Computación Numérica

Tema 4. Ecuaciones no lineales.

Irene Parada

irene.parada@upc.edu

Departamento de Matemáticas

Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech

29 de abril de 2024

Repaso

Breve recordatorio del Tema 3.2

- Spline lineal.
- Splines cúbicas. Tipos y restricciones adicionales.
- Splines de Hermite. Principales clases de curvas paramétricas con puntos de control.
- Serie de Fourier y ajuste trigonométrico.
- Transformada discreta de Fourier (DFT) y cálculo de la DFT.

Introducción

Muchos fenómenos se describen mediante modelos no lineales y frecuentemente se necesita resolver una ecuación del tipo $f(x) = 0$, que no puede ser resuelta por métodos algebraicos conocidos o es muy costoso hacerlo.

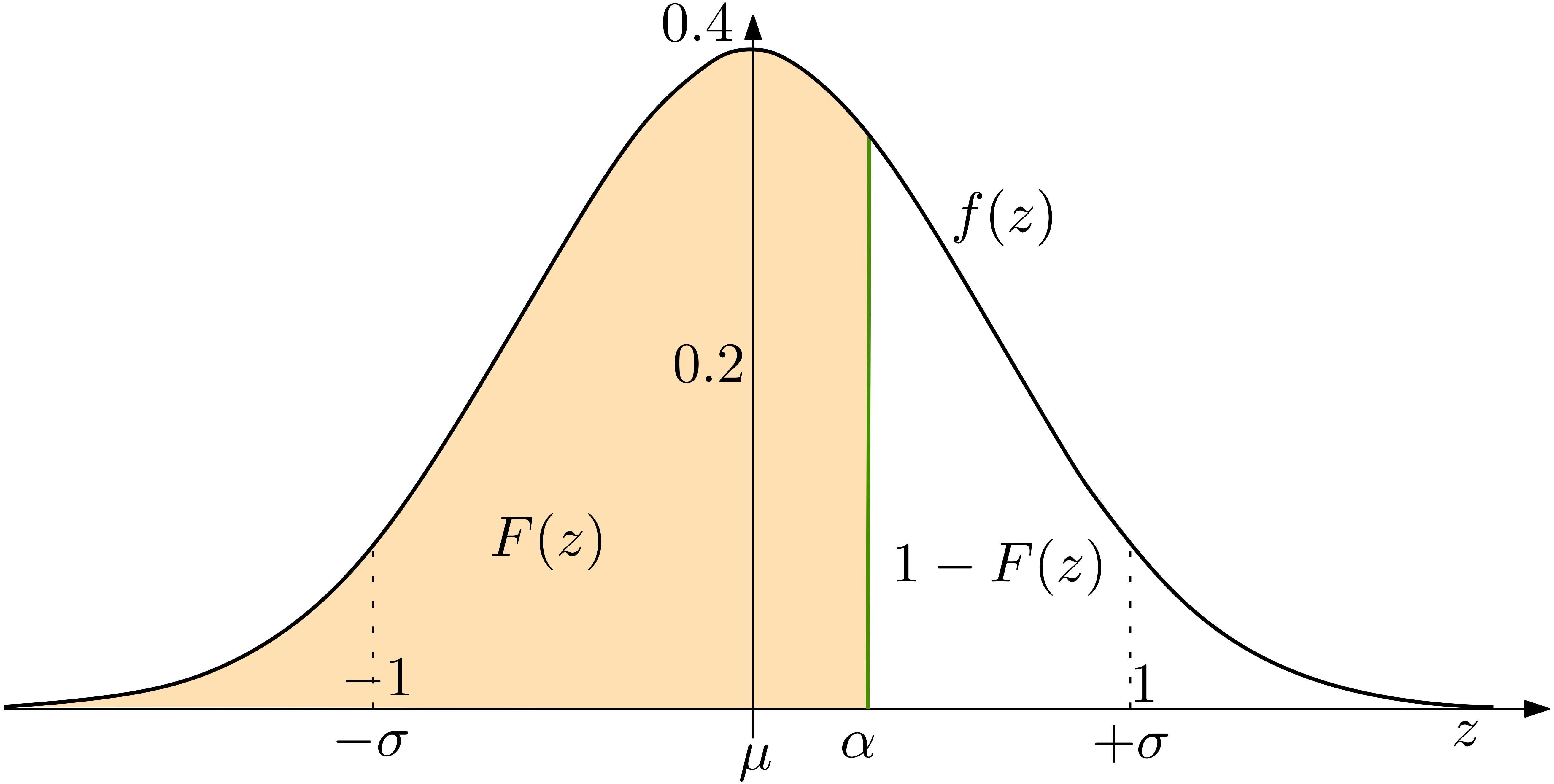
Introducción

Muchos fenómenos se describen mediante modelos no lineales y frecuentemente se necesita resolver una ecuación del tipo $f(x) = 0$, que no puede ser resuelta por métodos algebraicos conocidos o es muy costoso hacerlo.

Este tema:

- Solución numérica aproximada de una ecuación no lineal.
- Sistemas de ecuaciones no lineales, más complejos de resolver y obtener soluciones aproximadas.

Introducción



$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

Nomenclatura

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real.

- α es una raíz de f si $f(\alpha) = 0$.

Nomenclatura

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real.

- α es una raíz de f si $f(\alpha) = 0$.
- x^* es un punto fijo de f si $f(x^*) = x^*$.

Nomenclatura

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real.

- α es una raíz de f si $f(\alpha) = 0$.
- x^* es un punto fijo de f si $f(x^*) = x^*$.
- α es una solución o raíz de la ecuación $f(x) = p$ si $f(\alpha) = p$.

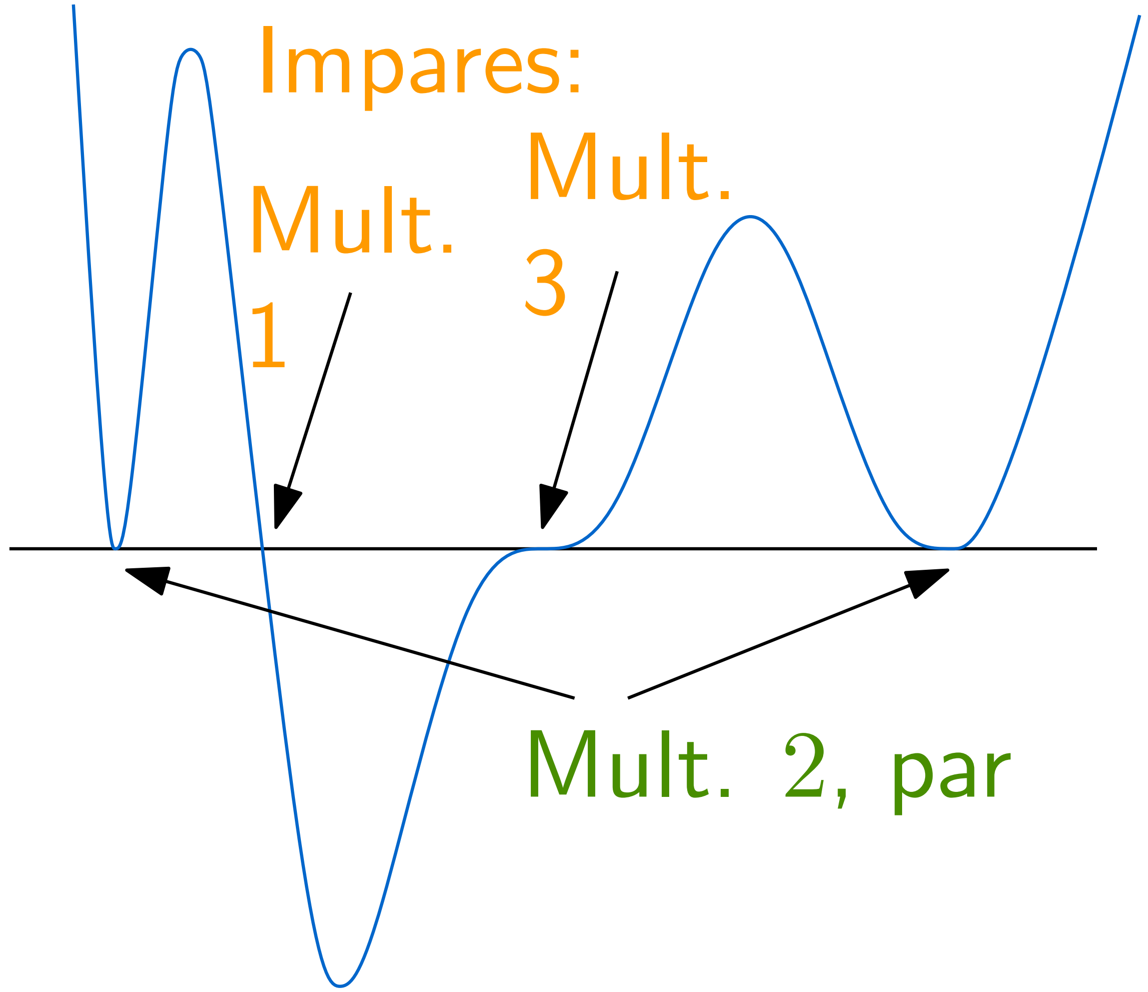
Nomenclatura

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real.

- α es una raíz de f si $f(\alpha) = 0$.
- x^* es un punto fijo de f si $f(x^*) = x^*$.
- α es una solución o raíz de la ecuación $f(x) = p$ si $f(\alpha) = p$.
- Una solución α de $f(x) = 0$ se dice que tiene multiplicidad n si

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(n-1)}(\alpha) = 0$$

y $f^{(n)}(\alpha) \neq 0$.



