UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

4/4

- [ ] E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona
- [ ] E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona
- [ ] Facultat d'Informàtica de Barcelona

Titulació

Assignatura

Cognoms: Gros López

Nom: Adrián

Pàgina ____ de ____

DNI

(1)

a) Per veure que ConjuntDominantDeMida és NP-complet, cal provar que pertany a NP i que pertany a NP-hard.

- Veiem que pertany a NP:

~~(ConjuntDominantDeMida = { G(V,E) | ∃ S ⊆ V, < G(V,E), S > ∈ B })~~

~~(on el S és el set un conjunt dominant)~~

$\text{ConjuntDominantDeMida} = \{ \langle G(V,E), b \rangle \mid \exists S \subseteq V \wedge \langle G(V,E), b, S \rangle \in B \}$

~~con S s el x~~ on B és el problema decisional que comprovo si S és un ~~set~~ conjunt Dominant de G de mida menor o igual que b:

$B = \{ \langle G(V,E), b, S \rangle \mid S \subseteq V \wedge |S| \leq S \wedge \forall u \in V\ (u \in S \vee (\exists v \in S \wedge (v,u) \in E)) \}$

$B \in P$ ja que podem mesurar el tamany dels vertex en temps linial i comprovar la condició de dominant en temp cuadratic, i per tant en total és polinòmic.

- Ara veiem que el problema és NP-hard fent una reducció desde VertexCover que sabem que és NP-hard. Recordem que:

~~(VertexCover = { < G(V,E), b > | ∀e ∈ E, ∃v ∈)~~

$\text{VertexCover} = \{ \langle G(V,E), b \rangle \mid \exists U \subseteq V,\ \forall u,v \in V ((u,v) \in E \rightarrow u \in U \text{ o bé } v \in U) \}$

Anem a definir f la funció de reducció:

$<G(V,E), b> = X \in$ Vertex Cover $\Leftrightarrow f(X) \in$ Conjunt Dominant De Mida

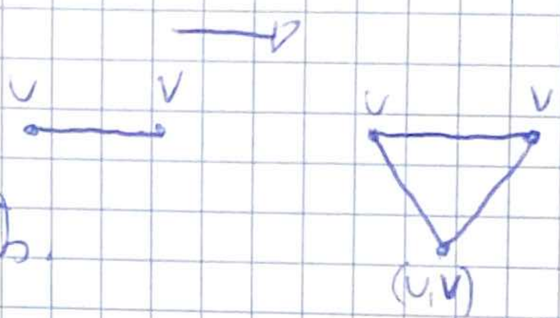
on $f(X) = <G(V',E'), b+I>$

Tenim que $V' = V \cup V_{aux}$; $V_{aux} = \{(u,v) \mid (u,v) \in E\}$

$E' = E \cup E_{aux}$; $E_{aux} = \{((u,v),v) \mid u,v \in E\}$

$I = |\{v \in V \mid \nexists u \in V, (u,v) \in E\}|$

és a dir, per cada aresta (u,v) fem un triangle



i augmentem la cota b tant com el nombre de vertex aïllats.

Vejem la implicació a la dreta: si existeix VC tal que és un recobriment dels vertex de G, i de mida menor que b, Tenim que el mateix recobriment ~~em servei per f(X)~~ afegint els vertex aïllats ens serveix ja com a conjunt dominant de f(X). Si agafes un vertex aïllat de G', pertany al conjunt dominant, i es compleix la condició. Si no és aïllat Té un veí. Sigui u el vertex, i v el veí.
Com que si els dos vertex pertanyen V, un dels dos és del conjunt dominant, ja que (v,u) ∈ E, i el conjunt és un vertex cover.

Si un dels dos no pertany a V, pertany a Vaux, i per tant té 2 veïns. Com u,v ∈ V i a=(u,v) ∈ Vaux, Tenim que (u,v) ∈ E per construcció, i per tant u o v son del conjunt dominant ja que partim d'un vertex cover.

