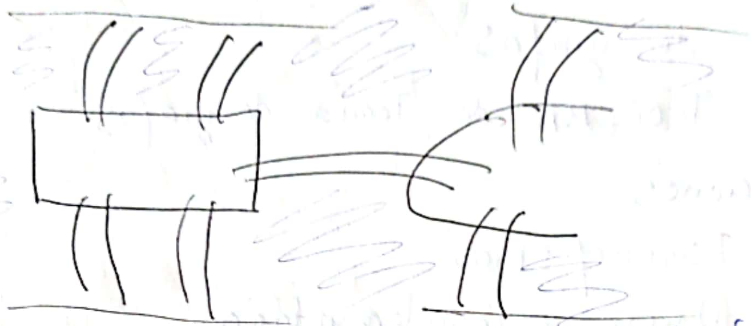
TEMA 2: FUNDAMENTOS Y APLICACIONES DE LA TEORIA DE GRAFOS. DIAGRAMAS DE ÁRBOL

1. Indice

1. Introducción

La teoría de grafos surge como respuesta al famoso problema de los puentes de Königsberg planteado por L. Euler en el s. XVIII. Este problema trataba de buscar un recorrido que cruzara todos los puentes de una ciudad sin repetir ninguno.



Así, la teoría de grafos se convirtió en la precursora de la topología puesto que pretendía estudiar conexiones y relaciones invariantes de estructuras, mediante la abstracción.

Hoy en día, se aplica en problemas esenciales de la industria como: la optimización de transporte, diseño eficiente de circuitos eléctricos, e incluso, la organización de bases de datos.

2. Fundamentos de la Tª de grafos

2.1. Concepto de grafo

Los grafos se pueden considerar como diagramas o dibujos, o bien algebraicamente como conjuntos. Ambos estrechamente ligados como veremos.

a. Def. Geométrica

Un grafo G es un cjto de puntos en el espacio que algunos de los cuales se unen entre sí.

Sin embargo, cabe señalar que un grafo G sólo contiene información topológica sobre sus conexiones

Ejemplo 1 .- Los grafos

Son el mismo puesto que el único cambio es su posición. Sus conexiones son idénticas.

b. Def. Algebraica

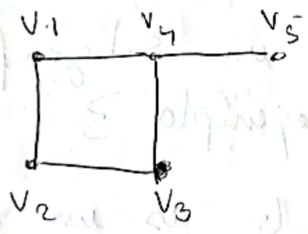
Un grafo G es un par $G=(V,A)$, donde V es el cjto de vértices y A el cjto de aristas.

Además, puesto que una arista es la unión entre dos vértices, sabemos que

$$a \in A \subseteq V \times V, \text{ luego } a=(u,v) \in V \times V$$

con $u, v \in V$ vértices. Escribiremos $a = uv$ y a u, v se les llama extremos de la arista.

Ejemplo 2.-

$G =$ 

$V = \{v_1, \dots, v_5\}$

$A = \{v_1v_2, v_1v_4, v_4v_5, v_4v_3, v_3v_2\}$

2.2. Definición de elementos básicos

Sea $G=(V,A)$ un grafo. Entonces, definimos

- vértices adyacentes: aquellos que los une una arista
- aristas adyacentes: si tienen extremo común
- grado del vértice: # aristas que concurren en él
- lazo: arista de un único extremo
- matriz de adyacencia de G: $M_G = (m_{ij})$

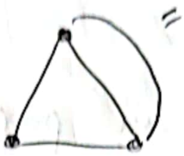
$$m_{ij} = \begin{cases} m, & \text{si } v_iv_j \in A \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \qquad m = \#\text{ aristas entre } v_iv_j$$

3. Tipos de grafos

Un grafo G es **simple** si cada par de vértices sólo tiene una arista que los une.

