TEMA 8: SUCESIONES TÉRMINO GENERAL Y FORMA RECURRENTE. PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS APLICACIONES.

Índice

---

1. Introducción

Una sucesión es básicamente una relación entre el cjto IN y otro cjto. Si el cjto final es de números, se le llama sucesión numérica.
Se cree que en el Paphiro de Rhind (2000 a.C) ya aparecían problemas relacionados con las progresiones. La escuela pitagórica también estudió las progresiones, auque es a Arquímedes a quien se le atribuye la definición.

El ejemplo/enigma más famoso es ~~el~~ la progresión geométrica relacionada con el ajedrez y los granos de arroz, cuya aplicación en el aula puede ser muy exitosa.
Aunque este tema sería el primero del bloque de Análisis, está incluido en el bloque de Álgebra por lo que se añaden conceptos relacionados con su estructura.

1. Sucesión de números reales

Defⁿ.- Una sucesión de números reales es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ 1 &\longrightarrow f(1) \\ 2 &\longrightarrow f(2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

La imagen del 1, $f(1)$, se le llama primer término. A $f(2)$, segundo término. A $f(n)$, término n-ésimo,

Habitualmente, se simboliza una sucesión como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Además, esta puede ser definida como:

- Forma recurrente: Una regla que permite calcular cada término en función de los anteriores:

Ejemplo 1.-
$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n} \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

Así, diremos que es una sucesión recurrente de orden K si:

$$\left[a_{n+K} = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i a_{n+K-i} \, , \quad \alpha_i, a_i \in \mathbb{R} \quad K \in \mathbb{N} \quad n \geq 1 \right]$$

- Forma explícita: Una fórmula que permite hallar directamente cada término a_n, a partir del lugar que ocupa. En estos casos, diremos que está definida a partir de su término general

Ejemplo 2.-
$$a_n = n$$
$$a_n = n^2 - 2n + 4$$
$$a_n = 2^{n-1} - 1$$
$$\vdots$$

Sin embargo, siendo las dos formas anteriores las más comunes. Estas no son únicas, puesto que se puede definir una sucesión en base a una regla dada, sin tener en cuenta ninguna fórmula.

Ejemplo 3.- Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que a_n es el decimal n-ésimo de π.

Sea $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que b_n es el n-ésimo número primo.

1.2. Subsucesiones, monotonía y cota. Estructura algebraica.

Defn.- Dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se define como subsucesión de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a toda sucesión de la forma $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, donde $\{n_k\}_k$ es una sucesión de números naturales t.q

$$n_1 < n_2 < \dots < n_{k+1} < \dots$$

Nota pedagógica.- Una forma más sencilla de definirla sería: una sucesión formada apartir de algunos términos de la sucesión original.

Ejemplo 4.- Si consideramos $a_n = n$, i.e., $\{a_n\}_n$ es la sucesión de naturales. Entonces $\{b_n\}_n$ y $\{c_n\}_n$ definidas como:

$$\begin{cases} b_n = 2n \\ c_n = 2n+1 \end{cases} \quad n \geq 1, \ n\in\mathbb{N}$$

son subsucesiones de $\{a_n\}$ ya que

$$\left.\begin{array}{l} \{b_n\} \text{ sucesión de pares} \\ \{c_n\} \text{ " de impares} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Subsucesiones de } \mathbb{N} \sim \{a_n\}$$

A continuación, estudiaremos una serie de características que nos permiten definir y clasificar de forma más rigurosa los tipos de sucesiones.

Diremos que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es:

- creciente si $a_n \leq a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$
- estr. creciente si $a_n < a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$
- decreciente si $a_n \geq a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$
- estric. decreciente si $a_n > a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$
- acotada superiormente si
  $\exists M \in \mathbb{R} : a_n < M \ \forall n \in \mathbb{N}$
- acotada inf si
  $\exists N \in \mathbb{R} : a_n > N \ \forall n \in \mathbb{N}$
- acotada si
  $\exists C \in \mathbb{R} : |a_n| < C$

Además, se pueden definir ciertas operaciones con sucesiones. Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones, se define:

- suma sucesiones: $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$
- producto ": $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$
- producto por escalar: $\lambda\{a_n\} = \{\lambda a_n\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Si consideramos el cjto de sucesiones en $\mathbb{R}$ como $S_{\mathbb{R}}$, entonces:

$\begin{cases} 1. \ (S_{\mathbb{R}}, +) \text{ es un } \mathbb{R}\text{-espacio vectorial} \\ 2. \ (S_{\mathbb{R}}, +, \cdot) \text{ es un anillo unitario conmutativo} \end{cases}$

Nota.- $(S_{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ no es un cuerpo puesto que no todos los elementos tienen inverso.

