1 La raó àuria

1.1 Definició

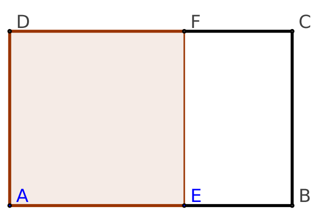
S'anomena *raó àuria*, *secció àuria* o *proporció àuria* a la relació que guarden dos segments a i b (en general, dues magnituds a i b) si entre el total i el segment major hi ha la mateixa relació que entre el segment major i el segment menor, és a dir, si el tot és al segment major com el major és al menor. Si anomenem a al segment major i b al menor, podem escriure algebraicament aquesta relació com

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}. \tag{1}$$

Aquest quocient és el que s'anomena *nombre auri* o *nombre d'or* i es designa per la lletra grega ϕ (fi) en honor a Fídies, l'escultor i arquitecte grec del Partenó. Podem calcular fàcilment el valor d'aquest quocient: si anomenem $x = \frac{a}{b}$ reescrivim l'equació (1) com

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \;\Leftrightarrow\; 1 + \frac{1}{x} = x \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

i prenem la solució positiva $\phi = (1+\sqrt{5})/2$, ja que l'hem definit com un quocient de mesures de segments. Així, veiem que ϕ és un nombre irracional en ser-ho $\sqrt{5}$.



Un *rectangle auri* és un rectangle els costats del qual estan en proporció àuria. Equivalentment, és aquell rectangle tal que si en retallem un quadrat màxim (veure figura de l'esquerra) obtenim un rectangle més petit de les mateixes proporcions que l'inicial. En efecte, si anomenem $AB = x$, $AD = y$, llavors $EF = y$ i $BE = x - y$. Si imposem que els rectangles $ABCD$ i $EBCF$ tinguin les mateixes proporcions, obtenim

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x-y},$$

i si anomenem $r = x/y$, podem reescriure aquesta relació com

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{x}{y} - 1} \;\Leftrightarrow\; r = \frac{1}{r-1} \;\Leftrightarrow\; r^2 - r - 1 = 0,$$

cosa que succeeix si i només si $r = \phi$.

1.2 Relació de ϕ amb la successió de Fibonacci

La successió de Fibonacci $\{F_n\}$ es defineix per recurrència:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ (n > 1).$$

Així, els primers termes de la successió són $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$. Ara veurem que aquesta successió guarda una estreta relació amb ϕ: per calcular les potències successives de ϕ fem servir la relació que abans hem vist que verifica, $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, o bé, multiplicant aquesta relació per ϕ^{n-2},

$$\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}, \tag{2}$$

això és, tota potència de ϕ és la suma de les dues immediatament anteriors (la mateixa relació de recurrència que en la successió de Fibonacci). Si amb això calculem les primeres potències:

$$\phi^0 = 1, \quad \phi^1 = \phi, \quad \phi^2 = \phi + 1, \quad \phi^3 = 2\phi + 1, \quad \phi^4 = 3\phi + 2, \quad \phi^5 = 5\phi + 3,\ \ldots$$

amb la qual cosa podem establir el següent resultat:

Proposició. *$\phi^n = F_n\phi + F_{n-1}$ per a tot $n \geq 1$.*

Demostració. Procedim per inducció sobre n. Ja ho hem comprovat per als primers valors de n. Suposem que és cert fins a n i provem que també ho és per a $n + 1$:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \phi^{n-1} = F_n\phi + F_{n-1} + F_{n-1}\phi + F_{n-2} = (F_n + F_{n-1})\phi + F_{n-1} + F_{n-2} = F_{n+1}\phi + F_n,$$

com volíem veure. $\square$

La solució negativa de l'equació $x^2 - x - 1 = 0$ és $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \phi$, i pel fet de ser solució també satisfà la mateixa relació de recurrència (2) que ϕ. Així doncs, amb un raonament idèntic podem concloure que també $(1 - \phi)^n = F_n(1 - \phi) + F_{n-1}$, amb la qual cosa

$$\phi^n - (1 - \phi)^n = F_n(\phi - (1 - \phi)) = F_n(2\phi - 1) = \sqrt{5}F_n,$$

cosa que ens permet expressar el terme general de la successió de Fibonacci mitjançant una fórmula tancada, no recurrent, en funció del nombre d'or:

