1 Límit d'una funció

1.1 Definició i exemples. Límits laterals. Asímptotes

Al llarg de tota l'exposició ens centrarem en les funcions reals de variable real. Sigui doncs f una funció definida en un domini $D \subseteq \mathbb{R}$. La idea intuïtiva que el límit de $f(x)$ quan x tendeix a a sigui l, és que $f(x)$ sigui arbitràriament proper a l quan x sigui prou proper a a. Per poder assegurar que sempre hi ha punts de D arbitràriament propers a a imposarem que a sigui un *punt d'acumulació* de D (això és, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $x \in D$ tal que $|x - a| < \varepsilon$). Suposarem coneguda la noció de límit d'una successió de nombres reals, i els principals resultats sobre límits de successions. Donem ara una definició formal de límit:

Definició (i). Sigui $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i sigui a un punt d'acumulació de D. Direm que el *límit* de $f(x)$ quan x tendeix a a és l (i ho escriurem $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$) si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ per als $x \in D$ tals que $0 < |x - a| < \delta$.

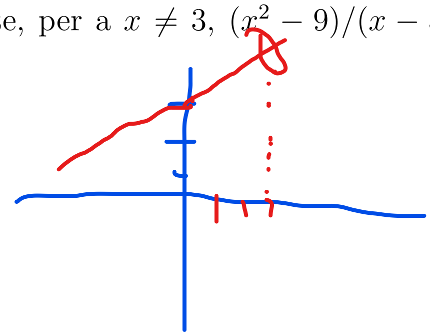
Observem que per definir el límit de f quan x tendeix a a no necessitem en cap moment el valor de $f(a)$. De fet, pot ser que $f(a)$ ni tan sols estigui definit (com a és un punt d'acumulació de D, pot ser un punt frontera que no pertany a D). Veiem una definició alternativa:

Definició (ii). Sigui $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i sigui a un punt d'acumulació de D. Direm que el *límit* de $f(x)$ quan x tendeix a a és l si per a tota successió $\{x_n\} \subset D$ amb límit a es compleix que la successió $\{f(x_n)\}$ té límit l.

Comprovem que les dues definicions són equivalents: suposem que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ en el sentit de (i) i sigui $\{x_n\} \to a$. Donat $\varepsilon > 0$, hem de veure que $|f(x_n) - l| < \varepsilon$ per a $n > n_0$, però això és cert ja que per (i) existeix $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ per als $x \in D$ tals que $0 < |x - a| < \delta$, i com $\{x_n\} \to a$ tindrem que per a $n > n_0$ es té que $0 < |x_n - a| < \delta$ i per tant $|f(x_n) - l| < \varepsilon$.
Recíprocament, suposem que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ en el sentit de (ii) i suposem que no es verifica (i), és a dir, existeix un $\varepsilon > 0$ tal que per a tot $\delta > 0$ podem trobar un x que compleix $0 < |x - a| < \delta$ i $|f(x) - l| \geq \varepsilon$. Aleshores podríem construir una successió $\{x_n\}$ tal que $0 < |x_n - a| < 1/n$ i $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$, de manera que $\{x_n\} \to a$ però $\{f(x_n)\} \not\to l$, en contra de la hipòtesi.

Exemples:

a. La funció $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ definida per a $x \neq 3$ té límit 6 quan x tendeix a 3. En efecte, per a $x \neq 3$, $(x^2 - 9)/(x - 3) = x + 3$ i està clar que si $\{x_n\} \to 3$ llavors



$f(x_n) = x_n + 3$ tendeix a 6.

b. La funció $f(x) = \sin(1/x)$ definida per a $x \neq 0$ no té límit quan $x \to 0$, perquè si prenem la successió $x_n = 1/(2\pi n)$, $f(x_n) = 0$ té límit 0, mentre que si prenem $x_n = 1/(2\pi n + \pi/2)$, $f(x_n) = 1$ té límit 1 (de fet, la funció oscil·la indefinidament entre -1 i 1 quan x s'apropa a 0).

