1 Introducció. El postulat de les paral·leles

Els *Elements* és el gran tractat de geometria, aritmètica i àlgebra escrit per Euclides als voltants de l'any 300 a.C. Consisteix en 13 llibres que són una col·lecció de definicions, postulats o axiomes, proposicions i demostracions de les proposicions.

El primer llibre conté les bases de la geometria coneguda fins aleshores. Comença amb 23 definicions, 5 postulats i 5 "nocions comunes", a les quals segueixen 48 proposicions. Aquests cinc postulats són els que Euclides pren com a veritats absolutes de les quals deduirà la resta de proposicions: són el punt de partida per desenvolupar tota la geometria del moment. L'enunciat dels postulats, en el nostre llenguatge modern, és el següent:

- I. Per dos punts pot traçar-se una recta.
- II. Tot segment pot prolongar-se per formar una recta.
- III. Es pot traçar una circumferència donats el centre i el radi.
- IV. Tots els angles rectes són iguals.
- V. Si una recta talla unes altres dues formant en un costat angles interns que sumen menys de dos angles rectes, llavors les dues rectes, en prolongar-les, es tallen en aquest mateix costat.

Es pot demostrar que aquest postulat és equivalent al *postulat de les paral·leles*:

- V'. Donada una recta i un punt que no hi pertany, per aquest punt hi passa una única paral·lela a la donada.

La intuïció ens diu que el cinquè postulat (o l'equivalent de les paral·leles) té un aspecte molt més complex que els altres quatre: més que un postulat sembla un veritable teorema que pugui deduir-se dels altres. Tant és així que el mateix Euclides va evitar d'emprar-lo en les 28 primeres proposicions i durant més de 2 000 anys molts matemàtics el van intentar provar usant només els quatre primers i la resta de nocions comunes i definicions d'Euclides. Tots els intents de prova fallaven en algun punt, quan es feia alguna assumpció que, en el fons, era equivalent al cinquè postulat (el postulat de les paral·leles és una de les moltes formes equivalents que té).

No fou fins al s. XIX que els matemàtics J. Bolyai i N. Lobatxevski, de manera independent l'un de l'altre, van demostrar que el cinquè postulat era independent dels altres quatre.

Per fer-ho van provar que es podien construir geometries perfectament consistents (això és, sense contradiccions internes) basades en els quatre primers postulats i en la negació del cinquè. Això va significar el naixement de les *geometries no euclidianes*.

2 Geometria axiomàtica i geometries no euclidianes

Euclides fou el primer matemàtic en crear un sistema d'axiomes per a una geometria plana. Tanmateix, amb el temps es va veure que s'assumien com a certs alguns resultats que no poden deduir-se dels cinc postulats (com ara l'axioma de Pasch). Aquest fet, juntament amb la publicació de les obres de Bolyai i Lobatxevski sobre les noves geometries el s. XIX, va fer que el rigor dels *Elements* no es considerés prou satisfactori i s'inicià una tasca de refonamentació de la geometria. Els esforços culminaren el 1 899 amb la publicació de l'obra *Fonaments de la Geometria*, de David Hilbert, on es donà un nou sistema complet de definicions i axiomes que venien a substituir els cinc postulats d'Euclides.

Segons la concepció de Hilbert, una *geometria* $\mathcal{G}$ és un ens format per dos conjunts, $\mathcal{P}$ i $\mathcal{R}$. Els elements de $\mathcal{P}$ s'anomenen *punts* de $\mathcal{G}$ i els de $\mathcal{R}$, *rectes* de $\mathcal{G}$. Sobre aquests conjunts es defineixen tres relacions: d'*incidència* ("pertànyer a"), d'*ordre* ("estar entre") i de *congruència* de segments i d'angles, que verifiquen uns determinats axiomes (no els detallarem tots).

