1 Introducció

La *combinatòria* o *anàlisi combinatòria* tracta de l'estudi de les *configuracions* formades amb els elements d'un conjunt finit, atenent a unes restriccions donades. Aquest estudi de les configuracions pot consistir en veure'n la seva *existència*, *comptar-les*, *descriure-les*, o *optimitzar-les* segons un criteri.

La combinatòria és tan antiga com la pròpia Matemàtica, doncs l'operació de *comptar* està íntimament lligada al concepte de nombre en els temps prehistòrics.

Els pitagòrics van estudiar els nombres poligonals, i la fórmula $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ ja era coneguda al s.III.

Al s.XII el matemàtic hindú **Bahskara** coneixia ja la fórmula general per $\binom{n}{p}$.

A Europa apareix la combinatòria a l'Edat Mitjana amb els estudis jueus sobre la Cabala. En l'idioma hebreu les paraules no tenen vocals i les bàsiques estan formades per tres lletres, que si es canvien d'ordre s'obtenen altres paraules amb alguna relació conceptual entre elles. Alguns mètodes cabalístics es basen en aquesta propietat.

Al s.XVI **Cardano** mostra que el nombre de parts d'un conjunt de n elements és 2^n, i Nicolo **"Tartaglia"** Fontana estudià un triangle aritmètic equivalent al triangle de Pascal.

Al s.XVII **Pascal** i **Fermat**, durant els seus estudis sobre els jocs d'atzar, retroben la fórmula per $\binom{n}{p}$. **Pascal** és el primer en relacionar-la amb el teorema del binomi i amb el triangle que porta el seu nom.

Leibniz (s.XVII-XVIII) trobà la fórmula pels coeficients multinomials i **Newton** va generalitzar el teorema del binomi per exponents fraccionaris.

Bernoulli i **Euler** (s.XVIII) van fer aportacions fonamentals a la combinatòria. **Euler** va resoldre el problema dels ponts de Königsberg i desenvolupà el mètode de les funcions generatrius.

Al s.XX els principals exponents de la combinatòria han estat **Ramsey** (que descobrí un important teorema d'existència), **Erdös** (un dels més prolífics en aquest camp fins al moment) i **Polya** (que desenvolupà una potent tècnica d'enumeració).

En l'actualitat l'interés per la combinatòria és molt important degut a la computació (per mesurar l'eficiència d'un algorisme cal *comptar* el nombre de vegades que s'executen els seus passos) i les xarxes de comunicacions, l'estudi de les quals es nodreix de la branca d'*optimització combinatòria*.

2 Els principis bàsics

Notarem $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Direm que dos conjunts A i B són *coordinables* si existeix una bijecció $f : A \longrightarrow B$, i en tal cas escriurem $A \sim B$. Un conjunt és *finit* si és coordinable amb algun $\mathbb{N}_n$. Notarem amb $|A|$ el *nombre d'elements* o *cardinal* d'A, així, $A = \emptyset \Rightarrow |A| = 0$, $A \sim \mathbb{N}_n \Rightarrow |A| = n$.

Principi de correspondència. *Si $A \sim B$ llavors $|A| = |B|$.*
DEM. Existeix una bijecció $g : A \longrightarrow B$, i si $|A| = n$ també tenim una bijecció $f : \mathbb{N}_n \longrightarrow A$. Llavors $g \circ f$ és una bijecció de $\mathbb{N}_n$ en B i per tant $|B| = n = |A|$. □

Exemple. En un campionat de futbol jugat per eliminatòries s'enfronten n equips. A cada ronda els equips perdedors abandonen el torneig. Quan es formen els parells d'equips que s'enfrontaran pot ser que en quedi un desemparellat, aquest descansa i passa de ronda. ¿Quants partits es jugaran en tot el campionat?
SOLUCIÓ. Aquest problema es podria resoldre comptant el nombre de partits a cada ronda i sumant, però el càlcul es complica davant la possibilitat de tenir equips desemparellats en algunes rondes. Aplicant el principi de correspondència és molt fàcil: al final del campionat tenim un equip guanyador i $n-1$ d'eliminats. Cadascun d'ells fou eliminat en algun partit (i només en un), i a cada partit s'elimina un equip. Llavors la correspondència que assigna a cada partit jugat l'equip eliminat en tal partit, és bijectiva. Per tant s'han jugat tants partits com equips eliminats, això és, $n-1$.