Nomenclatura

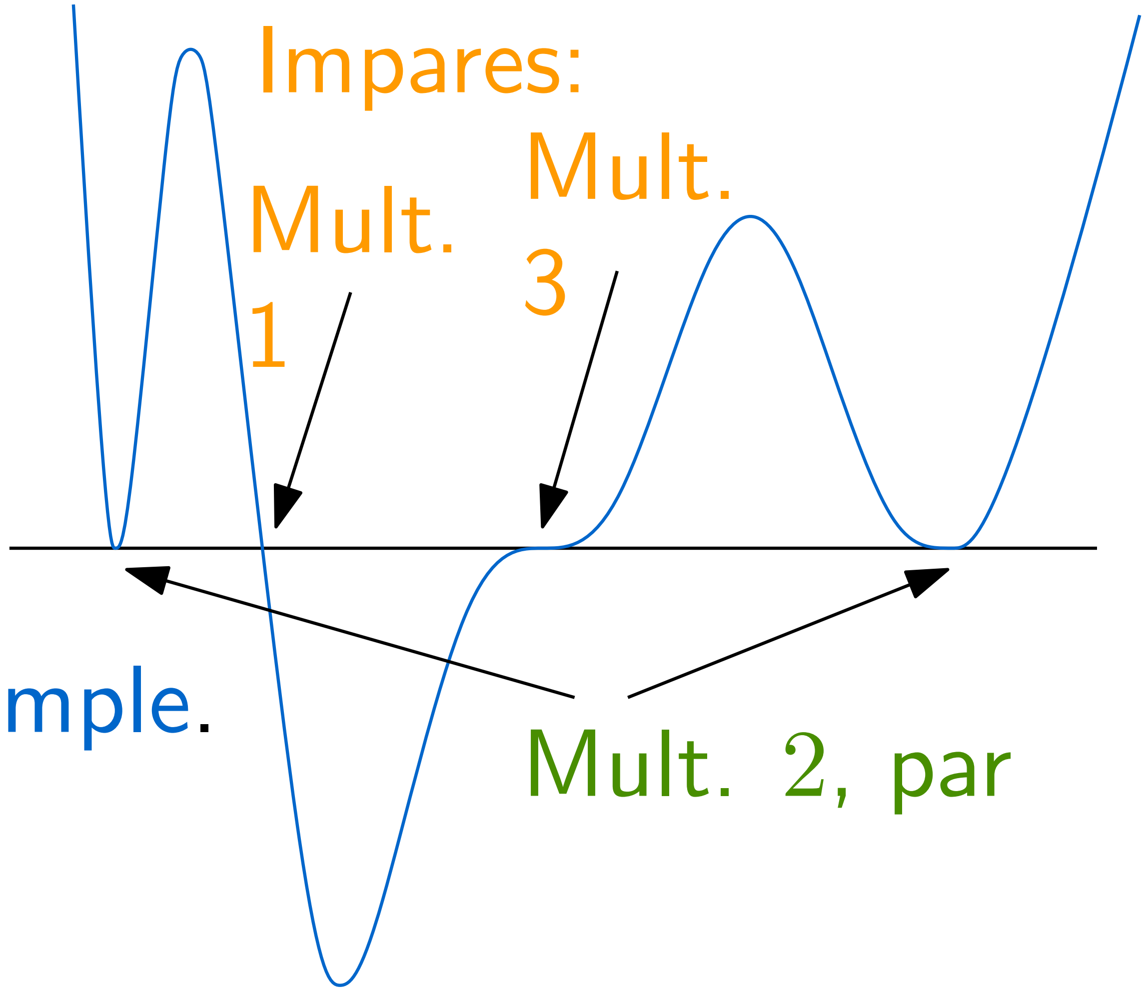
Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real.

- α es una raíz de f si $f(\alpha) = 0$.
- x^* es un punto fijo de f si $f(x^*) = x^*$.
- α es una solución o raíz de la ecuación $f(x) = p$ si $f(\alpha) = p$.
- Una solución α de $f(x) = 0$ se dice que tiene multiplicidad n si

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(n-1)}(\alpha) = 0$$

y $f^{(n)}(\alpha) \neq 0$.

Si la multiplicidad es 1, se dice que la raíz es simple.



Nomenclatura

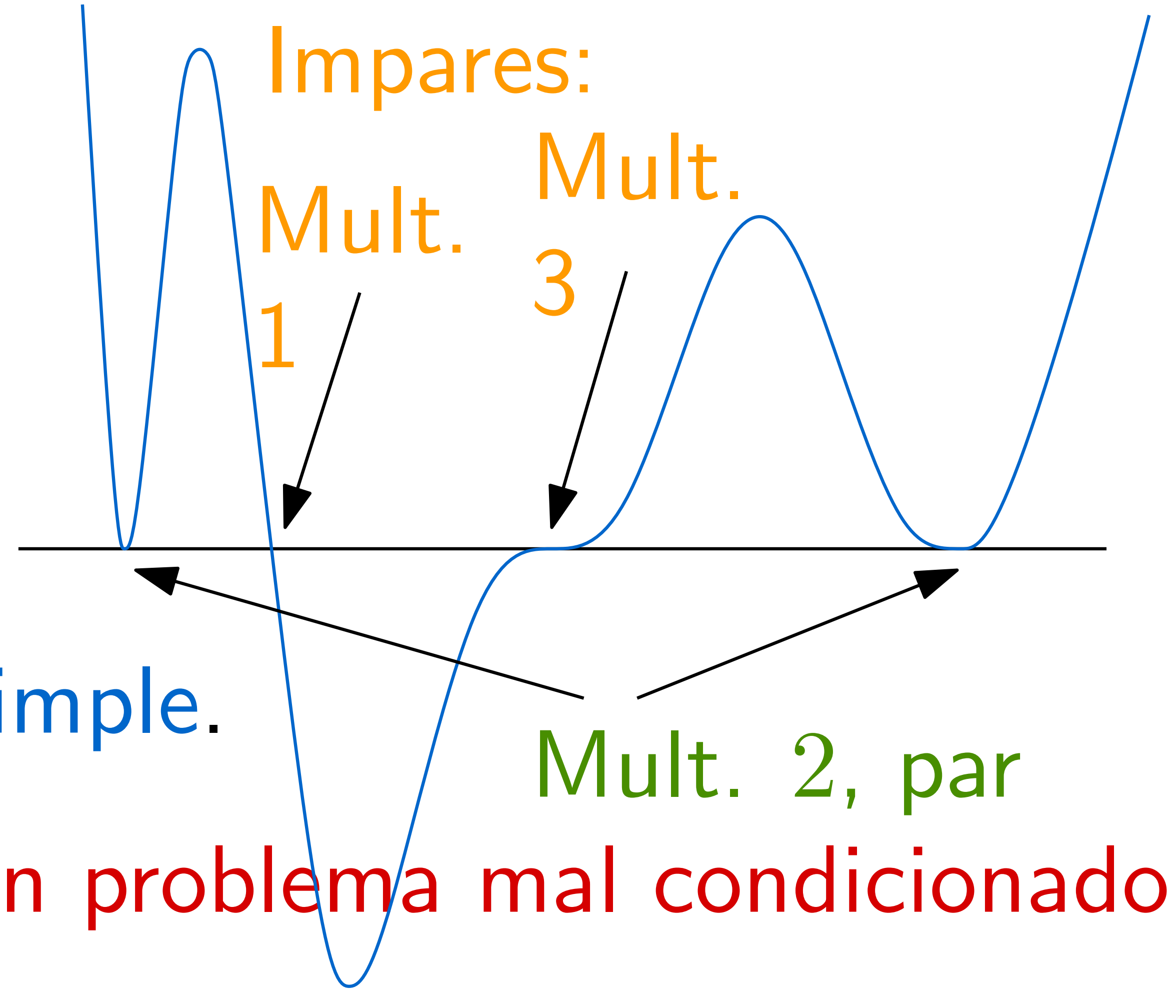
Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real.

- α es una raíz de f si $f(\alpha) = 0$.
- x^* es un punto fijo de f si $f(x^*) = x^*$.
- α es una solución o raíz de la ecuación $f(x) = p$ si $f(\alpha) = p$.
- Una solución α de $f(x) = 0$ se dice que tiene multiplicidad n si

  $$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(n-1)}(\alpha) = 0$$

  y $f^{(n)}(\alpha) \neq 0$.

  Si la multiplicidad es 1, se dice que la raíz es simple.



- Determinar iterativamente raíces múltiples es un problema mal condicionado.

Ejemplos

- Dos raíces simples, $f(x) = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$.
- Una raíz doble, $f(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$.
- No hay una fórmula directa para calcular las raíces de los polinomios de grado superior a 4, ej. $f(x) = x^5 + 5x^3 + 4x^2 + 1$.
- Para ecuaciones con funciones trascendentes solo la solución numérica es factible, ej. $f(x) = x^2 - e^{-x}$.

Ejemplos

- Dos raíces simples, $f(x) = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$.
- Una raíz doble, $f(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$.
- No hay una fórmula directa para calcular las raíces de los polinomios de grado superior a 4, ej. $f(x) = x^5 + 5x^3 + 4x^2 + 1$.
- Para ecuaciones con funciones trascendentes solo la solución numérica es factible, ej. $f(x) = x^2 - e^{-x}$.

  La funciones pueden ser algebraicas (satisfacen una ecuación polinómica cuyos elementos son a su vez polinomios) o transcencentes (ej. e^x, $\log(x)$, $\ln(x)$, $\sin(x)$.)

Resolución numérica

No todas las ecuaciones tienen una única raíz simple en su dominio.
Para calcular soluciones aproximadas el proceso de cálculo de raíces de una ecuación no lineal consta de tres pasos:

Resolución numérica

No todas las ecuaciones tienen una única raíz simple en su dominio.
Para calcular soluciones aproximadas el proceso de cálculo de raíces de una ecuación no lineal consta de tres pasos:

- Localización: Conocer la zona donde se encuentran las raíces: estudio analítico o representación gráfica.

Resolución numérica

No todas las ecuaciones tienen una única raíz simple en su dominio.
Para calcular soluciones aproximadas el proceso de cálculo de raíces de una ecuación no lineal consta de tres pasos:

- Localización: Conocer la zona donde se encuentran las raíces: estudio analítico o representación gráfica.
- Separación: Determinar dominios con una única raíz.

Resolución numérica

No todas las ecuaciones tienen una única raíz simple en su dominio.
Para calcular soluciones aproximadas el proceso de cálculo de raíces de una ecuación no lineal consta de tres pasos:

- Localización: Conocer la zona donde se encuentran las raíces: estudio analítico o representación gráfica.
- Separación: Determinar dominios con una única raíz.
- Aproximación: Determinar una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente al valor α solución de la ecuación planteada:

$$x_n \to \alpha, \;\; f(\alpha) = 0.$$

Localización y separación

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b] \subset I$, $a < b$:

Localización y separación

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b] \subset I$, $a < b$:

Teorema de Bolzano

Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos diferentes, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Localización y separación

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b] \subset I$, $a < b$:

Teorema de Bolzano

Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos diferentes, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de Rolle

Si f es derivable en el intervalo abierto (a,b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Ecuaciones no lineales

Obtención de soluciones aproximadas

Aproximación: tipos de métodos

Objetivo: Obtener $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como una sucesión de números reales convergente a la raíz buscada,

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha \text{ tal que } f(\alpha) = 0$$

Aproximación: tipos de métodos

Objetivo: Obtener $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como una sucesión de números reales convergente a la raíz buscada,

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha \text{ tal que } f(\alpha)=0$$

- Método de intervalos encajados:

$$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\ldots\supseteq[a_n,b_n]\ldots$$

$$a_n\le x_n\le b_n,\quad \{b_n-a_n\}_n\to 0.$$

Aproximación: tipos de métodos

Objetivo: Obtener $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como una sucesión de números reales convergente a la raíz buscada,

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha \text{ tal que } f(\alpha) = 0$$

- Método de intervalos encajados:

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \ldots$$
$$a_n \leq x_n \leq b_n, \quad \{b_n - a_n\}_n \to 0.$$

- Esquemas o algoritmos iterativos:

$$x_n = g(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots), \quad x_n \to \alpha.$$

Ecuaciones no lineales

Intervalos encajados

Métodos de intervalos encajados

Objetivo: Obtener $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión convergente de números reales

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha \text{ tal que } f(\alpha) = 0.$$

Procedimiento: Obtener sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\{b_n - a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0, \quad a_n \leq x_n \leq b_n$$
$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \ldots$$

Métodos de intervalos encajados

Objetivo: Obtener $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión convergente de números reales

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha \text{ tal que } f(\alpha)=0.$$

Procedimiento: Obtener sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\{b_n - a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0, \quad a_n \le x_n \le b_n$$
$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \ldots$$

Veremos dos métodos:

- Método de la bisección.
- Método de la Regula Falsi.

Métodos de intervalos encajados: método de la bisección

Para $f : I \to \mathbb{R}$, continua, $[a, b] \subset I$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$ (teorema de Bolzano) calculamos el punto medio del intervalo

$$m = \frac{a + b}{2}.$$

Este punto verifica uno de los tres ítems.

