1 Introducció. Isometries

Si (X, d) és un espai mètric, una *isometria de* X és una aplicació $f : X \longrightarrow X$ que conserva les distàncies, això és, $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

És objecte d'estudi de l'àlgebra lineal i de la geometria lineal la caracterització de les isometries de $\mathbb{R}^n$. Es demostra que tota isometria f és de la forma $f(x) = Mx + \vec{v}$ on M és una matriu ortogonal ($M^t \cdot M = I$, això és, els vectors columna de M formen una base ortonormal) i $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. A partir d'aquest fet, les isometries del pla euclidià $\mathbb{R}^2$ es classifiquen en:

- **Isometries *directes* o *positives***, que són aquelles en què $\det M = 1$ i, per tant, conserven l'orientació del pla. També s'anomenen *moviments*. A part de la identitat, hi trobem les *translacions*, les *rotacions* i les *simetries centrals*.
- **Isometries *inverses* o *negatives***, que són aquelles en què $\det M = -1$ i, per tant, inverteixen l'orientació del pla. Hi trobem les *simetries axials* o *reflexions* i les *reflexions amb lliscament*.

És evident que la composició de dues isometries és també una isometria i que per a cada isometria f n'existeix una altra g tal que $g \circ f = I$, la isometria inversa. Això ho podem resumir dient que el conjunt d'isometries, amb l'operació de composició, té estructura de grup. En la següent secció definirem amb precisió cadascuna d'aquestes isometries i estudiarem els resultats de compondre'n dos d'elles. Finalment, estudiarem les classes de configuracions del pla euclidià que resten invariants per l'acció de certs grups d'isometries.

2 Estudi de les isometries del pla

Una *translació* és una isometria $\tau_{\vec{v}}$ definida per $\tau_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}$ per a algun $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. La translació $\tau_{\vec{v}}$ queda ben definida per la imatge d'un únic punt P arbitrari. No té cap punt fix perquè $\tau_{\vec{v}}(P) = P \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$ i les rectes fixes són totes les que tenen la direcció de $\vec{v}$. De la definició es dedueix immediatament que la composició de dues translacions $\tau_{\vec{v}}$ i $\tau_{\vec{w}}$ és commutativa i en resulta una translació de vector $\vec{v} + \vec{w}$:

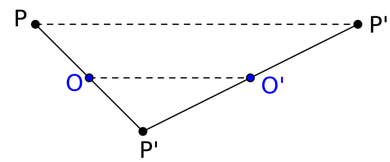
$$\tau_{\vec{w}} \circ \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}} \circ \tau_{\vec{w}} = \tau_{\vec{v}+\vec{w}}.$$

Una *rotació* de centre O i angle α amb $0 < \alpha < 2\pi$, que notarem $\rho_{O,\alpha}$, és la isometria $\rho_{O,\alpha}(P) = P'$ tal que $\angle POP' = \alpha$. L'únic punt fix és O i si $\alpha \neq \pi$ no hi ha rectes fixes perquè el vector director, en girar un angle α, canvia de direcció.

El cas particular d'una rotació de centre O i angle π s'anomena *simetria central* de centre O. La notarem η_O i verifica que O és el punt mig de P i $P' = \eta_O(P)$ per a tot P. Igual que la resta de rotacions, només manté fix el punt O però en aquest cas totes les rectes per O són fixes, perquè la transformada d'una recta és una de paral·lela.

Proposició. *La composició de dues simetries centrals de centres O i O' (en aquest ordre) és una translació de vector $2\overrightarrow{OO'}$, això és,*

$$\eta_{O'} \circ \eta_O = \tau_{2\overrightarrow{OO'}} = \tau^2_{\overrightarrow{OO'}}.$$



