1 Introducció

Els nombres que avui anomenem *complexos* durant molts anys foren motiu de polèmica i controvèrsia dins la comunitat científica. A poc a poc, donada la seva utilitat van acabar per ser acceptats, però no completament compresos fins a èpoques relativament recents (cosa que no és d'estranyar si pensem que els nombres negatius no foren plenament acceptats fins a finals del S.XVII).

Les primeres aparicions dels nombres complexos van ser al S.XVI amb els estudis sobre l'equació cúbica de Cardano i Bombelli. Al S.XVII Descartes afirmava que *"certes equacions algebraiques només tenen solució en la nostra imaginació"* i per això emprà el terme *imaginàries* per referir-s'hi. Des del S.XVI fins a finals del S.XVIII els imaginaris es tracten amb gran recel i desconfiança.

L'èxit d'Euler i Gauss al treballar amb complexos fou degut a que ells no es van preguntar sobre la naturalesa d'aquests nombres, sinó sobre la seva utilitat i què es podia fer amb ells. Això culminà el 1799 amb la demostració del *Teorema Fonamental de l'Àlgebra* per part de Gauss: tot polinomi de grau n a coeficients reals o complexos té n arrels que també són complexes, comptant les seves multiplicitats. El mateix Gauss és qui estableix el terme actual de *nombre complex* i fa popular la lletra i, ja usada abans per Euler.

A principis del S.XIX es comencen a interpretar els nombres complexos com vectors del pla, i el 1825 neix la teoria de funcions de variable complexa amb la publicació de la *Memòria sobre la Integració Complexa* de Cauchy.

2 El cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos

Considerem a $\mathbb{R}^2$ les operacions de suma i producte definides de la següent manera:

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$
$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$$

És molt fàcil comprovar que es verifiquen les propietats associativa i commutativa per ambdues, així com la distributiva del producte respecte de la suma. L'element neutre de la suma és el $(0, 0)$ i la unitat del producte el $(1, 0)$. A més, l'oposat de (x, y) és $(-x, -y)$ i l'invers de $(x, y) \neq (0, 0)$ és $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

Això es resumeix dient que $\mathbb{R}^2$, amb aquestes dues operacions definides, té estructura de cos. Simbolitzarem aquest cos per $\mathbb{C}$ i l'anomenarem *cos dels nombres complexos*.

2.1 Forma binòmica d'un nombre complex

Un nombre complex escrit tal i com l'hem definit, (x, y), es diu que està escrit en *forma cartessiana*, però no és la notació més adequada per operar amb aquests nombres. Per introduir una nova notació observem que

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$$
$$(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$$

això és, els complexos de la forma $(x, 0)$ amb les operacions que hem definit es comporten exactament igual que els reals amb les seves operacions. Això ens porta a identificar un complex del tipus $(x, 0)$ amb el nombre real x, i a la pràctica escriurem $(x, 0) = x$. Més concretament, $\mathbb{R} \times \{0\}$ és un subcòs de $\mathbb{C}$ isomorf a $\mathbb{R}$, de forma que podem pensar $\mathbb{R}$ immers en $\mathbb{C}$ de forma natural. Representem el nombre complex $(0, 1)$ per i i l'anomenem *unitat imaginària*. Amb tot això podem escriure

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy,$$

i diem que $x + iy$ és l'*expressió binòmica* del nombre complex (x, y). Si posem $z = x + iy$ direm que x és la *part real* de z i y la *part imaginària*, i ho escriurem respectivament $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$.

Observem la propietat fonamental de la unitat imaginària:

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

i amb això, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$. En general, per calcular i^n amb n arbitrari escrivim $n = 4q + r$ amb $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ i llavors $i^n = i^{4q+r} = (i^4)^q i^r = i^r$. Per exemple, $i^{2010} = i^{4 \cdot 502 + 2} = i^2 = -1$.

2.2 Absència d'ordre a $\mathbb{C}$

En fer l'ampliació de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ guanyem moltes coses però també en perdem alguna d'important, en aquest cas l'ordre: podem definir relacions d'ordre a $\mathbb{C}$ però *no n'hi ha cap que sigui compatible amb l'estructura algebraica*. En efecte, suposem que $<$ és una relació d'ordre que respecta l'estructura algebraica. Com $i \neq 0$ ha de ser $0 < i^2 = -1$ (que de moment no és contradictori perquè podria ser que $<$ no respectés l'ordre de $\mathbb{R}$), però també $0 < 1^2 = 1$ i llavors $0 < 1 + (-1) = 0$, i això sí que és una contradicció.