Por ejemplo $\nexists \{a_n\}_n \subset \mathbb{R}$:

$$(1, 0, \dots, 0, \dots) \cdot (a_1, a_2, \dots) = (1, 1, \dots 1, \dots)$$

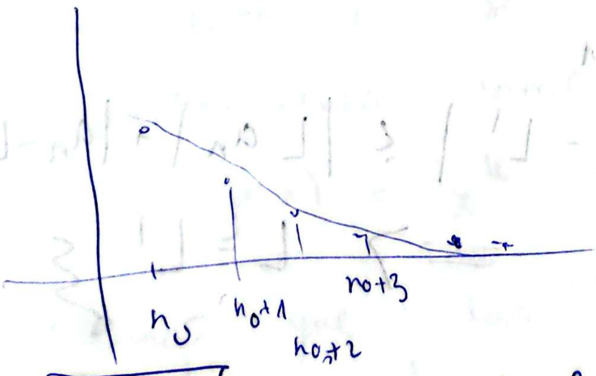
Esta característica tiene implicaciones fundamentales para su estructura algebraica.

1.3. Convergencia.

Decimos que $\{a_n\}_n$ es convergente a $l \in \mathbb{R}$, es decir, que tiene límite el $l \in \mathbb{R}$, si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - l| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$$

Ejemplo 5.- Supongamos una sucesión $\{a_n\}$ tal que converge a 0. Sea $\{b_n\}_n$ definida como $b_n = |a_n|$, entonces podemos ver que a partir de un $n_0 \in \mathbb{N}$ su gráfica es:



Nota.- Informalmente se entiende el límite de la sucesión como el valor a que tienden los términos cuando n es grande

$\boxed{\text{Notación}}$ $\quad a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ ó $\lim a_n = l$

Se dice que $\{a_n\}$ tiene límite $+\infty$ si

$$\forall b \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n > b \ \forall n \geq n_0$$

¿Cómo podemos saber si una sucesión tiene límite?

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ Toda sucesión creciente y acotada sup. es convergente.

$\boxed{D}$ Sea $\{a_n\}$ creciente y acot. sup.

Entonces, sea $S := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

el supremo, es decir, la menor de todas las cotas superiores. Luego, si $\varepsilon > 0$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad a_n > S - \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 .$$

Es decir, $|S - a_n| = S - a_n < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \{a_n\}$ es convergente a S.

Proposición. — El límite de una sucesión convergente es único.

$\boxed{D}$ Supongamos L i L' límites de $\{a_n\}$ $L \neq L'$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0, m_0 \in \mathbb{N} : \begin{array}{l} |a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \\ |a_n - L'| < \varepsilon \quad \forall n \geq m_0 \end{array}$$

Entonces si $n_1 := \max(n_0, m_0)$ entonces se cumple que $\forall n \geq n_1$

$$|L - L'| = |L - a_n + a_n - L'| \leq |L - a_n| + |a_n - L'|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \Rightarrow L = L' \ \text{↯}$$

$\square$

3. Sucesiones recurrentes

Como hemos definido anteriormente, una sucesión recurrente de orden k, satisface que

$$a_{n+k} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_{n+k-i} \qquad \begin{array}{l} \alpha_i, a_{n+k-i} \in \mathbb{R} \\ k \in \mathbb{N}, n \geq 1 \end{array}$$

Es decir, conociendo los k términos anteriores obtenemos el siguiente.

Ejemplo 6. – Un ejemplo muy importante es la sucesión de Fibonacci, que se define

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n & (\text{orden } 2) \\ a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \{a_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

No obstante, aunque estas sucesiones se obtienen a partir de términos anteriores, bajo ciertas condiciones se puede determinar su término general.

3.1. Polinomio característico

Sea $\{a_n\}$ una sucesión recurrente de orden k, entonces se define su polinomio característico como:

$$p(x) = x^k - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^{k-i}$$

Veamos que las raíces de dicho polinomio permiten construir la expresión del término general de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ independientemente de los elementos anteriores.

TEOREMA Sea $\{a_n\}_n$ una sucesión recurrente de orden k. Entonces:

1.) Si x es una raíz simple de $p(x)$ polinomio característico de $\{a_n\}$
$\Longrightarrow$ la sucesión geométrica de razón x, $\{x^n\}_n$ verifica la ley de recurrencia

2.) Si x tiene multiplicidad $l > 1$, entonces
$$\{x^n\}, \{n x^n\}, \ldots, \{n^{l-1} x^n\}$$
verifican la recurrencia

3.) Las soluciones anteriores son una base del espacio vectorial formado por todas las soluciones de la ley de recurrencia.

