Problemes 07/05/2024

(18) 3-Set Cover: $S_1, \dots, S_m \subseteq U$; for $1 \le i \le m$, $|S_i| = 3$
profit $c(S_i)$.

Find subset of S_i that covers all elements of U.

a) Give ILP formulation.

b) Devise primal-dual algorithm + ¿Provides a constant approx?

a) Variables de decisió:

x_i : Indica si S_i ha sigut escollit $(0, 1)$

y_j : Indica el valor de l'element $j \in U$

Funció objectiu:

$$\text{minimize} \sum_{i=1}^{m} c(S_i) \cdot x_i$$

Constraints:

1) Seleccionar tots els elements always un cop: $\sum_{i=1,\, j \in S_i} x_i \ge 1 \quad \forall j \in U$

2) $x_i \in \{0,1\} \quad \forall i$

$$\frac{1}{r} \le \frac{opt(x)}{A(x)} \le r$$

b) 3-Set:

$\forall_i \; x_i = 0$, ~~$y_j \neq 0$~~

$\forall_{j \in U} \; j = 0$

bucle:
- escollir S_i amb $C(S_i)\downarrow$, $x_i = 1$ } primal
- $y_j \mathrel{+}= \frac{1}{3}$ per cada $j \in S_i$
- Si existeix element j amb $y_j < 1$, escull S_i conté j $(x_i = 1)$ } dual
- $y_j \mathrel{+}= \frac{1}{3}$ per cada $j \in S_i$

bucle fins que $\forall j \in U \;\; y_j \ge 1$

Anàlisis: ~~En cada primal com a mínim es cobreixen 1/3 de la fracció dels elements no es~~

En cada iteració, els elements no escollits de S_i augmenten $1/3$, per tant després de 3 iteracions arribaran a 1, això dóna: $A(x) \ge 3opt($[illegible] Sent una 3-aproximació.