Computación Numérica

Tema 2. Álgebra lineal numérica (II): métodos directos

Irene Parada

irene.parada@upc.edu

Departamento de Matemáticas

Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech

26 de febrero de 2024

Repaso

Breve recordatorio del Tema 2.1

- Normas vectoriales, normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_\infty$ y cálculo de las mismas.
- Normas matriciales submultiplicativas, normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_F$ y cálculo de las mismas.
- Normas matriciales consistentes y compatibles, norma matricial $\|\cdot\|_p$.
- Determinante de matrices y alternativas de cálcuo.
- Tipos de matrices (unitaria, ortogonal, hermítica, (anti)simétrica y definida positiva) y sus autovalores.
- Transformaciones ortogonales.
- Radio espectral de una matriz.
- Número de condición de una matriz y su cálculo.

Resolución de sistemas lineales

Notación matricial

El sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas,

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}
$$

Cualquier sistema de ecuaciones lineales se puede representar mediante una matriz $A = (a_{ij})$ que recoge los coeficientes de las incógnitas $\mathbf{x} = (x_i)^t$, y el vector $\mathbf{b} = (b_i)^t$, vector término independiente con tantas componentes como ecuaciones $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$.

Nomenclatura

Hablamos de sistemas lineales:

1. Según tamaño:
   - Pequeños $(n \leq 300)$,
   - Grandes $(n > 300)$.
2. Según estructura:
   - Con pocos elementos no nulos, matriz llena.
   - Con bastantes elementos nulos, como en una matriz triangular superior o inferior.
   - Con muchos elementos nulos, como en una matriz matriz tridiagonal, una matriz diagonal y una matriz dispersa.

Notación matricial

Para resolver el sistema, se crea la matriz aumentada:

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Hay sistemas sobredeterminados, con más ecuaciones que incógnitas $(m > n)$; hay sistemas indeterminados, con menos ecuaciones que incógnitas $(n > m)$; y hay sistemas con el mismo número de ecuaciones que incógnitas $(m = n)$.

Existencia de soluciones

Para un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con A matriz $m \times n$, según el teorema de Rouché-Frobenius, tenemos:

- $\text{rango}(A) = \text{rango}(A \mid \mathbf{b}) = n \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado, la solución es única.
- $\text{rango}(A) = \text{rango}(A \mid \mathbf{b}) = r < n \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado, con $n - r$ grados de libertad.
- $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A \mid \mathbf{b}) \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

Nos centraremos primero en el caso $m = n$ y $\det(A) = |A| \neq 0$, caso en el que la solución es única y se puede calcular usando la regla de Cramer.

Método de Cramer: sistema compatible determinado

La solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, por la regla de Cramer es:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad 1 \leq i \leq n$$

donde $|A|$ es el determinante de la matriz A, y $|A_i|$ es el determinante de la matriz A_i obtenida sustituyendo la columna i de la matriz A por el vector $\mathbf{b}$.

Método de Cramer: sistema compatible determinado

La solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, por la regla de Cramer es:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad 1 \leq i \leq n$$

donde $|A|$ es el determinante de la matriz A, y $|A_i|$ es el determinante de la matriz A_i obtenida sustituyendo la columna i de la matriz A por el vector $\mathbf{b}$.

Ejercicio.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1, \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 5x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Método de Cramer: eficiencia

Si la matriz es de orden n,

- se necesitan $n+1$ determinantes de orden n para calcular x.
- cada determinante de orden n requiere $\Omega(n!)$ operaciones.
- el número de operaciones es $\Omega(n!)$.

Método de Cramer: eficiencia

Si la matriz es de orden n,

- se necesitan $n+1$ determinantes de orden n para calcular x.
- cada determinante de orden n requiere $\Omega(n!)$ operaciones.
- el número de operaciones es $\Omega(n!)$.

n	Flops (floating point operations per second) 10^9 (Giga)	10^{10}	10^{11}	10^{12} (Tera)	10^{15} (Peta)
10	0.1 s	0.01 s	0.001 s	0.0001 s	negligible
15	17 h	1.74 h	10.46 min	1 min	0.06 s
20	4860 yr	486 yr	48.6 yr	4.86 yr	1.7 d
25	o.r.	o.r.	o.r.	o.r.	38 365 yr

Tiempo requerido para resolver un sistema lineal de dimensión n mediante la regla de Cramer. "o.r." significa "fuera de alcance".

Método de Cramer: eficiencia

Si la matriz es de orden n,

- se necesitan $n+1$ determinantes de orden n para calcular x.
- cada determinante de orden n requiere $\Omega(n!)$ operaciones.
- el número de operaciones es $\Omega(n!)$.

	Flops (floating point operations per second)				
n	10^9 (Giga)	10^{10}	10^{11}	10^{12} (Tera)	10^{15} (Peta)
10	0.1 s	0.01 s	0.001 s	0.0001 s	negligible
15	17 h	1.74 h	10.46 min	1 min	0.06 s
20	4860 yr	486 yr	48.6 yr	4.86 yr	1.7 d
25	o.r.	o.r.	o.r.	o.r.	38 365 yr

Tiempo requerido para resolver un sistema lineal de dimensión n mediante la regla de Cramer. “o.r.” significa “fuera de alcance”.

- Es un método inapropiado para el ordenador.

Sistemas de ecuaciones lineales

Métodos directos

Documentació de MATLAB® - Sistemes d’equacions lineals

Métodos directos

Son métodos que nos dan la solución exacta en un número finito de operaciones, si no fuera por los errores de redondeo acumulados y las posibles imprecisiones en el conocimiento inicial de la matriz de coeficientes A y el término independiente $\mathbf{b}$.

Métodos directos

Son métodos que nos dan la solución exacta en un número finito de operaciones, si no fuera por los errores de redondeo acumulados y las posibles imprecisiones en el conocimiento inicial de la matriz de coeficientes A y el término independiente $\mathbf{b}$.

Se consideran adecuados para sistemas lineales no muy grandes $(100 - 500$ ecuaciones) y con pocos elementos nulos.

Métodos directos

Son métodos que nos dan la solución exacta en un número finito de operaciones, si no fuera por los errores de redondeo acumulados y las posibles imprecisiones en el conocimiento inicial de la matriz de coeficientes A y el término independiente $\mathbf{b}$.

Se consideran adecuados para sistemas lineales no muy grandes $(100 - 500$ ecuaciones) y con pocos elementos nulos.

Se estudian los métodos,

- Método de Gauss.
- Métodos de factorización LU, Cholesky y QR.
- Y derivados: Gauss-Jordan, ...

Mejor algoritmo

En todos los algoritmos será necesario considerar

- el tiempo empleado para obtener la solución (medido en número de operaciones).
- los errores de redondeo del método de cálculo.

De nada sirve un método que obtenga la solución en un tiempo claramente excesivo.

Primero presentamos algoritmos computacionalmente económicos, y finalmente discutiremos cómo afectan los errores de redondeo a la solución obtenida.

Sistema diagonal

$D = (d_{ij})$ tal que $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$ i $1 \leq i, j \leq n$

$$(D \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} d_{11} & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

La solución es $x_i = \frac{b_i}{d_{ii}}, 1 \leq i \leq n$.

Sistema diagonal

$D = (d_{ij})$ tal que $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$ i $1 \leq i, j \leq n$

$$(D \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} d_{11} & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

La solución es $x_i = \frac{b_i}{d_{ii}}, 1 \leq i \leq n$.

Operaciones: hacen falta n divisiones para calcular $\mathbf{x}$.

Sistema triangular superior

$U = (u_{ij})$ tal que $u_{ij} = 0$ si $1 \leq j < i \leq n$

$$(U \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} & b_1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

La solución se obtiene por sustitución hacia atrás, las fórmulas son

$$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}, x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k \right), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Sistema triangular superior

Ejercicio.

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= -5,\\
3x_2 - 5x_3 - 3x_4 &= 0,\\
4x_3 + x_4 &= -3,\\
2x_4 &= 6.
\end{aligned}
$$

Sistema triangular superior

Ejercicio.

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= -5,\\
3x_2 - 5x_3 - 3x_4 &= 0,\\
4x_3 + x_4 &= -3,\\
2x_4 &= 6.
\end{aligned}
$$

La solución se obtiene por sustitución hacia atrás. El resultado es:
$x_4 = 3, x_3 = -3/2, x_2 = 1/2, x_1 = -7$

Sistema triangular inferior

$L = (l_{ij})$ tal que $l_{ij} = 0$ si $1 \leq i < j \leq n$

$$(L \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 & b_2 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

La solución se obtiene por sustitución hacia adelante,

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}, x_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} x_k \right), 1 < i \leq n.$$

Número de operaciones

Ejercicio. Calcula el número total de

- divisiones necesarias para resolver un sistema diagonal.
- divisiones necesarias para resolver un sistema triangular.
- multiplicaciones necesarias para resolver un sistema triangular.
- sumas necesarias para resolver un sistema triangular.

Ayuda:

$$\sum_{i=1}^{m} i = \frac{(m+1)m}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Número de operaciones

Ejercicio. Calcula el número total de

- divisiones necesarias para resolver un sistema diagonal.
- divisiones necesarias para resolver un sistema triangular.
- multiplicaciones necesarias para resolver un sistema triangular.
- sumas necesarias para resolver un sistema triangular.

Ayuda:

$$\sum_{i=1}^{m} i = \frac{(m+1)m}{2} \quad \text{y} \quad \cancel{\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}}.$$

	$+/-$	$*$	$\div$	total
Diagonal	0	0	n	n
Triangular	$\frac{n^2-n}{2}$	$\frac{n^2-n}{2}$	n	n^2

Método de Gauss

Consta de dos fases. La primera fase consiste en modificar nuestro sistema de ecuaciones para llegar a un sistema triangular superior. En la segunda fase se resuelve el sistema triangular superior obtenido en la primera fase.

¿Qué tipo de modificaciones son válidas en la fase 1?

- Multiplicar una fila por un número no nulo.
- Sustituir una fila por una combinación lineal de las otras.
- Permutar filas del sistema.
- Permutar columnas del sistema.

Las filas son ecuaciones y las columnas son incógnitas.

Método de Gauss

El algoritmo de Gauss se aplica sobre la matriz ampliada y convierte la matriz en una matriz triangular superior. La matriz del sistema A se reduce a triangular superior en $n-1$ pasos si A tiene n filas.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} & \widetilde{b}_1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} & \widetilde{b}_2 \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} & \widetilde{b}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} & \widetilde{b}_n \end{array}\right)$$

Método de Gauss: paso 1

Escribimos el sistema lineal de partida como por $G^{(0)}$ la matriz $(A \mid b)$, el primer paso es

- Verificar si $a_{11} \neq 0$ (pivote).
- Escoger la fila 1 (fila pivote).
- Por cada fila por debajo de la fila pivote calcular $m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$ (multiplicador).
- Por cada fila por debajo de la fila pivote restar m_{i1} veces la fila pivote a la fila i.

El resultado es una matriz $G^{(1)}$ con la primera columna completamente cero, excepto por a_{11}.

Método de Gauss: paso 1

Escribimos el sistema lineal de partida como por $G^{(0)}$ la matriz $(A \mid b)$, el primer paso es

- Verificar si $a_{11} \neq 0$ (pivote).
- Escoger la fila 1 (fila pivote).
- Por cada fila por debajo de la fila pivote calcular $m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$ (multiplicador).
- Por cada fila por debajo de la fila pivote restar m_{i1} veces la fila pivote a la fila i.

El resultado es una matriz $G^{(1)}$ con la primera columna completamente cero, excepto por a_{11}.

El número de divisiones es $n-1$, y por cada fila son n productos y sumas; en total $(2n+1)(n-1)$ operaciones.

Método de Gauss: paso 2

El segundo paso es,

- Fila pivote: fila 2 de la matriz $G^{(1)}$.
- Verificar que el pivote no sea nulo, $a_{22}^{(1)} \neq 0$.
- Por cada fila i por debajo de la fila pivote, calcular $m_{i2} = a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$.
- Por cada fila i por debajo de la fila pivote, restar m_{i1} veces la fila pivote a la fila i.

El resultado es una matriz, $G^{(2)}$, con la segunda columna completamente cero, excepto por $a_{22}^{(2)}$ y $a_{12}^{(2)}$.

Método de Gauss: paso 2

El segundo paso es,

- Fila pivote: fila 2 de la matriz $G^{(1)}$.
- Verificar que el pivote no sea nulo, $a_{22}^{(1)} \neq 0$.
- Por cada fila i por debajo de la fila pivote, calcular $m_{i2} = a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$.
- Por cada fila i por debajo de la fila pivote, restar m_{i1} veces la fila pivote a la fila i.

El resultado es una matriz, $G^{(2)}$, con la segunda columna completamente cero, excepto por $a_{22}^{(2)}$ y $a_{12}^{(2)}$.

El número de divisiones es $n-2$, y por cada fila son $n-1$ productos y sumas; en total $(2n-1)(n-2)$ operaciones.

Método de Gauss: paso k

En general, en el paso $k < n$, reducimos la columna k de la matriz $G^{(k-1)}$, modificando desde la fila $k+1$ hasta la n con la fórmula:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = k+1 \ldots n,$$

$$\text{Fila i}^{(k)} = \text{Fila i}^{(k-1)} - m_{ik} \cdot \text{Fila k}^{(k-1)}, \quad i = k+1 \ldots n.$$

El resto de filas permanecen igual: Fila i$^{(k)}$ = Fila i$^{(k-1)}$ $\quad i = 1 \ldots k$.

Método de Gauss: paso k

En general, en el paso $k < n$, reducimos la columna k de la matriz $G^{(k-1)}$, modificando desde la fila $k+1$ hasta la n con la fórmula:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = k+1 \ldots n,$$

$$\text{Fila i}^{(k)} = \text{Fila i}^{(k-1)} - m_{ik} \cdot \text{Fila k}^{(k-1)}, \quad i = k+1 \ldots n.$$

El resto de filas permanecen igual: Fila $\text{i}^{(k)} = \text{Fila i}^{(k-1)} \quad i = 1 \ldots k$.

El número de divisiones es $n-k$, y por cada fila son $n-k+1$ productos y sumas (en total $(n-k)(n-k+1)$ de cada). En el paso k el número de operaciones es $(2n-2k+3)(n-k)$.

Método de Gauss: operaciones totales

El número total de divisiones es:

$$\sum_{k=1}^{n-1} n-k = \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n).$$

Método de Gauss: operaciones totales

El número total de divisiones es:

$$\sum_{k=1}^{n-1} n-k = \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n).$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}}$$

El número total de multiplicaciones/sumas es:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+1) = \sum_{k=1}^{n-1}(n^2+n-k(2n+1)+k^2) =$$

Método de Gauss: operaciones totales

El número total de divisiones es:

$$\sum_{k=1}^{n-1} n-k = \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n).$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}}$$

El número total de multiplicaciones/sumas es:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+1) = \sum_{k=1}^{n-1}(n^2+n-k(2n+1)+k^2) =$$

$$= (n^2+n)(n-1) - (2n+1)\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} =$$

Método de Gauss: operaciones totales

El número total de divisiones es:

$$\sum_{k=1}^{n-1} n-k = \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n).$$

El número total de multiplicaciones/sumas es:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+1) = \sum_{k=1}^{n-1}(n^2+n-k(2n+1)+k^2) =$$

$$= (n^2+n)(n-1) - (2n+1)\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} =$$

$$= n(n-1)\frac{6(n+1)-3(2n+1)+2n-1}{6} = \frac{n(n-1)(n+1)}{3} = \frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2).$$

Método de Gauss: operaciones totales

El número total de divisiones es:

$$\sum_{k=1}^{n-1} n-k = \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n).$$

El número total de multiplicaciones/sumas es:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+1) = \sum_{k=1}^{n-1}(n^2+n-k(2n+1)+k^2) =$$

$$= (n^2+n)(n-1) - (2n+1)\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} =$$

$$= n(n-1)\frac{6(n+1)-3(2n+1)+2n-1}{6} = \frac{n(n-1)(n+1)}{3} = \frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2).$$

En total: $\frac{2n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ (la resolución del sistema triangular es también $\mathcal{O}(n^2)$).

Método de Gauss: coste computacional

Algunos costes con el método de Gauss

n	Coste del método de Gauss	Tiempo (10^6 oper/s)
5	90	90 microsegundos
10	705	0.7 milisegundos
20	5510	5.5 milisegundos
100	671550	0.67 segundos
1000	667 millones	11 minutos

n	10^9 (Giga)	10^{12} (Tera)	10^{15} (Peta)
10^2	$7 \cdot 10^{-4}$ seg.	despreciable	despreciable
10^4	11 min.	0.7 seg.	$7 \cdot 10^{-4}$ seg.
10^6	21 años	7.7 meses	11 min.
10^8	o.r.	o.r.	21 años

"o.r." se refiere a "fuera de alcance".

Método de Gauss: estrategias de pivotamiento

¿Qué pasa si el pivote del paso k es cero?

Método de Gauss: estrategias de pivotamiento

¿Qué pasa si el pivote del paso k es cero?

- Pivotamiento trivial. Se busca la primera fila por debajo de la fila k que tenga valor no nulo, y se intercambian las dos filas.

Método de Gauss: estrategias de pivotamiento

¿Qué pasa si el pivote del paso k es cero?

- Pivotamiento trivial. Se busca la primera fila por debajo de la fila k que tenga valor no nulo, y se intercambian las dos filas.

Ejemplos.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= -3 \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 &= -7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Método de Gauss: estrategias de pivotamiento

¿Qué pasa si el pivote del paso k es cero?

- Pivotamiento trivial. Se busca la primera fila por debajo de la fila k que tenga valor no nulo, y se intercambian las dos filas.
- Pivotamiento parcial. Se toma como pivote el elemento de mayor magnitud de la columna k en las filas restantes (en caso de empate, el de menor fila).

Método de Gauss: estrategias de pivotamiento

¿Qué pasa si el pivote del paso k es cero?

- Pivotamiento trivial. Se busca la primera fila por debajo de la fila k que tenga valor no nulo, y se intercambian las dos filas.
- Pivotamiento parcial. Se toma como pivote el elemento de mayor magnitud de la columna k en las filas restantes (en caso de empate, el de menor fila).
  Es decir, en el paso k, en la columna k se toma r como el entero más pequeño tal que $|a_{rk}^{(k-1)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{rk}^{(k-1)}|$ y se intercambian las filas k y r.

Método de Gauss: estrategias de pivotamiento

¿Qué pasa si el pivote del paso k es cero?

- Pivotamiento trivial. Se busca la primera fila por debajo de la fila k que tenga valor no nulo, y se intercambian las dos filas.
- Pivotamiento parcial. Se toma como pivote el elemento de mayor magnitud de la columna k en las filas restantes (en caso de empate, el de menor fila). Es decir, en el paso k, en la columna k se toma r como el entero más pequeño tal que $|a_{rk}^{(k-1)}| = \max_{k\leq i\leq n} |a_{rk}^{(k-1)}|$ y se intercambian las filas k y r.
- Pivotamiento total. En este caso, de la submatriz que comienza en la fila y columna k hasta la n se elige como pivote el elemento mayor en valor absoluto. (Al permutar columnas se cambia el orden de las incógnitas.)

Método de Gauss: estrategias de pivotamiento

¿Qué pasa si el pivote del paso k es cero?

- **Pivotamiento trivial.** Se busca la primera fila por debajo de la fila k que tenga valor no nulo, y se intercambian las dos filas.
- **Pivotamiento parcial.** Se toma como pivote el elemento de mayor magnitud de la columna k en las filas restantes (en caso de empate, el de menor fila). Es decir, en el paso k, en la columna k se toma r como el entero más pequeño tal que $|a_{rk}^{(k-1)}| = \max_{k\le i\le n} |a_{rk}^{(k-1)}|$ y se intercambian las filas k y r.
- **Pivotamiento total.** En este caso, de la submatriz que comienza en la fila y columna k hasta la n se elige como pivote el elemento mayor en valor absoluto. (Al permutar columnas se cambia el orden de las incógnitas.)

Ejemplos.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} -10^{-5}x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Método de Gauss: estrategias de pivotamiento

¿Qué pasa si el pivote del paso k es cero?

- Pivotamiento trivial. Se busca la primera fila por debajo de la fila k que tenga valor no nulo, y se intercambian las dos filas.
- Pivotamiento parcial. Se toma como pivote el elemento de mayor magnitud de la columna k en las filas restantes (en caso de empate, el de menor fila). Es decir, en el paso k, en la columna k se toma r como el entero más pequeño tal que $|a_{rk}^{(k-1)}| = \max_{k\leq i\leq n} |a_{rk}^{(k-1)}|$ y se intercambian las filas k y r.
- Pivotamiento total. En este caso, de la submatriz que comienza en la fila y columna k hasta la n se elige como pivote el elemento mayor en valor absoluto. (Al permutar columnas se cambia el orden de las incógnitas.) El pivotamiento total no tiene por qué ser el más estable ya que el producto de los pivotes es igual al determinante de la matriz y, si se seleccionan en los primeros pasos los mayores, inevitablemente se tendrán al final los menores con el peligro de inestabilidad numérica que comporta.

Método de Gauss: errores de redondeo

Un elemento por encima o en la diagonal, $a_{ij}^{(k)}$, con $i \leq j$, cambia hasta el paso $k = i$ y después se mantiene:

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} & = a_{ij}^{(1)} + m_{i1} a_{1j}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} \\ a_{ij}^{(3)} & = a_{ij}^{(2)} + m_{i2} a_{2j}^{(2)} + \varepsilon_{ij}^{(3)} \\ \quad\vdots & \\ a_{ij}^{(i)} & = a_{ij}^{(i-1)} + m_{i,i-1} a_{i-1,j}^{(i-1)} + \varepsilon_{ij}^{(i)} \end{cases}$$

Y, sumando:

$$a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1} a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1} a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(i)} \right).$$

Método de Gauss: errores de redondeo

Un elemento por encima o en la diagonal, $a_{ij}^{(k)}$, con $i \leq j$, cambia hasta el paso $k = i$ y después se mantiene:

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} & = a_{ij}^{(1)} + m_{i1} a_{1j}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} \\ a_{ij}^{(3)} & = a_{ij}^{(2)} + m_{i2} a_{2j}^{(2)} + \varepsilon_{ij}^{(3)} \\ \quad \vdots & \\ a_{ij}^{(i)} & = a_{ij}^{(i-1)} + m_{i,i-1} a_{i-1,j}^{(i-1)} + \varepsilon_{ij}^{(i)} \end{cases}$$

Y, sumando:

$$a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1} a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1} a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(i)} \right).$$

Un elemento debajo de la diagonal, $a_{ij}^{(k)}$, con $i > j$, cambia hasta el paso $k = j$ y después se anula:

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} & = a_{ij}^{(1)} + m_{i1} a_{1j}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} \\ a_{ij}^{(3)} & = a_{ij}^{(2)} + m_{i2} a_{2j}^{(2)} + \varepsilon_{ij}^{(3)} \\ \quad \vdots & \\ a_{ij}^{(j)} & = a_{ij}^{(j-1)} + m_{i,i-1} a_{j-1,j}^{(j-1)} + \varepsilon_{ij}^{(j)} \\ 0 & = a_{ij}^{(j-1)} + m_{i,i-1} a_{j,j}^{(j)} + \varepsilon_{ij}^{(j+1)} \end{cases}$$

Y, sumando:

$$a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1} a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1} a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(j+1)} \right).$$

Método de Gauss: errores de redondeo

Un elemento por encima o en la diagonal, $a_{ij}^{(k)}$, con $i \leq j$, cambia hasta el paso $k = i$ y después se mantiene:

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} & = a_{ij}^{(1)} + m_{i1} a_{1j}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} \\ a_{ij}^{(3)} & = a_{ij}^{(2)} + m_{i2} a_{2j}^{(2)} + \varepsilon_{ij}^{(3)} \\ \quad \vdots & \\ a_{ij}^{(i)} & = a_{ij}^{(i-1)} + m_{i,i-1} a_{i-1,j}^{(i-1)} + \varepsilon_{ij}^{(i)} \end{cases}$$

Y, sumando:

$$a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1} a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1} a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(i)}\right).$$

Un elemento debajo de la diagonal, $a_{ij}^{(k)}$, con $i > j$, cambia hasta el paso $k = j$ y después se anula:

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} & = a_{ij}^{(1)} + m_{i1} a_{1j}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} \\ a_{ij}^{(3)} & = a_{ij}^{(2)} + m_{i2} a_{2j}^{(2)} + \varepsilon_{ij}^{(3)} \\ \quad \vdots & \\ a_{ij}^{(j)} & = a_{ij}^{(j-1)} + m_{i,i-1} a_{j-1,j}^{(j-1)} + \varepsilon_{ij}^{(j)} \\ \quad 0 & = a_{ij}^{(j-1)} + m_{i,i-1} a_{j,j}^{(j)} + \varepsilon_{ij}^{(j+1)} \end{cases}$$

Y, sumando:

$$a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1} a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1} a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(j+1)}\right).$$

Método de Gauss: errores de redondeo

$$\begin{cases} a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1}a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1}a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(i)}\right) \text{ si } i \leq j. \\ a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1}a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1}a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(j+1)}\right) \text{ si } i > j. \end{cases}$$

Método de Gauss: errores de redondeo

$$\begin{cases} a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1}a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1}a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(i)}\right) \text{ si } i \leq j. \\ a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1}a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1}a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(j+1)}\right) \text{ si } i > j. \end{cases}$$

Errores de redondeo inducidos por la aritmética de coma flotante:

Método de Gauss: errores de redondeo

$$\begin{cases} a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1} a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1} a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(i)}\right) \text{ si } i \leq j. \\ a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1} a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1} a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(j+1)}\right) \text{ si } i > j. \end{cases}$$

Errores de redondeo inducidos por la aritmética de coma flotante:

$$a_{ij}^{(k)} = \mathrm{fl}\left(a_{ij}^{(k-1)} + m_{i,k-1} a_{k-1,j}^{(k-1)}\right) = \left[a_{ij}^{(k-1)} + m_{i,k-1} a_{i,k-1}^{(k-1)}(1+\delta_1)\right](1+\delta_2)$$

Método de Gauss: errores de redondeo

$$\begin{cases} a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1}a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1}a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(i)}\right) \text{ si } i \leq j. \\ a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1}a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1}a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(j+1)}\right) \text{ si } i > j. \end{cases}$$

Errores de redondeo inducidos por la aritmética de coma flotante: $|\delta_i| \leq 2^{-t}$

$$a_{ij}^{(k)} = \mathrm{fl}\left(a_{ij}^{(k-1)} + m_{i,k-1}a_{k-1,j}^{(k-1)}\right) = \left[a_{ij}^{(k-1)} + m_{i,k-1}a_{i,k-1}^{(k-1)}(1+\delta_1)\right](1+\delta_2)$$

Método de Gauss: errores de redondeo

$$\begin{cases} a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1}a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1}a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(i)}\right) \text{ si } i \leq j. \\ a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1}a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1}a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(j+1)}\right) \text{ si } i > j. \end{cases}$$

Errores de redondeo inducidos por la aritmética de coma flotante: $|\delta_i| \leq 2^{-t}$

$$a_{ij}^{(k)} = \mathrm{fl}\left(a_{ij}^{(k-1)} + m_{i,k-1}a_{k-1,j}^{(k-1)}\right) = \left[a_{ij}^{(k-1)} + m_{i,k-1}a_{i,k-1}^{(k-1)}(1+\delta_1)\right](1+\delta_2)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k)} - \left(a_{ij}^{(k-1)} + m_{i,k-1}a_{k-1,j}^{(k-1)}\right) = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ij}^{(k)}}{1+\delta_2} + \delta_1 m_{i,k-1}a_{k-1,j}^{(k-1)}$$

Método de Gauss: errores de redondeo

$$\begin{cases} a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1}a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1}a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(i)}\right) \text{ si } i \leq j. \\ a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1}a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1}a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(j+1)}\right) \text{ si } i > j. \end{cases}$$

Errores de redondeo inducidos por la aritmética de coma flotante: $|\delta_i| \leq 2^{-t}$

$$a_{ij}^{(k)} = \mathrm{fl}\left(a_{ij}^{(k-1)} + m_{i,k-1}a_{k-1,j}^{(k-1)}\right) = \left[a_{ij}^{(k-1)} + m_{i,k-1}a_{i,k-1}^{(k-1)}(1+\delta_1)\right](1+\delta_2)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k)} - \left(a_{ij}^{(k-1)} + m_{i,k-1}a_{k-1,j}^{(k-1)}\right) = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ij}^{(k)}}{1+\delta_2} + \delta_1 m_{i,k-1}a_{k-1,j}^{(k-1)}$$

Si no se consideran los términos cuadráticos (de orden 2^{-2t}):

$$|\varepsilon_{ij}^{(k)}| \leq 2^{-t}\left(|a_{ij}^{(k)}| + |m_{i,k-1}| \cdot |a_{k-1,j}^{(k-1)}|\right), \text{ para } k \leq j$$

Método de Gauss: errores de redondeo

$$\begin{cases} a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1}a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1}a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(i)}\right) \text{ si } i \leq j. \\ a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1}a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1}a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(j+1)}\right) \text{ si } i > j. \end{cases}$$

Errores de redondeo inducidos por la aritmética de coma flotante: $|\delta_i| \leq 2^{-t}$

$$a_{ij}^{(k)} = \text{fl}\left(a_{ij}^{(k-1)} + m_{i,k-1}a_{k-1,j}^{(k-1)}\right) = \left[a_{ij}^{(k-1)} + m_{i,k-1}a_{i,k-1}^{(k-1)}(1+\delta_1)\right](1+\delta_2)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k)} - \left(a_{ij}^{(k-1)} + m_{i,k-1}a_{k-1,j}^{(k-1)}\right) = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ij}^{(k)}}{1+\delta_2} + \delta_1 m_{i,k-1}a_{k-1,j}^{(k-1)}$$

Si no se consideran los términos cuadráticos (de orden 2^{-2t}):

$$|\varepsilon_{ij}^{(k)}| \leq 2^{-t}\left(|a_{ij}^{(k)}| + |m_{i,k-1}| \cdot |a_{k-1,j}^{(k-1)}|\right), \text{ para } k \leq j$$

$$\varepsilon_{ij}^{(j+1)} = -(a_{ij}^{(j)} + m_{ij}a_{jj}^{(j)}) = -a_{ij}^{(j)} - \text{fl}\left(-\frac{a_{ij}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}}\right)a_{jj}^{(j)} = -a_{ij}^{(j)} + \frac{a_{ij}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}}(1+\delta) = \delta a_{ij}^{(j)}.$$

Método de Gauss: errores de redondeo

$$\begin{cases} a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1}a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1}a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(i)}\right) \text{ si } i \leq j. \\ a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1}a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1}a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(j+1)}\right) \text{ si } i > j. \end{cases}$$

Errores de redondeo inducidos por la aritmética de coma flotante: $|\delta_i| \leq 2^{-t}$

$$a_{ij}^{(k)} = \text{fl}\left(a_{ij}^{(k-1)} + m_{i,k-1}a_{k-1,j}^{(k-1)}\right) = \left[a_{ij}^{(k-1)} + m_{i,k-1}a_{i,k-1}^{(k-1)}(1+\delta_1)\right](1+\delta_2)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k)} - \left(a_{ij}^{(k-1)} + m_{i,k-1}a_{k-1,j}^{(k-1)}\right) = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ij}^{(k)}}{1+\delta_2} + \delta_1 m_{i,k-1}a_{k-1,j}^{(k-1)}$$

Si no se consideran los términos cuadráticos (de orden 2^{-2t}):

$$|\varepsilon_{ij}^{(k)}| \leq 2^{-t}\left(|a_{ij}^{(k)}| + |m_{i,k-1}| \cdot |a_{k-1,j}^{(k-1)}|\right), \text{ para } k \leq j \quad \text{y } |\varepsilon_{ij}^{(j+1)}| \leq 2^{-t}|a_{ij}^{(j)}|.$$

$$\varepsilon_{ij}^{(j+1)} = -(a_{ij}^{(j)} + m_{ij}a_{jj}^{(j)}) = -a_{ij}^{(j)} - \text{fl}\left(-\frac{a_{ij}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}}\right)a_{jj}^{(j)} = -a_{ij}^{(j)} + \frac{a_{ij}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}}(1+\delta) = \delta a_{ij}^{(j)}.$$

Método de Gauss: errores de redondeo

$$\begin{cases} a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1}a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1}a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(i)}\right) \text{ si } i \leq j. \\ a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1}a_{1j}^{(1)} + \ldots + m_{i,i-1}a_{i-1,j}^{(i-1)} + \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(j+1)}\right) \text{ si } i > j. \end{cases}$$

Errores de redondeo inducidos por la aritmética de coma flotante: $|\delta_i| \leq 2^{-t}$

$$a_{ij}^{(k)} = \mathrm{fl}\left(a_{ij}^{(k-1)} + m_{i,k-1}a_{k-1,j}^{(k-1)}\right) = \left[a_{ij}^{(k-1)} + m_{i,k-1}a_{i,k-1}^{(k-1)}(1+\delta_1)\right](1+\delta_2)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k)} - \left(a_{ij}^{(k-1)} + m_{i,k-1}a_{k-1,j}^{(k-1)}\right) = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ij}^{(k)}}{1+\delta_2} + \delta_1 m_{i,k-1}a_{k-1,j}^{(k-1)}$$

Si no se consideran los términos cuadráticos (de orden 2^{-2t}):

$$|\varepsilon_{ij}^{(k)}| \leq 2^{-t}\left(|a_{ij}^{(k)}| + |m_{i,k-1}| \cdot |a_{k-1,j}^{(k-1)}|\right), \text{ para } k \leq j \quad \text{y } |\varepsilon_{ij}^{(j+1)}| \leq 2^{-t}|a_{ij}^{(j)}|.$$

- Los errores pueden ser grandes en la medida en que los pivotes de los sucesivos elementos calculados lo sean. El pivotamiento parcial hace que $|m_{ij}| \leq 1$, y así se restringe el crecimiento de $|a_{ij}^{(k)}|$ ($|a_{ij}^{(k)}| < 2^{k-1}|a_{ij}^{(1)}|$).

Método de Gauss-Jordan

Para resolver el sistema, se transforma la matriz A en una matriz diagonal:

$$(A \mid \mathbf{b}) \Rightarrow \left(D \mid \overline{\mathbf{b}}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \overline{b_1} \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & \overline{b_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & \overline{b_n} \end{array}\right)$$

Método de Gauss-Jordan

Para resolver el sistema, se transforma la matriz A en una matriz diagonal:

$$(A \mid \mathbf{b}) \Rightarrow \left(D \mid \overline{\mathbf{b}}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \overline{b_1} \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & \overline{b_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & \overline{b_n} \end{array}\right)$$

En general, en el paso $k < n$, reducimos la columna k de la matriz $G^{(k-1)}$, modificando todas las filas, excepto la fila k, con la fórmula:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad i \neq k$$

$$\text{Fila i}^{(k)} = \text{Fila i}^{(k-1)} - m_{ik} \cdot \text{Fila k}^{(k-1)}, \quad i \neq k.$$

Método de Gauss-Jordan: operaciones

Comentario: el sistema diagonal es más fácil de resolver, pero la reducción a sistema diagonal es más costosa.

Ejercicio: calcular el número de operaciones de método de Gauss-Jordan.

Método de Gauss: estabilidad

El método de Gauss es numéricamente estable y no es necesario intercambiar filas y columnas si:

- La matriz A es diagonal dominante.
- La matriz A es definida positiva.

Método de Gauss: aplicaciones

El método de Gauss se utiliza para:

- Resolver sistemas de ecuaciones.
- Calcular el determinante de una matriz.
- Calcular el rango de una matriz.

Método de Gauss: aplicaciones

El método de Gauss se utiliza para:

- Resolver sistemas de ecuaciones.
- Calcular el determinante de una matriz.
- Calcular el rango de una matriz.