Ejemplo 7.- Sea la sucesión de Fibonacci. $\{a_n\}$
Entonces $p(x) = x^2 - x - 1$ es el polinomio característico de $\{a_n\}$

$\Longrightarrow$ tenemos 2 raíces simples
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$ Por el T.ª anterior sabemos que

$$a_n = \alpha_0 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

si aplicamos que $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Longrightarrow$ obtenemos α_0, α_1

3.2. Suma de sucesiones recurrentes

Sea $\{a_n\}_n$ una sucesión, entonces la suma de sus primeros n términos se define como $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Entonces, está claro que $\{S_n\}$ es una sucesión

TEOREMA Si $\{a_n\}$ es una sucesión recurrente de orden k. Entonces $\{S_n\}$ es una sucesión recurrente de orden $k+1$

D
$$\left.\begin{array}{l} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2 \\ \vdots \\ S_n = a_1 + \dots a_n = S_{n-1} + a_n \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$. Entonces tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+k} = S_{n+k} - S_{n+k-1} \\ a_{n+k-i} = S_{n+k-i} - S_{n+k-i-1} \end{array}\right\} \text{como } \{a_n\} \text{ es recurrente de orden } k$$

$$\Rightarrow S_{n+k} - S_{n+k-1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left(S_{n+k-i} - S_{n+k-i-1}\right)$$

$$\Rightarrow S_{n+k} = S_{n+k-1} + \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_i \left(S_{n+k-j+1} - S_{n+k-j}\right)$$

$\Rightarrow \{S_n\}$ es de orden $k+1$.

$\square$

4. Progresiones

Una progresión, es un tipo de sucesión donde la diferencia entre cualquier par de términos es cnts.

Entre ellas, podemos diferenciar: aritméticas y geométricas.

4.1. Progresiones aritméticas (P.A)

Llamamos progresión aritmética (p.a) a toda sucesión de números reales en la que cada término se obtiene sumando al anterior una constante denominada diferencia. Así $\{a_n\}_n$ cumple:

$$a_{n+1} - a_n = d \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Prop.- Toda p.a aritmética es recurrente

$\boxed{D}$

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+1} - a_n = d \\ a_n - a_{n-1} = d \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} \Rightarrow a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$$

$\Rightarrow \{a_n\}$ recurrente de orden 2.

Prop.- El término general de una p.a es

$$a_{n+1} = a_1 + n \cdot d$$

$\boxed{D}$

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+1} = a_n + d \\ a_n = a_{n-1} + d \\ \vdots \\ a_2 = a_1 + d \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_{n+1} = a_n + d = \\ = a_{n-1} + 2d = \\ = a_{n-2} + 3d = \\ = \dots = \\ = a_1 + nd \end{array}$$

$\square$

Prop. - Toda p.a queda definida si conocemos:

a) Un término a_k y la diferencia d.

b) Dos términos a_p y a_q con $p \neq q$

$\boxed{D}$ a) Trivial. Restamos y sumamos d a cualquier término y tenemos a_1 y podemos construir el término general como antes.

b) Sea $p \neq q$ con $m = |p-q|$. Entonces

$$|a_p - a_q| = m \cdot d \Longrightarrow d = \frac{|a_p - a_q|}{m}$$

$\Longrightarrow$ Tenemos las condiciones de a) $\square$

Prop. - La suma de los n primeros términos de una p.a es

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$\boxed{D}$

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2 = 2a_1 + d$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 3a_1 + 3d$$

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n$$
$$S_n = a_n + \cdots + a_1$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_1) =$$
$$= n(a_1 + a_n) \Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$\square$

$$a_1 + a_n = a_2 - d + a_{n-1} + d = a_2 + a_{n-1}$$

4.2. Progresiones geométricas $\{g_n\}$

Llamamos progresión geométrica (p.g) en la que cada término se obtiene multiplicando al anterior por una cte r, denominada razón. Así, cumple

$$\circledast \quad g_{n+1} = r \cdot g_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Prop.- Toda pg es una sucesión recurrente y con término general

$\boxed{D}$ Por $\circledast$ tenemos que es recurrente de orden 1. Además, dado g_1 sabemos que

$$g_{n+1} = r \cdot g_n = r^2 \cdot g_{n-1} = \cdots = r^n g_1$$

$$\Rightarrow g_{n+1} = r^n \cdot g_1 \text{ es el término general} \quad \square$$

Prop.- Una p.g queda definida por:

a) Un término cualquiera y la razón

b) Dos términos cualquiera.

