1 Motivació per al càlcul de primitives

Diem que la funció F és una *primitiva* de f si $F' = f$. El *teorema fonamental del càlcul* ens assegura que, si f és una funció definida en $[a, b]$, fitada i integrable, llavors la funció $F(x) = \int_a^x f$ és derivable en tot punt $c \in [a, b]$ en què f sigui contínua, i a més $F'(c) = f(c)$. Un corol·lari immediat d'aquest resultat, conegut com a *regla de Barrow*, és que si g és una primitiva qualsevol de f, llavors $\int_a^b f = g(b) - g(a)$. A més a més, existeix una generalització de la regla de Barrow amb una hipòtesi més feble: no cal que f sigui contínua; és suficient que sigui integrable.

Per tant, el càlcul d'integrals definides (i, conseqüentment, el càlcul d'àrees de regions del pla limitades per gràfiques de funcions) queda resolt si sabem calcular una primitiva de la funció a integrar. Tanmateix, no existeix un mètode general que permeti l'obtenció de primitives per a qualsevol funció integrable: hi ha funcions que apareixen de forma natural en l'Anàlisi i en la teoria de Probabilitats, com ara e^{-x^2} o $(\sin x)/x$, que no tenen primitives expressables com a composició de funcions elementals. Tot i aquesta limitació, sí que serà d'interès donar alguns mètodes per obtenir primitives en alguns casos particulars.

Farem servir indistintament els símbols $\int f(x)\,dx$ o bé $\int f$ (quan quedi clar quina és la variable d'integració) per denotar el conjunt de primitives de la funció $f(x)$.

2 Resultats bàsics

Cal observar que dues primitives F i G d'una mateixa funció f difereixen en una constant. En efecte, $F' = G'$ implica, per linealitat de la derivada, que la funció $H = F - G$ té derivada nul·la en tots els punts. Però pel teorema del valor mitjà de Lagrange, per a qualssevol punts x, y del domini de H existeix un punt c comprès entre x i y tal que $H(x) - H(y) = H'(c)(x - y)$, i en ser $H'(c) = 0$ deduïm que $H(x) = H(y)$, això és, H és una funció idènticament constant i per tant F i G es diferencien en una constant.

Tenint en compte això i el significat que hem donat del símbol $\int f$, podem afirmar que, si F és una primitiva particular de f, llavors $\int f = \{F + k \mid k \in \mathbb{R}\}$. A la pràctica, però, farem un abús de notació i escriurem sovint $\int f = F$, això és, per comoditat prendrem el representant més senzill del conjunt de totes les primitives.

Veiem dos resultats més que donen tècniques importants per al càlcul d'integrals.

Teorema d'integració per parts. *Siguin f i g dues funcions integrables en $[a, b]$ que* *tenen primitives F i G, respectivament. Aleshores es compleix*

$$\int Fg = FG - \int fG \qquad \text{i} \qquad \int_a^b Fg = F(b)G(B) - F(a)G(a) - \int_a^b fG.$$

Demostració. La primera igualtat és una conseqüència immediata del fet que FG és una primitiva de $fG + Fg$ en virtut de la regla de derivació d'un producte ($(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg$). La segona és conseqüència d'això i d'aplicar la generalització de la regla de Barrow a la funció FG:

$$\int_a^b (Fg + fG) = (FG)(b) - (FG)(a) = F(b)G(b) - F(a)G(a). \qquad \square$$

Exemples:

(a) Per al càlcul de $\int xe^x\,dx$ identifiquem $F = x$, $g = e^x$, per tant $f = F' = 1$ i $G = e^x$, de manera que
$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x.$$

(b) A vegades no és tan immediat veure com s'han de prendre les funcions F i g. Per exemple, per calcular $\int \ln x\,dx$ aparentment no hi ha cap producte, però sempre podem fer-lo aparèixer: $\int \ln x\,dx = \int 1 \cdot \ln x\,dx$, i llavors prenem $F = \ln x$, $g = 1$, per tant $f = F' = 1/x$, $G = x$, de manera que
$$\int 1 \cdot \ln x\,dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x\,dx = x \ln x - x.$$