Principi de la suma. *Si $A \cap B = \emptyset$ llavors $|A \cup B| = |A| + |B|$.*
DEM. Si $f : \mathbb{N}_m \longrightarrow A$ i $g : \mathbb{N}_n \longrightarrow B$ són bijeccions definim la bijecció $h : \mathbb{N}_{m+n} \longrightarrow A \cup B$ com $h(i) = f(i)$ per $i \leq m$, $h(i) = g(i-m)$ per $m < i \leq m+n$, de manera que $|A \cup B| = m + n = |A| + |B|$. □

Proposició. *Si $A \subset B$ llavors $|A| \leq |B|$.*
DEM. Òbvia, tenint en compte que $B = A \cup (B \setminus A)$ amb $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. □

Proposició. *Si $f : A \longrightarrow B$ és injectiva llavors $|A| \leq |B|$.*
DEM. Si f és injectiva llavors $A \sim f(A) \subset B$, per tant $|A| = |f(A)| \leq |B|$. □

Exemple (principi del colomar). Si en un colomar tenim n coloms que es reparteixen en m nius, amb $n > m$, demostrar que en algun niu hi ha més d'un colom.
SOLUCIÓ. Suposem el contrari. Llavors si A és el conjunt de coloms i B el de nius podríem construir una aplicació injectiva $f : A \longrightarrow B$, però llavors $n = |A| \leq |B| = m$, en contradicció amb la hipòtesi $n > m$.

Proposició. *Si $f : A \longrightarrow B$ és exhaustiva llavors $|A| \geq |B|$.*

Dem. Construïm una aplicació injectiva $g : B \longrightarrow A$ assignant a cada element de B una preimatge en A. $\square$

Principi del producte. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
Dem. Òbvia, disposant els elements del producte cartessià per files i columnes. $\square$

En termes combinatoris el principi del producte es pot enunciar així: *Si un primer objecte pot escollir-se d'entre m possibles, i un cop feta la selecció es pot escollir un segon entre n possibles, llavors poden escollir-se $m \cdot n$ parells diferents.* El principi del producte es pot generalitzar a n conjunts: $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$.

El conjunt de totes les funcions d'un conjunt A en un altre conjunt B el notem per B^A.

Proposició. $|B^A| = |B|^{|A|}$.
Dem. Per construir una aplicació $f : A \longrightarrow B$ triem una imatge per cada element de A, disposant de $|B|$ possibilitats per triar. Per tant, aplicant el principi del producte, en total podré construir $|B| \cdot |B| \cdots |B| = |B|^{|A|}$ aplicacions diferents. $\square$

Proposició. *El conjunt de parts d'un conjunt finit A té $2^{|A|}$ elements.*
Dem. A cada subconjunt $X \subset A$ li fem correspondre la seva funció característica $f_X : A \longrightarrow \{0, 1\}$, és a dir, $f_X(x) = 1$ si $x \in X$ i 0 en cas contrari. Per tant tenim una correspondència entre subconjunts de A i funcions de A en $\{0, 1\}$, i es veu clarament que és una bijecció. Per tant el nombre de parts de A és $|\{0, 1\}^A| = 2^{|A|}$. $\square$

Proposició. *Si $|A| = n$ i $|B| = m$ el nombre de funcions injectives de A en B és $m(m-1)\cdots(m-n+1)$.*
Dem. Si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ tenim m possibilitats per escollir $f(a_1)$, $m-1$ per $f(a_2)$, $\ldots$, $m-n+1$ per $f(a_n)$. Així, pel principi del producte tindrem $m(m-1)\cdots(m-n+1)$ funcions injectives de A en B. $\square$

