TEMA 3. TÈCNIQUES DE RECOMPTE. COMBINATÒRIA.

ÍNDEX.

3. TÈCNIQUES DE RECOMPTE. COMBINATÒRIA

1. INTRODUCCIÓ

1.1. JUSTIFICACIÓ DELS CONTINGUTS

Aquest tema està estructurat en funció de les diferents tècniques de recompte existents. Així, diferenciem el seu contingut en dos grans blocs: els recomptes en que importa l'ordre i els que no. Els treballarem un per un mitjançant la seva formulació acadèmica i formal, per després veure exemples i aplicacions.

El desenvolupament d'aquest tema es basa en la legislació vigent (citada a la bibliografia), especialment en el decret 171/2022 i en l'actual convocatòria d'oposicions.

1.2. CONEIXEMENTS PREVIS

Pel desenvolupament d'aquest tema necessitarem els coneixements sobre les operacions aritmètiques bàsiques (tema 1) i sobre la teoria de conjunts (tema 11).

2. FACTORIAL D'UN NOMBRE NATURAL

Anomenem factorial d'un nombre $n \in \mathbb{N}$ al producte d'n factors consecutius, des d'n fins l'1.

Es denota per $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$.

PROPIETATS:

1) $0! = 1$
2) $n! \cdot (n+1) = (n+1)!$
3) $n! \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdots m = m!$

3. VARIACIONS

3.1. VARIACIONS ORDINÀRIES

Anomenem variacions ordinàries d'm elements escollits d'n en n $(n \leq m)$ als diferents grups que es poden formar de manera que en cada grup hi ha n elements distints i els grups es diferencien entre ells en algún element o en l'ordre de col·locació.

Ho denotem per $V_{m,n}$.

Veiem les possibles variacions per un conjunt:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$$

· Variacions monàries: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m \Rightarrow V_{m,1} = m.$

· Variacions binàries:

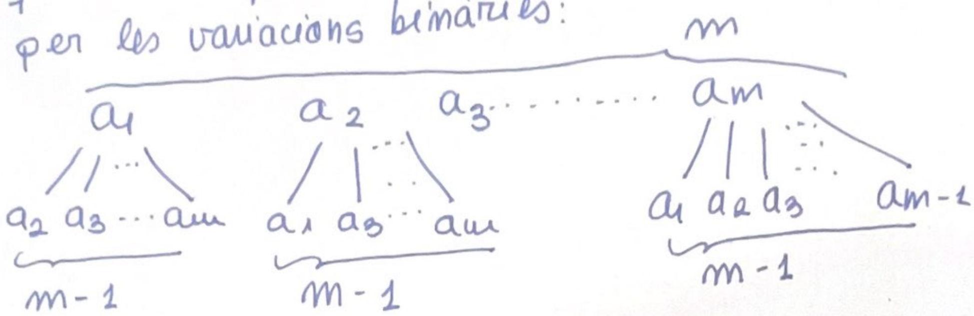
$$\text{m elements} \left\{ \begin{array}{llll} a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 \cdots & a_1a_m \\ a_2a_1 & a_2a_3 & a_2a_4 \cdots & a_2a_m \\ \vdots & & & \\ \underbrace{a_ma_1 \quad a_ma_2 \quad \cdots}_{m-1 \text{ elements}} & & & a_ma_{m-1} \end{array} \right. \Rightarrow V_{m,2} = m\cdot(m-1)$$

Així, de manera inductiva, podem generalitzar les variacions ordinàries com:

$$V_{m,n} = m\cdot(m-1)\cdots\cdots(m-(n-1)) =$$

$$= m\cdot(m-1)\cdots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Més enllà de la representació gràfica, les variacions ordinàries es poden comprendre com un **diagrama d'arbre** on cada rama es bifurca en el nombre de possibilitats que existeix per escollir el següent element. Vegem-ho per les variacions binàries:



De forma que existeixen m possibilitats pel primer nivell i $m-1$ pel segon.

