TEMA 63: FRECUENCIA Y PROBABILIDAD. LEYES DEL AZAR. ESPACIO PROBABILÍSTICO

Índice

1. Introducción

La teoría de probabilidad tiene sus orígenes en el estudio de los juegos de azar en el siglo XVII. Matemáticos como Blaise Pascal y Pierre de Fermat sentaron sus bases al analizar problemas relacionados con las apuestas y el reparto de ganancias. A partir de entonces y con la contribución de matemáticos ilustres como: J. Bernoulli, Laplace, Kolmogorov... esta disciplina evolucionó hasta convertirse en una herramienta fundamental.

Además, cabe señalar la diferente naturaleza entre sucesos o eventos. Los deterministas son aquellos en que la causa-efecto está bien determinada, lo que ayuda a anticipar con certeza lo que ocurrirá.

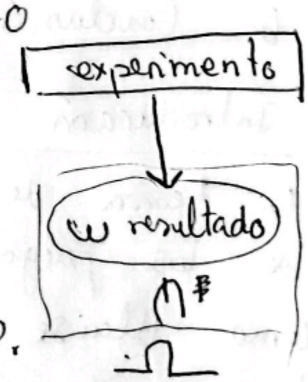
En cambio, los fenómenos aleatorios son aquellos cuyo comportamiento es incierto.

Así, la teoría de probabilidad pretende emular la ~~que~~ tarea de los científicos sociales, es decir, pretende abstraer el comportamiento de un fenómeno mediante un modelo matemático. Por tanto, la probabilidad utilizará modelos estocásticos ~~ne~~ para estudiar fenómenos aleatorios.

2. Experimento, resultado, espacio muestral y suceso

Observemos que si lanzamos una moneda sabemos que esta mostrará cara o cruz. De la misma forma, si extraemos una carta de una baraja española, dicha carta será de alguno de los 4 palos.

Es decir, el experimento realizado conlleva un resultado ω, cuya pertenencia a Ω está garantizada por la naturaleza del experimento y ser Ω el cjto de todos los posibles resultados del experimento.



Este cjto Ω se conoce como espacio muestral del experimento.

Sin embargo, a los subcjtos de Ω se les llamará sucesos a los cuales ω puede pertenecer o no.

Ejemplo.- Sea el experimento de lanzar un dado. Entonces, el espacio muestral asociado es

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Un suceso A podría ser obtener un número par. Así

$$w \in A \iff w \in \{2, 4, 6\}$$

Luego, si $w_1 = 3 \implies w_1 \notin A$.
Aunque otro resultado $w_2 = 6 \in A$.

2.1. Tipos de sucesos

Al ser los sucesos subcjtos de Ω, se puede aplicar las operaciones propias de teoría de cjtos. Existen sucesos cuya peculiaridad e importancia nos lleva a asignarles un nombre propio.

- Suceso cierto o seguro: cuando la ocurrencia está garantizada
- Suceso imposible: cuando no puede ocurrir
- Suceso complementario: cuando su ocurrencia está definida por la NO ocurrencia de otro suceso. Así A^c se denota al complementario de A, siendo

$$A^c = \{w : w \notin A\} = .$$

- Unión de sucesos: un suceso que es la unión de A, B se denota como $A \cup B$ siendo

$$A \cup B = \{w : w \in A \text{ o } w \in B\}.$$

- Intersección de sucesos: Sean A, B dos sucesos luego $A \cap B := \{ \omega : \omega \in A \wedge \omega \in B \}$

Además, se dicen sucesos incompatibles aquellos que $A \cap B = \emptyset$

Ejemplo.- Supongamos $A \cap A^c$ entonces

$$\omega \in A \cap A^c \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega \in A \\ \omega \in A^c \Rightarrow \omega \notin A \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A \cap A^c = \emptyset \Rightarrow A, A^c$ son sucesos incompatibles

