TEMA 27. DESARROLLO DE UNA FUNCIÓN EN SERIE DE POTENCIAS. TEOREMA DE TAYLOR. APLICACIONES AL ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES

Indice

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo en serie de potencias surge de la necesidad de calcular valores de funciones reales de manera precisa y eficiente. En los s. XVII y XVIII los problemas en astronomía, física y cálculo diferencial requería de aproximaciones precisas.

Un problema central fue calcular funciones trascendentes sin usar métodos geométricos o tablas precomputadas. Este problema se resolvió satisfactoriamente gracias a las investigaciones de matemáticos como: Taylor, Lagrange, McLaurin etc.

2. DESARROLLO EN SERIE DE POTENCIAS

Una serie de potencias es una suma infinita de términos que involucran potencias de una variable x con coeficientes $C_n \in \mathbb{R}$ que pueden ser constantes o depender de x. Así, su expresión general es

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (x-x_0)^n$$

- C_n : coeficientes de la serie
- x_0 : el centro sobre el cual se desarrolla la serie.

Nota.- Si $x = x_0 \Rightarrow S(x)$ converge

Sin embargo en ocasiones la serie converge en un intervalo alrededor del centro.

Def^n.- Una funcion $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diremos que es analítica en $x_0 \in I$ si se puede expresar como una serie de potencias convergente en un entorno de x_0, i.e,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (x-x_0)^n \quad , C_n \in \mathbb{R}$$

Ejemplos.-

a) $$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \forall |x| < 1$$

(serie geométrica)

Por tanto, como veremos más adelante:

1. El entorno de convergencia puede ser más grande o más pequeño
2. ¿~~Ha~~ Toda función puede expresarse como serie de potencias?

Defⁿ. - El radio de convergencia R de una serie de potencias se puede definir como

$$R := \sup \left\{ |x-x_0| : \sum_{n\geq 0} c_n (x-x_0)^n \text{ converge} \right\}$$

Es decir, $f(x)$ es analítica si y solo si

$$\exists R > 0 : f(x) = \sum_{n \geq 0} c_n (x-x_0)^n \quad \forall x \in]x_0-R, x_0+R[$$

(radio de convergencia)

Nota. - En los ejemplos anteriores tenemos que

si $f(x) = e^x \Longrightarrow R = +\infty$

$f(x) = \dfrac{1}{1-x} \Longrightarrow x_0 = 0$ y $R = 1$

Además, existen resultados para determinar el radio de convergencia para un $x_0 \in I$, Sin embargo, no los enunciaremos puesto que superan los objetivos del Tema. Entre ellos destacamos el criterio del cociente de D'Alembert o el Tª Cauchy - Hadamard.

3. POLINOMIO DE TAYLOR

En esta sección se demostrará un Tª fundamental en este campo que se remonta a la época de B. Taylor (1685 - 1731). No obstante, el término del residuo y la demostración fue incorporada por Lagrange y Cauchy.

Supongamos $\emptyset = I \subseteq \mathbb{R}$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que es n - veces derivable en $x_0 \in I$, es decir, $f \in D^n(x_0)$.

Entonces, la idea central era considerar un polinomio $P_n(x)$ que cumple:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x-x_0)^i \quad \text{tal que}$$

$$P_n^{k)}(x_0) = f^{k)}(x_0) \quad \forall\, 0 \leq k \leq n$$

Luego, es un polinomio cuya imagen coincide

$$P_n(x_0) = f(x_0), \quad y$$

todas sus derivadas también hasta la n-ésima
$\Rightarrow$ deben tener un comportamiento local muy parecido y, por tanto, podemos esperar que sea una buena estimación. Así,

$$P_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$$

$$P_n^{k}(x_0) = k! \cdot a_k = f^{k)}(x_0) \quad \forall\, 1 \leq k \leq n$$

$$\Longrightarrow \quad a_k := \frac{f^{k}(x_0)}{k!}$$

<u>Def</u>^{n}.- Sea $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ y f n-veces derivable en x_0. Entonces, llamamos al polinomio de grado n $P_n(x)$ ~~de~~ polinomio de

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Taylor de la función f en x_0.