(c) Algun cop caldrà aplicar aquesta regla dues o més vegades. Per exemple, per calcular $\int x^n e^x\,dx$ procedim com en el cas (a), prenent ara $F = x^n$ i acabarem amb una expressió $\int x^{n-1} e^x\,dx$. Tornem a aplicar la regla, ara amb $F = x^{n-1}$, i així successivament, fins que acabem amb la primitiva del cas (a). Un altre cas lleugerament diferent: per calcular $\int \cos^2 x\,dx$ prenem $F = g = \cos x$, per tant $f = F' = -\sin x$, $G = \sin x$, de manera que
$$\int \cos^2 x\,dx = \cos x \sin x - \int -\sin^2 x\,dx = \cos x \sin x + \int (1 - \cos^2 x)\,dx =$$
$$= \cos x \sin x + \int dx - \int \cos^2 x\,dx = \cos x \sin x + x - \int \cos^2 x\,dx.$$

Llavors, si anomenem $I = \int \cos^2 x\,dx$, hem obtingut la relació $2I = \cos x \sin x + x$ i aleshores podem concloure que $I = (\cos x \sin x + x)/2$.

Teorema del canvi de variable. *Sigui Φ una funció definida en $[c,d]$ amb valors en $[a,b]$, derivable amb derivada contínua i tal que $\Phi(c)=a$, $\Phi(d)=b$. Sigui f una funció contínua en $[a,b]$. Llavors es compleix*

$$\int_a^b f = \int_c^d (f\circ\Phi)\Phi'.$$

DEMOSTRACIÓ. Sigui F una primitiva de f, de manera que $\int_a^b f = F(b)-F(a)$. D'altra banda, en virtut de la regla de la cadena per a la derivació d'una composició de funcions, $F\circ\Phi$ és una primitiva de $(f\circ\Phi)\Phi'$, i per tant

$$\int_c^d (f\circ\Phi)\Phi' = (F\circ\Phi)(d)-(F\circ\Phi)(c) = F(\Phi(d))-F(\Phi(c)) = F(b)-F(a),$$

i les dues integrals coincideixen, tal com volíem veure. □

Si bé és cert que aquest resultat fa referència al càlcul de integrals definides i no pas al de primitives, la idea fonamental de la demostració ens dóna la clau per al nostre propòsit: si per al càlcul d'una primitiva som capaços d'identificar una expressió de la forma $(f\circ\Phi)\Phi'$ sota del signe integral, i coneixem una primitiva F de f, llavors $F\circ\Phi$ ens proporciona immediatament una primitiva d'aquella expressió. Ara bé, la majoria de cops ens passarà el contrari: voldrem calcular $F=\int f$ i aleshores triarem una Φ adequada de tal manera que sapiguem calcular $G=\int (f\circ\Phi)\Phi'$. Finalment obtindrem F fent $F=G(\Phi^{-1})$. Veiem un parell d'exemples per clarificar-ho.

Exemples:

(a) Per calcular $\int \sin^5 x\cos x\,dx$ només cal adonar-se que l'expressió sota el signe integral és $f(\Phi(x))\Phi'(x)$ amb $\Phi(x)=\sin x$ i $f(x)=x^5$. Llavors, com una primitiva de f és $F(x)=x^6/6$, la primitiva que cerquem és $F(\Phi(x))=\sin^6 x/6$.

(b) Volem calcular $\int f(x)\,dx = \int x/\sqrt{x-1}\,dx$. Amb l'esperança de destruir l'arrel del denominador, que és l'element que més "ens molesta", posem $t=\sqrt{x-1}$, això és, $x=t^2+1=\Phi(t)$ i $\Phi'(t)=2t$. Havent fet això observem que

$$\int f(\Phi(t))\Phi'(t)\,dt = \int \frac{t^2+1}{t}2t\,dt = 2\int (t^2+1)\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3}+t\right) = G(t).$$

Així doncs, per tenir una primitiva de f simplement desfem el canvi de variable:

$$F(x) = G(\Phi^{-1}(x)) = G(\sqrt{x-1}) = 2\left(\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{3}+\sqrt{x-1}\right).$$

3 Càlcul de primitives de funcions específiques

3.1 Primitives de funcions racionals

En primer lloc veiem un parell de lemes algebraics que permeten descompondre tota funció racional en una suma de funcions racionals més senzilles, les primitives de les quals són fàcils de calcular. Ho anomenem *descomposició en fraccions simples.*