2.3 Conjugació i mòdul d'un nombre complex

Quan identifiquem $\mathbb{C}$ amb el pla cartessià anomenem *eix real* a l'eix d'abscisses i *eix imaginari* a l'eix d'ordenades.

Es defineix el *conjugat* del nombre complex $z = x + iy$ com $\bar{z} = x - iy$, i el seu *mòdul* com $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)} \in \mathbb{R}$. Geomètricament, si identifiquem el nombre complex $z = x + iy$ amb el vector (x, y) de $\mathbb{R}^2$ amb origen al $(0, 0)$, $|z|$ és la longitud o norma euclidiana del vector (x, y) (o la distància euclidiana del punt $(0, 0)$ al punt (x, y)), mentre que $\bar{z}$ és el vector simètric de z respecte de l'eix real.

Proposició. *Si $z, w \in \mathbb{C}$ tenim les següents propietats elementals:*

a) $\bar{\bar{z}} = z\ ,\ |z| = |\bar{z}|\ ,\ 2\mathrm{Re}(z) = z + \bar{z}\ ,\ 2i\mathrm{Im}(z) = z - \bar{z}$

b) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}\ ,\ \overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}\ ,\ |z|^2 = z\bar{z}$. *De les dues primeres es dedueix immediatament que si P és un polinomi a coeficients reals i $P(z) = 0$ llavors també $P(\bar{z}) = 0$.*

c) $\max\{|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|\} \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$, *amb igualtat quan* $\mathrm{Re}(z) = 0$ *o* $\mathrm{Im}(z) = 0$.

d) $|zw| = |z||w|$

e) *Desigualtat triangular: $|z + w| \leq |z| + |w|$, amb igualtat quan $z = \lambda w$ amb $\lambda \in \mathbb{R}^+$. En general, si $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ tenim $|\sum_{i=1}^n z_i| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|$.*

DEMOSTRACIÓ.

a) Immediates a partir de les definicions.

b) Es veuen fàcilment desenvolupant cada membre i veient que coincideixen.

c) Tenim que $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)} \geq \sqrt{\mathrm{Re}^2(z)} = |\mathrm{Re}(z)|$, i de la mateixa manera $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)} \geq \sqrt{\mathrm{Im}^2(z)} = |\mathrm{Im}(z)|$. Per tant $\max\{|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|\} \leq |z|$. Per altra banda,

$$|z|^2 = \mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z) \leq \mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z) + 2|\mathrm{Re}(z)||\mathrm{Im}(z)| = (|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|)^2,$$

i prenent arrels quadrades en ambdós membres tenim la desigualtat de l'enunciat. Veient la demostració queda clar que en tots dos casos assolim la igualtat quan $\mathrm{Re}(z) = 0$ o $\mathrm{Im}(z) = 0$.

d) $|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2$ i prenent arrels quadrades tenim la igualtat cercada.

e)

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z}+w\bar{w}+z\bar{w}+w\bar{z} = \\ &= |z|^2+|w|^2+z\bar{w}+\overline{z\bar{w}} = |z|^2+|w|^2+2\mathrm{Re}(z\bar{w}) \leq \\ &\leq |z|^2+|w|^2+2\mathrm{Re}|z\bar{w}| \leq |z|^2+|w|^2+2|z\bar{w}| = \\ &= |z|^2+|w|^2+2|z||w| = (|z|+|w|)^2, \end{aligned}$$

i prenem arrels quadrades. Suposant $z, w \neq 0$ i seguint la cadena d'expressions ens adonem que tindrem igualtat quan $\mathrm{Re}(z\bar{w}) = |z\bar{w}|$, que succeeix quan $z\bar{w} = \rho \in \mathbb{R}^+$. Multiplicant aquesta igualtat per w tenim $z|w|^2 = \rho w$, i posant $\lambda = \rho/|w|^2 \in \mathbb{R}^+$ tenim $z = \lambda w$, que és el que volíem. La generalització de la desigualtat triangular a n sumands es veu fàcilment per inducció. $\square$

2.4 Forma trigonomètrica i polar

Tot nombre complex $z = x + iy \neq 0$ es pot escriure com

$$z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right)$$

de manera que $\left(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|}\right)$ és un punt de la circumferència unitat i per tant existeix un $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\left(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|}\right) = (\cos\theta, \sin\theta)$, i llavors podem esciure

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta),$$

expressió que anomenarem *forma trigonomètrica* del nombre complex z. Habitualment també s'usa la notació $z = \rho_\theta$ on $\rho = |z|$, que anomenem *forma polar* de z.

