1 Espais vectorials

1.1 Definició

Definició. Sigui K un cos commutatiu. Un *espai vectorial E sobre K*, o *K-espai vectorial* (en endavant "K-e.v."), és un conjunt no buit E amb

a) una operació interna "+" que anomenem *suma*, amb la qual $(E, +)$ és un grup commutatiu (anomenem $\vec{0}$ l'element neutre, i donat $u \in E$ anomenem $-u$ l'oposat de u, això és, $u + (-u) = \vec{0}$),

b) una operació externa "·" que anomenem *producte per escalars de K* que compleix

- $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v \quad \forall a \in K, \forall u, v \in E$
- $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u \quad \forall a, b \in K, \forall u \in E$
- $(ab) \cdot u = a \cdot (b \cdot u) \quad \forall a, b \in K, \forall u \in E$
- $1 \cdot u = u \quad \forall u \in E$, on 1 és la unitat de K.

Els elements de E s'anomenen *vectors*, i els de K, *escalars*. Notarem $u + (-v)$ com $u - v$ i en endavant prescindirem del punt "·" en escriure una operació externa, això és, $au = a \cdot u$. De la definició es desprenen unes propietats elementals:

- $0v = \vec{0}$, ja que $0v = (0 + 0)v = 0v + 0v \Rightarrow 0v = \vec{0}$ sumant $-0v$ als dos membres.
- $a\vec{0} = \vec{0}$, ja que $a\vec{0} = a(\vec{0} + \vec{0}) = a\vec{0} + a\vec{0} \Rightarrow a\vec{0} = \vec{0}$ sumant $-a\vec{0}$ als dos membres.
- $av = \vec{0} \Rightarrow a = 0$ o $v = \vec{0}$, doncs si $a \neq 0$ existeix a^{-1} i $v = a^{-1}av = a^{-1}\vec{0} = \vec{0}$.
- $(-1)v = -v$, ja que $v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0v = \vec{0}$.

Exemples d'e.v.

- K^n, que són les n-tuples $(x_1, \ldots, x_n)$ amb $x_i \in K$, és un K-e.v. amb la suma $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ i, donat $a \in K$, el producte per escalar $a(x_1, \ldots, x_n) = (ax_1, \ldots, ax_n)$.
- El conjunt de les solucions $(s_1, \ldots, s_n)$ d'un sistema homogeni de m equacions lineals amb n incògnites, amb coeficients a K és un K-e.v., definint la suma i el producte per escalars com en l'exemple anterior, ja que la suma de dues solucions i el producte d'una solució per un escalar de K també són solucions.

1.2 Subespais vectorials

Definició. Sigui E un K-e.v. Un conjunt no buit $F \subset E$ s'anomena *subespai vectorial de* E (en endavant "s.e.v.") si $\forall u, v \in F \Rightarrow u + v \in F$, i $\forall a \in K, \forall u \in F \Rightarrow au \in F$. Aquestes dues condicions es solen sintetitzar en una de sola escrivint $au + v \in F$.

Definició. Diem que un vector u és *combinació lineal* (en endavant "c.l.") dels vectors $u_1, \ldots, u_n$ si existeixen escalars $a_1, \ldots, a_n$ tals que $u = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$. Si E és un K-e.v. i $S \subset E$ notem com $\langle S \rangle$ el conjunt de totes les c.l. d'elements de S.

Proposició. *$\langle S \rangle$ és el s.e.v. més petit que conté S.*

Demostració: És clar que $\langle S \rangle$ és s.e.v. ja que la suma de dues c.l. és una c.l., a l'igual que ho és el producte d'un escalar per una c.l. A més, si F és un s.e.v. que conté S, pel fet de ser s.e.v. ha de contenir qualsevol c.l. d'elements de S, això és, conté $\langle S \rangle$. $\square$

Definició. Si $\langle S \rangle = F$ diem que S és un *sistema de generadors* de F, o que S *genera* F.

Exemple. El conjunt $F = \{(x + y, 2y, x - y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ és un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, i tot element de F es pot escriure com $x(1, 0, 1) + y(1, 2, -1)$, per tant $F = \langle (1, 0, 1), (1, 2, -1) \rangle$.

