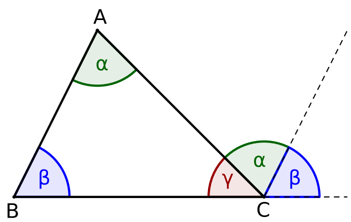
1 Resultats previs

Abans de començar a definir les raons trigonomètriques en un triangle rectangle, enunciem i demostrem tres resultats geomètrics importants que farem servir durant l'exposició.

Teorema. *En tot triangle $\triangle ABC$ la suma dels angles és un angle pla.*



Demostració. Anomenem α, β, γ els angles en A, B, C respectivament. Si prolonguem el costat BC i tracem per C una paral·lela a AB, aquesta recta forma amb AC un angle α i amb la prolongació de BC un angle β, tal com mostra la figura.

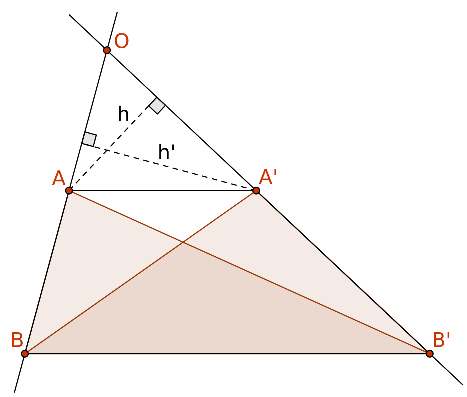
Llavors, queda clar que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. □

Teorema de Tales. *Siguin r, s dues rectes que es tallen en O. Siguin A, B dos punts sobre r i A', B' dos punts sobre s. Llavors*

$$AA' \text{ és paral·lel a } BB' \Leftrightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}.$$

Demostració. AA' és paral·lel a BB' $\Leftrightarrow$ la distància de A a BB' és la mateixa que la de A' a BB' $\Leftrightarrow$ els triangles $\triangle ABB'$ i $\triangle A'BB'$ tenen la mateixa altura i, per tant, la mateixa àrea (comparteixen la base BB') $\Leftrightarrow$ els triangles $\triangle OAB'$ i $\triangle OA'B$ tenen la mateixa àrea. Si h i h' són les altures d'aquests triangles per A i A' respectivament, com mostra la figura, la igualtat d'àrees es pot escriure com

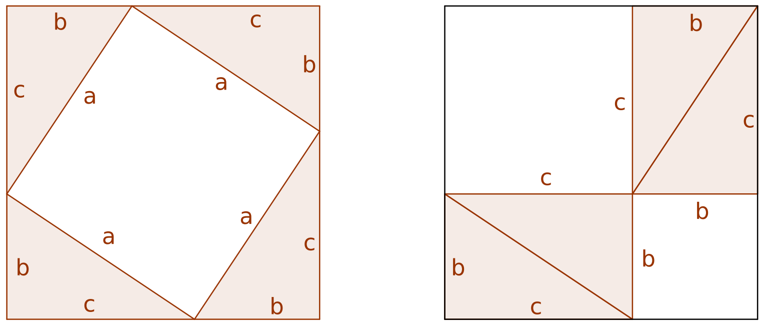
$$OB' \cdot h/2 = OB \cdot h'/2.$$



D'altra banda, sempre es compleix $OA' \cdot h/2 = OA \cdot h'/2$, que és l'àrea del triangle $\triangle OAA'$. Dividint aquesta igualtat per l'anterior, trobem l'equivalència de raons de l'enunciat. □

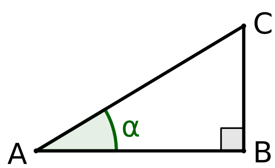
Teorema de Pitàgores. *Si b, c són els catets d'un triangle rectangle i a és la hipotenusa, llavors $a^2 = b^2 + c^2$.*

Demostració. Disposem quatre còpies del triangle rectangle de dues maneres diferents, com mostren les figures. En tots dos casos, les disposicions formen un quadrat exterior de costat $b + c$.