Exemple: En un campionat de tenis hi ha 9 participants ¿ de quantes maneres es pot formar el podi de 3 persones?

$$V_{9,3} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{9!}{6!} = 504 \text{ possibilitats.}$$

3.2. VARIACIONS AMB REPETICIONS

Anomenem **variacions amb repeticions d'm elements** escollits **d'n en n** (notem que ara n pot ser major que m) als diferents grups que es poden formar de manera que en cada grup hi ha n elements, puguent repetir-se algun dels elements un o diversos cops. A més, es consideren distints dos grups si difereixen en algun element o en l'ordre de col·locació. Ho denotem per **$VR_{m,n}$**.

Veiem les possibilitats pel conjunt $A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$.

- Monàries: $a_1, a_2, \dots, a_m \Rightarrow VR_{m,1} = m$.
- Binàries

$$m\left\{\begin{array}{cccc} a_1a_1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_m \\ a_2a_1 & a_2a_2 & \cdots & a_2a_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_ma_1 & a_ma_2 & \cdots & a_ma_m \end{array}\right. \Rightarrow VR_{m,2} = m\cdot m = m^2$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{m}$$

Notem que tenim els mateixs grups que a les variacions ordinàries però incloent els grups en que hi ha elements repetits.

Així, podem generalitzar les variacions amb repetició com

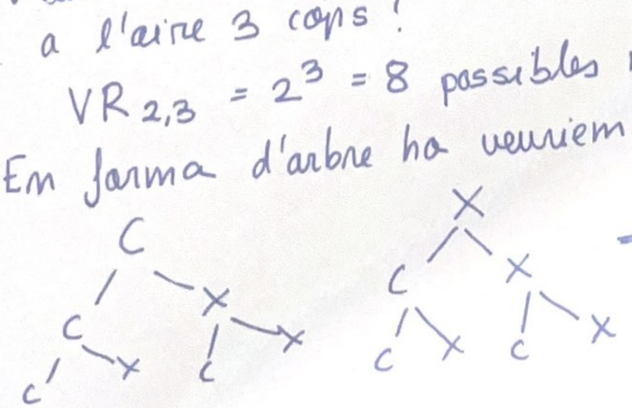
$$VR_{m,n} = \underbrace{m\cdot\ldots\cdot m}_{n} = m^n$$

De la mateixa manera que al cas anterior, podem recòrrer al diagrama d'arbre per representar totes les possibilitats que existeixen. Veiem-ho al següent exemple:

¿Quants resultats podem obtenir en llençar una moneda a l'aire 3 cops?

$VR_{2,3} = 2^3 = 8$ possibles resultats

En forma d'arbre ho veuríem com:



$\Rightarrow$ 8 possibilitats

Tot això ens permet connectar part de la combinatòria amb la probabilitat.

4. PERMUTACIONS.

4.1. PERMUTACIONS ORDINÀRIES

Anomenem permutacions ordinàries, o sense repetició, d'm elements, al conjunt format per totes les formes possibles d'ordenar els m elements, que son distints entre si distingint dues permutacions entre si pel seu ordre de col·locació.

Això implica que la permutació d'm elements s'intifiqui amb una variació d'm elements escollits d'm en m. Ho denotem per P_m, i per tant:

$$P_m = V_{m,m} = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-(m-1)) =$$
$$= m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = m!$$

Exemple: De quantes formes diferents es poden seure 5 persones en 5 seients distints?

- Importa l'ordre
- Els elements són distints — No hi ha repeticions
- Ordenem 5 elements en grups de 5

$\Rightarrow P_5 = 5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$ formes distintes

4.2 PERMUTACIONS AMB REPETICIÓ:

Les permutacions amb repetició fan referència a la combinació d'm elements en grups d'm en m, on no tots els elements són distints entre si.

És a dir, tenim a elements d'un tipus, b d'un altre tipus, ... i així succesivament fins arribar als m elements. Ho denotem per $P_m^{a,b,c,\dots}$

Per calcular aquest tipus de permutacions les permutacions amb repetició hem de relacionar-les amb les permutacions ordinàries.
Notem que a les permutacions amb repetició, en haver-hi elements iguals, prescindim de les seves permutacions.
Així, podem expressar una permutació ordinària a partir d'una amb repetició, afegint les permutacions dels elements que són iguals:

$$P_m^{a,b,c} \cdot a! \cdot b! \cdot c! = P_m$$

$$\Rightarrow P_m^{a,b,c} = \frac{P_m}{a! \cdot b! \cdot c!} = \frac{m!}{a! \cdot b! \cdot c!}$$

On a, b, c fan referència al nombre de cops que es repeteixen cadascun dels elements iguals.