Ejemplo 3.-

$G_1 =$ simple



$= G_2$ No simple

Un **multigrafo** G es un grafo no simple

Un **pseudografo** es un grafo G que contiene un lazo

Ejemplo 4.-

lazo

pseudografo

Un **subgrafo** H de G es un par $H=(V', A')$ tal que $V' \subseteq V$, $A' \subseteq A$

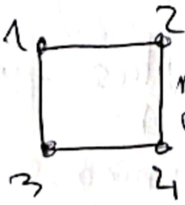
Ejemplo 5.- G_1 es un subgrafo de G_2 en el ejemplo 3

Un grafo **completo** G es un grafo **simple** y todo par de vértices es adyacente luego

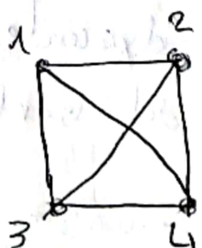
$|A| = \binom{n}{2}$, $|V| = n$

Ejemplo 6.-

H



no completo



G

H subgrafo de G

$|V| = 4$

G es un grafo completo con $|A| = \binom{4}{2} = 6$

Un grafo G se dice regular si todo vértice tiene el mismo grado. Es decir, se cumple que para algún $r\in\mathbb{N}$:

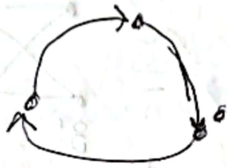
$$\forall v \in V \quad g(v) = r$$

Nota.- Un grafo completo $\Rightarrow$ regular con $r = n-1$

El grafo G del ejemplo 6 es regular de grado 3.

Un digrafo es un grafo G que esta dirigido. Tambien se le llama grafo orientado

Ejemplo 7.-



digrafo

En este caso el origen cuenta.

4. Primer teorema de Grafos

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ Sea $G=(V,A)$ un grafo con $|V|=n$, $|A|=m$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} g(v_i) = 2|A| = 2m$$

$\boxed{D}$ Para cada arista a de G $\exists\, v_i, v_j \in V : v_iv_j = a$

Luego por cada arista se aumenta en 2 el grado de vértice $\square$ (1 en i, otro en j)

Corolario.- Sea G un grafo. Entonces, hay un número par de vértices con grado impar.

$\boxed{D}$ Puesto que $2 \mid \sum_{i=1}^{n} g(v_i) \Rightarrow$ la cantidad de $g(v_i)$ impares debe ser par. En otro caso $2 \nmid \sum_{i=1}^{n} g(v_i)$.

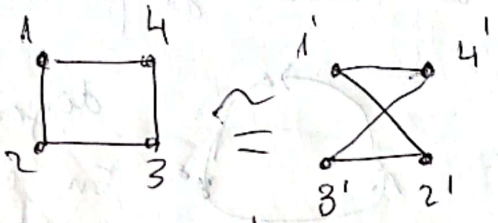
5. Operaciones

5.1. Isomorfismo entre grafos

Dados $G=(V,A)$, $G'=(V',A')$ grafos se dice que G y G' son isomorfos ($G \cong G'$) si $\exists\, f: V \to V'$ una aplicación biyectiva que cumple

$$\forall i,j \quad v_i v_j \in A \iff f(v_i) f(v_j) \in A'$$

Ejemplo 8.-



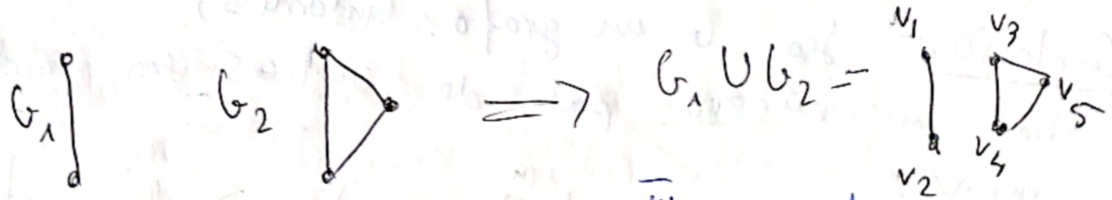
$$f: V \to V'$$
$$i \to i' = f(i)$$

5.2. Unión y complementario

Sean G_1, G_2 dos grafos disjuntos. Entonces $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. La unión se define

$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2,\ A_1 \cup A_2)$$

Ejemplo 9.-



Se dice que un grafo $\overline{H}$ es el complementario de H subgrafo de G si

$$\overline{H} \cup H = G$$

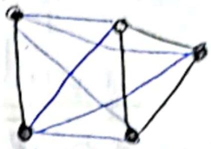
Nota: G_1 G_2 anteriores son complementarios $\overline{G_2} = G_1$, $\overline{G_1} = G_2$

5.3. Suma de grafos

Dados G_1, G_2 grafos. La suma $G_1 + G_2$ es el grafo resultante de añadir a la $G_1 \cup G_2$ todas las aristas posibles entre vértices no adyacentes.