Independentment de la disposició dels quatre triangles, l'àrea que queda sense cobrir (en blanc) del quadrat de costat $b+c$ serà sempre la mateixa. En la primera disposició aquesta àrea no coberta és un quadrat de costat a i per tant val a^2. En la segona, són dos quadrats de costat b i c respectivament, per tant val b^2+c^2. Així, concloem que $a^2=b^2+c^2$. $\square$

2 Raons trigonomètriques



Sigui $\triangle ABC$ un triangle rectangle en B i sigui α l'angle en A. Es defineixen les raons trigonomètriques *sinus*, *cosinus* i *tangent* de l'angle α com les raons

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AC}, \quad \cos\alpha = \frac{AB}{AC}, \quad \tan\alpha = \frac{BC}{AB},$$

que, pel teorema de Tales, només depenen de α i no pas de la mida del triangle rectangle que escollim.

Pel teorema de Pitàgores, la hipotenusa d'un triangle rectangle és sempre més gran que qualsevol dels catets, la qual cosa ens permet afirmar que $0<\sin\alpha<1$, $0<\cos\alpha<1$. La raó $\tan\alpha$ es pot escriure com

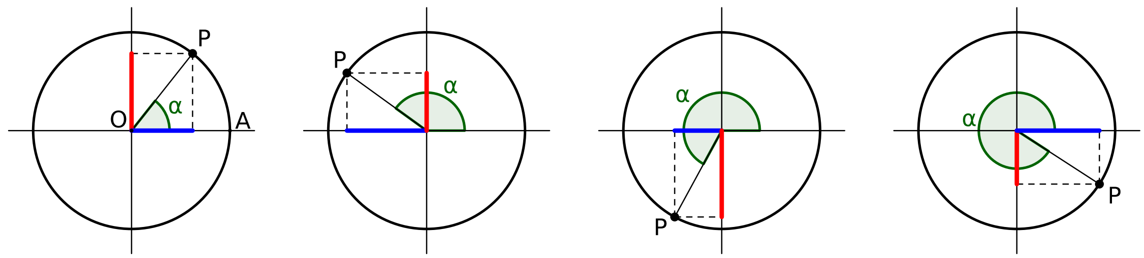
$$\tan\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{BC/AC}{AB/AC} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

i pot prendre valors arbitràriament grans. De nou pel teorema de Pitàgores podem escriure

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AB^2+BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1,$$

expressió coneguda com *identitat fonamental de la trigonometria*.

Com la suma dels angles d'un triangle és l'angle pla, en un triangle rectangle els dos angles diferents del recte són aguts, de manera que les definicions que hem donat de sinus, cosinus i tangent només tenen sentit sobre angles aguts. Per poder estendre la definició a qualsevol angle $\alpha \in \mathbb{R}$, considerem la circumferència centrada en l'origen de coordenades O i de radi unitat, que anomenarem *circumferència goniomètrica*, i apliquem al punt $A = (1, 0)$ un gir d'angle α al voltant de O en sentit directe (antihorari). Anomenem P al punt resultat de fer aquest gir.



En aquesta situació, donem una nova definició de les raons trigonomètriques de α: el sinus de α serà la projecció del segment OP sobre l'eix d'ordenades (segment vermell a la figura) i el cosinus la projecció sobre l'eix d'abscisses (segment blau). Prendrem cada raó amb signe positiu o negatiu depenent si la projecció corresponent queda en la part positiva o negativa de cada eix, respectivament. Així, $\sin \alpha > 0$ si el corresponent P és al 1r o al 2n quadrants i $\sin \alpha < 0$ si P és al 3r o 4t quadrants. De la mateixa manera, $\cos \alpha > 0$ si P és al 1r o al 4t quadrants i $\cos \alpha < 0$ si P és al 2n o al 3r quadrants. La tangent es defineix llavors com el quocient d'ambdues projeccions, amb el signe corresponent: $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$.

Amb aquesta definició, que estén la primera que havíem donat per a angles aguts, tenim que $\sin(k\pi) = 0$ i $\cos(\pi/2 + k\pi) = 0$ per a $k \in \mathbb{Z}$. També en deduïm que $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$, $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$. D'altra banda, si dos angles α, β difereixen en un múltiple enter de 2π es correspondran amb el mateix punt P sobre la circumferència goniomètrica, de manera que obtenim la periodicitat de les funcions trigonomètriques:

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha, \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha, \quad \tan(\alpha + 2k\pi) = \tan \alpha,$$

per tant, a efectes pràctics només serà necessari estudiar els angles $\alpha \in [0, 2\pi)$. Veiem que se segueix verificant la identitat fonamental de la trigonometria,

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

que ens permet de calcular la raó d'un angle si en coneixem l'altra:

$$\sin \alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \cos \alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2 \alpha},$$

i triarem el signe en funció del quadrant en què es trobi α.