Definició. En alguns textos el concepte de *varietat lineal* és sinònim a "subespai vectorial", però el més habitual és trobar aquest concepte en el context dels espais afins: un *espai afí sobre un cos* K és una terna (A, E, φ) on E és un K-e.v. i φ és una aplicació $\varphi : A \times A \longrightarrow E$ tal que $\varphi(p, q) + \varphi(q, r) = \varphi(p, r)$ i per a cada $p \in A$ l'aplicació $\varphi_p : A \longrightarrow E$ definida per $\varphi_p(q) = \varphi(p, q)$ és bijectiva. Llavors, si F és un s.e.v. de E i $a \in A$, anomenem *varietat lineal que passa per a i té direcció F* al subconjunt $\{b \in A \mid \varphi(a, b) \in F\}$, i es nota $a + F$.

1.3 Bases d'un espai vectorial

Definició. Un conjunt de vectors S es diu *linealment independent* (en endavant "l.i.") si tota c.l. nul·la de vectors de S té tots els coeficients nuls, això és, $a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = \vec{0}$ amb $v_i \in S \;\Rightarrow\; a_1 = \cdots = a_m = 0$. En cas contrari diem que és *linealment dependent* (en endavant "l.d.").

Proposició. *$v_1, \ldots, v_m$ són l.d. $\Leftrightarrow$ un dels v_i és c.l. dels altres.*

Demostració: Si $v_1, \ldots, v_m$ són l.d. existeix una c.l. nul·la $a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = \vec{0}$ amb algun $a_i \neq 0$, que podem suposar que és el a_1 reordenant si cal els vectors. Llavors existeix a_1^{-1} i podem escriure $v_1 = -a_1^{-1}a_2v_2 - \cdots - a_1^{-1}a_mv_m$.

Recíprocament, si un v_i és c.l. dels altres (que, reordenant, podem suposar que és el v_1) tenim que $v_1 = a_2v_2 + \cdots + a_mv_m$ i per tant $v_1 - a_2v_2 - \cdots - a_mv_m = \vec{0}$ és una c.l. nul·la amb el primer coeficient no nul, de manera que $v_1, \ldots, v_m$ són l.d. $\square$

Definició. Una *base* B d'un K-e.v. E és un conjunt de vectors l.i. tal que $\langle B \rangle = E$.

Proposició. *$B \subset E$ és una base $\Leftrightarrow$ tot vector de E s'expressa de forma única com una c.l. d'elements de B.*

DEMOSTRACIÓ: Com $\langle B \rangle = E$ tot vector $u \in E$ serà c.l. d'elements de E. Si tenim dues c.l., $u = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n = b_1u_1 + \cdots + b_nu_n$ amb $u_i \in B$ (podem suposar que apareixen els mateixos u_i al les dues c.l., completant amb coeficients iguals a 0 on calgui) llavors podem escriure $(a_1 - b_1)u_1 + \cdots + (a_n - b_n)u_n = 0$ i com els u_i són l.i. tindrem $a_i - b_i = 0$ per tots els i, això és, $a_i = b_i$, i les dues c.l. són iguals.

Recíprocament, si tot vector de E és c.l. d'elements de B tenim que $\langle B \rangle = E$. A més, tota c.l. nul·la d'elements de B, $a_1u_1 + \cdots + a_nu_n = \vec{0}$, tindrà tots els $a_i = 0$, ja que el $\vec{0}$ també es pot escriure com $0u_1 + \cdots + 0u_n = \vec{0}$ i per hipòtesi les dues c.l. són iguals. $\square$

Teorema (de Steinitz). *Si $u_1, \ldots, u_n$ és una base de E i $v_1, \ldots, v_m$ són vectors l.i., aleshores es poden substituir m vectors de la base $u_1, \ldots, u_n$ per $v_1, \ldots, v_m$ obtenint una nova base. En particular, $m \leq n$.*

