1 Introducció

Una de les activitats fonamentals en Matemàtiques és la resolució de problemes, però abans cal distingir què s'entén per *problema* i què s'entén per *exercici*. Un exercici es resol mitjançant una simple aplicació d'una tècnica coneguda, que resulta evident a primera vista; per exemple, calcular l'àrea d'un triangle donat, decidir si un determinat nombre és arrel d'un polinomi o calcular una integral racional. Així, la noció d'exercici està fortament lligada a la d'algorísmica. En canvi, un problema és quelcom més profund: planteja una tasca de recerca d'una acció adequada per assolir un objectiu ben definit i comprensible, però en un principi es desconeix la manera d'abordar-lo. Aquesta és la definició de problema que George Pólya donà en el seu llibre *Mathematical Discovery* (1961).

El camí que cal recórrer fins a la resolució d'un problema pot comportar la construcció de nous conceptes i establir relacions entre ells. Així, tal com veurem a la secció dels problemes clàssics, al llarg de la història de les Matemàtiques hi ha hagut problemes que per abordar-los ha fet falta desenvolupar noves teories i disciplines senceres.

2 Tècniques i estratègies de resolució

En aquesta secció veurem unes tècniques generals que poden ajudar a atacar un problema; tanmateix, com en qualsevol disciplina de la vida, l'aprenentatge de l'art de resolució de problemes només es pot dominar resolent-ne molts, cosa que pot comportar un temps considerable: la pràctica és una peça fonamental.

George Pólya, un famós matemàtic hongarès del s. XX, fou una de les figures clau en matèria de resolució de problemes. Va dedicar un esforç considerable en caracteritzar els mètodes que la gent fa servir a l'hora de resoldre problemes i a descriure com se n'ha d'aprendre i d'ensenyar. El seu llibre més conegut és *How To Solve It* (1945), amb més d'un milió de còpies venudes i traduït a diversos idiomes.

El professor Miguel de Guzmán, en el seu llibre *Aventuras Matemáticas* (1995), segueix l'obra de Pólya i desenvolupa una sèrie d'estratègies basades en els seus **quatre principis**:

A. **Entendre el problema.** De tan obvi que sembla, a vegades s'ignora i abordem la resolució sense haver fet una reflexió de les dades que tenim i a on volem arribar. Cal assegurar-nos que entenem perfectament les regles que podem fer servir, les dades i com es relacionen entre si. En la vessant de l'ensenyament de la resolució de problemes, Pólya suggereix que el professor faci les següents preguntes als estudiants:

- Què et demanen trobar o provar?
- Pots reescriure el problema amb les teves pròpies paraules?
- Hi ha prou informació per resoldre'l?
- Entens totes les paraules de l'enunciat?
- Necessites fer-te una pregunta per trobar la resposta?

B. **Cercar estratègies.** En aquest punt és bo fer un *brainstorming* o *pluja d'idees*, deixant de banda si ens semblen adequades o no a primera vista; aquest judici ja es farà en la següent fase (dur a terme l'estratègia). Una proposta d'estratègies, també denominades *heurístiques*, pot ser:

(i) **Cercar semblances amb altres problemes coneguts.** Pot ser que un problema ens recordi una situació que es presenta en un altre de familiar; això ens pot donar la clau per resoldre'l.

(ii) **Començar per allò més fàcil.** Sovint pot ajudar començar per un cas particular del problema: el seu estudi pot donar pistes de com abordar el cas general. O bé, podem simplificar-lo convertint-lo en quelcom que es pugui tractar més fàcilment: un problema que tingui menys elements, condicions més simples, nombres més baixos... És el conegut "divideix i venceràs".

(iii) **Experimentar i cercar regularitats.** És imprescindible familiaritzar-nos amb un problema complex jugant-hi, experimentant, emprant el mètode de prova i error. En una de les proves que fem podem trobar un patró, una pauta o un invariant que ens indiqui el camí a seguir.

(iv) **Fer un esquema clar.** Moltes persones pensen millor amb imatges que amb paraules. Si un enunciat es presta a fer-ne un gràfic o un esquema que el sintetitzi, val la pena fer-ho: molts cops una imatge val més que mil paraules. També pot considerar-se en aquest punt fer una llista ordenada o una taula.