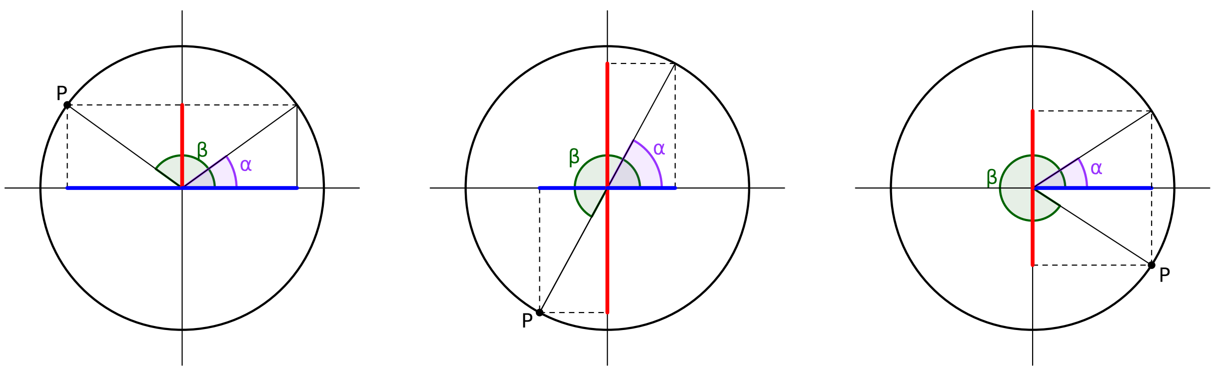
Observant la figura del triangle rectangle a partir de la qual hem definit les raons trigonomètriques per a angles aguts, podem deduir una altra relació important entre les raons: si anomenem β l'angle en C, observem que $\beta = \pi/2 - \alpha$ (diem que α i β són *complementaris*) i aleshores

$$\sin\beta = \frac{AB}{AC} = \cos\alpha, \quad \cos\beta = \frac{BC}{AC} = \sin\alpha, \quad \tan\beta = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\tan\alpha},$$

i és molt fàcil comprovar que aquestes identitats segueixen essent certes per a qualsevol parella d'angles $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tals que $\alpha + \beta = \pi/2$.

2.1 Reducció d'angles al primer quadrant

A la pràctica només és necessari conèixer les raons trigonomètriques dels angles $\alpha \in [0, \pi/2]$. En efecte, ara veurem que per a tot $\beta \in (\pi/2, 2\pi)$ sempre existeix un $\alpha \in (0, \pi/2)$ tal que les raons trigonomètriques de α i β coincideixen en valor absolut. Considerem tres casos depenent si β pertany al 2n, 3r o 4t quadrant.



En el primer cas, $\beta \in (\pi/2, \pi)$, de forma que $\alpha = \pi - \beta \in (0, \pi/2)$. Geomètricament, obtenim α fent una simetria axial respecte de l'eix y, cosa que ens permet afirmar que

$$\sin\beta = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos\beta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha.$$

En el segon cas, $\beta \in (\pi, 3\pi/2)$ i llavors $\alpha = \beta - \pi \in (0, \pi/2)$, que equival a fer una simetria central respecte de l'origen de coordenades, de manera que

$$\sin\beta = \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos\beta = \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha.$$

En el darrer cas, $\beta \in (3\pi/2, 2\pi)$ i $\alpha = 2\pi - \beta$, això és, fem una simetria axial respecte de l'eix d'abscisses, per tant

$$\sin\beta = \sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos\beta = \cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

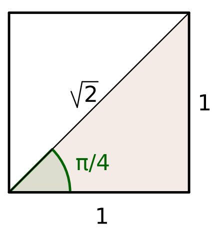
Val a dir que aquestes fórmules que hem trobat són certes per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$:

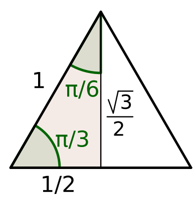
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

2.2 Càlcul d'algunes raons trigonomètriques

Mitjançant uns senzills procediments geomètrics podem calcular les raons de tres angles particularment importants del primer quadrant: $\pi/4$, $\pi/3$ i $\pi/6$.