DEMOSTRACIÓ: Es tracta d'anar introduint els v_i un a un en substitució dels u_i. Com els $\{u_i\}$ formen una base podem escriure $v_1 = \sum_i a_iu_i$ i com v_1 és no nul (doncs els $\{v_i\}$ són l.i.) hi ha algun coeficient $a_i \neq 0$, que, reordenant, podem suposar que és a_1. Llavors existeix a_1^{-1} i podem expressar u_1 com $u_1 = a_1^{-1}v_1 - \sum_{i=2}^n a_1^{-1}a_iu_i$, de forma que $\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle = \langle v_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$, i aquest sistema de generadors és l.i. En efecte,

$$b_1v_1 + b_2u_2 + \cdots + b_nu_n = \vec{0} \Rightarrow b_1 \left(\sum_{i=1}^n a_iu_i \right) + b_2u_2 + \cdots + b_nu_n = \vec{0} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_1a_1u_1 + \left(\sum_{i=2}^n (b_1a_i + b_i)u_i \right) = \vec{0} \ \Rightarrow \ b_1a_1 = 0, \ b_1a_i + b_i = 0 \ \forall i = 2, \ldots, n$$

i com $a_1 \neq 0$ tenim $b_1 = 0$ i per tant $b_i = 0$ per $i > 1$. Així $v_1, u_2, \ldots, u_n$ és una base de E.

Suposem que ja hem substituït k vectors de la base per $v_1, \ldots, v_k$. Reordenant si cal podem suposar que han estat els k primers i tenim doncs que $v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$ és una base de E. Procedint igual que abans podem escriure $v_{k+1} = \sum_{i=1}^k a_iv_i + \sum_{i=k+1}^n a_iu_i$, i podrem substituir per v_{k+1} qualsevol vector d'aquesta expressió que tingui un coeficient no nul. Així cal veure que algun dels a_i per $i > k$ és no nul, i efectivament, si fos $a_{k+1} = \cdots = a_n = 0$ tindríem que v_{k+1} és c.l. dels v_i anteriors, en contra de la hipòtesi. $\square$

Corol·lari. *Si un e.v. E té una base finita, totes les bases de E tenen el mateix número d'elements.* □

Aquests últims resultats fan que la següent definició tingui sentit:

Definició. Si E és un e.v. que té una base finita anomenem *dimensió de E* al nombre d'elements de les seves bases. En cas contrari diem que E té dimensió infinita.

Observació. Donarem per cert un important resultat de l'àlgebra lineal, que és que *tot e.v. té una base*. Aquest fet és d'immediata demostració en un e.v. generat per un nombre finit d'elements, però per a provar-ho en e.v. no finitament generats cal basar-se en el lema de Zorn (equivalent a l'axioma de l'elecció), que ens diu que tot conjunt no buit, parcialment ordenat i inductiu (això és, tot subconjunt totalment ordenat és fitat), té algun element maximal. Una altra conseqüència important del lema de Zorn és que *totes les bases d'un e.v. no finitament generat tenen la mateixa cardinalitat*, això és, es poden posar en correspondència bijectiva.

1.4 Suma i intersecció de subespais vectorials

Definició. Si F i G són s.e.v. de E anomenem *suma* de F i G, i ho notem $F+G$, al conjunt $\{u+v \mid u \in F,\ v \in G\}$.

Proposició. *Si F i G són s.e.v. de E llavors $F \cap G$ i $F+G$ també són s.e.v. A més, $F+G$ és el s.e.v. més petit que conté a $F \cup G$.*

Demostració: Si $u, v \in F \cap G \Rightarrow u, v \in F$, $u, v \in G$, i per ser F i G s.e.v. tindrem que $u+v \in F$, $u+v \in G$, i també $au \in F$, $au \in G$ per a tot $a \in K$. Per tant, $u+v$, $au \in F \cap G$. Ara, si $w, w' \in F+G$ podem escriure $w = u+v$, $w' = u'+v'$ amb $u, u' \in F$, $v, v' \in G$, i llavors $w+w' = (u+u')+(v+v') \in F+G$, $aw = au+av \in F+G$ per a $a \in K$. Finalment, qualsevol s.e.v. que contingui a $F \cup G$, pel fet de ser s.e.v. haurà de contenir qualsevol c.l. de vectors de F i G, i en particular contindrà a $F+G$. □

Teorema (fórmula de Grassman). *Si F, G són s.e.v. d'un K-e.v. E de dimensió finita, llavors $F, G, F \cap G$ i $F+G$ també són de dimensió finita, i verifiquen la següent relació:* $\dim F + \dim G = \dim(F+G) + \dim(F \cap G)$.