Per exemple, la relació d'incidència, lluny de la intuïció pròpia de la geometria d'Euclides, es defineix d'una manera purament formal: és un subconjunt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{R}$; amb això direm que $P \in \mathcal{P}$ i $r \in \mathcal{R}$ són *incidents* si i només si $(P, r) \in \mathcal{A}$. En aquest cas també direm que P *és de* r o que r *passa per* (o *conté*) P i ho notarem $P \in r$. Donada $r \in \mathcal{R}$, es defineix el *conjunt de punts de* r com $\mathcal{P}_r = \{P \in \mathcal{P} \mid P \in r\}$. Diem que dues rectes r, s *es tallen* si $\mathcal{P}_r \cap \mathcal{P}_s \neq \emptyset$ i que són *paral·leles* si no es tallen. Els dos axiomes que s'imposa que ha de complir la relació d'incidència són:

AI.1 Donats dos punts diferents A i B, existeix una única recta que els conté.

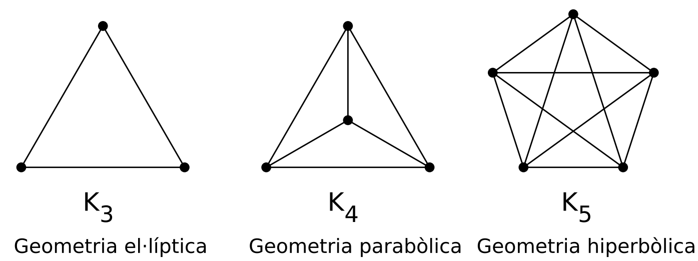
AI.2 Existeixen tres punts no alineats (això és, no hi ha cap recta que els contingui).

Una geometria $\mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$ amb una relació d'incidència que verifica AI.1 i AI.2 constitueix una *geometria d'incidència*. Una geometria així es diu:

- *el·líptica*, si existeix $r \in \mathcal{R}$ i $P \notin r$ tals que $\nexists$ cap paral·lela a r per P,
- *parabòlica*, si per a tota $r \in \mathcal{R}$ i $P \notin r$ tal que $\exists!$ paral·lela a r per P,

- *hiperbòlica*, si existeix $r \in \mathcal{R}$ i $P \notin r$ tals que $\exists$ almenys dues paral·leles a r per P.

Una geometria parabòlica també es diu *euclidiana* perquè és la que verifica el postulat de les paral·leles, equivalent al cinquè d'Euclides. Veiem que els altres dos tipus de geometries, les no euclidianes, resulten de negar el postulat de les paral·leles de les dues maneres possibles: negant l'existència de paral·leles o bé acceptant-ne l'existència de més d'una.



Els grafs complets K_3, K_4 i K_5 proporcionen els models més simples de geometries d'incidència el·líptica, parabòlica i hiperbòlica. En efecte, si considerem cada graf com una geometria on $\mathcal{P}$ són els vèrtexs i $\mathcal{R}$ són les arestes, és evident que tots verifiquen els dos axiomes d'incidència i que en K_3 no hi ha rectes paral·leles, en K_4 n'hi ha exactament una per a cada punt exterior a una recta i en K_5 n'hi ha dues.

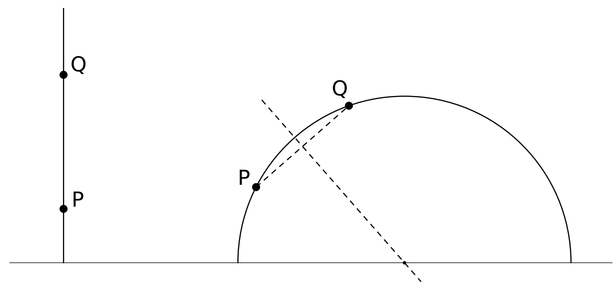
Els resultats que s'obtenen de considerar els axiomes de Hilbert sense assumir el postulat de les paral·leles s'anomenen resultats de *geometria absoluta* o *neutral* (per exemple, ho són les primeres 28 proposicions d'Euclides). Els resultats de la geometria absoluta es mantenen certs en les geometries euclidiana i hiperbòlica, però no pas en l'el·líptica, que nega l'existència de paral·leles mentre que la geometria absoluta en prova l'existència (donada una recta r i un punt $P \notin r$, si es traça la recta s perpendicular a r per P i després la recta t perpendicular a s per P es demostra, emprant el teorema dels angles interns alterns, que r i t són paral·leles).