- $f(m) = 0$, m es solución.
- $f(a)f(m) < 0$, nuevo intervalo de Bolzano $[a, m]$.
- $f(a)f(m) > 0$, nuevo intervalo de Bolzano $[m, b]$.

Método de la bisección: algoritmo

Algoritmo

1. $a_0 = a$, $b_0 = b$,
2. Para $n = 0, 1, \ldots,$ hacer: $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ y
   Si $f(a_n)f(c_{n+1}) < 0$, tomar $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_{n+1}$,
   en otro caso, tomar $a_{n+1} = c_{n+1}$, $b_{n+1} = b_n$.

Comenzando con el intervalo $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, construimos una sucesión de intervalos $[a_n, b_n]$ tal que $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$, cuyos puntos medios $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ son una aproximación de la raíz α. Cada intervalo tiene la mitad de la longitud del intervalo anterior.

Método de la bisección: error

Solución aproximada:

$$\alpha = c_{n+1} \pm \ell_n, \quad \ell_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}, n > 0.$$

Método de la bisección: error

Solución aproximada:

$$\alpha = c_{n+1} \pm \ell_n, \quad \ell_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}, n > 0.$$

Análisis del error:

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq |\ell_n| < \frac{|b-a|}{2^{n+1}}.$$

Método de la bisección: error

Solución aproximada:

$$\alpha = c_{n+1} \pm \ell_n, \quad \ell_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}, n > 0.$$

Análisis del error:

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq |\ell_n| < \frac{|b-a|}{2^{n+1}}.$$

Criterio de parada: Dado $\text{tol}_x = \eta > 0$,

$$\frac{|b-a|}{2^{n+1}} < \eta.$$

Método de la bisección: error

Solución aproximada:

$$\alpha = c_{n+1} \pm \ell_n, \quad \ell_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}, n > 0.$$

Análisis del error:

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq |\ell_n| < \frac{|b-a|}{2^{n+1}}.$$

Criterio de parada: Dado $\mathrm{tol}_x = \eta > 0$,

$$\frac{|b-a|}{2^{n+1}} < \eta.$$

Cálculo previo del número de iteraciones: Dado $\mathrm{tol} = \eta > 0$

$$n > \frac{\log\left(\frac{|b-a|}{\eta}\right)}{\log 2} - 1$$

Ejercicio

Determinar la raíz real de

$$f(x) = x^3 - x + 1.$$

1. Representar gráficamente la función.
2. Proporcionar un intervalo donde se encuentre una raíz de la función.
3. Aplicar el método de la bisección (tolerancia $\eta = 0.001$).

Métodos de intervalos encajados: método de la Regula Falsi

- Idea: Se construye una recta que pasa por $(a_k, f(a_k))$ y $(b_k, f(b_k))$ y se toma como nuevo punto c_{k+1}, que es el punto de corte de la recta con el eje $y = 0$. Se elige el subintervalo con signos distintos de f en los extremos.

Métodos de intervalos encajados: método de la Regula Falsi

- Idea: Se construye una recta que pasa por $(a_k, f(a_k))$ y $(b_k, f(b_k))$ y se toma como nuevo punto c_{k+1}, que es el punto de corte de la recta con el eje $y = 0$. Se elige el subintervalo con signos distintos de f en los extremos.

- Comenzando con $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ y el intervalo $I_0 = [a_0, b_0]$, se calcula:

$$c_{k+1} = a_k - f(a_k) \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)}, k \geq 0$$

  y se construye una sucesión de intervalos anidados $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$ tal que:

  - Si $f(a_k) f(c_{k+1}) < 0$: $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = c_{k+1}$.
  - En otro caso: $a_{k+1} = c_{k+1}$, $b_{k+1} = b_k$.

Métodos de intervalos encajados: método de la Regula Falsi

- Idea: Se construye una recta que pasa por $(a_k, f(a_k))$ y $(b_k, f(b_k))$ y se toma como nuevo punto c_{k+1}, que es el punto de corte de la recta con el eje $y = 0$. Se elige el subintervalo con signos distintos de f en los extremos.
- Comenzando con $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ y el intervalo $I_0 = [a_0, b_0]$, se calcula:

$$c_{k+1} = a_k - f(a_k)\frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)}, k \geq 0$$

  y se construye una sucesión de intervalos anidados $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$ tal que:
  - Si $f(a_k)f(c_{k+1}) < 0$: $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = c_{k+1}$.
  - En otro caso: $a_{k+1} = c_{k+1}$, $b_{k+1} = b_k$.
- Criterio de parada: Dado tol $= \eta > 0$, $|x_{n+1} - x_n| < \eta \quad$ y $\quad |f(x_{n+1})| < \eta$.

Métodos de intervalos encajados: método de la Regula Falsi

- Idea: Se construye una recta que pasa por $(a_k, f(a_k))$ y $(b_k, f(b_k))$ y se toma como nuevo punto c_{k+1}, que es el punto de corte de la recta con el eje $y = 0$. Se elige el subintervalo con signos distintos de f en los extremos.
- Comenzando con $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ y el intervalo $I_0 = [a_0, b_0]$, se calcula:

$$c_{k+1} = a_k - f(a_k)\frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)}, k \geq 0$$

  y se construye una sucesión de intervalos anidados $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$ tal que:
  - Si $f(a_k)f(c_{k+1}) < 0$: $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = c_{k+1}$.
  - En otro caso: $a_{k+1} = c_{k+1}$, $b_{k+1} = b_k$.
- Criterio de parada: Dado tol $= \eta > 0$, $|x_{n+1} - x_n| < \eta \quad$ y $\quad |f(x_{n+1})| < \eta$.
- La longitud del intervalo puede no converger aunque el método lo haga.

Métodos de intervalos encajados: método de la Regula Falsi

- Idea: Se construye una recta que pasa por $(a_k, f(a_k))$ y $(b_k, f(b_k))$ y se toma como nuevo punto c_{k+1}, que es el punto de corte de la recta con el eje $y = 0$. Se elige el subintervalo con signos distintos de f en los extremos.

- Comenzando con $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ y el intervalo $I_0 = [a_0, b_0]$, se calcula:

$$c_{k+1} = a_k - f(a_k)\frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)}, k \geq 0$$

  y se construye una sucesión de intervalos anidados $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$ tal que:

  - Si $f(a_k)f(c_{k+1}) < 0$: $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = c_{k+1}$.
  - En otro caso: $a_{k+1} = c_{k+1}$, $b_{k+1} = b_k$.

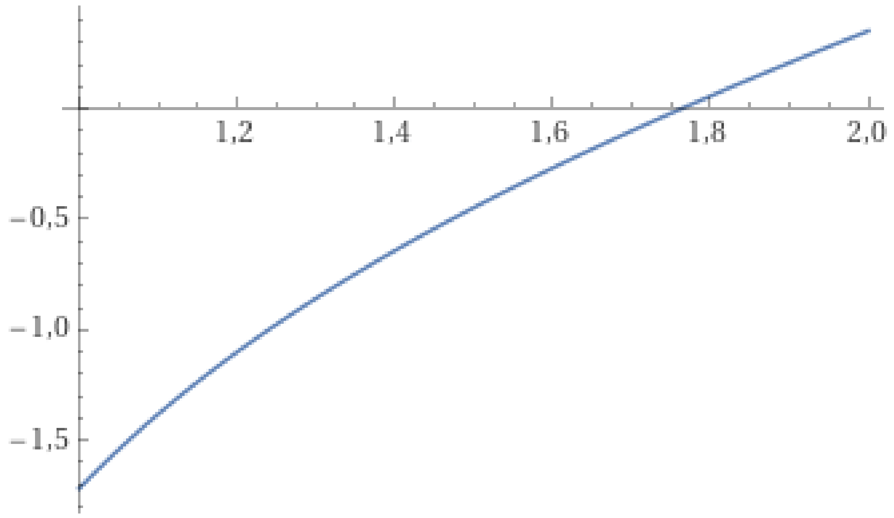
- Criterio de parada: Dado tol $= \eta > 0$, $|x_{n+1} - x_n| < \eta \quad$ y $\quad |f(x_{n+1})| < \eta$.
- La longitud del intervalo puede no converger aunque el método lo haga.
- Más rápido que el método de la bisección e igual de seguro.

Métodos de intervalos encajados: método de la Regula Falsi

Ejemplo: Calcular la raíz de $f(x) = x - e^{1/x}$ en $[1, 2]$ por el método de la Regula Falsi.

k	a_{k-1}	b_{k-1}	c_k	$f(c_k)$
1	1	2	1.830264	$+$
2	1	1.830264	1.783184	$+$
3	1	1.783184	1.769252	$+$
4	1	1.769252	1.765052	$+$
5	1	1.765052	1.763778	$+$
6	1	1.763778	1.763392	$+$
7	1	1.763392	1.763274	$+$
8	1	1.763274	1.763238	$+$
9	1	1.763238	1.763228	$+$
10	1	1.763228	1.763224	$+$
11	1	1.763224	1.763223	$+$

(Está mal en el libro.)



Ecuaciones no lineales

Métodos iterativos

Métodos iterativos: introducción

Objetivo: obtener $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión convergente de números reales

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha \text{ tal que } f(\alpha) = 0.$$

Procedimiento: escribir $f(x) = 0$ como $x = g(x)$ y establecer un esquema iterativo del tipo

$$x_n = g(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots), \quad n > 0.$$

Métodos iterativos: introducción

Objetivo: obtener $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión convergente de números reales

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha \text{ tal que } f(\alpha) = 0.$$

Procedimiento: escribir $f(x) = 0$ como $x = g(x)$ y establecer un esquema iterativo del tipo

$$x_n = g(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots), \quad n > 0.$$

Veremos tres métodos:

- Método de Newton-Raphson.
- Método de la secante.
- Método del punto fijo.

Método de Newton-Raphson o de la tangente

- Idea: La coordenada x_{n+1} es el punto de corte de la recta tangente en $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.

Método de Newton-Raphson o de la tangente

- Idea: La coordenada x_{n+1} es el punto de corte de la recta tangente en $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.
- Algoritmo: Comenzando con el valor x_0, se construye una sucesión de puntos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Método de Newton-Raphson o de la tangente

- Idea: La coordenada x_{n+1} es el punto de corte de la recta tangente en $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.
- Algoritmo: Comenzando con el valor x_0, se construye una sucesión de puntos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

- Criterio de parada: Dados $\text{tol}_x = \eta_1 > 0$ y $\text{tol}_f = \eta_2 > 0$

$$|x_{n+1} - x_n| < \eta_1 \quad \text{o} \quad |f(x_{n+1})| < \eta_2$$

Método de Newton-Raphson o de la tangente

- Idea: La coordenada x_{n+1} es el punto de corte de la recta tangente en $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.
- Algoritmo: Comenzando con el valor x_0, se construye una sucesión de puntos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

- Criterio de parada: Dados $\mathrm{tol}_x = \eta_1 > 0$ y $\mathrm{tol}_f = \eta_2 > 0$

$$|x_{n+1} - x_n| < \eta_1 \quad \text{o} \quad |f(x_{n+1})| < \eta_2$$

- Estudiaremos el orden de convergencia después de ver los métodos.