(v) **Triar una bona notació.** A vegades un problema és intractable amb una notació inadequada i, en canvi, es torna clar quan s'escull una bona referència, o quan es posen uns noms adequats als seus elements. Leibniz i Euler van ser els creadors d'una gran part de la notació que encara avui fem servir i, gràcies a l'adequació a allò que volien representar, van aconseguir fer més fàcils problemes complicats.

(vi) **Cercar simetries, si s'escau.** La simetria que els problemes poden presentar és un element del qual sovint ens podem aprofitar, i convé recordar que no només hi ha simetries de tipus geomètric: per exemple, una equació també pot ser simètrica respecte de les seves variables.

(vii) **Suposar que el problema està resolt.** Molts cops, sobretot en els problemes de geometria en què se'ns demana trobar un cert objecte, si el provem de dibuixar aproximadament, a ull, podem veure més fàcilment quins són els elements auxiliars que necessitem i la manera de trobar-los.

(viii) **Emprar tècniques generals.** Per exemple:

- **Contrarecíproc o reducció a l'absurd,** això és, provar $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ equival a provar $\neg\mathcal{Q} \Rightarrow \neg\mathcal{P}$, o també suposar simultàniament $\mathcal{P}$ i $\neg\mathcal{Q}$ i intentar arribar a una contradicció.
- **Inducció matemàtica,** per demostrar propietats que són certes per a un conjunt infinit de nombres naturals.
- **Descens infinit,** ideat per Fermat, molt útil a l'hora de demostrar la no-existència de solucions enteres de determinades equacions.
- **El principi del colomar** de Dirichlet.
- etc...

C. **Dur a terme l'estratègia.** Un cop s'han anotat totes les idees que se'ns han acudit per al nostre problema concret, ara és el moment de *jutjar* quines poden tenir més probabilitats d'èxit. En aquesta fase serà important la presa de *decisions executives* per controlar el procés de resolució, com ara:

(i) **Triar primer les que semblen les idees més adequades per al problema,** però d'una en una i ordenadament, sense barrejar-les. Si en aquest moment se'ns acudeixen noves idees, no s'han de desestimar: les anotarem a la llista però les deixarem per a després, sense desviar massa l'atenció d'allò que fèiem.

(ii) **Persistir en una idea, però sense obsessionar-se.** Cal dedicar un temps raonable a provar cada una de les estratègies que se'ns hagin acudit i no abandonar fàcilment, sobretot, les idees que ens han semblat més bones. Però també s'ha de saber veure si les coses es compliquen massa o les idees ens porten a camins sense sortida.

(iii) **Revisar i comprovar bé la solució.** Sovint, l'emoció d'haver trobat una presumpta solució, no ens deixa veure els errors. Cal tornar a repassar bé tots els raonaments, assegurar-se que no hi ha "forats" i que la solució funciona per a tots els casos.

Està clar que a l'hora de prendre aquestes decisions executives s'ha de tenir un bon autocontrol i aquí també intervé la intel·ligència emocional de cadascú. De tant en tant cal que ens fem les preguntes: ¿per què estic fent això? ¿Ho podré fer servir per arribar al meu objectiu? ¿M'estic allunyant de l'objectiu?

D. **Revisar i estendre.** Un cop trobada la solució, no necessàriament hem de conformar-nos-hi: pot ser molt enriquidor provar de trobar-ne una altra més simple, més directa o més elegant. En tot cas, sempre és bo prendre un temps de reflexió sobre aquelles estratègies que hem emprat, quines han funcionat i quines no, quina ha estat la *idea feliç* que ha desencadenat tot el procés... D'aquesta manera es retroalimenta la nostra experiència i en el futur ens pot ajudar a triar més ràpidament una bona estratègia per a un altre problema. Ho podem resumir en cinc punts:

(i) **Examinar el camí seguit per arribar a la solució.**

(ii) **Mirar d'entendre *per què* ha funcionat efectivament aquesta estratègia.**