En un quadrat de costat 1 la diagonal mesura $\sqrt{2}$ pel teorema de Pitàgores i forma un angle de $\pi/4$ amb el costat. Del triangle ombrejat de la figura deduïm que

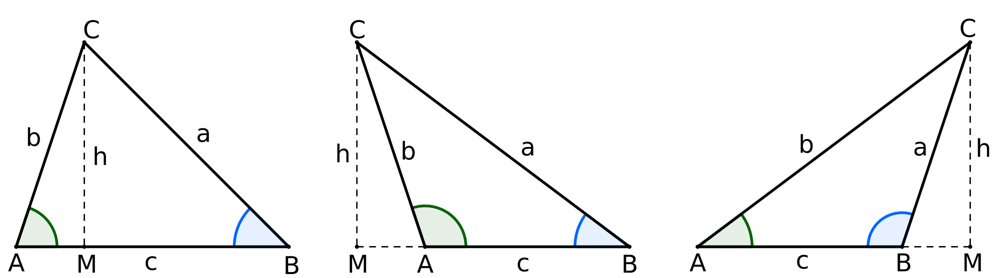
$$\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En un triangle equilàter de costat 1 l'altura per un vèrtex divideix per la meitat el costat oposat; per tant, de nou per Pitàgores, aquesta altura mesura $\sqrt{1-(1/2)^2} = \sqrt{3}/2$ i aleshores observant el triangle ombrejat obtenim

$$\sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos(\pi/3) = \sin(\pi/6) = \frac{1}{2}.$$

3 Els teoremes del sinus i del cosinus

Tenim dos resultats molt importants que relacionen els costats d'un triangle $\triangle ABC$ amb els seus angles. D'ara endavant farem un abús de notació i emprarem indistintament les lletres A, B, C per referir-nos tant als vèrtexs com als angles en aquests vèrtexs. Notem a, b, c els costats oposats als vèrtexs A, B, C respectivament.



Teorema del sinus. *En tot triangle $\triangle ABC$ de costats a, b, c es verifiquen les relacions*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

DEMOSTRACIÓ. Anomenem h l'altura per C. De les relacions $\sin A = h/b$ i $\sin B = h/a$ obtenim $a \sin B = b \sin A$, o bé

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

Si en lloc d'haver començat traçant l'altura per C l'haguéssim traçada per B, la igualtat que hauríem obtingut hauria estat $a/\sin A = c/\sin C$, de manera que obtenim les igualtats de l'enunciat. □

Teorema del cosinus. *En tot triangle $\triangle ABC$ de costats a, b, c es verifiquen les relacions*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

DEMOSTRACIÓ. Observem la mateixa figura d'abans; anomenem h l'altura per C i M el peu d'aquesta altura sobre el costat AB o la seva prolongació. Suposem primer que els angles A i B són aguts (triangle de l'esquerra). Aleshores $AM = b \cos A$, $MB = c - b \cos A$ i si s'aplica el teorema de Pitàgores als triangles $\triangle BCM$ i $\triangle ACM$ obtenim

$$a^2 = h^2 + MB^2 = b^2 - AM^2 + MB^2 = b^2 - (b \cos A)^2 + (c - b \cos A)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

En el cas que A és obtús i B agut (triangle central) procedim igual però ara cal tenir en compte que $\cos A < 0$ i per tant $AM = -b \cos A$, $MB = c - b \cos A$ i operant arribem a la mateixa expressió. Per últim, si A és agut i B obtús (triangle de la dreta) tenim $AM = b \cos A$, $MB = b \cos A - c$ i de nou operant arribem a la mateixa expressió.

Les altres dues identitats de l'enunciat són evidents perquè l'etiquetatge que fem dels vèrtexs A, B, C (i, en conseqüència, dels costats oposats a, b, c) és totalment arbitrària. □

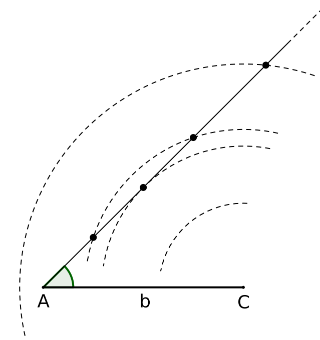
Aquest teorema es considera una generalització del de Pitàgores, perquè retrobem la fórmula $a^2 = b^2 + c^2$ quan A és un angle recte. Quan A és agut, $\cos A > 0$ i llavors $a^2 < b^2 + c^2$, mentre que si A és obtús $\cos A < 0$ i $a^2 > b^2 + c^2$.

