Computación Numérica

Tema 2. Álgebra lineal numérica (I): vectores, matrices y normas

Irene Parada

irene.parada@upc.edu

Departamento de Matemáticas

Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech

26 de febrero de 2024

Repaso

Breve recordatorio del Tema 1.2

- Coma fija vs. coma flotante.
- Norma IEEE-754: historia, definición, S, E, M.
- Norma IEEE-754: desviación del exponente.
- IEEE-754 precisión simple (32 bits): definición, conversión.
- IEEE-754 precisión doble (64 bits): definición, eps, realmax y realmin.
- El conjunto $F(\beta, t, L, U)$: definición, rango, mantisa y épsilon de la máquina.
- Aritmética en coma flotante. Teorema de las operaciones elementales en coma floatante.
- Problemas sensibles a las condiciones iniciales. Polinomio de Wilkinson.
- Problemas mal condicionados. Números de condición.
- Inestabilidad numérica.
- Pérdida de cifras significativas por cancelación.
- Reducir o evitar la propagación de errores. Regla de Horner.

Comentarios de las sesiones prácticas 1 y 2

- Para las cifras decimales correctas y significativas correctas has que usar `floor()` o `fix()`.
- `1e-6 = 10^-6`
- Signo del error absoluto y relativo: si se pone, ponerlo bien.
- `format`
- Peligros y usos del == y ~=; no confundirse con el redondeo en el formato.
- Evitar sobreescribir valores predefinidos (`eps`, `realmax`,...)
- Salida del bucle `while`.
- Explicaciones.

Comentarios de las sesiones prácticas 1 y 2

- Para las cifras decimales correctas y significativas correctas has que usar `floor()` o `fix()`.
- `1e-6 = 10^-6`
- Signo del error absoluto y relativo: si se pone, ponerlo bien.
- `format`
- Peligros y usos del == y ∼=; no confundirse con el redondeo en el formato.
- Evitar sobreescribir valores predefinidos (`eps`, `realmax`,...)
- Salida del bucle `while`.
- Explicaciones.

Practicar

Redondeo en IEEE 754

- Entre potencias consecutivas de 2 hay $2^{52} - 1$ números máquina equidistantes.

Redondeo en IEEE 754

- Entre potencias consecutivas de 2 hay $2^{52}-1$ números máquina equidistantes.

- Entre 2^k y 2^{k+1} los números máquina están separados $2^k/2^{52} = 2^k \cdot \mathsf{eps} = 2^{k-52}$.

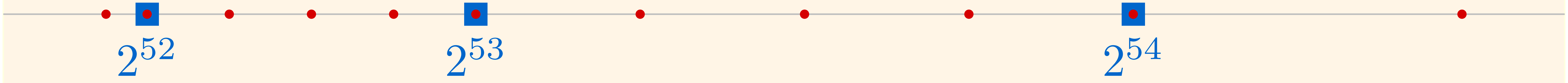
Parte del Ejercicio 1. Comprobar y argumentar que MATLAB no distingue entre 2^{53} y $2^{53}+1$.

Redondeo en IEEE 754

- Entre potencias consecutivas de 2 hay $2^{52}-1$ números máquina equidistantes.

- Entre 2^k y 2^{k+1} los números máquina están separados $2^k/2^{52} = 2^k \cdot \mathrm{eps} = 2^{k-52}$.

Parte del Ejercicio 1. Comprobar y argumentar que MATLAB no distingue entre 2^{53} y $2^{53}+1$.



Redondeo en IEEE 754

- Entre potencias consecutivas de 2 hay $2^{52}-1$ números máquina equidistantes.

- Entre 2^k y 2^{k+1} los números máquina están separados $2^k/2^{52} = 2^k \cdot \text{eps} = 2^{k-52}$.

Parte del Ejercicio 1. Comprobar y argumentar que MATLAB no distingue entre 2^{53} y $2^{53}+1$.

Redondeo en IEEE 754

- Entre potencias consecutivas de 2 hay $2^{52}-1$ números máquina equidistantes.

- Entre 2^k y 2^{k+1} los números máquina están separados $2^k/2^{52} = 2^k \cdot \text{eps} = 2^{k-52}$.

Parte del Ejercicio 1. Comprobar y argumentar que MATLAB no distingue entre 2^{53} y $2^{53}+1$.

Redondeo en IEEE 754

- Entre potencias consecutivas de 2 hay $2^{52}-1$ números máquina equidistantes.

- Entre 2^k y 2^{k+1} los números máquina están separados $2^k/2^{52} = 2^k \cdot \text{eps} = 2^{k-52}$.

Parte del Ejercicio 1. Comprobar y argumentar que MATLAB no distingue entre 2^{53} y $2^{53}+1$.

¿Qué pasa con $2^{53}+1$ y con $2^{53}+1+\text{eps}$?

Redondeo en IEEE 754

- Entre potencias consecutivas de 2 hay $2^{52}-1$ números máquina equidistantes.

- Entre 2^k y 2^{k+1} los números máquina están separados $2^k/2^{52} = 2^k \cdot \mathrm{eps} = 2^{k-52}$.

Parte del Ejercicio 1. Comprobar y argumentar que MATLAB no distingue entre 2^{53} y $2^{53}+1$.

¿Qué pasa con $2^{53}+1$ y con $2^{53}+1+\mathrm{eps}$?

$$2^{53}_{(2)} = 1.\underbrace{0000000000000000000000000000000000000000000000000000}_{\text{52 ceros de la mantisa}} \times 2^{53_{(2)}}$$

Redondeo en IEEE 754

- Entre potencias consecutivas de 2 hay $2^{52}-1$ números máquina equidistantes.

- Entre 2^k y 2^{k+1} los números máquina están separados $2^k/2^{52} = 2^k \cdot \mathrm{eps} = 2^{k-52}$.

Parte del Ejercicio 1. Comprobar y argumentar que MATLAB no distingue entre 2^{53} y $2^{53}+1$.

¿Qué pasa con $2^{53}+1$ y con $2^{53}+1+\mathrm{eps}$?

$2^{53}_{(2)} = 100000000000000000000000000000000000000000000000000000$

Redondeo en IEEE 754

- Entre potencias consecutivas de 2 hay $2^{52}-1$ números máquina equidistantes.

- Entre 2^k y 2^{k+1} los números máquina están separados $2^k/2^{52} = 2^k \cdot \text{eps} = 2^{k-52}$.

Parte del Ejercicio 1. Comprobar y argumentar que MATLAB no distingue entre 2^{53} y $2^{53}+1$.

¿Qué pasa con $2^{53}+1$ y con $2^{53}+1+$ eps?

$2^{53}_{(2)} = 100000000000000000000000000000000000000000000000000000$

$2 = 1.0000000000000000000000000000000000000000$

Redondeo en IEEE 754

- Entre potencias consecutivas de 2 hay $2^{52}-1$ números máquina equidistantes.

- Entre 2^k y 2^{k+1} los números máquina están separados $2^k/2^{52} = 2^k \cdot \text{eps} = 2^{k-52}$.

Parte del Ejercicio 1. Comprobar y argumentar que MATLAB no distingue entre 2^{53} y $2^{53}+1$.

¿Qué pasa con $2^{53}+1$ y con $2^{53}+1+\text{eps}$?

$2^{53}_{(2)} = 100000000000000000000000000000000000000000000000000000$

$2 = 1.0000000000\,...\,0000000000$

Redondeo en IEEE 754

- Entre potencias consecutivas de 2 hay $2^{52}-1$ números máquina equidistantes.

- Entre 2^k y 2^{k+1} los números máquina están separados $2^k/2^{52} = 2^k \cdot \text{eps} = 2^{k-52}$.

Parte del Ejercicio 1. Comprobar y argumentar que MATLAB no distingue entre 2^{53} y $2^{53}+1$.

¿Qué pasa con $2^{53}+1$ y con $2^{53}+1+\text{eps}$?

$$
\begin{array}{rl}
2^{53}_{(2)} = & 100000000000000000000000000000000000000000000000000000 \\
\oplus & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2 = 1.0000000000\ldots0000000000 \\
\hline
& 10000000000000000000000000000000000000000000000000000\boxed{0}\square.\square\square\square\square\square\square\ \ldots\ \square\square\square\square\square\square\square
\end{array}
$$

Redondeo en IEEE 754

- Entre potencias consecutivas de 2 hay $2^{52}-1$ números máquina equidistantes.

- Entre 2^k y 2^{k+1} los números máquina están separados $2^k/2^{52} = 2^k \cdot \text{eps} = 2^{k-52}$.

Parte del Ejercicio 1. Comprobar y argumentar que MATLAB no distingue entre 2^{53} y $2^{53}+1$.

¿Qué pasa con $2^{53}+1$ y con $2^{53}+1+\text{eps}$?

$$
\begin{array}{rl}
2^{53}_{(2)} = & 100000000000000000000000000000000000000000000000000000 \\
\oplus & \qquad\qquad\qquad\qquad 2 = 1.0000000000\ldots 0000000000 \\
\hline
 & 10000000000000000000000000000000000000000000000000000\boxed{0}\square.\square\square\square\square\square\square\square\ \ldots\ \square\square\square\square\square\square\square
\end{array}
$$

IEEE 754: en caso de empate, redondeo a par.

Redondeo en IEEE 754

- Entre potencias consecutivas de 2 hay $2^{52}-1$ números máquina equidistantes.

- Entre 2^k y 2^{k+1} los números máquina están separados $2^k/2^{52} = 2^k \cdot \text{eps} = 2^{k-52}$.

Parte del Ejercicio 1. Comprobar y argumentar que MATLAB no distingue entre 2^{53} y $2^{53}+1$.

¿Qué pasa con $2^{53}+1$ y con $2^{53}+1+\text{eps}$?

$$2^{53}_{(2)} = 10000000000000000000000000000000000000000000000000000$$

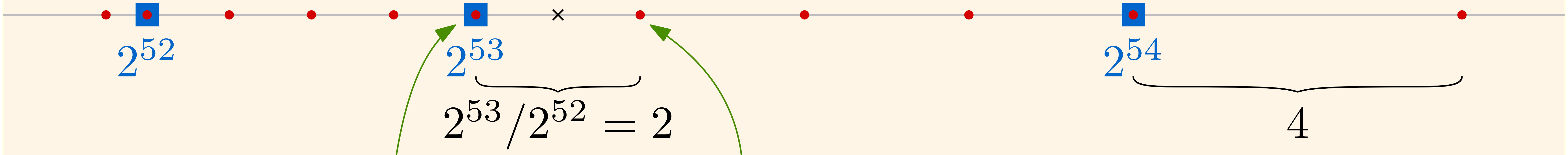
$$1 + \text{eps} = 1.0000000000\ldots0000000001$$

Redondeo en IEEE 754

- Entre potencias consecutivas de 2 hay $2^{52}-1$ números máquina equidistantes.

- Entre 2^k y 2^{k+1} los números máquina están separados $2^k/2^{52} = 2^k \cdot \mathsf{eps} = 2^{k-52}$.