És convenient introduir la noció d'entorn per treballar amb límits:

Definició. Anomenem *entorn de centre a i radi ε* el conjunt $\{x \in \mathbb{R} \text{ tq. } |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, i el notem $\mathcal{E}(a, \varepsilon)$. Aquest mateix entorn, sense el punt a, l'anomenem *entorn foradat de centre a i radi ε*, i el notem com $\mathcal{E}^*(a, \varepsilon)$. Anomenarem *entorn de $+\infty$* de radi k el conjunt $\{x \in \mathbb{R} \text{ tq. } k < x\} = (k, +\infty)$, i entorn de $-\infty$ de radi k el conjunt $\{x \in \mathbb{R} \text{ tq. } x < k\} = (-\infty, k)$. Els notem, respectivament, $\mathcal{E}(+\infty, k)$ i $\mathcal{E}(-\infty, k)$.

Podem reescriure una definició de límit emprant el llenguatge d'entorns, alhora que introduïm el concepte de límit infinit en un punt, i de límit quan $x \to \pm\infty$:

Definició. Sigui $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Direm que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ (on ara tant a com l poden ser nombres reals, $+\infty$ o $-\infty$) si per a cada entorn U de l existeix un entorn foradat V de a tal que per a tot $x \in V \cap D$, $f(x) \in U$.

Sovint és interessant estudiar el comportament d'una funció en l'entorn d'un punt a però només per la dreta o per l'esquerra de a. Això dóna peu al concepte de *límits laterals*:

Definició. Sigui $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i sigui a un punt d'acumulació de D. Direm que el *límit per la dreta* (resp. *per l'esquerra*) de $f(x)$ quan x tendeix a a és l, i ho escriurem $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$ (resp. $\lim_{x \to a^-} f(x) = l$), si per a cada entorn U de l existeix un entorn foradat V de a tal que per a tot $x \in V \cap D$, amb $x > a$ (resp. $x < a$), $f(x) \in U$.

Òbviament, pels límits en $+\infty$ o $-\infty$ no té sentit parlar de límits laterals (a $+\infty$ només ens hi podem acostar per l'esquerra, i a $-\infty$ per la dreta). El següent resultat expressa la relació bàsica entre el límit global i els límits laterals:

Teorema. *Sigui $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i sigui a un punt d'acumulació de $D \cap \{x > a\}$ i de $D \cap \{x < a\}$. Llavors, f té límit l quan x tendeix a a si i només si existeixen els dos límits laterals quan x tendeix a a i són iguals a l.*

Demostració. És evident que si existeix el límit global, també existeix segons qualsevol subconjunt de D i coincideix amb el global. Recíprocament, si existeixen els dos límits laterals i són iguals a l llavors, per a tot entorn U de l, existeixen entorns foradats V_1 i V_2 de a tals que per a tot $x_1 \in V_1 \cap D$ i per a tot $x_2 \in V_2 \cap D$ es té $f(x_1) \in U$ i $f(x_2) \in U$.

Per tant, si prenem $V = V_1 \cap V_2$ tindrem que per a tot $x \in V \cap D$, $f(x) \in U$. $\square$

Un cop disposem de les nocions de límits infinits i de límits laterals d'una funció, podem definir el concepte d'*asímptota* i caracteritzar les asímptotes de la gràfica d'una funció segons límits:

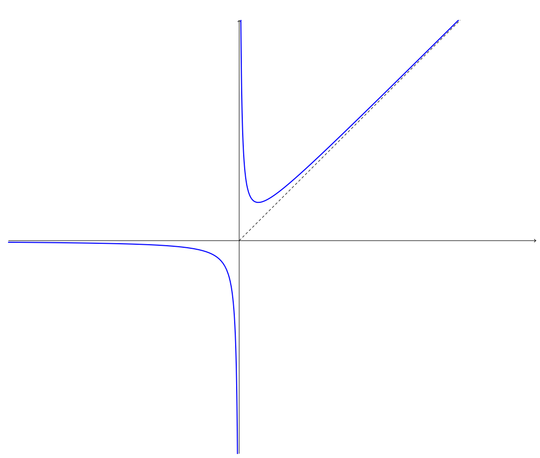
Definició. Direm que una recta és una *asímptota* d'una funció f si la distància entre la corba definida per la gràfica de f (això és, els punts $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ on $x \in D$) i la recta tendeix a zero quan ambdues tendeixen a infinit (això és, quan ens allunyem de l'origen de coordenades). Més concretament,

- la recta $x = a$ és una *asímptota vertical* de f si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ o bé $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$,
- la recta $y = b$ és una *asímptota horitzontal* de f si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$,
- la recta $y = mx + n$ és una *asímptota obliqua* de f si $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$.

En els dos darrers casos, si $x \to +\infty$ (resp. $-\infty$) diem que l'asímptota és *per la dreta* (resp. *per l'esquerra*). Per al càlcul explícit de m i n en les asímptotes obliqües observem que

$$0 = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (mx + n)) \Rightarrow 0 = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x) - (mx + n)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x} \right),$$

i si tenim en compte que $\lim_{x \to \pm\infty} n/x = 0$ concloem que $m = \lim_{x \to \pm\infty} f(x)/x$ i, un cop obtinguda m podem calcular $n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$.



El gràfic de l'esquerra mostra la funció definida per

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x + \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

amb els tres tipus d'asímptotes: l'horitzontal $y = 0$ quan $x \to -\infty$, la vertical $x = 0$ i l'obliqua $y = x$ quan $x \to +\infty$. Òbviament, una funció no pot tenir simultàniament una asímptota horitzontal i una d'obliqua en el mateix sentit, però sí en sentits oposats, precisament com aquesta funció.

1.2 Principals resultats sobre límits

Teorema. *Sigui $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i sigui a un punt d'acumulació de D. Si f té límit finit en a, llavors existeix un entorn V de a tal que f és fitada en $V \cap D$.*

DEMOSTRACIÓ. Prenent $\varepsilon = 1$, sabem que existeix un entorn foradat V de a tal que per a tot $x \in V \cap D$, $|f(x) - l| < 1$. Llavors,

$$|f(x)| = |f(x) - l + l| \leq |f(x) - l| + |l| < 1 + |l|,$$

i per tant f és fitada en $V \cap D$. $\square$

Teorema. *Siguin $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, a un punt d'acumulació de D i $b > 0$. Si existeixen $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$ i són finits, llavors*

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = l_1 + l_2, \quad \lim_{x\to a}(fg)(x) = l_1 l_2, \quad \lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{l_1}{l_2}, \quad \lim_{x\to a} b^{f(x)} = b^{l_1},$$

essent, en el cas del quocient, $g(x) \neq 0$ en un entorn de a i $l_2 \neq 0$. A més a més, si $f(x) \leq g(x)$ en un entorn de a, llavors $l_1 \leq l_2$.

Teorema. *Siguin $f, g, h : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i a un punt d'acumulació de D. Si en un entorn de a es compleix $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ i f, g tenen límit l en a, llavors també $\lim\limits_{x\to a} h(x) = l$.*

No demostrarem aquests dos resultats, que són conseqüència directa dels mateixos resultats per a successions. Veiem un exemple d'aplicació del darrer teorema: són ben conegudes les desigualtats $\sin x \leq x \leq \tan x$ en $x \in [0, \pi/2]$, per tant, dividint per $\sin x$ obtenim

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Com que $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 = \lim\limits_{x\to 0^+} (1/\cos x) = 1$, també $\lim\limits_{x\to 0^+} (x/\sin x) = 1$, i com que la funció no canvia si canviem x per $-x$ concloem que $\lim\limits_{x\to 0}(x/\sin x) = 1$.