Método de Newton-Raphson: regla de Fourier y convergencia

Regla de Fourier

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, continua y derivable, $[a, b] \subset I$ tal que:

- $f(a) \cdot f(b) < 0$,
- $f'(x) \cdot f''(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$,

Método de Newton-Raphson: regla de Fourier y convergencia

Regla de Fourier

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, continua y derivable, $[a, b] \subset I$ tal que:

- $f(a) \cdot f(b) < 0$,
- $f'(x) \cdot f''(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$,

Hay una única raíz simple en el intervalo. (f es monótona y cóncava/convexa.)

Método de Newton-Raphson: regla de Fourier y convergencia

Regla de Fourier

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, continua y derivable, $[a, b] \subset I$ tal que:

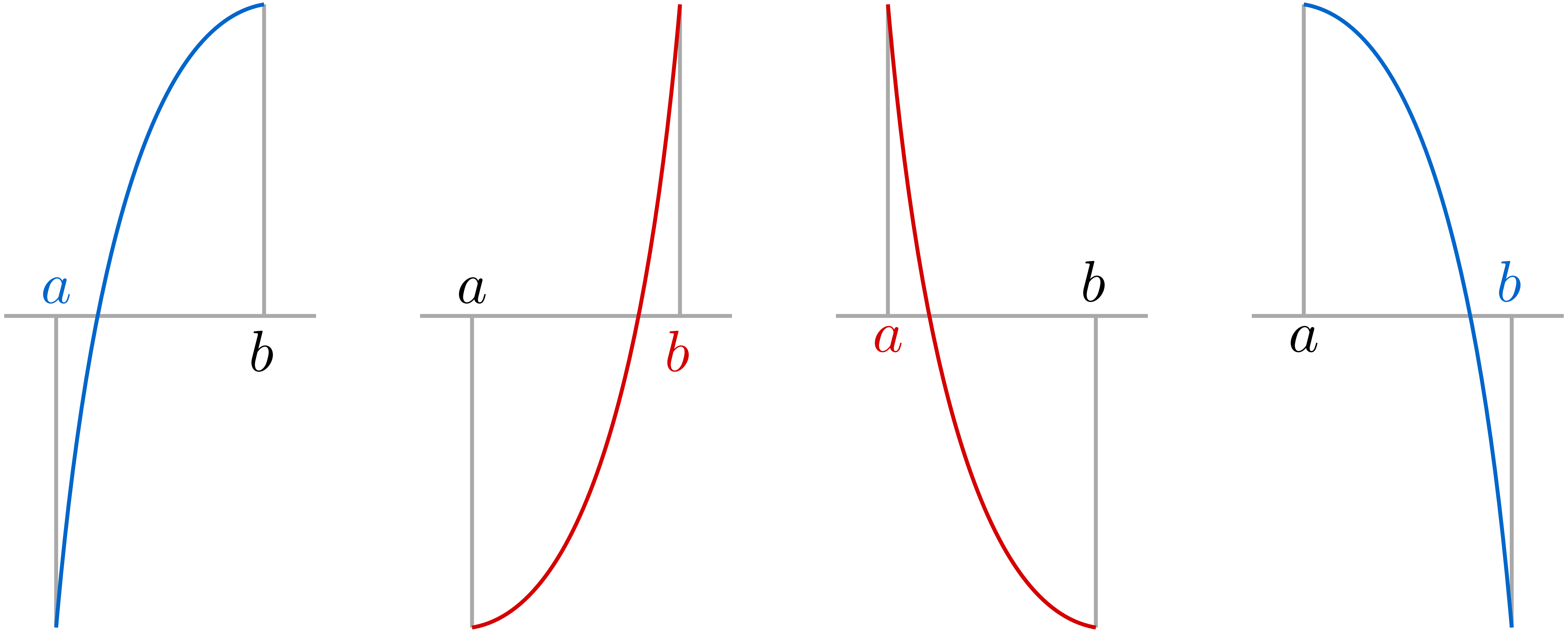
- $f(a) \cdot f(b) < 0$,
- $f'(x) \cdot f''(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$,
- Comenzando con el valor

Hay una única raíz simple en el intervalo. (f es monótona y cóncava/convexa.)

$$x_0 = \begin{cases} a & \text{si } f(a) \cdot f''(a) > 0, \\ b & \text{si } f(b) \cdot f''(b) > 0, \end{cases}$$

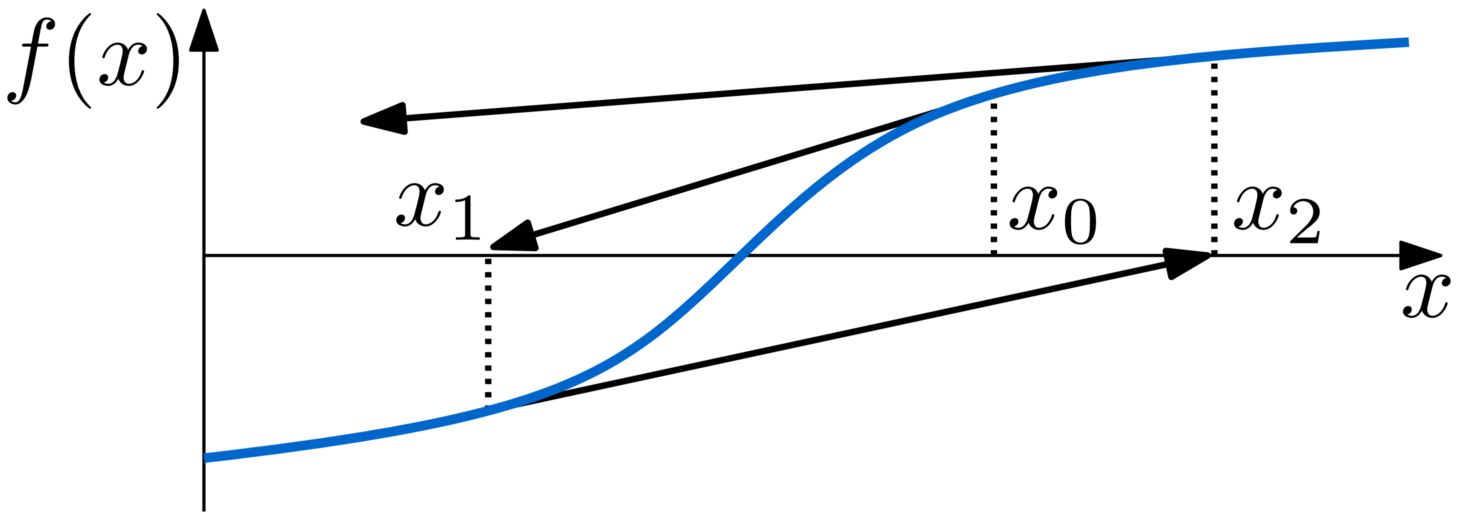
entonces, la sucesión de puntos definidos por $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge a la única raíz de $f(x) = 0$ en el intervalo $[a, b]$.

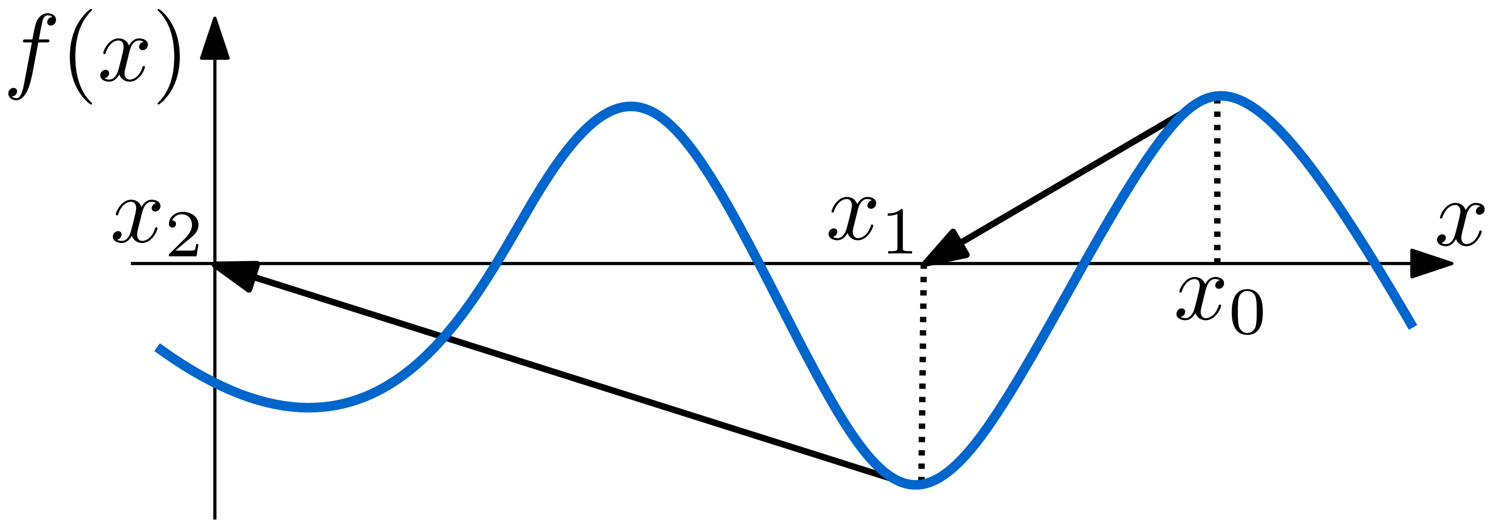
Método de Newton-Raphson: punto inicial en la regla de Fourier