Parte del Ejercicio 1. Comprobar y argumentar que MATLAB no distingue entre 2^{53} y $2^{53}+1$.



¿Qué pasa con $2^{53}+1$ y con $2^{53}+1+\mathsf{eps}$?

$$
\begin{array}{rl}
2^{53}_{(2)} = & 100000000000000000000000000000000000000000000000000000 \\
\oplus & \qquad\qquad\qquad\qquad 1 + \mathsf{eps} = 1.0000000000\ldots0000000001 \\
\hline
& 10000000000000000000000000000000000000000000000000000\boxed{1}\square.\square\square\square\square\square\square\square\ \ldots\ \square\square\square\square\square\square\square\square
\end{array}
$$

Álgebra Lineal Numérica

El objetivo principal del tema es el estudio de métodos computacionales básicos para el álgebra lineal.

- Vectores, matrices y normas.
- Resolución de sistemas lineales no homogéneos.
  - Métodos directos: eliminación gaussiana, método de Gauss-Jordan, descomposición LU, factorización QR.
  - Métodos iterativos: Jacobi, Gauss-Seidel y sobrerelajación.
  - Mínimos cuadrados.
- Cálculo de vectores y valores propios.
  - Métodos de la potencia.
  - Método QR.
  - Valores singulares.

Problemas numéricos

Ejemplo.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} 2^{-52}x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Problemas numéricos

Ejemplo.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathsf{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcl} 2^{-52}x_1 + 2x_2 & = & 4 \\ x_1 - x_2 & = & 1 \end{array}$$

Solución esperable:

$x_2 \approx 2$

$x_1 \approx 3$

$[3, 2]$

Problemas numéricos

Ejemplo.

Solución esperable:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} 2^{-52}x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &\approx 2 \\ x_1 &\approx 3 \end{aligned} \qquad [3, 2]$$

Recordemos.
- $\text{eps} = 2^{-52}$
- $2 + \text{eps} = 2$
- $4 - \text{eps} = 4$

Problemas numéricos

Ejemplo.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcl} 2^{-52}x_1 + 2x_2 & = & 4 \\ x_1 - x_2 & = & 1 \end{array}$$

Solución esperable:

$x_2 \approx 2$

$x_1 \approx 3$

$[3, 2]$

Recordemos.

- $\text{eps} = 2^{-52}$
- $2 + \text{eps} = 2$
- $4 - \text{eps} = 4$

Eliminación gaussiana sin pivotamiento.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 0 & -1 - \frac{2}{\text{eps}} & 1 - \frac{4}{\text{eps}} \end{array}\right)$$

Problemas numéricos

Ejemplo.

Solución esperable:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathsf{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} 2^{-52}x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &\approx 2 \\ x_1 &\approx 3 \end{aligned} \qquad [3, 2]$$

Recordemos.
- $\mathsf{eps} = 2^{-52}$
- $2 + \mathsf{eps} = 2$
- $4 - \mathsf{eps} = 4$

Eliminación gaussiana sin pivotamiento.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathsf{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} \mathsf{eps} & 2 & 4 \\ 0 & -1 - \frac{2}{\mathsf{eps}} & 1 - \frac{4}{\mathsf{eps}} \end{array}\right) \longrightarrow -(1 + \tfrac{2}{\mathsf{eps}})x_2 = 1 - \tfrac{4}{\mathsf{eps}}$$

Problemas numéricos

Ejemplo.

Solución esperable:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcl} 2^{-52}x_1 + 2x_2 & = & 4 \\ x_1 - x_2 & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_2 \approx 2 \\ x_1 \approx 3 \end{array} \qquad [3, 2]$$

Recordemos. ▶ $\text{eps} = 2^{-52}$ ▶ $2 + \text{eps} = 2$ ▶ $4 - \text{eps} = 4$

Eliminación gaussiana sin pivotamiento.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 0 & -1 - \frac{2}{\text{eps}} & 1 - \frac{4}{\text{eps}} \end{array}\right) \longrightarrow -(1 + \tfrac{2}{\text{eps}})x_2 = 1 - \tfrac{4}{\text{eps}}$$

$$\to (\text{eps} + 2)x_2 = -\text{eps} + 4$$

Problemas numéricos

Ejemplo.

Solución esperable:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathsf{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} 2^{-52}x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &\approx 2 \\ x_1 &\approx 3 \end{aligned} \qquad [3, 2]$$

Recordemos.

- $\mathsf{eps} = 2^{-52}$
- $2 + \mathsf{eps} = 2$
- $4 - \mathsf{eps} = 4$

Eliminación gaussiana sin pivotamiento.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathsf{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} \mathsf{eps} & 2 & 4 \\ 0 & -1 - \frac{2}{\mathsf{eps}} & 1 - \frac{4}{\mathsf{eps}} \end{array}\right) \longrightarrow -\left(1 + \frac{2}{\mathsf{eps}}\right)x_2 = 1 - \frac{4}{\mathsf{eps}}$$

$$\to (\mathsf{eps} + 2)x_2 = -\mathsf{eps} + 4$$

Problemas numéricos

Ejemplo.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} 2^{-52}x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Solución esperable:

$x_2 \approx 2$

$x_1 \approx 3$

$[3, 2]$

Recordemos. ▶ $\text{eps} = 2^{-52}$ ▶ $2 + \text{eps} = 2$ ▶ $4 - \text{eps} = 4$

Eliminación gaussiana sin pivotamiento.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 0 & -1 - \frac{2}{\text{eps}} & 1 - \frac{4}{\text{eps}} \end{array}\right) \to -(1 + \tfrac{2}{\text{eps}})x_2 = 1 - \tfrac{4}{\text{eps}}$$

$$\to (\text{eps} + 2)x_2 = -\text{eps} + 4$$

$$\to 2x_2 = 4$$

Problemas numéricos

Ejemplo.

Solución esperable:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcl} 2^{-52}x_1 + 2x_2 & = & 4 \\ x_1 - x_2 & = & 1 \end{array}$$

$x_2 \approx 2$

$x_1 \approx 3$

$[3, 2]$

Recordemos. ▶ $\text{eps} = 2^{-52}$ ▶ $2 + \text{eps} = 2$ ▶ $4 - \text{eps} = 4$

Eliminación gaussiana sin pivotamiento.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 0 & -1 - \frac{2}{\text{eps}} & 1 - \frac{4}{\text{eps}} \end{array}\right) \longrightarrow -\left(1 + \frac{2}{\text{eps}}\right)x_2 = 1 - \frac{4}{\text{eps}}$$

$$\to (\text{eps} + 2)x_2 = -\text{eps} + 4$$

$$\to 2x_2 = 4$$

$$\to x_2 = 2$$

Problemas numéricos

Ejemplo.

Solución esperable:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcl} 2^{-52}x_1 + 2x_2 & = & 4 \\ x_1 - x_2 & = & 1 \end{array}$$

$x_2 \approx 2$

$x_1 \approx 3$

$[3, 2]$

Recordemos.

- $\text{eps} = 2^{-52}$
- $2 + \text{eps} = 2$
- $4 - \text{eps} = 4$

Eliminación gaussiana sin pivotamiento.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 0 & -1 - \frac{2}{\text{eps}} & 1 - \frac{4}{\text{eps}} \end{array}\right)$$

$\rightarrow \text{eps} \cdot x_1 + 2x_2 = 4$

$\rightarrow -(1 + \frac{2}{\text{eps}})x_2 = 1 - \frac{4}{\text{eps}}$

$\rightarrow (\text{eps} + 2)x_2 = -\text{eps} + 4$

$\rightarrow 2x_2 = 4$

$\rightarrow x_2 = 2$

Problemas numéricos

Ejemplo.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcl} 2^{-52}x_1 + 2x_2 & = & 4 \\ x_1 - x_2 & = & 1 \end{array}$$

Solución esperable:

$x_2 \approx 2$

$x_1 \approx 3$

$[3, 2]$

Recordemos.

- $\text{eps} = 2^{-52}$
- $2 + \text{eps} = 2$
- $4 - \text{eps} = 4$

Eliminación gaussiana sin pivotamiento.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 0 & -1 - \frac{2}{\text{eps}} & 1 - \frac{4}{\text{eps}} \end{array}\right)$$

$\to \text{eps} \cdot x_1 + 2x_2 = 4$

$\to \text{eps} \cdot x_1 = 0$

$\to -(1 + \frac{2}{\text{eps}})x_2 = 1 - \frac{4}{\text{eps}}$

$\to (\text{eps} + 2)x_2 = -\text{eps} + 4$

$\to 2x_2 = 4$

$\to x_2 = 2$

Problemas numéricos

Ejemplo.

Solución esperable:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} 2^{-52}x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &\approx 2 \\ x_1 &\approx 3 \end{aligned} \qquad [3, 2]$$

Recordemos.

- $\text{eps} = 2^{-52}$
- $2 + \text{eps} = 2$
- $4 - \text{eps} = 4$

Eliminación gaussiana sin pivotamiento.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 0 & -1 - \frac{2}{\text{eps}} & 1 - \frac{4}{\text{eps}} \end{array}\right)$$

$$\text{eps} \cdot x_1 + 2x_2 = 4$$

$$\to \text{eps} \cdot x_1 = 0 \to x_1 = 0$$

$$\to -\left(1 + \frac{2}{\text{eps}}\right)x_2 = 1 - \frac{4}{\text{eps}}$$

$$\to (\text{eps} + 2)x_2 = -\text{eps} + 4$$

$$\to 2x_2 = 4$$

$$\to x_2 = 2$$

Problemas numéricos

Ejemplo.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathsf{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcl} 2^{-52}x_1 + 2x_2 & = & 4 \\ x_1 - x_2 & = & 1 \end{array}$$

Solución esperable:

$x_2 \approx 2$

$x_1 \approx 3$ $\quad [3, 2]$

Recordemos.
- $\mathsf{eps} = 2^{-52}$
- $2 + \mathsf{eps} = 2$
- $4 - \mathsf{eps} = 4$

Eliminación gaussiana sin pivotamiento.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathsf{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} \mathsf{eps} & 2 & 4 \\ 0 & -1 - \frac{2}{\mathsf{eps}} & 1 - \frac{4}{\mathsf{eps}} \end{array}\right)$$

$\to \mathsf{eps} \cdot x_1 + 2x_2 = 4$

$\to \mathsf{eps} \cdot x_1 = 0 \to x_1 = 0$

$\to -(1 + \frac{2}{\mathsf{eps}})x_2 = 1 - \frac{4}{\mathsf{eps}}$

$\to (\mathsf{eps} + 2)x_2 = -\mathsf{eps} + 4$

$\to 2x_2 = 4$

$\to x_2 = 2$

Solución obtenida: $[0, 2]$ ☹

Problemas numéricos

Ejemplo.

