TEMA 19: DETERMINANTES. PROPIEDADES. APLICACIÓN AL CÁLCULO DEL RANGO

Índice

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de determinante tiene sus orígenes en el s. XVII antes incluso de la formalización del algebra matricial.

Uno de los primeros en usar una idea relacionada con los determinantes fue, el matemático japonés. S. Kowa en 1683. De forma independiente, 10 años más tarde el matemático alemán W. G. Leibnitz también los uso para su estudio sobre sistemas de ecuaciones.

Así, en origen los determinantes estaban ligados al estudio de sistemas de ecuaciones. En 1750, Gabriel Cramer formuló su famosa regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales a través de los determinantes. En el s. XIX Gauss y Cauchy demostraron algunas de las propiedades más importantes de los determinantes y aplicando esta técnica en otros campos como la geometría.

Este tema se puede desarrollar por medio de aplicaciones lineales, sin embargo, dado su poco carácter didáctico, la complejidad y la falta de relación con el currículum de la asignatura, vamos a enfocarlo adaptándolo a un contexto similar al de Bachillerato.

2. Definiciones básicas

El concepto de determinante se define sobre matrices cuadradas, por tanto, en todo el tema se considerará el cjto $M_n(K)$ de matrices cuadradas $n \times n$ con entradas en K, un cuerpo. $(n \in \mathbb{N})$

Como hemos mencionado en la introducción, en este tema desarrollaremos dos conceptos de forma pedagógica. Luego, para definir el determinante recurriremos a la forma <u>inductiva</u>.

Sea $A_1 = (a_{11}) \in M_1(K)$, entonces $\det(A) = a_{11}$.

Supongamos que $A_n \in M_n(K)$ y se conoce el $\det(B)$ $\forall B \in M_{n-1}(K)$. Entonces, definimos

$$\det(A) := \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

por medio del <u>ij-ésimo menor adjunto</u> α_{ij} de A con $\boxed{\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})}$

donde $A_{ij} \in M_{n-1}(K)$ resultan de eliminar la fila i y la columna j de A. Así, se define

$$\boxed{\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\, \alpha_{i1}}$$

Esto es: la suma de los elementos de la 1ª columna de A, multiplicado cada uno por su menor adjunto. Se le conoce como desarrollo de Laplace de A por su primera columna

Así, un determinante es una aplicación del cjto $M_n(K)$ en K. Es decir,

$$\det : M_n(K) \longrightarrow K$$
$$A \longrightarrow \det(A)$$

<u>Ejemplo</u>:-

Sea $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(K)$

$$\det(A_2) = a_{11} \cdot \alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21}$$
$$= a_{11} \cdot a_{22} + a_{21}(-1)^3 a_{12}$$
$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

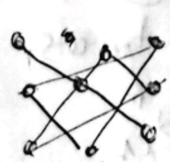
⊕ ⊖

Sea $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(K)$

$$\det(A_3) = a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + a_{31}\alpha_{31}$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13})$$
$$+ a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$- (a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{22}a_{13})$$

A la expresión anterior se la conoce como Regla de Sarrus

⊕



⊖

$\boxed{\text{Nota pedagógica}}$ Una ~~act~~ enfoque pedagógico al aula sería comenzar el estudio de los determinantes por medio de la definición, a través de los menores adjuntos. Así, podemos calcular determinantes de matrices de orden $n \geq 3$. Una vez consolidado estos saberes entonces, se puede utilizar y razonar ~~esta fórmula~~ demostrando la fórmula.

3. Propiedades de los determinantes

En esta sección, vamos a enunciar y probar algunos de los resultados y propiedades más importantes de los determinantes.

$\boxed{\text{Propiedades}}$ i) Sean tres matrices $A, A', A'' \in M_n(K)$ de forma que son idénticas salva la fila i-ésima de A, que es la suma de las filas i-ésimas de A' y A''. Es decir,

no explicar directamente

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1+y_1 & \cdots & x_n+y_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{A''} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{A'}$$

$\boxed{D}$ (*) $\det(A) = a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + \dots + (x_1+y_1)\alpha_{i1} + \dots + a_{n1}\alpha_{n1}$

Razonamos por inducción sobre orden n

Supongamos que $\boxed{n=1}$ $\det(A_1) = x_1 + y_1 \to$ cierto

Si suponemos cierto para $(n-1) \overset{?}{\Rightarrow} n$.