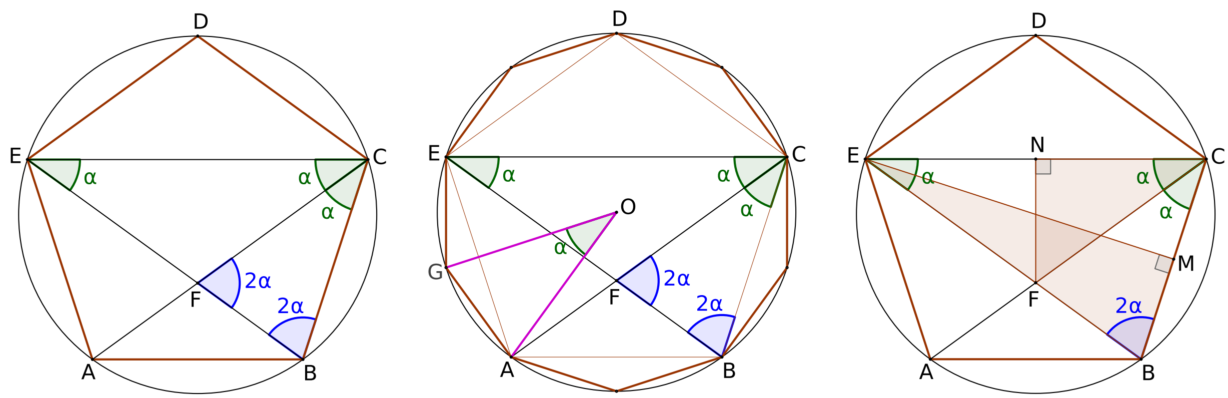
$$F_n = \frac{\phi^n - (1 - \phi)^n}{\sqrt{5}},$$

coneguda com *fórmula de Binet*. Com $|1 - \phi| < 1$, tenim que $(1 - \phi)^n \to 0$ quan $n \to +\infty$, de manera que F_n és asimptòticament equivalent a $\phi^n/\sqrt{5}$, i per tant el quocient de dos termes consecutius de la successió de Fibonacci, F_n/F_{n-1}, tindrà el mateix límit que $(\phi^n/\sqrt{5})/(\phi^{n-1}/\sqrt{5}) = \phi$. Més formalment,

$$\lim_n \frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_n \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\phi^{n-1} - (1-\phi)^{n-1}} = \lim_n \frac{\phi - (1-\phi)\left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^{n-1}}{1 - \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^{n-1}} = \phi,$$

perquè $\lim_n \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^{n-1} = 0$ en ser $\left|\frac{1-\phi}{\phi}\right| < 1$.

1.3 El nombre auri en el pentàgon i el decàgon regular



En un pentàgon regular $ABCDE$ de costat ℓ i diagonal d hi trobem les següents relacions angulars (veure la figura de l'esquerra): els angles $\angle BEC$, $\angle ACE$ i $\angle ACB$ són iguals en ser angles inscrits que abasten arcs de circumferència iguals; com aquests arcs mesuren $2\pi/5$, els angles mesuren $\alpha = \pi/5$. En conseqüència, en el triangle $\triangle EBC$ l'angle $\angle EBC$ val $\pi - 3\alpha = 2\alpha$ i també en $\triangle CFB$ tenim $\angle CFB = \pi - 3\alpha = 2\alpha$. D'altra banda, els angles ens diuen que els triangles $\triangle CFB$ i $\triangle CFE$ són isòsceles, de forma que $EF = FC = BC = \ell$, i que el triangle $\triangle CFB$ és semblant al $\triangle EBC$, amb la qual cosa podem establir la relació

$$\frac{EB}{BC} = \frac{CF}{FB},$$

i tenint en compte que $FB = EB - EF = d - \ell$, podem reescriure-la com

$$\frac{d}{\ell} = \frac{\ell}{d - \ell},$$

de manera que la diagonal està en proporció àuria amb el costat, això és, $d/\ell = \phi$.