Demostració: Del teorema de Steinitz es desprèn immediatament que tot s.e.v. d'un e.v. de dimensió finita n té com a màxim dimensió n, ja que no podem tenir més de n vectors l.i. També es dedueix que tot conjunt l.i. de vectors es pot completar fins a formar una base. Així doncs sigui $u_1, \ldots, u_m$ una base de $F \cap G$ i completem-la fins a tenir una base de F, $u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_r$, i una base de G, $u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_s$. Si aconseguim veure que $u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_r, v_{m+1}, \dots, v_s$ és una base de $F+G$ ja tindrem la relació que cerquem. Com hem obtingut aquests elements unint les bases de F i G és clar que generen $F+G$, per tant només cal veure que són l.i. Sigui doncs

$$\sum_{i=1}^{r} a_i u_i + \sum_{i=m+1}^{s} b_i v_i = \vec{0} \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{r} a_i u_i = -\sum_{i=m+1}^{s} b_i v_i \in F \cap G$$

doncs segons aquesta igualtat, aquest vector s'expresa com una c.l. tant de vectors de F com de vectors de G. Per tant el podrem escriure com una c.l. de la base de $F \cap G$: $-\sum_{i=m+1}^{s} b_i v_i = \sum_{i=1}^{m} c_i u_i$, això és, $\sum_{i=1}^{m} c_i u_i + \sum_{i=m+1}^{s} b_i v_i = \vec{0}$. Però això és una c.l. nul·la dels vectors de la base de G, i per tant tindrem $c_j = 0$, $b_i = 0$, de forma que, tornant a la c.l. inicial, tindrem $\sum_{i=1}^{r} a_i u_i = \vec{0}$, amb la qual cosa també els $a_i = 0$ (ja que és una c.l. nul·la de la base de F). Per tant la c.l. inicial té tots els coeficients nuls, de manera que els vectors són l.i. □

1.5 Espai vectorial quocient

Definició. Sigui E un K-e.v. i F un s.e.v. de E. Definim la següent relació a E: diem que $u, v \in E$ estan *relacionats mòdul* F si $u - v \in F$. El fet que F sigui un s.e.v. fa que la relació així definida sigui d'equivalència, i llavors podem formar el conjunt quocient que notarem per E/F.

La classe d'un vector $u \in E$ serà el conjunt $[u] = \{u + v \mid v \in F\}$, que també notarem com $u + F$. Observem que, si u, v estan relacionats mòdul F amb u', v' respectivament (això és, $[u] = [u']$, $[v] = [v']$) llavors també $u + v$ està relacionat amb $u' + v'$. Això fa que puguem definir a E/F una suma i un producte per escalars que no depengui dels representants:

$$[u] + [v] = [u + v] \quad , \quad a[u] = [au]$$

per a tot $u, v \in E$, $a \in K$. Aquestes operacions doten E/F d'estructura de K-e.v.

Proposició. *Si E és un K-e.v. de dimensió finita i F és un s.e.v. de E, llavors E/F també té dimensió finita i $\dim(E/F) = \dim E - \dim F$.*