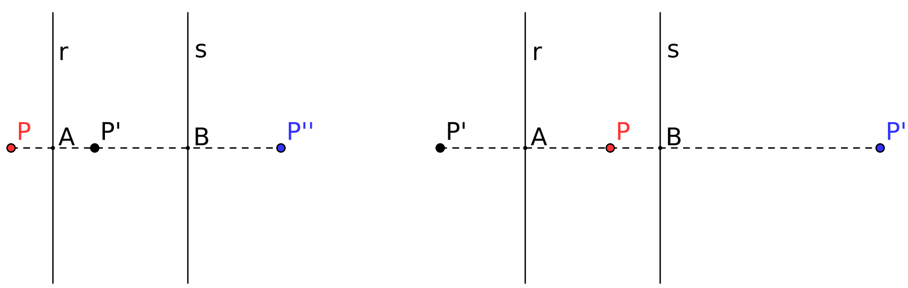
Demostració. Si $P' = \eta_O(P)$ i $P'' = \eta_{O'}(P')$, només cal observar el triangle $\triangle PP'P''$ per adonar-se que O i O' són els punts mitjos dels costats PP' i $P'P''$. Pel teorema de Tales, PP'' és paral·lel a OO' i mesura el doble. $\square$

Una *simetria axial* o *reflexió* d'eix r, σ_r, és la isometria $\sigma_r(P) = P'$ tal que r és la mediatriu de PP'. Els únics punts fixos són els de l'eix, i les rectes fixes són les ortogonals a l'eix. Una reflexió és sempre una involució, això és, $\sigma^2 = I$.

Proposició. *La composició de dues simetries axials $\sigma_s \circ \sigma_r$ és:*

- *si r i s són paral·leles, una translació de vector $2\overrightarrow{AB}$ on $AB \perp r, s$, $A \in r$, $B \in s$;*
- *en cas contrari, una rotació de centre O i radi 2α, on $O = r \cap s$ i $\alpha = \widehat{rs}$.*

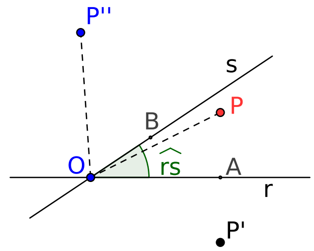
Demostració. Si r i s són paral·leles, sigui $P' = \sigma_r(P)$, $P'' = \sigma_s(P')$, de manera que $P'' = (\sigma_s \circ \sigma_r)(P)$. Si $A = PP' \cap r$ i $B = P'P'' \cap s$ llavors, per la definició de reflexió, A i B són els punts mitjos de PP' i de $P'P''$ respectivament. La figura mostra dos casos per a dues posicions diferents de P respecte de r i s:



Per tant podem escriure

$$\overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''} = 2\overrightarrow{AP'} + 2\overrightarrow{P'B} = 2(\overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{P'B}) = 2\overrightarrow{AB}.$$

Si r i s no són paral·leles, sigui $O = r \cap s$. Com abans, sigui $P' = \sigma_r(P)$, $P'' = \sigma_s(P')$ i considerem els punts mitjos $A = PP' \cap r$ i $B = P'P'' \cap s$. Com r és la mediatriu de PP', també biseca $\angle POP'$ i el mateix passa amb s i $\angle P'OP''$. Així, si tenim en compte que els angles que escrivim són orientats (això és, $\angle POP' = -\angle P'OP$) podem posar



$$\angle POP'' = \angle POP' + \angle P'OP'' = 2\angle AOP' + 2\angle P'OB = 2(\angle AOP' + \angle P'OB) = 2\angle AOB,$$

que és, tal com volíem veure, dues vegades l'angle que formen r, s. □

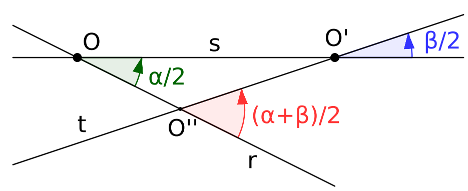
D'aquest resultat en deduïm un altre d'important:

Proposició. *Qualsevol rotació de centre O i angle α es pot escriure com a composició de dues reflexions amb eixos concurrents en O i que formin un angle de $\alpha/2$. A més, un d'aquests eixos pot triar-se arbitràriament.* □

Amb això podem estudiar ara què resulta de compondre dues rotacions.