(iii) **Mirar de fer-ho ara més simple.**

(iv) **Estudiar altres àmbits d'aplicació del mètode emprat.**

(v) **Examinar el propi procés de pensament i treure'n conseqüències.**

3 Importància històrica

La resolució de problemes sempre ha estat l'autèntic motor de les Matemàtiques: és una ciència que no avança perquè sí, sinó per resoldre problemes que, a vegades, fa segles que s'han proposat i no estan resolts. En aquesta secció revisem breument tres d'aquests problemes històricament famosos, ja sigui per l'esforç que ha comportat llur resolució com per les tècniques que s'han desenvolupat arran seu.

3.1 El postulat de les paral·leles

Euclides, en el seu primer llibre dels *Elements*, dedicat a la geometria, enuncià cinc postulats que prengué com a veritats indemostrables a partir de les quals poder provar les proposicions o teoremes. Els quatre primers eren prou obvis com per dubtar de la seva categoria de postulats:

I. Per dos punts pot traçar-se una recta.

II. Tot segment pot prolongar-se per formar una recta.

III. Es pot traçar una circumferència donats el centre i el radi.

IV. Tots els angles rectes són iguals.

V. Si una recta talla unes altres dues formant en un costat angles interns que sumen menys de dos angles rectes, llavors les dues rectes, en prolongar-les, es tallen en aquest mateix costat.

Es pot demostrar que aquest postulat és equivalent al *postulat de les paral·leles*:

V'. Donada una recta i un punt que no hi pertany, per aquest punt hi passa una única paral·lela a la donada.

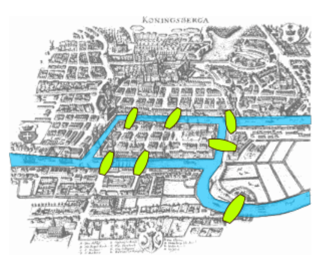
Donat el seu aspecte més complex, durant més de 2 000 anys es va creure que aquest cinquè postulat (o l'equivalent de les paral·leles) no era tal, sinó una proposició que es podia deduir dels altres quatre postulats i això és el que van mirar de provar molts matemàtics. Tots els intents de prova fallaven en algun punt, quan es feia alguna assumpció que, en el fons, era equivalent al cinquè postulat.

Després d'aquests segles de procés de *prova i error*, al s. XIX els matemàtics J. Bolyai i N. Lobatxevski, de manera independent l'un de l'altre, van enfocar el problema d'una manera radicalment diferent: van suposar certs els quatre primers postulats d'Euclides i fals el cinquè, amb l'esperança d'arribar a una contradicció que provés la dependència cercada. No només no van trobar cap contradicció, sinó que, a mesura que anaven progressant, s'adonaven que estaven construint un nou univers: una geometria perfectament consistent que tenia alguns punts de semblança amb de la d'Euclides però que era radicalment diferent en molts d'altres. Havien nascut les geometries no euclidianes.

Aquest és un exemple de problema la resolució del qual comporta el naixement d'una branca completament nova de la Matemàtica.

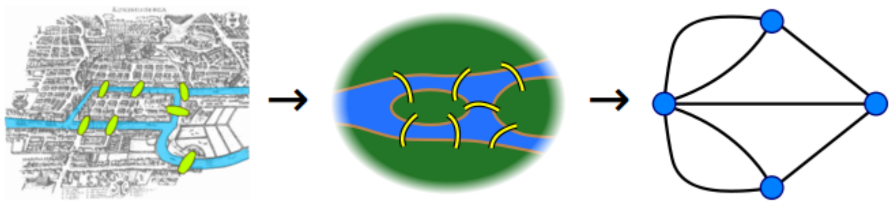
3.2 Els ponts de Königsberg

L'antiga ciutat prussiana de Königsberg (actualment Kaliningrad) és travessada per un riu que la divideix en quatre regions diferents, que al s. XVIII estaven unides mitjançant set ponts, tal com mostra la figura. Arran d'això, sorgí un problema que consistia a trobar un recorregut que passés un sol cop pels set ponts i tornés al mateix punt de partida.