Solución esperable:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} 2^{-52}x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &\approx 2 \\ x_1 &\approx 3 \end{aligned} \qquad [3, 2]$$

Recordemos.
- $\text{eps} = 2^{-52}$
- $2 + \text{eps} = 2$
- $4 - \text{eps} = 4$

Eliminación gaussiana con pivotamiento parcial.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Problemas numéricos

Ejemplo.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathsf{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} 2^{-52}x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Solución esperable:

$x_2 \approx 2$

$x_1 \approx 3$

$[3, 2]$

Recordemos.
- $\mathsf{eps} = 2^{-52}$
- $2 + \mathsf{eps} = 2$
- $4 - \mathsf{eps} = 4$

Eliminación gaussiana con pivotamiento parcial.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathsf{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ \mathsf{eps} & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Problemas numéricos

Ejemplo.

Solución esperable:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathsf{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} 2^{-52}x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &\approx 2 \\ x_1 &\approx 3 \end{aligned} \qquad [3, 2]$$

Recordemos.

- $\mathsf{eps} = 2^{-52}$
- $2 + \mathsf{eps} = 2$
- $4 - \mathsf{eps} = 4$

Eliminación gaussiana con pivotamiento parcial.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathsf{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ \mathsf{eps} & 2 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 + \mathsf{eps} & 4 - \mathsf{eps} \end{array}\right)$$

Problemas numéricos

Ejemplo.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathsf{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} 2^{-52}x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Solución esperable:

$x_2 \approx 2$

$x_1 \approx 3$

$[3, 2]$

Recordemos.
- $\mathsf{eps} = 2^{-52}$
- $2 + \mathsf{eps} = 2$
- $4 - \mathsf{eps} = 4$

Eliminación gaussiana con pivotamiento parcial.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathsf{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ \mathsf{eps} & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2+\mathsf{eps} & 4-\mathsf{eps} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Problemas numéricos

Ejemplo.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} 2^{-52}x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Solución esperable:

$x_2 \approx 2$

$x_1 \approx 3$

$[3, 2]$

Recordemos.

- $\text{eps} = 2^{-52}$
- $2 + \text{eps} = 2$
- $4 - \text{eps} = 4$

Eliminación gaussiana con pivotamiento parcial.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ \text{eps} & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2+\text{eps} & 4-\text{eps} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \to x_2 = 2$$

Problemas numéricos

Ejemplo.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcl} 2^{-52}x_1 + 2x_2 & = & 4 \\ x_1 - x_2 & = & 1 \end{array}$$

Solución esperable:

$x_2 \approx 2$

$x_1 \approx 3$

$[3, 2]$

Recordemos.
- $\text{eps} = 2^{-52}$
- $2 + \text{eps} = 2$
- $4 - \text{eps} = 4$

Eliminación gaussiana con pivotamiento parcial.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ \text{eps} & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2+\text{eps} & 4-\text{eps} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to x_1 - x_2 = 1 \\ \to x_2 = 2 \end{array}$$

Problemas numéricos

Ejemplo.

Solución esperable:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathsf{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} 2^{-52}x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &\approx 2 \\ x_1 &\approx 3 \end{aligned} \qquad [3, 2]$$

Recordemos. ▶ $\mathsf{eps} = 2^{-52}$ ▶ $2 + \mathsf{eps} = 2$ ▶ $4 - \mathsf{eps} = 4$

Eliminación gaussiana con pivotamiento parcial.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathsf{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ \mathsf{eps} & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2+\mathsf{eps} & 4-\mathsf{eps} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to x_1 - x_2 = 1 \to x_1 = 3 \\ \to x_2 = 2 \end{array}$$

Problemas numéricos

Ejemplo.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathrm{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcl} 2^{-52}x_1 + 2x_2 & = & 4 \\ x_1 - x_2 & = & 1 \end{array}$$

Solución esperable:

$x_2 \approx 2$

$x_1 \approx 3$

$[3, 2]$

Recordemos.

- $\mathrm{eps} = 2^{-52}$
- $2 + \mathrm{eps} = 2$
- $4 - \mathrm{eps} = 4$

Eliminación gaussiana con pivotamiento parcial.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathrm{eps} & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ \mathrm{eps} & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2+\mathrm{eps} & 4-\mathrm{eps} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to x_1 - x_2 = 1 \to x_1 = 3 \\ \to x_2 = 2 \end{array}$$

Solución obtenida: $[3, 2]$

☺

Vectores, Matrices y Normas

Notación

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A = (a_{ij}) \text{ con } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^t = (u_i)^t \text{ con } 1 \leq i \leq n.$$

Producto escalar de vectores

Definición: Producto escalar

El producto escalar es una función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y que verifica las siguientes propiedades:

- Definida positiva: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$.
- No degenerada: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ si y solo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- Hermítica (simétrica en $\mathbb{R}$): $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$.
- Lineal por la izquierda: $\langle \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ y lineal conjugada por la derecha: $\langle \mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \rangle = \bar{\alpha}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \bar{\beta}\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$.

Producto escalar de vectores

Definición: Producto escalar

El producto escalar es una función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y que verifica las siguientes propiedades:

- Definida positiva: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$.
- No degenerada: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ si y solo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- Hermítica (simétrica en $\mathbb{R}$): $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$.
- Lineal por la izquierda: $\langle \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ y lineal conjugada por la derecha: $\langle \mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \rangle = \bar{\alpha}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \bar{\beta}\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$.

Conjugado complejo: cambio de signo de la componente imaginaria.

Producto escalar de vectores

Definición: Producto escalar

El producto escalar es una función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y que verifica las siguientes propiedades:

- Definida positiva: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$.
- No degenerada: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ si y solo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- Hermítica (simétrica en $\mathbb{R}$): $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$.
- Lineal por la izquierda: $\langle \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ y lineal conjugada por la derecha: $\langle \mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \rangle = \bar{\alpha}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \bar{\beta}\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$.

Conjugado complejo: cambio de signo de la componente imaginaria.

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$.

Producto escalar de vectores

Definición: Producto escalar

El producto escalar es una función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y que verifica las siguientes propiedades:

- Definida positiva: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$.
- No degenerada: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ si y solo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- Hermítica (simétrica en $\mathbb{R}$): $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$.
- Lineal por la izquierda: $\langle \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ y lineal conjugada por la derecha: $\langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w} \rangle = \bar{\alpha} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \bar{\beta} \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$.

Conjugado complejo: cambio de signo de la componente imaginaria.

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$.

Usaremos: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u^t v$.

Normas vectoriales

Definición: Norma de un vector

Una norma es una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, que denotaremos como $\|\cdot\|$, que verifica las siguientes propiedades:

- No negatividad: $\|\mathbf{u}\| \geq 0$,
- además $\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- Homogeneidad: $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$ para $k \in \mathbb{R}$.
- Desigualdad triangular: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Normas vectoriales

Definición: Norma de un vector

Una norma es una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, que denotaremos como $\|\cdot\|$, que verifica las siguientes propiedades:

Se puede derivar del resto:
$0 = \|\mathbf{0}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|-\mathbf{x}\| = 2\|\mathbf{x}\|$,
de donde $\|\mathbf{x}\| \geq 0$

- No negatividad: $\|\mathbf{u}\| \geq 0$,
- además $\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- Homogeneidad: $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$ para $k \in \mathbb{R}$.
- Desigualdad triangular: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Normas vectoriales

Definición: Norma de un vector

Una norma es una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, que denotaremos como $\|\cdot\|$, que verifica las siguientes propiedades:

- No negatividad: $\|\mathbf{u}\| \geq 0$, $\longrightarrow$ Se puede derivar del resto: $0 = \|\mathbf{0}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|-\mathbf{x}\| = 2\|\mathbf{x}\|$, de donde $\|\mathbf{x}\| \geq 0$
- además $\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- Homogeneidad: $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$ para $k \in \mathbb{R}$.
- Desigualdad triangular: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Cada producto escalar tiene asociada una norma: $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$.
En nuestro caso es la norma euclídea (canónica) $\|\mathbf{u}\|_2$.

Normas vectoriales

Definición: Norma de un vector

Una norma es una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, que denotaremos como $\|\cdot\|$, que verifica las siguientes propiedades:

- No negatividad: $\|\mathbf{u}\| \geq 0$, $\longrightarrow$ Se puede derivar del resto: $0 = \|\mathbf{0}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \| - \mathbf{x}\| = 2\|\mathbf{x}\|$, de donde $\|\mathbf{x}\| \geq 0$
- además $\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- Homogeneidad: $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$ para $k \in \mathbb{R}$.
- Desigualdad triangular: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Cada producto escalar tiene asociada una norma: $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$.
En nuestro caso es la norma euclídea (canónica) $\|\mathbf{u}\|_2$.

- Cauchy–Schwarz: $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|_2 \cdot \|\mathbf{v}\|_2$.

Normas vectoriales

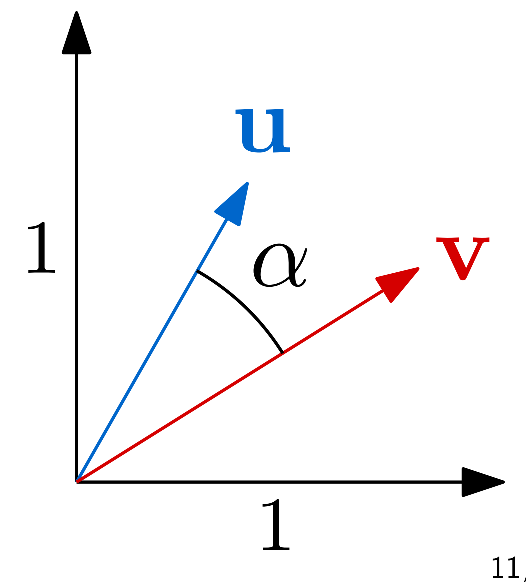
Definición: Norma de un vector

Una norma es una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, que denotaremos como $\|\cdot\|$, que verifica las siguientes propiedades:

- No negatividad: $\|\mathbf{u}\| \geq 0$, $\longrightarrow$ Se puede derivar del resto: $0 = \|\mathbf{0}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|-\mathbf{x}\| = 2\|\mathbf{x}\|$, de donde $\|\mathbf{x}\| \geq 0$
- además $\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- Homogeneidad: $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$ para $k \in \mathbb{R}$.
- Desigualdad triangular: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Cada producto escalar tiene asociada una norma: $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$.
En nuestro caso es la norma euclídea (canónica) $\|\mathbf{u}\|_2$.

- Cauchy–Schwarz: $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|_2 \cdot \|\mathbf{v}\|_2$.



Interpretación geométrica: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}|| \cos \alpha$

Normas vectoriales

Sea $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ un vector en $\mathbb{R}^n$.

- Norma 1: $\|\mathbf{u}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$.

Normas vectoriales

Sea $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ un vector en $\mathbb{R}^n$.

- Norma 1: $\|\mathbf{u}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$.
- Norma 2: $\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$.

Normas vectoriales

Sea $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ un vector en $\mathbb{R}^n$.

- Norma 1: $\|\mathbf{u}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$.
- Norma 2: $\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$.
- Norma p: $\|\mathbf{u}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p}$.