Proposició. *Siguin $\rho_{O,\alpha}$ i $\rho_{O',\beta}$ són dues rotacions. Si $O = O'$, la composició $\rho_{O',\beta} \circ \rho_{O,\alpha}$ és $\rho_{O,\alpha+\beta}$. Si $O \neq O'$, llavors la composició és una rotació d'angle $\alpha + \beta$ si $\alpha + \beta \neq 2\pi$, o bé una translació si $\alpha + \beta = 2\pi$.*

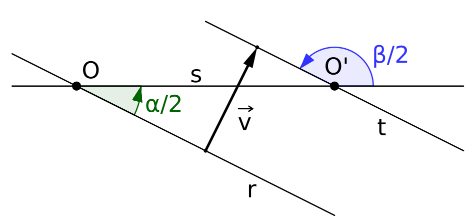
Demostració. Si $O = O'$, el resultat és trivial. Suposem $O \neq O'$ i $\alpha + \beta \neq 2\pi$. Considerem les rectes s per OO', r per O tal que $\widehat{rs} = \alpha/2$ i t per O' tal que $\widehat{st} = \beta/2$, com mostra la figura. Llavors, en virtut del resultat anterior podem fer la descomposició



$$\rho_{O',\beta} \circ \rho_{O,\alpha} = (\sigma_t \circ \sigma_s) \circ (\sigma_s \circ \sigma_r) = \sigma_t \circ (\sigma_s)^2 \circ \sigma_r = \sigma_t \circ \sigma_r.$$

En ser $\alpha/2 + \beta/2 \neq \pi$, les rectes r i t no són paral·leles i podem escriure $O'' = r \cap t$. Aleshores, com $\angle OO'O'' = \beta/2$, $\angle O'O''O = \pi - (\alpha + \beta)/2$ i $\widehat{rt} = (\alpha + \beta)/2$, de manera que la composició $\sigma_t \circ \sigma_r$ és una rotació de centre O'' i angle $\alpha + \beta$.

Suposem ara que $\alpha + \beta = 2\pi$, de forma que $\alpha/2 + \beta/2 = \pi$ i les rectes r i t són paral·leles, com mostra la figura. Llavors, igual que abans, $\rho_{O',\beta} \circ \rho_{O,\alpha} = \sigma_t \circ \sigma_r$ i ara aquesta composició és una translació de vector $2\vec{v}$, on $\vec{v}$ és un vector que uneix un punt de r amb un de t i és ortogonal a ambdues. □



Si $\tau_{\vec{v}}$ és una translació de vector $\vec{v}$ i r és una recta, farem un abús de notació i escriurem $\tau_{\vec{v}}(r)$ com $r + \vec{v}$.

Proposició. *La composició d'una reflexió σ_r seguida d'una translació $\tau_{\vec{v}}$ amb $\vec{v} \perp r$ és una nova reflexió $\sigma_{r'}$ amb $r' = r + \vec{v}/2$. Si fem la composició en el sentit invers, el resultat és el mateix però amb $r' = r - \vec{v}/2$.*

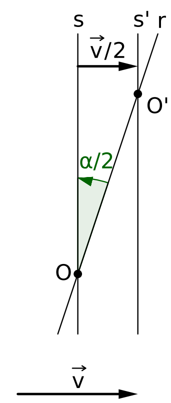
Demostració. En efecte, si posem $r' = r + \vec{v}/2$ podem fer la descomposició

$$\tau_{\vec{v}} \circ \sigma_r = (\sigma_{r'} \circ \sigma_r) \circ \sigma_r = \sigma_{r'} \circ \sigma_r^2 = \sigma_{r'}.$$

Si ara posem $r' = r - \vec{v}/2$ tindrem

$$\sigma_r \circ \tau_{\vec{v}} = \sigma_r \circ (\sigma_r \circ \sigma_{r'}) = \sigma_r^2 \circ \sigma_{r'} = \sigma_{r'}. \qquad \square$$

Proposició. *La composició d'una rotació $\rho_{O,\alpha}$ seguida d'una translació $\tau_{\vec{v}}$ és una altra rotació $\rho_{O',\alpha}$ de diferent centre però d'igual angle.*



Demostració. Tal com mostra la figura, tracem per O una recta s perpendicular a $\vec{v}$ i també per O una recta r tal que $\widehat{rs} = \alpha/2$. Si $s' = s + \vec{v}/2$, llavors podem fer la següent descomposició:

$$\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{O,\alpha} = (\sigma_{s'} \circ \sigma_s) \circ (\sigma_s \circ \sigma_r) = \sigma_{s'} \circ \sigma_s^2 \circ \sigma_r = \sigma_{s'} \circ \sigma_r,$$

que és una rotació de centre $O' = r \cap s'$ i angle $2\widehat{rs'} = 2\widehat{rs} = \alpha$. $\square$

Com una simetria central η_O és un cas particular de rotació $\rho_{O,\pi}$, el mateix resultat també és cert per a les simetries centrals.

