problemes 30/04/2024

(12) 3-MCNF : 3-CNF tot positiu

min-3-MCNF: min nº de variables a 1

a) G-3-MCNF (F) {

F en 3-MCNF amb $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ $\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{}$ Variables $= X$

x_i = false per $1 \le i \le n$

while $C \neq \emptyset$ do {

$\frac{1}{k} \le \frac{opt(x)}{A(x)} \le k$

Extreu una clàusula C de C

X_i = Una de les variables de C

X_i = true

$C = C - \{C \mid x_i \text{ està en } C\}$

}

return X

}

Es aproximació constant de min-3-MCNF?

No és una aproximació constant, depèn de la formula, potser triga $\frac{|X|}{2} - 1$ passos en assignar variables quan només faria falta 1.

Per exemple, en aquesta formula:

$(x_1, x_a, x_b)(x_1, x_c, x_d)(x_1, x_e, x_f) \dots (x_1, x_{n-1}, x_n)$

en el cas pitjor, assignaria a 1: $\frac{|X|}{2} - 1$ variables quan només faria falta 1 (x_1), per tant:

$$\frac{1}{|X|} \le \frac{opt(x)}{A(x)} \le |X| \; ? \Rightarrow \frac{1}{|X|} \le \frac{1}{\frac{|X|}{2} - 1} \le |X| \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{|X|} \le \frac{2}{|X| - 2}}_{\text{no es compleix per } |X| = 1,2,3} \le |X|$$

b) Doneu una 3-aproximació per a min-3-MCNF

x_i = false per $1 \leq i \leq n$

for each C in G {

    x_i = true en una x de C no assignada ~~[illegible]~~ Si totes son false

}

return X

En aquest algoritme, com a màxim s'assignaran a 1 3 vegades més variables de les necessàries. ~~Per exemple, pitjor dels casos~~

~~$(x_1, x_4, x_3)(x_1, x_2, x_4)(x_2, x_2, x_5) \dots (x_k, x_2, x_n)$~~

~~$(x_1, x_2, x_3)(x_4, x_2, x_5)(x_5, x_2, x_3) \dots (x_n, x_2, x_{n-1})$~~

El nombre màxim de variables a 1 per cada clàusula serà 1, i com cada clàusula té 3 literals, cada variable "afecta" a com a molt 2 altres, per tant, en el pitjor dels casos, es faran 3 vegades més assignacions de les necessàries.

15) k-set Covering: $S_1, \dots S_m \in U$ of cardinality at most k with cost $c(S_i)$. Find subset of min(total cost)

a) Integer Linear Programing formulation:

Variables:

x_i : set S_i is chosen (1/0)
y_j : element j is covered (1/0)

Objective:

minimize $\sum_{i=1}^{n} c(S_i) \cdot x_i$

Constraints:

- $\sum_{i, j \in S_i} x_i \geq 1 \quad \forall j \in U$ (each elem must be covered)
- $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k$ (at most k sets)
- $x_i \in \{0,1\}$ (binary constraints)
- $y_j \in \{0,1\}$

b) x' = opt solution

while $U \neq \emptyset$ do{

compute x'

Choose i with $x'_i \geq 1/k$

Buy set S_i, delete elems in S_i from instance

}

output bought sets

Is this a k-approx?

En cada iteració, el valor de la solució òptima decreix amb un factor de $1 - 1/k$.

~~Sent c(Si) el cost del set i, comparant cost $x_i \geq 1/k$, la solució del LP és always $1/k$ del cost total de S_i~~

Com el bucle para quan tots els elements s'han cobert, i en cada iteració el cost decreix per $1 - \frac{1}{k}$, el cost final serà k vegades el cost de la solució òptima.