Ejemplo 10.-

$G_1 \cup G_2$ $\Longrightarrow$ $G_1 + G_2$



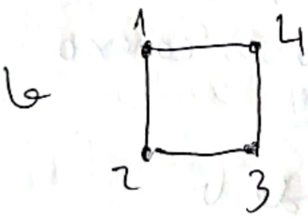
6. Secuencias de aristas

Dado que la mayor parte de los problemas se basan en el estudio de como están conectados los vértices del grafo, necesitamos algunas definiciones

6.1. Caminos, ciclos y circuitos

Un camino en G es una sucesión (finita) de vértices y aristas alternativamente

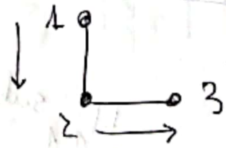
Ejemplo 11.-



Un camino de G puede ser

$\overbrace{1 - 12 - 2 - 23 - 3}^{\text{aristas}}$

vértices



Al primer y último vértice se les llama extremos del camino. La longitud del camino es el # de arista que contiene.

El camino es cerrado si termina en el mismo vértice que empieza

Además, se dice que el camino es simple si no aparece ningún vértice repetido.

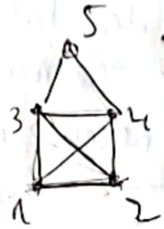
Nota.- El camino del ejemplo 11 es simple

Un ciclo es un camino cerrado, tal que el único vértice que repite es el primero y último.

Un circuito es un camino cerrado que no repite arista.

Observación.-

Un ciclo $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ circuito

Sea $G =$ 

entonces

1 — 2 — 3 — 5 — 4 — 3 — 1

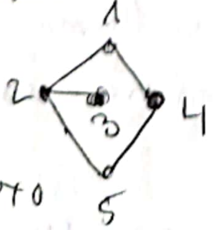
es un circuito por ser cerrado y no repetir arista pero repite vértice 3

$\Longrightarrow$ no ciclo

6.2. Grafos conexos

Un grafo G es conexo si $\forall x, y \in V$ existe un camino cuyos extremos son "x" e "y". Si un grafo no es conexo es disconexo

Ejemplo 12.-

G 

conexo

H_1 subgrafo de G

$H_1 \cup H_2$ disconexo

H_2 subgrafo de G

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ Si G es conexo $\Rightarrow |A| \geq |V| - 1$

$\boxed{D}$ Se demuestra por inducción sobre $|V| = n$

Si $\boxed{n=1}$ $\rightsquigarrow$ $\bullet$ G $\Rightarrow |A| = 0 = 1-1 = |V|-1$
se cumple

si es cierto para $n \stackrel{?}{\Rightarrow} n+1$

Supongamos G tal que $|V| = n+1$. Luego, sea $v_0 \in V$, entonces $V' = V \setminus \{v_0\}$ satisface que $|V'| = |V| - 1$. Consideremos que $g(v_0) = K$, entonces nos han quedado a lo sumo K componentes conexas y que cumplen la HI.