Lema. *Sigui $p(x)/q(x) \in \mathbb{R}(x)$ amb $\operatorname{gr}(p(x)) < \operatorname{gr}(q(x))$ i sigui $\alpha \in \mathbb{R}$ una arrel de $q(x)$ de multiplicitat m, això és, $q(x) = (x-\alpha)^m q'(x)$ amb $q'(\alpha) \neq 0$. Llavors $p(x)/q(x)$ s'expressa de forma única com*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a}{(x-\alpha)^m} + \frac{b(x)}{(x-\alpha)^{m-1} q'(x)}$$

on $a \in \mathbb{R}$ i $\operatorname{gr}(b(x)) < \operatorname{gr}((x-\alpha)^{m-1} q'(x))$.

Demostració: L'expressió de l'enunciat és equivalent a $p(x) = a \cdot q'(x) + b(x)(x-\alpha)$. Si donem a x el valor α obtenim $a = p(\alpha)/q'(\alpha)$, i escollint aquest valor per a obtenim

$$b(x) = \frac{p(x) - \frac{p(\alpha)}{q'(\alpha)} q'(x)}{x-\alpha}$$

que verifica la condició de l'enunciat. Amb això provem l'existència i, per construcció, la unicitat de l'expressió, i tenim un mètode per calcular a i $b(x)$. $\square$

Lema. *Sigui $p(x)/q(x) \in \mathbb{R}(x)$ amb $\operatorname{gr}(p(x)) < \operatorname{gr}(q(x))$ i $q(x) = (x^2+tx+s)^m q'(x)$, on x^2+tx+s és irreductible a $\mathbb{R}[x]$ i no divideix a $q'(x)$. Llavors $p(x)/q(x)$ s'expressa de forma única com*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{ax+b}{(x^2+tx+s)^m} + \frac{c(x)}{(x^2+tx+s)^{m-1} q'(x)}$$

on $a, b \in \mathbb{R}$ i $\operatorname{gr}(c(x)) < \operatorname{gr}((x^2+tx+s)^{m-1} q'(x))$.

Ometem la demostració, que segueix la mateixa línia que l'anterior lema.

Sabent que els polinomis irreductibles de $\mathbb{R}[x]$ són, com a molt, de grau 2, la reiteració d'aquests dos resultats ens dóna una descomposició de qualsevol $p(x)/q(x) \in \mathbb{R}(x)$ com suma de fraccions simples: si factoritzem $q(x)$,

$$q(x) = (x-\alpha_1)^{m_1} \cdots (x-\alpha_r)^{m_r} (x^2+t_1x+s_1)^{n_1} \cdots (x^2+t_kx+s_k)^{n_k}$$

llavors $p(x)/q(x)$ admet la descomposició única

$$\frac{p(x)}{q(x)} = p_1(x) + \frac{a_1^1}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{a_1^{m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{a_r^1}{x-\alpha_r} + \cdots + \frac{a_r^{m_r}}{(x-\alpha_r)^{m_r}} +$$
$$+ \frac{b_1^1 x + c_1^1}{x^2+t_1x+s_1} + \cdots + \frac{b_1^{n_1} x + c_1^{n_1}}{(x^2+t_1x+s_1)^{n_1}} + \cdots + \frac{b_k^1 x + c_k^1}{x^2+t_kx+s_k} + \cdots + \frac{b_k^{n_k} x + c_k^{n_k}}{(x^2+t_kx+s_k)^{n_k}},$$

on $p_1(x)$ és la part entera de la divisió $p(x)/q(x)$, en el cas que $\mathrm{gr}(p(x)) \geq \mathrm{gr}(q(x))$, i els polinomis $x^2+t_ix+s_i$ són irreductibles, això és, $t_i^2-4s_i<0$. Una forma d'obtenir aquesta descomposició, un cop conegudes les arrels del denominador $q(x)$, és la dels coeficients indeterminats. Consisteix a escriure la descomposició anterior, amb els coeficients encara per determinar, reduir al mateix denominador i tot seguit igualar els coeficients dels dos numeradors. La integració de cada tipus de fracció simple es fa com segueix:

$$\int \frac{a}{x-\alpha}\,dx = a\ln|x-\alpha|, \qquad \int \frac{a}{(x-\alpha)^k}\,dx = \frac{-a}{k-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}, \quad k>1$$