Veamos que si aplicamos HI en (*) tenemos que $\alpha_{j1} = \alpha'_{j1} + \alpha''_{j1} \quad \forall j \neq i$. Entonces

Como $\alpha'_{i1} = y_1 \alpha_{i1}$; $x_1 \alpha_{i1} = \alpha''_{i1}$

$\det(A) = a_{11}(\alpha'_{11} + \alpha''_{11}) + \dots + (x_1\alpha''_{i1} + y_1\alpha'_{i1} + \dots =$

$=$

cqd $\square$

ii) Si una matriz tiene dos filas o columnas iguales entonces determinante es nulo

iii) Si intercambiamos dos filas o columnas de orden entonces el determinante cambia de signo

$\boxed{D}$ En ambos casos, se lleva a cabo por inducción. Primero asumiendo que son consecutivas y después se generaliza.

iv) Si $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ entonces

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ kx_1 & \cdots & kx_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \det(A)$$

$\boxed{D}$ Razonamos por inducción. Si $n=1$ el resultado es cierto. Supongamos cierto para $n-1$, entonces

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ kx_1 & \cdots & kx_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + \dots + kx_1\alpha_{i1} + \dots + a_{n1}\alpha_{n1} \overset{(*)}{=}$$

Por HI, sabemos que $\alpha_{j1} = k \underbrace{\alpha^A_{j1}}_{\text{el menor de } A} \quad \forall j \neq i$.

Entonces, como $\alpha^A_{i1} = \alpha_{i1}$

$$\overset{(*)}{=} a_{11} k \alpha^A_{11} + \dots + kx_1 \alpha^A_{i1} + \dots + a_{n1} k \alpha^A_{n1} = k \cdot \det(A)$$

$\square$

v) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1 + ky_1 & \cdots & x_n + ky_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\boxed{D}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1+ky_1 & \cdots & x_n+ky_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{(prop)} \\ i}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ky_1 & \cdots & ky_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\substack{\| \\ 0 \text{ por la propiedad} \\ ii) + iv)}}$$

VI) Una matriz es regular si $\det(A) \neq 0$

VII) Si $A, B \in M_n(K)$ entonces $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

(VIII) $\det(A) = \det(A^t)$

$\boxed{D}$ En este tema el desarrollo del determinante se hace por columna, pero se puede definir de forma equivalente por filas

Así,
$$\underbrace{\det(A)}_{\substack{\text{desarrollo} \\ \text{por columnas}}} = \underbrace{\det(A^t)}_{\substack{\text{desarrollo} \\ \text{por filas}}}$$

Luego como consecuencia

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k1} \alpha_{k1}$$
$$\|$$
$$\det(A^t) = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \alpha_{1k}$$

4. Matriz inversa y determinantes

Una de las propiedades más interesantes de ~~los~~ los determinantes es su vinculación con el cálculo de la matriz inversa. Sea $A \in M_n(K)$, llamaremos

$A^* = (\alpha_{ij}) \in M_n(K)$ matriz de adjuntos de A

Ejemplo.-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>Proposición</u>.- Sea $A \in M_n(K)$ y A^* su matriz de adjuntos de A, entonces

$$A \cdot A^{*t} = \det(A) \cdot \mathbb{I}_n$$

$\boxed{D}$ Sea $A^* = (\alpha_{ij}) \rightsquigarrow A^{*t} = (\alpha_{ji})$

$$\Rightarrow (A \cdot A^{*t})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \alpha_{jk} \quad (1)$$

Entonces, es evidente que si $i = j \Rightarrow (1) = \det(A)$

Sin embargo, si $i \neq j$ ocurre que $(1) = 0$

Puesto que estamos haciendo el

$(ii) \neq$ $a_{i1} \cdots a_{in}$

desarrollo por filas del determinante de una matriz $A_{i \leftrightarrow j}$ que es resultado de ~~intercambia~~ sustituir la fila j por la j. $\Rightarrow$ determinante si tenemos 2 filas iguales es nulo □

Por tanto, si $C = A \cdot A^{*t} = (c_{ij})_{ij}$ entonces

$$\left.\begin{array}{ll} c_{ii} = \det(A) & \forall i \\ c_{ij} = 0 & \forall i \neq j \end{array}\right\} \Rightarrow A \cdot A^{*t} = \det(A) \cdot \mathbb{I}_n$$

□

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ Si $A \in M_n(K)$ regular, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{*t}$$

$\boxed{D}$ Del resultado anterior sabemos que $A \cdot A^{*t} = \det(A) \cdot \mathbb{I}_n$

Además A es regular $\Rightarrow \det(A) \neq 0$. Entonces

$$A \cdot \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{*t} = \mathbb{I}_n \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^{*t}$$

□

Nota pedagógica Este resultado nos brinda la posibilidad de razonar por qué las matrices con $\det(A) = 0$ no son invertibles. Esto es, la división por 0 no es una operación posible. Así,

$$\text{si el } \det(A) = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1} \in M_n(K)$$

5. Rango y determinantes

TEOREMA Sea $A \in M_n(K)$ entonces el $rg(A)$ coincide con el mayor orden de una submatriz cuadrada regular de A.

D La demostración se realiza a través de las propiedades de las matrices escalonadas reducidas por filas.

Ejemplo.- $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad rg(A) \geq 2$ ya que $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3 \neq 0$

De hecho, se prueba que $rg(A) = 2$

Nota.- Este aspecto es fundamental en geometría. Puesto que si $\det(A) = 0 \Rightarrow rg(A) < n$ (siendo $A \in M_n(K)$)

Luego, alguna de las filas es un vector que es combinación lineal de las filas ~~anteri~~ de la matriz.

6. Conclusiones

1h 30'