Exemple: Quantes paraules distintes, tinguin sentit o no, poden formar-se amb les lletres de la paraula BANANA?

- Importa l'ordre
- Ordenem 6 elements en grups de 6
- La lletra A es repeteix 3 cops
- La lletra N es repeteix 2 cops

$$\Rightarrow P_{3,2}^{6} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2!} = \frac{120}{2} =$$

$= 60$ paraules distintes

Amb aquest últim apartat acabem amb els tipus de recompte en que sí importa l'ordre de col·locació.
Veiem, ara, aquells en que l'ordre no és important.
Però abans hem d'introduir el concepte de nombre combinatori.

5. NOMBRES COMBINATORIS

Definim el nombre combinatori $\binom{m}{n}$, llegit com m sobre n, com la següent expressió:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

PROPIETATS.-

i) $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$

ii) $\binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} = m$

iii) $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$

iv) Fórmula de Stifel: $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$

Les tres primeres propietats es dedueixen directament a partir de la definició. La quarta, anomenada fórmula de Stifel, la demostrem a continuació:

$$\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \frac{(m-1)!}{(n-1)!\,(m-1-(n-1))!} + \frac{(m-1)!}{n!\,(m-1-n)!} =$$

$$= \frac{(m-1)!}{(n-1)!\cdot(m-n)!} + \frac{(m-1)!}{n!\,(m-1-n)!} = \frac{(m-1)!\cdot n}{n!\,(m-n)!} + \frac{(m-1)!\cdot(m-n)}{n!\,(m-n)!} =$$

$$= \frac{(m-1)!\cdot(m-n+n)}{n!\cdot(m-n)!} = \frac{(m-1)!\cdot m}{n!\,(m-n)!} = \frac{m!}{n!\cdot(m-n)!} = \binom{m}{n}.$$

Aquesta igualtat ens permet obtenir ràpidament els nombres combinatoris de numerador m, coneguts els de numerador $m-1$. S'obté així, el famós triangle aritmètic atribuït a Tartàglia però d'origen molt més antic:

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \\ &&&&\vdots&&&& \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} &&&&\binom{0}{0}&&&& \\ &&&\binom{1}{0}&&\binom{1}{1}&&& \\ &&\binom{2}{0}&&\binom{2}{1}&&\binom{2}{2}&& \\ &\binom{3}{0}&&\binom{3}{1}&&\binom{3}{2}&&\binom{3}{3}& \\ \binom{4}{0}&&\binom{4}{1}&&\binom{4}{2}&&\binom{4}{3}&&\binom{4}{4} \\ &&&&\vdots&&&& \end{array}$$

Passem, ara sí, a veure les combinacions ordinàries:

6. COMBINACIONS

6.1. COMBINACIONS ORDINÀRIES.

Anomenem combinació ordinària, o sense repetició, d'm elements escollits d'n en n $(n \leq m)$, als diferents grups que podem formar amb n d'aquests m elements de maner que els grups són diferents entre si només si es diferenciïen en algún element, donc no importa l'ordre de col·locació. Ho denotem per $C_{m,n}$.

Veiem els possibles combinacions ordinàries que podem formar amb els elements del conjunt $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$.

• Combinacions monàries: $a_1, a_2, \dots, a_m \Rightarrow C_{m,1} = m$

• Combinacions binàries:

$$
\left.
\begin{array}{llllll}
a_1 a_2 & \overbrace{a_1 a_3 \quad a_1 a_4 \quad \cdots\cdots}^{m-1 \text{ elements}} & a_1 a_m \\
 & a_2 a_3 \quad a_2 a_4 \quad \cdots & a_2 a_m \\
 & \qquad\quad a_3 a_4 \quad \cdots & a_3 a_m \\
 & \qquad\qquad\qquad \cdots & a_m a_{m-1}
\end{array}
\right\} m \text{ elements}
$$

Notem que en aquest cas estem contemplant la meitat dels grups que al cap de a les variacions ordinàries, doncs estem eliminant els "elements simètrics" en no importar l'ordre:

$$C_{m,2} = \frac{m \cdot (m-1)}{2}$$

Amb tot, observem que les combinacions ordinàries són, en essència, variacions sense repetició de les quals hem suprimit aquells grups on es repeteixen els mateixos elements però en ordre distint. És a dir seleccionem una de cada agrupació amb n elements i prescindim de les seves permutacions:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m \cdot (m-1) \cdots (m-(n-1))}{n!} =$$

$$= \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}$$

Exemple: Quants equips diferents de 4 persones podem formar d'un grup de 10 participants?