$$\int \frac{bx+c}{x^2+tx+s}\,dx = \int \frac{bx+c}{(x+t/2)^2+(s-t^2/4)}\,dx = \int \frac{b(x+t/2)+(c-bt/2)}{(x+t/2)^2+(s-t^2/4)}\,dx,$$

que val, anomenant $d=\sqrt{s-t^2/4}$,

$$\frac{b}{2}\ln((x+t/2)^2+d^2) + \frac{c-bt/2}{d}\arctan\frac{x+t/2}{d}.$$

Queden finalment les integrals del tipus

$$\int \frac{bx+c}{(x^2+tx+s)^k}\,dx$$

amb $k>1$. Amb la mateixa notació d'abans, podem escriure

$$\int \frac{b(x+t/2)+(c-bt/2)}{((x+t/2)^2+d^2)^k}\,dx,$$

i fent el canvi de variable $u = x+t/2 = \Phi(x)$, $\Phi'(x)=1$, les separem com

$$\frac{b}{2}\int \frac{2u}{(u^2+d^2)^k}\,du + (c-bt/2)\int \frac{1}{(u^2+d^2)^k}\,du.$$

La primera val $(b/2)(u^2+d^2)^{-k+1}/(-k+1)$, i obtindrem la segona mitjançant una fórmula recurrent. Posem

$$I_k = \int \frac{1}{(u^2+d^2)^k}\,du.$$

Apliquem ara el teorema d'integració per parts per calcular I_{k-1}. Prenem

$$F = \frac{1}{(u^2+d^2)^{k-1}},\ g = 1 \ \Rightarrow\ F' = f = \frac{-(k-1)2u}{(u^2+d^2)^k},\ G = u,$$

per tant

$$\begin{aligned} I_{k-1} &= \int Fg = FG - \int fG = \frac{u}{(u^2+d^2)^{k-1}} + 2(k-1)\int \frac{u^2}{(u^2+d^2)^k}\,du = \\ &= \frac{u}{(u^2+d^2)^{k-1}} + 2(k-1)\int \left(\frac{u^2+d^2}{(u^2+d^2)^k} - \frac{d^2}{(u^2+d^2)^k}\right) du = \\ &= \frac{u}{(u^2+d^2)^{k-1}} + 2(k-1)(I_{k-1} - d^2 I_k), \end{aligned}$$

i d'aquesta relació podem aïllar I_k i expressar-la en funció de I_{k-1}:

$$I_k = \frac{1}{2(k-1)d^2}\frac{u}{(u^2+d^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{(2k-2)d^2} I_{k-1}.$$

Reiterant aquesta fórmula i tenint en compte que $I_1 = (1/d)\arctan(u/d)$, podem arribar a escriure explícitament qualsevol I_k.

3.2 Primitives de funcions irracionals

Estudiarem dos casos de funcions irracionals:

(a) Sigui $R(u_0, \ldots, u_k)$ una funció racional en $k+1$ variables. Considerem la integral

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right) dx,$$

amb $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{Q}$. Si prenem m el mínim comú múltiple dels denominadors de $r_1, \ldots, r_k$ i fem el canvi de variable $t^m = (ax+b)/(cx+d)$, llavors podem aïllar x com a expressió racional de t i, a més a més, tots els exponents racionals queden convertits en enters, de forma que la integral queda convertida en una funció racional, que ja hem vist com resoldre.

(b) Sigui $R(u, v)$ una funció racional de dues variables i considerem la integral

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx.$$

Suposem que les arrels de ax^2+bx+c són reals, de manera que $ax^2+bx+c = a(x-\lambda)(x-\mu)$. Efectuem el canvi de variable $t = (\sqrt{ax^2+bx+c})/(x-\lambda)$, això és, $t^2 = a(x-\mu)/(x-\lambda)$. Llavors tant x com $\sqrt{ax^2+bx+c}$ són funcions racionals de t i la integral queda reduïda a una racional.
Suposem ara que les arrels de ax^2+bx+c no són reals. Llavors haurà de ser $a>0$ perquè l'expressió $\sqrt{ax^2+bx+c}$ tingui sentit en $\mathbb{R}$. En aquest cas posem $t = \sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}x$, de manera que $ax^2+bx+c = t^2+ax^2-2t\sqrt{a}x$, és a dir, $bx+c = t^2-2t\sqrt{a}x$. En conseqüència, tant x com $\sqrt{ax^2+bx+c}$ s'expressaran com funcions racionals de t, i de nou la integral quedarà reduïda a una racional.