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1\\
2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0\\
8x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
G^{(0)} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 1 & 1\\ 2 & 5 & 1 & 0\\ 8 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \to G^{(1)} = \left(\begin{array}{rrr|r} 8 & -1 & 3 & 0\\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\to G^{(2)} = \left(\begin{array}{rrr|r} 8 & -1 & 3 & 0\\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{21} & 1 \end{array}\right) \to P\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -8\\ -1\\ 21 \end{pmatrix}
$$

Método de Gauss: aplicaciones

El método de Gauss se utiliza para:

- Resolver sistemas de ecuaciones.
- Calcular el determinante de una matriz.
- Calcular el rango de una matriz.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0 \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$G^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdot(-1)} G^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow G^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{21} & 1 \end{array}\right) \rightarrow P\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Método de Gauss: aplicaciones

El método de Gauss se utiliza para:

- Resolver sistemas de ecuaciones.
- Calcular el determinante de una matriz.
- Calcular el rango de una matriz.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0 \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\det(A) = (-1) \cdot 8 \cdot 21/4 \cdot 1/21 = -2$$

$$G^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdot(-1)} G^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{array}\right)$$

$$\to G^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{21} & 1 \end{array}\right) \to P\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Método de Gauss: aplicaciones

El método de Gauss se utiliza para:

- Resolver sistemas de ecuaciones.
- Calcular el determinante de una matriz.
- Calcular el rango de una matriz.

El método de Gauss-Jordan se utiliza para encontrar matrices inversas. ¿Cómo?

Método de Gauss: aplicaciones

El método de Gauss se utiliza para:

- Resolver sistemas de ecuaciones.
- Calcular el determinante de una matriz.
- Calcular el rango de una matriz.

El método de Gauss-Jordan se utiliza para encontrar matrices inversas. ¿Cómo?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Método de Gauss: aplicaciones

El método de Gauss se utiliza para:

- Resolver sistemas de ecuaciones.
- Calcular el determinante de una matriz.
- Calcular el rango de una matriz.

El método de Gauss-Jordan se utiliza para encontrar matrices inversas. ¿Cómo?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Método de Gauss: aplicaciones

El método de Gauss se utiliza para:

- Resolver sistemas de ecuaciones.
- Calcular el determinante de una matriz.
- Calcular el rango de una matriz.

El método de Gauss-Jordan se utiliza para encontrar matrices inversas. ¿Cómo?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

Problemas de los métodos de eliminación

- División entre cero.

Problemas de los métodos de eliminación

- División entre cero.
- Errores de rendondeo.

Problemas de los métodos de eliminación

- División entre cero.
- Errores de rendondeo.
- Sistemas mal condicionados.

Problemas de los métodos de eliminación

- División entre cero.
- Errores de rendondeo.
- Sistemas mal condicionados.
- Matrices singulares.

Problemas de los métodos de eliminación

- División entre cero.
- Errores de rendondeo.
- Sistemas mal condicionados.
- Matrices singulares.

¿Qué hacer?

- Pivotar, en especial con pivotamiento parcial.
- Escalar / usar las mismas unidades.
- Verificar soluciones.
- Monitorizar si se crean valores cercanos a cero en la diagonal.

Sistemas de ecuaciones lineales

Vector de residuos y errores

Condicionamiento: ejemplo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 23 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 33 \\ 7 & 6 & 9 & 10 & 32 \end{array}\right) \xrightarrow{\textit{sol.exacta}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32.1 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 22.9 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 33.1 \\ 7 & 6 & 9 & 10 & 31.9 \end{array}\right) \xrightarrow{\textit{sol.exacta}} \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

Una pequeña modificación en los datos (término independiente) da lugar a una gran modificación en el resultado (solución).

Condicionamiento de un sistema

Un sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se dice bien condicionado cuando los errores de la matriz de coeficientes A y del vector término independiente $\mathbf{b}$ producen en la solución un error del mismo orden.

En otro caso, un sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se dice mal condicionado. Una interpretación alternativa es que puede haber un amplio rango de respuestas que satisfacen aproximadamente las ecuaciones.

$$\begin{array}{c} \|A - \overline{A}\| < \varepsilon \\ \|\mathbf{b} - \overline{\mathbf{b}}\| < \varepsilon \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}\| \simeq \varepsilon, & \text{bien condicionado} \\ \|\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}\| \gg \varepsilon, & \text{mal condicionado} \end{cases}$$

Condicionamiento de un sistema

Un sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se dice bien condicionado cuando los errores de la matriz de coeficientes A y del vector término independiente $\mathbf{b}$ producen en la solución un error del mismo orden.

En otro caso, un sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se dice mal condicionado. Una interpretación alternativa es que puede haber un amplio rango de respuestas que satisfacen aproximadamente las ecuaciones.

$$\begin{matrix} \|A - \overline{A}\| < \varepsilon \\ \|\mathbf{b} - \overline{\mathbf{b}}\| < \varepsilon \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}\| \simeq \varepsilon, & \text{bien condicionado} \\ \|\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}\| \gg \varepsilon, & \text{mal condicionado} \end{cases}$$

El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está mal condicionado si el número de condición $\mathrm{cond}(A)$ es grande. El número de condición es una medida de la pérdida de cifras significativas.

Número de condición (de nuevo)

Sigui A una matriz, y $\|\cdot\|$ cualquier norma sub-multiplicativa,

Definición: Número de condición

$$\mathsf{Cond}(A) = \mathcal{K}(A) = \begin{cases} \|A\|\|A^{-1}\|, & \det(A) \neq 0 \\ \infty, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Número de condición (de nuevo)

Sigui A una matriz, y $\|\cdot\|$ cualquier norma sub-multiplicativa,

Definición: Número de condición

$$\text{Cond}(A) = \mathcal{K}(A) = \begin{cases} \|A\|\|A^{-1}\|, & \det(A) \neq 0 \\ \infty, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

La matriz A está bien condicionada si su número de condición está cerca de 1 y está mal condicionada si es significativamente mayor que 1, lo que nos indicaría que pequeñas variaciones en los datos pueden producir grandes variaciones en los resultados y por tanto que la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es propensa a grandes errores de redondeo.

Número de condición (de nuevo)

Sigui A una matriz, y $\|\cdot\|$ cualquier norma sub-multiplicativa,

Definición: Número de condición

$$\text{Cond}(A) = \mathcal{K}(A) = \begin{cases} \|A\|\|A^{-1}\|, & \det(A) \neq 0 \\ \infty, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Propiedades

- $\text{Cond}(A) \geq 1 \quad \text{Cond}(I) = 1$.
- Si $B = kA$, con $k \neq 0$ real, entonces $\text{Cond}(B) = \text{Cond}(A)$.
- $\text{Cond}(AB) \leq \text{Cond}(A)\text{Cond}(B)$.
- $\text{Cond}_2(A) = \sigma_{\text{max}}(A)/\sigma_{\text{min}}(A)$.
- $\text{Cond}_2(A) = \text{Cond}_2(AQ) = \text{Cond}_2(QA)$ para Q matriz ortogonal (o unitaria).

Número de condición (de nuevo)

Sigui A una matriz, y $\|\cdot\|$ cualquier norma sub-multiplicativa,

Definición: Número de condición

$$\text{Cond}(A) = \mathcal{K}(A) = \begin{cases} \|A\|\|A^{-1}\|, & \det(A) \neq 0 \\ \infty, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Propiedades

- $\text{Cond}(A) \geq 1 \quad \text{Cond}(I) = 1$.
- Si $B = kA$, con $k \neq 0$ real, entonces $\text{Cond}(B) = \text{Cond}(A)$.
- $\text{Cond}(AB) \leq \text{Cond}(A)\text{Cond}(B)$.
- $\text{Cond}_2(A) = \sigma_{\text{max}}(A)/\sigma_{\text{min}}(A)$.
- $\text{Cond}_2(A) = \text{Cond}_2(AQ) = \text{Cond}_2(QA)$ para Q matriz ortogonal (o unitaria).

$\sigma_{\text{max}}(A)$ y $\sigma_{\text{min}}(A)$ son el mayor y el menor valor singular de A.

Condicionamiento de un sistema: cotas del error

Si $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$, en el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se verifica:

$$\text{Errores en } \mathbf{b}: \quad \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{Cond}(A)\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

$$\text{Errores en } A: \quad \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}\|} \leq \text{Cond}(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

$$\text{Errores en } A \text{ y } \mathbf{b}: \quad \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{Cond}(A)\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\frac{\|\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} + \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}\right)$$

Vector residuo y error

Como criterio de comparación entre la solución exacta $\mathbf{x}$ y la solución calculada numéricamente $\mathbf{x}^*$, con $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$, del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, definimos el vector residuo $\mathbf{r}(\mathbf{x}^*)$ como:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}^*) = A\Delta\mathbf{x} = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}^* = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^*$$

Luego, se verifica:

$$\boxed{\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{Cond}(A)\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = \text{Cond}(A)\frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{x}^*)\|}{\|\mathbf{b}\|}.}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Métodos compactos

Documentación de MATLAB - Factoritzaciones

Descomposiciones de matrices

El rasgo principal de estos métodos es trabajar solo con la matriz A y presentarla como un producto $A = BC$, donde B y C son matrices que tienen mejores propiedades y hacen los cálculos más fáciles (en menos operaciones).

Descomposiciones de matrices

El rasgo principal de estos métodos es trabajar solo con la matriz A y presentarla como un producto $A = BC$, donde B y C son matrices que tienen mejores propiedades y hacen los cálculos más fáciles (en menos operaciones).

Las descomposiciones más usadas y conocidas son:

Descomposiciones de matrices

El rasgo principal de estos métodos es trabajar solo con la matriz A y presentarla como un producto $A = BC$, donde B y C son matrices que tienen mejores propiedades y hacen los cálculos más fáciles (en menos operaciones).

Las descomposiciones más usadas y conocidas son:

- $\boxed{A = LU}$, con L triangular inferior y U triangular superior.

Descomposiciones de matrices

El rasgo principal de estos métodos es trabajar solo con la matriz A y presentarla como un producto $A = BC$, donde B y C son matrices que tienen mejores propiedades y hacen los cálculos más fáciles (en menos operaciones).

Las descomposiciones más usadas y conocidas son:

- $\boxed{A = LU}$, con L triangular inferior y U triangular superior.
- $A = R^t R$, con R triangular superior si A es definida positiva.

Descomposiciones de matrices

El rasgo principal de estos métodos es trabajar solo con la matriz A y presentarla como un producto $A = BC$, donde B y C son matrices que tienen mejores propiedades y hacen los cálculos más fáciles (en menos operaciones).

Las descomposiciones más usadas y conocidas son:

- $\boxed{A = LU}$, con L triangular inferior y U triangular superior.
- $A = R^t R$, con R triangular superior si A es definida positiva.
- $\boxed{A = QR}$, con Q ortogonal y R triangular superior.

Descomposiciones de matrices

El rasgo principal de estos métodos es trabajar solo con la matriz A y presentarla como un producto $A = BC$, donde B y C son matrices que tienen mejores propiedades y hacen los cálculos más fáciles (en menos operaciones).

Las descomposiciones más usadas y conocidas son:

- $\boxed{A = LU}$, con L triangular inferior y U triangular superior.
- $A = R^t R$, con R triangular superior si A es definida positiva.
- $\boxed{A = QR}$, con Q ortogonal y R triangular superior.
- $\boxed{A = U\Sigma V^t}$, con U y V ortogonales y Σ diagonal.

Descomposiciones de matrices

El rasgo principal de estos métodos es trabajar solo con la matriz A y presentarla como un producto $A = BC$, donde B y C son matrices que tienen mejores propiedades y hacen los cálculos más fáciles (en menos operaciones).

Las descomposiciones más usadas y conocidas son:

- $\boxed{A = LU}$, con L triangular inferior y U triangular superior.
- $A = R^t R$, con R triangular superior si A es definida positiva.
- $\boxed{A = QR}$, con Q ortogonal y R triangular superior.
- $\boxed{A = U\Sigma V^t}$, con U y V ortogonales y Σ diagonal.

Descomposición en valores singulares (DVS o SVD)

Gauss como factorización LU

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\
2x_1 - x_2 \;\; + 3x_3 &= 9 \\
x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4
\end{aligned}
$$

Gauss como factorización LU

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 \ + 3x_3 &= 9 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

$$G^{(0)} = \left(\begin{array}{c} \color{blue}{A} \\ \boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{matrix}} \end{array} \left| \begin{matrix} 0 \\ 9 \\ -4 \end{matrix} \right.\right)$$

Gauss como factorización LU

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9 \\
x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4
\end{aligned}
$$

$$
G^{(0)} = \left(\begin{array}{c|c} \overset{A}{\boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{matrix}}} & \begin{matrix} 0 \\ 9 \\ -4 \end{matrix} \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot - 2/3 \\ \cdot - 1/3 \end{array}
$$

Gauss como factorización LU

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; M^{(1)}A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G^{(0)} = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{matrix}}}^{A} & \begin{matrix} 0 \\ 9 \\ -4 \end{matrix} \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot - 2/3 \\ \cdot - 1/3 \end{matrix}$$

Gauss como factorización LU

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; M^{(1)} A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} ; M^{(2)} M^{(1)} A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$G^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot -2/3 \\ \cdot -1/3 \end{array}$$

Gauss como factorización LU

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; M^{(1)}A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}; \underbrace{M^{(2)}M^{(1)}}A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$G^{(0)} = \left(\begin{array}{c|c} \overset{A}{\boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{matrix}}} & \begin{matrix} 0 \\ 9 \\ -4 \end{matrix} \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot -2/3 \\ \cdot -1/3 \end{matrix}$$

Gauss como factorización LU

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ M^{(1)}A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \underbrace{M^{(2)}M^{(1)}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}}A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$G^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot -2/3 \\ \cdot -1/3 \end{array}$$

with A the boxed coefficient block.

Gauss como factorización LU

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; M^{(1)}A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}; \underbrace{M^{(2)}M^{(1)}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}} A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$G^{(0)} = \left(\begin{array}{c|c} \overset{A}{\boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{matrix}}} & \begin{matrix} 0 \\ 9 \\ -4 \end{matrix} \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot -2/3 \\ \cdot -1/3 \end{matrix}$$

$$G^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} & 9 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} & -4 \end{array}\right)$$

Gauss como factorización LU

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; M^{(1)}A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \underbrace{M^{(2)}M^{(1)}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}} A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$G^{(0)} = \left(\begin{array}{c} A \\ \boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{matrix}} \end{array} \left| \begin{matrix} 0 \\ 9 \\ -4 \end{matrix} \right.\right) \begin{matrix} \cdot -2/3 \\ \cdot -1/3 \end{matrix}$$

$$G^{(1)} = \left(\begin{array}{c} M^{(2)}M^{(1)}A \\ \boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \end{matrix}} \end{array} \left| \begin{matrix} 0 \\ 9 \\ -4 \end{matrix} \right.\right)$$

Gauss como factorización LU

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0\\
2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9\\
x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4
\end{aligned}
$$

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ M^{(1)}A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \underbrace{M^{(2)}M^{(1)}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}}A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$G^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{A} & \mathbf{b} \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot -2/3 \\ \cdot -1/3 \end{array}$$

$$G^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{M^{(2)}M^{(1)}A} & M^{(2)}M^{(1)}\mathbf{b} \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} & 9 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} & -4 \end{array}\right)$$

Gauss como factorización LU

$$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$$
$$2x_1 - x_2 \ + 3x_3 = 9$$
$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -4$$

$$G^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \end{matrix}}}^{M^{(2)}M^{(1)}A} & \begin{matrix} 0 \\ 9 \\ -4 \end{matrix} \end{array}\right) \quad \leftarrow M^{(2)}M^{(1)}\mathbf{b}$$

Gauss como factorización LU

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0\\
2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9\\
x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4
\end{aligned}
$$

Matriz de permutación elemental:

$$
P_{ij} = \begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$
G^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c}
3 & 2 & -2 & 0\\
0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} & 9\\
0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} & -4
\end{array}\right)
$$

with the coefficient block labelled $M^{(2)}M^{(1)}A$

Gauss como factorización LU

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9 \\
x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4
\end{aligned}
$$

- $P_{ij}A$ intercambia las filas i y j de A.

Matriz de permutación elemental:

$$
P_{ij} = \begin{array}{c@{}l}
\begin{bmatrix}
1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots\,1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

$$
G^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c}
\multicolumn{3}{c|}{M^{(2)}M^{(1)}A} & \\
3 & 2 & -2 & 0 \\
0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} & 9 \\
0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} & -4
\end{array}\right)
$$

Gauss como factorización LU

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0\\
2x_1 - x_2 \ + 3x_3 &= 9\\
x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4
\end{aligned}
$$

- $P_{ij}A$ intercambia las filas i y j de A.
- AP_{ij} intercambia las columnas i y j de A.

Matriz de permutación elemental:

$$
P_{ij} = \begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$
G^{(1)} = \left(\begin{array}{c}
M^{(2)}M^{(1)}A\\
\boxed{\begin{array}{ccc}
3 & 2 & -2\\
0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3}\\
0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3}
\end{array}}
\end{array}
\left|\begin{array}{c} 0\\ 9\\ -4 \end{array}\right.\right)
$$

Gauss como factorización LU

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0\\
2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9\\
x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4
\end{aligned}
$$

- $P_{ij}A$ intercambia las filas i y j de A.
- AP_{ij} intercambia las columnas i y j de A.
- $P_{ij} = P_{ij}^t = P_{ij}^{-1}$.

$$
G^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c}
\overbrace{\begin{matrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \end{matrix}}^{M^{(2)}M^{(1)}A} & \begin{matrix} 0 \\ 9 \\ -4 \end{matrix}
\end{array}\right)
$$

Matriz de permutación elemental:

$$
P_{ij} = \begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

Gauss como factorización LU

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 \ + 3x_3 &= 9 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

- $P_{ij}A$ intercambia las filas i y j de A.
- AP_{ij} intercambia las columnas i y j de A.
- $P_{ij} = P_{ij}^t = P_{ij}^{-1}$.
- $P^{-1} = P^t$

$$G^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} \overset{M^{(2)}M^{(1)}A}{\boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \end{matrix}}} & \begin{matrix} 0 \\ 9 \\ -4 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Matriz de permutación elemental:

$$P_{ij} = \begin{array}{c} \left[\begin{matrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Una matriz de permutación P general tiene un 1 por fila y por columna; el resto 0.

Gauss como factorización LU

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

$$P_{23}M^{(2)}M^{(1)}A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \end{pmatrix}$$

- $P_{ij}A$ intercambia las filas i y j de A.
- AP_{ij} intercambia las columnas i y j de A.
- $P_{ij} = P_{ij}^t = P_{ij}^{-1}$.

$$G^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} \overset{M^{(2)}M^{(1)}A}{\boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \end{matrix}}} & \begin{matrix} 0 \\ 9 \\ -4 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Gauss como factorización LU

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

$$P_{23} M^{(2)} M^{(1)} A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \end{pmatrix} \cdot 7/10$$

- $P_{ij}A$ intercambia las filas i y j de A.
- AP_{ij} intercambia las columnas i y j de A.
- $P_{ij} = P_{ij}^t = P_{ij}^{-1}$.

$$G^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{}^{M^{(2)} M^{(1)} A}} & \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} & 9 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} & -4 \end{array}\right)$$

Gauss como factorización LU

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

- $P_{ij}A$ intercambia las filas i y j de A.
- AP_{ij} intercambia las columnas i y j de A.
- $P_{ij} = P_{ij}^t = P_{ij}^{-1}$.

$$G^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{M^{(2)}M^{(1)}A} \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} & 9 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} & -4 \end{array}\right)$$

$$P_{23}M^{(2)}M^{(1)}A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \end{pmatrix} \cdot 7/10$$

$$M^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{10} & 1 \end{pmatrix}$$

Gauss como factorización LU

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0\\
2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9\\
x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4
\end{aligned}
$$

$$P_{23}M^{(2)}M^{(1)}A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \end{pmatrix} \cdot 7/10$$

- $P_{ij}A$ intercambia las filas i y j de A.
- AP_{ij} intercambia las columnas i y j de A.
- $P_{ij} = P_{ij}^t = P_{ij}^{-1}$.

$$M^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{10} & 1 \end{pmatrix}$$

$M^{(3)}P_{23}M^{(2)}M^{(1)}\mathbf{b}$

$$G^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{M^{(2)}M^{(1)}A} & \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} & 9 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} & -4 \end{array}\right) \to G^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{M^{(3)}P_{23}M^{(2)}M^{(1)}A} & \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} & -4 \\ 0 & 0 & \frac{31}{5} & \frac{31}{5} \end{array}\right); \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gauss como factorización LU

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0\\
2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9\\
x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4
\end{aligned}
\qquad
U = M^{(3)} P_{23} M^{(2)} M^{(1)} A
$$

- $P_{ij}A$ intercambia las filas i y j de A.
- AP_{ij} intercambia las columnas i y j de A.
- $P_{ij} = P_{ij}^t = P_{ij}^{-1}$.

$$
G^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -2 & 0\\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} & 9\\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} & -4 \end{array}\right) \to G^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -2 & 0\\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} & -4\\ 0 & 0 & \frac{31}{5} & \frac{31}{5} \end{array}\right); \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2\\ -2\\ 1 \end{pmatrix}
$$

$M^{(2)}M^{(1)}A$

$M^{(3)}P_{23}M^{(2)}M^{(1)}A$

$M^{(3)}P_{23}M^{(2)}M^{(1)}\mathbf{b}$

Gauss como factorización LU

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0\\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9\\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U = {} & M^{(3)}P_{23}M^{(2)}M^{(1)}A\\ = {} & M^{(3)}P_{23}M^{(2)}M^{(1)}P_{23}P_{23}A \end{aligned}$$

- $P_{ij}A$ intercambia las filas i y j de A.
- AP_{ij} intercambia las columnas i y j de A.
- $P_{ij} = P_{ij}^t = P_{ij}^{-1}$.

$M^{(3)}P_{23}M^{(2)}M^{(1)}\mathbf{b}$

$$G^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & -2\\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3}\\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3}\end{matrix}}}^{M^{(2)}M^{(1)}A} & \begin{matrix}0\\ 9\\ -4\end{matrix}\end{array}\right) \to G^{(2)} = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & -2\\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3}\\ 0 & 0 & \frac{31}{5}\end{matrix}}}^{M^{(3)}P_{23}M^{(2)}M^{(1)}A} & \begin{matrix}0\\ -4\\ \frac{31}{5}\end{matrix}\end{array}\right); \mathbf{x} = \begin{pmatrix}2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$$

Gauss como factorización LU

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

- $P_{ij}A$ intercambia las filas i y j de A.
- AP_{ij} intercambia las columnas i y j de A.
- $P_{ij} = P_{ij}^t = P_{ij}^{-1}$.

$$U = M^{(3)}P_{23}M^{(2)}M^{(1)}A$$

$$= \underbrace{M^{(3)}P_{23}M^{(2)}M^{(1)}P_{23}}_{\text{triangular inferior con 1s en la diagonal principal}}P_{23}A$$

- si la inversa existe, es triangular inferior con 1s en la diagonal principal: L

$$LU = P_{23}A$$

$$G^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} & 9 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} & -4 \end{array}\right) \to G^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} & -4 \\ 0 & 0 & \frac{31}{5} & \frac{31}{5} \end{array}\right); \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$M^{(2)}M^{(1)}A$

$M^{(3)}P_{23}M^{(2)}M^{(1)}A$

$M^{(3)}P_{23}M^{(2)}M^{(1)}\mathbf{b}$

Gauss como factorización LU

$$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9$$
$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -4$$

- $P_{ij}A$ intercambia las filas i y j de A.
- AP_{ij} intercambia las columnas i y j de A.
- $P_{ij} = P_{ij}^t = P_{ij}^{-1}$.

$$U = M^{(3)}P_{23}M^{(2)}M^{(1)}A$$
$$= \underbrace{M^{(3)}P_{23}M^{(2)}M^{(1)}P_{23}}_{\text{triangular inferior con 1s en la diagonal principal}}P_{23}A$$

- si la inversa existe, es triangular inferior con 1s en la diagonal principal: L

$$LU = P_{23}A$$

$$PA = LU \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{7}{10} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & \frac{31}{5} \end{pmatrix}$$

Factorización LU para resolver un sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Factorización LU para resolver un sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\Big\downarrow \text{Factorización LU}$$

$$PA = LU$$

Factorización LU para resolver un sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\Big\downarrow \text{Factorización LU}$$

$$PA = LU$$

$$PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

$$\Big\downarrow$$

$$LU\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

Factorización LU para resolver un sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\Big\downarrow \text{Factorización LU}$$

$$PA = LU$$

$$PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

$$\downarrow$$

$$LU\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} L\mathbf{y} = P\mathbf{b} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

Factorización LU para resolver un sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Factorización LU $\downarrow$

$$PA = LU$$

$$PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

$$\downarrow$$

$$LU\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} L\mathbf{y} = P\mathbf{b} & \text{Substitución hacia adelante} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{y} & \text{Substitución hacia atrás} \end{cases}$$

Factorización LU para resolver un sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\Big\downarrow \text{ Factorización LU}$$

$$PA = LU$$

$$PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

$$\Big\downarrow$$

$$LU\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

$$\Big\downarrow$$

$$\begin{cases} L\mathbf{y} = P\mathbf{b} & \text{Substitución hacia adelante} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{y} & \text{Substitución hacia atrás} \end{cases}$$

$$\Big\downarrow$$

$$\mathbf{x}$$

Factorización LU para resolver un sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\text{Factorización LU} \Big\downarrow$$

$$PA = LU$$

$$PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

$$\Big\downarrow$$

$$LU\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

$$\Big\downarrow$$

$$\begin{cases} L\mathbf{y} = P\mathbf{b} & \text{Substitución hacia adelante} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{y} & \text{Substitución hacia atrás} \end{cases}$$

$$\Big\downarrow$$

$$\mathbf{x}$$

Especialmente últil si tenemos varios sistemas con la misma matriz A.

Factorización LU para la inversa y el determinante

$$AA^{-1} = I \to LUA^{-1} = PI$$

- Dado $PA = LU$, se resuelven los n sistemas $LU\mathbf{a}_k = P\mathbf{e}_k$, con $k = 1, \ldots, n$ y donde $\mathbf{a}_k$ es la k-ésima columna de A^-1 y $\mathbf{e}_k = [0 \ldots 010 \ldots 0]^t$ es el k-esimo vector de la base canónica.

Factorización LU para la inversa y el determinante

$$AA^{-1} = I \rightarrow LUA^{-1} = PI$$

- Dado $PA = LU$, se resuelven los n sistemas $LU\mathbf{a}_k = P\mathbf{e}_k$, con $k = 1, \ldots, n$ y donde $\mathbf{a}_k$ es la k-ésima columna de A^-1 y $\mathbf{e}_k = [0 \ldots 010 \ldots 0]^t$ es el k-esimo vector de la base canónica.
- Para resolver los n sistemas se necesitan aproximadamente $2/3n^3$ operaciones y, si se suman las que veremos para la factorización LU $\rightarrow O(n^3)$.

Factorización LU para la inversa y el determinante

$$AA^{-1} = I \to LUA^{-1} = PI$$

- Dado $PA = LU$, se resuelven los n sistemas $LU\mathbf{a}_k = P\mathbf{e}_k$, con $k = 1, \ldots, n$ y donde $\mathbf{a}_k$ es la k-ésima columna de A^-1 y $\mathbf{e}_k = [0 \ldots 010 \ldots 0]^t$ es el k-esimo vector de la base canónica.
- Para resolver los n sistemas se necesitan aproximadamente $2/3n^3$ operaciones y, si se suman las que veremos para la factorización LU $\to O(n^3)$.

$$\det(A) = \det(P^t LU) = \det(P)\det(L)\det(U)$$

Factorización LU para la inversa y el determinante

$$AA^{-1} = I \rightarrow LUA^{-1} = PI$$

- Dado $PA = LU$, se resuelven los n sistemas $LU\mathbf{a}_k = P\mathbf{e}_k$, con $k = 1, \ldots, n$ y donde $\mathbf{a}_k$ es la k-ésima columna de A^-1 y $\mathbf{e}_k = [0 \ldots 010 \ldots 0]^t$ es el k-esimo vector de la base canónica.
- Para resolver los n sistemas se necesitan aproximadamente $2/3n^3$ operaciones y, si se suman las que veremos para la factorización LU $\rightarrow O(n^3)$.

$$\det(A) = \det(P^t LU) = \det(P)\det(L)\det(U)$$

signo de la permutación

Producto de elementos en la diagonal principal. En las factorizaciones LU que veremos un determinante es 1.

Factorización LU: métodos compactos

$$A = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Factorización LU: métodos compactos

$$A = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

- Si se puede aplicar Gauss sin pivotar, L es la matriz de multiplicadores y U la matriz resultante.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} \rightarrow & \boxed{a_{12}} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \ \text{con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} \rightarrow & \boxed{a_{12}} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} \rightarrow & a_{12} \rightarrow & \boxed{a_{13}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} \rightarrow & a_{12} \rightarrow & \boxed{a_{13}} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\
l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\
0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\
0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn}
\end{pmatrix}
$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} \to & a_{12} \to & \boxed{a_{13}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1.$ ⇦
- Método de Crout: $u_{ii} = 1.$

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} \to & a_{12} \to & a_{13} \to & \cdots \to & \boxed{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$. ⇦
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} \rightarrow & a_{12} \rightarrow & a_{13} \rightarrow & \dots \rightarrow & \boxed{a_{1n}} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\
l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\
0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\
0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn}
\end{pmatrix}
$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} \to & a_{12} \to & a_{13} \to & \dots \to & a_{1n} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} \rightarrow & a_{12} \rightarrow & a_{13} \rightarrow & \dots \rightarrow & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1.$ ⇦
- Método de Crout: $u_{ii} = 1.$

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1.$
- Método de Crout: $u_{ii} = 1.$

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{n1}} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{n1}} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1.$
- Método de Crout: $u_{ii} = 1.$

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1.$
- Método de Crout: $u_{ii} = 1.$

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1.$
- Método de Crout: $u_{ii} = 1.$

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \boxed{a_{2n}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1.$
- Método de Crout: $u_{ii} = 1.$

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \boxed{a_{2n}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e n^2+n incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik}u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i,j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1.$
- Método de Crout: $u_{ii} = 1.$

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \boxed{a_{n2}} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1.$
- Método de Crout: $u_{ii} = 1.$

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \boxed{a_{n2}} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1.$
- Método de Crout: $u_{ii} = 1.$

Factorización LU: métodos compactos

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \dots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\
l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\
0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\
0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn}
\end{pmatrix}
$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Factorización LU: métodos compactos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Tenemos un sistema de n^2 ecuaciones e $n^2 + n$ incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kj}, \text{ con } p = \min\{i, j\}$$

Podemos elegir igualar a 1 los elementos de la diagonal de una de las matrices triangulares:

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.

Algoritmo para la factorización LU

Para $k = 1, \ldots, n$

$$\ell_{kk} u_{kk} = a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{kr} u_{rk};$$

$$\ell_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{ir} u_{rk}}{u_{kk}}, i = k+1, \ldots, n;$$

$$u_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{kr} u_{rj}}{\ell_{kk}}, j = k+1, \ldots, n.$$

Algoritmo para la factorización LU

Para $k = 1, \dots, n$

$$\ell_{kk} u_{kk} = a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{kr} u_{rk};$$

$$\ell_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{ir} u_{rk}}{u_{kk}}, i = k+1, \dots, n;$$

$$u_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{kr} u_{rj}}{\ell_{kk}}, j = k+1, \dots, n.$$

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
  Orden: $u_{1j}, \forall j$; $l_{i1}, \forall i \geq 2$; $u_{2j}, \forall j \geq 2$; $l_{i2}, \forall i \geq 3$; $u_{3j}, \forall j \geq 3$;...

Algoritmo para la factorización LU

Para $k = 1, \dots, n$

$$\ell_{kk} u_{kk} = a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{kr} u_{rk};$$

$$\ell_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{ir} u_{rk}}{u_{kk}}, i = k+1, \dots, n;$$

$$u_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{kr} u_{rj}}{\ell_{kk}}, j = k+1, \dots, n.$$

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
  Orden: $u_{1j}, \forall j$; $l_{i1}, \forall i \geq 2$; $u_{2j}, \forall j \geq 2$; $l_{i2}, \forall i \geq 3$; $u_{3j}, \forall j \geq 3$;...
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.
  Orden: $l_{1j}, \forall j$; $u_{i1}, \forall i \geq 2$; $l_{2j}, \forall j \geq 2$; $u_{i2}, \forall i \geq 3$; $l_{3j}, \forall j \geq 3$;...

Algoritmo para la factorización LU

Para $k = 1, \ldots, n$

$$\ell_{kk} u_{kk} = a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{kr} u_{rk};$$

$$\ell_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{ir} u_{rk}}{u_{kk}}, i = k+1, \ldots, n;$$

$$u_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{kr} u_{rj}}{\ell_{kk}}, j = k+1, \ldots, n.$$

- Método de Doolitle: $l_{ii} = 1$.
  Orden: $u_{1j}, \forall j$; $l_{i1}, \forall i \geq 2$; $u_{2j}, \forall j \geq 2$; $l_{i2}, \forall i \geq 3$; $u_{3j}, \forall j \geq 3$;...
- Método de Crout: $u_{ii} = 1$.
  Orden: $l_{1j}, \forall j$; $u_{i1}, \forall i \geq 2$; $l_{2j}, \forall j \geq 2$; $u_{i2}, \forall i \geq 3$; $l_{3j}, \forall j \geq 3$;...

El número de operaciones de este algoritmo de factorización es $\frac{2n^3}{6} + \mathcal{O}(n^2)$.

Factorización LU: ejercicio

Calcular la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

y obtener la inversa a partir de la factorización.

Matlab-code:

```
A=[6,2,1,-1; 2,4,1,0;1,1,4,-1;-1,0,-1,3]
[L,U,P]=lu(A)
```

Factorización LU: existencia (I)

Denotamos por A_k a las submatrices de la matriz A formadas por las primeras k filas y las primeras k columnas de la matriz A.

Teorema: existencia y unicidad

- Una matriz A no singular (=regular = invertible = $(\det(A) \neq 0)$), admite factorización LU ($A = LU$) si y solo si todas las matrices A_k, $k = 1, \ldots, n$, son no singulares (menores principales superiores no nulos).
- Si requerimos $l_{ii} = 1 \; \forall i$ o $u_{ii} = 1 \; \forall i$, la descomposición es única.
- Si A es una matriz singular de rango k, entonces admite una factorización LU si los primeros k menores principales no son nulos, aunque el recíproco no es cierto.

Factorización LU: existencia (I)

Denotamos por A_k a las submatrices de la matriz A formadas por las primeras k filas y las primeras k columnas de la matriz A.

Teorema: existencia y unicidad

- Una matriz A no singular (=regular = invertible = $(\det(A) \neq 0)$), admite factorización LU ($A = LU$) si y solo si todas las matrices A_k, $k = 1, \ldots, n$, son no singulares (menores principales superiores no nulos).
- Si requerimos $l_{ii} = 1 \ \forall i$ o $u_{ii} = 1 \ \forall i$, la descomposición es única.
- Si A es una matriz singular de rango k, entonces admite una factorización LU si los primeros k menores principales no son nulos, aunque el recíproco no es cierto.

- Si A es diagonal dominante, admite factorización LU.
- Si A es definida positiva, admite factorización LU (una muy especial. . .).

Factorización LU: existencia (II)

Para cualquier matriz no singular A, las filas pueden ser reordenadas de tal manera que exista una factorización LU. Esto es una consecuencia de la equivalencia entre la eliminación gaussiana y factorización LU .

Teorema: existencia para toda matriz regular

Si A es una matriz no singular entonces existen matrices triangular inferior $L = (l_{ij})$ con $l_{ii} = 1$, triangular superior U y matriz de permutaciones P tales que $PA = LU$.