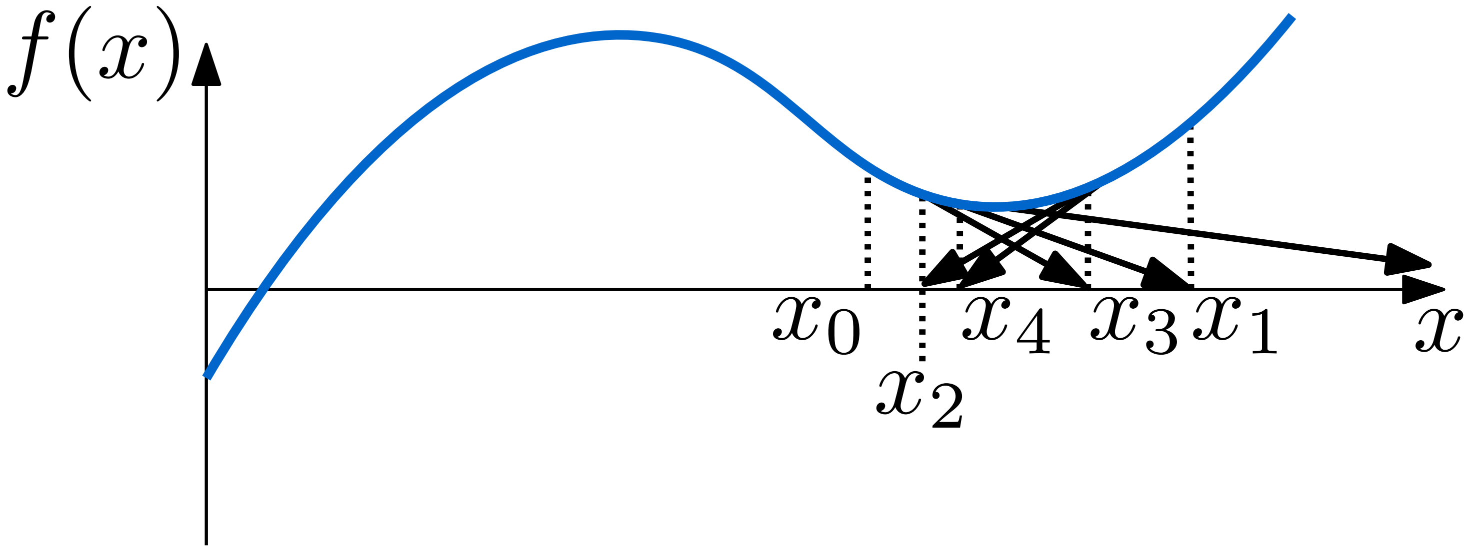


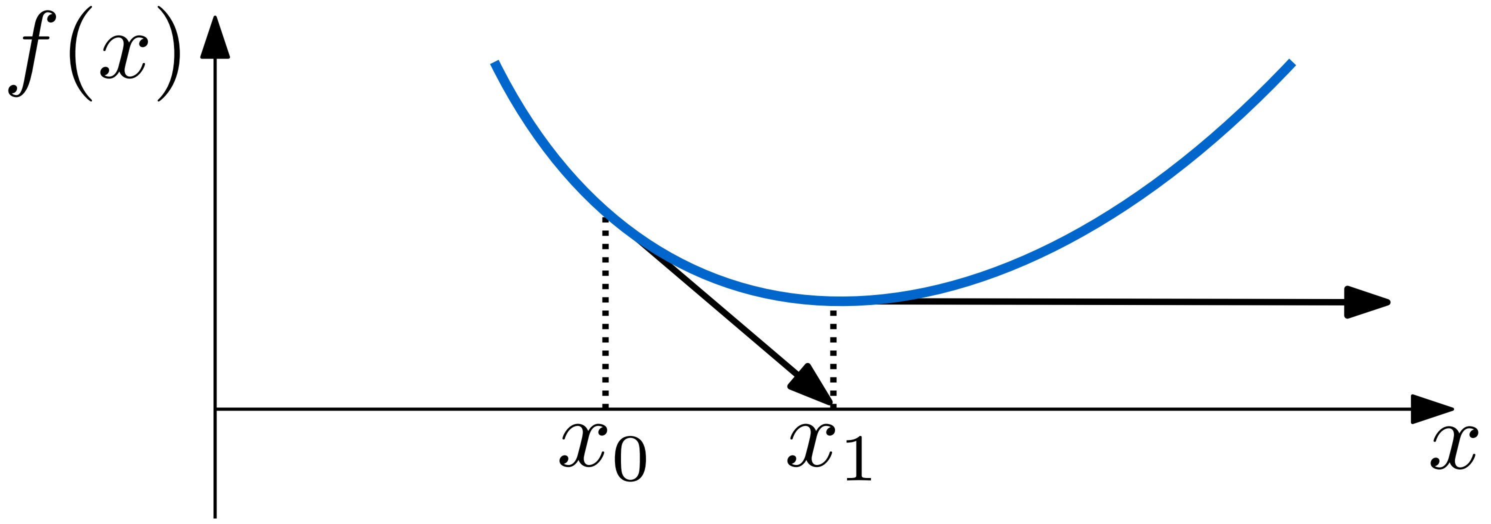
$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$
$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$
$x_0 = a$	$x_0 = b$	$x_0 = a$	$x_0 = b$

Método de Newton-Raphson: convergencia lenta









Método de la secante

- Idea: Se puede deducir del método de Newton-Raphson aproximando $\frac{1}{f'(x_n)} \approx \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$. La coordenada x_{n+1} es el punto de corte de la recta que pasa por $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.

Método de la secante

- Idea: Se puede deducir del método de Newton-Raphson aproximando $\frac{1}{f'(x_n)} \approx \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$. La coordenada x_{n+1} es el punto de corte de la recta que pasa por $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.

  Como Regula-Falsi pero sin tener en cuenta signos en los extremos.

Método de la secante

- Idea: Se puede deducir del método de Newton-Raphson aproximando $\frac{1}{f'(x_n)} \approx \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$. La coordenada x_{n+1} es el punto de corte de la recta que pasa por $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.

  Como Regula-Falsi pero sin tener en cuenta signos en los extremos.
- Algoritmo: Comenzando con dos valores x_0 y x_1 se construye una sucesión de puntos definidos por

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

  o equivalentemente

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Método de la secante

- Idea: Se puede deducir del método de Newton-Raphson aproximando $\frac{1}{f'(x_n)} \approx \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$. La coordenada x_{n+1} es el punto de corte de la recta que pasa por $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.

  Como Regula-Falsi pero sin tener en cuenta signos en los extremos.

- Algoritmo: Comenzando con dos valores x_0 y x_1 se construye una sucesión de puntos definidos por

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

o equivalentemente

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Menos cálculo pero puede tener dificultades si $x_n \approx x_{n-1}$

Método de la secante

- Idea: Se puede deducir del método de Newton-Raphson aproximando $\frac{1}{f'(x_n)} \approx \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$. La coordenada x_{n+1} es el punto de corte de la recta que pasa por $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas.

  Como Regula-Falsi pero sin tener en cuenta signos en los extremos.

- Algoritmo: Comenzando con dos valores x_0 y x_1 se construye una sucesión de puntos definidos por

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

  o equivalentemente

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

  Menos cálculo pero puede tener dificultades si $x_n \approx x_{n-1}$

- Criterio de parada: Dados tol$_x = \eta_1 > 0$ y tol$_f = \eta_2 > 0$

$$|x_{n+1} - x_n| < \eta_1 \quad \text{o} \quad |f(x_{n+1})| < \eta_2$$

Ejercicio

Determinar la raíz real de

$$f(x) = x^3 - x + 1.$$

1. Aplicar el método de Newton-Raphson ($\eta = 0.00005$).
2. Aplicar el método de la secante con una precisión de cuatro decimales correctos.
3. ¿Qué método necesita más iteraciones? ¿Cuál necesita menos? ¿Qué método proporciona una mejor aproximación? ¿Cuál proporciona una peor aproximación? Comentar las diferencias encontradas.

Método del punto fijo o de la iteración simple

Usando operaciones elementales, la ecuación $f(x) = 0$ se puede expresar como $x = g(x)$, donde g es una función continua.

$$f(x) = 0 \overset{\text{consistente}}{\Longleftrightarrow} x = g(x)$$

Método del punto fijo o de la iteración simple

Usando operaciones elementales, la ecuación $f(x) = 0$ se puede expresar como $x = g(x)$, donde g es una función continua.

$$f(x) = 0 \xLeftrightarrow{\text{consistente}} x = g(x)$$

Iteración simple: la aproximación inicial x_0 da lugar a la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$.

Método del punto fijo o de la iteración simple

Usando operaciones elementales, la ecuación $f(x) = 0$ se puede expresar como $x = g(x)$, donde g es una función continua.

$$f(x) = 0 \overset{\text{consistente}}{\Longleftrightarrow} x = g(x)$$

Iteración simple: la aproximación inicial x_0 da lugar a la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$.

- Punto fijo: si la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$, $n > 0$, es convergente a un valor α, entonces α es un punto fijo de g.

Método del punto fijo o de la iteración simple

Usando operaciones elementales, la ecuación $f(x) = 0$ se puede expresar como $x = g(x)$, donde g es una función continua.

$$f(x) = 0 \overset{\text{consistente}}{\Longleftrightarrow} x = g(x)$$

Iteración simple: la aproximación inicial x_0 da lugar a la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$.

- Punto fijo: si la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$, $n > 0$, es convergente a un valor α, entonces α es un punto fijo de g.
- El método de Newton-Raphson se puede considerar como un método iterativo tomando $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Método del punto fijo: ejemplo

Ejemplo. La ecuación $x^3 - x - 5 = 0$ se puede transformar de distintas maneras a la forma $x = g_i(x)$:

Método del punto fijo: ejemplo

Ejemplo. La ecuación $x^3 - x - 5 = 0$ se puede transformar de distintas maneras a la forma $x = g_i(x)$:

$$x = g_1(x) = x^3 - 5, \quad x = g_2(x) = \sqrt[3]{x+5}, \quad x = g_3(x) = \frac{5}{x^2 - 1}.$$

Método del punto fijo: ejemplo

Ejemplo. La ecuación $x^3 - x - 5 = 0$ se puede transformar de distintas maneras a la forma $x = g_i(x)$:

$$x = g_1(x) = x^3 - 5, \quad x = g_2(x) = \sqrt[3]{x+5}, \quad x = g_3(x) = \frac{5}{x^2 - 1}.$$

- La ecuación tiene una raíz muy próxima a 1.9, pero aún empezando con $x_0 = 1.9$, el método del punto fijo con g_1 y g_3 diverge, mientras que converge para g_2.

Método del punto fijo: ejemplo

Ejemplo. La ecuación $x^3 - x - 5 = 0$ se puede transformar de distintas maneras a la forma $x = g_i(x)$:

$$x = g_1(x) = x^3 - 5, \quad x = g_2(x) = \sqrt[3]{x+5}, \quad x = g_3(x) = \frac{5}{x^2 - 1}.$$

- La ecuación tiene una raíz muy próxima a 1.9, pero aún empezando con $x_0 = 1.9$, el método del punto fijo con g_1 y g_3 diverge, mientras que converge para g_2.

Observación: La sucesión $\{x_n\}$ puede no converger aunque se elija x_0 muy cercano al punto fijo.

Método del punto fijo : teorema de convergencia

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ el punto fijo de $x = g(x)$ y $\mathcal{J}_\alpha$ un entorno de α.

Teorema de convergencia

Si g es derivable y $|g'(x)| \leq k < 1$ en $\mathcal{J}_\alpha$. Entonces, para todo $x_0 \in \mathcal{J}_\alpha$, la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$, $n > 0$ verifica que:

- $x_n \in \mathcal{J}_\alpha$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
- $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.
- α es la única raíz de $x = g(x)$ dentro de $\mathcal{J}_\alpha$.

Método del punto fijo : teorema de convergencia

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ el punto fijo de $x = g(x)$ y $\mathcal{J}_\alpha$ un entorno de α.

Teorema de convergencia

Si g es derivable y $|g'(x)| \leq k < 1$ en $\mathcal{J}_\alpha$. Entonces, para todo $x_0 \in \mathcal{J}_\alpha$, la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$, $n > 0$ verifica que:

- $x_n \in \mathcal{J}_\alpha$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
- $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.
- α es la única raíz de $x = g(x)$ dentro de $\mathcal{J}_\alpha$.