Leonhard Euler va demostrar que no era possible un recorregut així fent una abstracció del mapa i *creant un esquema* en què només importaven les regions de terra, representades per punts, i els ponts que les connectaven, representades amb línies unint els punts.

A partir de l'esquema, Euler determinà que els punts intermedis de qualsevol recorregut com el demanat havien d'estar necessàriament connectats a un nombre parell de línies: una d'entrada i una de sortida. El mateix passava amb el punt de partida, que coincidia amb



el punt final. Per tant, una condició necessària perquè el problema tingués solució (i que més endavant Euler també demostraria suficient) era que no existís en l'esquema cap punt connectat a un nombre senar de línies, cosa que no passava en l'esquema de Königsberg. Per tant, el problema no tenia solució.

L'abstracció, en forma de representació esquemàtica, fou tan determinant per resoldre el problema i generalitzar-lo a altres casos que marcà el punt de partida de la *teoria de grafs*. En honor a Euler s'anomena *circuit eulerià* a un camí com el que es cerca en l'enunciat del problema.

3.3 La quadratura del cercle

La quadratura del cercle és un problema geomètric proposat per matemàtics de la Grècia clàssica, que va romandre més de dos mil·lenis sense ser resolt. És el repte de fer la construcció amb regle i compàs d'un quadrat amb la mateixa àrea que un cercle donat utilitzant únicament un nombre finit de passos.

Es va haver d'esperar fins al s. XIX, amb l'aparició i el desenvolupament de conceptes com ara *nombre algebraic*, *nombre transcendent* o *extensió de cossos quadràtica*, per demostrar la impossibilitat de la construcció. Quadrar el cercle equivalia a construir amb regle i compàs un quadrat de costat $\sqrt{\pi}$, però el s. XIX Lindemann demostrà que π és un nombre transcendent (això és, que π no és arrel de cap polinomi a coeficients enters) i, en conseqüència, també ho és $\sqrt{\pi}$. Unes dècades abans s'havia demostrat que tot nombre construïble amb regle i compàs s'obtenia fent un nombre finit d'extensions quadràtiques de $\mathbb{Q}$, en particular, tots els nombres construïbles havien de ser algebraics. Per tant, el problema de la quadratura del cercle no podia tenir solució.

El desenvolupament de l'àlgebra en aquest sentit també va servir per demostrar la impossibilitat de resolució d'altres dos problemes famosos de l'antiguitat: la duplicació del cub i la trisecció d'un angle qualsevol. En efecte, doblar el volum d'un cub d'aresta unitat equival a construir el nombre $\sqrt[3]{2}$ amb regle i compàs, que no és possible en ser $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \supset \mathbb{Q}$ una extensió de grau 3 i, de manera semblant, trisecar un angle equival a resoldre una cúbica, que en general no es pot fer amb regle i compàs.

4 Reflexió final

Com ja hem dit, el desenvolupament de la matemàtica ha anat sempre lligat a la resolució de problemes, motivats sovint pel desenvolupament tecnològic, econòmic i social de les civilitzacions al llarg de la història. Aquesta és, doncs, la via natural de fer Matemàtiques: en un moment determinat sorgeix una necessitat (problema), s'estudia, s'hi treballa i s'arriba (o no) a una solució, la qual pot servir de base per a futures investigacions en nous problemes.

L'educació tradicional sovint no ha tingut en compte aquest procés creatiu de baix cap a dalt i l'ha invertit, presentant la matemàtica com un ens perfecte, prefabricat i completament artificial. Convé que reflexionem sobre aquesta manera de procedir a l'aula i progressivament l'acostem a la manera històrica. La matemàtica es crea; no és quelcom que ens donen, que comprovem que funciona i que apliquem. No són fórmules màgiques que surten del no-res (per molt que demostrem que són certes). Es un procés de plantejament d'interrogants, d'experimentació, de creació i de posterior generalització, si s'escau. En conclusió, no fóra mala idea alleugerir el currículum i posar més èmfasi en la resolució de problemes reals, passant pel procés de contextualització, reflexió, experimentació i creació de models útils de forma autònoma.