Normas vectoriales

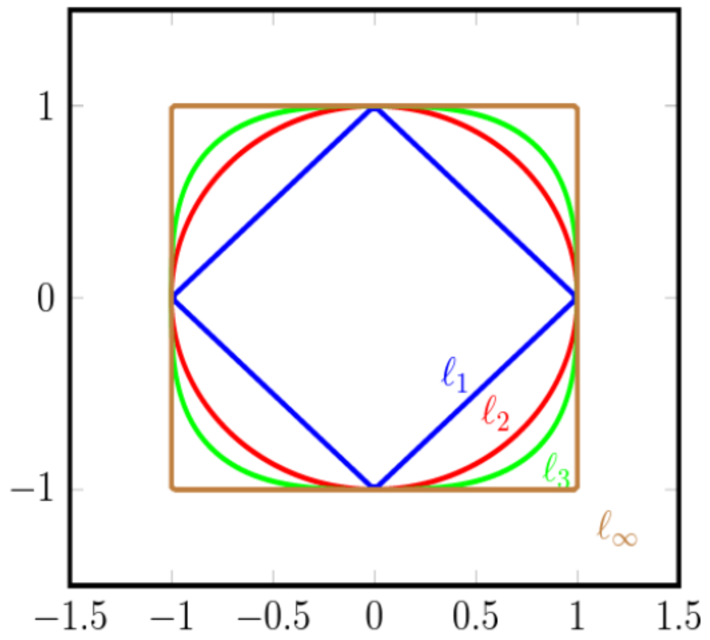
Sea $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ un vector en $\mathbb{R}^n$.

- Norma 1: $\|\mathbf{u}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$.
- Norma 2: $\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$.
- Norma p: $\|\mathbf{u}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p}$.
- Norma infinito: $\|\mathbf{u}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|$.

Normas vectoriales

Sea $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ un vector en $\mathbb{R}^n$.

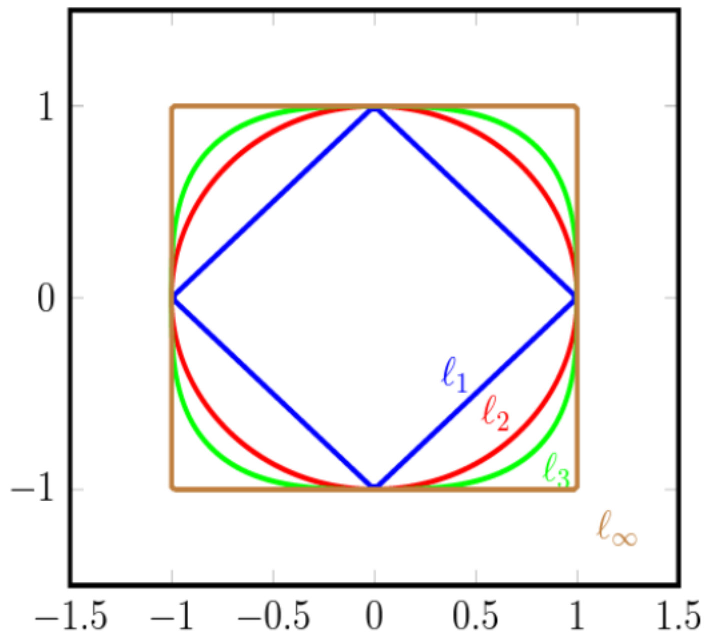
- Norma 1: $\|\mathbf{u}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$.
- Norma 2: $\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$.
- Norma p: $\|\mathbf{u}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p}$.
- Norma infinito: $\|\mathbf{u}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|$.



Normas vectoriales

Sea $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ un vector en $\mathbb{R}^n$.

- Norma 1: $\|\mathbf{u}\|_1 = \sum_{i=1}^n |u_i|$.
- Norma 2: $\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$.
- Norma p: $\|\mathbf{u}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |u_i|^p}$.
- Norma infinito: $\|\mathbf{u}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |u_i|$.

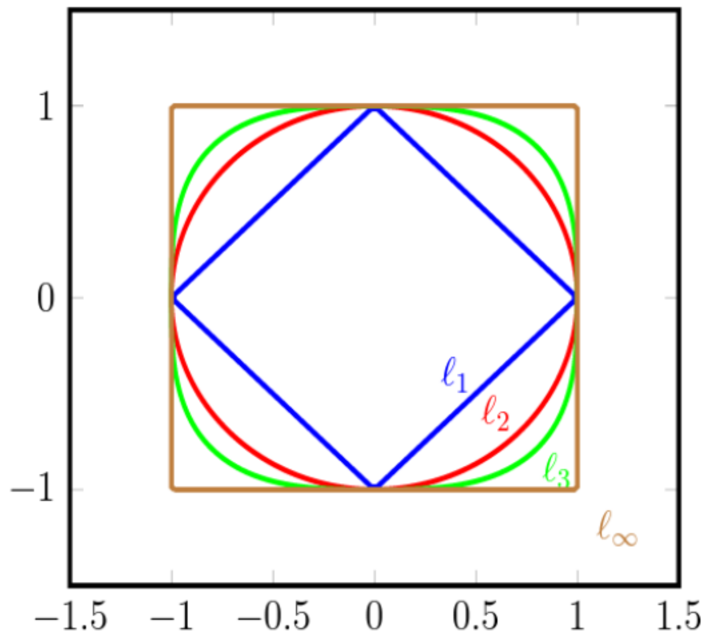


Las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes, lo que significa que para cualquier par $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ existen constantes $c_{ab}, C_{ab} > 0$ tales que
$c_{ab}\|\mathbf{u}\|_a \leq \|\mathbf{u}\|_b \leq C_{ab}\|\mathbf{u}\|_a$, $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

Normas vectoriales

Sea $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ un vector en $\mathbb{R}^n$.

- Norma 1: $\|\mathbf{u}\|_1 = \sum_{i=1}^n |u_i|$.
- Norma 2: $\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$.
- Norma p: $\|\mathbf{u}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |u_i|^p}$.
- Norma infinito: $\|\mathbf{u}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|$.



Las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes, lo que significa que para cualquier par $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ existen constantes $c_{ab}, C_{ab} > 0$ tales que
$c_{ab}\|\mathbf{u}\|_a \leq \|\mathbf{u}\|_b \leq C_{ab}\|\mathbf{u}\|_a$, $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

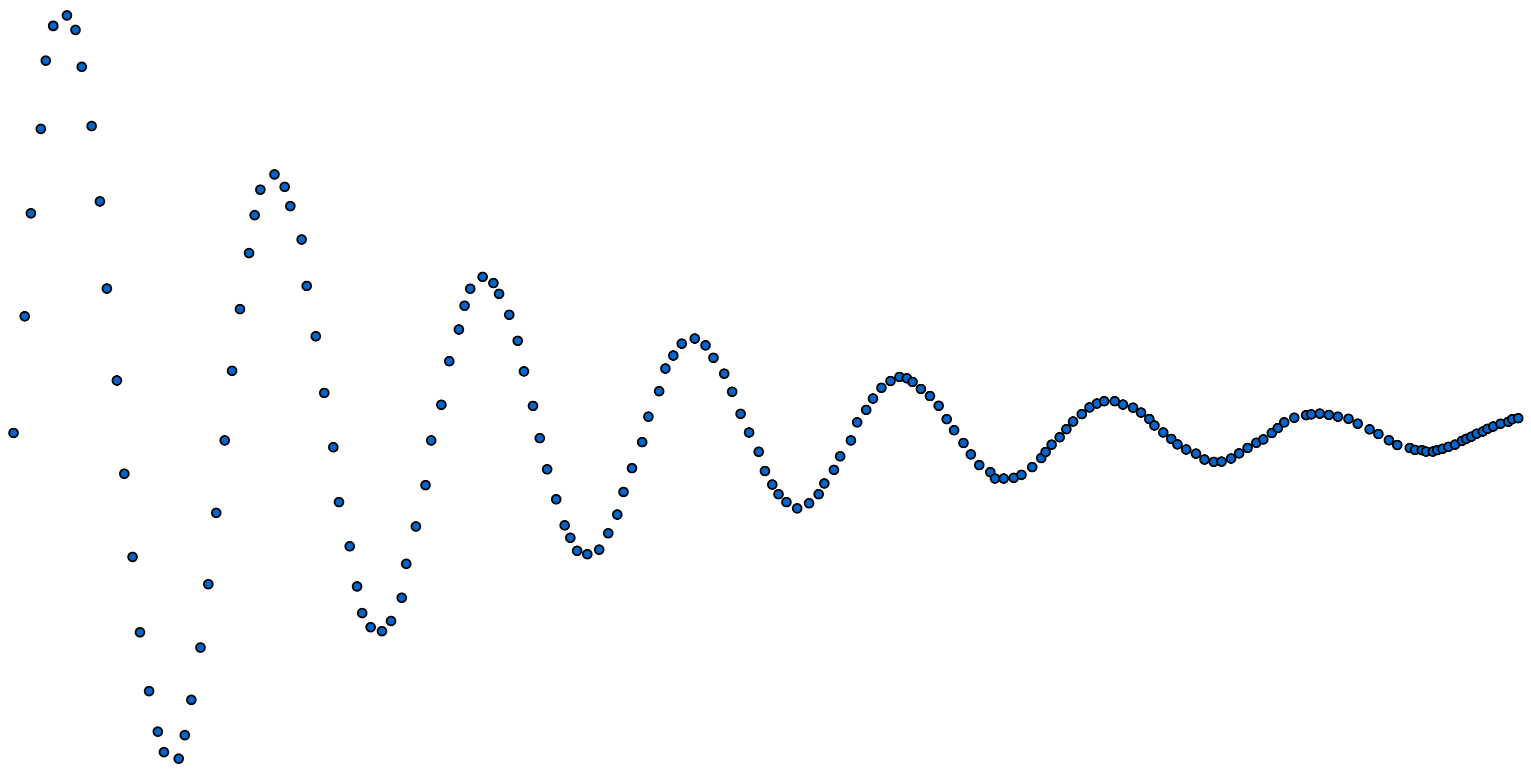
De hecho, en $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes (generan la misma topología, es decir, mismos conjuntos abiertos).

Convergencia de sucessiones de vectores

Una sucesión $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k=1,\dots,\infty}$ de vectores en $\mathbb{R}^n$ se dice que converge a $\mathbf{x}$ si, dado un ε, existe un n tal que

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| < \varepsilon \quad k > n$$

y se escribe $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$.