~~Luego, $H = (V', A')$, $A' \subset A$ donde $v_0 v_1 \notin A'$~~ $\forall_1$

$\cancel{|A'| \geq |V'| - 1 = |V| - 2}$

// Así, tenemos $G_i := (V_i, A_i)$ $i = 1, \dots, l \leq K$

$\cancel{|A| - K}$ componentes conexas.

$$|V'| = \sum_{i=1}^{l} |V_i|, \qquad |A_i| \geq |V_i| - 1 \quad \forall i = 1, \dots, l$$

$$\sum_{i=1}^{l} |A_i| \geq \sum_{i=1}^{l} (|V_i| - 1) = \sum_{i=1}^{l} |V_i| - l$$

$$|A| = K + \sum_{i=1}^{l} |A_i| \geq |V'| - l + K = |V| - 1 + \underbrace{(K-l)}_{\geq 0}$$

$\square$

7. Grafos Eulerianos y Hamiltonianos

<u>Defⁿ</u>.- Un camino euleriano, es un camino que pasa por todos los vértices y aristas y por estas una única vez.

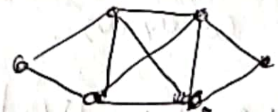
Un circuito euleriano es un circuito que también es un camino euleriano

<u>Nota</u>.- Un circuito euleriano cumple

1. Camino cerrado
2. No repite aristas
3. Pasa por todos los vértices

<u>Defⁿ</u>.- Un grafo G ~~semi~~ es semieuleriano si contiene un camino euleriano. Un grafo es euleriano si contiene un circuito euleriano

<u>Ejemplo 13</u>.-



euleriano

semieuleriano

<u>Lema 1</u>.- Si G es semieuleriano, entonces o todos los vértices tienen grado par o todos excepto dos lo tienen.

Lema 2.- Si G es un grafo euleriano. Entonces todos los vértices tienen grado par.

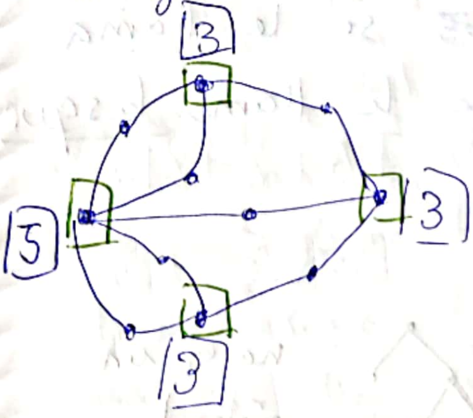
$\boxed{D}$ G es euleriano, $\exists$ g un circuito euleriano

$v_0 \quad v_0 v_i \quad v_i \quad \ldots \quad v_0.$

Entonces $\forall v_i \in V$ tenemos 2 aristas por cada vez que aparece en el circuito $(i \neq 0)$.
Además, v_0 tiene la inicial y la final
$\Rightarrow g(v_0)$ es par y $g(v_i)$ $\forall i \neq 0$ es par $\boxed{D}$

EL PROBLEMA DE LOS P. Königsberg

L. Euler asoció el siguiente grafo al problema original



No es ni semieuleriano ni euleriano por el Lema 1 o 2 $\Longrightarrow$ no existía la ruta que buscaba.

No fue L. Euler quien terminó la caracterización de grafo euleriano, fue C. Hierholzer.

TEOREMA Sea G un grafo.

G es euleriano $\Longleftrightarrow$ G conexo y todo vértice tiene grado par

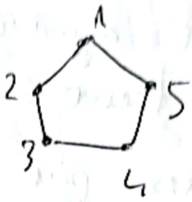
Definición.- Sea G un grafo.

Un camino simple en G que contiene todos los vértices se llama camino hamiltoniano

Un ciclo que pasa por todos los vértices es un ciclo hamiltoniano

Un grafo es hamiltoniano si posee un ciclo hamiltoniano.

Ejemplo 14.- G =



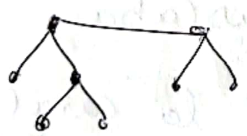
1-2-3-4-5-1 es un ciclo hamiltoniano

$\Longrightarrow$ G es hamiltoniano.