Proposición.- Sea $f \in D^{n-1}(I)$. Si $f^{(n-1)}$ es derivable en $x_0 \in I$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

$\boxed{D}$ Como $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ $\forall 0 \leq k \leq n$, sabemos que podemos aplicar n-veces L'Hôpital.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \dots = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0$$

Este resultado es de suma importancia puesto que nos afirma que el error cometido, es decir

$$f(x) - P_n(x)$$

Converge más rápido a 0 que

$$(x - x_0)^n.$$

Así, puesto que $P_n(x)$ es una aproximación local en un entorno de $x_0 \in I$, nos puede interesar estudiar dicho error cometido

Defⁿ.- El residuo $R_n(x)$ de f es la diferencia entre la función f y su polinomio de grado n de Taylor, es decir

$$R_n(x) := f(x) - P_n(x)$$

Nota.- Luego, en virtud del T^a anterior

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Ahora bien, es evidente que si tuviéramos el valor exacto del residuo, entonces tendríamos aproximaciones exactas, lo cual ocurre pocas veces.

Así, nuestro objetivo es conocer una cota del error, es decir del residuo $R_n(x)$. El siguiente resultado nos ayuda en este propósito

TEOREMA (Residuo de Lagrange)

Sea $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$, $f \in D^{n+1}(I)$ $x, x_0 \in I$ y sea J un intervalo abierto con extremos x, x_0 entonces

$$\exists\, \xi \in J : f(x) = P_n(x) + \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1)}$$

D Sea $P_n(x)$ el polinomio de Taylor de f

$\Rightarrow P_n^{k)}(x_0) = f^{k)}(x_0) \quad \forall\, 0 \leq k \leq n$

$\Rightarrow R_n^{k)}(x_0) = 0 \quad \forall\, 0 \leq k \leq n$

Además, $R_n^{k)}(x) = f^{k)}(x) - P_n^{k}(x) \Rightarrow$ si $k > n$ $R_n^{k)}(x) = f^{k}(x)$ $(P_n^{k}(x) = 0)$

Además, se define

$$S(x) := \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow \begin{array}{l} S^{k)}(x_0) = 0 \quad \forall\, 0 \leq k \leq n \\ S^{n+1)}(x_0) = 1 \end{array}$$

Entonces, podemos aplicar $n+1$ veces el TVM Cauchy

$$\underbrace{\frac{R(x)}{S(x)}}_{R(x_0)=S(x_0)=0} = \underbrace{\frac{R(x)-R(x_0)}{S(x)-S(x_0)}}_{\substack{\text{TVM}\,\mathscr{C} \\ \exists\, \xi_1 \in J}} = \underbrace{\frac{R'(\xi_1)}{S'(\xi_1)}}_{R'(x_0)=0=S'(x_0)} = \underbrace{\frac{R'(\xi_1)-R'(x_0)}{S'(\xi_1)-S'(x_0)}}_{\substack{\text{TVM}\,\mathscr{C} \\ \exists\, \xi_2 \in J(\xi_1, x_0)}} = \frac{R''(\xi_2)}{S''(\xi_2)} = \cdots$$

$$\cdots = \frac{R^{n+1}(\xi)}{S^{n+1}(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{1} \Longleftrightarrow R(x) = f^{(n+1)}(\xi)\, S(x)$$

$$\Longrightarrow R(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)\,(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \square$$

Nota.- Aunque el Residuo de Lagrange es el más habitual se pueden encontrar otros en la literatura como:

$\boxed{\text{Residuo de Cauchy}}$: $R_n(x) = \dfrac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-\xi)^n$

$\boxed{\text{Residuo integral}}$: Si $f^{(n+1)}$ integrable en I, entonces

$$R_n(x) = \int \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\, dt$$

3.1. Fórmula de MacLaurin

Def^n.- Al polinomio de Taylor de grado n centrado en $x_0 = 0$ se ~~le~~ conoce como fórmula de MacLaurin

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(0)}{k!} x^k$$

Ejemplo.- Sea $f(x) = \cos x$.