Tot seguit veurem models complets per a una geometria hiperbòlica i una d'el·líptica (concretament, la geometria esfèrica), i n'estudiarem alguns dels principals resultats.

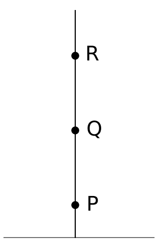
3 Geometria hiperbòlica

Una de les maneres de negar el postulat de les paral·leles és, tal com hem vist, "existeix $r \in \mathcal{R}$ i $P \notin r$ tals que hi ha almenys dues paral·leles a r per P". Aquest enunciat es coneix com *axioma de Lobatxevski*. Es pot demostrar que, si passa això, llavors passa per a qualssevol $r \in \mathcal{R}, P \notin r$ i que en realitat hi ha una infinitat de paral·leles a r per P.

Un dels models de la geometria hiperbòlica és el *semiplà de Poincaré*: es pren com a conjunt de punts el semiplà $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ i com a conjunt de rectes $\mathcal{R}$ les semirectes verticals i les semicircumferències euclidianes centrades en l'eix d'abscisses.



Amb aquest model es comprova fàcilment que es compleixen els dos axiomes d'incidència. En efecte, donats dos punts P, Q hi ha una única recta que els conté: si P, Q tenen la mateixa abscissa els conté una recta vertical i, en cas contrari, els conté la semicircumferència que té per centre la intersecció de la mediatriu del segment PQ amb l'eix d'abscisses (veure figura). També és trivial comprovar que hi ha tres punts no alineats. Es demostra que la resta d'axiomes de Hilbert també es verifiquen (abans cal definir una relació d'ordre sobre els punts d'una recta hiperbòlica i definir què s'entén per segments i angles congruents, per la qual cosa es fan servir les inversions).



Es defineix una mètrica tal que la longitud d'un segment es fa arbitràriament gran com més a prop es troba de la vora del semiplà un dels seus extrems. Així, tot i que els segments PQ i QR de la figura de l'esquerra tenen la mateixa mesura euclidiana, el PQ és més llarg segons la mètrica hiperbòlica.

És un resultat ben conegut de la geometria absoluta que la suma dels angles interns de tot triangle és més petita o igual que π. Si s'assumeix el postulat de les paral·leles i ens situem, per tant, en el món euclidià, es prova fàcilment que aquesta suma és exactament π (per fer la prova cal traçar *la* paral·lela per un vèrtex al costat oposat). En canvi, en geometria hiperbòlica es pot demostrar que la suma és sempre inferior a π.

4 Geometria esfèrica

4.1 Punts i rectes

Ja hem comentat que quan es nega l'existència de paral·leles, tal com fa la geometria el·líptica, s'entra en conflicte amb alguns axiomes de la geometria absoluta. Tanmateix, és interessant estudiar aquesta geometria per la multitud d'aplicacions que se'n deriven (fonamentalment l'astronomia i la navegació marítima i aèria), si cal afeblint o adaptant lleugerament altres axiomes per poder treballar sobre un sistema consistent.

Un dels possibles models per a una geometria el·líptica és la geometria esfèrica: considerem com a conjunt de punts $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, això és, la superfície d'una esfera de radi R fixat. Sobre una superfície qualsevol, la corba de longitud mínima que uneix dos punts s'anomena *geodèsica*. Així, en el pla les geodèsiques són les rectes. Sobre l'esfera es demostra amb eines de geometria diferencial que les geodèsiques són els anomenats *cercles màxims*, això és, les circumferències de radi R que s'obtenen en tallar l'esfera amb un pla que passi pel seu centre. Per tant, per analogia amb el que passa en el pla, es pren com a conjunt $\mathcal{R}$ de rectes el conjunt de cercles màxims sobre l'esfera.