3 Les configuracions clàssiques

3.1 Variacions

S'anomenen *variacions* de m objectes agafats de n en n a les successions de n termes diferents que poden formar-se amb els m objectes. Si $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ llavors aquestes variacions no són altre cosa que totes les aplicacions injectives $\mathbb{N}_n \longrightarrow A$. Per tant,

Proposició. *El nombre de variacions de m elements presos de n en n és $m(m-1)\cdots(m-n+1)$.* $\square$

Regla de formació de les variacions. *Si ja tenim la llista de totes les variacions de m elements agafats de $n-1$ en $n-1$, formem les de n en n posant a la dreta de cada configuració, successivament, els elements que no figuren en aquesta.*
Exemple. Si $A = \{a, b, c, d\}$ i tenim formades les configuracions amb $n = 2$:
$\{ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc\}$. Per formar les de $n = 3$: ab ens genera abc i abd, ac ens genera acb i acd, etc.

Es veu fàcilment que aquesta regla és correcta: per una banda ens proporciona totes les configuracions per n (una configuració de n elements ens proporciona una de $n-1$ treient l'últim element, i aquesta ha d'estar en la llista inicial) i no apareixen configuracions repetides, ja que si a la llista inicial tots són diferents, en aplicar la regla obtindrem configuracions que si no difereixen en els $n-1$ primers elements, diferiran en l'últim.

3.2 Variacions amb repetició

S'anomenen *variacions amb repetició* de m elements agafats de n en n a les successions de n termes que poden formar-se amb els m elements, podent-hi haver repeticions.

Proposició. *El nombre de variacions amb repetició de m elements agafats de n en n és m^n.*
DEM. Òbvia, doncs coincideix amb el nombre de funcions de $\mathbb{N}_n$ en $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, que és m^n. $\square$

3.3 Permutacions

Les *permutacions* són un cas particular de les variacions quan $n = m$. Llavors tenim

Proposició. *El nombre de permutacions de n elements és $n!$*
DEM. El producte $m(m-1)\cdots(m-n+1)$ quan $n = m$ és $n(n-1)\cdots(n-n+1) = n!$ $\square$

El conjunt de totes les permutacions de $\mathbb{N}_n$, vistes com a bijeccions, i amb l'operació interna de composició, formen un grup no abelià anomenat *grup simètric d'ordre n*, que es nota S_n. Aquest grup forneix la base per definir les *formes multilineals alternades* en un espai vectorial, en particular els *determinants*.

3.4 Permutacions amb repetició

Donats els elements $a_1, a_2, \ldots, a_r$ i els naturals $k_1, k_2, \ldots, k_r$ amb $k_1 + \cdots + k_r = n$ considerem totes les successions de n termes que poden formar-se amb els a_i de manera que cada a_i aparegui k_i vegades. A aquestes configuracions se'ls anomena *permutacions amb repetició* dels elements donats amb multiplicitats $k_1, \ldots, k_r$. Per comptar-ne el nombre considerem un conjunt A de n elements dividit en r classes disjuntes $C_1, \ldots, C_r$ amb $|C_i| = k_i$. Direm que dues permutacions f i g de A són equivalents si $f(i)$ i $g(i)$ pertanyen a la mateixa classe en A per a tot $i = 1, \ldots, n$. Els elements de C_i poden permutar-se entre sí de $k_i!$ maneres, per tant, per cada permutació de A hi ha $k_1!k_2! \cdots k_r!$ permutacions equivalents, el nombre de classes d'equivalència serà igual al nombre total de permutacions de A dividit entre $k_1!k_2! \cdots k_r!$. Però aquestes classes d'equivalència es poden posar en correspondència bijectiva amb les permutacions amb repetició, per tant hem provat:

Proposició. *El nombre de permutacions amb repetició de r elements amb multiplicitats $k_1, \ldots, k_r$ és*

$$\frac{n!}{k_1!k_2! \cdots k_r!}$$

éssent $n = k_1 + \cdots + k_r$. □

Exemple. La paraula MATEMATICA té 10 lletres: tres A, dues M, dues T, una E, una I i una C. Amb aquestes lletres es podran formar, doncs, 10!/(3!2!2!1!1!1) = 151200 paraules diferents.