Método LU de Cholesky

Teorema: existencia y unicidad

Una matriz A es definida positiva si y solo si existe una única factorización (factorización de Cholesky) $A = {R^*}^t R$ donde R es triangular superior o $A = L{L^*}^t$ donde L es triangular inferior.

Puede servir como test para determinar si una matriz es definida positiva.

Método LU de Cholesky

Teorema: existencia y unicidad

Una matriz A es definida positiva si y solo si existe una única factorización (factorización de Cholesky) $A = {R^*}^t R$ donde R es triangular superior o $A = L{L^*}^t$ donde L es triangular inferior.

Puede servir como test para determinar si una matriz es definida positiva.

El criterio de Sylvester dice que una matriz hermítica es definida positiva si y solo si los menores principales superiores $(\det(A_k),\ \forall k)$ son positivos.

Método LU de Cholesky

Teorema: existencia y unicidad

Una matriz A es definida positiva si y solo si existe una única factorización (factorización de Cholesky) $A = R^{*^t} R$ donde R es triangular superior o $A = LL^{*^t}$ donde L es triangular inferior.

Puede servir como test para determinar si una matriz es definida positiva.

El criterio de Sylvester dice que una matriz hermítica es definida positiva si y solo si los menores principales superiores $(\det(A_k),\ \forall k)$ son positivos.

muchos determinantes

Método LU de Cholesky

Teorema: existencia y unicidad

Una matriz A es definida positiva si y solo si existe una única factorización (factorización de Cholesky) $A = {R^*}^t R$ donde R es triangular superior o $A = L{L^*}^t$ donde L es triangular inferior.

Puede servir como test para determinar si una matriz es definida positiva.

El criterio de Sylvester dice que una matriz hermítica es definida positiva si y solo si los menores principales superiores $(\det(A_k),\ \forall k)$ son positivos.

Ejemplo: Encontrar la factorización $A = R^t R$ y luego resolver lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & 0 & -4 \\ 4 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow R = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Método LU de Cholesky: algoritmo

Calcular la descomposición de Cholesky es más eficiente y numéricamente más estable que calcular otras descomposiciones LU.

Método LU de Cholesky: algoritmo

Calcular la descomposición de Cholesky es más eficiente y numéricamente más estable que calcular otras descomposiciones LU.

Para $k = 1, \ldots, n,$

$$\ell_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{k,r}^2};$$

$$\ell_{i,j} = \frac{a_{i,j} - \sum_{r=1}^{j-1} \ell_{ir}\ell_{jr}}{\ell_{jj}}, i = j+1, \ldots, n.$$

El coste de este método de factorización es también $O(n^3)$, pero aproximadamente el doble de eficiente que la factorización LU.

Factorización QR

Factorización QR: definición

La factorización QR expresa la matriz $A = QR$ como el producto de dos matrices: una ortogonal Q $(Q^tQ = I)$ y la otra triangular superior R.

Factorización QR: definición

La factorización QR expresa la matriz $A = QR$ como el producto de dos matrices: una ortogonal Q $(Q^tQ = I)$ y la otra triangular superior R.

- La matriz A puede ser rectangular, con columnas linearmente independientes.

Factorización QR: definición

La factorización QR expresa la matriz $A = QR$ como el producto de dos matrices: una ortogonal Q $(Q^tQ = I)$ y la otra triangular superior R.

- La matriz A puede ser rectangular, con columnas linearmente independientes.
- El sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se reduce a resolver $R\mathbf{x} = Q^t\mathbf{b}$.

Factorización QR: definición

La factorización QR expresa la matriz $A = QR$ como el producto de dos matrices: una ortogonal Q ($Q^tQ = I$) y la otra triangular superior R.

- La matriz A puede ser rectangular, con columnas linearmente independientes.
- El sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se reduce a resolver $R\mathbf{x} = Q^t\mathbf{b}$.
- No sólo las columnas de Q forman una base ortonormal, sino que la primera columna de Q está en la misma dirección que la primera columna de A. Las dos primeras columnas de Q generan el mismo espacio que las dos primeras columnas de A y así sucesivamente.

Factorización QR: definición

La factorización QR expresa la matriz $A = QR$ como el producto de dos matrices: una ortogonal Q $(Q^tQ = I)$ y la otra triangular superior R.

- La matriz A puede ser rectangular, con columnas linearmente independientes.
- El sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se reduce a resolver $R\mathbf{x} = Q^t\mathbf{b}$.
- No sólo las columnas de Q forman una base ortonormal, sino que la primera columna de Q está en la misma dirección que la primera columna de A. Las dos primeras columnas de Q generan el mismo espacio que las dos primeras columnas de A y así sucesivamente.
- La factorización QR no es única en general, pero si A es una matriz cuadrada cuyas columnas son linearmente independientes y requerimos que los elementos de la diagonal de R sean positivos, entonces la factorización QR es única.

Factorización QR: matrices rectangulares

- Una matriz A rectangular $m \times n$ con $m \geq n$ admite una factorización QR reducida en la cual la matriz ortonormal es $m \times n$ y la matriz triangular superior es $n \times n$.

Factorización QR: matrices rectangulares

- Una matriz A rectangular $m \times n$ con $m \geq n$ admite una factorización QR reducida en la cual la matriz ortonormal es $m \times n$ y la matriz triangular superior es $n \times n$.

$$A = QR = Q \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 R_1$$

Factorización QR: matrices rectangulares

- Una matriz A rectangular $m \times n$ con $m \geq n$ admite una factorización QR reducida en la cual la matriz ortonormal es $m \times n$ y la matriz triangular superior es $n \times n$.

$$A = QR = Q \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 R_1$$

$n \times n$ triangular superior

$(m - n) \times n$ matriz de ceros

Factorización QR: matrices rectangulares

- Una matriz A rectangular $m \times n$ con $m \geq n$ admite una factorización QR reducida en la cual la matriz ortonormal es $m \times n$ y la matriz triangular superior es $n \times n$.

$$A = QR = Q \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 R_1$$

$n \times n$ triangular superior

$m \times n$ $\quad m \times (m-n)$

$(m-n) \times n$ matriz de ceros

Factorización QR: métodos

- Esta factorización es más costosa que la LU pero las matrices A y $R = Q^t A$ tienen el mismo número de condición.

Factorización QR: métodos

- Esta factorización es más costosa que la LU pero las matrices A y $R = Q^t A$ tienen el mismo número de condición.

Hay varios métodos para calcularla:

- Método de ortogonalización de Gram-Schmidt (1883).
- Método de las reflexiones de Householder (1958).
- Método de las rotaciones de Givens (1950s).

Factorización QR: métodos

- Esta factorización es más costosa que la LU pero las matrices A y $R = Q^t A$ tienen el mismo número de condición.

Hay varios métodos para calcularla:

- Método de ortogonalización de Gram-Schmidt (1883).
- Método de las reflexiones de Householder (1958).
- Método de las rotaciones de Givens (1950s).

Factorización QR: métodos

- Esta factorización es más costosa que la LU pero las matrices A y $R = Q^t A$ tienen el mismo número de condición.

Hay varios métodos para calcularla:

- Método de ortogonalización de Gram-Schmidt (1883). proyecciones
- Método de las reflexiones de Householder (1958). reflexiones
- Método de las rotaciones de Givens (1950s). rotaciones

Factorización QR

Método de Gram-Schmidt

Método QR de Gram-Schmidt

Base cualquiera: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$

Método QR de Gram-Schmidt

Base cualquiera: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\} \longrightarrow$ Base ortonormal: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

Método QR de Gram-Schmidt

Base cualquiera: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ $\longrightarrow$ Base ortonormal: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

- $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_i, \forall i \neq j$
- $\|\mathbf{u}_i\| = 1, \forall i$

Método QR de Gram-Schmidt

Base cualquiera: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ $\longrightarrow$ Base ortonormal: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

- $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_i, \forall i \neq j$
- $\|\mathbf{u}_i\| = 1, \forall i$

Paso 1: Encontrar una base ortogonal. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$

Paso 2: Normalizar. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

Método QR de Gram-Schmidt

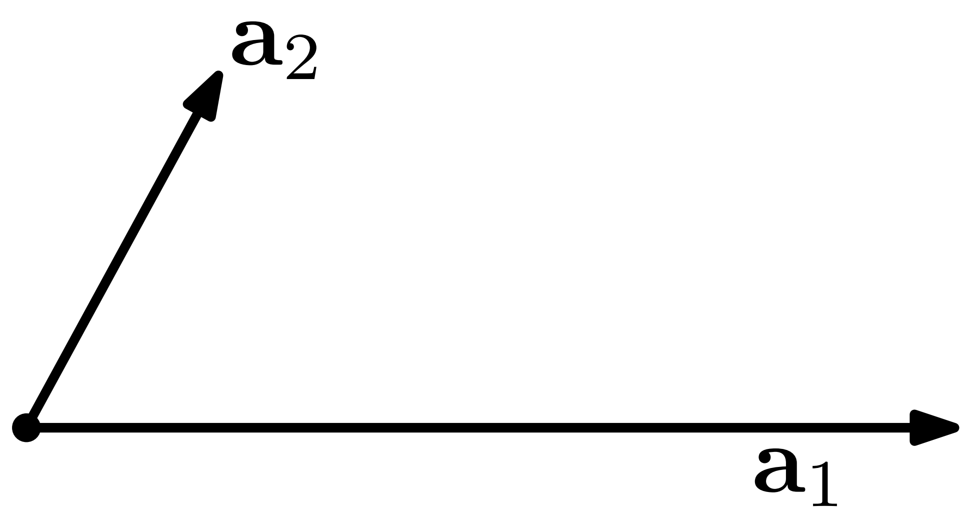
Base cualquiera: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ $\longrightarrow$ Base ortonormal: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$

- $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_i, \forall i \neq j$
- $\|\mathbf{u}_i\| = 1, \forall i$

Paso 1: Encontrar una base ortogonal.
$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$

Paso 2: Normalizar. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$

Interpretación en $\mathbb{R}^2$:



Método QR de Gram-Schmidt

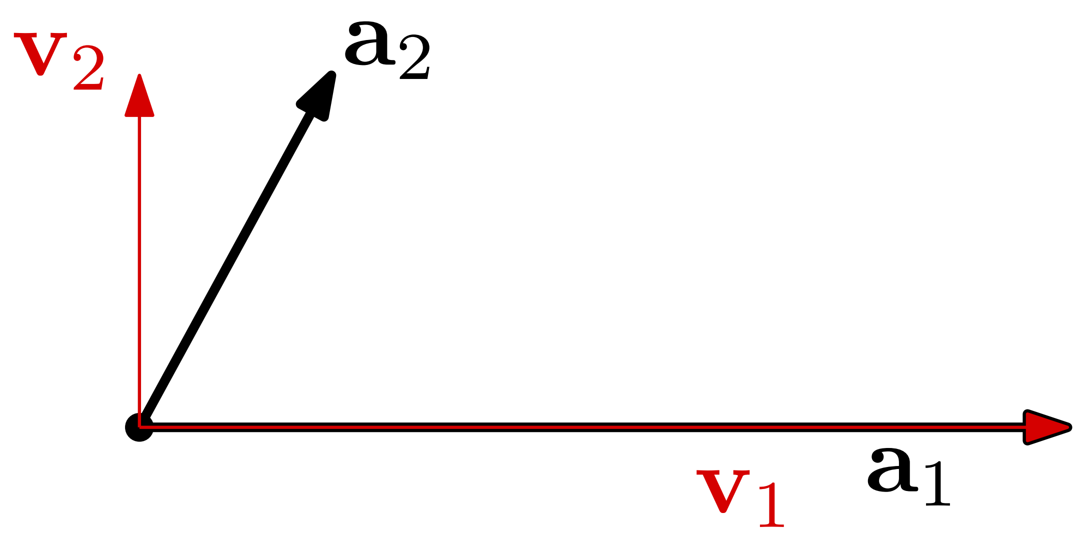
Base cualquiera: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ $\longrightarrow$ Base ortonormal: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

- $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_i, \forall i \neq j$
- $\|\mathbf{u}_i\| = 1, \forall i$

Paso 1: Encontrar una base ortogonal. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$

Paso 2: Normalizar. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

Interpretación en $\mathbb{R}^2$:



Método QR de Gram-Schmidt

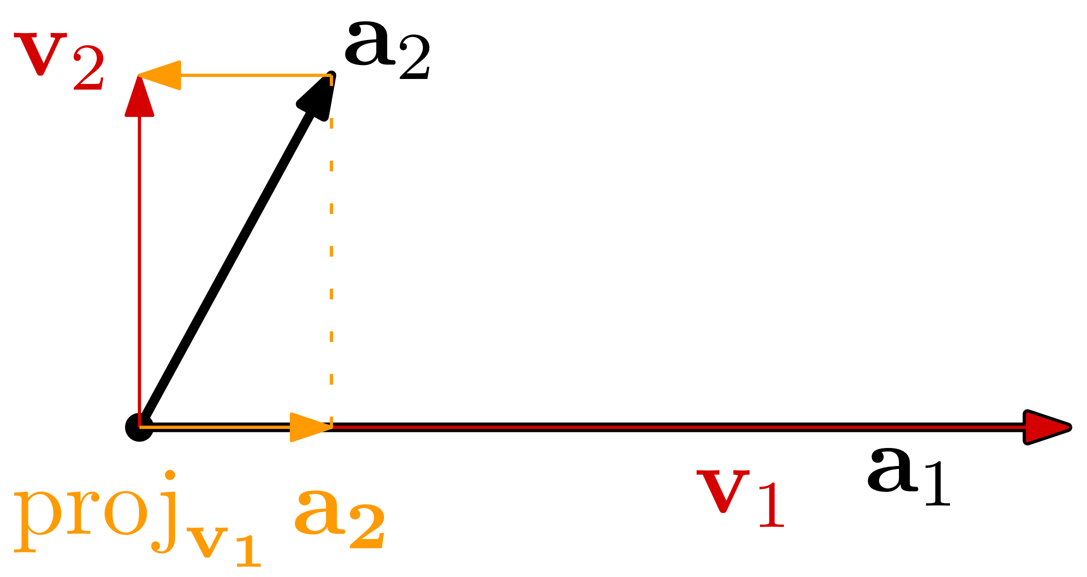
Base cualquiera: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ $\longrightarrow$ Base ortonormal: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

- $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_i, \forall i \neq j$
- $\|\mathbf{u}_i\| = 1, \forall i$

Paso 1: Encontrar una base ortogonal. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$

Paso 2: Normalizar. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

Interpretación en $\mathbb{R}^2$:



Método QR de Gram-Schmidt

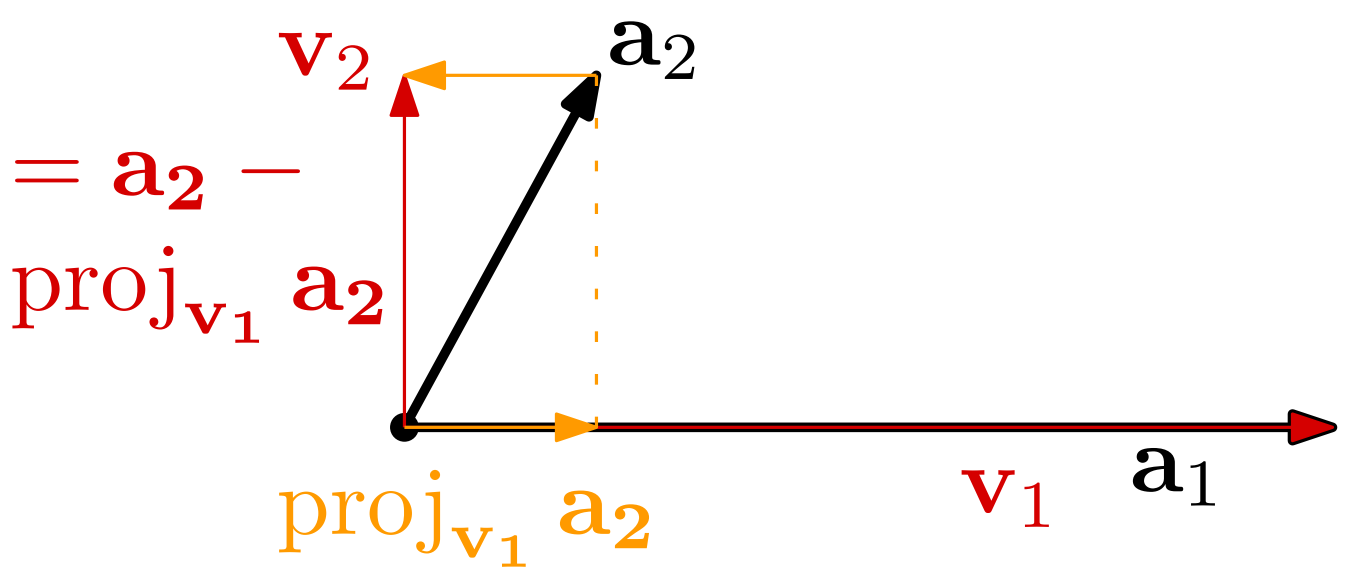
Base cualquiera: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ $\longrightarrow$ Base ortonormal: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$

- $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_i, \forall i \neq j$
- $\|\mathbf{u}_i\| = 1, \forall i$

Paso 1: Encontrar una base ortogonal. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$

Paso 2: Normalizar. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$

Interpretación en $\mathbb{R}^2$:



Método QR de Gram-Schmidt

Base cualquiera: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ $\longrightarrow$ Base ortonormal: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

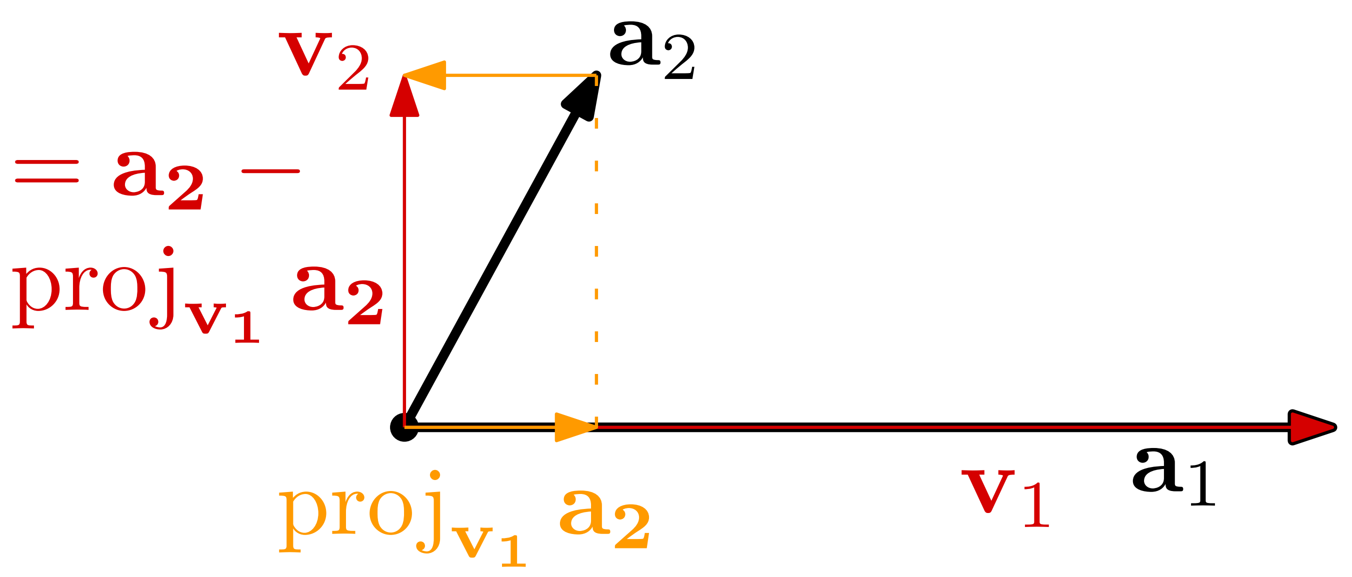
- $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_i, \forall i \neq j$
- $\|\mathbf{u}_i\| = 1, \forall i$

Paso 1: Encontrar una base ortogonal. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$

Paso 2: Normalizar. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

Interpretación en $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\operatorname{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}}$$



Método QR de Gram-Schmidt

Base cualquiera: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ $\longrightarrow$ Base ortonormal: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

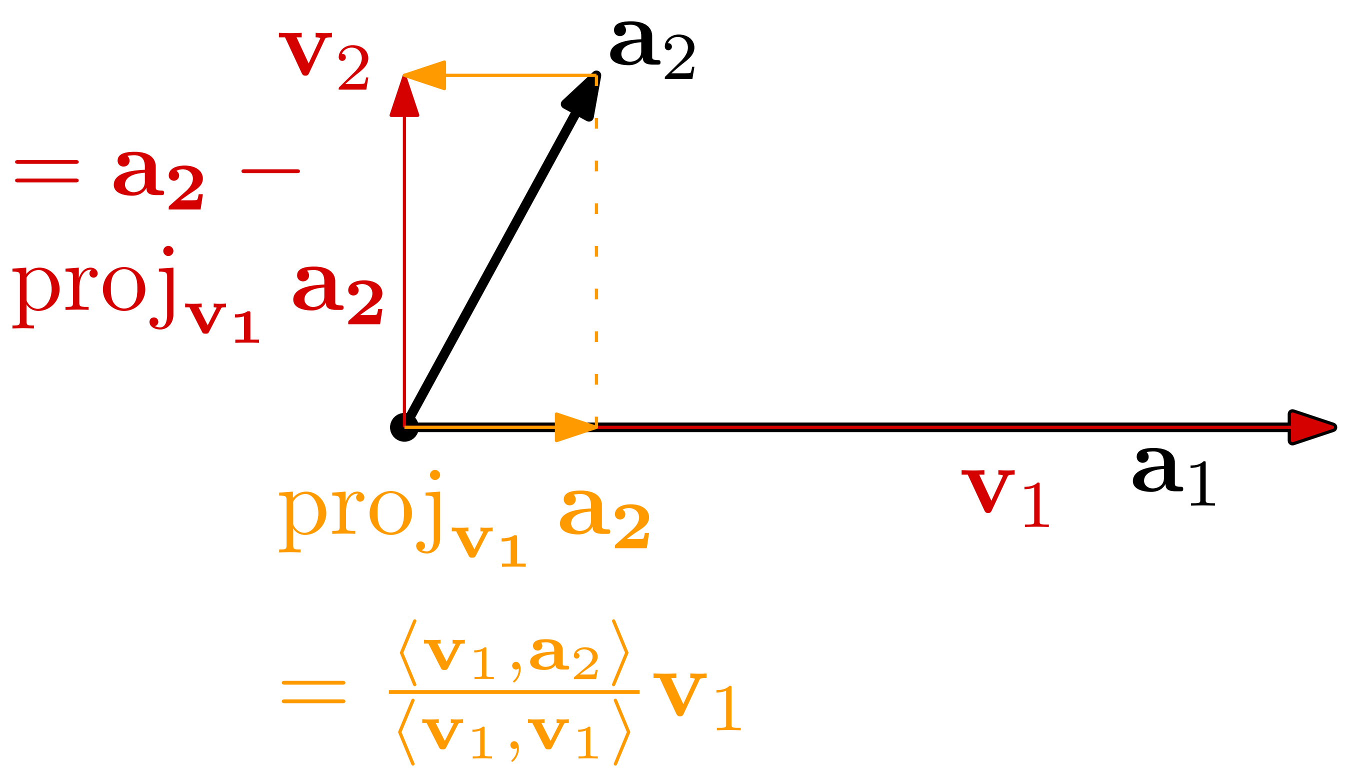
- $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_i, \forall i \neq j$
- $\|\mathbf{u}_i\| = 1, \forall i$

Paso 1: Encontrar una base ortogonal. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$

Paso 2: Normalizar. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

Interpretación en $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\operatorname{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}}$$



Método QR de Gram-Schmidt

Base cualquiera: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ $\longrightarrow$ Base ortonormal: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

- $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_i, \forall i \neq j$
- $\|\mathbf{u}_i\| = 1, \forall i$

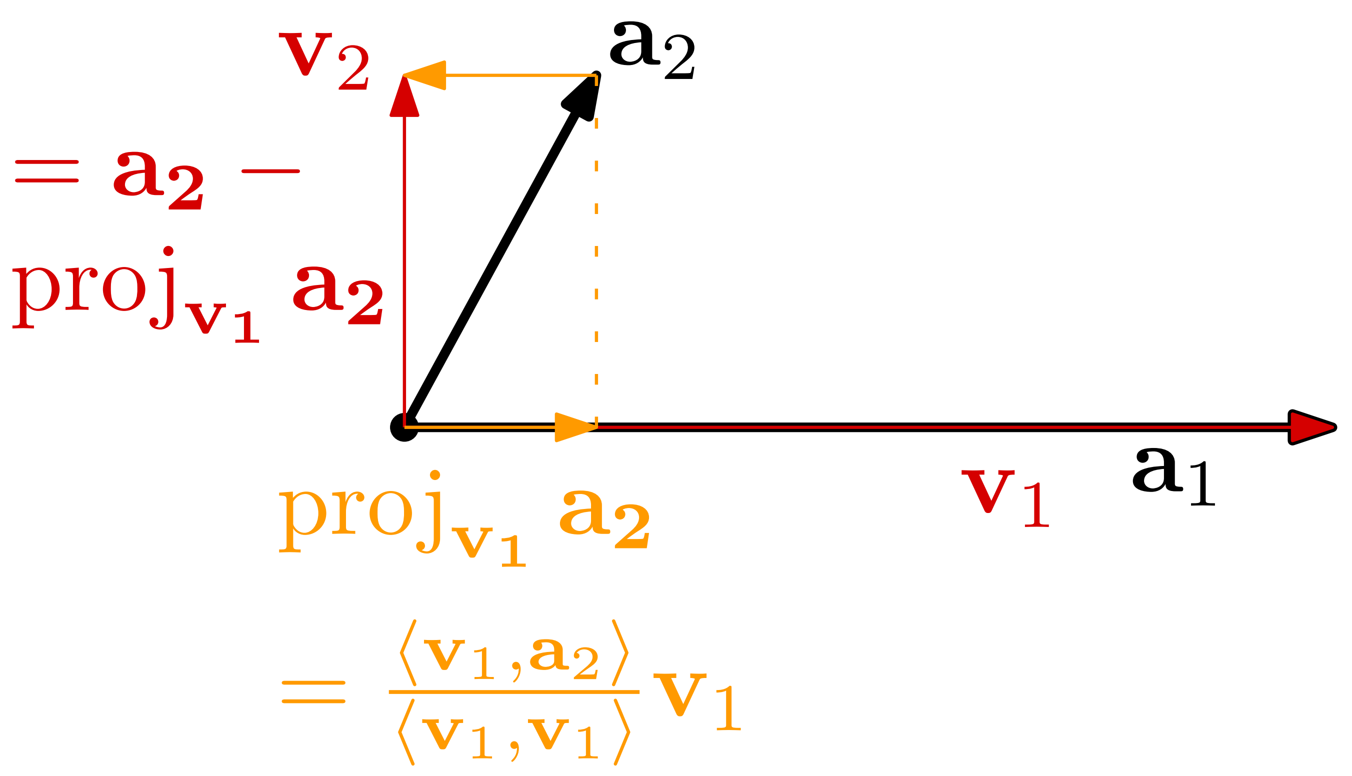
Paso 1: Encontrar una base ortogonal. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$

Paso 2: Normalizar. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{a}_1, \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{a}_2 - \operatorname{proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{a}_2, \\
&\ldots \\
\mathbf{v}_k &= \mathbf{a}_k - \textstyle\sum_{j=1}^{k-1} \operatorname{proj}_{\mathbf{v}_j} \mathbf{a}_k,
\end{aligned}
$$

Interpretación en $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\operatorname{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}}$$



Método QR de Gram-Schmidt

Base cualquiera: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ $\longrightarrow$ Base ortonormal: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$

- $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_i, \forall i \neq j$
- $\|\mathbf{u}_i\| = 1, \forall i$

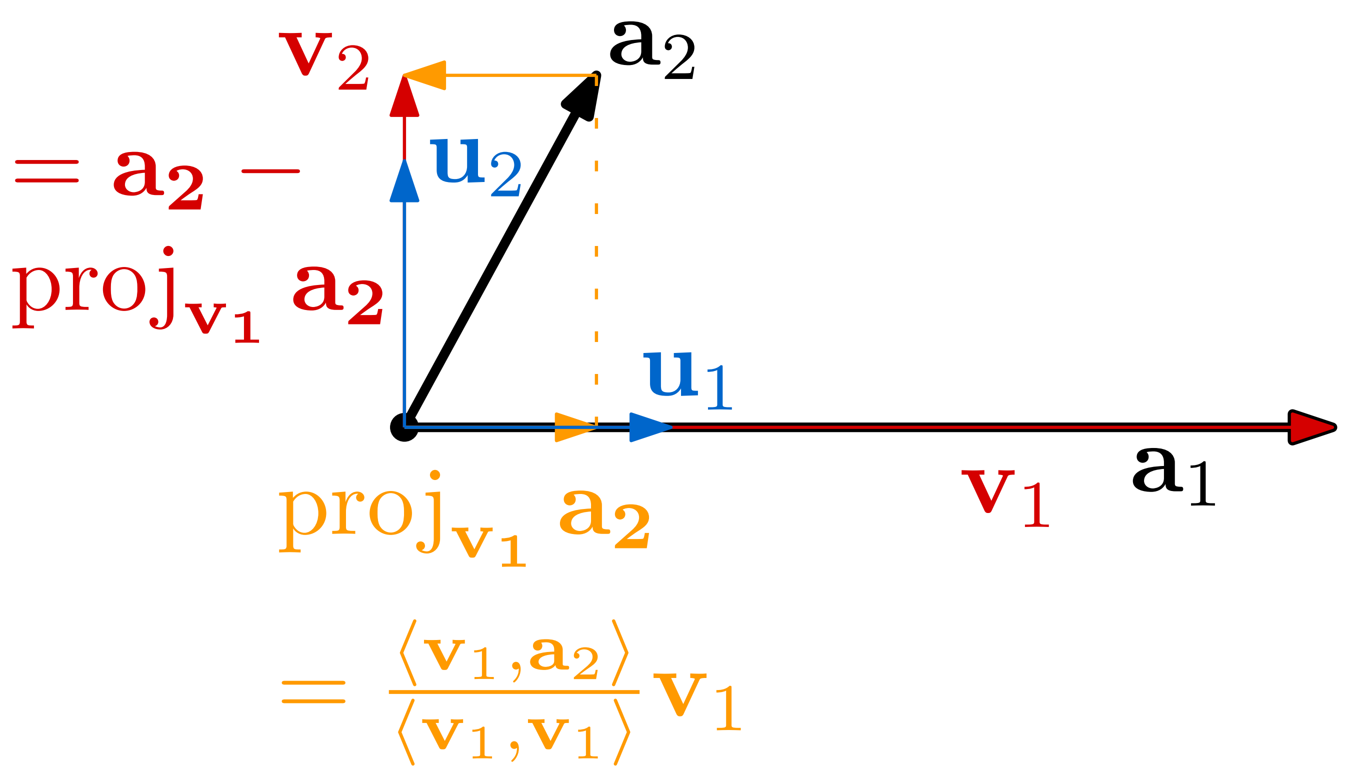
Paso 1: Encontrar una base ortogonal. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$

Paso 2: Normalizar. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{a}_1, & \mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{a}_2 - \operatorname{proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{a}_2, & \mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} \\
&\dots & &\dots \\
\mathbf{v}_k &= \mathbf{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \operatorname{proj}_{\mathbf{v}_j} \mathbf{a}_k, & \mathbf{u}_k &= \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|}
\end{aligned}
$$

Interpretación en $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\operatorname{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}}$$



Método QR de Gram-Schmidt

Base cualquiera: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ $\longrightarrow$ Base ortonormal: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$

- $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_i, \forall i \neq j$
- $\|\mathbf{u}_i\| = 1, \forall i$

Paso 1: Encontrar una base ortogonal. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$

Paso 2: Normalizar. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$

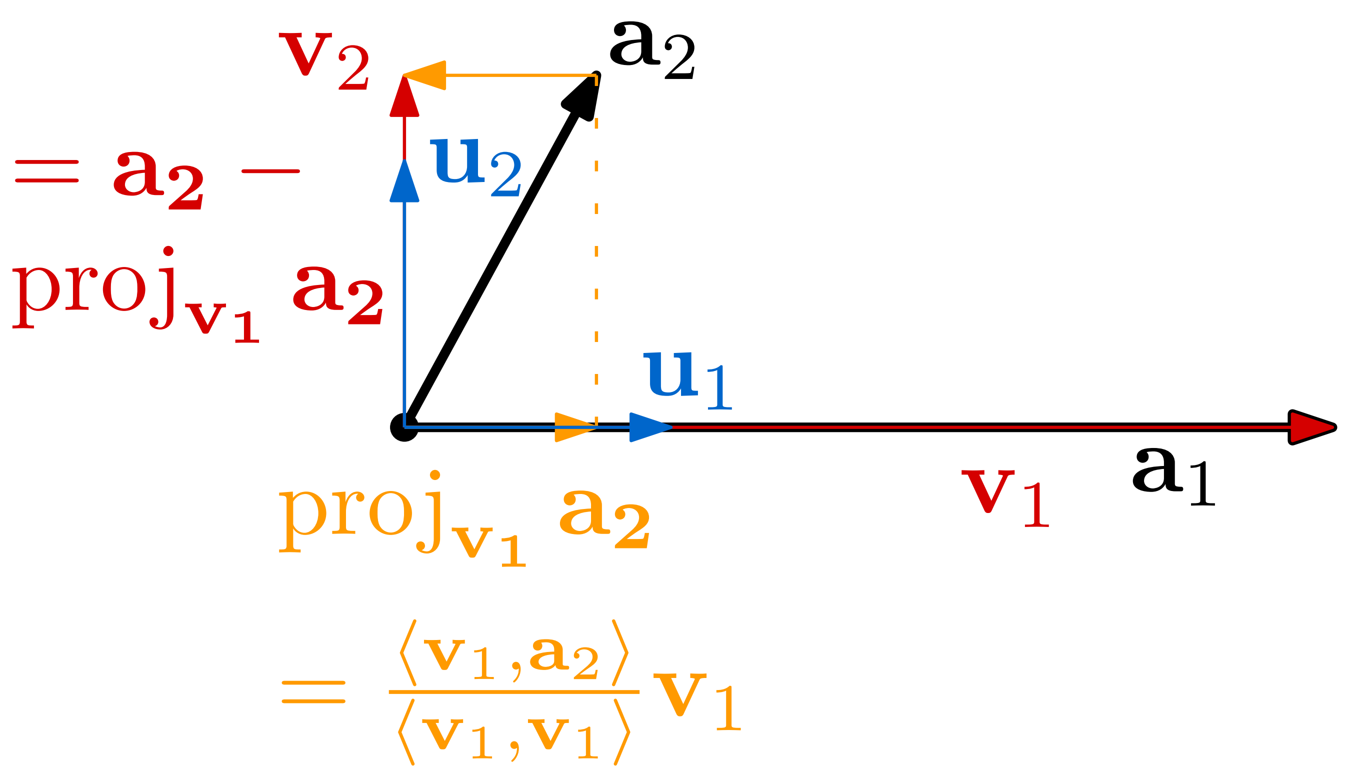
$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{a}_1, & \mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{a}_2 - \operatorname{proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{a}_2, & \mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} \\
&\dots & &\dots \\
\mathbf{v}_k &= \mathbf{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \operatorname{proj}_{\mathbf{v}_j} \mathbf{a}_k, & \mathbf{u}_k &= \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|}
\end{aligned}
$$