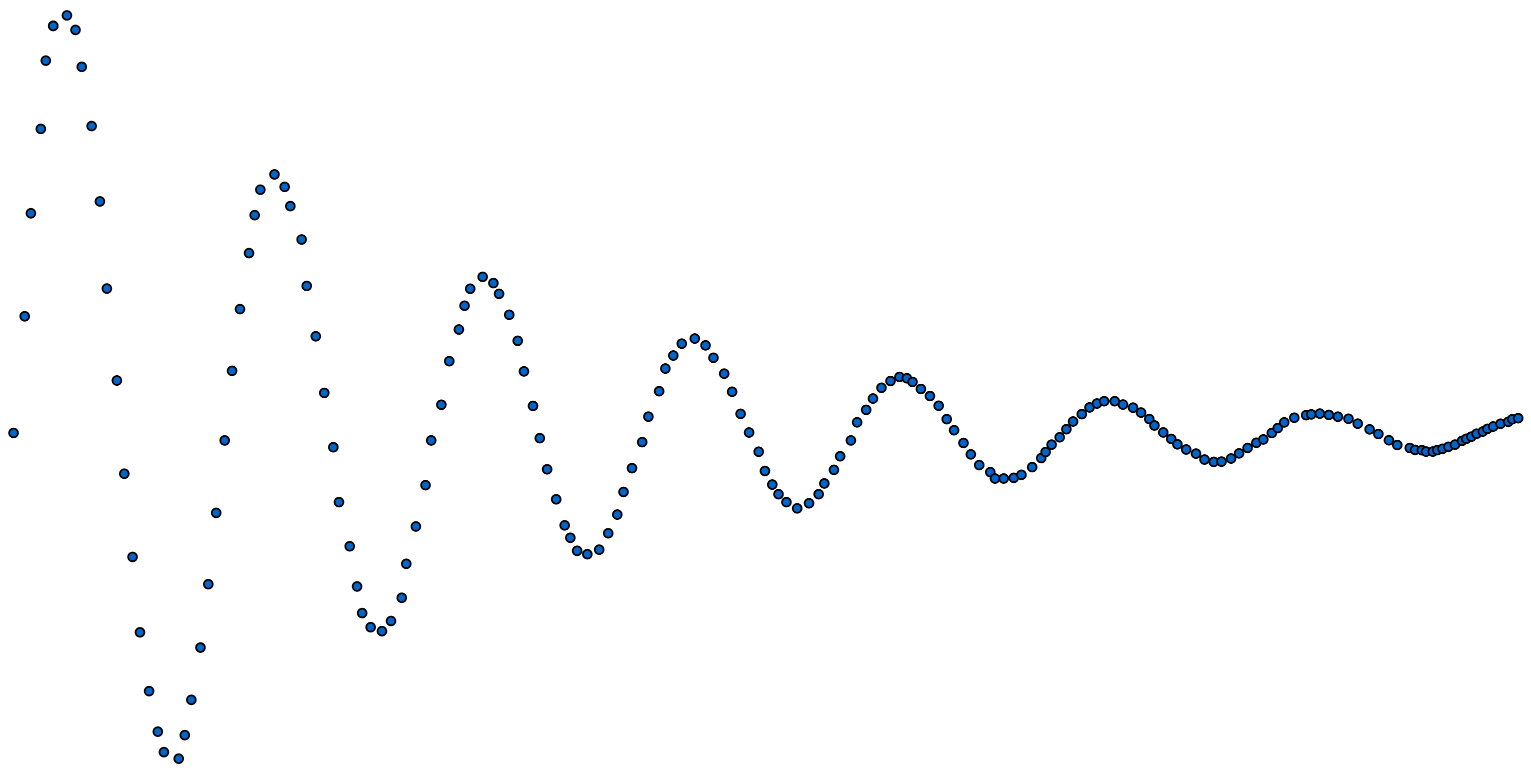
Convergencia de sucesiones de vectores

Una sucesión $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k=1,\ldots,\infty}$ de vectores en $\mathbb{R}^n$ se dice que converge a $\mathbf{x}$ si, dado un ε, existe un n tal que

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| < \varepsilon \quad k > n$$

y se escribe $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$.

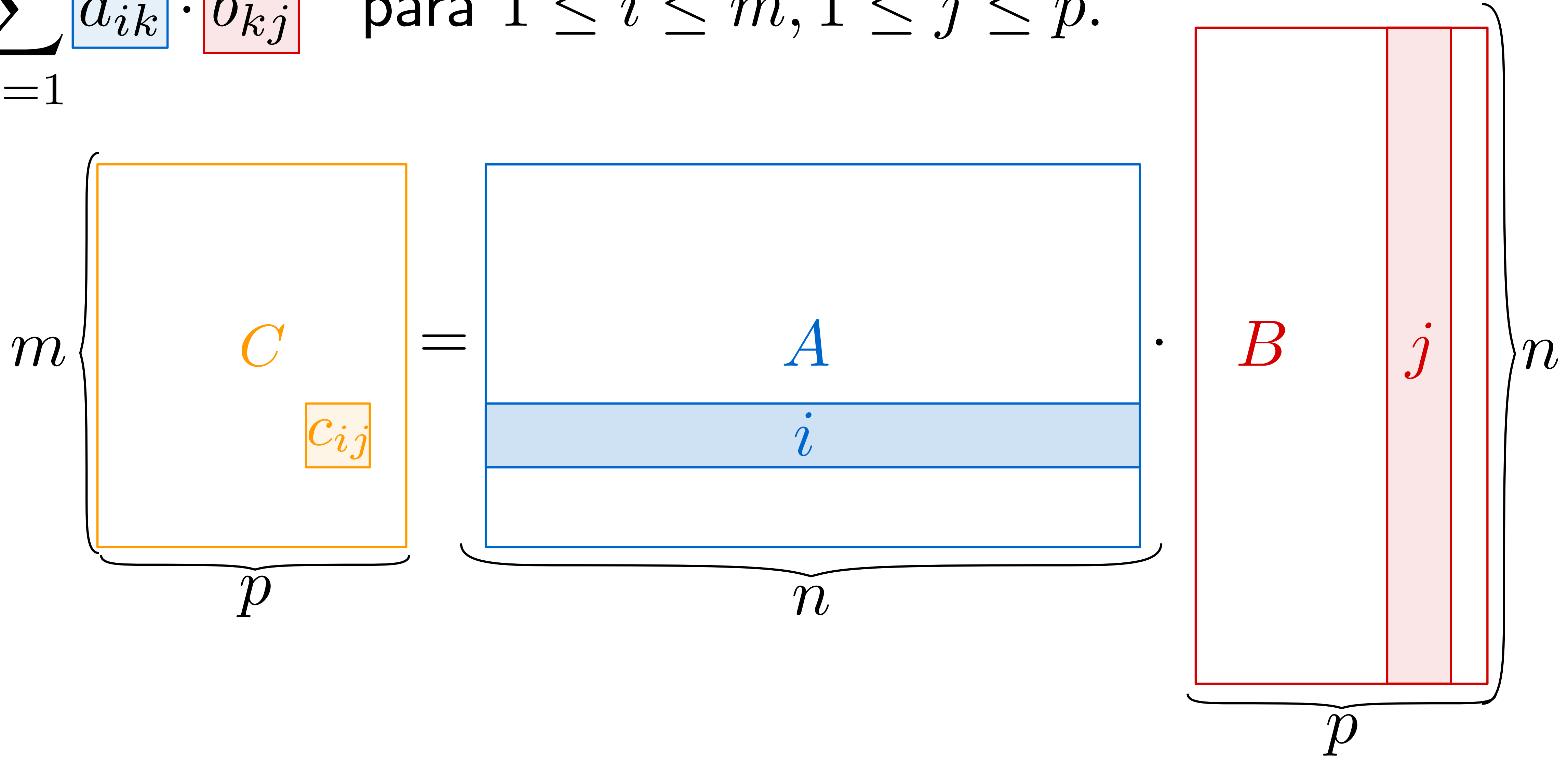
Convergencia por componentes: $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$.



Multiplicación y determinante de matrices

- Sean A una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times p$, la multiplicación de matrices $C = A \cdot B$ se define como:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \boxed{a_{ik}} \cdot \boxed{b_{kj}} \quad \text{para } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p.$$

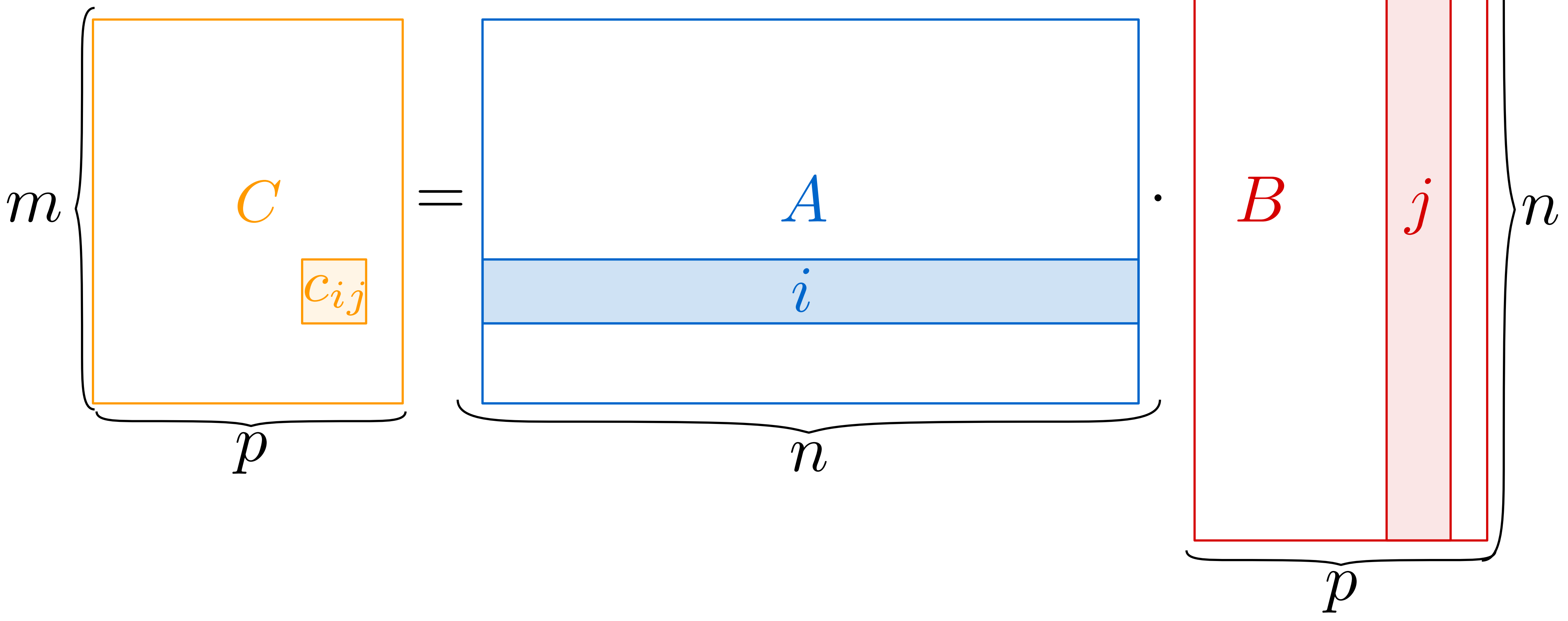


Multiplicación y determinante de matrices

- Sean A una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times p$, la multiplicación de matrices $C = A \cdot B$ se define como:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \boxed{a_{ik}} \cdot \boxed{b_{kj}} \quad \text{para } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p.$$

- Complejidad computacional.