3.5 Combinacions

S'anomenen *combinacions* de m elements $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ agafats de n en n als subconjunts de n elements del conjunt $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Notem per $\binom{m}{n}$ el nombre de tals configuracions.

Per cada combinació de m elements agafats de n en n formem les $n!$ permutacions possibles dels seus elements, obtenint variacions de m elements agafats de n en n. D'aquesta manera podem obtenir totes les variacions d'aquest tipus. Com que cadascuna de les $\binom{m}{n}$ combinacions origina $n!$ variacions, tenim que $\binom{m}{n} n! = m(m-1) \cdots (m-n+1)$ i hem provat:

Proposició. *El nombre de combinacions de m elements agafats de n en n és*

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}. \qquad \square$$

Les combinacions poden ser estudiades des del punt de vista de les funcions estrictament creixents. Si definim un ordre lineal estricte en $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ dient que $a_i < a_j \iff i < j$

llavors podem establir una bijecció F entre els conjunts $\{f : \mathbb{N}_n \longrightarrow A \mid f \text{ estric. creix.}\}$ i $\{B \subset A \mid |B| = n\}$ (entenem que f és estrictament creixent quan $f(i) < f(j)\ \forall i < j$), simplement definint $F(f) = Im(f)$. Això ens permet afirmar que hi ha tantes funcions estrictament creixents de $\mathbb{N}_n$ en A com combinacions dels elements de A agafats de n en n, i els raonaments valen igual per funcions estrictament decreixents. Per tant,

Proposició. *El nombre de funcions estrictament creixents (o decreixents) d'un conjunt linealment ordenat B de n elements en un altre A de m elements és de $\binom{m}{n}$.* □

3.6 Combinacions amb repetició

Les *combinacions amb repetició* de m elements presos de n en n són les configuracions de n elements que poden formar-se amb els m donats sense que importi l'ordre i admetent repeticions. Per exemple, les combinacions amb repetició dels elements $\{a, b, c\}$ presos de 2 en 2 són $\{aa, ab, ac, bb, bc, cc\}$.

Les combinacions amb repetició de m elements $a_1, a_2, \ldots, a_m$ agafats de n en n es poden representar en forma de monomi $a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_m^{i_m}$ amb $i_1 + \cdots + i_m = n$ (els exponents indiquen els cops que es repeteix l'element corresponent). Així establim una bijecció entre combinacions amb repetició de m elements agafats de n en n i monomis de grau n en m variables amb coeficient unitat. Si a cada monomi li fem correspondre una filera de zeros i uns, escrivint per cada variable tants uns consecutius com indiqui l'exponent (cap si l'exponent és 0) i fent servir zeros com a separadors entre variables, tindrem:

$$a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_m^{i_m} \quad \longleftrightarrow \quad \underbrace{1 \cdots 1}_{i_1}\ 0\ \underbrace{1 \cdots 1}_{i_2}\ 0\ \cdots\cdots\ 0\ \underbrace{1 \cdots 1}_{i_m}$$

Però en una configuració de zeros i uns d'aquest tipus sempre tindrem n uns i $m-1$ zeros, per tant n'hi haurà tantes com maneres diferents hi hagi de triar n posicions pels uns en un total de $n+m-1$ posicions, això és, $\binom{n+m-1}{n}$. Així hem provat:

Proposició. *El nombre de combinacions amb repetició de m elements agafats de n en n és de $\binom{n+m-1}{n}$.* □

Proposició. *El nombre de monomis de grau n en m variables amb coeficient unitat és de $\binom{n+m-1}{n}$.* □

A l'igual que hem fet amb les combinacions simples, les combinacions amb repetició de m elements agafats de n en n poden relacionar-se amb les funcions creixents (no estrictament) de $\mathbb{N}_n$ en $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, i amb els mateixos raonaments provem:

Proposició. *El nombre de funcions creixents (o decreixents), en sentit no estricte, d'un conjunt linealment ordenat de n elements en un altre de m elements és de $\binom{n+m-1}{n}$.* $\square$

3.7 Propietats dels coeficients binomials

Teorema del binomi. $(x+y)^m = \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n y^{m-n}$

Dem. $(x+y)^m$ és el producte de m factors $(x+y)$. Al desenvolupar el producte s'obté una suma de monomis de grau m en les variables x, y. El monomi $x^n y^{m-n}$ apareix tants cops com formes diferents tinguem per triar n dels m parèntesi per escollir-ne les x, que és justament $\binom{m}{n}$. $\square$

Interpretació geomètrica dels coeficients binomials. Anomenem *camí ascendent* a tota poligonal $P_0 P_1 \dots P_m$ del pla cartessià tal que si $P_i = (x, y)$ llavors $P_{i+1} = (x+1,\, y)$ ó $(x,\, y+1)$

Proposició. ***(a)*** *El nombre de camins ascendents de longitud m partint de l'origen de coordenades és 2^m.* ***(b)*** *El nombre de camins ascendents que parteixen de l'origen i acaben al punt (n, k) és $\binom{n+k}{n}$.*
Dem. (a) Donat un vèrtex tenim 2 possibilitats per construir el següent. Com hem de repetir aquesta tria m vegades, pel principi del producte el nombre total de possibilitats serà 2^m.
(b) Resseguint un camí que parteix del $(0,0)$ i acaba en el (n,k) fem un total de n desplaçaments unitaris paral·lels a l'eix d'abscisses i k desplaçaments unitaris paral·lels al d'ordenades. En total són $n+k$ desplaçaments, i el camí queda perfectament determinat si sabem quins d'aquests són els n paral·lels a les abscisses. Per tant el problema es redueix a triar n elements d'un total de $n+k$, que és $\binom{n+k}{n}$. $\square$

Propietats bàsiques.
a) Simetria: $\displaystyle\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$
b) (fórmula d'Stifel) $\displaystyle\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$ *que ens permet dibuixar el triangle de Pascal obtenint cada coeficient dels dos que té just al damunt.*
c) $\displaystyle\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$
d) $\displaystyle\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

e) $\binom{m+1}{n+1} = \binom{m}{n} + \binom{m-1}{n} + \cdots + \binom{n}{n}$

DEM. a) És immediata a partir de la fórmula aritmètica, i també comparant els coeficients de $x^n y^{m-n}$ i de $y^{m-n}x^n$ en els desenvolupaments de $(x+y)^m$ i de $(y+x)^m$ respectivament. b) També es dedueix operant amb la fórmula aritmètica, o bé adonant-nos que els subconjunts de n elements de $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ es poden dividir en dues classes: els que no contenen a_m i els que sí; la suma dels elements de cada classe és el membre dret. El membre esquerre de c) és el desenvolupament del binomi $(1+1)^n = 2^n$, i el de d) és $(1-1)^n = 0$. També, el membre esquerre de c) és el nombre de camins ascendents des de l'origen fins a $(0, n), (1, n-1), \ldots, (n, 0)$ respectivament, que coincideix amb el nombre total de camins ascendents de longitud n, que és 2^n. d) També pot escriure's com $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots$, que pot enunciar-se com: "donat $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, el nombre total de subconjunts de cardinalitat parella coincideix amb els de cardinalitat senar". En efecte, si a cada subconjunt de A li faig correspondre el subconjunt que resulta d'afegir-li l'element a_1 si no el té, o treure-li si el té, estem establint una bijecció entre subconjunts d'un nombre parell d'elements amb subconjunts d'un nombre senar (de fet, aquesta bijecció és inversa d'ella mateixa). Finalment, e) es dedueix aplicant recurrentment la fórmula d'Stifel. $\square$