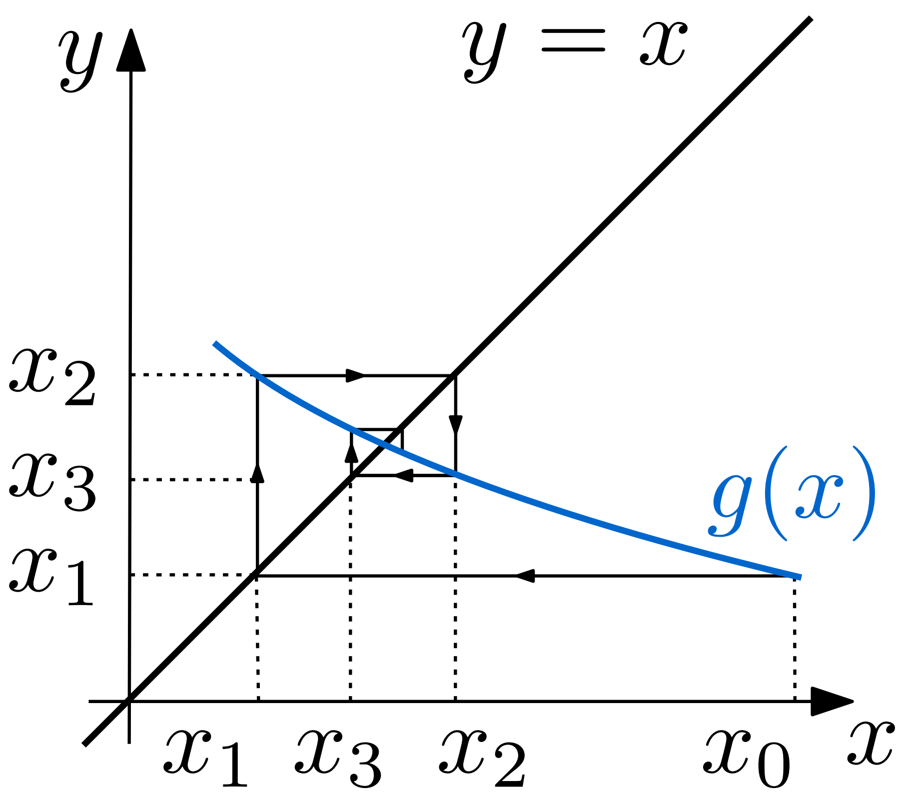
Observación

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq k|x_n - \alpha| \leq \ldots \leq k^{n+1}|x_0 - \alpha|.$$

Método del punto fijo: teorema de convergencia

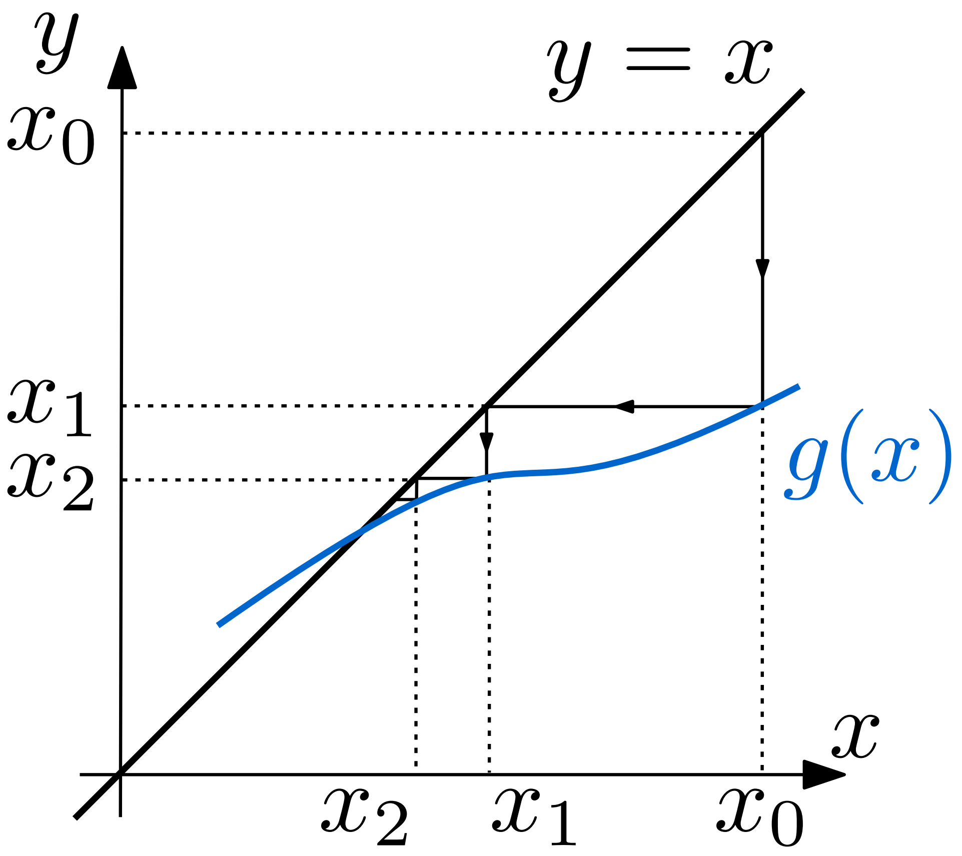
Convergencia en espiral

$-1 < g'(x^*) < 0$



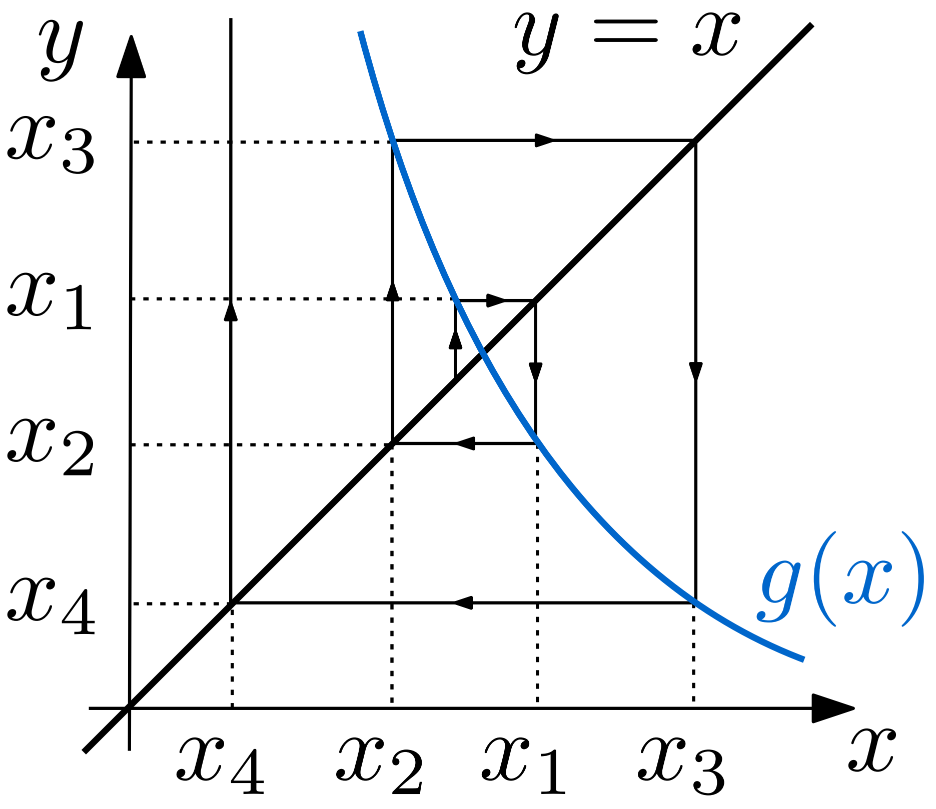
Convergencia en escalera

$0 < g'(x^*) < 1$



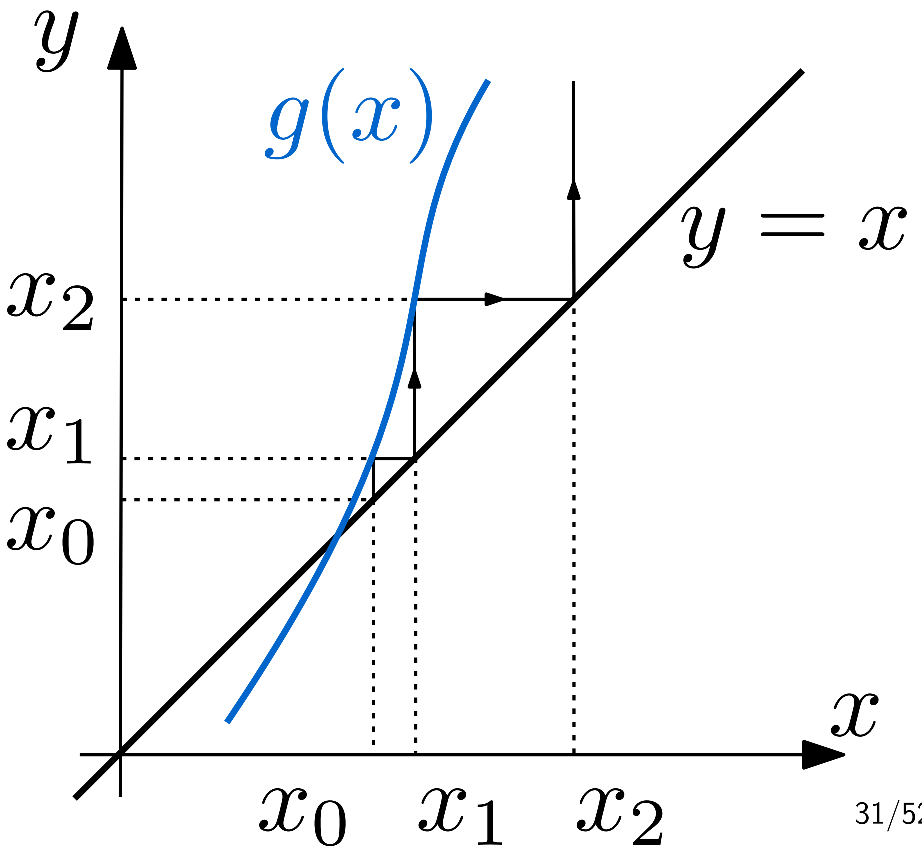
Divergencia en espiral

$g'(x^*) < -1$



Divergencia en escalera

$g'(x^*) > 1$



Ejercicio

Determina la raíz real de $x = \cos x$

1. Representar gráficamente la función. Dar un intervalo donde se encuentre una raíz de la función.
2. Tomar $x_0 = 0$, calcular 15 iteraciones de los métodos iterativos
$$x_{n+1} = \frac{x_n + \cos(x_n)}{2}, \quad x_{n+1} = \frac{2x_n + \cos(x_n)}{3}.$$
3. Tomar $x_0 = 1$, calcular 15 iteraciones de los métodos iterativos
$$x_{n+1} = \cos(x_n), \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n \cos(x_n)}.$$
4. ¿Qué método es convergente? ¿Cuál es divergente?

Algoritmos iterativos: estimación del error

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ la raíz de $f(x) = 0$, $\mathcal{J}_\alpha$ un entorno cerrado de α y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Algoritmos iterativos: estimación del error

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ la raíz de $f(x) = 0$, $\mathcal{J}_\alpha$ un entorno cerrado de α y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Cota "a posteriori"

Si f es derivable en $\mathcal{J}_\alpha$ y $x_n \in \mathcal{J}_\alpha$, se verifica que:

$$ea_n = |x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{\min_{x\in\mathcal{J}_\alpha} |f'(x)|}$$

Algoritmos iterativos: estimación del error

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ la raíz de $f(x) = 0$, $\mathcal{J}_\alpha$ un entorno cerrado de α y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Cota "a posteriori"

Si f es derivable en $\mathcal{J}_\alpha$ y $x_n \in \mathcal{J}_\alpha$, se verifica que:

$$ea_n = |x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{\min_{x\in\mathcal{J}_\alpha} |f'(x)|}$$

Teorema del Valor Medio:

$$|f(x_n) - f(\alpha)| = |f'(c)| \cdot |(x_n - \alpha)|$$

Estimación del error

Si tenemos en cuenta los errores de redondeo, $\bar{x}_{n+1} = g(\bar{x}_n) + \delta_n$,

Estimación del error

Si tenemos en cuenta los errores de redondeo, $\bar{x}_{n+1} = g(\bar{x}_n) + \delta_n$, con $|\delta_n| \leq \delta \ \forall n$.