En el decàgon (figura central) hi trobem la mateixa relació entre el radi $r = OA$ de la circumferència circumscrita i el costat AG, en ser $\angle AOG = 2\pi/10 = \pi/5 = \alpha$ i $\triangle AOG$ isòsceles, per tant, semblant a $\triangle EBC$. Així, $OA/AG = EB/BC = d/\ell = \phi$.

Finalment, podem deduir les raons trigonomètriques relacionades amb l'angle $\alpha = \pi/5$: en la figura de la dreta, dels triangles $\triangle CNF$ i $\triangle EMB$ deduïm, respectivament,

$$\cos\alpha = \frac{CN}{CF} = \frac{d/2}{\ell} = \frac{\phi}{2}, \qquad \cos 2\alpha = \frac{BM}{BE} = \frac{\ell/2}{d} = \frac{\phi^{-1}}{2} = \frac{\phi - 1}{2}.$$

1.4 ϕ en l'art, la natura i la vida quotidiana

Durant l'època del Renaixement es va crear una gran quantitat de literatura sobre l'estètica intrínseca del nombre d'or i s'encoratjà a pintors, escultors i altres artistes perquè l'introduïssin en les proporcions de les seves obres. Un dels treballs més importants en aquest sentit és *De Divina Proportione* (s. XVI), de **Luca Pacioli**, amb il·lustracions de **Leonardo da Vinci**. Tanmateix, les proporcions que involucren ϕ ja apareixen en èpoques molt anteriors en obres com la piràmide de Keops o la façana del Partenó, tot i que d'aquelles èpoques no hi ha cap constància explícita de les atribucions estètiques de la proporció àuria. En el s. XX l'arquitecte suís **Le Corbusier** centrà la filosofia dels seus dissenys en el nombre d'or; també **Salvador Dalí** l'emprà en alguns dels seus quadres, com ara *Leda Atòmica* i *l'Últim Sopar*. La seu de l'ONU a Nova York és un gran prisma amb una de les seves cares en forma de rectangle auri.

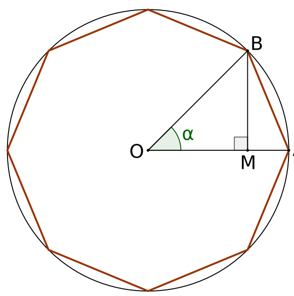
En la natura trobem ϕ en les proporcions de l'espiral logarítmica que conforma la closca del cargol *nautilus* (formada a partir de rectangles auris encaixats), en la proporció entre mascles i femelles en les colònies d'abelles, en la disposició dels pètals de les flors i de les fulles d'algunes plantes, en les espirals de les pinyes, etcètera. Moltes d'aquestes aparicions de ϕ en la natura són degudes a l'estreta relació que té amb la successió de Fibonacci.

En la vida quotidiana, seguint els models estètics de la proporció àuria, trobem diversos objectes dissenyats d'acord amb aquestes proporcions: targetes de crèdit, carnets, postals, naips, paquets de tabac, etcètera.

2 La proporció cordovesa

Euclides (s. IV-III A.C.) fou el primer en parlar de la raó àuria en els seus *Elements*. Durant tota l'Edat Mitjana, la ciutat de Còrdova fou la dipositària de l'única còpia coneguda dels

Elements (en àrab) fins que a finals del s. XV se'n publicà una edició en llatí. Aquest fet va propiciar que es duguessin a terme uns estudis per verificar l'existència de proporcions àuries en l'arquitectura cordovesa prerenaixentista: l'any 1951 la diputació de Còrdova va demanar a estudiants d'arquitectura que cerquessin aquesta proporció en monuments i edificis de la ciutat. Per sorpresa de tothom, es descobrí una altra proporció que es repetia amb molta més assiduïtat que l'àuria, d'un valor numèric aproximat a 1.3, lluny del $1.6 \simeq \phi$. Altres tests realitzats sobre la població també revelaren que, per a la majoria, el rectangle de proporcions més harmonioses era menys esvelt que l'auri, i tornava a aparèixer la misteriosa raó 1.3.