Paso 3: Expresar los $\mathbf{a}_i$s en la base ortonormal.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{a}_1 \rangle \mathbf{u}_1 \\
\mathbf{a}_2 &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{u}_2 \\
&\dots \\
\mathbf{a}_k &= \sum_{j=1}^{k} \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{a}_k \rangle \mathbf{u}_j
\end{aligned}
$$

Interpretación en $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\operatorname{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}}$$



Método QR de Gram-Schmidt

Base cualquiera: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ ⟶ Base ortonormal: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$

- $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_i, \forall i \neq j$
- $\|\mathbf{u}_i\| = 1, \forall i$

Paso 1: Encontrar una base ortogonal. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$

Paso 2: Normalizar. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{a}_1, & \mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{a}_2 - \operatorname{proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{a}_2, & \mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} \\
&\dots & &\dots \\
\mathbf{v}_k &= \mathbf{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \operatorname{proj}_{\mathbf{v}_j} \mathbf{a}_k, & \mathbf{u}_k &= \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|}
\end{aligned}
$$

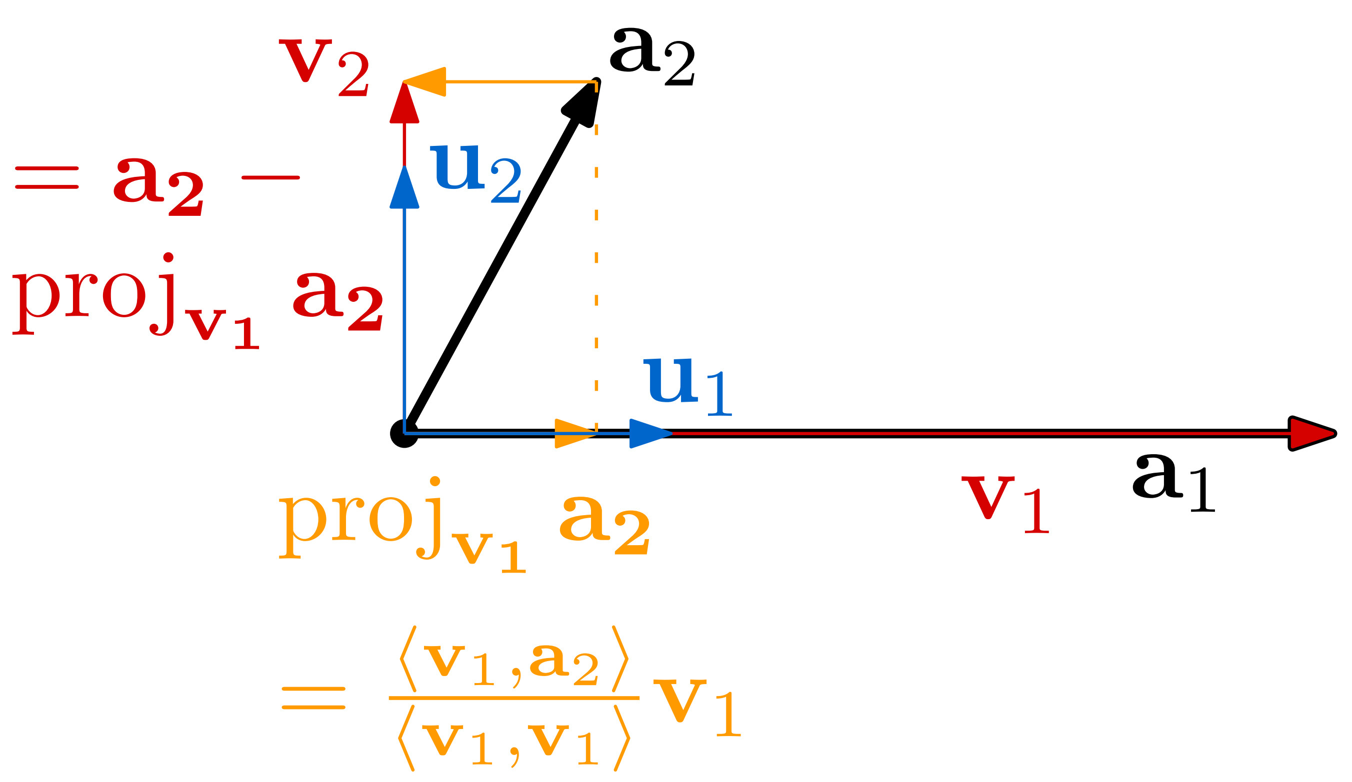
Paso 3: Expresar los $\mathbf{a}_i$s en la base ortonormal.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{a}_1 \rangle \mathbf{u}_1 \\
\mathbf{a}_2 &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{u}_2 \\
&\dots \\
\mathbf{a}_k &= \sum_{j=1}^{k} \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{a}_k \rangle \mathbf{u}_j
\end{aligned}
$$

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{a}_i \rangle = \|\mathbf{v}_i\|$$

Interpretación en $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\operatorname{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}}$$



Método QR de Gram-Schmidt

Base cualquiera: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\} \longrightarrow$ Base ortonormal: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

- $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_i, \forall i \neq j$
- $\|\mathbf{u}_i\| = 1, \forall i$

Paso 1: Encontrar una base ortogonal. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$

Paso 2: Normalizar. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{a}_1, & \mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{a}_2 - \operatorname{proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{a}_2, & \mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} \\
&\ldots & &\ldots \\
\mathbf{v}_k &= \mathbf{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \operatorname{proj}_{\mathbf{v}_j} \mathbf{a}_k, & \mathbf{u}_k &= \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|}
\end{aligned}
$$

Paso 3: Expresar los $\mathbf{a}_i$s en la base ortonormal.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{a}_1 \rangle \, \mathbf{u}_1 \\
\mathbf{a}_2 &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \, \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{a}_2 \rangle \, \mathbf{u}_2 \\
&\ldots \\
\mathbf{a}_k &= \sum_{j=1}^{k} \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{a}_k \rangle \, \mathbf{u}_j
\end{aligned}
$$

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{a}_i \rangle = \|\mathbf{v}_i\|$$

Paso 4: Expresar en forma matricial.

Método QR de Gram-Schmidt

Base cualquiera: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ $\longrightarrow$ Base ortonormal: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

- $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_i, \forall i \neq j$
- $\|\mathbf{u}_i\| = 1, \forall i$

Paso 1: Encontrar una base ortogonal. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$

Paso 2: Normalizar. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{a}_1, & \mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{a}_2 - \operatorname{proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{a}_2, & \mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} \\
&\cdots & &\cdots \\
\mathbf{v}_k &= \mathbf{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \operatorname{proj}_{\mathbf{v}_j} \mathbf{a}_k, & \mathbf{u}_k &= \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|}
\end{aligned}
$$

Paso 3: Expresar los $\mathbf{a}_i$s en la base ortonormal.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{a}_1 \rangle \mathbf{u}_1 \\
\mathbf{a}_2 &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{u}_2 \\
&\cdots \\
\mathbf{a}_k &= \sum_{j=1}^{k} \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{a}_k \rangle \mathbf{u}_j
\end{aligned}
$$

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{a}_i \rangle = \|\mathbf{v}_i\|$$

Paso 4: Expresar en forma matricial.

$$A = QR$$

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{a}_n \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{a}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{a}_n \rangle \end{bmatrix}$$

Método QR de Gram-Schmidt: ejemplo

Ejemplo: Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$ y calcular $A = QR$.

Método QR de Gram-Schmidt: ejemplo

Ejemplo: Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$ y calcular $A = QR$.

- Encontramos una base ortogonal siguiendo el proceso de Gram-Schmidt y la normalizamos:

Método QR de Gram-Schmidt: ejemplo

Ejemplo: Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$ y calcular $A = QR$.

- Encontramos una base ortogonal siguiendo el proceso de Gram-Schmidt y la normalizamos:

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -69 & -58/5 \\ 6 & 158 & 6/5 \\ -4 & 30 & -33 \end{bmatrix};$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} & \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} & \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/7 & -69/175 & -58/175 \\ 3/7 & 158/175 & 6/175 \\ -2/7 & 6/35 & -33/35 \end{bmatrix}.$$

Método QR de Gram-Schmidt: ejemplo

Ejemplo: Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$ y calcular $A = QR$.

- Encontramos una base ortogonal siguiendo el proceso de Gram-Schmidt y la normalizamos:

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -69 & -58/5 \\ 6 & 158 & 6/5 \\ -4 & 30 & -33 \end{bmatrix};$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} & \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} & \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/7 & -69/175 & -58/175 \\ 3/7 & 158/175 & 6/175 \\ -2/7 & 6/35 & -33/35 \end{bmatrix}.$$

- Calculamos R usando que $Q^{\mathsf{T}}Q = I$:

Método QR de Gram-Schmidt: ejemplo

Ejemplo: Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$ y calcular $A = QR$.

- Encontramos una base ortogonal siguiendo el proceso de Gram-Schmidt y la normalizamos:

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -69 & -58/5 \\ 6 & 158 & 6/5 \\ -4 & 30 & -33 \end{bmatrix};$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} & \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} & \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/7 & -69/175 & -58/175 \\ 3/7 & 158/175 & 6/175 \\ -2/7 & 6/35 & -33/35 \end{bmatrix}.$$

- Calculamos R usando que $Q^\top Q = I$:

$$Q^\top A = Q^\top Q\, R = R; \quad R = Q^\top A = \begin{bmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}.$$

Método QR de Gram-Schmidt: aspectos numéricos

- El método de Gram-Schmidt es numéricamente inestable.

Método QR de Gram-Schmidt: aspectos numéricos

- El método de Gram-Schmidt es numéricamente inestable.
- El proceso de ortogonalización, aunque tiene una interpretación geométrica clara, es proclive a errores numéricos.

Método QR de Gram-Schmidt: aspectos numéricos

- El método de Gram-Schmidt es numéricamente inestable.
- El proceso de ortogonalización, aunque tiene una interpretación geométrica clara, es proclive a errores numéricos.
- Una ventaja es que es relativamente fácil de implementar.

Método QR de Gram-Schmidt: aspectos numéricos

- El método de Gram-Schmidt es numéricamente inestable.
- El proceso de ortogonalización, aunque tiene una interpretación geométrica clara, es proclive a errores numéricos.
- Una ventaja es que es relativamente fácil de implementar.
- El número de operaciones para ortonormalizar una matriz con m filas y n columnas es: $(2m-1)(n-1)n/2+(m-1)k$ sumas, $2m(n-1)n/2+2mk$ multiplicaciones, n divisiones y n raíces cuadradas; esencialmente $2mn^2$ operaciones. Calcular Q conlleva $mn(n+1)/2$ operaciones adicionales.

Factorización QR

Método de Householder

Transformaciones de Householder

La transformación de Householder refleja un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ respecto a algún (hiper)plano que contiene el origen.

Transformación de Householder:

$$\mathbf{x} - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$$

o de manera equivalente:

$$\mathbf{x} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t\mathbf{x}$$

Donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{v}$ es un vector normal unitario del (hiper)plano.

Transformaciones de Householder

La transformación de Householder refleja un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ respecto a algún (hiper)plano que contiene el origen.

Transformación de Householder:

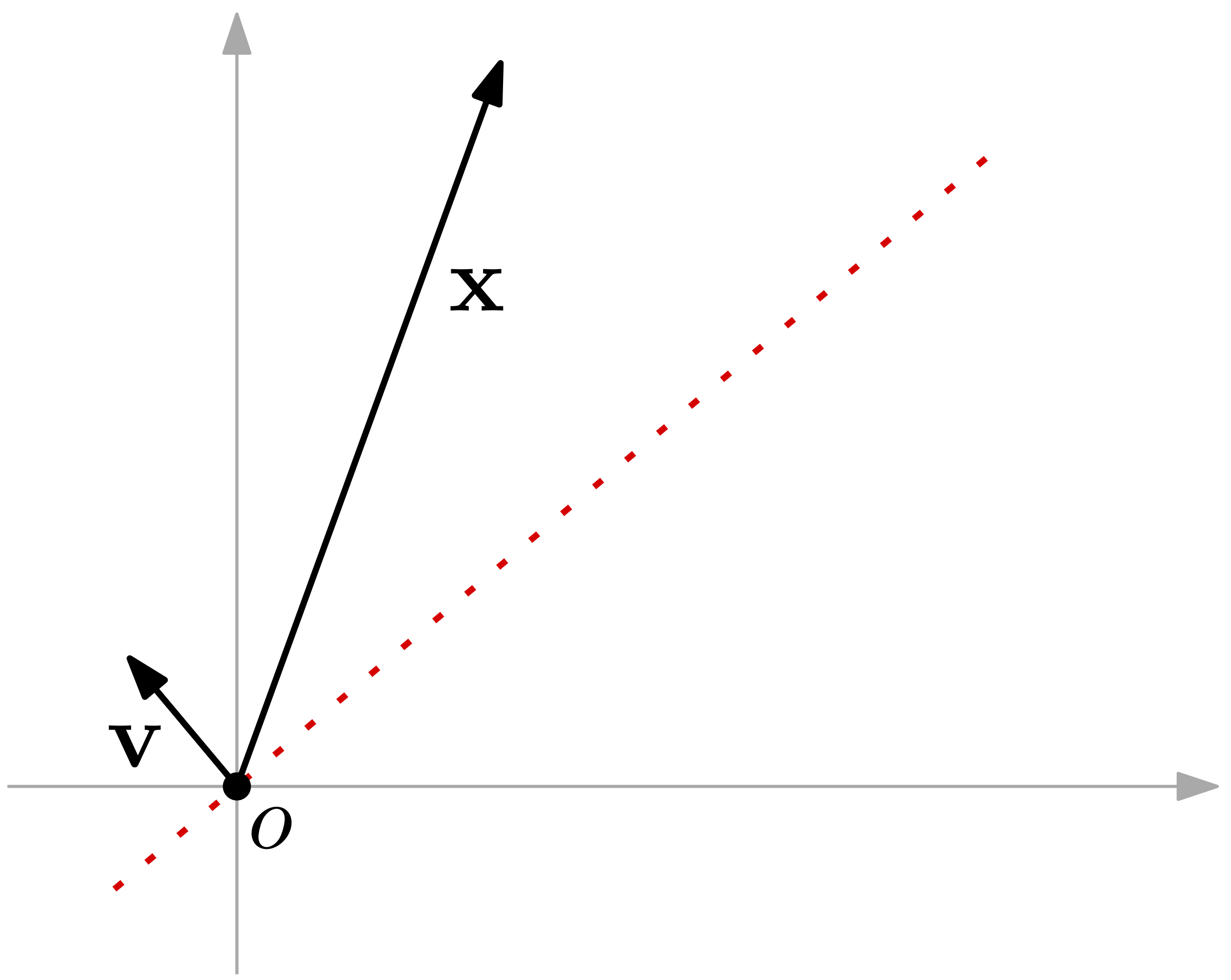
$$\mathbf{x} - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$$

o de manera equivalente:

$$\mathbf{x} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t\mathbf{x}$$

Donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{v}$ es un vector normal unitario del (hiper)plano.

Interpretación en $\mathbb{R}^2$:



Transformaciones de Householder

La transformación de Householder refleja un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ respecto a algún (hiper)plano que contiene el origen.

Transformación de Householder:

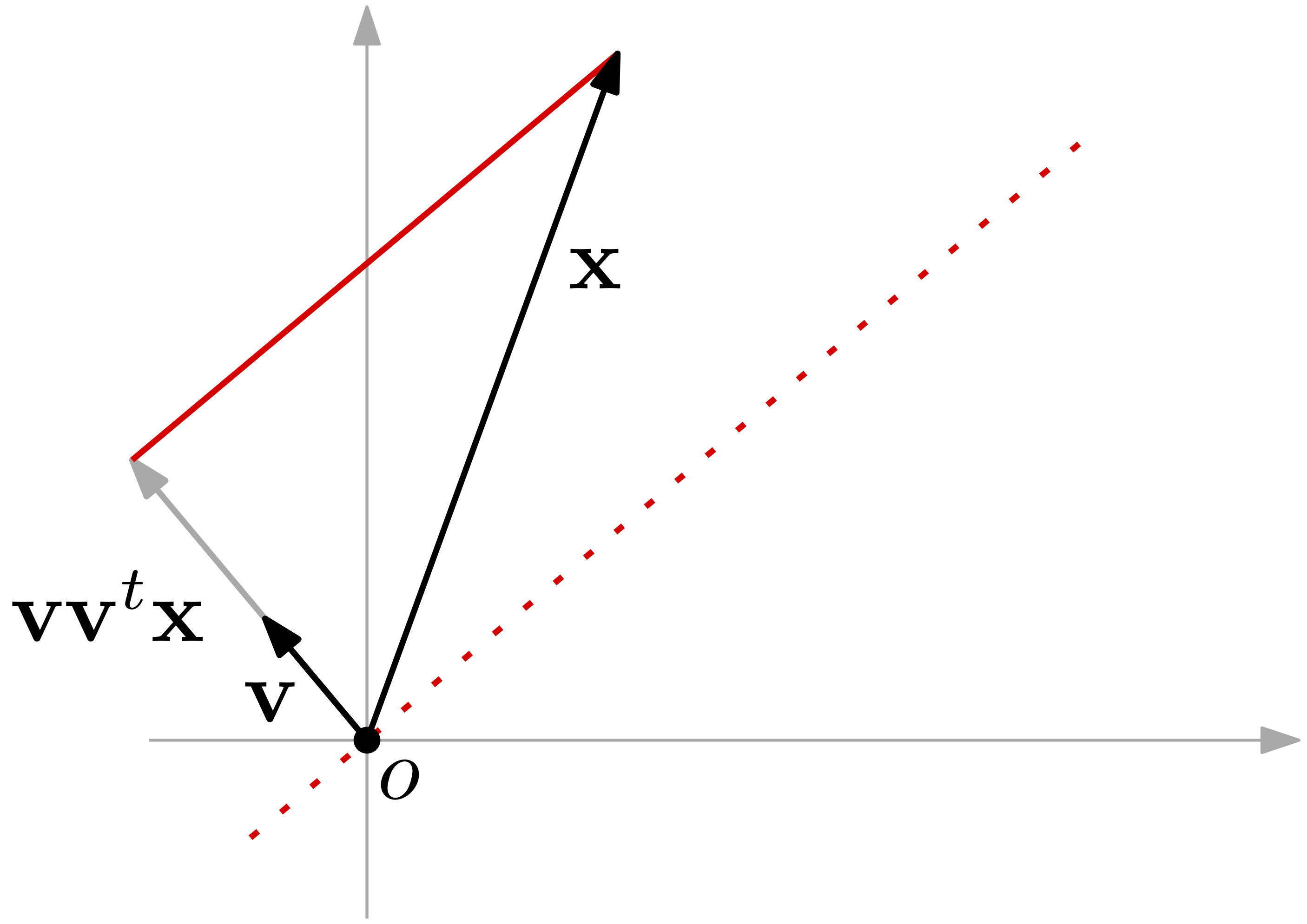
$$\mathbf{x} - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$$

o de manera equivalente:

$$\mathbf{x} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t\mathbf{x}$$

Donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{v}$ es un vector normal unitario del (hiper)plano.

Interpretación en $\mathbb{R}^2$:



Transformaciones de Householder

La transformación de Householder refleja un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ respecto a algún (hiper)plano que contiene el origen.

Transformación de Householder:

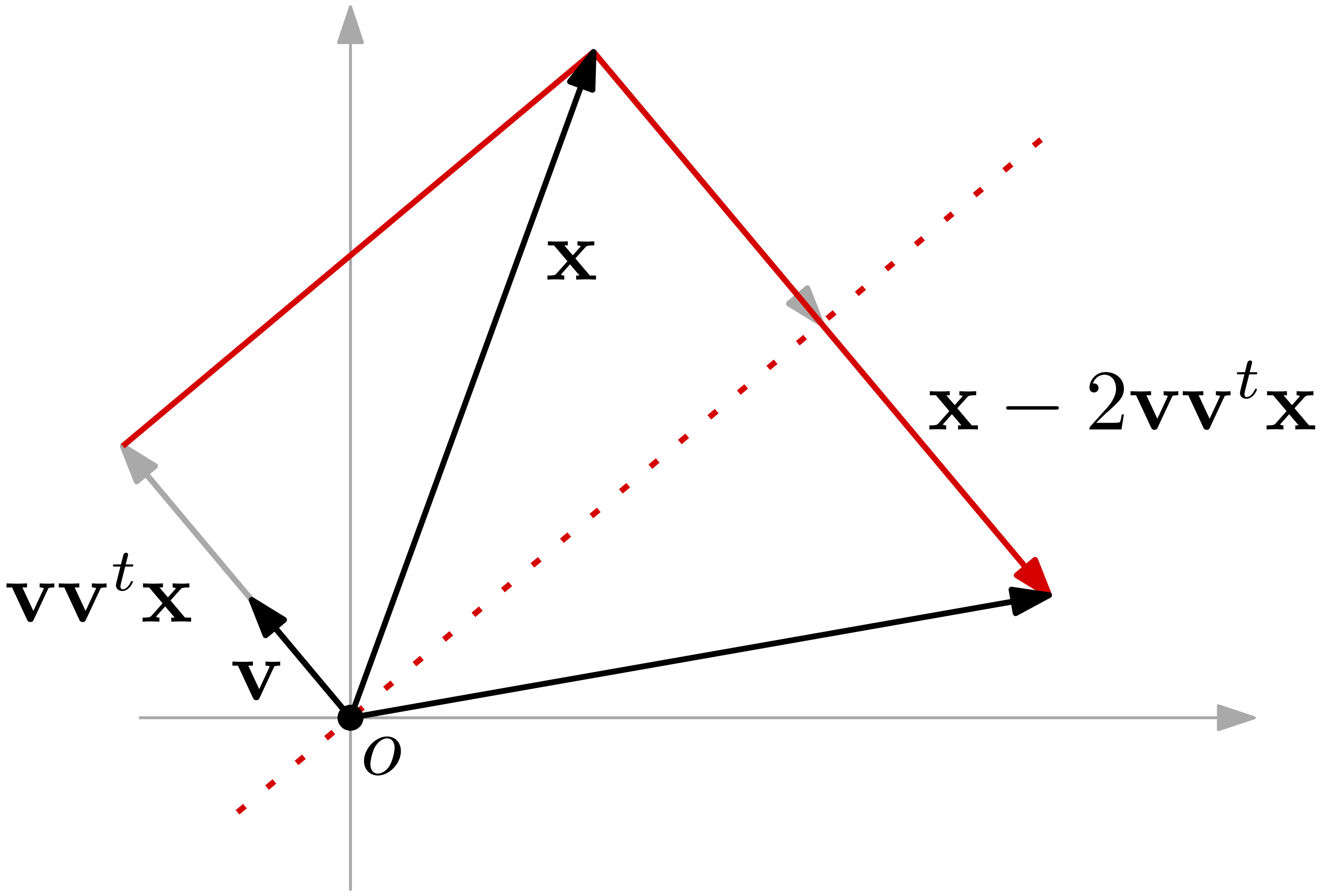
$$\mathbf{x} - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$$

o de manera equivalente:

$$\mathbf{x} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t\mathbf{x}$$

Donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{v}$ es un vector normal unitario del (hiper)plano.

Interpretación en $\mathbb{R}^2$:



Transformaciones de Householder

La transformación de Householder refleja un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ respecto a algún (hiper)plano que contiene el origen.

Transformación de Householder:

$$\mathbf{x} - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$$

o de manera equivalente:

$$\mathbf{x} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t\mathbf{x}$$

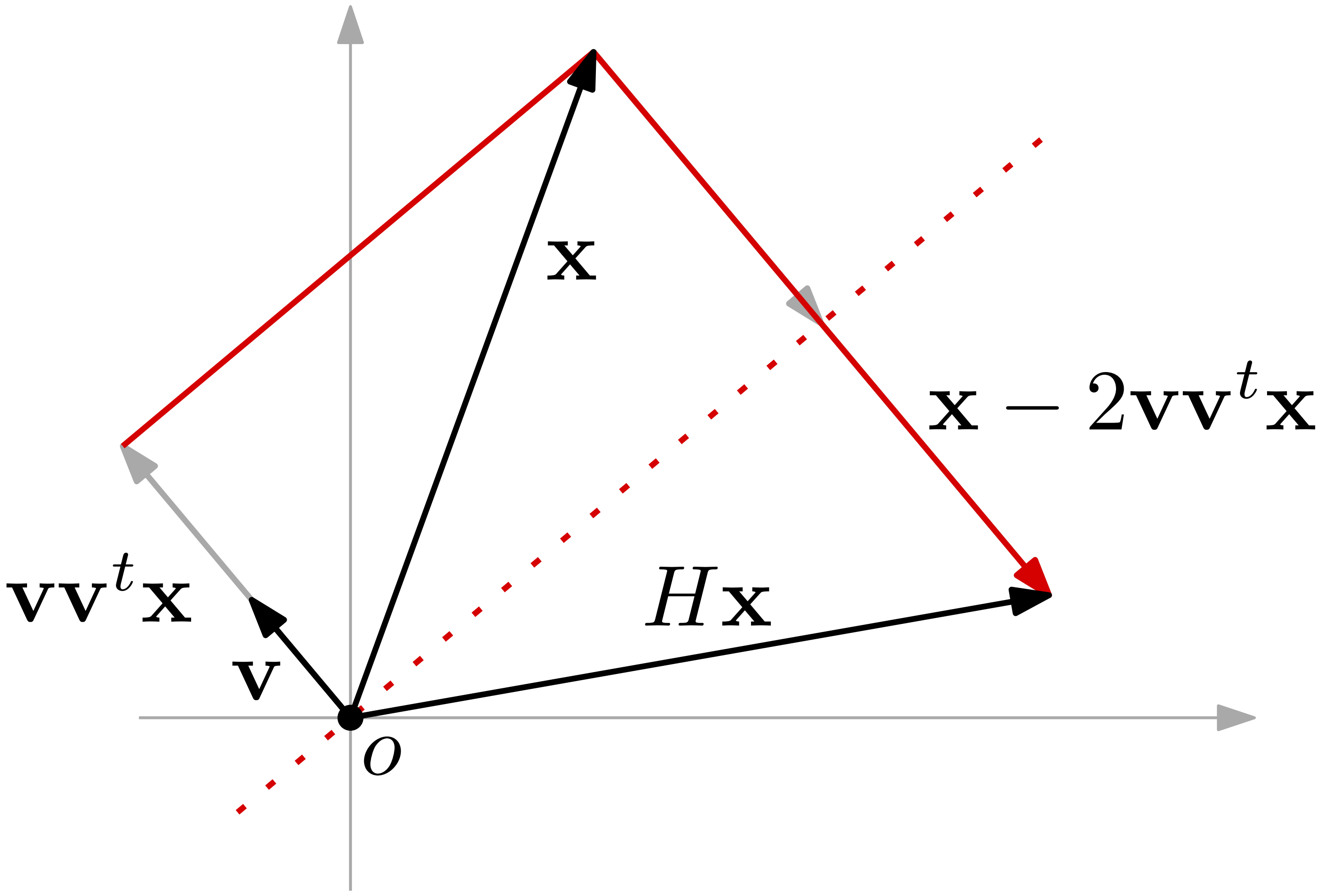
Donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{v}$ es un vector normal unitario del (hiper)plano.

Matriz de Householder:

$$H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$$

Donde I es la matriz identidad de tamaño $n \times n$.

Interpretación en $\mathbb{R}^2$:



Matriz de Householder

Sea $\mathbf{v}$ el vector normal del (hiper)plano en dimensión n e I la matriz identidad de tamaño $n \times n$.

> Matriz de Householder:
> $$H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$$

Propiedades $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n)$:

- H es simétrica y ortogonal $(H = H^t = H^{-1}) \to H^2 = I$.
- Si $\mathbf{x} \perp \mathbf{v}$, $\Rightarrow H\mathbf{x} = \mathbf{x}$.
- Si $\mathbf{x} \parallel \mathbf{v}$, $\Rightarrow H\mathbf{x} = -\mathbf{x}H\mathbf{v} = -\mathbf{x}$.
- Si $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{v}\|$, $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\Rightarrow H\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Transformación de Householder para la descomposición QR

Objetivo: Encontrar R (triangular superior) y Q (ortogonal) tales que $A = QR$.

Transformación de Householder para la descomposición QR

Objetivo: Encontrar R (triangular superior) y Q (ortogonal) tales que $A = QR$.
Idea: Reflexiones de Householder para construir R. El producto de estas reflexiones forma Q.
$\hookrightarrow$ Para encontrar R, queremos anular los elementos subdiagonales en A.

Transformación de Householder para la descomposición QR

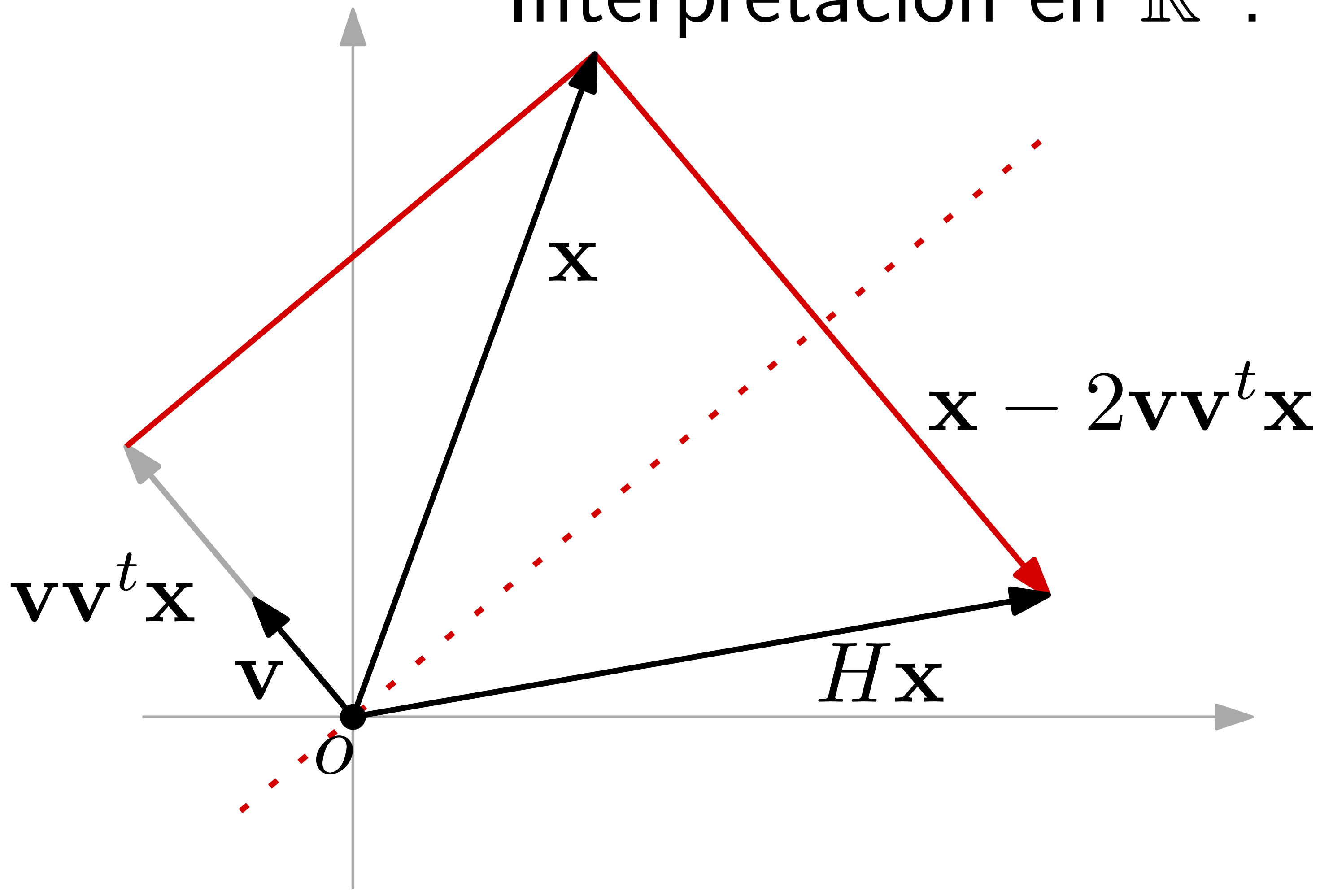
Objetivo: Encontrar R (triangular superior) y Q (ortogonal) tales que $A = QR$.
Idea: Reflexiones de Householder para construir R. El producto de estas reflexiones forma Q.
$\hookrightarrow$ Para encontrar R, queremos anular los elementos subdiagonales en A.

Transformación de Householder:

$$\mathbf{x} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t\mathbf{x}$$

Reflejar $\mathbf{x}$ de modo que el resultado esté en el vector $\mathbf{e_1} = (1, 0, \ldots, 0)^t$
$\rightarrow$ encontrar $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ tal que la transformación aplicada a $\mathbf{x}$ de $\mathbf{e}_1$.

Interpretación en $\mathbb{R}^2$:



Transformación de Householder para la descomposición QR

Objetivo: Encontrar R (triangular superior) y Q (ortogonal) tales que $A = QR$.

Idea: Reflexiones de Householder para construir R. El producto de estas reflexiones forma Q.

$\hookrightarrow$ Para encontrar R, queremos anular los elementos subdiagonales en A.

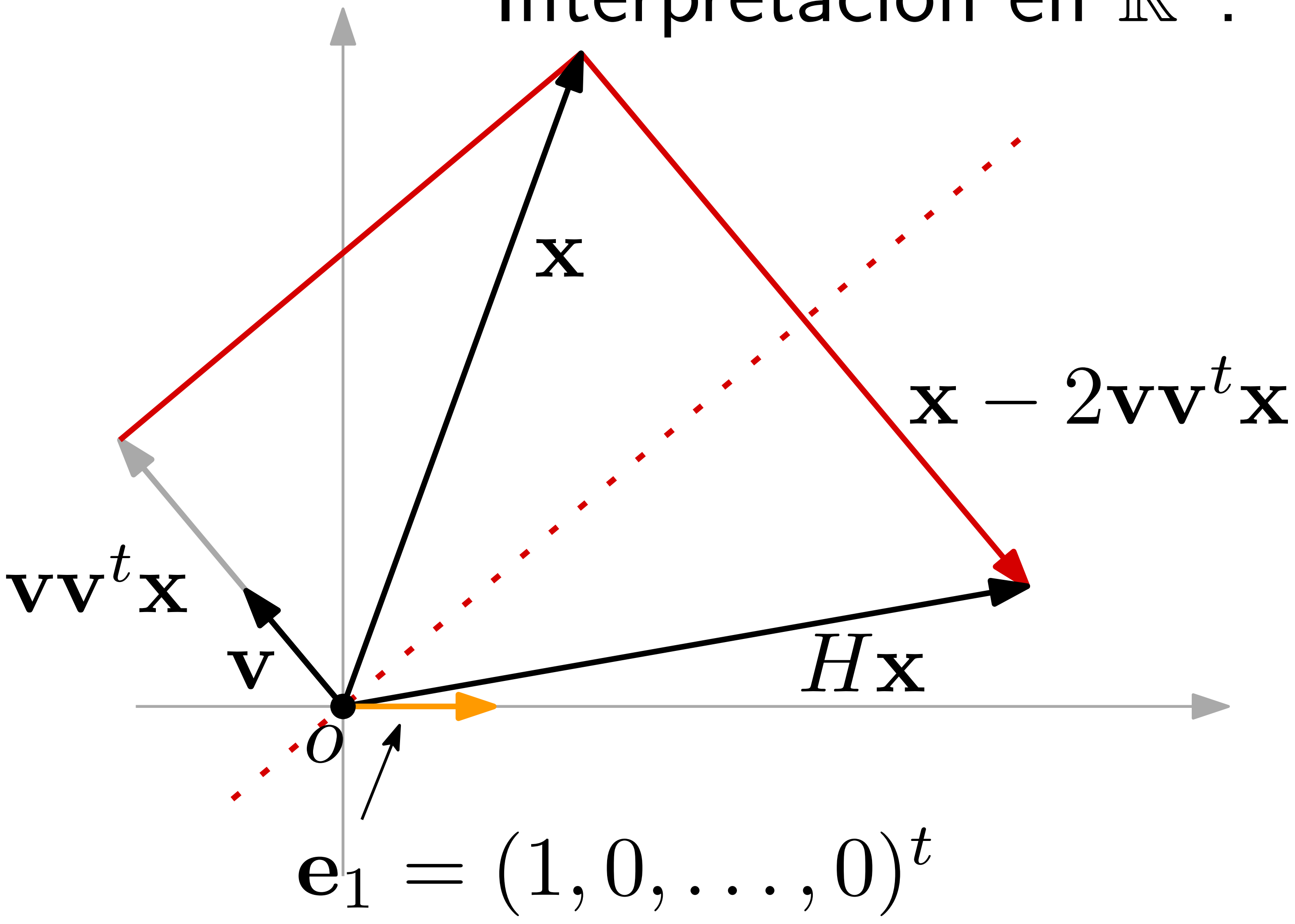
Transformación de Householder:

$$\mathbf{x} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t\mathbf{x}$$

Reflejar $\mathbf{x}$ de modo que el resultado esté en el vector $\mathbf{e_1} = (1, 0, \ldots, 0)^t$

$\rightarrow$ encontrar $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ tal que la transformación aplicada a $\mathbf{x}$ de $\mathbf{e}_1$.