Si s_1 i s_2 són dos cercles màxims, els plans π_1 i π_2 que els defineixen es tallen en una recta que passa pel centre de l'esfera, de forma que aquesta recta interseca l'esfera en dos punts P, P' *antipodals* (diametralment oposats). Així, com P, P' estan sobre l'esfera i, per construcció, pertanyen als dos plans π_1 i π_2, obtenim que pertanyen a s_1 i s_2, de manera que hem provat:

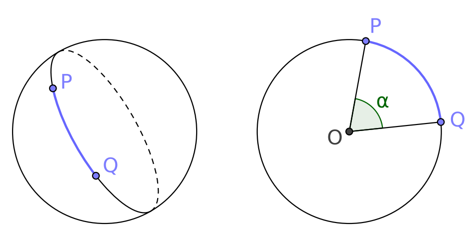
Proposició. *Dos cercles màxims sobre una esfera es tallen en dos punts antipodals.* □

Aquest fet prova que en el model de geometria esfèrica dues rectes sempre es tallen, això és, no hi ha paral·leles. D'altra banda, si P i Q són dos punts de l'esfera i O n'és el centre, P, Q, O defineixen un únic pla —i, en conseqüència, un únic cercle màxim— sempre que no estiguin alineats. Només ho estan quan P i Q són antipodals i en aquest cas qualsevol pla del feix que conté el diàmetre PQ defineix un cercle màxim (per exemple, pel pol nord i pel pol sud hi passen una infinitat de meridians, que són un cas de cercles màxims sobre la superfície terrestre). Així, hem demostrat:

Proposició. *Siguin P, Q dos punts sobre l'esfera. Si P, Q no són antipodals defineixen un únic cercle màxim. En cas contrari, hi ha una infinitat de cercles màxims per P, Q.* □

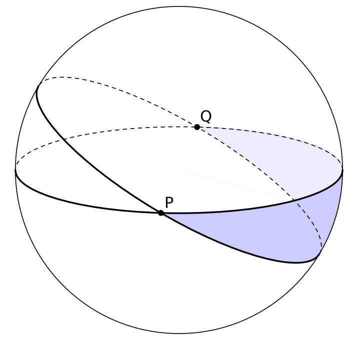
Així, veiem que es verifica el primer dels axiomes d'incidència de Hilbert sempre que els dos punts siguin no antipodals. Per evitar la contradicció en el cas antipodal, es poden identificar les parelles de punts antipodals com si fossin el mateix punt; d'això en resulta un altre model de geometria el·líptica: la *geometria projectiva*. Tanmateix, per simplicitat seguirem treballant amb el model esfèric sense fer aquesta identificació.

Si P, Q són dos punts no antipodals sobre l'esfera, es defineix el *segment* PQ com l'arc més petit dels dos que defineixen P, Q sobre el seu cercle màxim. En l'esfera podem establir-hi una mètrica definint la distància $d(P, Q)$ com la longitud euclidiana d'aquest arc. Si O és el centre de l'esfera i P, Q es troben sobre un cercle màxim de centre O i radi R, tindrem que $d(P, Q) = \alpha R$, on $\alpha = \angle POQ$.



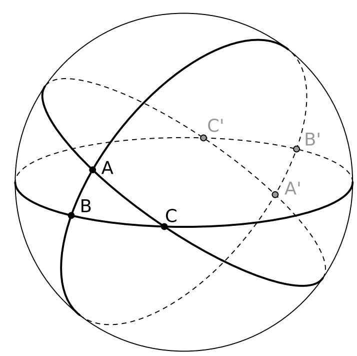
4.2 Lúnules i triangles

Es defineix l'*angle* que formen dos cercles màxims com l'angle que formen els plans que els contenen. De la mateixa manera, l'*angle* que formen dos segments esfèrics és l'angle dels cercles màxims que els contenen.



Un cercle màxim divideix l'esfera en dos *hemisferis*, de forma que dos cercles màxims que es tallen en punts P, Q antipodals divideixen l'esfera en quatre regions, iguals i antipodals dos a dos, anomenades *fusos esfèrics* o *lúnules*. Mentre que els polígons més simples del pla euclidià són els triangles, en la geometria esfèrica aquest paper el fan les lúnules, que es consideren els polígons esfèrics de dos costats i dos vèrtexs P, Q. Es defineix l'*angle* d'una lúnula com l'angle dels cercles màxims que la defineixen. Podem imaginar un hemisferi com el cas límit d'una lúnula d'angle π, de la mateixa manera que dos cercles màxims que es tallen perpendicularment defineixen quatre lúnules idèntiques, cada una d'angle $\pi/2$. En general, la part de l'esfera que cobreix una lúnula d'angle α és de $\alpha/(2\pi)$. Per tant, com l'àrea de l'esfera és $4\pi R^2$, l'àrea d'una lúnula L d'angle α serà