Està clar que hi ha infinits $\theta \in \mathbb{R}$ que verifiquen la igualtat $z = \rho_\theta$, i es diferencien en múltiples enters de 2π. De tots ells n'hi ha un de sol que es troba en l'interval $(-\pi, \pi]$. Aquest és el que anomenarem *argument principal* de z i el notarem com $\theta = \arg(z)$.

A la pràctica calcularem $\arg(z)$ usant l'expressió $\arctan(y/x)$ pels casos no trivials, però cal anar amb compte perquè $\theta = \arg(z) \in (-\pi, \pi]$ mentre que $\arctan(t) \in (-\pi/2, \pi/2)$. Per salvar això considerarem diferents casos: si $x = 0$ i $y > 0$ el nombre z és un *imaginari pur* i aleshores és evident que $\theta = \pi/2$, ja que es troba sobre la part positiva de l'eix imaginari. De forma similar, si $x = 0$ i $y < 0$, z també és imaginari pur i ara $\theta = -\pi/2$.

Si $x > 0$ llavors z es troba en el primer o quart quadrants del pla cartessià, de forma que $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ i en aquest cas podem obtenir θ de l'arctangent: $\theta = \arctan(y/x)$. Si $x < 0$ i $y \geq 0$ tenim que z és al segon quadrant i $\theta \in (\pi/2, \pi]$. Observem que $-z$ és al quart quadrant i $\theta = \arg(z) = \arg(-z) + \pi = \arctan(-y/(-x)) + \pi = \arctan(y/x) + \pi$. Finalment, si $x < 0, y < 0$, z es troba al tercer quadrant i $-z$ al primer, de manera que $\theta = \arg(z) = \arg(-z) - \pi = \arctan(-y/(-x)) - \pi = \arctan(y/x) - \pi$.

Així doncs, amb aquest raonament hem provat:

Proposició. *L'argument principal θ de $z = x + iy \neq 0$ ve donat per:*

$$\theta = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \pi/2 & \text{si } x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0,\ y < 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0,\ y \geq 0 \\ \arctan(y/x) - \pi & \text{si } x < 0,\ y < 0 \end{cases}$$

La forma trigonomètrica o polar és la més adequada per calcular productes o potències de nombres complexos. En efecte, si $z = \rho_\theta$ i $w = \sigma_\phi$ llavors

$$\begin{aligned} zw &= \rho_\theta \sigma_\phi = \rho\sigma(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) = \\ &= \rho\sigma\big((\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + i(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)\big) = \\ &= \rho\sigma(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)) = (\rho\sigma)_{\theta+\phi}, \end{aligned}$$

és a dir, per calcular el producte de dos complexos multipliquem els seus mòduls i sumem els seus arguments (sempre tenint en compte que la suma dels arguments principals no té per què ser l'argument principal del producte, sinó un representant equivalent). En particular, si $z = w$ tenim que $z^2 = (\rho^2)_{2\theta}$, i amb una senzilla inducció ho podem generalitzar per la n-èsima potència, obtenint la

Fórmula de De Moivre. *Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, amb $z = \rho_\theta$ i $n \in \mathbb{N}$ llavors*

$$z^n = (\rho^n)_{n\theta} = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

Observem també que si $z = \rho_\theta$ llavors

$$z^{-1} = \frac{1}{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)} = \rho^{-1}(\cos\theta - i\sin\theta) = \rho^{-1}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = (\rho^{-1})_{-\theta},$$

amb la qual cosa deduïm que per calcular el quocient de dos nombres complexos $z/w = zw^{-1}$ dividim els seus mòduls i restem els arguments. Amb aquesta observació també podem concloure que la fórmula de De Moivre també és certa si n és un enter negatiu.