Interpretación en $\mathbb{R}^2$:



Transformación de Householder para la descomposición QR

Objetivo: Encontrar R (triangular superior) y Q (ortogonal) tales que $A = QR$.

Idea: Reflexiones de Householder para construir R. El producto de estas reflexiones forma Q.

$\hookrightarrow$ Para encontrar R, queremos anular los elementos subdiagonales en A.

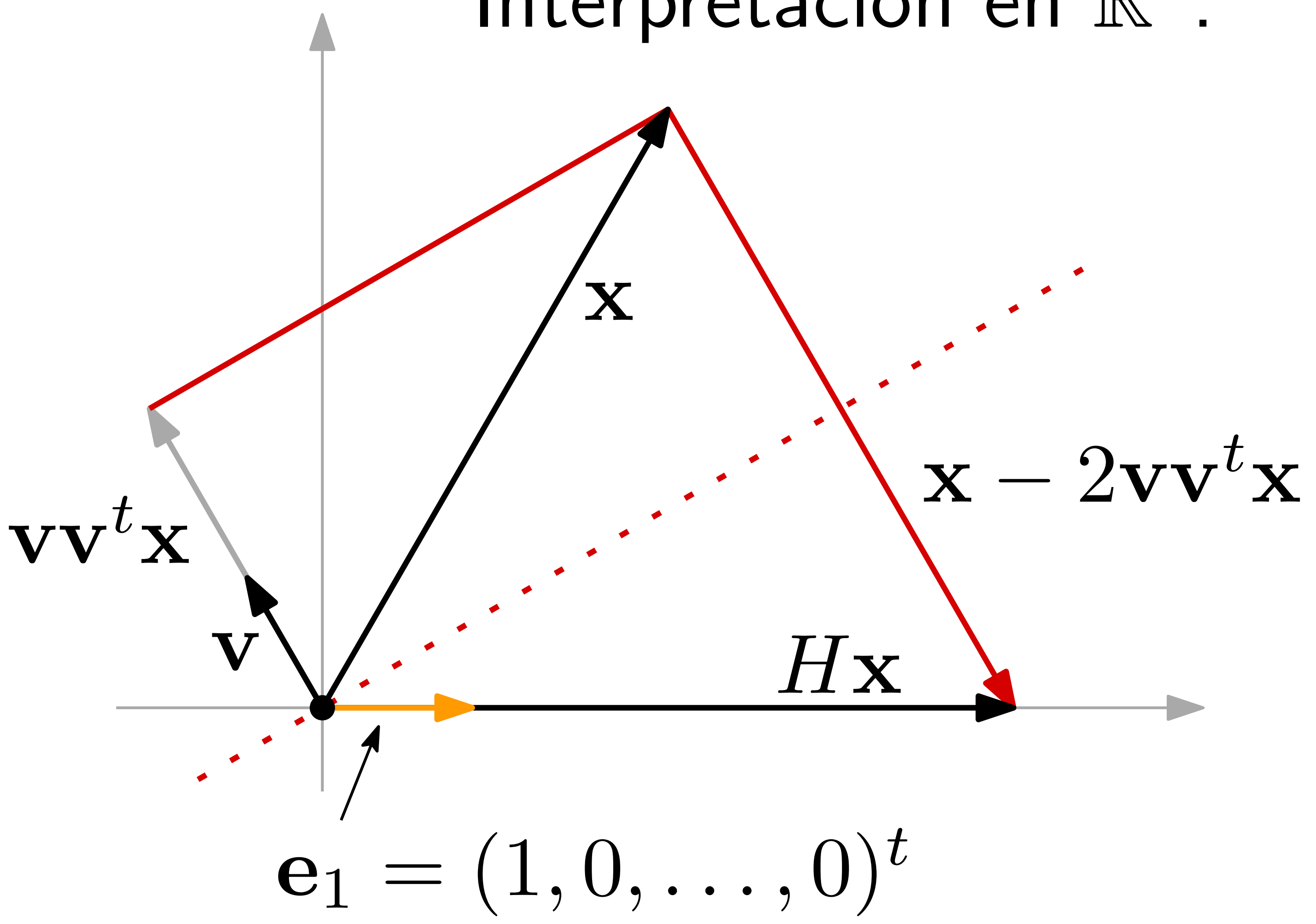
Transformación de Householder:

$$\mathbf{x} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t\mathbf{x}$$

Reflejar $\mathbf{x}$ de modo que el resultado esté en el vector $\mathbf{e_1} = (1, 0, \ldots, 0)^t$

$\rightarrow$ encontrar $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ tal que la transformación aplicada a $\mathbf{x}$ de $\mathbf{e}_1$.

Interpretación en $\mathbb{R}^2$:



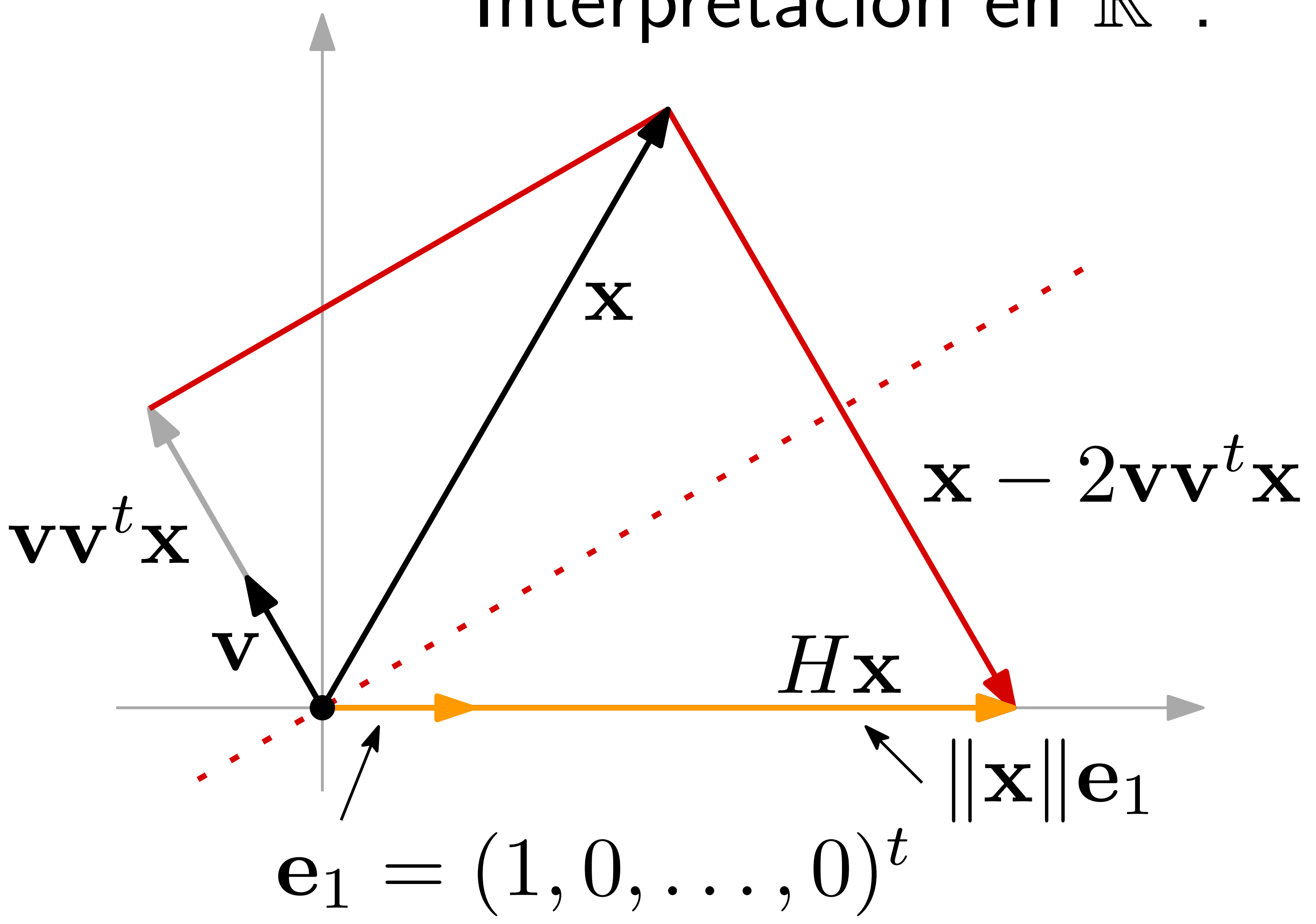
Transformación de Householder para la descomposición QR

Objetivo: Encontrar R (triangular superior) y Q (ortogonal) tales que $A = QR$.
Idea: Reflexiones de Householder para construir R. El producto de estas reflexiones forma Q.
$\hookrightarrow$ Para encontrar R, queremos anular los elementos subdiagonales en A.

Transformación de Householder:
$\mathbf{x} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t\mathbf{x}$

Reflejar $\mathbf{x}$ de modo que el resultado esté en el vector $\mathbf{e_1} = (1, 0, \ldots, 0)^t$
$\rightarrow$ encontrar $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ tal que la transformación aplicada a $\mathbf{x}$ de $\mathbf{e}_1$.

Interpretación en $\mathbb{R}^2$:



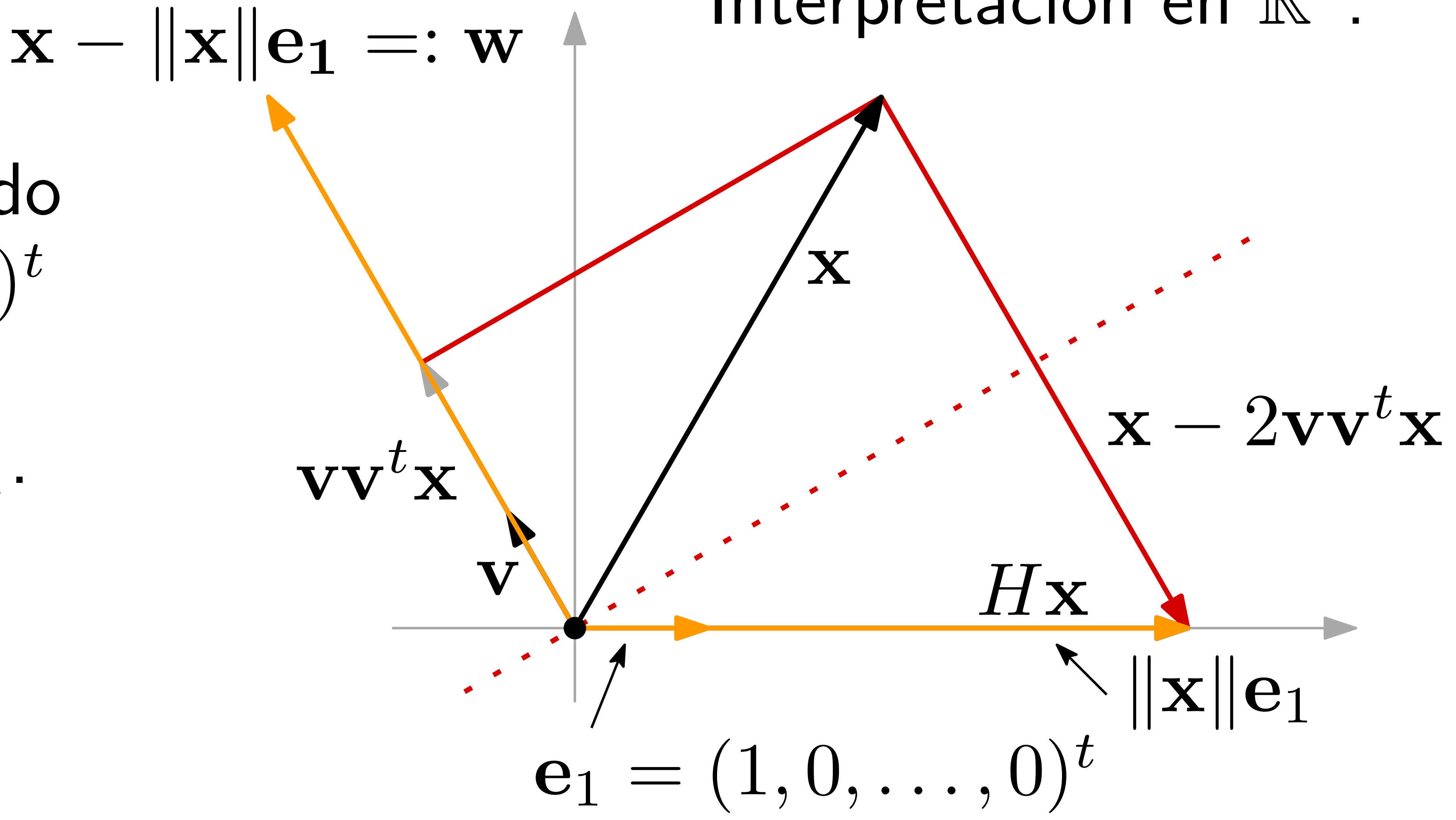
Transformación de Householder para la descomposición QR

Objetivo: Encontrar R (triangular superior) y Q (ortogonal) tales que $A = QR$.
Idea: Reflexiones de Householder para construir R. El producto de estas reflexiones forma Q.
$\hookrightarrow$ Para encontrar R, queremos anular los elementos subdiagonales en A.

Transformación de Householder:
$\mathbf{x} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t\mathbf{x}$

Reflejar $\mathbf{x}$ de modo que el resultado esté en el vector $\mathbf{e_1} = (1, 0, \ldots, 0)^t$
$\rightarrow$ encontrar $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ tal que la transformación aplicada a $\mathbf{x}$ de $\mathbf{e}_1$.

Interpretación en $\mathbb{R}^2$:



Transformación de Householder para la descomposición QR

Objetivo: Encontrar R (triangular superior) y Q (ortogonal) tales que $A = QR$.

Idea: Reflexiones de Householder para construir R. El producto de estas reflexiones forma Q.

$\hookrightarrow$ Para encontrar R, queremos anular los elementos subdiagonales en A.

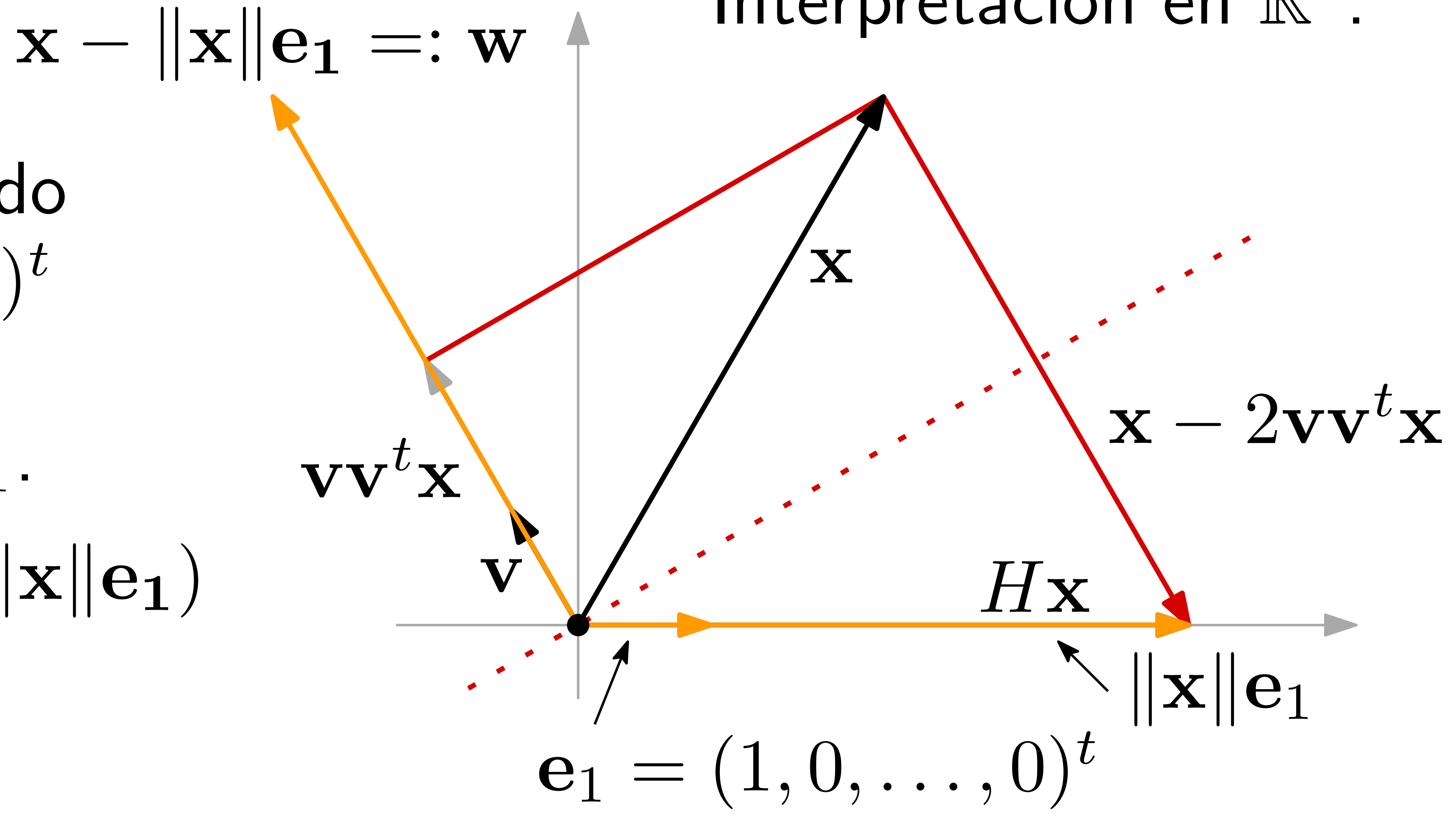
Transformación de Householder:
$\mathbf{x} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t\mathbf{x}$

Reflejar $\mathbf{x}$ de modo que el resultado esté en el vector $\mathbf{e_1} = (1, 0, \ldots, 0)^t$

$\rightarrow$ encontrar $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ tal que la transformación aplicada a $\mathbf{x}$ de $\mathbf{e}_1$.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2} = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|_2}(\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e_1})$$

Interpretación en $\mathbb{R}^2$:



Transformación de Householder para la descomposición QR

Objetivo: Encontrar R (triangular superior) y Q (ortogonal) tales que $A = QR$.

Idea: Reflexiones de Householder para construir R. El producto de estas reflexiones forma Q.

$\hookrightarrow$ Para encontrar R, queremos anular los elementos subdiagonales en A.

Transformación de Householder:

$\mathbf{x} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t\mathbf{x}$

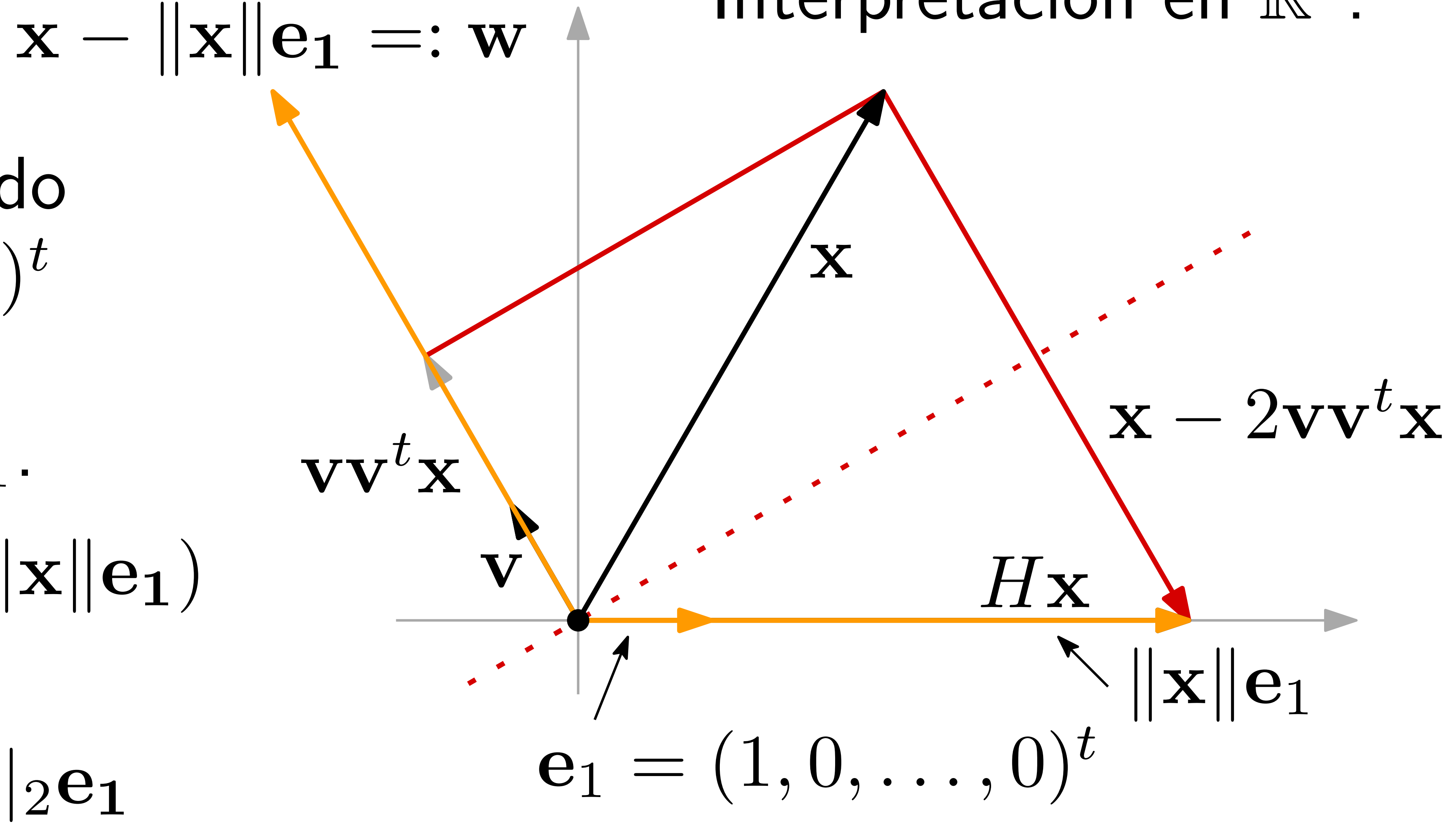
Reflejar $\mathbf{x}$ de modo que el resultado esté en el vector $\mathbf{e_1} = (1, 0, \ldots, 0)^t$

$\rightarrow$ encontrar $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ tal que la transformación aplicada a $\mathbf{x}$ de $\mathbf{e}_1$.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2} = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|_2}(\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e_1})$$

$\rightarrow$ Verificar que $\mathbf{x} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2\mathbf{e_1}$

Interpretación en $\mathbb{R}^2$:



Matriz de Householder para la descomposición QR

Transformación de Householder:

$$\mathbf{x} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t\mathbf{x}$$

$\longrightarrow$

Matriz de Householder:

$$H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2} = \frac{1}{\|(\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e_1})\|_2}(\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e_1})$$

Matriz de Householder para la descomposición QR

Transformación de Householder:

$$\mathbf{x} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t\mathbf{x}$$

$\longrightarrow$

Matriz de Householder:

$$H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2} = \frac{1}{\|(\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e_1})\|_2}(\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e_1})$$

Transformamos primero a $\mathbf{a}_1$, la primera columna de A, en $\mathbf{e}_1$.

Matriz de Householder para la descomposición QR

Transformación de Householder:
$\mathbf{x} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t\mathbf{x}$

$\longrightarrow$

Matriz de Householder:
$H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2} = \frac{1}{\|(\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e_1})\|_2}(\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e_1})$$

Transformamos primero a $\mathbf{a}_1$, la primera columna de A, en $\mathbf{e}_1$.

Para una matriz A de tamaño $n \times n$, consideramos $H\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{v}\mathbf{v}^t\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2\mathbf{e_1}$, con $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{a_1})$.

$$HA = A - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t A = \begin{pmatrix} \|\mathbf{a_1}\|_2 & a_{12}^* & \dots & a_{1n}^* \\ 0 & a_{22}' & \dots & a_{2n}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}' & \dots & a_{nn}' \end{pmatrix}$$

Factorización QR de Householder: idea

Idea: Encontrar matrices de Householder para eliminar los elementos subdiagonales de la matriz A.

Calcular la primera matriz de Householder Q_1 utilizando $\mathbf{x}$ como la primera columna $\mathbf{a_1}$ de A.

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \ddots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{matrix} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{a}_1 & \qquad\qquad\qquad \end{matrix} \end{array}$$

$Q_1 = H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ where

$\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2}$ and

$\mathbf{w} = \boxed{\mathbf{a}_1} - \|\boxed{\mathbf{a}_1}\|_2 \mathbf{e}_1.$

Factorización QR de Householder: idea

Idea: Encontrar matrices de Householder para eliminar los elementos subdiagonales de la matriz A.

Calcular la primera matriz de Householder Q_1 utilizando $\mathbf{x}$ como la primera columna $\mathbf{a_1}$ de A.

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \ddots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{matrix} \end{pmatrix} \\ \mathbf{a}_1 \qquad\qquad\qquad \end{array}$$

$Q_1 = H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ where

$\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2}$ and

$\mathbf{w} = \boxed{\mathbf{a}_1} - \|\boxed{\mathbf{a}_1}\|_2 \mathbf{e}_1.$

Entonces, $Q_1 A = \begin{pmatrix} \|\mathbf{a_1}\|_2 & a_{12}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ 0 & a_{22}' & \cdots & a_{2n}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}' & \cdots & a_{nn}' \end{pmatrix}$

Factorización QR de Householder: idea

Idea: Encontrar matrices de Householder para eliminar los elementos subdiagonales de la matriz A.

Calcular la primera matriz de Householder Q_1 utilizando $\mathbf{x}$ como la primera columna $\mathbf{a_1}$ de A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{a}_1$

$Q_1 = H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ where

$\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2}$ and

$\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 - \|\mathbf{a}_1\|_2 \mathbf{e}_1.$

Entonces, $Q_1 A = \begin{pmatrix} \|\mathbf{a_1}\|_2 & a^*_{12} & \cdots & a^*_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix}$

Las filas por debajo del primer elemento de la diagonal son 0.

Factorización QR de Householder: idea

Idea: Encontrar matrices de Householder para eliminar los elementos subdiagonales de la matriz A.

Calcular la primera matriz de Householder Q_1 utilizando $\mathbf{x}$ como la primera columna $\mathbf{a_1}$ de A.

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ \mathbf{a}_1 \qquad\qquad \end{array}$$

$Q_1 = H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ where

$\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2}$ and

$\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 - \|\mathbf{a}_1\|_2 \mathbf{e}_1$.

Entonces, $Q_1 A = \begin{pmatrix} \|\mathbf{a_1}\|_2 & a^*_{12} & \cdots & a^*_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix}$

Repetir este proceso con la matriz de tamaño $n-1 \times n-1$, A'.

Las filas por debajo del primer elemento de la diagonal son 0.

Factorización QR de Householder: idea

Idea: Encontrar matrices de Householder para eliminar los elementos subdiagonales de la matriz A.

Calcular la primera matriz de Householder Q_1 utilizando $\mathbf{x}$ como la primera columna $\mathbf{a_1}$ de A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1$$

$Q_1 = H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ where

$\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2}$ and

$\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 - \|\mathbf{a}_1\|_2 \mathbf{e}_1$.

Entonces, $Q_1 A = \begin{pmatrix} \|\mathbf{a_1}\|_2 & a_{12}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ 0 & a_{22}' & \cdots & a_{2n}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}' & \cdots & a_{nn}' \end{pmatrix}$

Estos elementos no se alteran en futuras iteraciones.

Repetir este proceso con la matriz de tamaño $n-1 \times n-1$, A'.

Las filas por debajo del primer elemento de la diagonal son 0.

Método QR de Householder: segunda iteración

Después de una transformación de Householder, obtenemos la matriz H, establecemos $Q_1 = H$.

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \|\mathbf{a_1}\|_2 & a_{12}^* & \dots & a_{1n}^* \\ 0 & a_{22}' & \dots & a_{2n}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}' & \dots & a_{nn}' \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Encontrar la matriz de Householder con respecto a la primera columna $\mathbf{a_2'}$ de la matriz A' de tamaño $n-1 \times n-1$.

Método QR de Householder: segunda iteración

Después de una transformación de Householder, obtenemos la matriz H, establecemos $Q_1 = H$.

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \|\mathbf{a_1}\|_2 & a^*_{12} & \dots & a^*_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Encontrar la matriz de Householder con respecto a la primera columna $\mathbf{a_2'}$ de la matriz A' de tamaño $n-1 \times n-1$.

Obtenemos una matriz de Householder de tamaño $n-1 \times n-1$, llamémosla H.

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & h_1 & \dots & h_{2n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

Método QR de Householder: segunda iteración

Después de una transformación de Householder, obtenemos la matriz H, establecemos $Q_1 = H$.

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \|\mathbf{a_1}\|_2 & a^*_{12} & \dots & a^*_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Encontrar la matriz de Householder con respecto a la primera columna $\mathbf{a_2'}$ de la matriz A' de tamaño $n-1 \times n-1$.

Obtenemos una matriz de Householder de tamaño $n-1 \times n-1$, llamémosla H.

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & h_1 & \dots & h_{2n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} \qquad \rightarrow H\mathbf{a_2'} = H \begin{pmatrix} a'_{22} \\ a'_{32} \\ \vdots \\ a'_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{a_2'}\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Método QR de Householder: segunda iteración

Después de una transformación de Householder, obtenemos la matriz H, establecemos $Q_1 = H$.

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \|\mathbf{a_1}\|_2 & a^*_{12} & \dots & a^*_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

→ Encontrar la matriz de Householder con respecto a la primera columna $\mathbf{a'_2}$ de la matriz A' de tamaño $n-1 \times n-1$.

Obtenemos una matriz de Householder de tamaño $n-1 \times n-1$, llamémosla H.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} \quad \rightarrow H\mathbf{a'_2} = H \begin{pmatrix} a'_{22} \\ a'_{32} \\ \vdots \\ a'_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{a'_2}\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ Ampliar H para que sea una matriz $n \times n$ y llamar a esta matriz Q_2.

Método QR de Householder: iteraciones

$$Q_2 Q_1 A = \begin{pmatrix} \|\mathbf{a_1}\|_2 & a_{12}* & a_{13}* & \dots & a_{1n}* \\ 0 & \|\mathbf{a_2'}\|_2 & a_{23}* & \dots & a_{2n}* \\ \vdots & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Los elementos por debajo de las primeras dos diagonales son 0.

Método QR de Householder: iteraciones

$$Q_2Q_1A = \begin{pmatrix} \|\mathbf{a_1}\|_2 & a_{12}* & a_{13}* & \dots & a_{1n}* \\ 0 & \|\mathbf{a_2'}\|_2 & a_{23}* & \dots & a_{2n}* \\ \vdots & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Repetir el proceso con la matriz de tamaño $n-2 \times n-2$.

Los elementos por debajo de las primeras dos diagonales son 0.

Método QR de Householder: iteraciones

$$Q_2Q_1A = \begin{pmatrix} \|\mathbf{a_1}\|_2 & a_{12}* & a_{13}* & \dots & a_{1n}* \\ 0 & \|\mathbf{a'_2}\|_2 & a_{23}* & \dots & a_{2n}* \\ \vdots & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Repetir el proceso con la matriz de tamaño $n-2 \times n-2$.

Los elementos por debajo de las primeras dos diagonales son 0.

- Obtenemos n matrices de Householder $Q_1, \dots, Q_n$ de modo que $R = Q_n \dots Q_2Q_1A$ sea una matriz triangular superior de tamaño $n \times n$.
- Dado que para todas las Q_i tenemos $Q_i^{-1} = Q_i^t$, obtenemos

$$Q_n \dots Q_1A = R \Leftrightarrow A = \underbrace{Q_1^t \dots Q_n^t}_{Q} R \Leftrightarrow A = QR$$

Método QR de Householder: ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ donde
$\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2}$ y
$\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 - \|\mathbf{a}_1\|_2\mathbf{e}_1.$

Método QR de Householder: ejemplo

$H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ donde
$\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2}$ y
$\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 - \|\mathbf{a}_1\|_2\mathbf{e}_1$.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{a_1} = (12, 6, -4)^t$, $\|\mathbf{a_1}\|_2 = 14 \quad \Rightarrow \mathbf{w}_1 = \mathbf{a_1} - \|\mathbf{a_1}\|_2\mathbf{e_1} = (-2, 6, -4)^t$

Método QR de Householder: ejemplo

$H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ donde
$\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2}$ y
$\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 - \|\mathbf{a}_1\|_2\mathbf{e}_1.$

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{a_1} = (12, 6, -4)^t$, $\|\mathbf{a_1}\|_2 = 14 \quad \Rightarrow \mathbf{w}_1 = \mathbf{a_1} - \|\mathbf{a_1}\|_2\mathbf{e_1} = (-2, 6, -4)^t$

$$\Rightarrow \mathbf{v_1} = \tfrac{1}{\sqrt{14}}(-1, 3, -2)^t$$

Método QR de Householder: ejemplo

$H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ donde
$\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2}$ y
$\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 - \|\mathbf{a}_1\|_2\mathbf{e}_1$.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{a_1} = (12, 6, -4)^t$, $\|\mathbf{a_1}\|_2 = 14 \quad \Rightarrow \mathbf{w}_1 = \mathbf{a_1} - \|\mathbf{a_1}\|_2\mathbf{e_1} = (-2, 6, -4)^t$

$$\Rightarrow \mathbf{v_1} = \tfrac{1}{\sqrt{14}}(-1, 3, -2)^t$$

$$\Rightarrow Q_1 = I - \tfrac{2}{\sqrt{14}^2}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}(-1, 3, -2)$$

Método QR de Householder: ejemplo

$H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ donde
$\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2}$ y
$\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 - \|\mathbf{a}_1\|_2 \mathbf{e}_1$.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{a_1} = (12, 6, -4)^t$, $\|\mathbf{a_1}\|_2 = 14 \quad \Rightarrow \mathbf{w}_1 = \mathbf{a_1} - \|\mathbf{a_1}\|_2 \mathbf{e_1} = (-2, 6, -4)^t$

$$\Rightarrow \mathbf{v_1} = \tfrac{1}{\sqrt{14}}(-1, 3, -2)^t$$

$$\Rightarrow Q_1 = I - \tfrac{2}{\sqrt{14}^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} (-1, 3, -2) = I - \tfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -6 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Método QR de Householder: ejemplo

$H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ donde
$\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2}$ y
$\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 - \|\mathbf{a}_1\|_2\mathbf{e}_1$.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a_1} = (12, 6, -4)^t,\ \|\mathbf{a_1}\|_2 = 14 \quad \Rightarrow \mathbf{w}_1 = \mathbf{a_1} - \|\mathbf{a_1}\|_2\mathbf{e_1} = (-2, 6, -4)^t$$

$$\Rightarrow \mathbf{v_1} = \tfrac{1}{\sqrt{14}}(-1, 3, -2)^t$$

$$\Rightarrow Q_1 = I - \tfrac{2}{\sqrt{14}^2}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}(-1, 3, -2) = I - \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -6 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Método QR de Householder: ejemplo

$H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ donde
$\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2}$ y
$\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 - \|\mathbf{a}_1\|_2\mathbf{e}_1$.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a_1} = (12, 6, -4)^t,\ \|\mathbf{a_1}\|_2 = 14 \quad \Rightarrow \mathbf{w}_1 = \mathbf{a_1} - \|\mathbf{a_1}\|_2\mathbf{e_1} = (-2, 6, -4)^t$$

$$\Rightarrow \mathbf{v_1} = \tfrac{1}{\sqrt{14}}(-1, 3, -2)^t$$

$$\Rightarrow Q_1 = I - \tfrac{2}{\sqrt{14}^2}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}(-1, 3, -2) = I - \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -6 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

Método QR de Householder: ejemplo

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} -49 & -14 \\ 168 & -77 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ donde
$\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2}$ y
$\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 - \|\mathbf{a}_1\|_2 \mathbf{e}_1.$

Método QR de Householder: ejemplo

$H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ donde
$\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2}$ y
$\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 - \|\mathbf{a}_1\|_2\mathbf{e}_1$.