Una *simetria amb lliscament* és una reflexió σ_r seguida d'una translació $\tau_{\vec{v}}$ amb $\vec{v}$ paral·lel a r. La notem $\gamma_{r,\vec{v}}$. La composició que la defineix és commutativa, això és, $\tau_{\vec{v}} \circ \sigma_r = \sigma_r \circ \tau_{\vec{v}}$. No té cap punt fix i l'única recta fixa és l'eix r. També és immediat comprovar que $\gamma_{r,\vec{v}}^2 = \tau_{2\vec{v}} = \tau_{\vec{v}}^2$.

Ja hem vist que el resultat de compondre una reflexió amb una translació perpendicular a l'eix és una nova reflexió d'eix paral·lel a l'inicial. Estudiem ara el cas general $\tau_{\vec{v}} \circ \sigma_r$ on $\vec{v}$ forma amb r un angle arbitrari: sempre podem descompondre $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ amb $\vec{u}$ paral·lel a r i $\vec{w} = \vec{0}$ o $\vec{w} \perp r$. Aleshores,

$$\tau_{\vec{v}} \circ \sigma_r = \tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{w}} \circ \sigma_r = \tau_{\vec{u}} \circ \sigma_{r'} = \gamma_{r',\vec{u}},$$

en ser r' paral·lel a r i, per tant, a $\vec{u}$. Com la composició de translacions commuta i també ho fa la reflexió amb la translació paral·lela, la composició en sentit invers $\sigma_r \circ \tau_{\vec{v}}$ dóna un resultat semblant:

$$\sigma_r \circ \tau_{\vec{v}} = \sigma_r \circ \tau_{\vec{w}} \circ \tau_{\vec{u}} = \sigma_{r''} \circ \tau_{\vec{u}} = \gamma_{r'',\vec{u}},$$

amb r'' paral·lel a r.

De manera similar obtenim el resultat de compondre una reflexió σ_r amb una rotació $\rho_{O,\alpha}$: descomponem $\rho_{O,\alpha} = \sigma_s \circ \sigma_{r'}$ amb $r' \cap s = O$, r' paral·lela a r i $\widehat{r's} = \alpha/2$. Llavors, si $\vec{v}$ és un vector perpendicular a r, r' tal que $r' = \vec{v}/2 + r$ i el descomponem com $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ amb $\vec{u}$ paral·lel a s i $\vec{w} \perp s$, podem escriure

$$\rho_{O,\alpha} \circ \sigma_r = \sigma_s \circ \sigma_{r'} \circ \sigma_r = \sigma_s \circ \tau_{\vec{v}} = \sigma_s \circ \tau_{\vec{w}} \circ \tau_{\vec{u}} = \sigma_{s'} \circ \tau_{\vec{u}} = \gamma_{s',\vec{u}},$$

per a una certa s' paral·lela a s. La composició en el sentit invers $\sigma_r \circ \rho_{O,\alpha}$ es dedueix de manera semblant i també en resulta una simetria amb lliscament.

Finalment, els casos de composicions que involucren simetries amb lliscament es redueixen fàcilment als ja vistos descomponent $\gamma = \tau \circ \sigma$ o bé $\gamma = \sigma \circ \tau$ depenent del cas. Així doncs,

$$\begin{aligned}
&\tau \circ \gamma = \tau \circ \tau' \circ \sigma = \tau'' \circ \sigma = \gamma', \\
&\rho \circ \gamma = \rho \circ \tau \circ \sigma = \rho' \circ \sigma = \gamma', \\
&\sigma \circ \gamma = \sigma \circ \sigma' \circ \tau = \begin{cases} \tau' \circ \tau = \tau'' & \text{si } \sigma \parallel \sigma' \\ \rho \circ \tau = \rho' & \text{si } \sigma \nparallel \sigma' \end{cases}, \\
&\gamma' \circ \gamma = \tau \circ \sigma \circ \gamma = \begin{cases} \tau \circ \tau' = \tau'' & \text{si } \sigma \circ \gamma = \tau' \\ \tau \circ \rho = \rho' & \text{si } \sigma \circ \gamma = \rho \end{cases}.
\end{aligned}$$

3 Grups discrets de simetries del pla euclidià

S'anomena *grup euclidià de dimensió 2*, i es nota $E_2(\mathbb{R})$, el grup de les isometries del pla euclidià. Si C és una determinada *configuració* del pla (això és, un subconjunt de punts i rectes), direm que G és el *grup de simetries de* C si $G \subset E_2(\mathbb{R})$ i tota $f \in G$ compleix $f(C) = C$, això és, C resta invariant per l'acció de tot element de G.