$$S(L) = \frac{\alpha}{2\pi} 4\pi R^2 = 2\alpha R^2.$$



Considerem ara tres punts A, B, C no alineats sobre l'esfera (això és, no continguts en un cercle màxim) i tals que no n'hi ha dos d'antipodals. Aquests punts defineixen un *triangle esfèric* $\triangle ABC$ que té per costats els segments $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Recordem que, per evitar ambigüitats, considerem que el segment entre dos punts és l'arc més curt que els uneix, de forma que els vèrtexs i el costats dels triangles que considerarem estan completament inclosos en un hemisferi. De igual manera, de les dues regions sobre l'esfera que defineix un triangle, només tindrem en compte la *interior*, això és, la que també està completament inclosa en un hemisferi. Anomenem *triangle antipodal* el triangle $\triangle A'B'C'$ definit pels punts A', B', C', antipodals de A, B, C, que veiem que té unes dimensions idèntiques al $\triangle ABC$. Observem que el triangle $\triangle ABC$ està contingut en tres lúnules, les que defineixen cada parella de costats. Notem L_A la lúnula definida pels costats AB, AC; de forma similar tindrem les lúnules L_B i L_C. Les respectives lúnules antipodals $L_{A'}$, $L_{B'}$ i $L_{C'}$ contenen el triangle antipodal.

4.3 El teorema de Girard i conseqüències

Amb les notacions que hem establert, ara ens proposem de donar una fórmula per a l'àrea del triangle $\triangle ABC$.

Teorema de Girard. *Si $\triangle ABC$ és un triangle esfèric d'angles α, β, γ en els vèrtexs A, B, C respectivament, llavors*

$$S(\triangle ABC) = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi),$$

on R és el radi de l'esfera.

Demostració. Les sis lúnules L_A, L_B, L_C, $L_{A'}$, $L_{B'}$, $L_{C'}$ cobreixen completament l'esfera, però si sumem les sis àrees estem comptant tres cops l'àrea dels triangles $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$, per tant podem escriure

$$S(L_A)+S(L_B)+S(L_C)+S(L_{A'})+S(L_{B'})+S(L_{C'}) = S(\text{esfera})+2S(\triangle ABC)+2S(\triangle A'B'C'),$$

però com $S(\triangle ABC) = S(\triangle A'B'C')$ i les parelles de lúnules antipodals tenen el mateix angle, apliquem la fórmula de l'àrea de les lúnules i tenim

$$4R^2(\alpha + \beta + \gamma) = 4\pi R^2 + 4S(\triangle ABC) \;\Rightarrow\; S(\triangle ABC) = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi). \qquad \square$$

La conseqüència més important d'aquesta fórmula és:

Corol·lari 1. *La suma dels angles d'un triangle esfèric és sempre superior a π.*

Demostració. Ho deduïm immediatament en reescriure la fórmula de l'àrea del triangle com

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{S(\triangle ABC)}{R^2} > \pi. \qquad \square$$

Corol·lari 2. *Dos triangles esfèrics són semblants si i només si són congruents.*

Demostració. Amb la fórmula anterior es veu que la suma dels angles d'un triangle esfèric en determina l'àrea; per tant, no podem tenir dos triangles semblants de dimensions diferents. $\square$

La tercera conseqüència del teorema té un impacte fonamental en la cartografia:

Corol·lari 3. *No existeix cap aplicació d'una part de l'esfera en una part del pla euclidià que transformi cercles màxims en rectes i que preservi els angles (això és, que sigui una* transformació conforme*).*