Entonces

$f'(x) = -\sin x \rightsquigarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x \rightsquigarrow f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x \rightsquigarrow f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = \cos(x) = f(x) \rightsquigarrow f(0) = f^{IV}(0) = 1$

La fórmula de MacLaurin del $f(x) = \cos x$

$\cancel{\sum (-1)}$

$\Longrightarrow 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots$

Ejemplo.- Sea $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

La fórmula de MacLaurin de $f(x)$ de grado n cumple con el residuo de Lagrange

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$f^k(0) = 1$
$\forall k \in \mathbb{N}$

4. APLICACIONES DEL POLINOMIO DE TAYLOR

4.1. Aproximación de números

Como hemos mencionado, no todas las funciones son analíticas. De hecho

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

No lo es en $x_0 = 0$. Puesto que

$g^{k)}(0) = 0 \quad \forall k \Rightarrow P_n(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ No se puede aproximar por medio de polinomios.

Además $g \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$. Por tanto si $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ es el cjto de funciones analíticas se tiene que

$$\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{H}(\mathbb{R})$$

Por otro lado si retomamos el ejemplo anterior, podemos aproximar $\sqrt{e} = e^{1/2} = f(\frac{1}{2})$

Veamos que

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{e} = P_n\left(\tfrac{1}{2}\right) + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}, \quad \xi \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$R_n\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!\,2^{n+1}} > 0$$

Así, si queremos que $|R_n(\frac{1}{2})| < 10^{-5}$, es decir que tenga 4 decimales correctos, se puede calcular el grado necesario del polinomio de Taylor para garantizarlo.

$$\left|R_n\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| \leq 10^{-5} \Longleftrightarrow \frac{e^{\xi}}{(n+1)!\,2^{n+1}} < \frac{\cancel{3}\,2}{(n+1)!\,2^{n+1}} < 10^{-5}$$

$$\Longleftarrow \frac{1}{(n+1)!\,2^{(n+1)}} < 10^{-5}$$

si $n =$, lo cumple

4.2. Obtención de desigualdades

Sabemos de un ejemplo anterior que si queremos la formula de MacLaurin del $\cos(x)$, entonces

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{f'''(\xi)}{3!} x^3, \quad \xi \in (0, x)$$

Queremos probar que

$$1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

• Si $|x| > \pi \Rightarrow x^2 > \pi^2$. Entonces

$$-x^2 < -\pi^2$$

$$1-\frac{x^2}{2} < 1-\frac{\pi^2}{2} < 1-\frac{3^2}{2} = \frac{-7}{2} < -1 \leq \cos(x)$$

$$3 < \pi$$

$$1-3 > -\pi+1$$

• Si $|x| < \pi$, entonces $x \in (0,\pi)$ (1) ó $x \in (-\pi, 0)$

(1) $x \in (0,\pi) \Rightarrow \xi \in (0,\pi) \Rightarrow \sin \xi > 0$

$\rightarrow x^3 > 0$ $\quad \boxed{\sin \xi \, x^3 > 0}$

(2) $x \in (-\pi, 0) \Rightarrow +x^3 < 0$, $\sin \xi < 0$ $\Big\}$ $\sin \xi_0 x^3 > 0$

$$\Rightarrow 1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$R_n(x) > 0$

4.3. Cálculo de límites

En algunas ocasiones mejor que usar L'Hôpital se puede usar el polinomio de Taylor para resolver límites.

Ejemplo.- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + R_3(x)}{x} = 1 + \underbrace{\lim \frac{R_3(x)}{x}}_{\text{"0" el grado numerador es } 3>1} = 1$$

Taylor

4.4. Extremos relativos

También, nos puede a ayudar a razonar que clase de extremo relativo tenemos.

Sea f una función 2 veces derivable en c.
Además c es extremo relativo $\Longrightarrow f'(c) = 0$

Sea el desarrollo de Taylor centrado en c. Entonces, $\exists\, \xi \in I(x,c)$ t.q

$$f(x) = f(c) + \underbrace{f'(c)}_{\overset{\shortparallel}{0}}(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2$$

$$\Longrightarrow f(x) = f(c) + \frac{f''(\xi)}{2}\underbrace{(x-c)^2}_{\overset{\vee}{0}}$$

Entonces

$$f(x) - f(c) > 0 \iff f''(\xi) > 0$$

$$\Longrightarrow f(x) > f(c) \iff f''(\xi) > 0$$

Así si $x \to c \Longrightarrow \xi \to c$. Por tanto

c es un mínimo sii $f''(c) > 0$

c es máximo sii $f''(c) < 0$

5. Conclusiones

1h 30'