Per exemple, el grup de simetries d'un quadrat és $G = \{I, \rho, \rho^2, \rho^3, \sigma_h, \sigma_v, \sigma_{d_1}, \sigma_{d_2}\}$, on I és la identitat, ρ és la rotació d'angle $\pi/2$ al voltant del centre del quadrat, σ_h és una reflexió horitzontal, σ_v n'és una de vertical i $\sigma_{d_1}, \sigma_{d_2}$ són les reflexions per les diagonals. Es veu fàcilment que G està generat per ρ i σ_h, que escrivim com $G = \langle \rho, \sigma_h \rangle$, perquè $\sigma_{d_1} = \rho \circ \sigma_h$, $\sigma_v = \rho^2 \circ \sigma_h$ i $\sigma_{d_2} = \rho^3 \circ \sigma_h$ com a conseqüència de tot allò que hem vist en la secció anterior. Així com aquest grup és discret (més encara, és finit), el grup de simetries d'una circumferència és no discret; es tracta del *grup ortogonal* $O_2(\mathbb{R})$ format per totes les rotacions i reflexions pel centre de la circumferència.

Una translació queda unívocament determinada pel seu vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Així, podem considerar que el conjunt de translacions és isomorf a $\mathbb{R}^2$. Com tota isometria es pot escriure com una composició d'una translació i una transformació ortogonal (això és, una rotació o una reflexió), podem escriure

$$E_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2 \times O_2(\mathbb{R}).$$

El nostre objectiu consisteix ara a estudiar els grups de simetries discrets del pla euclidià (tots aquells dotats d'una topologia discreta). Sigui G un grup així i fixem-nos primer en el subgrup de translacions que conté, això és, el subgrup $G \cap \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^2$. El següent resultat, que no provarem, caracteritza l'estructura d'aquests subgrups discrets:

Teorema. *Si L és un subgrup discret de $\mathbb{R}^n$, aleshores existeixen m vectors $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m$ linealment independents de $\mathbb{R}^n$ tals que $L = \mathbb{Z}\vec{e}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\vec{e}_m$. Un L així s'anomena* reticle.

Per tant, segons aquest resultat, si G és el grup de simetries d'una configuració C, hi ha tres possibilitats que estudiarem separadament:

- $G \cap \mathbb{R}^2 = \{0\}$, de manera que $G \subset O_2(\mathbb{R})$, això és, G és un grup discret de transformacions ortogonals i direm que C és un *rosetó*;
- $G \cap \mathbb{R}^2 = \mathbb{Z}\vec{u}$, de manera que C és invariant per translacions $\tau_{n\vec{u}} = \tau_{\vec{u}}^n$ amb $n \in \mathbb{Z}$; direm que C és una *sanefa* o *fris*;
- $G \cap \mathbb{R}^2 = \mathbb{Z}\vec{u} \oplus \mathbb{Z}\vec{v}$, de manera que C és invariant per translacions $\tau_{n\vec{u}+m\vec{v}} = \tau_{\vec{v}}^m \circ \tau_{\vec{u}}^n$ amb $n, m \in \mathbb{Z}$; direm que C és un *mosaic*.