2.5 Arrels d'un nombre complex

Donat $z \neq 0$ un nombre complex, volem trobar les solucions de l'equació $w^n = z$ amb $n > 1$. Escrivint els dos nombres en forma polar, $z = \rho_\theta$, $w = \sigma_\phi$, i usant la fórmula de De Moivre, reescrivim l'equació

$$w^n = z \;\Leftrightarrow\; (\sigma^n)_{n\phi} = \rho_\theta \;\Leftrightarrow\; \sigma^n = \rho \;\text{ i }\; n\phi = \theta + 2k\pi \;\Leftrightarrow\; \sigma = \sqrt[n]{\rho} \;\text{ i }\; \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n},$$

de manera que donant valors a k entre 0 i $n-1$ obtinc n nombres complexos diferents que són solució de l'equació $w^n = z$ i que anomenem *arrels n-èsimes de z* (no tenim més solucions ja que un polinomi de grau n no pot tenir més de n arrels). De totes elles anomenem *arrel n-èsima principal de z* a la que obtenim prenent $k = 0$ i la representem per $\sqrt[n]{z}$, això és,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}(\cos(\theta/n) + i\sin(\theta/n)).$$

Notem que les n arrels de z es troben sobre una circumferència de radi $\sqrt[n]{\rho}$, ja que totes tenen aquest mateix mòdul, i dues arrels "consecutives" difereixen en un angle de $2\pi/n$ (entenen per "consecutives" les que obtenim prenent dos valors consecutius de k en la fórmula que ens proporciona les n arrels, o bé $k = n-1, k = 0$). Per tant aquestes n arrels són els vèrtexs d'un polígon regular de n costats centrat a l'origen i de radi $\sqrt[n]{\rho}$.

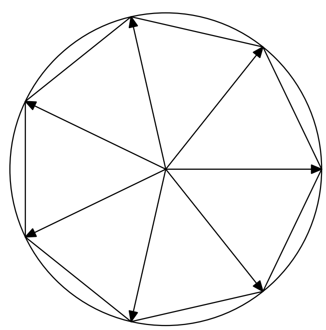

Figura 1: Arrels setenes de la unitat.

Si $z, w \in \mathbb{C}$ cal observar que, en general, la igualtat $\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$ no és certa, ja que el producte de dues arrels n-èsimes principals és una arrel n-èsima del producte (doncs $(\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w})^n = zw$) però no té per què ser principal. Així per exemple, l'arrel quadrada principal de -1 és i, i l'arrel quadrada principal de 1 és 1, llavors $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$ i en canvi $\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$.

3 L'exponencial complexa

La sèrie de potències $\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$ és convergent per tot $z\in\mathbb{C}$ (es pot deduir aplicant el criteri del quocient per sèries de potències complexes). Anomenem llavors *exponencial complexa* a la funció definida com

$$\exp(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n.$$

Proposició. *Sigui $z=x+iy\in\mathbb{C}$. La funció $\exp(z)$ verifica les següents propietats:*

a) $\exp'(z)=\exp(z)$ *per a tot z.*

b) $\exp(0)=1$.

c) $\exp(z)$ *estén l'exponencial real, és a dir,* $\exp(x)=e^x\ \forall x\in\mathbb{R}$.

d) *Teorema d'adició:* $\exp(z+w)=\exp(z)\exp(w)$.

e) *Fórmula d'Euler: si $\theta\in\mathbb{R}$ es compleix* $\exp(i\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$. *En particular prenent $\theta=\pi$ tenim la important igualtat* $\exp(i\pi)+1=0$.

f) $\exp(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$.

g) $\exp(z)\neq 0$ *per a tot $z\in\mathbb{C}$.*

Demostració.

a) Com la sèrie que defineix l'exponencial és convergent podem derivar terme a terme, i llavors

$$\exp'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}z^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n=\exp(z).$$

b) En prendre $z=0$ a la sèrie s'anul·len tots els termes excepte el primer que val 1.

c) Per $x\in\mathbb{R}$ sabem que $e^x=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n$ (sèrie de Taylor de e^x al voltant de $x=0$).

d) Sigui $a\in\mathbb{C}$ i considerem la funció $H(z)=\exp(a-z)\exp(z)$. Com a conseqüència de (a) si la derivem resulta $H'(z)=0$ de manera que $H(z)$ és constant a $H(0)=\exp(a)$, això és, $\exp(a)=\exp(a-z)\exp(z)$. Prenent $a=z+w$ tenim la igualtat de l'enunciat.

e) Aplicant la definició,

$$\exp(i\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\theta)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

doncs les dues últimes sèries són les sèries de Taylor de $\cos\theta$ i $\sin\theta$ respectivament.

f) Es dedueix immediatament de les dues propietats anteriors.

g) $|\exp(z)| = e^x > 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}$. □

Si a la fórmula d'Euler canviem θ per $-\theta$ obtenim $\exp(-i\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$ i de les dues igualtats podem aïllar $\cos\theta$ i $\sin\theta$, obtenint les *equacions d'Euler*:

$$\cos\theta = \frac{\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{\exp(i\theta) - \exp(-i\theta)}{2i}$$

que ens proporcionen el punt de partida per definir les funcions trigonomètriques complexes.