Prop.- Dada una p.g $\{g_n\}$ se puede calcular:

a) El producto de los primeros n términos

$$P_n = \sqrt{(g_1 \cdot g_n)^n}$$

b) La suma de los primeros n términos

$$S_n = \left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) g_1$$

D b) La suma de los n primeros términos

$$S_n = g_1 + g_2 + \dots + g_n$$

$$rS_n = r(g_1 + \dots + g_n) = g_2 + \dots + g_{n+1}$$

$$(1-r)S_n = g_1 - g_{n+1} = g_1(1-r^n)$$

tér general

$$\Longrightarrow \boxed{S_n = g_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}}$$

a)

$$P_n = g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_n$$

$$P_n = g_n \, g_{n-1} \dots g_1$$

$$P_n^2 = (g_1 \cdot g_n) \cdot (g_2 \cdot g_{n-1}) \dots (g_n \cdot g_1) =$$

$$= (g_1 \cdot g_n)^n \Longrightarrow P_n = \sqrt{(g_1 g_n)^n}$$

□

$$g_1 \cdot g_n = r g_1 \frac{g_n}{r} = g_2 \cdot g_{n-1} = \dots$$

5. SERIES ARITMETICAS Y GEOMETRICAS

Llamamos serie al par $(\{a_n\}, \{S_n\})$ siendo $\{a_n\}$ una sucesión de números real y $\{S_n\}$ la suma de sus primeros n términos

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

A $\{S_n\}$ se le llama sucesión de sumas parciales

Defn Una serie es aritmetica (geometrica) si $\{a_n\}$ es una p.a (p.g)

Defn.- Diremos que es una serie sumable si $\exists \lim_n S_n$

Prop.- Una serie aritmética no es sumable

Prop.- Una serie geometrica es sumable si $|r| < 1$

Seg $\{a_n\}$ p.g

D

$$\lim_n S_n = \lim_n \frac{1-r^n}{1-r} a_1 =$$

$$= \lim (1+r^2+ \dots + r^{n-1}) \cdot a_1$$

$$\exists \lim S_n \iff \exists \lim \sum_{i=0}^{n-1} r^i \iff |r| < 1$$

$\square$

5. Aplicaciones

En este último bloque veamos algunas aplicaciones

5.1. Obtener la exp. de un decimal periódico

Consideremos $1'\widehat{3}$ entonces sabemos que

$$1'\widehat{3} = 1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \dots = 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{3}{10^i} =$$

$$= 1 + 3 \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{10^i}.$$

Observemos que $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{10^i}$ es $\lim_n S_n$ de la pg de razón $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$. Como $|r| < 1$ $\Rightarrow$ es sumable! Sea $r = \frac{1}{10}$, $a_1 = \frac{1}{10}$

$$\lim_{n} S_n = \lim_n \frac{1-r^n}{1-r} a_1 =$$

$$= \lim_n \frac{\frac{10^n - 1}{10^n}}{\frac{9}{10}} \cdot \frac{1}{10} =$$

$$= \lim_n \frac{10(10^n - 1)}{9 \cdot 10^n} \cdot \frac{1}{10^n} =$$

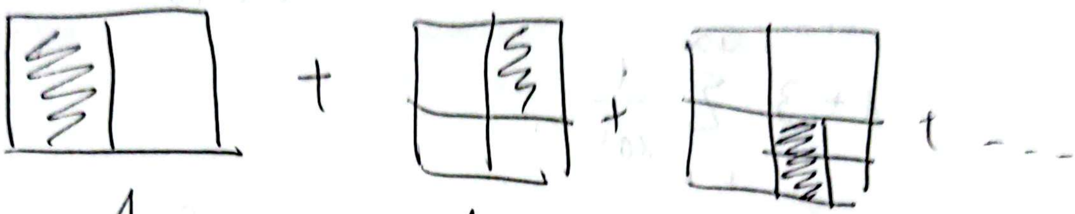
$$= \lim_n \frac{10^{n+1} - 10}{9 \cdot 10^{n+1}} = \frac{1}{9} //$$

$$\Rightarrow 1'3 = 1 + \frac{3}{9} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} //$$

5.2. Relación con sucesiones geométrica y su representación

Las series geométricas nos ofrecen un claro ejemplo visual como recurso pedagógico.

__Ejemplo__. – Geométricamente la sucesión de razón $\frac{1}{2}$ se puede ver como



$\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{1}{8}$

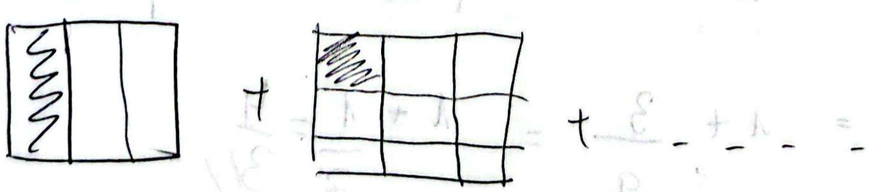
Luego $\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i$ se puede ver que tiende a 1

De hecho

$$\lim S_n = \lim \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \lim_n \frac{2(2^n-1)}{2^n \cdot 2} = \lim_n \frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}} = 1$$

Como ampliación, se podría hacer con



$\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{1}{9}$

Conclusiones

Este tema está incluido dentro del bloque de álgebra en el curriculum y además es un contenido frecuente en los cursos de 3r de ESO.

Bibliografía