Quan s'opera amb límits infinits cal tenir en compte que

$$a + (\pm\infty) = \pm\infty, \ a - (\pm\infty) = \mp\infty, \ a \cdot (\pm\infty) = \mathrm{sgn}(a) \cdot (\pm\infty),$$
$$(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$
$$(-\infty) + (-\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Tots aquests resultats són conseqüència directa de les definicions. També cal tenir en compte les indeterminacions

$$(+\infty) + (-\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad (+\infty)^0, \quad 1^{\pm\infty}, \quad 0^0.$$

2 Funcions contínues

La idea de funció contínua en un punt a (ara $a \in D$) és la d'una funció tal que a petites variacions al voltant de a li corresponen petites variacions a voltant de $f(a)$. Si a no és un punt d'acumulació del domini (és a dir, és un punt *aïllat*, de manera que existeix un entorn foradat de a que no conté cap punt de D) no té sentit parlar de "petites variacions de f al voltant de a", i en aquest cas especial direm que f és contínua en a.

Definició (i). Sigui $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i sigui $a \in D$. Si a és un punt d'acumulació direm que f és *contínua en* a si existeix $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ i és igual a $f(a)$. Si a és aïllat direm sempre que la funció és contínua en a.

Definició (ii). Sigui f com en el cas anterior. Direm que f és *contínua en* a si per a cada entorn U de $f(a)$ existeix un entorn V de a tal que $f(V \cap D) \subset U$.

Definició (iii). Sigui f com en el cas anterior. Direm que f és *contínua en* a si per a cada successió $\{x_n\} \subset D$ tal que $\{x_n\} \to a$, es té que $\{f(x_n)\} \to f(a)$.

Les tres definicions són equivalents, cosa que es dedueix a partir de les equivalències de les definicions de límit d'una funció en un punt.

Exemples:

a. Com a conseqüència de la densitat de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, la funció definida com $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ i $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ no és contínua en cap punt (en qualsevol entorn hi ha una infinitat de punts racionals i irracionals).

b. Com $\lim\limits_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$, la funció definida per $f(x) = x \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ i $f(0) = 0$ és contínua en tots els punts. En canvi, com ja havíem vist que no existeix $\lim\limits_{x \to 0} \sin(1/x)$, la funció $f(x) = \sin(1/x)$ mai no serà contínua en $x = 0$ independentment de com definim $f(0)$.

c. La funció definida en els reals positius per $f(x) = 0$ si x irracional i $f(x) = 1/n$ si $x = m/n$ amb m/n fracció irreductible, és contínua en els punts irracionals però no ho és en els racionals. En efecte, si $a = m/n$, $f(a) = 1/n$ i qualsevol entorn de a tindrà infinits punts irracionals, en els quals f val 0. Per tant, si prenem un entorn U de $f(a)$ de radi inferior a $1/n$ no podrem trobar cap entorn V de a tal que $f(V) \subset U$. Si a és irracional, $f(a) = 0$ i sigui $\varepsilon > 0$ tal que $1/N < \varepsilon$ per a un cert natural N. Si considerem el conjunt A resultant de treure de la recta real tots els racionals amb denominador més petit que N, està clar que $a \in A$ i existeix un entorn V de a tal que $V \subset A$. Llavors qualsevol $x \in V$ serà o bé irracional, o bé racional de denominador més gran o igual que N, de manera que $f(x) < \varepsilon$.