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{a}_2 = (-49, 168)^t$, $\|\mathbf{a}_2\|_2 = 175$

$$\Rightarrow \mathbf{w}_2 = \mathbf{a}_2 - \|\mathbf{a}_2\|_2\mathbf{e}_1 = (-224, 168)^t = 56(-4, 3)^t$$

Método QR de Householder: ejemplo

$H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ donde
$\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2}$ y
$\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 - \|\mathbf{a}_1\|_2\mathbf{e}_1$.

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{a}_2 = (-49, 168)^t$, $\|\mathbf{a}_2\|_2 = 175$

$$\Rightarrow \mathbf{w}_2 = \mathbf{a}_2 - \|\mathbf{a}_2\|_2\mathbf{e}_1 = (-224, 168)^t = 56(-4, 3)^t$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \tfrac{1}{5}(-4, 3)^t = \tfrac{1}{5}(-4, 3)^t$$

Método QR de Householder: ejemplo

$H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ donde
$\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2}$ y
$\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 - \|\mathbf{a}_1\|_2\mathbf{e}_1.$

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{a}_2 = (-49, 168)^t$, $\|\mathbf{a}_2\|_2 = 175$

$$\Rightarrow \mathbf{w}_2 = \mathbf{a}_2 - \|\mathbf{a}_2\|_2\mathbf{e}_1 = (-224, 168)^t = 56(-4, 3)^t$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \tfrac{1}{5}(-4, 3)^t = \tfrac{1}{5}(-4, 3)^t$$

$$\Rightarrow Q_2 = I - \tfrac{2}{25}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}(-4, 3)$$

Método QR de Householder: ejemplo

$H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ donde
$\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2}$ y
$\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 - \|\mathbf{a}_1\|_2\mathbf{e}_1.$

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{a}_2 = (-49, 168)^t$, $\|\mathbf{a}_2\|_2 = 175$

$$\Rightarrow \mathbf{w}_2 = \mathbf{a}_2 - \|\mathbf{a}_2\|_2\mathbf{e}_1 = (-224, 168)^t = 56(-4,3)^t$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \tfrac{1}{5}(-4,3)^t = \tfrac{1}{5}(-4,3)^t$$

$$\Rightarrow Q_2 = I - \tfrac{2}{25}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}(-4,3) \quad = I - \tfrac{2}{25}\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$$

Método QR de Householder: ejemplo

$H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ donde
$\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2}$ y
$\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 - \|\mathbf{a}_1\|_2\mathbf{e}_1.$

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = (-49, 168)^t,\ \|\mathbf{a}_2\|_2 = 175$$

$$\Rightarrow \mathbf{w}_2 = \mathbf{a}_2 - \|\mathbf{a}_2\|_2\mathbf{e}_1 = (-224, 168)^t = 56(-4, 3)^t$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \tfrac{1}{5}(-4, 3)^t = \tfrac{1}{5}(-4, 3)^t$$

$$\Rightarrow Q_2 = I - \tfrac{2}{25}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}(-4, 3) \quad = I - \tfrac{2}{25}\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{2}{25}\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$$

Método QR de Householder: ejemplo

$H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ donde
$\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2}$ y
$\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 - \|\mathbf{a}_1\|_2\mathbf{e}_1.$

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = (-49, 168)^t,\ \|\mathbf{a}_2\|_2 = 175$$

$$\Rightarrow \mathbf{w}_2 = \mathbf{a}_2 - \|\mathbf{a}_2\|_2\mathbf{e}_1 = (-224, 168)^t = 56(-4,3)^t$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \tfrac{1}{5}(-4,3)^t = \tfrac{1}{5}(-4,3)^t$$

$$\Rightarrow Q_2 = I - \tfrac{2}{25}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}(-4,3) \quad = I - \tfrac{2}{25}\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{2}{25}\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 Q_2 = \begin{pmatrix} 6/7 & -69/175 & 58/175 \\ 3/7 & 158/175 & -6/175 \\ -2/7 & 6/35 & 33/35 \end{pmatrix}$$

Método QR de Householder: ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix} \qquad Q = Q_1 Q_2 = \begin{pmatrix} 6/7 & -69/175 & 58/175 \\ 3/7 & 158/175 & -6/175 \\ -2/7 & 6/35 & 33/35 \end{pmatrix}$$

$$R = Q_2 Q_1 A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix}$$

Método QR de Householder: ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix} \qquad Q = Q_1 Q_2 = \begin{pmatrix} 6/7 & -69/175 & 58/175 \\ 3/7 & 158/175 & -6/175 \\ -2/7 & 6/35 & 33/35 \end{pmatrix}$$

$$R = Q_2 Q_1 A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A = QR &= \begin{pmatrix} 6/7 & -69/175 & 58/175 \\ 3/7 & 158/175 & -6/175 \\ -2/7 & 6/35 & 33/35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Método QR de Householder: aspectos numéricos

- Complejidad temporal de $\mathcal{O}(n^3)$ para una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$.

$\rightarrow n-1$ pasos, uno por columna en la cual anular las entradas subdiagonales.

$\rightarrow \mathcal{O}(n^2)$ multiplicaciones y sumas por paso.

($\rightarrow$ Alrededor de $2mn^2$ operaciones)

Método QR de Householder: aspectos numéricos

- Complejidad temporal de $\mathcal{O}(n^3)$ para una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$.

$\rightarrow$ $n-1$ pasos, uno por columna en la cual anular las entradas subdiagonales.

$\rightarrow$ $\mathcal{O}(n^2)$ multiplicaciones y sumas por paso.

($\rightarrow$ Alrededor de $2mn^2$ operaciones)

- Numéricamente estable

$\rightarrow$ Elige el signo en $\mathbf{w} = \mathbf{x} - (\pm\|\mathbf{x}\|)\mathbf{e}_1$ opuesto al del elemento pivote en el paso correspondiente para evitar la cancelación catastrófica.

Método QR de Householder: aspectos numéricos

- Complejidad temporal de $\mathcal{O}(n^3)$ para una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$.

$\rightarrow$ $n-1$ pasos, uno por columna en la cual anular las entradas subdiagonales.

$\rightarrow$ $\mathcal{O}(n^2)$ multiplicaciones y sumas por paso.

($\rightarrow$ Alrededor de $2mn^2$ operaciones)

- Numéricamente estable

$\rightarrow$ Elige el signo en $\mathbf{w} = \mathbf{x} - (\pm\|\mathbf{x}\|)\mathbf{e}_1$ opuesto al del elemento pivote en el paso correspondiente para evitar la cancelación catastrófica.

- Cada paso cambia en principio todo Q y la submatriz inferior derecha de R.

$\rightarrow$ Difícil de paralelizar.

$\rightarrow$ Muchas operaciones de lectura/escritura.

Factorización QR

Método de Givens

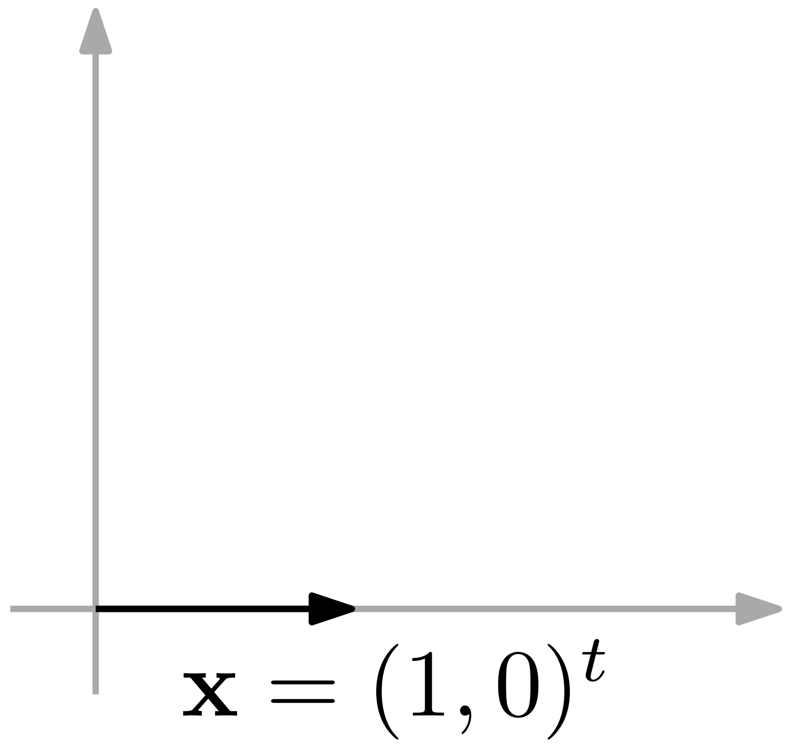
Rotaciones de Givens en 2D

Rotación en sentido antihorario de α radianes: $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Rotaciones de Givens en 2D

Rotación en sentido antihorario de α radianes: $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Ejemplo: Rotar $\mathbf{x} = (1,0)^t$ un ángulo de $90° = \pi/2$



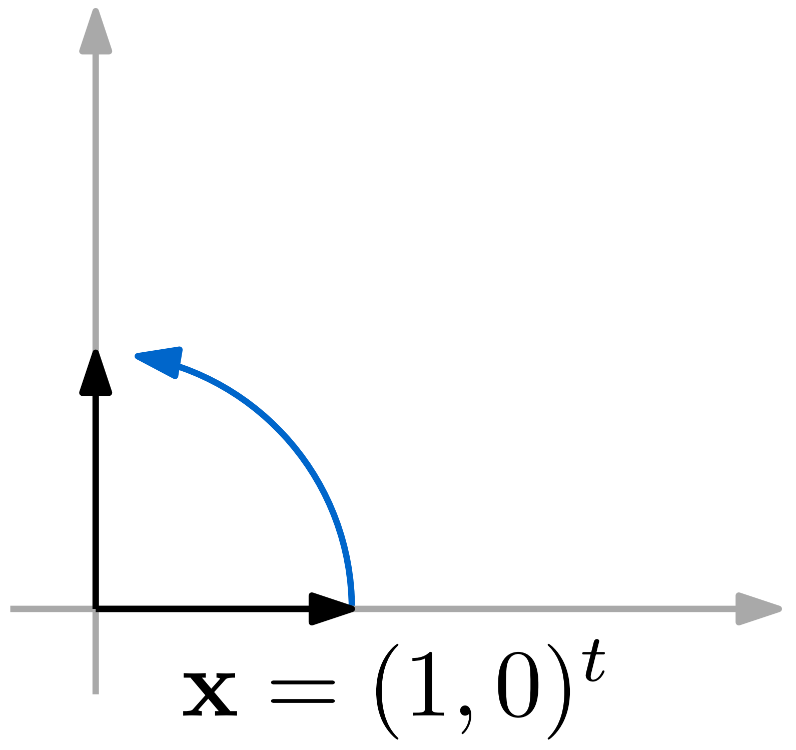
Rotaciones de Givens en 2D

Rotación en sentido antihorario de α radianes: $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Ejemplo: Rotar $\mathbf{x} = (1,0)^t$ un ángulo de $90^\circ = \pi/2$

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



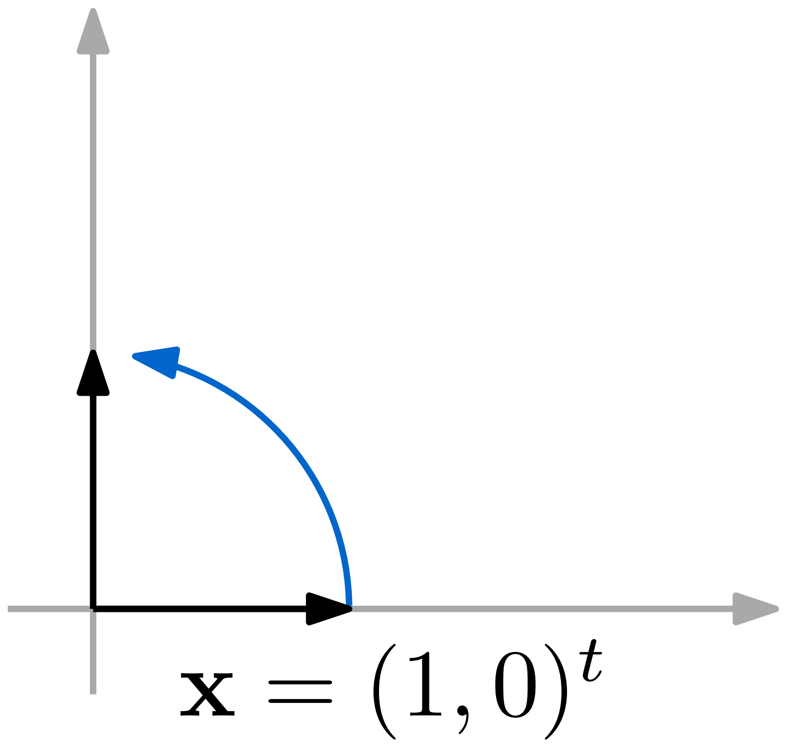
Rotaciones de Givens en 2D

Rotación en sentido antihorario de α radianes: $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Ejemplo: Rotar $\mathbf{x} = (1,0)^t$ un ángulo de $90^\circ = \pi/2$

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Para concatenar rotaciones, podemos multiplicar las matrices de rotación:

- $R_\gamma R_\beta R_\alpha \mathbf{x} \leftrightarrow$ rotación de $\mathbf{x}$ en sentido antihorario de α, luego β y luego γ.
- $R_\alpha^t R_\alpha = I$.

Rotaciones de Givens

En general, definimos la siguiente matriz con $c = \cos\alpha$ y $s = \sin\alpha$:

$$G(i,j,\alpha) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & -s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ i\text{-ésima fila} \\ \\ j\text{-ésima fila} \\ \\ \\ \end{array} \\ i\text{-ésima columna} \quad j\text{-ésima columna} & \end{array}$$

Rotaciones de Givens

En general, definimos la siguiente matriz con $c = \cos\alpha$ y $s = \sin\alpha$:

$$G(i,j,\alpha) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & -s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ i\text{-ésima fila} \\ \\ j\text{-ésima fila} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} i\text{-ésima columna} & j\text{-ésima columna} \end{array} & \end{array}$$

$\mathbf{x}' = G(i,j,\alpha)\mathbf{x}$ es $\mathbf{x}$ rotado en sentido antihorario por α radianes en el plano i-j.

Rotaciones de Givens

En general, definimos la siguiente matriz con $c = \cos \alpha$ y $s = \sin \alpha$:

$$
G(i,j,\alpha) = \begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & c & \cdots & -s & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & s & \cdots & c & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ i\text{-ésima fila} \\ \\ j\text{-ésima fila} \\ \\ \\
\end{array}
\\
\quad i\text{-ésima columna} \quad j\text{-ésima columna} &
\end{array}
$$

$\mathbf{x}' = G(i,j,\alpha)\mathbf{x}$ es $\mathbf{x}$ rotado en sentido antihorario por α radianes en el plano i-j.

Importante: Solo afecta a la posición i-ésima y j-ésima del vector.

Rotaciones de Givens para anular elementos

Primero en 2D: Encuentra la rotación del vector tal que el segundo componente sea cero:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \text{ and } r = \sqrt{a^2+b^2}$$

En lugar de calcular α, podemos ver que $\cos\alpha = a/r$ y $\sin\alpha = -b/r$.

Rotaciones de Givens para anular elementos

Primero en 2D: Encuentra la rotación del vector tal que el segundo componente sea cero:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \text{ and } r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

En lugar de calcular α, podemos ver que $\cos\alpha = a/r$ y $\sin\alpha = -b/r$.

En kD: Encuentra la rotación $G(i, j, \alpha)$ tal que el componente j-ésimo de un vector sea cero: $G(i, j, \alpha)$ solo afecta a la i-ésima y j-ésima entrada del vector $\rightarrow$ la misma solución funciona.

Rotaciones de Givens para anular elementos

Primero en 2D: Encuentra la rotación del vector tal que el segundo componente sea cero:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \text{ and } r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

En lugar de calcular α, podemos ver que $\cos\alpha = a/r$ y $\sin\alpha = -b/r$.

En kD: Encuentra la rotación $G(i, j, \alpha)$ tal que el componente j-ésimo de un vector sea cero: $G(i, j, \alpha)$ solo afecta a la i-ésima y j-ésima entrada del vector $\rightarrow$ la misma solución funciona.

Dado el vector $\mathbf{x}$, definimos:

- $r = \sqrt{x_i^2 + x_j^2}$
- $c = x_i/r$
- $s = -x_j/r$

Rotaciones de Givens para anular elementos

Primero en 2D: Encuentra la rotación del vector tal que el segundo componente sea cero:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \text{ and } r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

En lugar de calcular α, podemos ver que $\cos\alpha = a/r$ y $\sin\alpha = -b/r$.

En kD: Encuentra la rotación $G(i, j, \alpha)$ tal que el componente j-ésimo de un vector sea cero: $G(i, j, \alpha)$ solo afecta a la i-ésima y j-ésima entrada del vector $\to$ la misma solución funciona.

Dado el vector $\mathbf{x}$, definimos:

- $r = \sqrt{x_i^2 + x_j^2}$
- $c = x_i/r$
- $s = -x_j/r$

$$G(i, j, \alpha)\mathbf{x} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \vdots \\ x_i^2/r + x_j^2/r = \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ \vdots \\ -(x_j x_i)/r + (x_i x_j)/r = 0 \\ \vdots \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} \\ i\text{-ésima fila} \\ \\ j\text{-ésima fila} \\ \\ \end{array}$$

Método QR de Givens

Ejecutar una serie de rotaciones, cada una anulando un elemento por debajo de la diagonal para obtener R. Q es entonces la multiplicación de las rotaciones.

Método QR de Givens

Ejecutar una serie de rotaciones, cada una anulando un elemento por debajo de la diagonal para obtener R. Q es entonces la multiplicación de las rotaciones.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Método QR de Givens

Ejecutar una serie de rotaciones, cada una anulando un elemento por debajo de la diagonal para obtener R. Q es entonces la multiplicación de las rotaciones.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$G(i, j, \alpha)$ solo afecta a la i-ésima y j-ésima fila de A.

Elige $c = a_{ii}/r$ y $s = -a_{ji}/r$ con $r = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}$.

Método QR de Givens

Ejecutar una serie de rotaciones, cada una anulando un elemento por debajo de la diagonal para obtener R. Q es entonces la multiplicación de las rotaciones.

$$G(i,j,\alpha)A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{i1} & \dots & r & \dots & a'_{ij} & \dots & a'_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{j1} & \dots & 0 & \dots & a'_{jj} & \dots & a'_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$G(i,j,\alpha)$ solo afecta a la i-ésima y j-ésima fila de A.

Elige $c = a_{ii}/r$ y $s = -a_{ji}/r$ con $r = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}$.

Método QR de Givens: orden de eliminación

Cuando ejecutamos una rotación, puede ser que sobrescribamos elementos que ya eran cero $\rightarrow$ encontrar un orden de rotaciones que evite esto.

Método QR de Givens: orden de eliminación

Cuando ejecutamos una rotación, puede ser que sobrescribamos elementos que ya eran cero $\to$ encontrar un orden de rotaciones que evite esto.

Se pueden anular los elementos ordenados primero por columnas y luego por filas.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Método QR de Givens: orden de eliminación

Cuando ejecutamos una rotación, puede ser que sobrescribamos elementos que ya eran cero $\rightarrow$ encontrar un orden de rotaciones que evite esto.

Se pueden anular los elementos ordenados primero por columnas y luego por filas.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Método QR de Givens: orden de eliminación

Cuando ejecutamos una rotación, puede ser que sobrescribamos elementos que ya eran cero $\rightarrow$ encontrar un orden de rotaciones que evite esto.

Se pueden anular los elementos ordenados primero por columnas y luego por filas.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Método QR de Givens: orden de eliminación

Cuando ejecutamos una rotación, puede ser que sobrescribamos elementos que ya eran cero $\rightarrow$ encontrar un orden de rotaciones que evite esto.

Se pueden anular los elementos ordenados primero por columnas y luego por filas.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Método QR de Givens: orden de eliminación

Cuando ejecutamos una rotación, puede ser que sobrescribamos elementos que ya eran cero $\rightarrow$ encontrar un orden de rotaciones que evite esto.

Se pueden anular los elementos ordenados primero por columnas y luego por filas.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Método QR de Givens: orden de eliminación

Cuando ejecutamos una rotación, puede ser que sobrescribamos elementos que ya eran cero $\rightarrow$ encontrar un orden de rotaciones que evite esto.

Se pueden anular los elementos ordenados primero por columnas y luego por filas.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Método QR de Givens: orden de eliminación

Cuando ejecutamos una rotación, puede ser que sobrescribamos elementos que ya eran cero $\rightarrow$ encontrar un orden de rotaciones que evite esto.

Se pueden anular los elementos ordenados primero por columnas y luego por filas.

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}
\end{pmatrix}$$

Método QR de Givens: orden de eliminación

Cuando ejecutamos una rotación, puede ser que sobrescribamos elementos que ya eran cero $\rightarrow$ encontrar un orden de rotaciones que evite esto.

Se pueden anular los elementos ordenados primero por columnas y luego por filas.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Método QR de Givens: orden de eliminación

Cuando ejecutamos una rotación, puede ser que sobrescribamos elementos que ya eran cero $\rightarrow$ encontrar un orden de rotaciones que evite esto.

Se pueden anular los elementos ordenados primero por columnas y luego por filas.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Mientras anulamos a_{ji}, todas las entradas subdiagonales a la izquierda o arriba de a_{ji} son cero.

Método QR de Givens: orden de eliminación

Cuando ejecutamos una rotación, puede ser que sobrescribamos elementos que ya eran cero $\rightarrow$ encontrar un orden de rotaciones que evite esto.

Se pueden anular los elementos ordenados primero por columnas y luego por filas.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Mientras anulamos a_{ji}, todas las entradas subdiagonales a la izquierda o arriba de a_{ji} son cero.

Método QR de Givens: orden de eliminación

Cuando ejecutamos una rotación, puede ser que sobrescribamos elementos que ya eran cero $\rightarrow$ encontrar un orden de rotaciones que evite esto.

Se pueden anular los elementos ordenados primero por columnas y luego por filas.

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
0 & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}
\end{pmatrix}$$

Mientras anulamos a_{ji}, todas las entradas subdiagonales a la izquierda o arriba de a_{ji} son cero.

Asumimos $i < j$; los nuevos elementos se calculan como:

$a'_{ik} = ca_{ik} - sa_{jk}$ y
$a'_{jk} = sa_{ik} + ca_{jk}$,
con $k < i$.

Método QR de Givens: orden de eliminación

Cuando ejecutamos una rotación, puede ser que sobrescribamos elementos que ya eran cero $\rightarrow$ encontrar un orden de rotaciones que evite esto.

Se pueden anular los elementos ordenados primero por columnas y luego por filas.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Mientras anulamos a_{ji}, todas las entradas subdiagonales a la izquierda o arriba de a_{ji} son cero.

Asumimos $i < j$; los nuevos elementos se calculan como:

$a'_{ik} = ca_{ik} - sa_{jk}$ y
$a'_{jk} = sa_{ik} + ca_{jk}$,
con $k < i$.

Método QR de Givens: orden de eliminación

Cuando ejecutamos una rotación, puede ser que sobrescribamos elementos que ya eran cero → encontrar un orden de rotaciones que evite esto.

Se pueden anular los elementos ordenados primero por columnas y luego por filas.

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
0 & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}$$

Mientras anulamos a_{ji}, todas las entradas subdiagonales a la izquierda o arriba de a_{ji} son cero.

Asumimos $i < j$; los nuevos elementos se calculan como:

$$a'_{ik} = c a_{ik} - s a_{jk} \text{ y}$$
$$a'_{jk} = s a_{ik} + c a_{jk},$$
con $k < i$.

Método QR de Givens: orden de eliminación

Cuando ejecutamos una rotación, puede ser que sobrescribamos elementos que ya eran cero $\rightarrow$ encontrar un orden de rotaciones que evite esto.

Se pueden anular los elementos ordenados primero por columnas y luego por filas.

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
0 & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}
\end{pmatrix}$$

Mientras anulamos a_{ji}, todas las entradas subdiagonales a la izquierda o arriba de a_{ji} son cero.

Asumimos $i < j$; los nuevos elementos se calculan como:

$$a'_{ik} = ca_{ik} - sa_{jk} \text{ y}$$
$$a'_{jk} = sa_{ik} + ca_{jk},$$

con $k < i$.

Dependen solo de los elementos subdiagonales en la misma columna.

Método QR de Givens: orden de eliminación

Cuando ejecutamos una rotación, puede ser que sobrescribamos elementos que ya eran cero $\rightarrow$ encontrar un orden de rotaciones que evite esto.

Se pueden anular los elementos ordenados primero por columnas y luego por filas.

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
0 & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}
\end{pmatrix}$$

Mientras anulamos a_{ji}, todas las entradas subdiagonales a la izquierda o arriba de a_{ji} son cero.

Asumimos $i < j$; los nuevos elementos se calculan como:

$$a'_{ik} = ca_{ik} - sa_{jk} \text{ y}$$
$$a'_{jk} = sa_{ik} + ca_{jk},$$

con $k < i$.

Ni en la fila i ni en la fila j cambian los ceros previos.

Dependen solo de los elementos subdiagonales en la misma columna.

Método QR de Givens: ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$c = a_{ii}/r$$
$$s = -a_{ji}/r$$
$$r = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}.$$

Método QR de Givens: ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$c = a_{ii}/r$$
$$s = -a_{ji}/r$$
$$r = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}.$$

Nuestro objetivo es anular a_{21} primero $\rightarrow$ considerar $(12, 6)^t$.

Método QR de Givens: ejemplo

$$c = a_{ii}/r$$
$$s = -a_{ji}/r$$
$$r = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

Nuestro objetivo es anular a_{21} primero $\rightarrow$ considerar $(12, 6)^t$.

$$r = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$
$$c = \frac{12}{6\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$s = -\frac{6}{6\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Método QR de Givens: ejemplo

$$c = a_{ii}/r$$
$$s = -a_{ji}/r$$
$$r = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

Nuestro objetivo es anular a_{21} primero $\rightarrow$ considerar $(12,6)^t$.

$$r = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$
$$c = \frac{12}{6\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$s = -\frac{6}{6\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 6\sqrt{5} & 13\sqrt{5} & -12\sqrt{5} \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

Método QR de Givens: ejemplo

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} 6\sqrt{5} & 13\sqrt{5} & -12\sqrt{5} \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$c = a_{ii}/r$$
$$s = -a_{ji}/r$$
$$r = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}.$$

Método QR de Givens: ejemplo

$$c = a_{ii}/r$$
$$s = -a_{ji}/r$$
$$r = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}.$$

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} 6\sqrt{5} & 13\sqrt{5} & -12\sqrt{5} \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

Siguiente, anular $a_{31} \to$ considerar $(6\sqrt{5}, -4)^t$.

Método QR de Givens: ejemplo

$$c = a_{ii}/r$$
$$s = -a_{ji}/r$$
$$r = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}.$$

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} 6\sqrt{5} & 13\sqrt{5} & -12\sqrt{5} \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

Siguiente, anular $a_{31} \to$ considerar $(6\sqrt{5}, -4)^t$.

$$r = \sqrt{(6\sqrt{5})^2 + (-4)^2} = \sqrt{196} = 14,\ c = \tfrac{3\sqrt{5}}{7},\ s = -\tfrac{-4}{14} = \tfrac{2}{7}$$

Método QR de Givens: ejemplo

$$c = a_{ii}/r$$
$$s = -a_{ji}/r$$
$$r = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}.$$

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} 6\sqrt{5} & 13\sqrt{5} & -12\sqrt{5} \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

Siguiente, anular $a_{31} \to$ considerar $(6\sqrt{5}, -4)^t$.

$r = \sqrt{(6\sqrt{5})^2 + (-4)^2} = \sqrt{196} = 14$, $c = \frac{3\sqrt{5}}{7}$, $s = -\frac{-4}{14} = \frac{2}{7}$

$$Q_2 Q_1 A = \begin{pmatrix} (3\sqrt{5})/7 & 0 & -2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/7 & 0 & (3\sqrt{5})/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\sqrt{5} & 13\sqrt{5} & -12\sqrt{5} \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ 0 & 14\sqrt{5} & -21\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Método QR de Givens: ejemplo

$$c = a_{ii}/r$$
$$s = -a_{ji}/r$$
$$r = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}.$$

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} 6\sqrt{5} & 13\sqrt{5} & -12\sqrt{5} \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

Siguiente, anular $a_{31} \to$ considerar $(6\sqrt{5}, -4)^t$.

$$r = \sqrt{(6\sqrt{5})^2 + (-4)^2} = \sqrt{196} = 14,\ c = \tfrac{3\sqrt{5}}{7},\ s = -\tfrac{-4}{14} = \tfrac{2}{7}$$

$$Q_2 Q_1 A = \begin{pmatrix} (3\sqrt{5})/7 & 0 & -2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/7 & 0 & (3\sqrt{5})/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\sqrt{5} & 13\sqrt{5} & -12\sqrt{5} \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ 0 & 14\sqrt{5} & -21\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Ya tenemos la primera fila de R.

Método QR de Givens: ejemplo

$$Q_2Q_1A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ 0 & 14\sqrt{5} & -21\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$c = a_{ii}/r$$
$$s = -a_{ji}/r$$
$$r = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}.$$

Método QR de Givens: ejemplo

$$c = a_{ii}/r$$
$$s = -a_{ji}/r$$
$$r = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}.$$

$$Q_2 Q_1 A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ 0 & 14\sqrt{5} & -21\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Finalmente, anular $a_{32} \to$ considerar $(77\sqrt{5}, 14\sqrt{5})^t = \sqrt{5}(77, 14)^t$.

Método QR de Givens: ejemplo

$$Q_2Q_1A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ 0 & 14\sqrt{5} & -21\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$c = a_{ii}/r$$
$$s = -a_{ji}/r$$
$$r = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}.$$

Finalmente, anular $a_{32} \rightarrow$ considerar $(77\sqrt{5}, 14\sqrt{5})^t = \sqrt{5}(77, 14)^t$.

$r = \sqrt{5}\sqrt{77^2 + 14^2} = 175$, $c = \frac{11\sqrt{5}}{25}$, $s = -\frac{2\sqrt{5}}{25}$

Método QR de Givens: ejemplo

$$c = a_{ii}/r$$
$$s = -a_{ji}/r$$
$$r = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}.$$

$$Q_2Q_1A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ 0 & 14\sqrt{5} & -21\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Finalmente, anular $a_{32} \to$ considerar $(77\sqrt{5}, 14\sqrt{5})^t = \sqrt{5}(77, 14)^t$.

$r = \sqrt{5}\sqrt{77^2 + 14^2} = 175$, $c = \frac{11\sqrt{5}}{25}$, $s = -\frac{2\sqrt{5}}{25}$

$$Q_3Q_2Q_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11\sqrt{5}/25 & 2\sqrt{5}/25 \\ 0 & -2\sqrt{5}/25 & 11\sqrt{5}/25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ 0 & 14\sqrt{5} & -21\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix}$$

Método QR de Givens: ejemplo

$$c = a_{ii}/r$$
$$s = -a_{ji}/r$$
$$r = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}.$$

$$Q_2Q_1A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ 0 & 14\sqrt{5} & -21\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Finalmente, anular $a_{32} \to$ considerar $(77\sqrt{5}, 14\sqrt{5})^t = \sqrt{5}(77, 14)^t$.

$r = \sqrt{5}\sqrt{77^2 + 14^2} = 175$, $c = \frac{11\sqrt{5}}{25}$, $s = -\frac{2\sqrt{5}}{25}$

$$Q_3Q_2Q_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11\sqrt{5}/25 & 2\sqrt{5}/25 \\ 0 & -2\sqrt{5}/25 & 11\sqrt{5}/25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ 0 & 14\sqrt{5} & -21\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix}$$

Método QR de Givens: ejemplo

$$c = a_{ii}/r$$
$$s = -a_{ji}/r$$
$$r = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}.$$

$$Q_2 Q_1 A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ 0 & 14\sqrt{5} & -21\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Finalmente, anular a_{32} $\to$ considerar $(77\sqrt{5}, 14\sqrt{5})^t = \sqrt{5}(77, 14)^t$.

$r = \sqrt{5}\sqrt{77^2 + 14^2} = 175$, $c = \frac{11\sqrt{5}}{25}$, $s = -\frac{2\sqrt{5}}{25}$

$$Q_3 Q_2 Q_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11\sqrt{5}/25 & 2\sqrt{5}/25 \\ 0 & -2\sqrt{5}/25 & 11\sqrt{5}/25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ 0 & 14\sqrt{5} & -21\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix}$$

$Q = (Q_3 Q_2 Q_1)^t = Q_1^t Q_2^t Q_3^t$

$$R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix}$$

Método de Givens: aspectos numéricos

- Complejidad temporal de $\mathcal{O}(n^3)$ para una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$.

$\rightarrow$ Una rotación requiere $\mathcal{O}(n)$ multiplicaciones y sumas.

$\rightarrow$ $\mathcal{O}(n^2)$ elementos a poner a cero.

($\rightarrow$ Alrededor de $3mn^2$ operaciones).

Método de Givens: aspectos numéricos

- Complejidad temporal de $\mathcal{O}(n^3)$ para una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$.

$\rightarrow$ Una rotación requiere $\mathcal{O}(n)$ multiplicaciones y sumas.

$\rightarrow$ $\mathcal{O}(n^2)$ elementos a poner a cero.

($\rightarrow$ Alrededor de $3mn^2$ operaciones).

- Más operaciones que Householder.

Método de Givens: aspectos numéricos

- Complejidad temporal de $\mathcal{O}(n^3)$ para una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$.

$\rightarrow$ Una rotación requiere $\mathcal{O}(n)$ multiplicaciones y sumas.

$\rightarrow$ $\mathcal{O}(n^2)$ elementos a poner a cero.

($\rightarrow$ Alrededor de $3mn^2$ operaciones).

- Más operaciones que Householder.

- Numéricamente estable.

Método de Givens: aspectos numéricos

- Complejidad temporal de $\mathcal{O}(n^3)$ para una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$.

$\rightarrow$ Una rotación requiere $\mathcal{O}(n)$ multiplicaciones y sumas.

$\rightarrow$ $\mathcal{O}(n^2)$ elementos a poner a cero.