DEMOSTRACIÓ: Partim d'una base $u_1, \dots, u_m$ de F i completem-la fins a obtenir una base de E, $u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n$. Com $u_i \in F$ per $1 \leq i \leq m$, tenim que $[u_i] = [\vec{0}]$. Llavors anem a provar que $[u_{m+1}], \dots, [u_n]$ formen una base de E/F. En efecte, són un sistema de generadors, ja que si $[u] \in E/F$, el vector $u \in E$ s'escriu com $u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$, i llavors prenent classes, $[u] = \sum_{i=1}^{n} a_i [u_i] = \sum_{i=m+1}^{n} a_i [u_i]$. També són l.i., ja que

$$\sum_{i=m+1}^{n} a_i [u_i] = [\vec{0}] \;\Rightarrow\; \left[\sum_{i=m+1}^{n} a_i u_i\right] = [\vec{0}] \;\Rightarrow\; \sum_{i=m+1}^{n} a_i u_i \in F \;\Rightarrow\; \sum_{i=m+1}^{n} a_i u_i = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i,$$

i agrupant els dos sumatoris en un membre, tenim una c.l. nul·la dels vectors de la base de E, per tant tots els coeficients són nuls, en particular els a_i, cosa que ens diu que els $[u_i]$, $i = m+1, \ldots, n$, són l.i. $\square$

2 Aplicacions lineals

2.1 Definició

Definició. Siguin E, F dos K-e.v. Una aplicació $f : E \longrightarrow F$ es diu *aplicació lineal* (en endavant "a.l.") si respecta les estructures vectorials, és a dir, $f(u+v) = f(u) + f(v)$ i $f(au) = af(u)$ per a tot $u, v \in E$, $a \in K$. Aquestes dues condicions es solen sintetitzar en una de sola escrivint $f(au+v) = af(u) + f(v)$.

De la definició es dedueixen unes propietats elementals:

- $f(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(u_i)$ per a $u_i \in E$, $a_i \in K$.
- $f(\vec{0}) = \vec{0}$, doncs $f(\vec{0}) = f(0u) = 0f(u) = \vec{0}$.
- $f(-u) = -f(u)$, ja que $f(u) + f(-u) = f(u + (-u)) = f(\vec{0}) = \vec{0}$.
- Si $f : E \longrightarrow F$ i $g : F \longrightarrow G$ són lineals, també ho és $g \circ f : E \longrightarrow G$, ja que $(g \circ f)(au+v) = g(f(au+v)) = g(af(u) + f(v)) = ag(f(u)) + g(f(v)) = a(g \circ f)(u) + (g \circ f)(v)$.

Uns exemples de a.l.:

- Si F és un s.e.v. de E l'aplicació $f : E \longrightarrow E/F$ definida per $f(u) = [u]$ és lineal, doncs ja sabem que $[au+v] = a[u] + [v]$.
- Si $a_i^j \in \mathbb{R}$ amb $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, llavors l'aplicació $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida per $f(x_1, \ldots, x_n) = (\sum_{i=1}^{n} a_i^1 x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_i^m x_i)$ és lineal.

Proposició. *Sigui $f : E \longrightarrow F$ una a.l., G un s.e.v. de E i H un s.e.v. de F. Llavors $f(G)$ és un s.e.v. de F i $f^{-1}(H)$ és un s.e.v. de E.*

Demostració: $f(G) = \{v \in F \mid v = f(u) \text{ per algun } u \in G\}$. Si $v_1, v_2 \in f(G)$ existeixen $u_1, u_2 \in G$ tals que $v_1 = f(u_1), v_2 = f(u_2)$ i aleshores, en ser f a.l. i G s.e.v., tenim que, si $a \in K$, $av_1 + v_2 = af(u_1) + f(u_2) = f(au_1 + u_2) \in f(G)$, doncs $au_1 + u_2 \in G$.

Ara, $f^{-1}(H) = \{u \in E \mid f(u) \in H\}$. Siguin $u_1, u_2 \in f^{-1}(H)$, això és, $f(u_1), f(u_2) \in H$. Llavors, $f(au_1 + u_2) = af(u_1) + f(u_2) \in H$ per ser H s.e.v., per tant $au_1 + u_2 \in f^{-1}(H)$.$\square$

2.2 Nucli i imatge d'una aplicació lineal

Definició. Sigui $f : E \longrightarrow F$ una a.l. El *nucli de* f és el conjunt $\ker f = \{u \in E \mid f(u) = \vec{0}\}$. La *imatge de* f és el conjunt $\mathrm{Im} f = \{v \in F \mid v = f(u) \text{ per algun } u \in E\}$.

