JORGE MORRA

Tema 2. Fundamentos y aplicaciones a la Teoría de Grafos. Diagramas en Árbol.

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

JORGE MORRA

Tema 2. Fundamentos y aplicaciones a la Teoría de Grafos. Diagramas en Árbol.

OPOSICIONES MATEMÁTICAS

Prólogo

Antes de nada quiero presentarme. Mi nombre es Jorge Sánchez, no Jorge Morra. El sobrenombre o alias ”Morra” proviene del ajedrez, deporte del que soy aficionado. Estudié Matemática Fundamental en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, obtuve mi plaza de funcionario hace casi veinte años y desde entonces hasta ahora he venido impartiendo clases en Secundaria y Bachillerato en diferentes centros del territorio nacional.

Tiene delante el lector el segundo cuadernillo de la serie ”Oposiciones Matemáticas”, concretamente el tema 2: ”Fundamentos y aplicaciones de la Teoría de Grafos. Diagramas en Árbol”.

Con este segundo cuaderno, continúo la serie en la que quiero desarrollar los temas de la oposición de Secundaria en la especialidad de Matemáticas. Debo decir que son *”mis temas”*, los que elaboré y preparé a lo largo se seis largos años[1]; con ayuda de una bibligrafía propia y otra prestada de bibliotecas. Son mis temas, con los que aprobé y con los que me felicitaron los tribunales de las ”encerronas” en las que estuve.

Como ya expuse en el tema de los Números Naturales, para poder enfrentarse con cierta solvencia al examen de oposición de Matemáticas, la construcción de cada tema debe contener y diferenciar tres partes: una presentación, un nudo y un desenlace. Parecen las mismas tres partes que encontramos en una película o un libro, sí, lo son, pero es que cuando contamos algo necesitamos que *”ese algo”* tenga entidad por sí solo. Pensemos que un tribunal no es más que nuestro público, y si queremos aprobar tenemos que *”entretenerlos”*. ¿Qué mejor forma de gustarles que contarles una historia?

De las tres partes, la primera la utilizaremos para presentar el tema, justificar todo el contenido que vamos a exponer y encuadrarlo dentro de las Matemáticas y dentro de nuestra propuesta.

En la segunda debemos ordenar todos los contenidos de acuerdo a los resultados que vayamos a mostrar. Debido a la cantidad de proposiciones, teoremas, lemas o corolarios que enunciemos, será muy difícil que podamos demostrarlos todos; sin embargo es necesario que al menos se expongan en el orden correcto. Sobre esto los matemáticos somos bastante exigentes, los lemas preceden a los teoremas, y los corolarios los suceden, por poner un ejemplo.

Acabaremos poniendo la ”guinda” al pastel en la tercera y última parte. Bueno..., así dicho parece más una receta de cocina que el desarrollo de un tema de Matemáticas; básicamente debemos acabar con un resultado importante, demostrado o no, eso importa menos, pero sí relevante.

Para que las tres partes puedan funcionar y constituirse como un todo, es imprescindible que sepamos a priori lo que tenemos tiempo de escribir, presentar o exponer; y para ello es también preciso que nos preparemos el tema *a conciencia*.

[1]Los años de preparación de oposiciones son, por definición, largos.

Las oposiciones de Matemáticas no son fáciles, como tampoco lo son las Matemáticas. *"A conciencia"* significa que hay que conocer todo o casi todo de lo que estamos tratando, porque controlando el tema evitamos que él nos controle a nosotros. Cuando sabemos de lo que hablamos, podemos improvisar en cualquier momento; no importa que no recordemos un paso en un teorema porque sabemos dónde queremos llegar, saltamos el teorema o el paso correspondiente dándolo por demostrado y añadimos algún otro apartado para completar el desarrollo. Todo depende de lo que lo dominemos.

Pero preparar o prepararse un tema de oposición no es nada sencillo. Debemos *saber* Matemáticas, y además las *mínimas* en el tema que escribamos, pero si no es así porque nos ha tocado uno de los peor preparados, tenemos que dar a entender al Tribunal que *sí las sabemos*, y que las cosas que no contamos no es porque las desconozcamos sino porque nos falta tiempo.

Me gustaría recalcar un aspecto primordial. Existe una tendencia general a que cada definición o proposición tiene que estar asociada a algún ejemplo que "verifique" de alguna forma lo que acabamos de enunciar. No puedo hablar por todos los tribunales de oposición, pero sí puedo decir que yo, como profesor de Matemáticas y como posible miembro de tribunal, primo los conceptos y los resultados antes que los ejemplos. A mí me interesa saber si el opositor conoce el tema del que está hablando y el conocimiento de ejemplos no demuestra que lo sepa. Esto no quiere decir que no se ejemplifique lo que expongamos, puesto que los ejemplos son los que clarifican los contenidos; pero, insisto, tenemos que hacerlo en la justa medida, sin excedernos.