Hi ha uns casos de discontinuïtat en un punt especialment importants:

Definició. Sigui f una funció definida en un interval obert (a, b) i sigui $c \in (a, b)$.

a. Si existeixen els dos límits laterals de f en c, són finits i coincideixen (això és, existeix $\lim_{x \to c} f(x)$ finit) però no són iguals a $f(c)$ direm que f té una *discontinuïtat evitable* en c. Se'n diu així perquè podríem evitar la discontinuïtat només definint $f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$. Exemple: la funció $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ i $f(0) = 1$ té una discontinuïtat evitable en $x = 0$.

b. Si existeixen els dos límits laterals de f en c, són finits però no coincideixen, direm que f té una *discontinuïtat de salt* en c. Exemple: la funció $f(x) = [x]$ (part entera de x) té discontinuïtats de salt en cada $x \in \mathbb{Z}$.

c. Si existeixen els dos límits laterals de f en c i algun d'ells és infinit, direm que f té una *discontinuïtat asimptòtica* en c. Exemple: $f(x) = e^{1/x}$ si $x \neq 0$ i $f(0) = 0$. En aquest cas, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ i $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Les propietats algebraiques que ja hem vist sobre els límits fan que la suma, el producte i el quocient de dues funcions contínues en un punt a torni a ser una funció contínua en a (en el cas del quocient, sempre que el denominador no s'anul·li en un entorn de a), amb la qual cosa tenim que el conjunt de funcions reals contínues, amb les operacions internes de suma i producte, tingui una estructura d'anell commutatiu. A banda d'això, si $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ són dues funcions tals que $f(D) \subseteq E$, f és contínua en a i g és contínua en $f(a)$, llavors és fàcil demostrar que $g \circ f$ és contínua en a.

3 Els teoremes de Weierstrass i de Bolzano

Enunciem i demostrem aquests dos importants resultats sobre funcions contínues:

Teorema de Weierstrass. *Sigui $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua. Llavors, f és fitada i assoleix un màxim i un mínim.*

Demostració. Demostrem primer que f és fitada. Si no ho fos, podríem trobar una successió $\{x_n\} \subset [a, b]$ tal que $|f(x_n)| > n$. Pel teorema de Bolzano-Weierstrass (tota successió fitada té una parcial convergent) existeix una successió parcial $\{x_{n_k}\}$ convergent

a un límit $l \in [a,b]$. Com f és contínua, tindríem que $\{f(x_{n_k})\} \to f(l)$, en contradicció amb que $\{f(x_{n_k})\}$ és no fitada.
Així doncs, f roman fitada superiorment i inferior. En particular, $f([a,b])$ tindrà suprem (la mínima de les fites superiors): sigui $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, i anem a veure que aquest M s'assoleix en algun punt. Per a cada n, existirà un $x_n \in [a,b]$ tal que

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M,$$

i, com abans, pel teorema de Bolzano-Weierstrass existirà una successió parcial $\{x_{n_k}\} \to l \in [a,b]$. De la continuïtat de f i de la desigualtat anterior, fent el pas al límit, obtenim $M = f(l)$, de manera que f assoleix el màxim en l. De forma similar es prova que el mínim també s'assoleix. □

Teorema de Bolzano. *Sigui $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua tal que $f(a)$ i $f(b)$ són no-nuls i de signes oposats. Llavors, existeix un $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Demostració. Anomenem I_0 l'interval $[a,b]$ i dividim-lo pel punt mitjà $(a+b)/2$. Si en aquest punt la funció val 0, ja hem acabat. Si no, designem per I_1 el subinterval en els extrems del qual f pren valors de signe oposat. Tornem a repetir l'operació: si f s'anul·la en el punt mitjà de I_1, hem acabat; si no, prenem el subinterval I_2 de la mateixa manera. Aquest procediment acaba en un nombre finit de passos, o bé obtenim una successió d'intervals encaixats $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ en què f pren valors de signe oposat en els extrems de cada I_n.