Donats tres angles $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ tals que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, mitjançant el teorema de Tales podem dibuixar una infinitat de triangles semblants que tinguin aquests tres angles. Llevat d'aquest cas excepcional, sempre que coneguem tres dades d'un triangle aquest quedarà perfectament determinat. Al procés d'obtenir tots els costats i els angles d'un triangle a partir d'unes dades donades s'anomena *resoldre el triangle*. Per fer-ho només cal aplicar, depenent del cas, els teoremes del sinus i del cosinus, tot fent ús quan calgui de les raons trigonomètriques inverses $\arcsin x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\arccos x \in [0, \pi]$ i $\arctan x \in \mathbb{R}$. Estudiem els diferents casos de resolució de triangles:

(a) **Coneixem dos angles i un costat**, per exemple (A, B, a). El tercer angle serà $C = \pi - (A + B)$ i podem aplicar el teorema del sinus per trobar els dos costats restants: $b = a \sin B/\sin A$, $c = a \sin C/\sin A$.

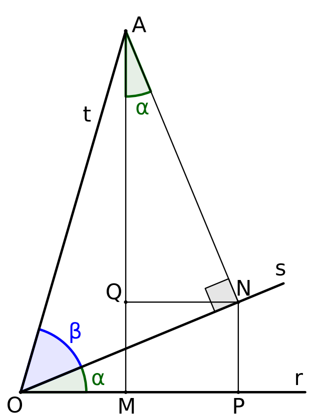
(b) **Coneixem un angle i els dos costats adjacents**, per exemple (A, b, c). Trobem el costat restant amb el teorema del cosinus ($a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$) i de nou amb aquest teorema trobem un altre angle ($\cos B = (a^2 + c^2 - b^2)/(2ac)$). L'angle restant és $C = \pi - (A + B)$. Notem que no és adequat emprar el teorema del sinus per calcular B perquè la funció $\arcsin x$ pren valors en $[-\pi/2, \pi/2]$ i per tant no distingeix un angle del seu suplementari.

(c) **Coneixem un angle, un costat adjacent i el costat oposat**, per exemple (A, a, b). Amb el teorema del sinus trobem $\sin B = b\sin A/a$ i, pel que acabem de comentar, pot haver-hi un cas en què tinguem dues possibles solucions per a B, o cap. Si A és obtús, llavors B és agut i queda ben determinat. Si A és agut i $a > b$, també $\sin A > \sin B$ i per tant B torna a ser agut i tenim una única solució. Però si $a < b$ pot passar que $b\sin A/a > 1$ i no tenim cap solució per a B (el triangle no es pot construir), o bé $b\sin A/a = 1$, de manera que $B = \pi/2$ i el triangle és rectangle, o bé $b\sin A/a < 1$ i tenim dues solucions: $B = \arcsin(b\sin A/a)$ i $B = \pi - \arcsin(b\sin A/a)$. La figura mostra tots els casos. Una altra manera d'abordar el problema és usar el teorema del cosinus: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ i trobar c resolent aquesta equació quadràtica en c. Hi ha les mateixes possibilitats que abans: podem tenir dues solucions per a c, una o cap.



(d) **Coneixem els tres costats** (a, b, c). Apliquem dos cops el teorema del cosinus per trobar dos angles, per exemple A i B. Llavors. $C = \pi - (A + B)$.

4 Fórmules d'addició



Teorema. *Per a qualssevol angles $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ es verifica*

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}.$$

Demostració. Construïm la figura de l'esquerra: siguin r, s, t tres semirectes amb origen comú O tals que l'angle entre r i s és α i l'angle entre s i t és β. Prenem un punt arbitrari A sobre t, des de A tracem les perpendiculars a r i a s i anomenem M i N les respectives interseccions (prolongant, si cal, r i s). Des de N tracem les perpendiculars a r i a AM i anomenem P i Q les respectives interseccions. Tenint en compte que, per construcció, l'angle que formen AM i AN també és α, tenim