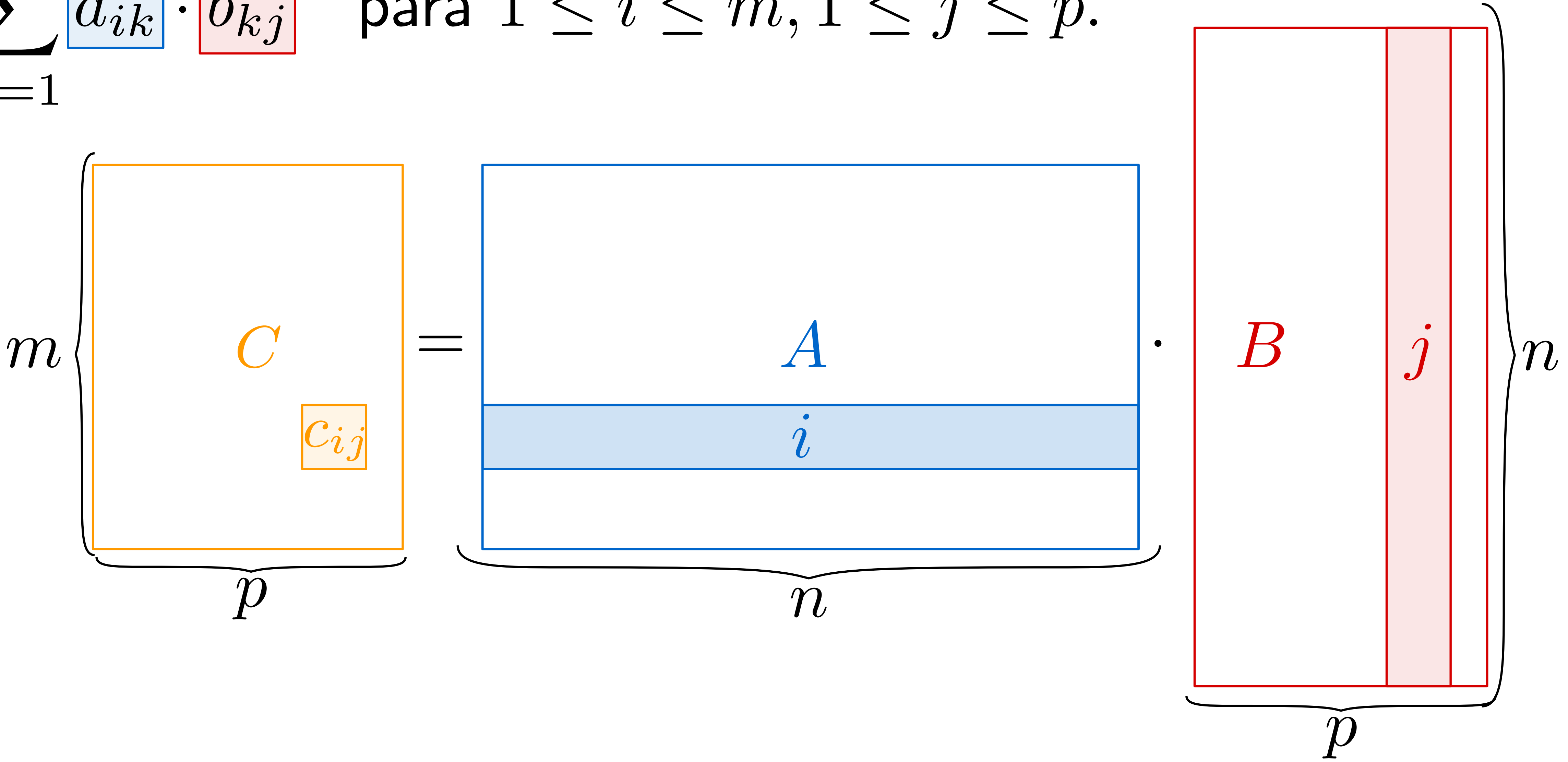
Multiplicación y determinante de matrices

- Sean A una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times p$, la multiplicación de matrices $C = A \cdot B$ se define como:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \boxed{a_{ik}} \cdot \boxed{b_{kj}} \quad \text{para } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p.$$

- Complejidad computacional.

Número de operaciones:
mnp multiplicaciones,
$mnp - mp$ sumas
(algoritmo simple).
Total: $\mathcal{O}(mnp)$.



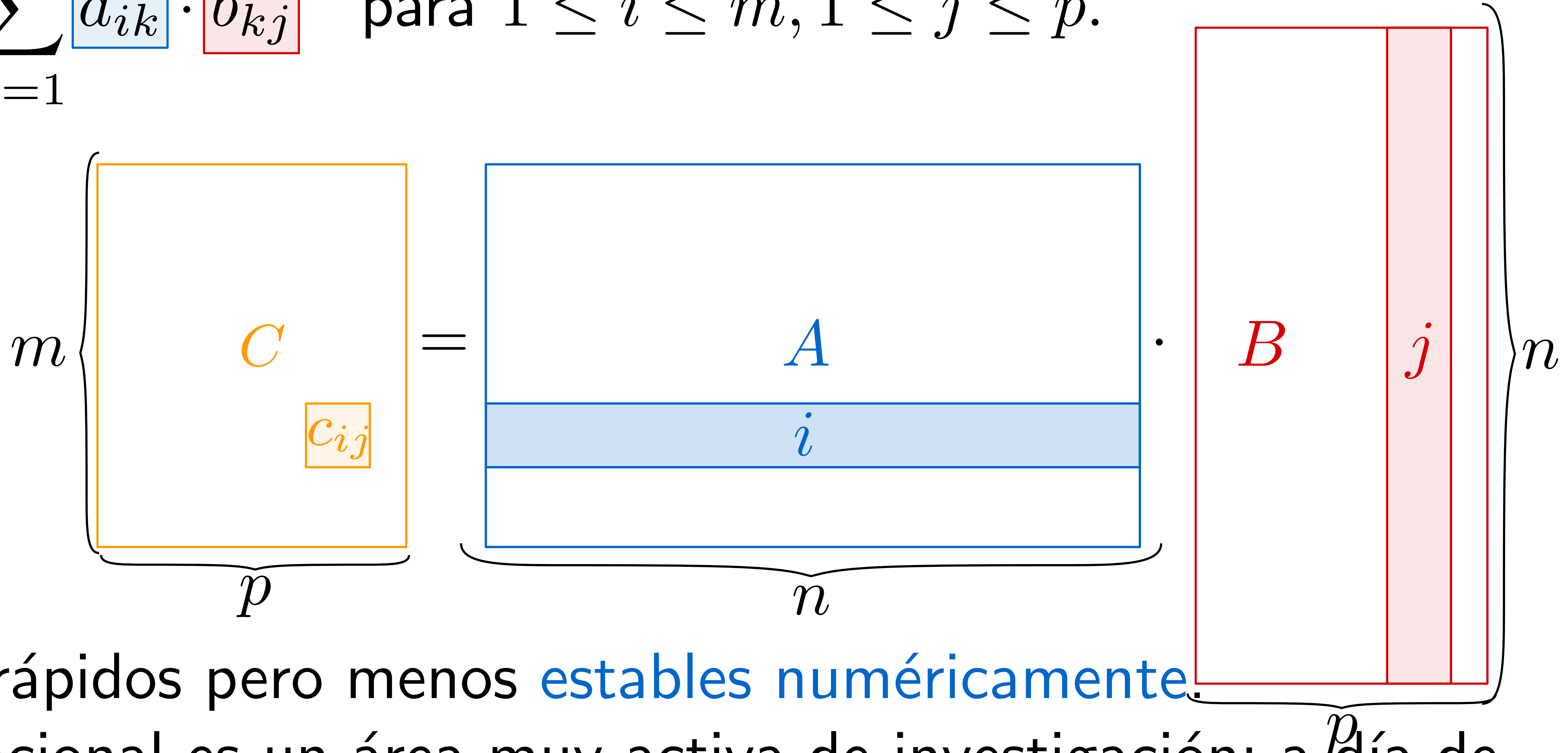
Multiplicación y determinante de matrices

- Sean A una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times p$, la multiplicación de matrices $C = A \cdot B$ se define como:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \boxed{a_{ik}} \cdot \boxed{b_{kj}} \quad \text{para } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p.$$

- Complejidad computacional.

Número de operaciones:
mnp multiplicaciones,
$mnp - mp$ sumas
(algoritmo simple).
Total: $\mathcal{O}(mnp)$.



Existen algoritmos más rápidos pero menos estables numéricamente.
La complejidad computacional es un área muy activa de investigación; a día de hoy: $\mathcal{O}(n^{2.371552})$ [2023] (matrices $n \times n$). En la práctica, depende del tamaño.

Determinante de matrices

Para una matriz cuadrada M de orden n, el determinante $\det(M)$ se puede calcular recursivamente:

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot m_{ij} \cdot \det(\text{submatriz sin la fila } i \text{ y sin la columna } j).$$

Determinante de matrices

Para una matriz cuadrada M de orden n, el determinante $\det(M)$ se puede calcular recursivamente:

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot m_{ij} \cdot \det(\text{submatriz sin la fila } i \text{ y sin la columna } j).$$

- El número de operaciones / multiplicaciones de este método es $\Omega(n!)$.

Determinante de matrices

Para una matriz cuadrada M de orden n, el determinante $\det(M)$ se puede calcular recursivamente:

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot m_{ij} \cdot \det(\text{submatriz sin la fila } i \text{ y sin la columna } j).$$

- El número de operaciones / multiplicaciones de este método es $\Omega(n!)$.
- Teorema (nada trivial): $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$.

Determinante de matrices

Para una matriz cuadrada M de orden n, el determinante $\det(M)$ se puede calcular recursivamente:

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot m_{ij} \cdot \det(\text{submatriz sin la fila } i \text{ y sin la columna } j).$$

- El número de operaciones / multiplicaciones de este método es $\Omega(n!)$.
- Teorema (nada trivial): $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$.
- El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Determinante de matrices

Para una matriz cuadrada M de orden n, el determinante $\det(M)$ se puede calcular recursivamente:

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot m_{ij} \cdot \det(\text{submatriz sin la fila } i \text{ y sin la columna } j).$$

- El número de operaciones / multiplicaciones de este método es $\Omega(n!)$.
- Teorema (nada trivial): $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$.
- El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal. → Útil para las descomposiciones que veremos.

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Determinante de matrices

Para una matriz cuadrada M de orden n, el determinante $\det(M)$ se puede calcular recursivamente:

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot m_{ij} \cdot \det(\text{submatriz sin la fila } i \text{ y sin la columna } j).$$

- El número de operaciones / multiplicaciones de este método es $\Omega(n!)$.
- Teorema (nada trivial): $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$.
- El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.

$$PA = LU \to \det(A) = \text{sgn(perm.)}\det(L)\det(U) \qquad \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

matriz triangular superior

matriz triangular inferior

matriz de permutación

Determinante de matrices

Para una matriz cuadrada M de orden n, el determinante $\det(M)$ se puede calcular recursivamente:

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot m_{ij} \cdot \det(\text{submatriz sin la fila } i \text{ y sin la columna } j).$$

- El número de operaciones / multiplicaciones de este método es $\Omega(n!)$.
- Teorema (nada trivial): $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$.
- El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.

$$PA = LU \to \det(A) = \text{sgn}(\text{perm.}) \det(L) \det(U)$$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Complejidad: descomposición LU $+\mathcal{O}(n)$

Determinante de matrices

Para una matriz cuadrada M de orden n, el determinante $\det(M)$ se puede calcular recursivamente:

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot m_{ij} \cdot \det(\text{submatriz sin la fila } i \text{ y sin la columna } j).$$

- El número de operaciones / multiplicaciones de este método es $\Omega(n!)$.
- Teorema (nada trivial): $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$.
- El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.

$$PA = LU \to \det(A) = \text{sgn(perm.)}\det(L)\det(U)$$

Complejidad: descomposición LU $+\mathcal{O}(n)$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- El determinante de M es el producto de sus valores propios.