No quiero extenderme más, espero que la lectura y el trabajo con este segundo cuadernillo sea productivo para todos aquellos que quieran o bien conocer algo más de esta ciencia o bien convertirse en profesores de Secundaria..., o ambas cosas.

Por último agradecer al lector el trabajo que está a punto de comenzar y mencionarle que todos aquellos comentarios que considere oportunos, bien de profundización de algunos puntos, bien de inconsistencias, errores o erratas en algunas demostraciones, o bien sugiriendo nuevos apartados o secciones, puede hacérmelos llegar a través de mi correo electrónico: jorgemorra@outlook.es; si bien es cierto que aunque no pueda asegurar contestarlos, sí puedo asegurar leerlos.

Jorge Morra

Madrid, septiembre de 2019

Índice

1. ¿Cómo preparar este tema?

En primer lugar es tremendamente importante leerlo y entenderlo al completo, desde la primera hasta la última línea. Parece algo incuestionable, pero sé que a veces tendemos a saltarnos partes de un texto porque lo consideramos poco importante, o porque creemos que lo conocemos; en este caso no lo haga.

Cuando lo haya leído y entendido, el lector ya tendrá una idea de lo que le quiero contar. Ahora viene la parte más difícil, que es la de concretar, sintetizar y resumir.

En ese momento puede optar por una de dos alternativas: o lo hace por sí mismo, que es posiblemente la mejor propuesta puesto que de esta forma aprenderá todo del tema; o bien se deja aconsejar por mí y se estudia lo que yo le propongo, siempre por supuesto con posibilidades de cambiar lo que estime oportuno.

Es necesario también que tenga claro que lo que le voy a proponer es lo que le da tiempo a desarrollar. Si puede escribir más tendrá que añadir más, y si escribe menos, tendrá que eliminar parte del tema; todo a su criterio.

Pues bien, comencemos:

- La ”Introducción” es muy importante, es la que da concreción al tema y debe ser al completo. Es necesario justificar lo que expondrá a continuación.
- Las definiciones de ”Grafos”, ”Digrafos” y ”Multigrafos” con necesarias, y la inclusión de algún ejemplo también. Toda la sección del *”Primer teorema de la teoría de grafos”* es necesario porque introduce y concreta los conceptos que hemos definido hasta ahora. Se debe enunciar y demostrar.
- De la sección de grafos eulerianos y hamiltonianos deben enunciarse las definiciones y a continuación plantear el problema de los ”Puentes de Königsberg”. Deben asimismo enunciarse solamente los lemas 5.8, 5.9 y 5.10. El teorema 5.11 debe enunciarse y demostrarse. Sobre los grafos Hamiltonianos sería interesante definirlos y ”resolver” el problema del dodecaedro como ejemplo.
- Del punto ”Diagramas en Árbol” es necesario definir el concepto de *”árbol”*, las definiciones correspondientes y luego enunciar y demostrar el teorema 6.3.
- De la sección ”Aplicaciones de la Teoría de Grafos”, sería interesante que se conocieran algunas de ellas. No es necesario memorizar todas las que se exponen (muchas menos de las que son en realidad), pero sí mencionar al menos su aplicación sobre los navegadores, los mapas y redes, y por último nombrar el método PERT.

Si con esta síntesis del tema completa todo el tiempo del examen, perfecto; en caso contrario lo dicho anteriormente: se deja a su criterio aumentar o disminuir contenidos.

2. Introducción

Para la mayoría un *”grafo”* no es otra cosa que una representación de puntos (x, y) en un plano cartesiano. De hecho existe una amplia teoría matemática de grafos que es mucho más que una mera representación de puntos y que compite en cuanto a la importancia de sus teoremas con cualquiera otra rama matemática de más ”caché” como pudiera ser la Geometría o el Análisis.

Está demostrado que se trata de una herramienta básica en campos de la ciencia y la tecnología. Muchos de sus resultados y procedimientos se han utilizado y se utilizan hoy en día en la Economía, en la Producción, en Transportes, Programación Lineal, Redes, Estadística, etc.

A la teoría de Grafos se la considera la precursora de lo que ahora es la Topología, una de las ramas más importantes en la matemática moderna.