3. σ-álgebra de cjtos. Espacio medible

En teoría de la medida se estudia la complejidad de asignar una "medida" para ciertos tipos de subcjtos. Luego, en teoría de probabilidad los sucesos (subcjtos de Ω) deben poseer una estructura mínima para garantizar la estabilidad entre uniones, intersecciones, complementación etc. Esto es, necesitamos una estructura algebraica para Ω que garantize dicha estabilidad, es decir, necesitamos una σ-álgebra para Ω

Defn.- Una familia de cjtos $\mathbb{A}$ definida sobre Ω decimos que es una σ-álgebra si cumple

i) $\Omega \in \mathbb{A}$

ii) si $A \in \mathbb{A} \Rightarrow A^c \in \mathbb{A}$

iii) $\{A_n\}_{n \geq 1} \in \mathbb{A}$ entonces $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathbb{A}$

<u>Nota</u>.- Evidentemente, el cjto de las partes de Ω, $P(\Omega)$ cumple la definición. Siendo además la σ- álgebra más grande que existe.

En ocasiones $P(\Omega)$ es demasiado grande para nuestros propósitos. Sin embargo, <u>no</u> siempre se pueden economizar esfuerzos y se toma $\mathbb{A} = P(\Omega)$, por ejemplo cuando Ω es numerable

En resumen, el cjto Ω vendrá acompañado de un σ-álgebra $\mathbb{A}$ construida sobre Ω, lo más conveniente posible. Así, el par $(\Omega, \mathbb{A})$ se le llama <u>espacio medible</u>.

<u>Nota</u>.- Así, se llama espacio medible puesto que es aquel donde tiene sentido hablar de la verosimilitud de que un suceso ocurra. Esa es la importancia de las σ-álgebras.

<u>Ejemplo</u>.- Sea un experimento que consiste en escoger un número al azar de $[0,1]$

Dada la complejidad de $P([0,1])$, entonces $\mathbb{A} \neq P([0,1])$. En estos casos, habitualmente se trabaja con la σ- álgebra de Borel, $\beta_{[0,1]}$.

Aquella que contiene todos los subintervalos de $[0,1]$ y la menor que los contiene a todos.

4. Probabilidad

Dado que en los fenómenos aleatorios no podemos afirmar la ocurrencia o no de un suceso. En probabilidad la pregunta que nos hacemos es:

$\boxed{\text{¿Qué posibilidad hay de que } \omega \in A\text{?}}$

Así, para dar respuesta a dicha pregunta necesitamos un tercer elemento que complemente nuestro espacio medible. En otras palabras, buscamos una función de probabilidad P t.q

$$P : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$ con ciertas condiciones

Históricamente, este objetivo se ha abordado de diversas maneras

4.1. Método frecuencialista

En este caso, se define $P(A)$ como la frecuencia relativa de ocurrencia de un suceso $A \in \mathbb{A}$. Sin embargo, algunos inconvenientes podrían ser:

i) Reproducibilidad del experimento

ii) No ofrece un marco para contestar a la pregunta a priori.

4.2. Método clásico. Fórmula de Laplace

Si el experimento tiene un Ω finito entonces

$P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$, conocida como fórmula de Laplace.

Nota pedagógica: $\dfrac{\text{Casos favorables}}{\text{casos posibles}}$

En este caso, las limitaciones se pueden resumir como:

i) NO podemos manejar casos continuos

ii) Se asume equiprobabilidad de cada resultado del experimento

4.3. Definición axiomática

A.N. Kolmogorov propuso en 1933 una definición axiomática para la medida de probabilidad. Dicha aproximación utilizaba los intentos anteriores y los incluía como casos particulares. Además, cabe señalar que, en realidad, su definición es una generalización de las propiedades frecuencia relativa.

Def.ⁿ — Una función $P: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre $\mathcal{A}$, σ-álgebra es una medida de probabilidad si cumple:

A.1.) No negatividad: $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

A.2.) $P(\Omega) = 1$

A.3.) Si $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ disjuntos 2 a 2 de $\mathcal{A}$, entonces

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} P(A_n)$$

Así, a la terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se le llama espacio de probabilidad.