Normas matriciales: definición

Sea $A = (a_{ij})$, $i \leq i, j \leq n$ una matriz en $K^{m\times n}$, donde K es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición: Norma de una matriz

Una norma es una función del conjunto de todas las matrices $K^{m\times n}$ en $\mathbb{R}$, que denotaremos como $\|\cdot\|$, que verifica las siguientes propiedades:

- No negatividad: $\|A\| \geq 0$,
- además $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
- Homogeneidad: $\|kA\| \leq |k|\|A\|$ para $k \in \mathbb{R}$.
- Desigualdad triangular: $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Normas matriciales: definición

Sea $A = (a_{ij})$, $i \leq i, j \leq n$ una matriz en $K^{m \times n}$, donde K es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición: Norma de una matriz

Una norma es una función del conjunto de todas las matrices $K^{m \times n}$ en $\mathbb{R}$, que denotaremos como $\|\cdot\|$, que verifica las siguientes propiedades:

- No negatividad: $\|A\| \geq 0$,
- además $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
- Homogeneidad: $\|kA\| \leq |k|\|A\|$ para $k \in \mathbb{R}$.
- Desigualdad triangular: $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Adicionalmente, para matrices cuadradas, la normas matriciales que satisfacen la siguiente condición (normas sub-multiplicativas) son particularmente últiles:

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Normas matriciales: definición

Sea $A = (a_{ij})$, $i \leq i, j \leq n$ una matriz en $K^{m\times n}$, donde K es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición: Norma de una matriz

Una norma es una función del conjunto de todas las matrices $K^{m\times n}$ en $\mathbb{R}$, que denotaremos como $\|\cdot\|$, que verifica las siguientes propiedades:

- No negatividad: $\|A\| \geq 0$,
- además $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
- Homogeneidad: $\|kA\| \leq |k|\|A\|$ para $k \in \mathbb{R}$.
- Desigualdad triangular: $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

En algunos textos se requiere que las normas sean sub-multiplicativas.

Adicionalmente, para matrices cuadradas, la normas matriciales que satisfacen la siguiente condición (normas sub-multiplicativas) son particularmente últiles:

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Normas matriciales consistentes y compatibles

- Dada una matriz A y un vector $\mathbf{x}$ cualquiera, $A\mathbf{x}$ es el vector transformado.

Normas matriciales consistentes y compatibles

- Dada una matriz A y un vector $\mathbf{x}$ cualquiera, $A\mathbf{x}$ es el vector transformado.
- Una norma matricial $\|\cdot\|$ en $K^{m\times n}$ es consistente con una norma vectorial $\|\cdot\|_\alpha$ en K^n y con una norma vectorial $\|\cdot\|_\beta$ en K^m si:

$$\|A\mathbf{x}\|_\beta \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|_\alpha.$$

Normas matriciales consistentes y compatibles

- Dada una matriz A y un vector $\mathbf{x}$ cualquiera, $A\mathbf{x}$ es el vector transformado.
- Una norma matricial $\|\cdot\|$ en $K^{m\times n}$ es consistente con una norma vectorial $\|\cdot\|_\alpha$ en K^n y con una norma vectorial $\|\cdot\|_\beta$ en K^m si:

$$\|A\mathbf{x}\|_\beta \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|_\alpha.$$

- En el caso especial $m = n$ y $\alpha = \beta$, $\| \cdot \|$ también se llama compatible con $\| \cdot \|_\alpha$. Toda norma matricial sub-multiplicativa en $K^{n\times n}$ induce una norma vectorial compatible en K^n.

Normas matriciales consistentes y compatibles

- Dada una matriz A y un vector $\mathbf{x}$ cualquiera, $A\mathbf{x}$ es el vector transformado.
- Una norma matricial $\|\cdot\|$ en $K^{m\times n}$ es consistente con una norma vectorial $\|\cdot\|_\alpha$ en K^n y con una norma vectorial $\|\cdot\|_\beta$ en K^m si:

$$\|A\mathbf{x}\|_\beta \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|_\alpha.$$

- En el caso especial $m = n$ y $\alpha = \beta$, $\| \cdot \|$ también se llama compatible con $\| \cdot \|_\alpha$. Toda norma matricial sub-multiplicativa en $K^{n\times n}$ induce una norma vectorial compatible en K^n.
- Dadas una norma vectorial $\|\cdot\|_\alpha$ en K^n y una norma vectorial $\|\cdot\|_\beta$ en K^m, se define la siguiente norma matricial consistente:

$$\|A\|_{\alpha,\beta} = \sup_{\mathbf{x}\neq 0} \left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|_\alpha}{\|\mathbf{x}\|_\beta} \right\} = \sup\{\|A\mathbf{x}\|_\alpha : \|\mathbf{x}\|_\beta = 1\}.$$

Normas matriciales consistentes y compatibles

- Dada una matriz A y un vector $\mathbf{x}$ cualquiera, $A\mathbf{x}$ es el vector transformado.
- Una norma matricial $\|\cdot\|$ en $K^{m\times n}$ es consistente con una norma vectorial $\|\cdot\|_\alpha$ en K^n y con una norma vectorial $\|\cdot\|_\beta$ en K^m si:

$$\|A\mathbf{x}\|_\beta \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|_\alpha.$$

- En el caso especial $m = n$ y $\alpha = \beta$, $\| \cdot \|$ también se llama compatible con $\| \cdot \|_\alpha$. Toda norma matricial sub-multiplicativa en $K^{n\times n}$ induce una norma vectorial compatible en K^n.
- Dadas una norma vectorial $\|\cdot\|_\alpha$ en K^n y una norma vectorial $\|\cdot\|_\beta$ en K^m, se define la siguiente norma matricial consistente:

$$\|A\|_{\alpha,\beta} = \sup_{\mathbf{x}\neq 0}\left\{\frac{\|A\mathbf{x}\|_\alpha}{\|\mathbf{x}\|_\beta}\right\} = \sup\{\|A\mathbf{x}\|_\alpha : \|\mathbf{x}\|_\beta = 1\}.$$

Esta norma mide cuánto puede estirar vectores la transformación inducida por A.

Normas matriciales relevantes (I)

- Norma p, $1 \leq p \leq \infty$: Inducida por la norma p vectorial en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$:

$$\|A\|_p = \sup_{\mathbf{x}\neq 0} \left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} \right\} = \sup\{\|A\mathbf{x}\|_p : \|\mathbf{x}\|_p = 1\}.$$

Normas matriciales relevantes (I)

- **Norma p, $1 \leq p \leq \infty$:** Inducida por la norma p vectorial en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$:
$$\|A\|_p = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} \right\} = \sup\{\|A\mathbf{x}\|_p : \|\mathbf{x}\|_p = 1\}.$$
- **Norma 1:** Máxima suma absoluta de entre las columnas:
$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}|.$$

Normas matriciales relevantes (I)

- Norma p, $1 \leq p \leq \infty$: Inducida por la norma p vectorial en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$:
$$\|A\|_p = \sup_{\mathbf{x}\neq 0} \left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} \right\} = \sup\{\|A\mathbf{x}\|_p : \|\mathbf{x}\|_p = 1\}.$$
- Norma 1: Máxima suma absoluta de entre las columnas:
$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}|.$$
- Norma infinito: Máxima suma absoluta de entre las filas:
$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Normas matriciales relevantes (I)

- Norma p, $1 \leq p \leq \infty$: Inducida por la norma p vectorial en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$:
$$\|A\|_p = \sup_{\mathbf{x}\neq 0} \left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} \right\} = \sup\{\|A\mathbf{x}\|_p : \|\mathbf{x}\|_p = 1\}.$$
- Norma 1: Máxima suma absoluta de entre las columnas:
$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}|.$$
- Norma infinito: Máxima suma absoluta de entre las filas:
$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$
- Norma 2: Es la norma espectral. Es el mayor valor singular de A, $\sigma_{\text{max}}(A)$ (la raíz cuadrada del mayor autovalor de $A^{*^t} A$):
$$\|A\|_2 = \sqrt{|\lambda|_{\text{max}}(A^{*^t} A)} = \sigma_{\text{max}}(A).$$

Normas matriciales relevantes (I)

- Norma p, $1 \le p \le \infty$: Inducida por la norma p vectorial en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$:
$$\|A\|_p = \sup_{\mathbf{x}\neq 0} \left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} \right\} = \sup\{\|A\mathbf{x}\|_p : \|\mathbf{x}\|_p = 1\}.$$
- Norma 1: Máxima suma absoluta de entre las columnas:
$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}|.$$
- Norma infinito: Máxima suma absoluta de entre las filas:
$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$
- Norma 2: Es la norma espectral. Es el mayor valor singular de A, $\sigma_{\mathsf{max}}(A)$ (la raíz cuadrada del mayor autovalor de ${A^*}^t A$): ${A^*}^t$: conjugada transpuesta de A (adjunta)
$$\|A\|_2 = \sqrt{|\lambda|_{\mathsf{max}}({A^*}^t A)} = \sigma_{\mathsf{max}}(A).$$

Normas matriciales relevantes (I)

- **Norma p, $1 \le p \le \infty$:** Inducida por la norma p vectorial en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$:

$$\|A\|_p = \sup_{\mathbf{x}\neq 0} \left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} \right\} = \sup\{\|A\mathbf{x}\|_p : \|\mathbf{x}\|_p = 1\}.$$

- **Norma 1:** Máxima suma absoluta de entre las columnas:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}|.$$

- **Norma infinito:** Máxima suma absoluta de entre las filas:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

- **Norma 2**: Es la norma espectral. Es el mayor valor singular de A, $\sigma_{\max}(A)$ (la raíz cuadrada del mayor autovalor de ${A^*}^t A$): ${A^*}^t$: conjugada transpuesta de A (adjunta)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\underbrace{\cancel{|\lambda|_{\max}}}_{\rho}({A^*}^t A)} = \sigma_{\max}(A).$$

Normas matriciales relevantes (II)

- Norma de Frobenius (o Hilbert–Schmidt): Inducida por el producto interno usual en el espacio de matrices de $m \times n$, similar a la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$:

$$\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(A^{*t} A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2},$$

Normas matriciales relevantes (II)

- Norma de Frobenius (o Hilbert–Schmidt): Inducida por el producto interno usual en el espacio de matrices de $m \times n$, similar a la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$:

$$\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(A^{*t} A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2},$$

traza: suma elementos en la diagonal principal

Normas matriciales relevantes (II)