Estimación del error

Si tenemos en cuenta los errores de redondeo, $\bar{x}_{n+1} = g(\bar{x}_n) + \delta_n$, con $|\delta_n| \leq \delta \ \forall n$.

Asumimos que g es derivable y $|g'(x)| \leq k < 1$ en el entorno de las abcisas.

Estimación del error

Si tenemos en cuenta los errores de redondeo, $\bar{x}_{n+1} = g(\bar{x}_n) + \delta_n$, con $|\delta_n| \leq \delta \; \forall n$.

Asumimos que g es derivable y $|g'(x)| \leq k < 1$ en el entorno de las abcisas.

Cota superior del error:

$$|\bar{x}_{n+1} - \alpha| < \frac{k}{1-k}|\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n| + \frac{1}{1-k}\delta.$$

Estimación del error

Si tenemos en cuenta los errores de redondeo, $\bar{x}_{n+1} = g(\bar{x}_n) + \delta_n$, con $|\delta_n| \leq \delta \ \forall n$.

Asumimos que g es derivable y $|g'(x)| \leq k < 1$ en el entorno de las abcisas.
Cota superior del error:

$$|\bar{x}_{n+1} - \alpha| < \frac{k}{1-k}|\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n| + \frac{1}{1-k}\delta.$$

error de truncamiento

error de redondeo

Estimación del error

Si tenemos en cuenta los errores de redondeo, $\bar{x}_{n+1} = g(\bar{x}_n) + \delta_n$, con $|\delta_n| \leq \delta \ \forall n$.

Asumimos que g es derivable y $|g'(x)| \leq k < 1$ en el entorno de las abcisas.

Cota superior del error:

$$|\bar{x}_{n+1} - \alpha| < \underbrace{\frac{k}{1-k}|\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n|}_{\text{error de truncamiento}} + \underbrace{\frac{1}{1-k}\delta}_{\text{error de redondeo}}.$$

Si la aritmética es exacta, $\bar{x}_{n+1} = g(\bar{x}_n)$,

Estimación del error

Si tenemos en cuenta los errores de redondeo, $\bar{x}_{n+1} = g(\bar{x}_n) + \delta_n$, con $|\delta_n| \leq \delta \ \forall n$.

Asumimos que g es derivable y $|g'(x)| \leq k < 1$ en el entorno de las abcisas.

Cota superior del error:

$$|\bar{x}_{n+1} - \alpha| < \underbrace{\frac{k}{1-k}|\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n|}_{\text{error de truncamiento}} + \underbrace{\frac{1}{1-k}\delta}_{\text{error de redondeo}}.$$

Si la aritmética es exacta, $\bar{x}_{n+1} = g(\bar{x}_n)$,

$$|\bar{x}_{n+1} - \alpha| < \frac{k^{n+1}}{1-k}|\bar{x}_1 - \bar{x}_0|.$$

Orden de convergencia

Orden de convergencia: definición

Definición: La sucesión de puntos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a α, y el método que la genera, tiene orden de convergencia al menos $p \geq 1$ si, para cualquier punto $x_0 \in J_\alpha$, existe $C > 0$ tal que

$$ea_n := |x_{n+1} - \alpha| < C|x_n - \alpha|^p, \ (\text{si } p = 1,\ C < 1).$$

Orden de convergencia: definición

Definición: La sucesión de puntos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a α, y el método que la genera, tiene orden de convergencia al menos $p \geq 1$ si, para cualquier punto $x_0 \in J_\alpha$, existe $C > 0$ tal que

$$ea_n := |x_{n+1} - \alpha| < C|x_n - \alpha|^p, \ (\text{si } p = 1,\ C < 1).$$

- En el caso en que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_{n+1} - \alpha)}{(x_n - \alpha)^p} = L,$$

diremos que la sucesión tiene orden de convergencia al menos p y L es la constante asintótica del error; si $p = 1$ se requiere que $|L| < 1$.

Orden de convergencia: definición

Definición: La sucesión de puntos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a α, y el método que la genera, tiene orden de convergencia al menos $p \geq 1$ si, para cualquier punto $x_0 \in J_\alpha$, existe $C > 0$ tal que

$$ea_n := |x_{n+1} - \alpha| < C|x_n - \alpha|^p, \text{ (si } p = 1,\, C < 1).$$

- En el caso en que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_{n+1} - \alpha)}{(x_n - \alpha)^p} = L,$$

  diremos que la sucesión tiene orden de convergencia al menos p y L es la constante asintótica del error; si $p = 1$ se requiere que $|L| < 1$.

- Cuanto mayor sea el orden de convergencia, más rápidamente convergerá la sucesión.

Orden de convergencia: métodos

Se considera una raíz simple α.

Orden de convergencia: métodos

Se considera una raíz simple α.

- Método de Regula Falsi: convergencia al menos lineal.

Orden de convergencia: métodos

Se considera una raíz simple α.

- Método de Regula Falsi: convergencia al menos lineal.
- Método de Newton: Si $f \in \mathcal{C}^2$ en un entorno de α, tenemos convergencia (al menos) cuadrática:

$$\frac{ea_{n+1}}{ea_n^2} \longrightarrow \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Orden de convergencia: métodos

Se considera una raíz simple α.

- Método de Regula Falsi: convergencia al menos lineal.
- Método de Newton: Si $f \in \mathcal{C}^2$ en un entorno de α, tenemos convergencia (al menos) cuadrática:
$$\frac{ea_{n+1}}{ea_n^2} \longrightarrow \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$
- Método de la secante: convergencia al menos superlineal:
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803.$$

Orden de convergencia: métodos

Se considera una raíz simple α.

- Método de Regula Falsi: convergencia al menos lineal.
- Método de Newton: Si $f \in \mathcal{C}^2$ en un entorno de α, tenemos convergencia (al menos) cuadrática:
$$\frac{ea_{n+1}}{ea_n^2} \longrightarrow \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$
- Método de la secante: convergencia al menos superlineal:
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803.$$
- Método del punto fijo $x_{n+1} = g(x_n)$: si $|g'(x)| < 1$ en un entorno $\mathcal{J}_\alpha$ de α, la convergencia es al menos lineal.

Orden de convergencia: métodos

Se considera una raíz simple α.

- Método de Regula Falsi: convergencia al menos lineal.
- Método de Newton: Si $f \in \mathcal{C}^2$ en un entorno de α, tenemos convergencia (al menos) cuadrática:
$$\frac{ea_{n+1}}{ea_n^2} \longrightarrow \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$
- Método de la secante: convergencia al menos superlineal:
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803.$$
- Método del punto fijo $x_{n+1} = g(x_n)$: si $|g'(x)| < 1$ en un entorno $\mathcal{J}_\alpha$ de α, la convergencia es al menos lineal.

  Si $g \in \mathcal{C}^p$ en $\mathcal{J}_\alpha$ y las derivadas $g^{j)}(\alpha)$ son 0 hasta orden $j \leq p-1$ y $\neq 0$ para orden $j = p$, entonces, si converge, el método es de orden p.

Cifras decimales correctas

Para un método de orden p, los decimales correctos en cada iteración son:

$$d_{n+1} = -\log_{10}|x_{n+1} - \alpha| \approx -p\log_{10}|x_n - \alpha| - \log_{10} L.$$

Cifras decimales correctas

Para un método de orden p, los decimales correctos en cada iteración son:

$$d_{n+1} = -\log_{10}|x_{n+1}-\alpha| \approx -p\log_{10}|x_n-\alpha| - \log_{10} L.$$

- En cada paso, el número de decimales correctos en un método de orden p se multiplica por p, aproximadamente

$$d_{n+1} \approx p \cdot d_n$$

Aceleración de la convergencia

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente linealmente a α tal que $f(\alpha) = 0$.

Aceleración de la convergencia

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente linealmente a α tal que $f(\alpha) = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_{n+1} - \alpha)}{(x_n - \alpha)} = \kappa < 1,$$

Aceleración de la convergencia

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente linealmente a α tal que $f(\alpha)=0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x_{n+1}-\alpha)}{(x_n-\alpha)}=\kappa<1,$$

$$\left.\begin{array}{l}(x_{n+2}-\alpha)=\kappa(x_{n+1}-\alpha)\\(x_{n+1}-\alpha)=\kappa(x_n-\alpha)\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha=\frac{x_{n+2}x_n-x_{n+1}^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$$

Aceleración de la convergencia

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente linealmente a α tal que $f(\alpha) = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_{n+1}-\alpha)}{(x_n-\alpha)} = \kappa < 1,$$

$$\left.\begin{array}{l}(x_{n+2}-\alpha) = \kappa(x_{n+1}-\alpha)\\(x_{n+1}-\alpha) = \kappa(x_n-\alpha)\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$$

Las diferencias progresivas hacia adelante
se definen como

$$\Delta x_n = (x_{n+1}-x_n)$$

Aceleración de la convergencia

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente linealmente a α tal que $f(\alpha)=0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x_{n+1}-\alpha)}{(x_n-\alpha)}=\kappa<1,$$

$$\left.\begin{aligned}(x_{n+2}-\alpha)&=\kappa(x_{n+1}-\alpha)\\(x_{n+1}-\alpha)&=\kappa(x_n-\alpha)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\alpha=\frac{x_{n+2}x_n-x_{n+1}^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$$

Las diferencias progresivas hacia adelante
se definen como

$$\Delta x_n=(x_{n+1}-x_n)$$

y para orden $k>1$,

$$\Delta^{(k)}x_n=\Delta\left(\Delta^{(k-1)}x_n\right).$$

Aceleración de la convergencia

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente linealmente a α tal que $f(\alpha)=0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x_{n+1}-\alpha)}{(x_n-\alpha)}=\kappa<1,$$

$$\left.\begin{aligned}(x_{n+2}-\alpha)&=\kappa(x_{n+1}-\alpha)\\(x_{n+1}-\alpha)&=\kappa(x_n-\alpha)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\alpha=\frac{x_{n+2}x_n-x_{n+1}^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$$

Las diferencias progresivas hacia adelante
se definen como

$$\Delta x_n=(x_{n+1}-x_n)$$

y para orden $k>1$,

$$\Delta^{(k)}x_n=\Delta\left(\Delta^{(k-1)}x_n\right).$$

$$\Delta^2x_n=\Delta x_{n+1}-\Delta x_n=x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n$$

Aceleración de la convergencia

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente linealmente a α tal que $f(\alpha)=0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x_{n+1}-\alpha)}{(x_n-\alpha)}=\kappa<1,$$

$$\left.\begin{aligned}(x_{n+2}-\alpha)&=\kappa(x_{n+1}-\alpha)\\(x_{n+1}-\alpha)&=\kappa(x_n-\alpha)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \alpha=\frac{x_{n+2}x_n-x_{n+1}^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$$

$$=x_{n+2}-\frac{(\Delta x_{n+1})^2}{\Delta^2 x_n}$$

mejor estabilidad numérica

Las diferencias progresivas hacia adelante se definen como

$$\Delta x_n=(x_{n+1}-x_n)$$

y para orden $k>1$,

$$\Delta^{(k)}x_n=\Delta\left(\Delta^{(k-1)}x_n\right).$$

$$\Delta^2 x_n=\Delta x_{n+1}-\Delta x_n=x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n$$

Aceleración de la convergencia: preceso de Aitken

Proceso Δ^2 de Aitken

$$x'_{n+2} = \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = x_{n+2} - \frac{(\Delta x_{n+1})^2}{\Delta^2 x_n}$$

Entonces $x'_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$ más rápidamente en la práctica.