Proposició. *El conjunt* $\ker f$ *és un s.e.v. de* E*, i* $\mathrm{Im} f$ *és un s.e.v. de* F.

Demostració: És conseqüència immediata de l'última proposició, doncs $\ker f = f^{-1}(\{\vec{0}\})$ i $\mathrm{Im} f = f(E)$, éssent $\{\vec{0}\}$ i E els s.e.v. trivials de E. $\square$

Proposició. *Si* $f : E \longrightarrow F$ *és una a.l. i* E *és de dimensió finita, llavors* $\ker f$ *i* $\mathrm{Im} f$ *també són de dimensió finita i* $\dim E = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f$.

Demostració: Com $\ker f$ és un s.e.v. de E, té dimensió finita. Sigui $u_1, \ldots, u_m$ una base de $\ker f$ i completem-la fins a una base de E: $u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n$. Ara, $f(u_i) = \vec{0}$ per $i \leq m$, i anem a comprovar que $f(u_{m+1}), \ldots, f(u_n)$ formen una base de $\mathrm{Im} f$. En efecte, si $v \in \mathrm{Im} f$ $\exists u \in E$ tal que $f(u) = v$, però u és c.l. de la base de E: $u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$, de manera que $v = f(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(u_i) = \sum_{i=m+1}^{n} a_i f(u_i)$, per tant són generadors de $\mathrm{Im} f$. També són l.i., ja que

$$\vec{0} = \sum_{i=m+1}^{n} a_i f(u_i) = f\left(\sum_{i=m+1}^{n} a_i u_i\right) \Rightarrow \sum_{i=m+1}^{n} a_i u_i \in \ker f \Rightarrow \sum_{i=m+1}^{n} a_i u_i = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i,$$

i agrupant els dos sumatoris en un membre, tenim una c.l. nul·la dels vectors de la base de E, per tant tots els coeficients són nuls, en particular els a_i, cosa que ens diu que els $f(u_i)$, $i = m+1, \ldots, n$, són l.i. $\square$

Proposició. *Una a.l.* f *és injectiva* $\Leftrightarrow \ker f = \{\vec{0}\}$. *Una a.l.* f *és exhaustiva* $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = F$.

Demostració: La segona afirmació no és altra cosa que la definició d'exhaustivitat. Per veure la primera, suposem que f és injectiva i $f(u) = \vec{0}$. Com també $f(\vec{0}) = \vec{0}$ ha de ser $u = \vec{0}$. Recíprocament, sigui $\ker f = \{\vec{0}\}$ i $f(u) = f(v)$. Llavors $f(u - v) = \vec{0}$, de manera que $u - v \in \ker f \Rightarrow u - v = \vec{0} \Rightarrow u = v$. $\square$

2.3 Teoremes d'isomorfia

Definició. Diem que dos e.v. E, F són *isomorfs*, i ho escrivim com $E \cong F$, si existeix una a.l. bijectiva $f : E \longrightarrow F$, que anomenem *isomorfisme.*

Proposició. *Dos e.v. de dimensió finita E, F són isomorfs $\Leftrightarrow$ $\dim E = \dim F$.*

Demostració: Si existeix $f : E \longrightarrow F$ isomorfisme, com a conseqüència dels dos últims resultats $\ker f = \{\vec{0}\}$ i $\mathrm{Im} f = F$, de manera que $\dim E = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = 0 + \dim F$. Recíprocament, si ambdós e.v. tenen igual dimensió, sigui $u_1, \ldots, u_n$ una base de E i $v_1, \ldots, v_n$ una base de F, i definim l'a.l. f com $f(u_i) = v_i$ $\forall i = 1, \ldots, n$, de manera que $f(\sum_{i=1}^n a_i u_i) = \sum_{i=1}^n a_i v_i$. Així definida, f és clarament exhaustiva, i per provar la injectivitat només cal notar que si $f(u) = \vec{0}$ amb $u = \sum_{i=1}^n a_i u_i$, llavors $\sum_{i=1}^n a_i v_i = \vec{0}$, cosa que implica que tots els a_i són nuls al ser l.i. els v_i, i per tant $u = \vec{0}$. $\square$