Hem vist que ϕ és la raó entre el radi de la circumferència i el costat del decàgon inscrit. Calculem la mateixa raó en l'octàgon: en la figura, $r = OA = OB$, $\ell = AB$ i $\alpha = \pi/4$, de manera que $OM = BM$. Aplicant el teorema de Pitàgores a $\triangle OBM$, trobem que $OM = BM = r\frac{\sqrt{2}}{2}$, i altre cop per Pitàgores sobre $\triangle AMB$ obtenim $AB^2 = BM^2 + AM^2$, això és,

$$\ell^2 = \left(r\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(r - r\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = r^2(2-\sqrt{2}),$$

de manera que

$$\frac{r}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \simeq 1.3066.$$

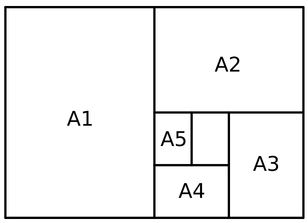
En l'arquitectura cordovesa (per exemple, en la mesquita) abunden els octàgons regulars i, amb ells, aquesta proporció. És per això, i pels descobriments de què hem parlat abans, que es batejà amb el nom de *raó* o *proporció cordovesa*. Estudis recents mostren que, lluny de ser un fet que es creia aïllat, molta gent arreu del món considera més harmoniós el rectangle cordovès que l'auri, de la mateixa forma que la raó cordovesa apareix en un gran nombre d'obres d'art.

3 Les proporcions dels fulls DIN-A

Les mesures dels fulls de paper que emprem habitualment es basen en els estàndards europeus DIN, establerts el 1922. Concretament, a l'hora de definir la sèrie **DIN-A** es va decidir que

- tots els fulls de la sèrie tindrien les mateixes proporcions, cosa que és bàsica a l'hora de fer ampliacions i reduccions de textos,

- cada full de la sèrie s'obtindria tallant per la meitat l'immediatament anterior, d'aquesta manera no es malbarataria cap retall de paper,
- el primer full de la sèrie, el més gros, seria el **DIN A0** i tindria $1\,\mathrm{m}^2$ de superfície.



Així, si el rectangle més gran de la figura és un **DIN A0**, en tallar-lo per la meitat obtenim dos **DIN A1**; en tallar un d'aquests obtenim dos **DIN A2**, i així successivament. Per expressar això algebraicament, anomenem x a la mesura del costat llarg d'un full i y al costat curt. Aleshores ha de passar

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x/2},$$

o, de forma equivalent, $x^2 = 2y^2$, això és, $x = \sqrt{2}y$.

El full a què més acostumats estem és el **DIN A4** que resulta de tallar 4 cops un **DIN A0**, per tant tindrà una superfície de $2^{-4}\,\mathrm{m}^2$. Amb les notacions anteriors,

$$xy = 2^{-4} \;\Rightarrow\; 2^{1/2}y^2 = 2^{-4} \;\Rightarrow\; y = 2^{-9/4} \simeq 0.210 \text{ m},\; x = 2^{-7/4} \simeq 0.297 \text{ m},$$

això és, $210\,\mathrm{mm} \times 297\,\mathrm{mm}$, cosa que podem confirmar fàcilment mesurant-lo amb un regle.

4 Quart harmònic i mitjana proporcional

Si A, B, C són tres punts alineats i diferents, definim la *raó simple* de A, B, C, i la notem per (ABC) com

$$\lambda = (ABC) = \begin{cases} -\frac{AC}{BC} & \text{si } C \text{ es troba entre } A \text{ i } B, \\ +\frac{AC}{BC} & \text{si } C \text{ no es troba entre } A \text{ i } B, \end{cases}$$

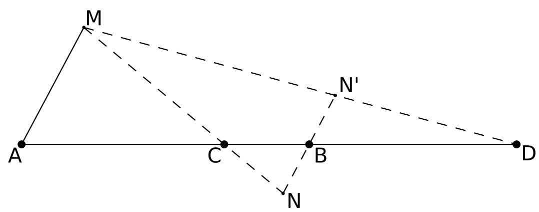
és a dir, amb notació vectorial podem dir que és l'escalar λ que verifica $\vec{AC} = \lambda \vec{BC}$.

Definim la *raó doble* de quatre punts A, B, C, D alineats i diferents com

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)},$$

i diem que formen una *quaterna harmònica* si $(ABCD) = -1$, això és, si les raons dobles (ABC) i (ABD) són oposades.