5. Propiedades de la función de probabilidad

La función de probabilidad P cumple:

P.1. La probabilidad del $\emptyset$, $P(\emptyset)$ es cero

$\boxed{D}$ $\Omega = \Omega \cup \emptyset \cup \dots$, Luego como son disj 2 a 2 por A3

$$P(\Omega) = P(\Omega) + \sum_{n \geq 2} P(\emptyset) \underset{\boxed{A1}}{\Longrightarrow} P(\emptyset) = 0$$

no negativa $\square$

P.2. La probabilidad $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right)$ con $\{A_n\}_{n=1}^{n}$ disj 2 a 2 cumple

$\boxed{D}$
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Sea $\{\hat{A}_i\}_{i \geq 1}$ tal que $\hat{A}_i = A_i \ \forall i = 1, \dots, n$
disj 2 a 2 $\hat{A}_i = \emptyset \ \forall i > n$

$$\underset{\boxed{A3}}{\Longrightarrow} P\left(\bigcup_{i \geq 1} \hat{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \underbrace{\sum_{i > n} P(\emptyset)}_{=0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad \square$$

3. La probabilidad de A^c, $P(A^c)$ cumple

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$\boxed{D}$ $A^c \cap A = \emptyset$

$$\Omega = A^c \cup A \Longrightarrow P(\Omega) = 1 = P(A^c \cup A) \underset{\boxed{P2}}{=}$$

$$P(A^c) + P(A) = 1 \rightarrow$$

$$\Longrightarrow P(A^c) = 1 - P(A) \quad \square$$

$\boxed{P.4}$ Si $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$\boxed{D}$ Si $A = B \Rightarrow P(A) = P(B)$

si $A \neq B \Rightarrow B \setminus A \neq \emptyset$. Además, $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$

Luego, como $B = (B \setminus A) \cup A$ tenemos que

$$P(B) = P((B \setminus A) \cup A) \underset{\boxed{P.2}}{=} P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$\boxed{P.5}$ Si $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ entonces

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$\boxed{D}$ $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$ disj

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) \\ &= P(A_1) + \underbrace{P(A_2 \setminus A_1) + P(A_1 \cap A_2)}_{\text{disj 2 a 2}} \\ &\quad - P(A_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

11h20'' $\boxed{P.6}$ (Continuidad)

Sea $\{A_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión monótona (creciente o decreciente) de sucesos. Es decir $A_n \subset A_{n+1}$ (o $A_{n+1} \subset A_n$) donde

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n = A \quad \left(\text{o } \bigcap_{n \geq 1} A_n = A \right)$$

Entonces se cumple que

$$P(A) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$$

P. 7 (Subaditividad) Si tenemos una sucesión de sucesos $\{A_n\}_{n\geq 1}$ entonces

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} P(A_n)$$

6. CONCLUSIONES

La teoría de probabilidad tiene su fortaleza en su clara practicidad, lo que ayuda en el diseño de actividades e implementación en el aula.

Así, la historia ~~relaci~~ correspondencia entre Pascal y Fermat ~~es una~~ nos brinda un marco de trabajo inmejorable para nuestros alumnos de ESO e incluso Bachiller. Al final, su discusión radica en como repartir el dinero de un juego interrumpido con un marcador concreto. Es decir, hay que tomar una decisión sobre cuál es la forma más justa de repartir el premio.

Es evidente que hay diversas soluciones, sin embargo conocer de forma exacta cuáles eran nuestras opciones de ganar nos permite entablar una negociación asumiendo nuestras fortalezas o debilidades.

Así, estos contenidos conforman un marco importante para trabajar competencias y habilidades para logra el perfil de salida del alumno.

BIBLIOGRAFÍA

- Guillermo Ayala, Francisco Montes. Probabilidad básica. Universitat de València.