Teorema (d'isomorfia). *Si $f : E \longrightarrow F$ és una a.l. llavors $E/\ker f \cong \mathrm{Im} f$.*

Demostració: Definim l'aplicació $\phi : E/\ker f \longrightarrow \mathrm{Im} f$ per $\phi([u]) = f(u)$. Aquesta aplicació està ben definida, és a dir, si u i u' són dos representants diferents de la mateixa classe a $E/\ker f$, aleshores $u - u' \in \ker f \Rightarrow f(u - u') = \vec{0} \Rightarrow f(u) = f(u')$, això és, $\phi([u]) = \phi([u'])$. A més, ϕ és a.l., doncs $\phi(a[u] + [v]) = \phi([au + v]) = f(au + v) = af(u) + f(v) = a\phi([u]) + \phi([v])$. Està clar que ϕ és exhaustiva, doncs tot $v \in \mathrm{Im} f$ és $v = f(u) = \phi([u])$, i també és injectiva, ja que $[u] \in \ker \phi \Rightarrow \vec{0} = \phi([u]) = f(u) \Rightarrow u \in \ker f \Rightarrow [u] = [\vec{0}]$. $\square$

Corol·lari 1. *Si F, G són s.e.v. de E llavors $(F + G)/F \cong G/(F \cap G)$.*

Demostració: L'aplicació $f : G \longrightarrow (F + G)/F$, definida per $f(u) = [u]$, és lineal, doncs $f(au + v) = [au + v] = a[u] + [v] = af(u) + f(v)$. El seu nucli són els $u \in G$ tals que $\vec{0} = f(u) = [u]$, això és, $u \in F$, per tant $\ker f = F \cap G$. D'altra banda, f és exhaustiva, ja que donat $[w]$ el podem escriure com $w = u + v$ amb $u \in F, v \in G$ i llavors $[w] = [u] + [v] = [v] = f(v)$. El teorema d'isomorfia aplicat a f ens dóna el què cercàvem. $\square$

Corol·lari 2. *Si $F \subset G$ són s.e.v. de E llavors $(E/F)/(G/F) \cong E/G$.*

Demostració: Primer cal observar que com G és un s.e.v. de E, tenim $G/F \subset E/F$ i podem construir aquest e.v. quocient. Definim llavors $f : E/F \longrightarrow E/G$ per $f([u]) = \bar{u}$, on $[u]$ representa la classe d'equivalència de u dins E/F, i $\bar{u}$ és la classe de u a E/G. L'aplicació està ben definida, doncs $[u] = [u'] \Rightarrow u - u' \in F \Rightarrow u - u' \in G \Rightarrow \bar{u} = \bar{u}'$, és a dir, $f([u]) = f([u'])$. A més, f és clarament lineal i exhaustiva (una antiimatge de $\bar{u}$ és $[u]$), i el seu nucli són els $[u]$ tals que $\vec{0} = f([u]) = \bar{u}$, això és, $u \in G$. Per tant $\ker f = G/F$, i aplicant el teorema d'isomorfia a f obtenim l'isomorfisme de l'enunciat. $\square$

Observació. Cal notar que, si els e.v. que considerem són de dimensió finita, aquests tres últims resultats sobre isomorfia es demostren immediatament a partir de les fórmules de dimensions vistes al llarg del tema, i del fet que dos e.v. de dimensió finita són isomorfs si i només si llurs dimensions coincideixen.

Així doncs, $\dim(E/\ker f) = \dim E - \dim\ker f = \dim \mathrm{Im} f$ i per tant $E/\ker f \cong \mathrm{Im} f$. També, $\dim((F+G)/F) = \dim(F+G) - \dim F$, i $\dim(G/(F\cap G)) = \dim G - \dim(F\cap G)$, i igualant les expressions retrobem la fórmula de Grassman. Finalment, $\dim((E/F)/(G/F)) = \dim(E/F) - \dim(G/F) = \dim E - \dim F - (\dim G - \dim F) = \dim E - \dim G = \dim(E/G)$.