El problema que la mayoría de los autores coinciden en que es el origen de la Teoría de Grafos es el llamado ”*Problema de los puentes de Königsberg”*.

El problema se planteó en el siglo XVIII. La ciudad de Königsberg[2], actualmente Kaliningrado, era bañada por las aguas del río Pregel[3]. Siete puentes cruzaban el río en distintos puntos de la ciudad, y se planteó si era posible recorrerlos todos sin pasar por el mismo dos veces.

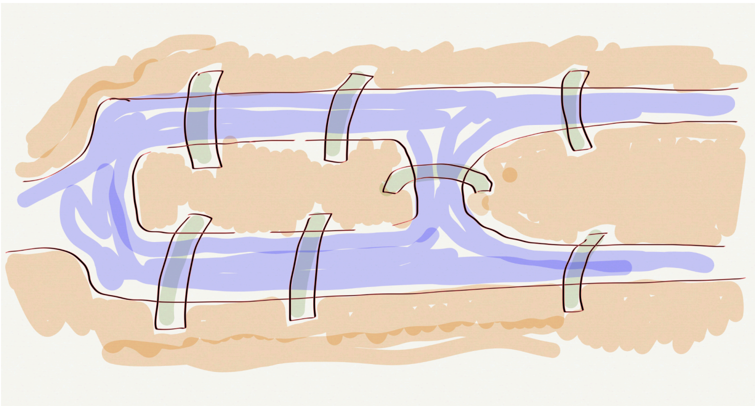

Figura 1: Esquema de los puentes en Königsberg

Todos los intentos de resolver el problema fueron fallidos hasta que en 1736 Leonard Euler, matemático alemán, escribió un artículo donde demostró que tal ruta no existía. Además en dicho desarrollo probó que podía extrapolarse el problema a otros similares comenzando con ello lo que se denominó la Teoría de Grafos.

Las ideas de Euler, y los resultados que publicó se tratarán en una sección posterior.

En términos familiares podemos definir un grafo como una colección de puntos en el plano, a los que algunos pares de ellos los hemos unido con líneas.

[2]Königsberg era una ciudad del imperio prusiano, al finalizar la segunda guerra mundial fue anexionada a la extinta URSS, cambió de nombre y pasó a llamarse Kaliningrado, y ahora con la segregación en repúblicas pertenece a Rusia.

[3]Ahora es el río Pregolya.

3. Grafos, Digrafos y Multigrafos

Definición 3.1 *Diremos que un grafo G es una pareja formada por un conjunto de vértices, V, y un conjunto de aristas A. Lo denotaremos $G = (V, A)$.*

A los elementos de V se les denomina vértices, y a los de A aristas.

Definición 3.2 *Una arista queda definida con dos vértices, $a = \{u, v\}$.*

Si a es una arista de G entonces se dice que los vértices u y v son adyacentes, y escribiremos sencillamente $a = uv$. En este caso llamaremos a los vértices u y v extremos de la arista uv.

En ocasiones, con algunos tipos de grafos, no denotaremos a las aristas atendiendo a los vértices puesto que de esta forma no podremos discriminarlas.

Cuando los grafos sean dirigidos, que veremos más adelante, será importante el orden en el que escribamos los vértices.

Los vértices se dibujan utilizando puntos, y si dos puntos son adyacentes entonces se traza una línea que una los puntos correspondientes.

Ejemplo:

En el siguiente grafo

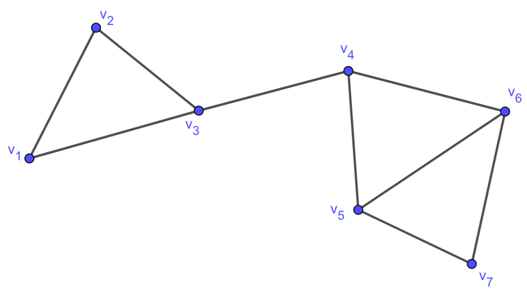

Figura 2: Ejemplo de Grafo

podemos observar:

$$\text{Vértices} = V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

Y las siguientes aristas:

$$A = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_4v_6, v_5v_6, v_5v_7, v_6v_7\}$$

Denotaremos por $C(V)$ al número de vértices de G, es decir el cardinal de V, y por $C(A)$ al cardinal de A, esto es, el número de aristas de G.

Definición 3.3 *Diremos que un grafo es finito si el número de vértices y de aristas es finito. En otro caso se dirá que el grafo no es finito.*

De todas formas, nosotros solamente trabajaremos con grafos finitos.

