema sobre ecuaciones trataremos con prioridad la resolución de éstas. De forma implícita estaremos trabajando con raíces de polinomios, con la divisibilidad y con la irreducibilidad de éstos, pero hacemos hincapié en que éstos conceptos, como el expuesto en la definición 3.3 del orden de una raíz, pueden aparecer coyunturalmente y no profundizaremos sobre ellos.

Obviamente resolver una ecuación no es encontrar alguna de sus raíces, sino encontrarlas todas. Además, si a es raíz de $p(x)$ entonces, aplicando el teorema del resto[5], podemos

[5] Recordemos que el teorema del resto afirma que el resto de la división $p(x) : (x - a)$ coincide con el valor que resulta al sustituir la variable x por el valor a del dominio, $p(a)$.