- Norma de Frobenius (o Hilbert–Schmidt): Inducida por el producto interno usual en el espacio de matrices de $m \times n$, similar a la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$:

$$\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(A^{*^t} A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2},$$

traza: suma elementos en la diagonal principal

Todas las normas anteriores son sub-multiplicativas. En cambio, la siguiente no lo es:

Normas matriciales relevantes (II)

- Norma de Frobenius (o Hilbert–Schmidt): Inducida por el producto interno usual en el espacio de matrices de $m \times n$, similar a la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$:

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^{*^t} A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2},$$

traza: suma elementos en la diagonal principal

Todas las normas anteriores son sub-multiplicativas. En cambio, la siguiente no lo es:

- Norma max: máximo valor absoluto de un elemento en la matriz:

$$\|A\|_{\max} = \max_{ij} |a_{ij}|.$$

Normas matriciales relevantes (II)

- Norma de Frobenius (o Hilbert–Schmidt): Inducida por el producto interno usual en el espacio de matrices de $m \times n$, similar a la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$:

$$\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(A^{*^t} A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2},$$

traza: suma elementos en la diagonal principal

Todas las normas anteriores son sub-multiplicativas. En cambio, la siguiente no lo es:

- Norma max: máximo valor absoluto de un elemento en la matriz:

$$\|A\|_{\max} = \max_{ij} |a_{ij}|.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Normas matriciales relevantes (II)

- Norma de Frobenius (o Hilbert–Schmidt): Inducida por el producto interno usual en el espacio de matrices de $m \times n$, similar a la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$:

$$\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(A^{*t} A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2},$$

traza: suma elementos en la diagonal principal

Todas las normas anteriores son sub-multiplicativas. En cambio, la siguiente no lo es:

- Norma max: máximo valor absoluto de un elemento en la matriz:

$$\|A\|_{\max} = \max_{ij} |a_{ij}|.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Normas matriciales relevantes (II)

- Norma de Frobenius (o Hilbert–Schmidt): Inducida por el producto interno usual en el espacio de matrices de $m \times n$, similar a la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$:

$$\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(A^{*^t} A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2},$$

traza: suma elementos en la diagonal principal

Todas las normas anteriores son sub-multiplicativas. En cambio, la siguiente no lo es:

- Norma max: máximo valor absoluto de un elemento en la matriz:

$$\|A\|_{\max} = \max_{ij} |a_{ij}|.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \quad \|A \cdot A\| = 8 > 4 = \|A\| \cdot \|A\|$$

Tipos de matrices

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$ es:

- Ortogonal si $A^t = A^{-1}$ o $A^t A = AA^t = I_n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.
- Unitaria si $U^{*^t} U = UU^{*^t} = I_n$.
- Hermitiana (o hermítica) si $A^{*^t} = A$.
- Simétrica si $A^t = A$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.
- Antisimétrica si $-A^t = A$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.
- Tridiagonal si $a_{ij} = 0$ si $|i - j| > 1$.
- Definida positiva si A es una matriz hermitiana tal que $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
  Una matriz real M puede tener la propiedad $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ para todo vector real $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sin ser simétrica. Esto sucede cuando $(M + M^t)/2$ es definida positiva.
- Estrictamente diagonal dominante si $|a_{ii}| > \sum_{1 \leq j \leq n, i \neq j} |a_{ij}|$.
- Diagonal dominante si $|a_{ii}| \geq \sum_{1 \leq j \leq n, i \neq j} |a_{ij}|$.

Tipos de matrices

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$ es:

- Ortogonal si $A^t = A^{-1}$ o $A^t A = AA^t = I_n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.
- Unitaria si $U^{*^t} U = UU^{*^t} = I_n$.
- Hermitiana (o hermítica) si $A^{*^t} = A$.
- Simétrica si $A^t = A$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

autovalores reales

- Antisimétrica si $-A^t = A$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.
- Tridiagonal si $a_{ij} = 0$ si $|i - j| > 1$.
- Definida positiva si A es una matriz hermitiana tal que $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Una matriz real M puede tener la propiedad $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ para todo vector real $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sin ser simétrica. Esto sucede cuando $(M + M^t)/2$ es definida positiva.
- Estrictamente diagonal dominante si $|a_{ii}| > \sum_{1 \leq j \leq n, i \neq j} |a_{ij}|$.
- Diagonal dominante si $|a_{ii}| \geq \sum_{1 \leq j \leq n, i \neq j} |a_{ij}|$.

Tipos de matrices

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$ es:

- Ortogonal si $A^t = A^{-1}$ o $A^t A = AA^t = I_n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.
- Unitaria si $U^{*^t} U = UU^{*^t} = I_n$.
- Hermitiana (o hermítica) si $A^{*^t} = A$.
- Simétrica si $A^t = A$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.
- Antisimétrica si $-A^t = A$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.
- Tridiagonal si $a_{ij} = 0$ si $|i - j| > 1$.
- Definida positiva si A es una matriz hermitiana tal que $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
  Una matriz real M puede tener la propiedad $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ para todo vector real $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sin ser simétrica. Esto sucede cuando $(M + M^t)/2$ es definida positiva.
- Estrictamente diagonal dominante si $|a_{ii}| > \sum_{1\leq j\leq n, i\neq j} |a_{ij}|$.
- Diagonal dominante si $|a_{ii}| \geq \sum_{1\leq j\leq n, i\neq j} |a_{ij}|$.

autovalores reales

autovalores (reales) positivos

Transformaciones ortogonales

Una matriz A de $\mathbb{R}^{n\times n}$ siempre verifica

$$\langle \mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle = \langle A^t\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Transformaciones ortogonales

Una matriz A de $\mathbb{R}^{n\times n}$ siempre verifica

$$\langle \mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle = \langle A^t\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle, \quad \forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, \mathbf{y}\in\mathbb{R}^n.$$

Las matrices ortogonales conservan el producto escalar y la norma euclidiana; es decir, dada Q ortogonal

$$\langle Q\mathbf{x}, Q\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$$

$$\|Q\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2, \quad \forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n.$$

Transformaciones ortogonales

Una matriz A de $\mathbb{R}^{n\times n}$ siempre verifica

$$\langle \mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle = \langle A^t\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Las matrices ortogonales conservan el producto escalar y la norma euclidiana; es decir, dada Q ortogonal

$$\langle Q\mathbf{x}, Q\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$
$$\|Q\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

En este caso, decimos que las normas $\|A\|_2$ y $\|\mathbf{x}\|_2$ son invariantes bajo transformaciones ortogonales.

Matrices convergentes

Una matriz $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, cuadrada se dice convergente si las potencias de la matriz tienen componentes con límite cero,

$$\lim_{k \to \infty} (A^k)_{ij} = 0.$$

Una matriz A es convergente si y solo si $\rho(A) < 1$.

Ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^k = \begin{pmatrix} 1/2^k & 0 \\ k/2^{k+1} & 1/2^k \end{pmatrix}$$

Radio espectral

Se define el radio espectral de una matriz A, y se denota como $\rho(A)$, como el máximo de los módulos de los valores propios de la matriz,

$$\rho(A) = \max_i \{|\lambda_i| : Av_i = \lambda_i v_i\}.$$

Geométricamente, representa el radio del círculo mínimo (centrado en 0) que contiene a todos los valores propios de la matriz A.

Teorema

El radio espectral de una matriz es una cota inferior de todas las normas sub-multiplicativas de la matriz,

$$\rho(A) \leq \|A\|_r \quad r = \{1, 2, \infty, F\}.$$

Número de condición

Sigui A una matriz, y $\|\cdot\|$ cualquier norma sub-multiplicativa,

Definición: Número de condición

$$\text{Cond}(A) = \mathcal{K}(A) = \begin{cases} \|A\|\|A^{-1}\|, & \det(A) \neq 0 \\ \infty, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Número de condición

Sigui A una matriz, y $\|\cdot\|$ cualquier norma sub-multiplicativa,

Definición: Número de condición

$$\text{Cond}(A) = \mathcal{K}(A) = \begin{cases} \|A\|\|A^{-1}\|, & \det(A) \neq 0 \\ \infty, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

La matriz A está bien condicionada si su número de condición está cerca de 1 y está mal condicionada si es significativamente mayor que 1, lo que nos indicaría que pequeñas variaciones en los datos pueden producir grandes variaciones en los resultados y por tanto que la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es propensa a grandes errores de redondeo.

Número de condición

Sigui A una matriz, y $\|\cdot\|$ cualquier norma sub-multiplicativa,

Definición: Número de condición

$$\text{Cond}(A) = \mathcal{K}(A) = \begin{cases} \|A\|\|A^{-1}\|, & \det(A) \neq 0 \\ \infty, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Propiedades

- $\text{Cond}(A) \geq 1 \quad \text{Cond}(I) = 1$.
- Si $B = kA$, con $k \neq 0$ real, entonces $\text{Cond}(B) = \text{Cond}(A)$.
- $\text{Cond}(AB) \leq \text{Cond}(A)\text{Cond}(B)$.
- $\text{Cond}_2(A) = \sigma_{\text{max}}(A)/\sigma_{\text{min}}(A)$.
- $\text{Cond}_2(A) = \text{Cond}_2(AQ) = \text{Cond}_2(QA)$ para Q matriz ortogonal (o unitaria).

Número de condición

Sigui A una matriz, y $\|\cdot\|$ cualquier norma sub-multiplicativa,

Definición: Número de condición

$$\text{Cond}(A) = \mathcal{K}(A) = \begin{cases} \|A\|\|A^{-1}\|, & \det(A) \neq 0 \\ \infty, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Propiedades

- $\text{Cond}(A) \geq 1 \quad \text{Cond}(I) = 1$.
- Si $B = kA$, con $k \neq 0$ real, entonces $\text{Cond}(B) = \text{Cond}(A)$.
- $\text{Cond}(AB) \leq \text{Cond}(A)\text{Cond}(B)$.
- $\text{Cond}_2(A) = \sigma_{\text{max}}(A)/\sigma_{\text{min}}(A)$.
- $\text{Cond}_2(A) = \text{Cond}_2(AQ) = \text{Cond}_2(QA)$ para Q matriz ortogonal (o unitaria).

$\sigma_{\text{max}}(A)$ y $\sigma_{\text{min}}(A)$ son el mayor y el menor valor singular de A.

Guia de estudio

Libro *Càlcul numèric: teoria i pràctica* de M. Grau Sánchez y M. Noguera Batlle

- Conceptos asociados: Apèndix A Àlgebra Matricial, de la pàgina 417 a la 422.

Libro *Cálculo numérico* de M. Grau Sánchez, y M. Noguera Batlle

- Conceptos asociados: A. Álgebra matricial, de la página 335 a la 339.

Otros libros de consulta

- *Cálculo Científico con MATLAB y Octave* de A. Quarteroni y F. Saleri.
- *Métodos Numéricos con MATLAB* de J. H. Mathews y K. D. Fink.
- *Numerical Computing with MATLAB* de C. Moler.