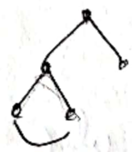
8. Diagramas de árbol

Un grafo G conexo con almenos dos vértices y que no posee ~~ciclos~~ se le llama árbol. Si no es conexo se le llama bosque

Ejemplo 15.-



es un árbol



no es un árbol

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ Sea $G = (V, A)$ un grafo. Son equivalentes

1. G árbol
2. G conexo, si quitamos una arista no es conexo
3. G no tiene ~~grafo~~ ciclos, si añadimos una arista tiene ciclos

$\boxed{D}$ 1) → 2) G árbol $\Rightarrow$ G conexo y no posee ciclos. Sup. RA que si quitamos una arista sigue siendo conexo. Sean $v_i, v_j \in V$ entonces quitamos la arista $v_i v_j$. ($v_i v_j \notin A$)
Entonces como sigue siendo conexo existe un g camino entre v_i, v_j tal que $v_i v_j \notin g$
$\Rightarrow g \; v_i v_j \; v_j$ es un ciclo ↯

2) → 3) Sup G conexo y si quitamos una arista deja de ser conexo.
Sup que $\exists$ g ciclo en G, pero si elimino una arista del ciclo G sigue siendo conexo
↯ $\Rightarrow$ G no tiene ciclos.
Ahora como G conexo, si añadimos una arista $v_i v_j \notin A$, entonces como es conexo
$\exists$ g camino entre v_i, v_j si añadimos
$\hat{g} \; v_i v_j \; v_j$ es un ciclo.

3) → 1) G no tiene ciclos. Supongamos que G no es conexo, entonces $\exists$ $v_i, v_j \in V$ para los que no hay un camino si añado la arista $v_i v_j$ no tenemos un ciclo ↯ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ G conexo

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ Si G un árbol. Entonces

$$|A| = |V| - 1$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ Sea $G = (V, A)$ un grafo. Entonces son equivalentes

$\boxed{D}$ 1. G arbol

2. G conexo, $|A| = n-1 = |V|-1$

3. G sin ciclos, $|A| = n-1 = |V|-1$

$\boxed{D}$ Por los 2 T^a anteriores $1 \to 2) \text{ y } 3)$

$2) \to 1)$ Si G conexo. Tenemos que demostrar que no posee ciclos. Supongamos que si quitamos una arista sigue siendo conexo Luego, tenemos un $G' = (V, A')$ tal que

$|A'| = |A| - 1$ y conexo $\Rightarrow$

$$|A'| \geq |V| - 1 \Rightarrow |A| \geq |V| \;\#$$

$|A| = |V| - 1 \Rightarrow G$ no sigue siendo conexo

$\Rightarrow G$ no posee ciclos $\Rightarrow G$ árbol

$3) \to 1)$ G sin ciclos, $|A| = |V| - 1$,

Sup. G no es conexo, entonces

$\exists\, K \in \mathbb{N}$ componentes conexas entonces

$G = \bigcup_{i=1}^{k} G_i$ com G no tiene ciclos (G_i no los tienen)

$\underset{G_i \text{ arbol}}{\Rightarrow} |A_i| = |V_i| - 1$

$$|A| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| = \sum_{i=1}^{k} (|V_i| - 1) = n - K = n - 1$$

$\boxed{2h\,5'}$

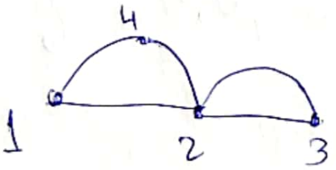
$\Rightarrow K = 1 \Rightarrow G$ conexo $\square$

9. Conclusiones

En este tema hemos expuesto los contenidos referentes a la teoría de Grafos. ~~Aunque estos contenidos no son propios de los Saberes bá~~

Una propuesta ~~para~~ didáctica para desarrollar este concepto en el aula puede llevarse a cabo en bachillerato. En el nos propondremos resolver el problema que aparece en la película "El indomable Will Hunting".

Se puede plantear como:



1) Encontrar la matriz de adyacencia
2) Encontrar los caminos de long. 3.

Así, podemos conectar este tema con las matrices, siendo este, un saber fundamental del bachillerato.

10. BIBLIOGRAFÍA

Grima, C: 2021. "En busca del grafo perdido" Ed. Ariel

Boyer, C: 1986. "Historia de las matemáticas". Ed. Alianza

Rosen, K H: 2004 "Matemática discreta y sus aplicaciones", Ed. Mc Graw Hill

2h 12'