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \frac{AM}{OA} = \frac{AQ+QM}{OA} = \frac{AQ+NP}{OA} = \frac{AN\cos\alpha + ON\sin\alpha}{OA} = \\
&= \frac{OA\sin\beta\cos\alpha + OA\cos\beta\sin\alpha}{OA} = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \\
\cos(\alpha+\beta) &= \frac{OM}{OA} = \frac{OP-MP}{OA} = \frac{OP-QN}{OA} = \frac{ON\cos\alpha - AN\sin\alpha}{OA} = \\
&= \frac{OA\cos\beta\cos\alpha - OA\sin\beta\sin\alpha}{OA} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.
\end{aligned}$$

(En l'última igualtat hem dividit tota la fracció per $\cos\alpha\cos\beta$.) Per trobar les raons de $\alpha-\beta$ només cal canviar β per $-\beta$ en les fórmules que hem trobat i recordar que $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, $\cos(-\beta) = \cos\beta$. $\square$

En la funció exponencial complexa retrobem aquestes fórmules. En efecte,

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta),$$

però

$$\begin{aligned}
e^{i(\alpha+\beta)} &= e^{i\alpha}e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \\
&= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta),
\end{aligned}$$

i igualant les parts reals i les parts imaginàries obtenim les mateixes fórmules d'addició. Si en aquestes fórmules posem $\alpha = \beta$, trobem immediatament les fórmules de l'angle doble:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \quad \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

La fórmula de De Moivre per a nombres complexos és excel·lent per trobar les raons de $n\alpha$:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

Per exemple, per trobar les raons de l'angle triple posem $n = 3$ i expandim el cub:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha - i\sin^3\alpha,$$

i si igualem les parts reals i les parts imaginàries,

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha, \quad \sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha.$$

Per trobar les raons de l'angle meitat partim de les identitats $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ i $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$. Primer sumant-les i després restant-les obtenim

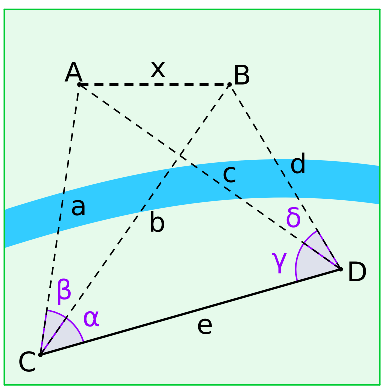
$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

Canviant α per $\alpha/2$ en aquestes identitats i prenent arrels quadrades:

$$\cos(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \qquad \sin(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

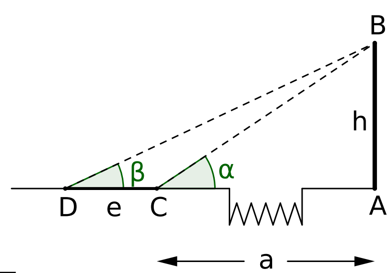
i prenem el signe que correspongui al quadrant on es trobi $\alpha/2$.

5 Aplicacions de la trigonometria



La trigonometria té aplicacions evidents en la topografia. Veiem-ne dos exemples: suposem que volem calcular la distància x entre dos punts A, B inabastables, com mostra la figura, i suposem coneguda la distància e entre dos punts C i D. Amb un teodolit horitzontal mesurem els angles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, amb la qual cosa podem resoldre els triangles $\triangle CDA$ i $\triangle CDB$ (coneixem un costat e i els angles adjacents). Un cop hem trobat a, b, c, d, podem resoldre el triangle $\triangle ABC$ o bé el $\triangle ABD$ per trobar x, perquè coneixem dos costats i l'angle comú.

Suposem ara que volem calcular l'altura h entre dos punts A, B inabastables des de la nostra posició (veure figura). Des dels punts C, D, que es troben a la mateixa altura que A, mesurem els angles α, β amb un teodolit vertical. La distància $a = AC$ és desconeguda i $e = CD$, coneguda. Llavors $\tan\alpha = h/a$, $\tan\beta = h/(a+e)$ i podem posar



$$\tan\beta = \frac{h}{\frac{h}{\tan\alpha} + e} = \frac{h\tan\alpha}{h + e\tan\alpha},$$

i aïllar h d'aquesta expressió:

$$h = \frac{e\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} = \frac{e}{\cot\beta - \cot\alpha}.$$