Concluim que existeix un conjunt dominant, a més com que el VC de partida compleix |VC| ≤ b, i només afegim vertex aïllats, el conjunt dominant construït té mida menor o igual que b+I.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

☐ E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

☐ E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

☐ Facultat d'Informàtica de Barcelona

Titulació

Assignatura

Cognoms: Gras López Nom: Adrián

Pàgina ____ de ____

DNI

1

a)

⇐

Veiem la implicació contrària i suposem que existeix un conjunt dominant de mida menor que $b+I$, CD, tal que CD és testimoni de $f(x)$.

Ara anem a construir un VC testimoni de x.

Volem que ~~[illegible]~~ $\forall (u,v) \in E$, o bé $u \in VC$ o bé $v \in VC$.

~~(Sabem que $v \in V$, tenim que $v \in V'$ i per tant)~~ Per fer-ho, eliminem els vèrtex aïllats de CD. Sabem que hi són tots ja que com no tenen veïns, per complir la condició ells han de ser del conjunt dominant. Ara tenim un conjunt CD' de mida b.

Ara ~~[illegible]~~ $\forall a \in CD \wedge a \in V_{aux}$, tenim $a = (u,v)$ amb $u, v \in V$, el canviem per u o v indistintament, i si aquest ja estava en el conjunt, doncs ens queda un conjunt CD'' amb mida menor que b. Fem $CD'' = VC$.

Tenim que per tota aresta (u,v), el vèrtex (u,v) havia de tenir un veí a CD, però només te v i u com veïns, o ser ell mateix de CD, si és el primer cas, ja tenim l'aresta recoberta i si és el segon, l'hem canviat per u o v, i l'aresta està recoberta.

Doncs VC és un vertex cover de x i de mida menor o igual que b.

Finalment cal veure que podem computar f en temps polinòmic.

La creació dels nous vèrtex i arestes és $O(m)$ i podem identificar els vèrtex aïllats recorrent cada vèrtex i recorrent cada aresta mirant si el vèrtex connecta amb l'aresta, amb cost $O(n \cdot m)$ on $n = |V|$, $m = |E|$. Doncs f és polinòmic, per tant el problema és NP-hard. Concluim que és NP-complet

☐

b)

→ ~~...~~ Anem a crear un algorisme per Conjunt dominant, utilitzant l'algorisme per Conjunt Dominant De Mida = CDDM com a oracle, que suposem té cost polinomic.
Fem una cerca per tots els $b \in (1, |V|)$ fins trobar un b tal que $<G, b> \in CDDM$ i $<G, b-1> \notin CDDM$. Això té cost $O(n)$ i ens dona el cost mínim. OK

Ara anem a reconstruir el conjunt dominant de mida mínima b.
Per cada vertex ~~...~~ $i \in V$, fem el graf $G_i'(V', E')$ tal que
$V' = V \cup \{i_{aux}\}$; $E' = E \cup \{(i, i_{aux})\}$
fem una crida l'algorisme de CDDM amb G' i b, si diu que hi ha solució, forçosament, haurà de tenir i o iaux en el conjunt dominant. Podem suposar que és i. Si retorna que no hi ha solució, doncs no existeix solució on i és del conjunt dominant.

Fem ~~...~~ $G_i = \begin{cases} G' & \text{si i pot ser del conjunt dominant} \\ G & \text{si no es pot} \end{cases}$ OK

Repetim el procés pels següents vertex, agafant G_i com a graf de partida.
En cada pas anem fixant els vertex i que formen una solució.
Finalment haurem afegit un vertex auxiliar a cada vertex d'un cert conjunt dominant. Recuperem aquests vertex i tenim un conjunt dominant de mida mínima.
Fem n crides a l'algorisme, i com a molt augmentem el tamany del graf en n. Com que l'algorisme és polinomic, tenim un ~~...~~ que Conjunt Dominant $\in$ FP
← Per l'altra implicació només cal fer una crida a un algorisme polinomic de Conjunt Dom i calcular el tamany del resultat ($O(n)$). Si ens dona menor o igual que b, retornem cert, sinó retornem fals. Per tant CDDM $\in$ P si Conjunt Dominant $\in$ FP