3.1 Rosetons

Leonardo Da Vinci ja va intuir (tot i que amb un llenguatge molt diferent) que els grups de simetries d'un rosetó només podien ser de dos tipus concrets. És per això que el teorema que els caracteritza duu el seu nom:

Teorema de Leonardo. *Si G és un grup de simetries discret del pla euclidià tal que $G \cap \mathbb{R}^2 = \{0\}$, llavors G és finit i és isomorf a un grup cíclic d'ordre n (C_n) o bé a un grup dièdric d'ordre $2n$ (D_n).*

El grup cíclic d'ordre n és $C_n = \langle a \rangle$ amb $a^n = e$ (element neutre), de forma que $C_n \cong \mathbb{Z}/(n)$. El grup dièdric d'ordre $2n$ és $D_n = \langle a, b \rangle$ tal que $a^n = e$, $b^2 = e$ i $(ab)^2 = e$. En l'exemple de l'inici de la secció, el grup de simetries d'un quadrat és $D_4 = \langle \rho, \sigma_h \rangle$. En general, D_n és el grup de simetries d'un polígon regular de n costats.

No provarem el teorema de Leonardo però farem unes observacions a partir de les quals no és difícil de demostrar: G no pot contenir translacions (obvi, perquè $G \cap \mathbb{R}^2 = \{0\}$) ni simetries amb lliscament γ (perquè llavors contindria $\gamma^2 = \tau$ una translació). Si conté més d'una rotació, llavors totes tenen el mateix centre. En efecte, si n'hi hagués dues amb centres diferents les podríem descompondre com $\rho_O = \sigma_r \circ \sigma_s$ i $\rho_{O'} = \sigma_r \circ \sigma_t$ on r és la línia de centres OO' i llavors G contindria $\rho_O^{-1} \circ \rho_{O'}^{-1} \circ \rho_O \circ \rho_{O'} = \sigma_s \circ \sigma_r \circ \sigma_t \circ \sigma_r \circ \sigma_r \circ \sigma_s \circ \sigma_r \circ \sigma_t = (\sigma_s \circ \sigma_r \circ \sigma_t)^2$. Com $\sigma_s \circ \sigma_r \circ \sigma_t$ és composició de 3 isometries inverses, és una isometria inversa i per tant només pot ser una reflexió σ_ℓ o una simetria amb lliscament γ. Això darrer no pot ser perquè llavors $(\sigma_s \circ \sigma_r \circ \sigma_t)^2 = \tau$ i ja hem dit que G no pot contenir translacions; en l'altre cas tindríem $\sigma_s \circ \sigma_r \circ \sigma_t = \sigma_\ell$, això és, $\sigma_s \circ \sigma_r = \sigma_\ell \circ \sigma_t$, cosa que és absurda perquè el membre esquerre és una rotació de centre $r \cap s$ i el membre dret una rotació de centre $t \cap \ell$ amb $r \cap s \neq t \cap \ell$. Finalment, si G conté reflexions tots els eixos passen per un punt comú, perquè en cas contrari en compondre-les dos a dos produirien translacions o rotacions de centres diferents (òbviament, si G també conté rotacions, el punt comú dels eixos és el centre de les rotacions).

3.2 Sanefes

Ja hem dit que una sanefa C té un grup de simetries G que conté una translació mínima de vector $\vec{u}$, de manera que $\langle \tau_{\vec{u}} \rangle \subset G$ i llavors C està formada per un patró P d'amplada $||\vec{u}||$ (que podem anomenar *cel·la fonamental*) que es repeteix indefinidament segons translacions múltiples enteres de $\vec{u}$. Abusant del llenguatge, podríem escriure $C = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (P + \tau_{\vec{u}}^n)$. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que la sanefa s'estén d'esquerra a dreta, això és, que $\vec{u}$ és un vector paral·lel a l'eix d'abscisses.

És evident que si G conté reflexions només poden ser les verticals, d'eix ortogonal a $\vec{u}$, i una d'horitzontal, d'eix paral·lel a $\vec{u}$ i pel centre de la cel·la fonamental. Les notarem σ_v i σ_h respectivament. A més, la distància entre dos eixos verticals qualssevol ha de ser un múltiple enter de $||\vec{u}||/2$, del contrari produirien una translació de vector no múltiple enter de $\vec{u}$. Si G conté simetries amb lliscament γ en què el vector de translació no és $n\vec{u}$, està clar que l'eix ha de ser l'horitzontal i la translació mínima ha de ser de vector $\vec{u}/2$, perquè llavors $\gamma^2 = \tau_{\vec{u}}$. Per aquest motiu, σ_h no pot conviure amb una γ en G perquè la composició $\gamma \circ \sigma_h$ produeix una translació de vector $\vec{u}/2$. Finalment, les úniques rotacions que pot contenir G són les d'angle π, això és, simetries centrals η, perquè són les úniques que preserven la posició horitzontal de C.