Per a cada n, sigui $x_n \in I_n$. La successió $\{x_n\}$ és de Cauchy; en efecte, per a $n, m > n_0$, els punts x_n i x_m estan continguts en I_{n_0}, que té una longitud $(b-a)/2^{n_0}$, i per tant la distància $|x_n - x_m|$ és arbitràriament petita. Com $\mathbb{R}$ és complet per successions, $\{x_n\}$ convergeix a $l \in [a,b]$, i aquest l pertany a tots els I_n. Demostrem, finalment, que $f(l) = 0$. Si no fos així, per continuïtat de f existiria un entorn V prou petit de l en què $f(V)$ no canviaria de signe, però això no és possible perquè per a un cert n, $I_n \subset V$ i f pren valors de signe contrari en els seus extrems, de manera que ha de ser $f(l) = 0$. □

Com a exemple d'aplicació del teorema de Bolzano, podem afirmar que tota funció polinòmica de grau senar té un zero real. En efecte, si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ i suposem que $a_n > 0$, podem escriure $f(x) = x^n(a_n + a_{n-1}/x + \ldots + a_0/x^n)$, de manera que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n = +\infty$, i $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (si fos $a_n < 0$ els infinits canviarien de signe). Per tant, existeix un interval $[a,b]$ en què $f(a)$ i $f(b)$ tenen signes contraris, i com tota funció polinòmica és contínua podem concloure, pel teorema de Bolzano, que f s'anul·larà en algun punt.

4 Funcions contínues i topologia de $\mathbb{R}$

Acabarem l'exposició donant una caracterització alternativa de les funcions contínues basada en els conceptes topològics d'obert i de tancat.

Definició. Diem que un conjunt F és un *tancat de* $\mathbb{R}$ si conté tots els seus punts d'acumulació, això és, si el límit de tota successió convergent de F també pertany a F.

Definició. Diem que un conjunt A és un *obert de* $\mathbb{R}$ si tot punt $a \in A$ és *interior*, això és, per a tot $a \in A$ existeix un entorn U de a tal que $U \subset A$.

Teorema. *Un conjunt A és un obert si i només si el seu complementari A^c és un tancat.*

DEMOSTRACIÓ. Suposem que A és obert i que $\{x_n\} \to l$ amb $\{x_n\} \subset A^c$. Si $l \notin A^c$ seria $l \in A$ i llavors existiria un entorn U de l tal que $U \subset A$. Però llavors hi hauria un n_0 tal que $x_n \in U$ per a $n > n_0$, en contradicció amb el fet que $x_n \in A^c$.
Recíprocament, suposem que A^c és tancat i sigui $a \in A$. Si a no fos interior, tot entorn $(a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n})$ contindria punts de A^c. Per a cada n, sigui x_n un d'aquests punts. Clarament, $\{x_n\} \to a$ i, en ser A^c tancat, tindríem que $a \in A^c$, contradicció. $\square$

Teorema. *Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Les condicions següents són equivalents:*

a. *f és contínua en tots els punts.*

b. *$f^{-1}(F)$ és tancat si F és tancat.*

c. *$f^{-1}(A)$ és obert si A és obert.*

DEMOSTRACIÓ. a)$\Rightarrow$b) Sigui $\{x_n\} \to l$ amb $x_n \in f^{-1}(F)$. De la continuïtat de f deduïm que $\{f(x_n)\} \to f(l)$, i com $f(x_n) \in F$ tancat tindrem que $f(l) \in F$, això és, $l \in f^{-1}(F)$.

b)$\Rightarrow$c) Sigui A un obert. Pel teorema anterior, A^c és tancat, per tant $f^{-1}(A^c)$ és tancat i, altre cop pel teorema anterior, el seu complementari, que és $f^{-1}(A)$, és obert.

c)$\Rightarrow$a) Per demostrar la continuïtat de f en un punt a, sigui U un entorn de $f(a)$. Com els entorns són oberts, per hipòtesi $f^{-1}(U)$ és obert. Llavors, com $a \in f^{-1}(U)$, existeix un entorn V de a tal que $f(V) \subset U$, i per tant f és contínua en a. $\square$