4 Aplicacions dels nombres complexos

Per multiplicar dos nombres complexos multipliquem els mòduls i sumem els arguments. Per tant, geomètricament, multiplicar un complex w per $z = \rho_\theta$ equival a aplicar a w un gir d'angle θ seguit d'una homotècia de raó ρ. Així, identificant vectors de $\mathbb{R}^2$ amb nombres complexos, podem fer servir aquests per calcular girs i homotècies en el pla cartessià.

En la branca de la trigonometria, la fórmula de De Moivre (usada amb el teorema del binomi) és una eina útil per calcular les raons trigonomètriques de l'angle doble, triple, etc.

A l'àlgebra usem fórmules on intervenen nombres complexos per resoldre equacions de grau superior a 2. Encara que una equació tingui totes les solucions reals, podem resoldre-la passant per $\mathbb{C}$. Tal i com va dir Hadamard: *"El camí més curt entre dues veritats de l'anàlisi real passa amb freqüència per l'anàlisi complexa"*.

El conjunt de les n arrels n-èsimes de la unitat proporciona un punt de partida excel·lent per introduir la teoria de grups en el Batxillerat. D'una forma didàctica es poden identificar aquestes arrels amb rotacions del pla que deixen invariant un polígon regular de n costats, i a partir d'aquí introduir les nocions de subgrup, generador, ordre d'un element dins el grup...

Finalment, els nombres complexos s'usen amb gran freqüència en la enginyeria electrònica per descriure els senyals periòdics variables. En una expressió del tipus $z = \rho\exp(i\theta)$ s'identifica ρ amb l'amplitud i θ amb la fase d'una ona sinusoidal d'una certa freqüència.

5 (extra) Una demostració informal del Teorema fonamental de l'Àlgebra

El Teorema fonamental de l'Àlgebra ens diu que tot polinomi de grau n

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

amb $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, té n arrels complexes comptant les seves multiplicitats. Això s'enuncia de forma equivalent dient que $\mathbb{C}$ és un cos *algebraicament tancat*. És evident que n'hi ha prou en demostrar que P té almenys una arrel s, doncs llavors dividim $P(z)$ per $z - s$ i obtenim un polinomi de grau $n-1$ sobre el que repetim el procés. Com $P(z)/a_n$ té les mateixes arrels que $P(z)$ podem suposar sense pèrdua de generalitat que a_n=1, i també $a_0 \neq 0$ ja que en cas contrari $z = 0$ seria una arrel de P i hauríem acabat.

Considerem els $s \in \mathbb{C}$ que es troben sobre una circumferència de radi molt petit centrada en l'origen. Com $|s|$ és molt petit, les imatges $P(s)$ descriuran una corba tancada al voltant de $P(0) = a_0 \neq 0$, i per continuïtat de P podem assegurar que aquesta corba també serà prou petita i no arribarà a encerclar el 0.

Ara considerem els $s \in \mathbb{C}$ que es troben sobre una circumferència de radi molt gran centrada en l'origen. Llavors

$$P(s) = s^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{s} + \cdots + \frac{a_0}{s^n}\right) = s^n(1+\delta),$$

on $\delta \in \mathbb{C}$ i $|\delta|$ és arbitràriament petit quan $|s|$ és arbitràriament gran, i per tant $|P(s)| \simeq |s|^n$ de manera que les imatges de s descriuran una corba que és molt propera a una circumferència de radi $|s|^n$. Però és evident que aquesta corba sí encercla el 0. Per tant, per continuïtat deduïm que ha d'existir una circumferència de radi comprès entre els dos que hem considerat, tal que la seva imatge per P és una corba que talla el 0, de manera que hi ha un $s \in \mathbb{C}$ sobre aquesta circunferència tal que $P(s) = 0$.