Definición 3.4 *Un multigrafo es un grafo que puede tener varias aristas entre los mismos vértices.*

Denotar las aristas de un grafo puede resultar complicado si se hace atendiendo exclusivamente a los vértices. En algunos caso utilizaremos otra nomenclatura.

Ejemplo: El siguiente multigrafo tiene solamente 4 vértices y sin embargo el número de aristas se eleva a 9.

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9\}$$

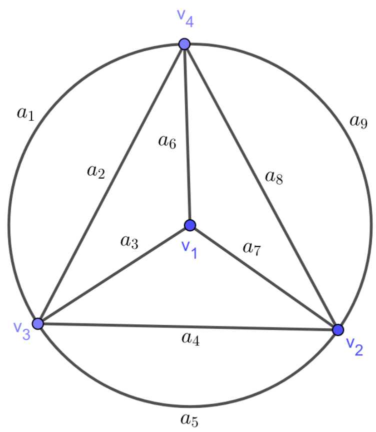

Figura 3: Ejemplo de multigrafo

Definición 3.5 *Un pseudografo es un grafo en el que en una arista pueden coincidir los extremos. A esas aristas en concreto se les denomina ”lazos”.*

Ejemplo:

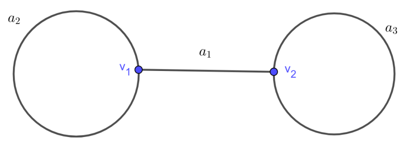

Figura 4: Ejemplo de pseudografo

Definición 3.6 *Un digrafo o grafo dirigido es un grafo donde cada arista está orientada, es decir, donde decimos explícitamente cuál es el origen y cuál el final. Suele dibujarse de forma similar a un vector.*

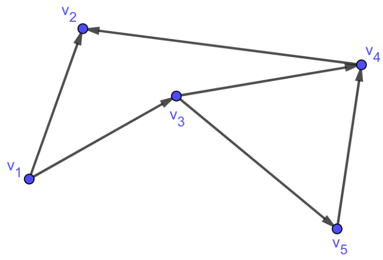

Figura 5: Ejemplo de digrafo

4. Primer teorema de la Teoría de Grafos

Los matemáticos estudiamos la estructura de los conjuntos, y a continuación las aplicaciones que conservan dicha estructura.

En general dichas aplicaciones se denominan *morfismos* o más habitualmente *homomorfismos*. Cuando además son biyectivas el término usado es *isomorfismo*, y si son inyectivas o sobreyectivas, *monomorfismos* o *epimorfimos* respectivamente.

Definición 4.1 *Sean $G = (V, A)$ y $G' = (V'A')$ grafos. Sea además $f : V \longrightarrow V'$ una biyección entre sus conjuntos de vértices. Diremos que f es un isomorfismo entre G y G' si conserva sus aristas. Es decir, $uv \in A$ si y solo si $f(u)f(v) \in A'$.*

En este caso diremos que G y G' son isomorfos.

Definición 4.2 *Dado $G = (V, A)$ grafo y dado $u \in V$ vértice, diremos que el grado de u en G es el número de aristas que tiene al vértice u por extremo. Si la arista es un lazo, contaremos dos veces a dicho vértice. Lo denotaremos por $g(u)$.*

Teorema 4.3 *Sean $G = (V, A)$ y $G' = (V'A')$ dos grafos, y $f : G \longrightarrow G'$ un isomorfismo. Entonces si $u \in V$ se tiene que $g(u) = g(f(u))$.*

Demostración: Sea $u \in V$, y supongamos que tenemos una arista que contiene a u como uno de sus extremos, por ejemplo, xu. Como f es un isomorfismo, conserva las aristas entre los vértices, por lo que $f(x)f(u)$ es una arista en G', esto es, $f(x)f(u) \in A'$.

Recíprocamente al ser f isomorfismo, si $f(x)f(u) \in A'$ tendríamos que $xu \in A$.

Por consiguiente el número de aristas que tiene a u como extremo, es el mismo que el que tiene a $f(u)$ también como extremo. En consecuencia sus grados coinciden.

$\otimes$

Teorema 4.4 (Primer teorema de la Teoría de Grafos) *Sean $G = (V, A)$ un grafo, y $V = \{v_1, \ldots v_n\}$ y $A = \{a_1, \ldots a_m\}$ los conjuntos de vértices y aristas respectivamente. Entonces:*

$$\sum_{i=1}^{n} g(v_i) = 2m$$

Pero además, al ser la suma de los grados de todos los vértices un número par, resulta con ello que el número de vértices de grado impar es par o cero.