Amb totes aquestes observacions ja podem fer una classificació dels diferents tipus de sanefes en funció dels elements que conté el seu grup de simetries. Per fer-ho emprarem la notació cristal·logràfica, que consisteix en un codi format per 4 caràcters: per a les sanefes el primer és sempre una "p"; el segon és "m" si $\sigma_v \in G$ o "1" en cas contrari; el tercer és "m" si $\sigma_h \in G$, "a" si $\gamma \in G$ o "1" en cas contrari, i el quart és "2" si $\eta \in G$ i "1" en cas contrari. Així doncs, distingim per ordre tots els casos i, quan trobem una combinació factible, donem un exemple de sanefa usant patrons de lletres:

- $\sigma_v \notin G$ (G serà un p1xx):
  - $\sigma_h, \gamma \notin G$ (G serà un p11x). Tenim dos casos:
    - $\eta \notin G \Rightarrow G =$p111. Exemple: ... b b b b b b... (cel·la fonamental: "b")
    - $\eta \in G \Rightarrow G =$p112. Exemple: ... b q b q b q... (cel·la fonamental: "b q")
  - $\sigma_h \in G$ (G serà un p1mx). No podem tenim $\eta \in G$ perquè llavors tindríem $\eta \circ \sigma_h = \sigma_v \circ \sigma_h \circ \sigma_h = \sigma_v$. Així,
    - $\eta \notin G \Rightarrow G =$p1m1. Exemple: ... c c c c c c... (cel·la fonamental: "c")
  - $\gamma \in G$ (G serà un p1ax). No podem tenim $\eta \in G$ perquè llavors tindríem $\eta \circ \gamma = \sigma_v \circ \sigma_h \circ \sigma_h \circ \tau_{\vec{v}} = \sigma_v \circ \tau_{\vec{v}} = \sigma_{v'}$. Així,
    - $\eta \notin G \Rightarrow G =$p1a1. Exemple: ... b p b p b p... (cel·la fonamental: "b p")
- $\sigma_v \in G$ (G serà un pmxx):
  - $\sigma_h, \gamma \notin G$ (G serà un pm1x). No podem tenim $\eta \in G$ perquè llavors tindríem $\eta \circ \sigma_v = \sigma_h \circ \sigma_v \circ \sigma_v = \sigma_h$. Així,
    - $\eta \notin G \Rightarrow G =$pm11. Exemple: ... b d b d b d... (cel·la fonamental: "b d")
  - $\sigma_h \in G$ (G serà un pmm$x$). Forçosament hi ha $\eta \in G$ perquè $\sigma_v \circ \sigma_h = \eta$. Així,
    - $\eta \in G \Rightarrow G =$pmm2. Exemple: ... o o o o o o... (cel·la fonamental: "o")
  - $\gamma \in G$ (G serà un pma$x$). Forçosament hi ha $\eta \in G$ perquè $\sigma_v \circ \gamma = \sigma_v \circ \tau_{\vec{v}} \circ \sigma_h = \sigma_{v'} \circ \sigma_h = \eta$. Així,
    - $\eta \in G \Rightarrow G =$pma2. Exemple: ... b d p q b d p q... (cel·la fon.: "b d p q")

En resum, trobem que hi ha 7 grups de simetries diferents per a les sanefes.

3.3 Mosaics

Aplicant les mateixes tècniques que hem vist es pot arribar a deduir que hi ha 17 grups de simetries diferents per als mosaics. Aquí els grups de simetries són més rics: poden haver-hi reflexions i simetries amb lliscament en dues direccions no perpendiculars i rotacions d'ordre 2, 3, 4 i 6 en diversos centres.

Els mosaics són importants en l'art i en l'arquitectura: es poden destacar l'enrajolat hexagonal del Passeig de Gràcia de Barcelona (amb rotacions d'ordre 6), els mosaics de l'Alhambra de Granada, on s'hi troben els 17 models diferents, i els famosos tessel·lats de l'artista M. C. Escher (*Rèptils*, amb rotacions d'ordre 3, o *Àngels i Dimonis*) tant en el pla euclidià com en diferents models hiperbòlics.