- No importa l'ordre
- Els elements no es repeteixen
- Grups de 4 a partir de 10 elements

$C_{10,4} = \binom{10}{4} = 210$ possibles equips.

6.2. COMBINACIONS AMB REPETICIÓ

Anomenem combinacions amb repetició d'm elements escollits d'm en n ($n \leq m$) a les diferents agrupacions d'n elements, iguals o distints, que podem formar de manera que dues combinacions difereixen entre si en almenys un element, sense importar l'ordre de col·locació. Ho denotem per $CR_{m,n}$.

Veiem totes les possibilitats pel conjunt $A = \{a_1, a_2, \dots a_m\}$

- Monàries: $a_1, a_2, \dots, a_m \Rightarrow CR_{m,1} = C_{m,1} = m$
- Binàries:

$$\left.\begin{array}{llllll} \multicolumn{6}{c}{\overbrace{\hphantom{a_1a_1\ a_1a_2\ a_1a_3\ a_1a_4 \cdots\cdots a_1a_m}}^{m \text{ elements}}} \\ a_1a_1 & a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 & \cdots\cdots & a_1a_m \\ & a_2a_2 & a_2a_3 & a_2a_4 & \cdots\cdots & a_2a_m \\ & & a_3a_3 & a_3a_4 & \cdots & a_3a_m \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & a_ma_m \end{array}\right\} \begin{array}{l} m+1 \\ \text{elements} \end{array}$$

Notem que, en aquest cas, tenim les mateixes agrupacions que a les combinacions ordinàries però afegint l'element a_ia_i $i \in \{1, \dots, n\}$ en cada columna i sorgint una nova fila, per tant:

$$CR_{m,2} = \frac{m \cdot (m+1)}{2} = C_{m+1,2}$$

En general, per (poder) formar $CR_{m,n}$, és suficient en partir de les combinacions ordinàries i afegir, una per una, les agrupacions en que es repeteixen elements:
cada agrupació que té elements repetits

$$CR_{m,n} = C_{m-1+n} = \binom{m-1+n}{n}$$

Exemple: Quantes fitxes té el joc del dòmino?

- Nombres del 0 al 6 (7 elements)
- Es poden repetir
- Grups de 2 per cada fitxa

$$\Rightarrow CR_{7,2} = \binom{7-1+2}{2} = \binom{8}{2} = 28 \text{ fitxes}$$

Abans de veure alguns exemples d'aplicacions, resumim al següent esquema les tècniques de recompte vistes:

importa l'ordre?
- sí → Variacions o permutacions → Intervenen tots els elements?
  - sí → Permutacions → Es repeteixen elements
    - sí → $P_m^{a,b,c\ldots}$
    - NO → P_m
  - NO → Variacions → Es repeteixen elements
    - sí → $VR_{m,n}$
    - NO → $V_{m,n}$
- NO → Combinacions → Es repeteixen els elements?
  - sí → $CR_{m,n}$
  - NO → $C_{m,n}$

7. APLICACIONS

7.1 POTÈNCIA ENÈSSIMA D'UN BINOMI

Els nombres combinatoris, a banda de pel càlcul de combinacions, sorgeixen també i són útils en altres contexts.

En particular, els nombres combinatoris ens permeten trobar una fórmula generalitzada pel binomi $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Veiem-ho pels primers casos d'n:

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = 1a + 1b$

$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot b^2$

$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3a^2 \cdot b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3$

$\vdots$

Com es pot apreciar, els coeficients dels termes que van seguint, coincideixen amb els que surten en cada fila del triangle de Tartàglia.

Així, es construeix la fórmula general com:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

o també $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i$

D'altra banda, tal i com es veu als temes següents, les tècniques de recompte estan íntimament relacionades amb els diagrames en arbre (tema 2) i amb el recompte en experiments aleatoris que es regeixen per la fórmula de Laplace (temes 63 i 64).