3.3 Primitives de funcions trigonomètriques

Si $R(u,v)$ és una funció racional de dues variables, les integrals de la forma

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

poden transformar-se en racionals fent el canvi de variable $t = \tan(x/2)$. Això és perquè tant el sinus com el cosinus són funcions racionals de la tangent de l'angle meitat:

$$\sin x = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

i, d'altra banda, de la relació $x = 2\arctan t = \Phi(t)$ obtenim $\Phi'(t) = 2/(1+t^2)$. Tot plegat fa que el canvi de variable faci aparèixer una funció racional. Per exemple:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt = -\ln|1-t| + \ln|1+t| =$$
$$= -\ln|1-\tan(x/2)| + \ln|1+\tan(x/2)|.$$

4 Aplicacions al càlcul de magnituds geomètriques

4.1 Volum d'un sòlid de revolució

Considerem una corba en el pla definida per una funció contínua $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$. Es tracta de calcular el volum V del cos limitat per la superfície que s'obté en fer girar la corba al voltant de l'eix d'abscisses en $\mathbb{R}^3$ i pels plans $x=a$ i $x=b$. Si considerem una partició $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$, llavors podem aproximar el volum cercat per la suma

$$\sum_{i=1}^{n} \pi f(z_i)^2 \Delta x_i$$

on $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$, això és, una suma de volums de cilindres de radi $f(z_i)$ i altura Δx_i (dit de manera informal, construïm n cilindres de revolució en fer girar al voltant de l'eix x els rectangles corresponents a una suma de Riemann). Aquesta expressió també és una suma de Riemann, que, en afinar indefinidament la partició Π, tendeix a convertir-se en la integral

$$V = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi f(z_i)^2 \Delta x_i = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

4.2 Longitud d'un arc de corba

En les mateixes condicions que abans, afegim la hipòtesi que f sigui derivable. Donada una partició Π com abans, podem aproximar la longitud L de la corba $y = f(x)$ entre a i b per la poligonal que uneix els punts $(x_i, f(x_i))$ per a $i = 0, \ldots, n$. És evident que si afinem la partició Π afegint-hi més punts, la poligonal augmenta de longitud (això es deu al fet, expressat de manera informal, que el camí més curt entre dos punts és el segment que els uneix); per tant, té sentit considerar el suprem d'aquestes longituds, sempre que sigui finit.

Si anomenem ℓ_i la longitud del segment de poligonal entre $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ i $(x_i, f(x_i))$, notant $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, i $\Delta f(x_i) = f(x_i) - f(x_{i-1})$, llavors

$$\ell_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta f(x_i))^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i} \right)^2},$$

però, pel teorema del valor mitjà de Lagrange, existeix un punt $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $\Delta f(x_i) = f'(z_i) \Delta x_i$, de manera que serà $\ell_i = \Delta x_i \sqrt{1 + f'(z_i)^2}$. La longitud de la poligonal completa associada a aquesta partició Π serà, doncs,

$$L_\Pi = \sum_{i=1}^{n} \ell_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + f'(z_i)^2},$$

i aquesta expressió és una suma de Riemann que tendirà a la integral quan la partició sigui arbitràriament fina:

$$L = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + (f'(z_i))^2} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx.$$

4.3 Àrea d'una superfície de revolució

Considerem el mateix cos de revolució del qual hem calculat abans el volum. Donada una partició Π de $[a, b]$, l'àrea lateral de la superfície de revolució pot aproximar-se per n àrees de troncs de con, obtinguts en fer girar al voltant de l'eix x la poligonal que hem construït abans per calcular la longitud de l'arc de corba. Tenint en compte que l'àrea lateral d'un tronc de con és $\pi(R + r)g$, on R i r són els radis de les bases i g és la generatriu, en el nostre cas serà

$$A_\Pi = \sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\ell_i = \sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\Delta x_i \sqrt{1 + f'(z_i)^2},$$

i tornem a tenir una suma de Riemann, per tant,

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\Delta x_i \sqrt{1 + f'(z_i)^2} = \int_a^b \pi \cdot 2f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \\ &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx. \end{aligned}$$