Donats A, B, C alineats amb C entre A i B, veiem com podem construir amb regle i compàs el quart harmònic D, això és, el punt D tal que $(ABCD) = -1$.



Triem un punt M arbitrari fora de la recta AB i tracem les rectes AM i CM. Tracem la paral·lela a AM per B, que tallarà CM en un punt N. Triem N' sobre la recta BN tal que $BN = BN'$. Llavors, la recta MN' talla AB en el punt D que cerquem.

En efecte, si anomenem $m = AM$ i $n = BN = BN'$, com els triangles $\triangle AMC$ i $\triangle CNB$ són semblants tenim que $AC/BC = AM/BN = m/n$, i com $\triangle AMD$ i $\triangle BN'D$ també són semblants, tenim $AD/BD = AM/BN' = m/n$, de manera que

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{-AC/BC}{AD/BD} = \frac{-m/n}{m/n} = -1,$$

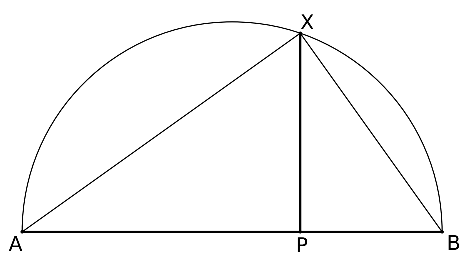
perquè C està entre A i B, i, per construcció, D no ho està.

Si partim de A, B, C alineats, on ara C no està entre A, B, la construcció per trobar el quart harmònic D és exactament la mateixa que hem descrit.

Donades dues magnituds a i b, diem que x és *mitjana proporcional* de a i b si

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b},$$

això és, $x^2 = ab$ o $x = \sqrt{ab}$, de manera que la mitjana proporcional de a i b és també la mitjana geomètrica.



Donats dos segments que mesuren a i b respectivament, ara veurem com podem construir un segment que mesuri la mitjana proporcional: siguin $a = AP$ i $b = PB$ els dos segments, que dibuixem contigus amb l'extrem P en comú, com mostra la figura. Amb centre en el punt mig entre A i B tracem una semicircumferència, tracem la perpendicular a AB per P i anomenem X la intersecció d'aquesta perpendicular amb la semicircumferència. L'angle inscrit $\angle AXB$ és recte perquè abasta mitja circumferència, i llavors, si anomenem $x = PX$, pel teorema de l'altura tenim que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b},$$

que és el que volíem veure.

5 El nombre π

No podíem acabar aquesta exposició sense parlar de la raó més famosa i universalment coneguda: el nombre π, també anomenat *constant d'Arquimedes*, que es defineix com la raó de la longitud d'una circumferència entre el seu diàmetre.

El seu valor aproximat és 3.1415926535. El s. XVIII Lambert demostrà que π és irracional i el s. XIX Lindemann en provà la seva transcendència, això és, que π no és l'arrel de cap polinomi a coeficients racionals. Amb això quedà tancat un dels problemes clàssics de l'antiguitat: el de la impossibilitat de la quadratura del cercle. Quadrar el cercle equivalia a construir amb regle i compàs un segment de mesura $\sqrt{\pi}$, però si π no era algebraic, tampoc no ho era $\sqrt{\pi}$ i per tant no podia ésser construïble (es demostra que tot nombre construïble és algebraic).

Un dels grans reptes al llarg de la història de les Matemàtiques ha estat trobar aproximacions decimals cada cop millors al valor exacte de π. El primer en abordar-ho d'una manera rigorosa fou Arquimedes, fitant el valor de π entre els perímetres de polígons regulars inscrits i circumscrits a una circumferència de diàmetre unitat. Un avenç essencial en l'estudi de π arribà amb el càlcul infinitesimal, en particular amb el descobriment de les sèries, que permeté calcular-lo amb una precisió desitjada simplement afegint una quantitat de termes prou gran. En l'era actual, i amb l'ajut de les supercomputadores, s'empren sèries de convergència molt ràpida per obtenir milers de milions de decimals de π.

Algunes expressions famoses que involucren el nombre π:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \text{ (fórmula de Leibniz)}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots \text{ (producte de Wallis)}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \text{ (Euler)}$$

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \text{ (integral de Gauss)}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \text{ (identitat d'Euler)}$$