A partir de un proceso $x_{k+1} = g(x_k)$ de primer orden, y unas iteraciones, x_0, x_1 y x_2, calculamos x'_2, a partir de las iteraciones, x_1, x_2 y x_3 calculamos x'_3, y sucesivamente.

Aceleración de la convergencia: método de Steffensen

Inicio: Dado $a = x_0$, $b = x_1 = g(x_0)$ y $c = x_2 = g(x_1)$ de un proceso $x_{k+1} = g(x_k)$ de primer orden, calculamos $a' = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = a - \frac{(b-a)^2}{c - 2b + a}$.

Aceleración de la convergencia: método de Steffensen

Inicio: Dado $a = x_0$, $b = x_1 = g(x_0)$ y $c = x_2 = g(x_1)$ de un proceso $x_{k+1} = g(x_k)$ de primer orden, calculamos $a' = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = a - \frac{(b-a)^2}{c-2b+a}$.

Iteración: Con la terna a', $b' = g(a')$ y $c' = g(g(a'))$, calculamos un nuevo $a'' = a' - \frac{(b'-a')^2}{c'-2b'+a'}$.

Aceleración de la convergencia: método de Steffensen

Inicio: Dado $a = x_0$, $b = x_1 = g(x_0)$ y $c = x_2 = g(x_1)$ de un proceso $x_{k+1} = g(x_k)$ de primer orden, calculamos $a' = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = a - \frac{(b-a)^2}{c - 2b + a}$.

Iteración: Con la terna a', $b' = g(a')$ y $c' = g(g(a'))$, calculamos un nuevo $a'' = a' - \frac{(b' - a')^2}{c' - 2b' + a'}$.

Método de Steffensen: en general, para cada $n \geq 0$, dado $a^{(n)}$ definimos:
$b^{(n+1)} = g(a^{(n)})$ y $c^{(n+1)} = g(b^{(n+1)})$

$$a^{(n+1)} = a^{(n)} - \frac{\left(b^{(n+1)} - a^{(n+1)}\right)^2}{c^{(n+1)} - 2b^{(n+1)} + a^{(n)}}.$$

Aceleración de la convergencia: método de Steffensen

Inicio: Dado $a = x_0$, $b = x_1 = g(x_0)$ y $c = x_2 = g(x_1)$ de un proceso $x_{k+1} = g(x_k)$ de primer orden, calculamos $a' = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = a - \frac{(b-a)^2}{c-2b+a}$.

Iteración: Con la terna a', $b' = g(a')$ y $c' = g(g(a'))$, calculamos un nuevo $a'' = a' - \frac{(b'-a')^2}{c'-2b'+a'}$.

Método de Steffensen: en general, para cada $n \geq 0$, dado $a^{(n)}$ definimos: $b^{(n+1)} = g(a^{(n)})$ y $c^{(n+1)} = g(b^{(n+1)})$

$$a^{(n+1)} = a^{(n)} - \frac{\left(b^{(n+1)} - a^{(n+1)}\right)^2}{c^{(n+1)} - 2b^{(n+1)} + a^{(n)}}.$$

Entonces $x''_n = a^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$ más rápidamente que el método del punto fijo inicial y que el método de Aitken.

Aceleración de la convergencia: ejemplo

Observamos el siguiente caso: $x_{n+1} = e^{-x_n}$ y $x_0 = 0.5$.

Normal	Aitken	Steffensen
0.5		
0.606530660		
0.545239212	0.567623876	0.567623876
0.579703095	0.567298989	
0.560064628	0.567193142	
0.571172149	0.567159364	0.567143314
0.564862947	0.567148453	
0.568438048	0.567144952	
0.566409453	0.567143825	0.567143290

Sistemas de ecuaciones (no lineales)

Sistemas de ecuaciones no lineales

La función $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, donde $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, de varias variables da lugar al sistema de ecuaciones no lineales

$$F(\mathbf{z}) = 0,$$

que también se puede escribir como

$$\begin{cases} f_1(z_1, \ldots, z_n) = 0, \\ f_2(z_1, \ldots, z_n) = 0, \\ \vdots \\ f_m(z_1, \ldots, z_n) = 0. \end{cases}$$

Método del punto fijo

Si transformamos $F(z) = 0$ en $\mathbf{z} = G(\mathbf{z})$, el método es $\mathbf{z}^{(k+1)} = G(\mathbf{z}^{(k)})$.

Algoritmo computacional:
Dados z^0 y tol $= \eta > 0$, el algoritmo es:

mientras $\|\mathbf{z}^{(k+1)} - \mathbf{z}^{(k)}\| < \eta$ y $\|F(\mathbf{z}^{(k+1)})\| < \eta$:

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = G(\mathbf{z}^{(k)}).$$

Método del punto fijo

Si transformamos $F(z) = 0$ en $\mathbf{z} = G(\mathbf{z})$, el método es $\mathbf{z}^{(k+1)} = G(\mathbf{z}^{(k)})$.

Algoritmo computacional:
Dados z^0 y tol $= \eta > 0$, el algoritmo es:

mientras $\|\mathbf{z}^{(k+1)} - \mathbf{z}^{(k)}\| < \eta$ y $\|F(\mathbf{z}^{(k+1)})\| < \eta$:

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = G(\mathbf{z}^{(k)}).$$

La convergencia está condicionada a la existencia de una norma matricial submultiplicativa $|| \cdot ||$ tal que $\|J_G(\alpha)\| < 1$, equivalentemente, $\rho(J_G(\alpha)) < 1$ donde $J_G(\alpha)$ es la matriz jacobiana de G evaluada en α.

Método de la iteración simple: teorema de convergencia

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^n$ la solución de $F(\mathbf{z}) = 0$ y el punto fijo de $\mathbf{z} = G(\mathbf{z})$, y $\mathcal{D}_\alpha$ un conjunto cerrado y convexo que contiene la solución α.

Si G es de clase $C^1(\mathcal{D}_\alpha)$ y $\|J_G(\mathbf{z})\| \leq L < 1$ para todo $\mathbf{z} \in \mathcal{D}_\alpha$. Entonces, para todo $\mathbf{z}^0 \in \mathcal{D}_\alpha$, la sucesión $\mathbf{z}^{k+1} = g(\mathbf{z}^k)$, $k > 0$ cumple:

- $\mathbf{z}^k \in \mathcal{D}_\alpha$, $k = 0, 1, 2, \ldots$
- $\lim_{k\to\infty} \mathbf{z}^k = \alpha$.
- α es la única raíz de $\mathbf{z} = G(\mathbf{z})$ dentro de $\mathcal{D}_\alpha$.
- Se verifica que

$$||\mathbf{z}^{(k+1)} - \alpha|| \leq \frac{L}{1-L}||\mathbf{z}^{(k+1)} - \mathbf{z}^k||$$

Ejercicio

Aplicar el método de la iteración simple para resolver el sistema no lineal

$$x = \sin(x + y)$$

$$y = \cos(x - y)$$

cerca de $(1, 1)^t$ con una precisión tal que

$$\|\mathbf{z}^{(k+1)} - \mathbf{z}^{(k)}\| \leq 10^{-6} \quad \text{y} \quad \|F(\mathbf{z}^{(k+1)})\| < 10^{-6},$$

si $\mathbf{z} = (x, y)^t$.

Método de Newton-Raphson para sistemas

Si F es diferenciable con continuidad, el método es

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} - (J_F(\mathbf{z}^{(k)}))^{-1} \cdot F(\mathbf{z}^{(k)})$$

para $\mathbf{z}^{(k)}$ indicamos el vector de la k-ésima iteración.

Algoritmo de Newton-Raphson para sistemas no lineales

Dados $\mathbf{z}^{(0)}$ y $\eta > 0$, el algoritmo es:

$$\begin{cases} (J_F(\mathbf{z}^{(k)}) \cdot \mathbf{w}^{(k)} & = -F(\mathbf{z}^{(k)}) \\ \mathbf{z}^{(k+1)} & = \mathbf{z}^{(k)} + \mathbf{w}^{(k)} \end{cases}$$

hasta que
$\|\mathbf{z}^{(k+1)} - \mathbf{z}^{(k)}\| < \eta$ y $\|F(\mathbf{z}^{(k+1)})\| < \eta$

Variantes del método de Newton

Se reduce el costo computacional de cada iteración contra el orden de convergencia.

- Newton modificado. Se fija la matriz $J_F(\mathbf{z}^{(k)})$ por un número constante de iteraciones.
- Método de Jacobi. La matriz $J_F(\mathbf{z}^{(k)})$ se substituye por una matriz diagonal, con la diagonal de $J_F(\mathbf{z}^{(k)})$. Matriz $D_F(\mathbf{z}^{(k)})$.
- Método de Gauss-Seidel. La matriz $J_F(\mathbf{z}^{(k)})$ se substituye por la matriz triangular inferior de $J_F(\mathbf{z}^{(k)})$. Matriz $L_F(\mathbf{z}^{(k)})$.
- Método de sobrerelajación o SOR. Para $\omega = \frac{1}{1+\rho}$

$$\mathbf{z}^{(i+1)} = \mathbf{z}^{(i)} - (\rho \cdot D_F(\mathbf{z}^{(i)}) + L_F(\mathbf{z}^{(i)}))^{-1} \cdot F(\mathbf{z}^{(i)})$$

Ejercicio

Aplicar el método de Newton para resolver el sistema no lineal

$$x = \sin(x + y)$$

$$y = \cos(x - y)$$

cerca de $(1, 1)^t$ con una precisión tal que

$$\|\mathbf{z}^{(k+1)} - \mathbf{z}^{(k)}\| \leq 10^{-6} \quad \text{y} \quad \|F(\mathbf{z}^{(k+1)})\| < 10^{-6},$$

si $\mathbf{z} = (x, y)^t$.

Anexo

Vector gradiente $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(a), \frac{\partial f}{\partial z_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(a) \right).$$

Matriz jacobiana $F : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$J_F(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1(a)}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial z_n} \\ \frac{\partial f_2(a)}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2(a)}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(a)}{\partial z_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(a)}{\partial z_1} & \frac{\partial f_n(a)}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(a)}{\partial z_n} \end{pmatrix}.$$

Guia de estudio

Libro *Càlcul numèric: teoria i pràctica* de M. Grau Sánchez y M. Noguera Batlle.

- Conceptos asociados: Capítulo 6, páginas 197–209 y 216–221.
- Problemas propuestos: 1, 2, 4, 9 y 10.
- Prácticas resueltas: de la página 238-243.
- Prácticas propuestas: páginas 244-248.

Libro *Cálculo numérico* de M. Grau Sánchez y M. Noguera Batlle.

- Conceptos asociados: Capítulo 6, páginas 175–185 y 191–196.
- Problemas propuestos: 1, 2, 4, 9 y 10.
- Prácticas resueltas: de la página 212-217.
- Prácticas propuestas: páginas 217-221.

Libro *Cálculo científico con MATLAB y Octave* de A. Quarteroni y F. Saleri.

- Conceptos y ejercicios resueltos: capítulo 2, páginas 41–63 y 68–69.
- Problemas y prácticas propuestas: del 2.1 al 2.17