($\rightarrow$ Alrededor de $3mn^2$ operaciones).

- Más operaciones que Householder.

- Numéricamente estable.
- Una rotación sólo influye en los valores de dos filas.

$\rightarrow$ Bueno si solo hay unos pocos elementos distintos de cero.

$\rightarrow$ Posible paralelizar.

Método de Givens: aspectos numéricos

- Complejidad temporal de $\mathcal{O}(n^3)$ para una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$.

$\rightarrow$ Una rotación requiere $\mathcal{O}(n)$ multiplicaciones y sumas.

$\rightarrow$ $\mathcal{O}(n^2)$ elementos a poner a cero.

($\rightarrow$ Alrededor de $3mn^2$ operaciones).

- Más operaciones que Householder.

- Numéricamente estable.
- Una rotación sólo influye en los valores de dos filas.

$\rightarrow$ Bueno si solo hay unos pocos elementos distintos de cero.

$\rightarrow$ Posible paralelizar.

- Es difícil determinar el mejor orden para calcular R.

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas sobredeterminados

Sistemas lineares sobredeterminados

Dada una matriz A $m \times n$ con $m \geq n$, un vector $\mathbf{b}$ de m componentes, y un vector $\mathbf{x}$ de n incógnitas, consideramos el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Sistemas lineares sobredeterminados

Dada una matriz A $m \times n$ con $m \geq n$, un vector $\mathbf{b}$ de m componentes, y un vector $\mathbf{x}$ de n incógnitas, consideramos el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

- Si este sistema no tiene solución, buscamos el vector $\mathbf{x}$ que minimiza la distancia entre $A\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ según el método de mínimos cuadrados.

Sistemas lineares sobredeterminados

Dada una matriz A $m \times n$ con $m \geq n$, un vector $\mathbf{b}$ de m componentes, y un vector $\mathbf{x}$ de n incógnitas, consideramos el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

- Si este sistema no tiene solución, buscamos el vector $\mathbf{x}$ que minimiza la distancia entre $A\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ según el método de mínimos cuadrados.
- Consideramos el vector residuo $\mathbf{r}(\mathbf{y}) = \mathbf{b} - A\mathbf{y}$.

Sistemas lineares sobredeterminados

Dada una matriz A $m \times n$ con $m \geq n$, un vector $\mathbf{b}$ de m componentes, y un vector $\mathbf{x}$ de n incógnitas, consideramos el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

- Si este sistema no tiene solución, buscamos el vector $\mathbf{x}$ que minimiza la distancia entre $A\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ según el método de mínimos cuadrados.
- Consideramos el vector residuo $\mathbf{r}(\mathbf{y}) = \mathbf{b} - A\mathbf{y}$.
- Si x es la solución del sistema de ecuaciones normales $A^t(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ o, equivalentemente, $A^tA\mathbf{x} = -A^t\mathbf{b}$, entonces

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_2 \leq \|\mathbf{r}(\mathbf{y})\|_2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Sistemas lineares sobredeterminados

Dada una matriz A $m \times n$ con $m \geq n$, un vector $\mathbf{b}$ de m componentes, y un vector $\mathbf{x}$ de n incógnitas, consideramos el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

- Si este sistema no tiene solución, buscamos el vector $\mathbf{x}$ que minimiza la distancia entre $A\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ según el método de mínimos cuadrados.
- Consideramos el vector residuo $\mathbf{r}(\mathbf{y}) = \mathbf{b} - A\mathbf{y}$.
- Si x es la solución del sistema de ecuaciones normales $A^t(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ o, equivalentemente, $A^tA\mathbf{x} = -A^t\mathbf{b}$, entonces

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_2 \leq \|\mathbf{r}(\mathbf{y})\|_2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Propiedades de A^tA:

Sistemas lineares sobredeterminados

Dada una matriz A $m \times n$ con $m \geq n$, un vector $\mathbf{b}$ de m componentes, y un vector $\mathbf{x}$ de n incógnitas, consideramos el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

- Si este sistema no tiene solución, buscamos el vector $\mathbf{x}$ que minimiza la distancia entre $A\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ según el método de mínimos cuadrados.
- Consideramos el vector residuo $\mathbf{r}(\mathbf{y}) = \mathbf{b} - A\mathbf{y}$.
- Si x es la solución del sistema de ecuaciones normales $A^t(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ o, equivalentemente, $A^tA\mathbf{x} = -A^t\mathbf{b}$, entonces

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_2 \leq \|\mathbf{r}(\mathbf{y})\|_2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Propiedades de A^tA:

✓ simétrica,

✓ semidefinida positiva

✓ definida positiva si y solo si las columnas de A son linealmente independientes $(\mathrm{rang}(A) = n)$.

Sistemas lineares sobredeterminados

Dada una matriz A $m \times n$ con $m \geq n$, un vector $\mathbf{b}$ de m componentes, y un vector $\mathbf{x}$ de n incógnitas, consideramos el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

- Si este sistema no tiene solución, buscamos el vector $\mathbf{x}$ que minimiza la distancia entre $A\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ según el método de mínimos cuadrados.
- Consideramos el vector residuo $\mathbf{r}(\mathbf{y}) = \mathbf{b} - A\mathbf{y}$.
- Si x es la solución del sistema de ecuaciones normales $A^t(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ o, equivalentemente, $A^tA\mathbf{x} = -A^t\mathbf{b}$, entonces

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_2 \leq \|\mathbf{r}(\mathbf{y})\|_2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Propiedades de A^tA:

✓ simétrica,

✓ semidefinida positiva

✓ definida positiva si y solo si las columnas de A son linealmente independientes ($\text{rang}(A) = n$).

Existencia de solución: La matriz A^tA es no singular si y solo si $\text{rang}(A) = n$.

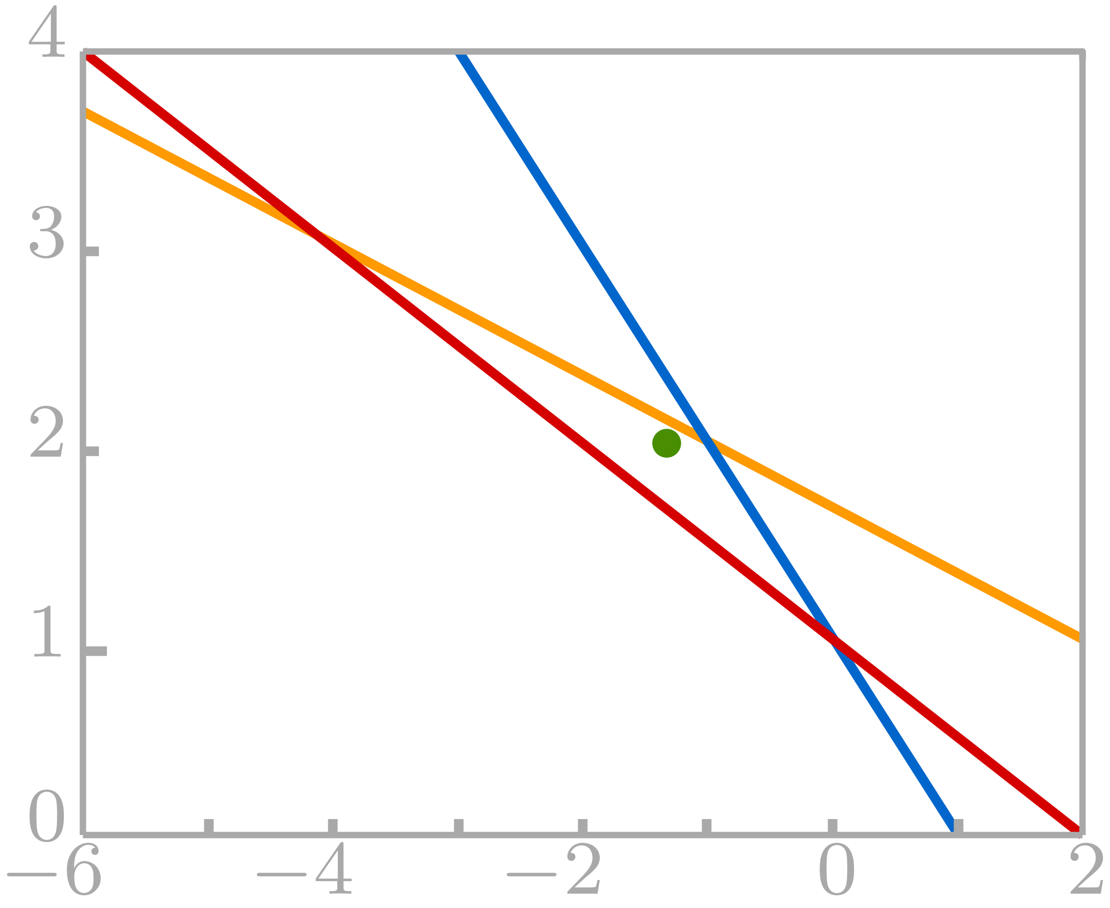
Sistemas lineales sobredeterminados: resolución

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 3 ecuaciones y 2 incógnitas con $\mathrm{rang}(A) = 2$ y $\mathrm{rang}([A|b]) = 3$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Sistemas lineales sobredeterminados: resolución

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 3 ecuaciones y 2 incógnitas con $\text{rang}(A) = 2$ y $\text{rang}([A|b]) = 3$:



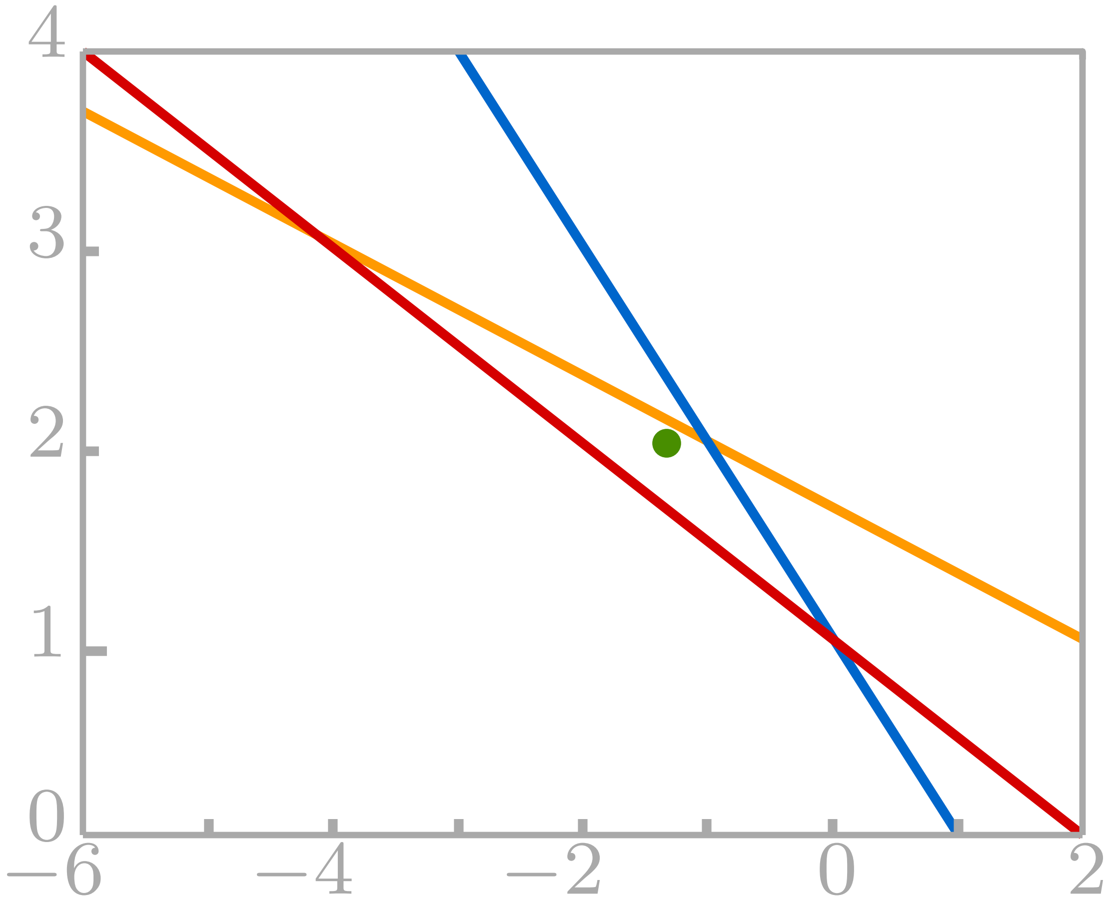
$x_1 + x_2 = 1$

$x_1 + 2x_2 = 2$

$x_1 + 3x_2 = 5$

Sistemas lineales sobredeterminados: resolución

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 3 ecuaciones y 2 incógnitas con $\text{rang}(A) = 2$ y $\text{rang}([A|b]) = 3$:



$x_1 + x_2 = 1$

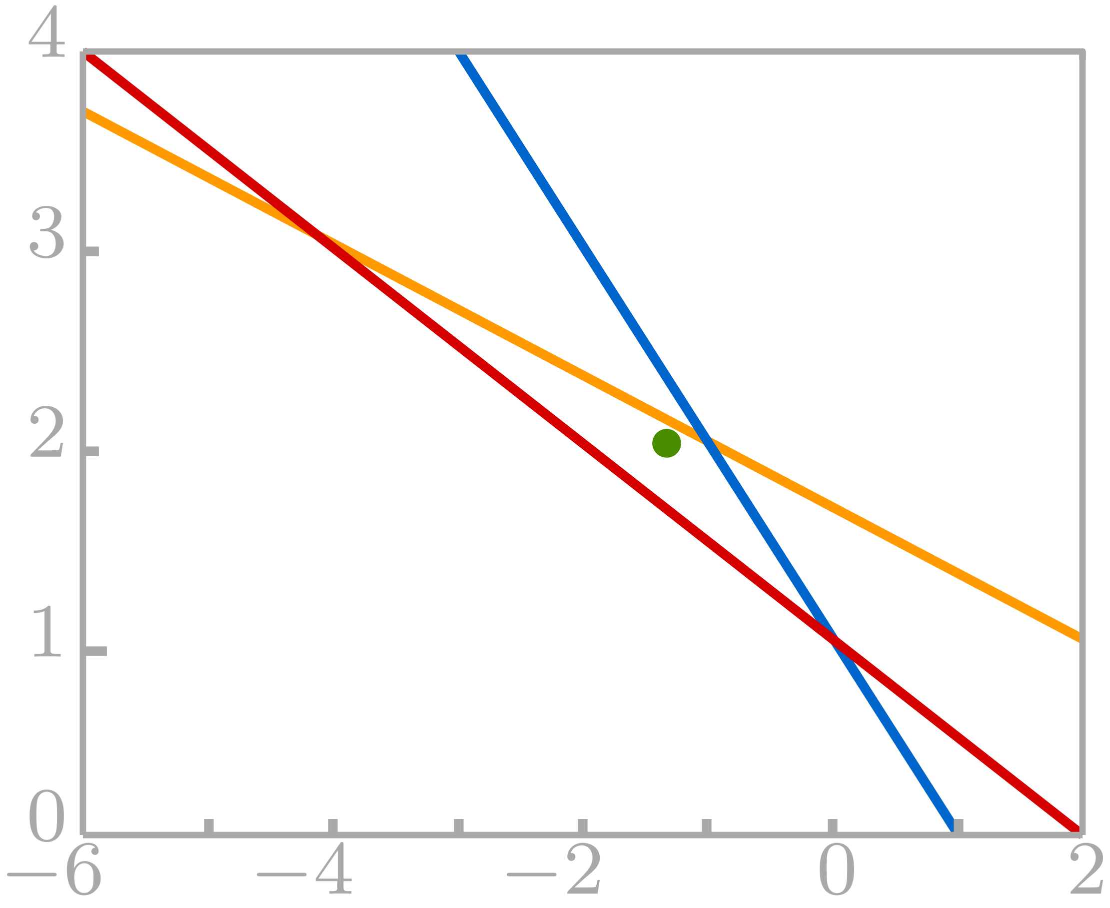
$x_1 + 2x_2 = 2$

$x_1 + 3x_2 = 5$

- Ecuaciones normales: $A^t A\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$.

Sistemas lineales sobredeterminados: resolución

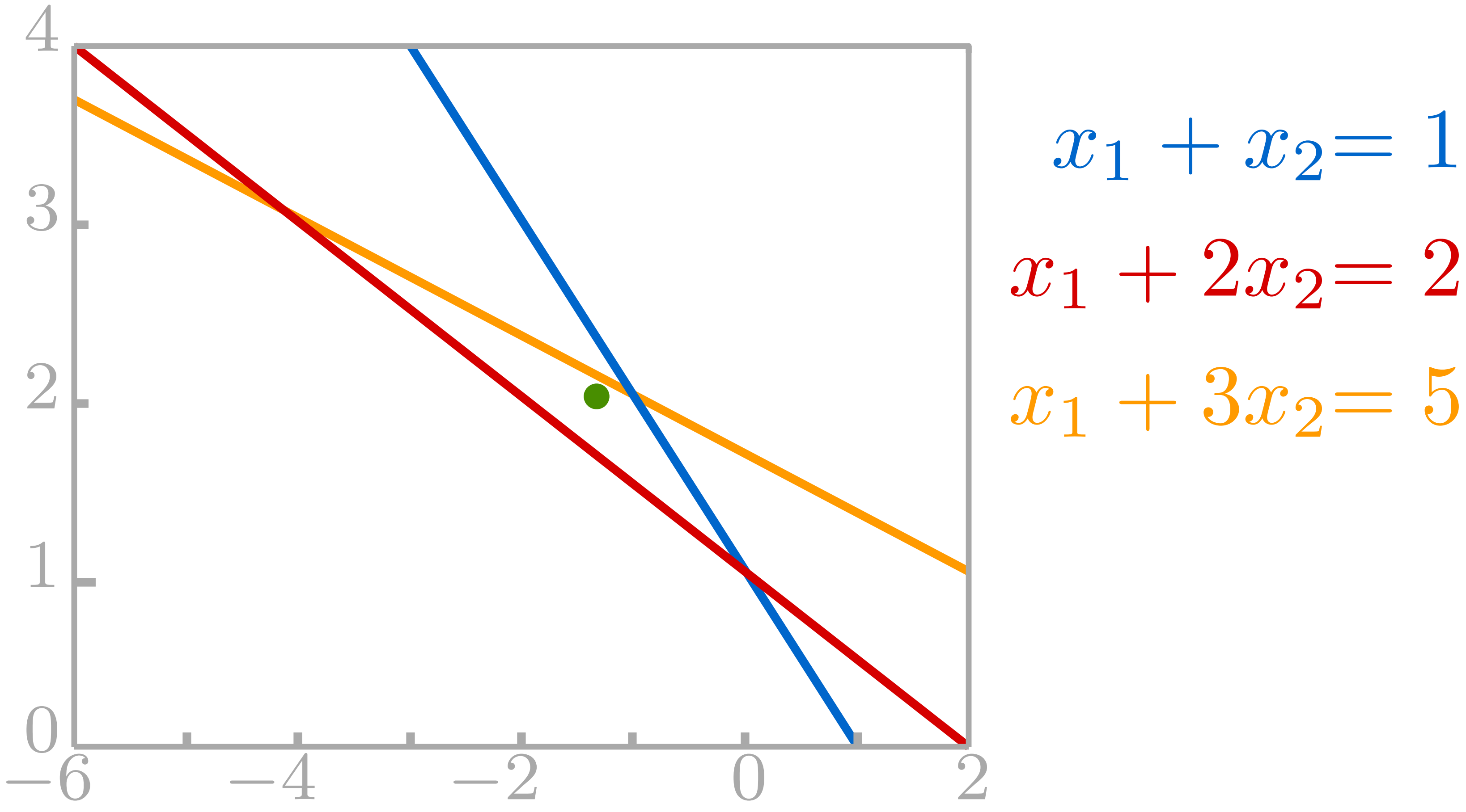
$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 3 ecuaciones y 2 incógnitas con $\text{rang}(A) = 2$ y $\text{rang}([A|b]) = 3$:



- Ecuaciones normales: $A^t A\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$.
- $R\mathbf{x} = Q^t A^t \mathbf{b}$: solución por factorización QR de $A^t A$.

Sistemas lineales sobredeterminados: resolución

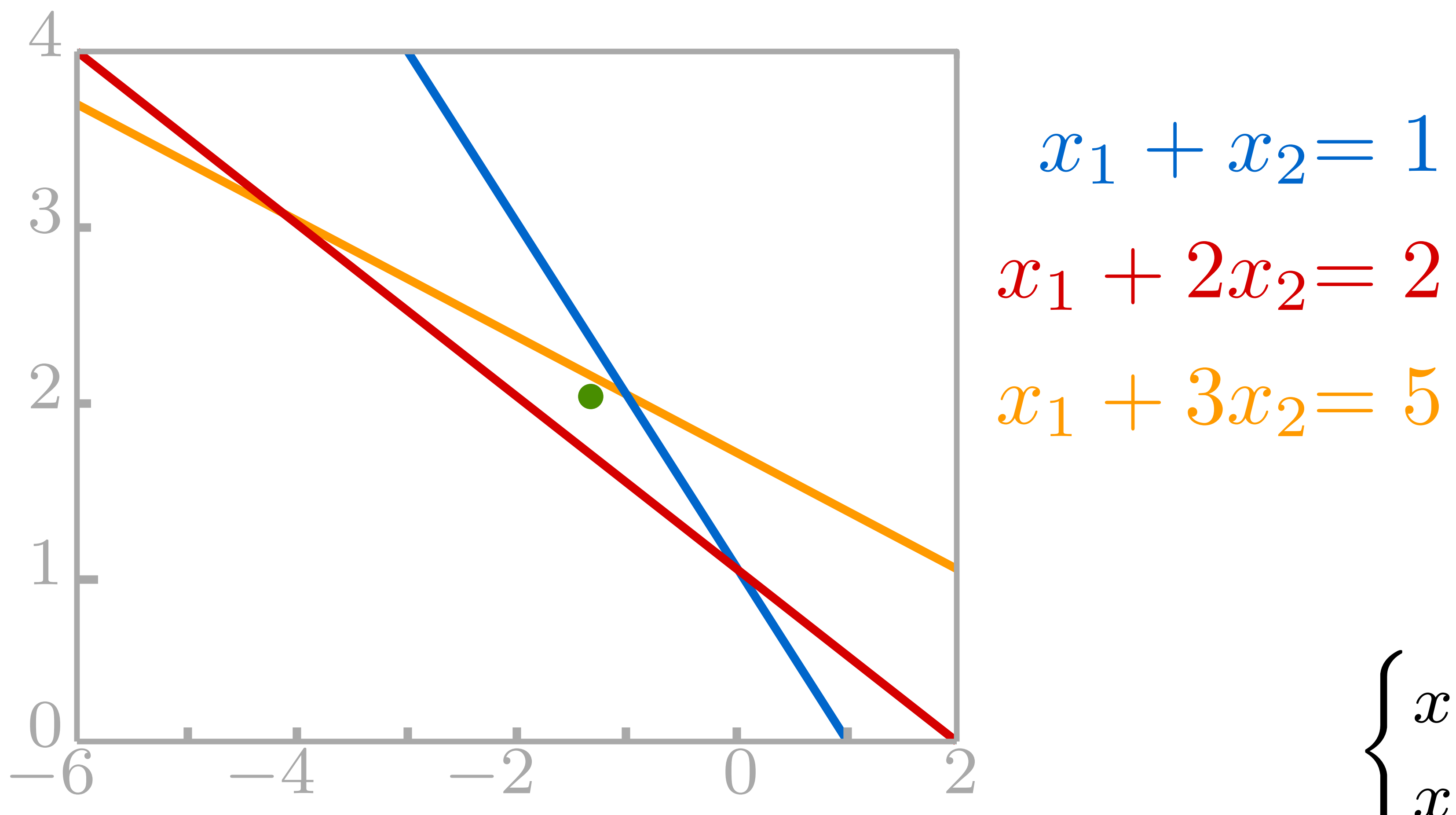
$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 3 ecuaciones y 2 incógnitas con $\text{rang}(A) = 2$ y $\text{rang}([A|b]) = 3$:



- Ecuaciones normales: $A^t A\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$.
- $R\mathbf{x} = Q^t A^t\mathbf{b}$: solución por factorización QR de $A^t A$.
- $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2$ residuo mínimo.

Sistemas lineales sobredeterminados: resolución

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 3 ecuaciones y 2 incógnitas con $\text{rang}(A) = 2$ y $\text{rang}([A|b]) = 3$:



- Ecuaciones normales: $A^t A\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$.
- $R\mathbf{x} = Q^t A^t \mathbf{b}$: solución por factorización QR de $A^t A$.
- $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2$ residuo mínimo.

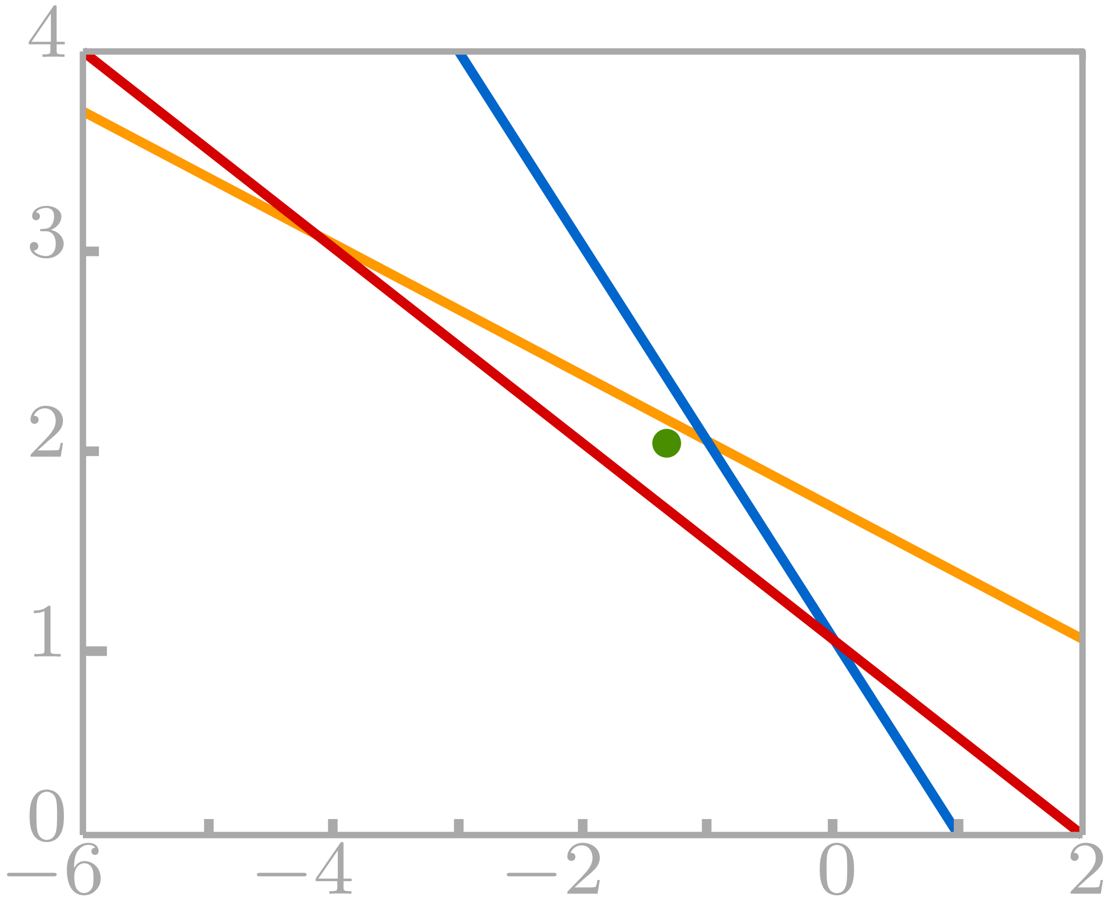
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\| = 2.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\| = 1.$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\| = 2.$$

Sistemas lineales sobredeterminados: resolución

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 3 ecuaciones y 2 incógnitas con $\text{rang}(A) = 2$ y $\text{rang}([A|b]) = 3$:



$x_1 + x_2 = 1$

$x_1 + 2x_2 = 2$

$x_1 + 3x_2 = 5$

- Ecuaciones normales: $A^t A\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$.
- $R\mathbf{x} = Q^t A^t \mathbf{b}$: solución por factorización QR de $A^t A$.
- $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2$ residuo mínimo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

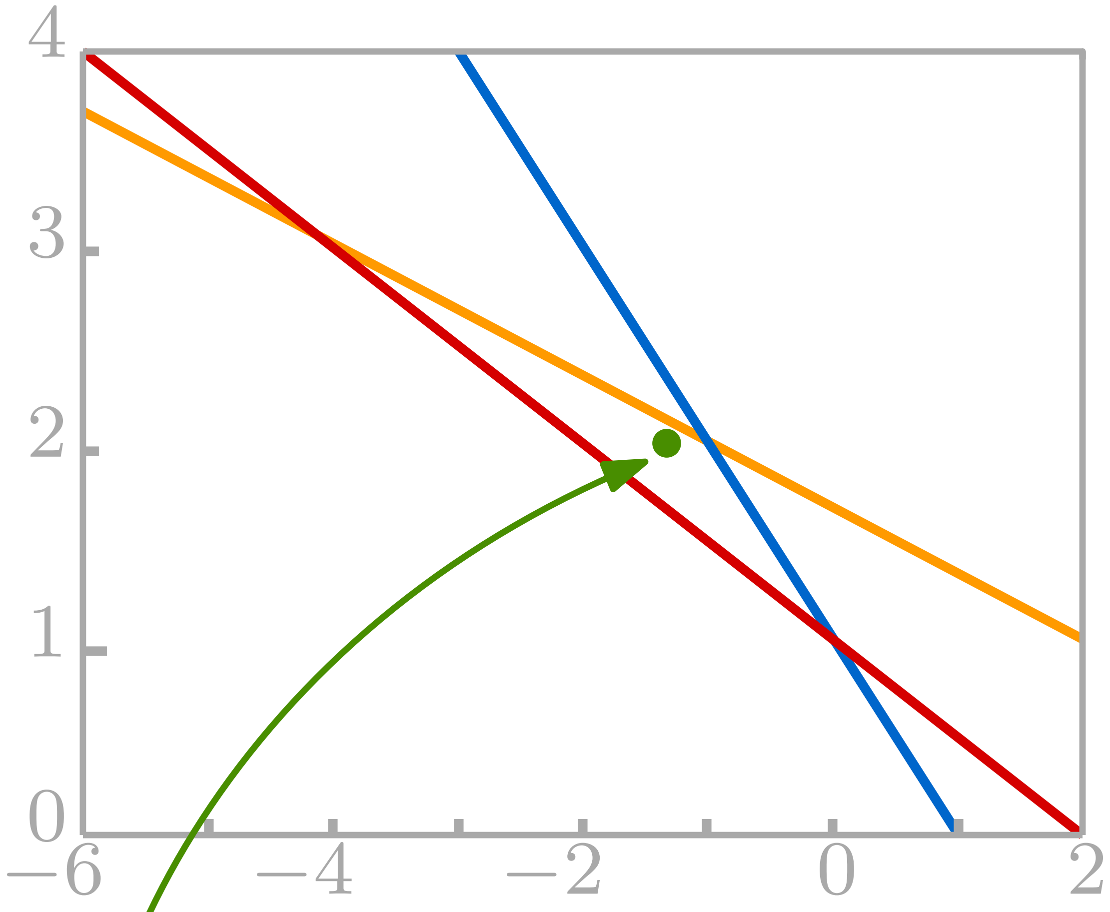
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\| = 2.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \ \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\| = 1.$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \ \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\| = 2.$$

Sistemas lineales sobredeterminados: resolución

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 3 ecuaciones y 2 incógnitas con $\mathrm{rang}(A) = 2$ y $\mathrm{rang}([A|b]) = 3$:



$x_1 + x_2 = 1$

$x_1 + 2x_2 = 2$

$x_1 + 3x_2 = 5$

- Ecuaciones normales: $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$.
- $R\mathbf{x} = Q^tA^t\mathbf{b}$: solución por factorización QR de A^tA.
- $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2$ residuo mínimo.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\| = 2.$$

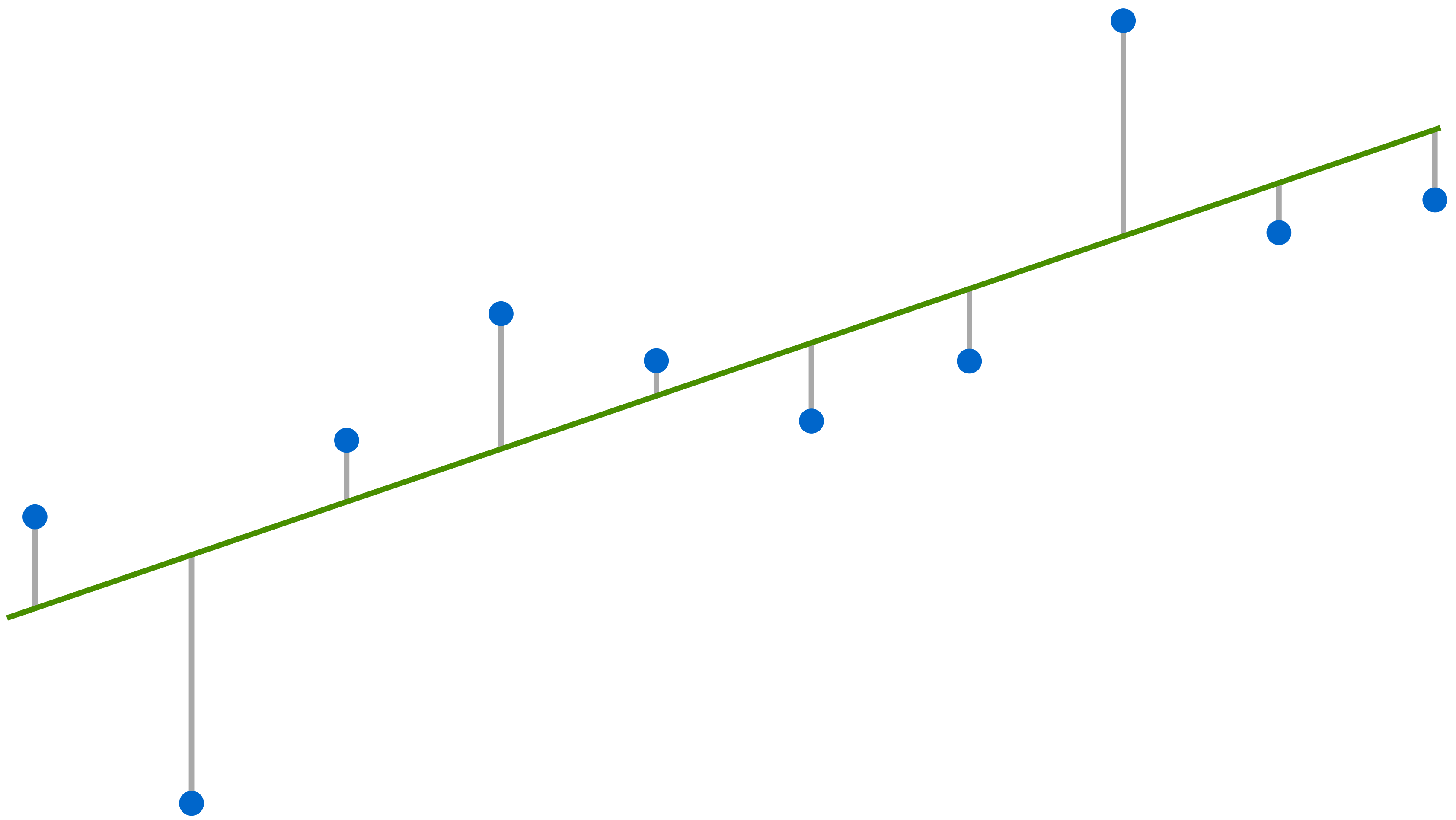
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^tA = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \; \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\| = 1.$$