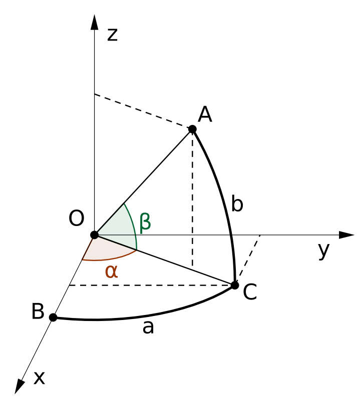
Demostració. Si existís una aplicació així, la imatge d'un triangle esfèric seria un triangle euclidià amb els mateixos angles que en l'esfera, cosa que és impossible perquè, tal com hem vist, en l'esfera és $\alpha + \beta + \gamma > \pi$, mentre que en el pla euclidià la suma és π. $\square$

Això ens diu que els cartògrafs només poden aspirar a construir mapes que compleixin una de les dues condicions. Així, per exemple, es té la *projecció gnomònica* que consisteix en projectar des del centre de l'esfera sobre un pla tangent. Aquesta projecció transforma clarament cercles màxims en rectes sobre el pla i l'usen els pilots d'aeroplans per als vols de llarga distància, perquè els cercles màxims són el camí més curt entre dos punts del globus.

Com a exemple de transformació conforme tenim la *projecció estereogràfica*, semblant a la gnomònica però es projecta des del punt antipodal al punt P de tangència del pla. En cartografia, és adequada per representar zones polars; transforma meridians en rectes per P i paral·lels en circumferències centrades en P. La *projecció de Mercator*, és una projecció cilíndrica conforme que transforma meridians en rectes verticals i paral·lels en rectes horitzontals. Respecta molt la forma de la franja equatorial però la distorsió augmenta en acostar-nos a les zones polars. Fou de gran utilitat als navegants perquè traçant una recta sobre el mapa s'obtenia sobre l'esfera una ruta de rumb constant o *loxodròmica*, que es podia seguir fàcilment amb una simple brúixola en intersecar tots els meridians amb angle constant.

4.4 El teorema de Pitàgores

Acabem l'exposició donant una versió esfèrica del teorema de Pitàgores:



Teorema. *Un triangle esfèric $\triangle ABC$ sobre una esfera de radi R amb l'angle recte en C i costats a, b, c verifica*

$$\cos\left(\frac{c}{R}\right) = \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{b}{R}\right).$$

Demostració. Notem $\alpha = \angle BOC$, $\beta = \angle AOC$, $\gamma = \angle AOB$ (per a una major claredat, en la figura no es mostren ni la "hipotenusa" c ni l'angle γ). Prenem un sistema de referència ortogonal de manera que les coordenades de A, B, C siguin:

$$B = (R, 0, 0), \quad C = (R\cos\alpha, R\sin\alpha, 0), \quad A = (R\cos\beta\cos\alpha, R\cos\beta\sin\alpha, R\sin\beta).$$

Llavors, fent ús del producte escalar,

$$R^2\cos\alpha\cos\beta = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = ||\overrightarrow{OA}||\cdot||\overrightarrow{OB}||\cos\gamma = R^2\cos\gamma,$$

per tant $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$ i tenint en compte que $\gamma = c/R$, $\alpha = a/R$ i $\beta = b/R$, obtenim la fórmula cercada. $\square$

El motiu pel qual s'anomena a aquest resultat "teorema de Pitàgores esfèric" és el següent: el desenvolupament en sèrie de Taylor de la funció $\cos x$ al voltant de $x = 0$ és

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Si reescrivim $\cos(c/R) = \cos(a/R)\cos(b/R)$ emprant aquest desenvolupament obtenim

$$\begin{aligned} 1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{4!R^4} - \dots &= \left(1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{4!R^4} - \dots\right)\left(1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{4!R^4} - \dots\right) = \\ &= 1 - \frac{a^2}{2R^2} - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{a^4}{4!R^4} + \frac{a^2b^2}{4R^4} + \frac{b^4}{4!R^4} - \dots \end{aligned}$$

Si cancel·lem l'1 als dos membres i multipliquem tota l'expressió per $-2R^2$ tenim

$$c^2 + \frac{\text{termes de grau superior en } c}{R^2} = a^2 + b^2 + \frac{\text{termes de grau superior en } a \text{ i } b}{R^2},$$

i si $R \to \infty$ obtenim el teorema de Pitàgores euclidià $c^2 = a^2 + b^2$, com un cas límit.