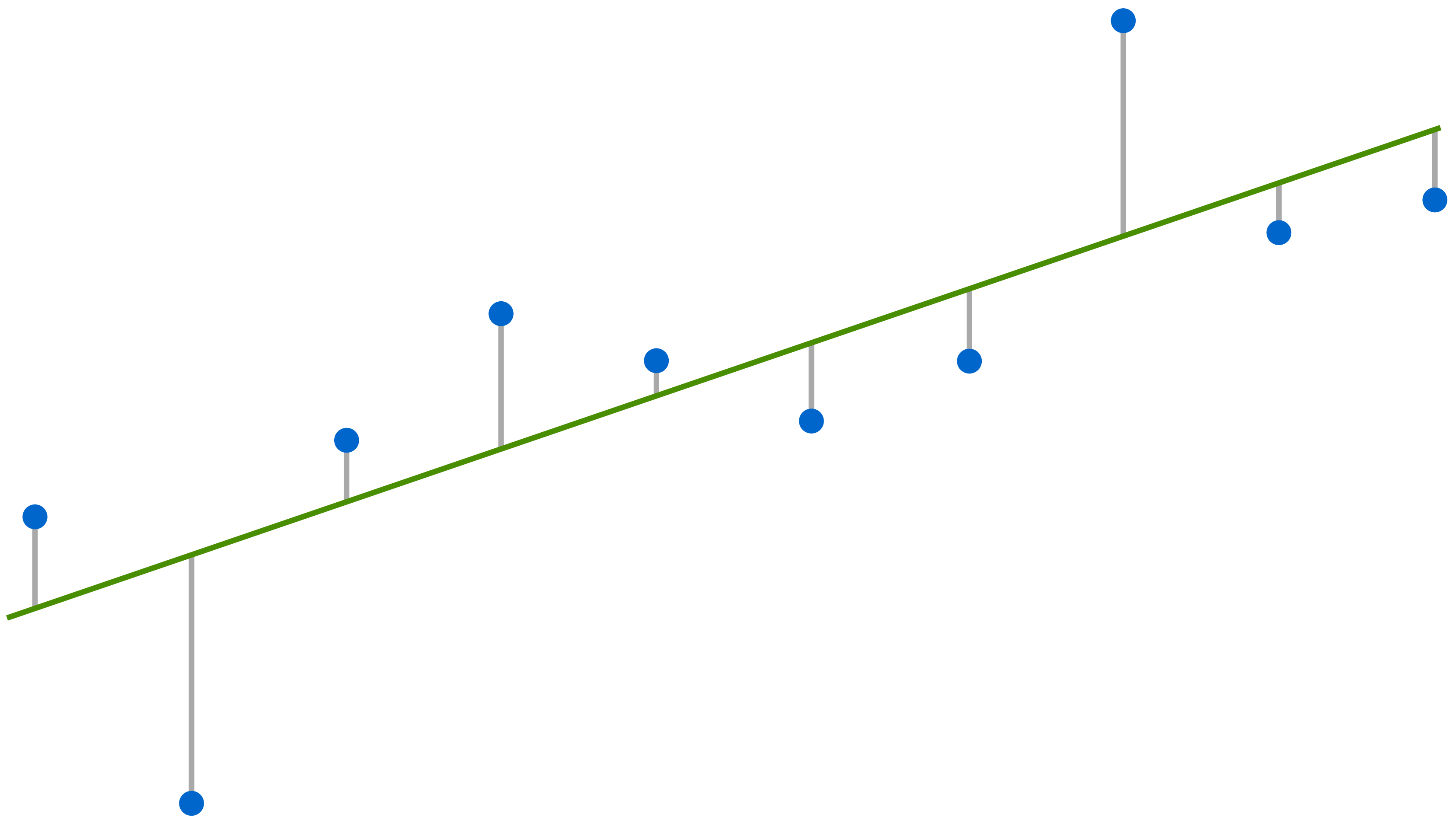
$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 2 \end{pmatrix}} \quad \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\| = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0.8165 < 1$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \; \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\| = 2.$$

Mínimos cuadrados

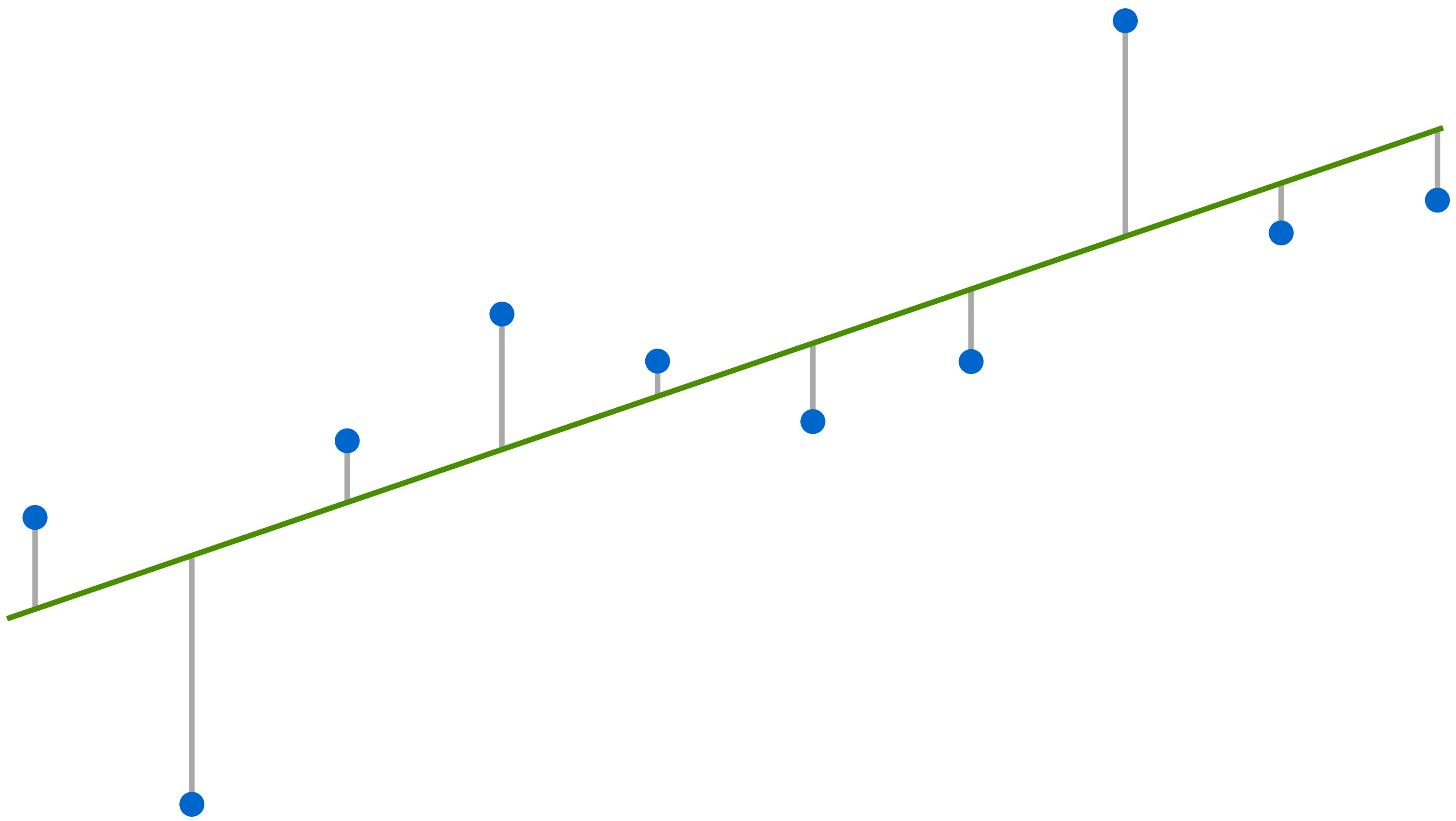


Mínimos cuadrados



Datos: (x_1, y_1), (x_2, y_2),. . . ,(x_n, y_n).
Asumimos que las xs son correctas mientras que las ys tienen ruido.

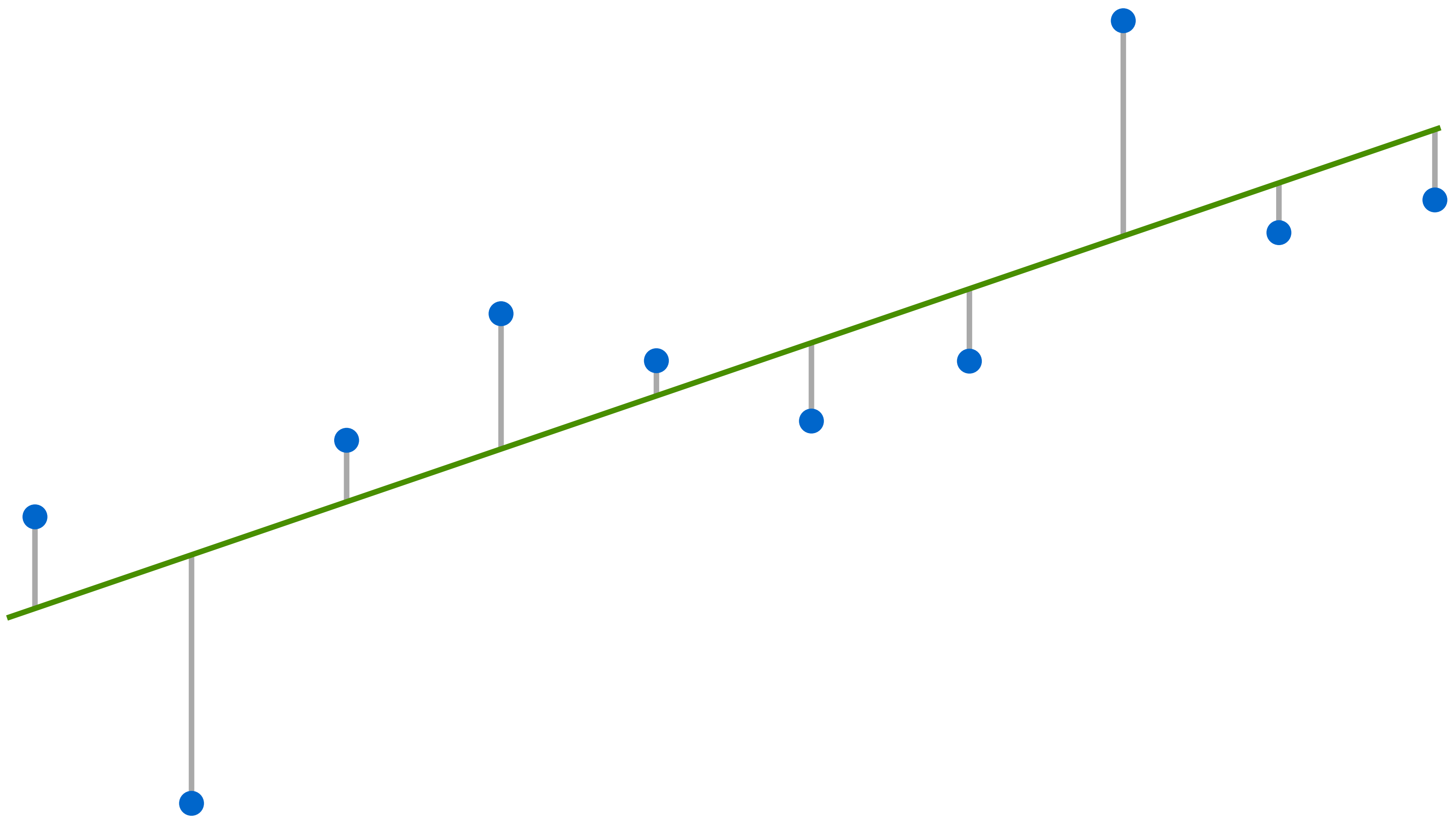
Mínimos cuadrados



Datos: (x_1, y_1), (x_2, y_2),. . . ,(x_n, y_n).
Asumimos que las xs son correctas mientras que las ys tienen ruido.

Buscamos una recta de ajuste $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x} + \beta$ que minimice la suma de los cuadrados de las distancias verticales.

Mínimos cuadrados

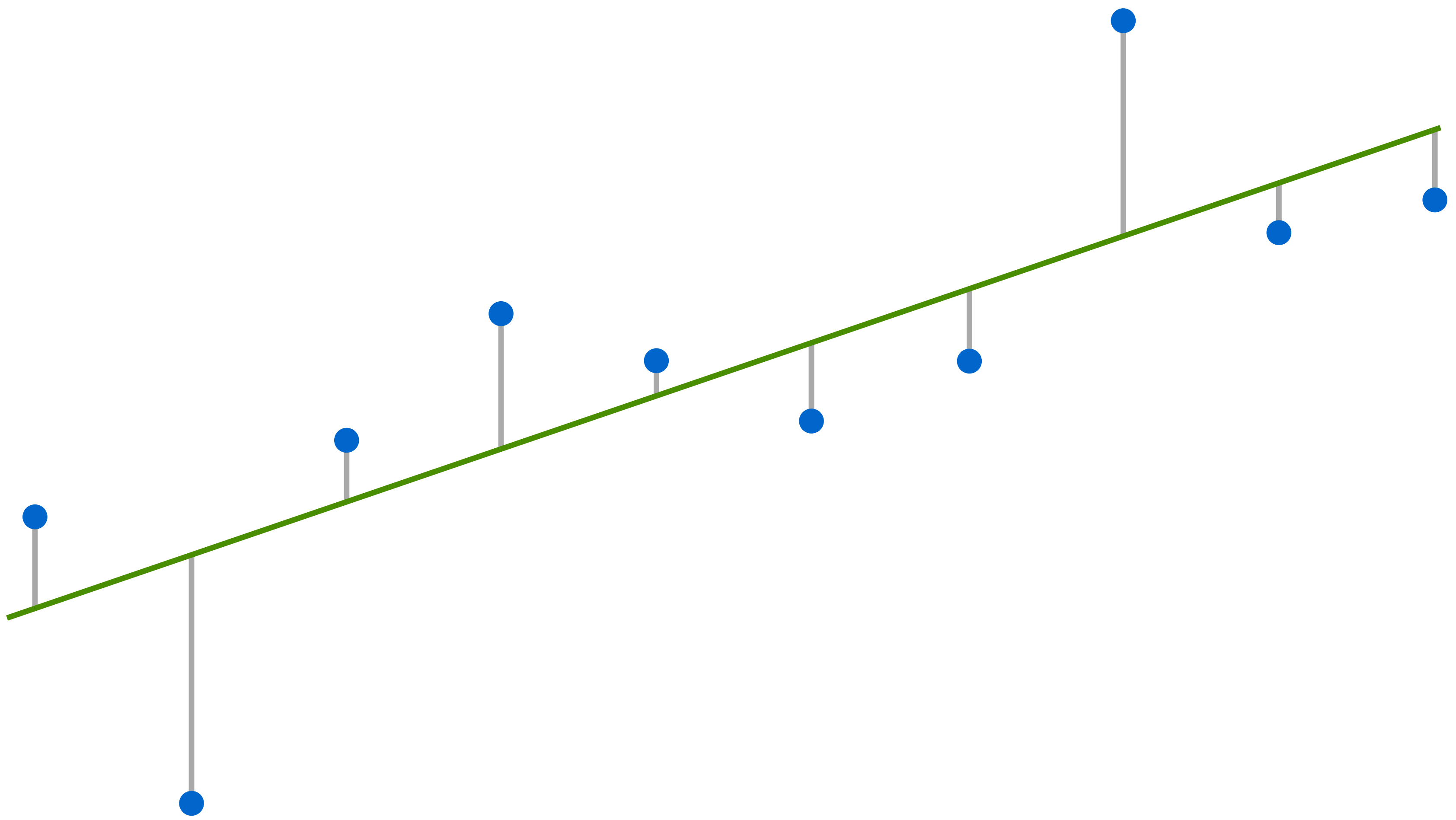


$$y_1 = \alpha + \beta x_1$$
$$y_2 = \alpha + \beta x_2$$
$$\dots$$
$$y_m = \alpha + \beta x_m$$

Datos: (x_1, y_1), (x_2, y_2),...,(x_n, y_n). Asumimos que las xs son correctas mientras que las ys tienen ruido.

Buscamos una recta de ajuste $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x} + \beta$ que minimice la suma de los cuadrados de las distancias verticales.

Mínimos cuadrados

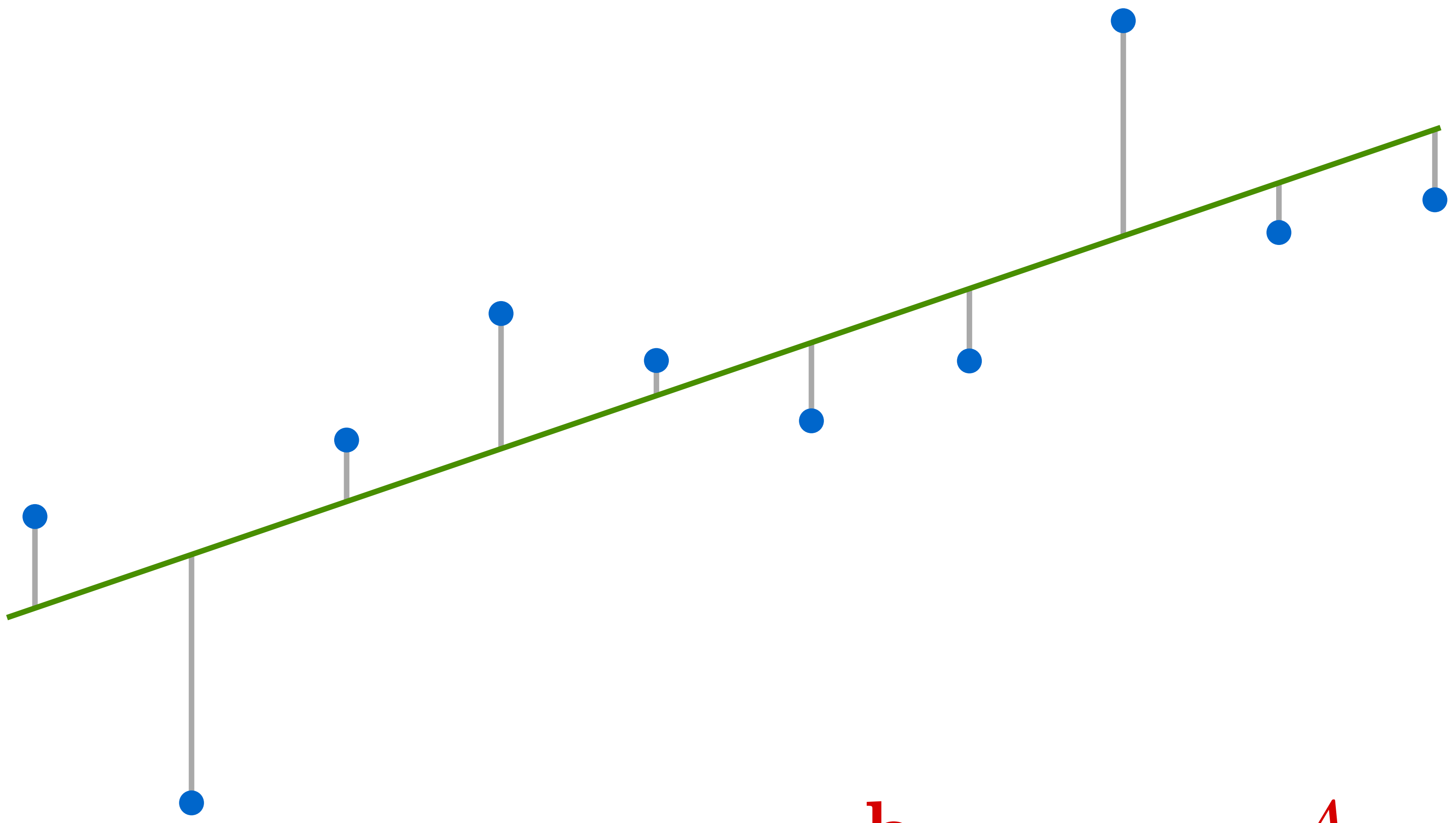


Datos: (x_1, y_1), (x_2, y_2),...,(x_n, y_n). Asumimos que las xs son correctas mientras que las ys tienen ruido.

Buscamos una recta de ajuste $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x} + \beta$ que minimice la suma de los cuadrados de las distancias verticales.

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha + \beta x_1 \\ y_2 &= \alpha + \beta x_2 \\ &\dots \\ y_m &= \alpha + \beta x_m \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Mínimos cuadrados

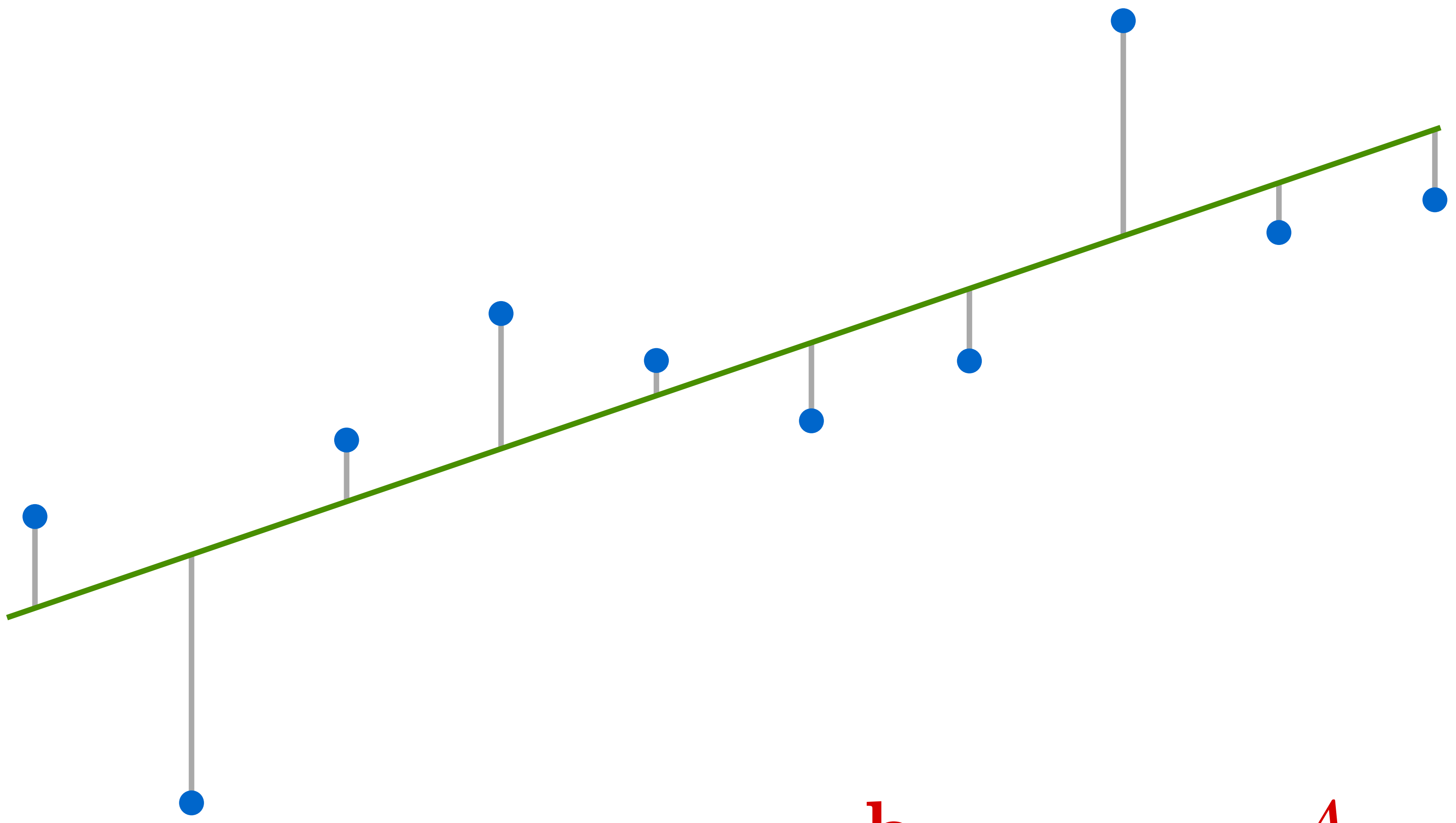


Datos: (x_1, y_1), (x_2, y_2),...,(x_n, y_n). Asumimos que las xs son correctas mientras que las ys tienen ruido.

Buscamos una recta de ajuste $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x} + \beta$ que minimice la suma de los cuadrados de las distancias verticales.

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha + \beta x_1 \\ y_2 &= \alpha + \beta x_2 \\ &\dots \\ y_m &= \alpha + \beta x_m \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \underset{\mathbf{b}}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}} = \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix}} \underset{\mathbf{x}}{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}$$

Mínimos cuadrados

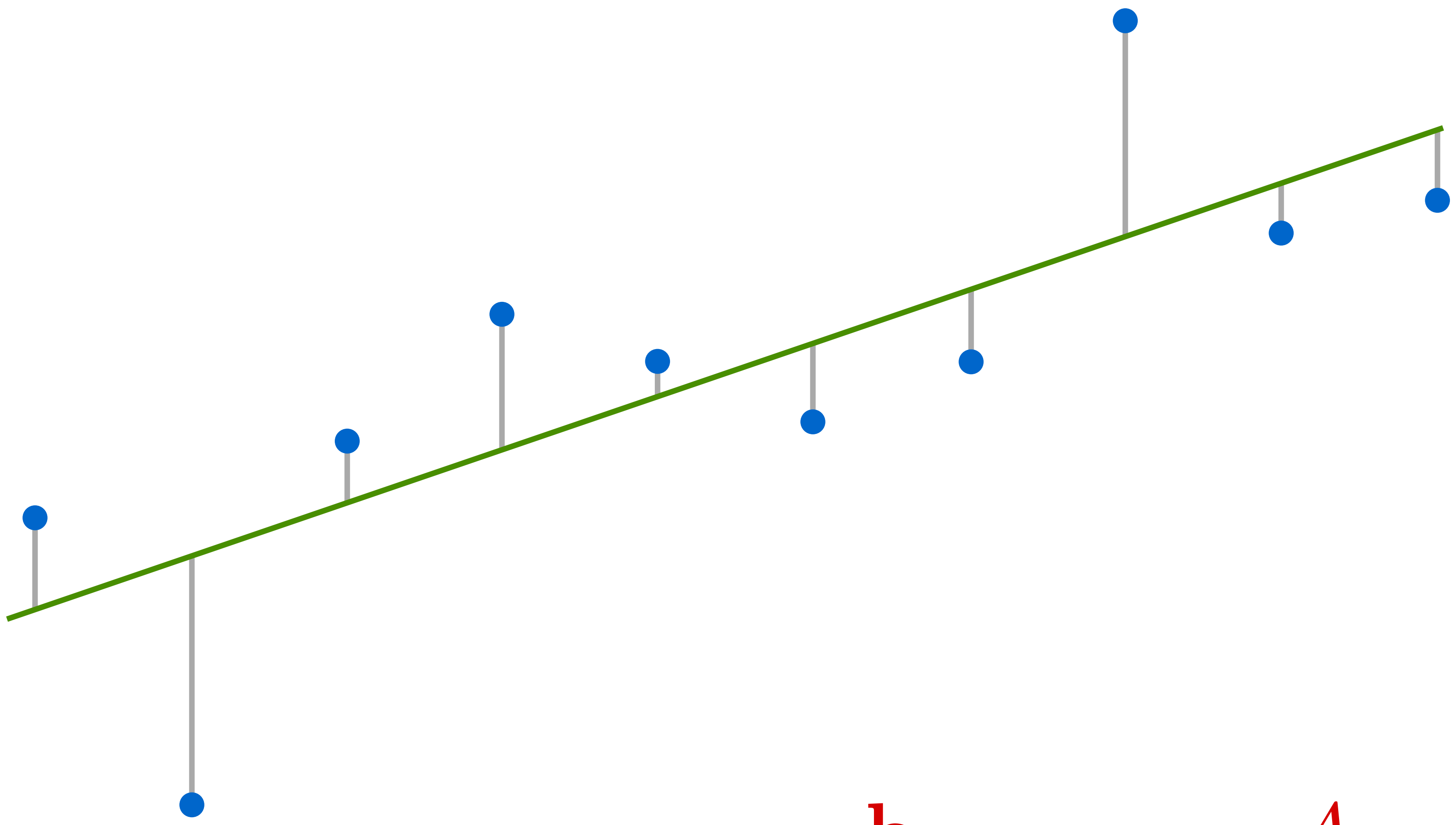


Datos: (x_1, y_1), (x_2, y_2),. . . ,(x_n, y_n). Asumimos que las xs son correctas mientras que las ys tienen ruido.

Buscamos una recta de ajuste $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x} + \beta$ que minimice la suma de los cuadrados de las distancias verticales.

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha + \beta x_1 \\ y_2 &= \alpha + \beta x_2 \\ &\dots \\ y_m &= \alpha + \beta x_m \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cccc} \mathbf{b} & & A & \mathbf{x}' \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{array}$$

Mínimos cuadrados



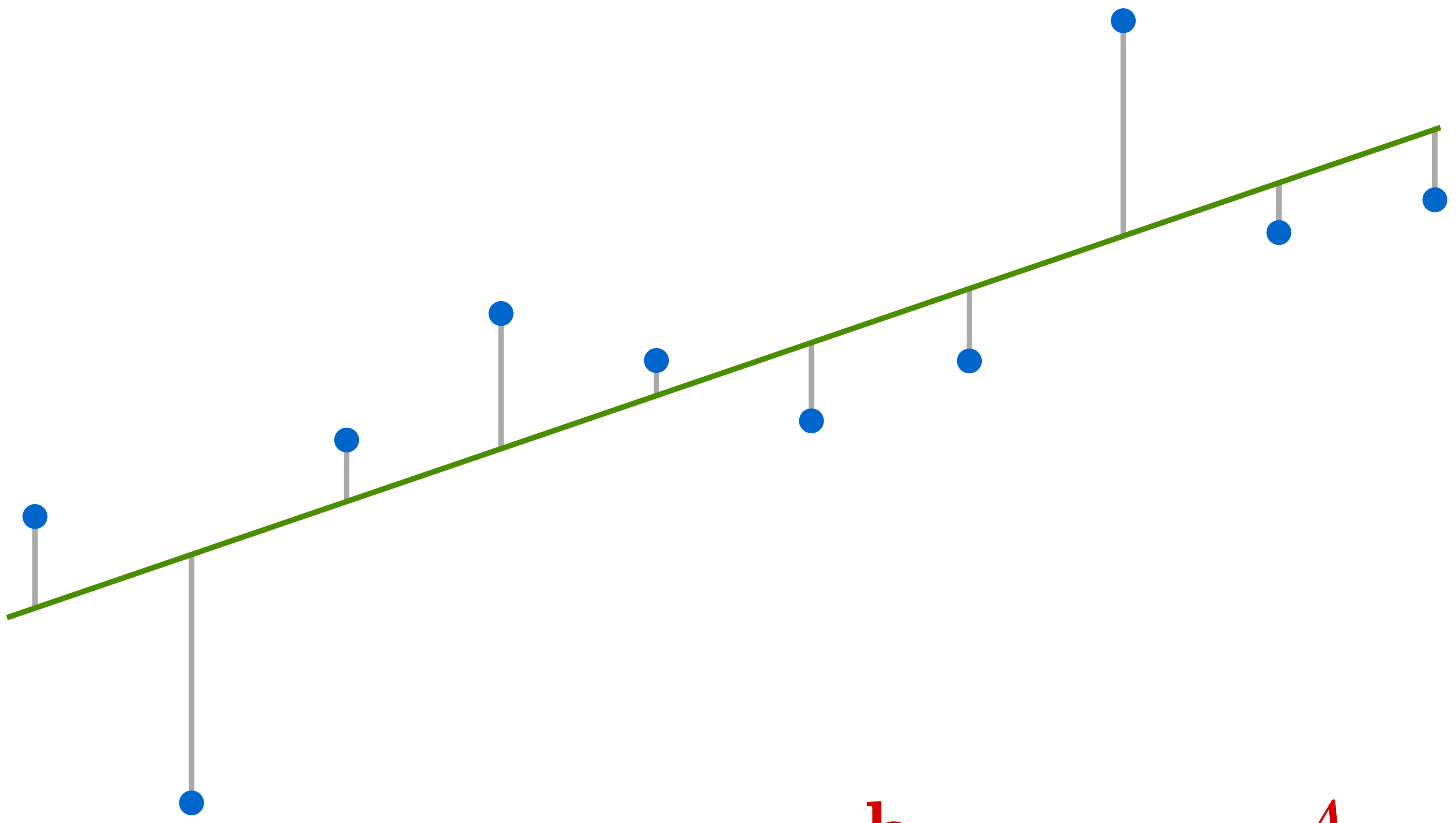
Datos: (x_1, y_1), (x_2, y_2),...,(x_n, y_n). Asumimos que las xs son correctas mientras que las ys tienen ruido.

Buscamos una recta de ajuste $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x} + \beta$ que minimice la suma de los cuadrados de las distancias verticales.

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha + \beta x_1 \\ y_2 &= \alpha + \beta x_2 \\ &\dots \\ y_m &= \alpha + \beta x_m \end{aligned} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} \mathbf{b} & & A & & \mathbf{x}' \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{array}$$

Resolver el sistema sobredeterminado $A\mathbf{x}' = \mathbf{b}$.

Mínimos cuadrados



Datos: (x_1, y_1), (x_2, y_2),...,(x_n, y_n).
Asumimos que las xs son correctas mientras que las ys tienen ruido.

Buscamos una recta de ajuste $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x} + \beta$ que minimice la suma de los cuadrados de las distancias verticales.

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha + \beta x_1 \\ y_2 &= \alpha + \beta x_2 \\ &\cdots \\ y_m &= \alpha + \beta x_m \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \overset{\mathbf{b}}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}} = \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix}} \overset{\mathbf{x}'}{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}$$

Resolver el sistema sobredeterminado $A\mathbf{x}' = \mathbf{b}$.
Encontrar una solución para $A\mathbf{x}' = \mathbf{b}_{\text{projCol}(A)}$ donde $\mathbf{b}_{\text{projCol}(A)}$ es $\mathbf{b}$ proyectado en el espacio de columnas de A.

Ejercicio

X	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75
Y	0.40	0.50	0.90	1.28	1.60	1.66	2.02

Utilizar una técnica de mínimos cuadrados para ajustar la tabla de datos a funciones de los tipos:

1. $y = a_0 + a_1 x$. Determinar a_0 y a_1, dar la ecuación de la función obtenida y calcular el vector residuo en la solución.
2. $2y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$. Determinar a_0, a_1, a_2, a_3, y a_4, dar la ecuación de la función obtenida y calcular el vector residuo en la solución.
3. $3y = a x^{\alpha}$. Determinar a y α, dar la ecuación de la función obtenida y calcular el vector residuo en la solución.
4. ¿Cuál de los tipos parece más adecuado? ¿Por qué?

Guia de estudio

Libro *Càlcul numèric: teoria i pràctica* de M. Grau Sánchez y M. Noguera Batlle.

- Conceptos y ejercicios resueltos: Capítulo 4, páginas 117–132 y 141–143.
- Problemas propuestos: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 13.
- Prácticas propuestas: Secciones 4.6.1 y 4.6.2.

Libro *Cálculo numérico* de M. Grau Sánchez y M. Noguera Batlle.

- Conceptos y ejercicios resueltos: Capítulo 4, páginas 105–117 y 127–128.
- Problemas propuestos: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 13.
- Prácticas propuestas: Secciones 4.6.1 y 4.6.2.

Libro *Cálculo científico con MATLAB y Octave* de A. Quarteroni y F. Saleri.

- Conceptos y ejercicios: Capítulo 5.