Computación Numérica

Tema 5 (III). Ecuaciones diferenciales

Irene Parada

irene.parada@upc.edu

Departamento de Matemáticas

Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech

21 de mayo de 2024

Definiciones y conceptos

Ecuaciones diferenciales

- Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función y sus derivadas respecto a una o más variables independientes.

Ecuaciones diferenciales

- Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función y sus derivadas respecto a una o más variables independientes.
- Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una ecuación que relaciona una función y sus derivadas respecto a una variable independiente.

$$F\left(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Ecuaciones diferenciales

- Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función y sus derivadas respecto a una o más variables independientes.

- Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una ecuación que relaciona una función y sus derivadas respecto a una variable independiente.

$$F\left(\boxed{t,}\, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Ecuaciones diferenciales

- Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función y sus derivadas respecto a una o más variables independientes.

- Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una ecuación que relaciona una función y sus derivadas respecto a una variable independiente.

$$\boxed{F\left(\boxed{t}, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.}$$

Forma implícita

Cuando t es el tiempo, es común la notación $\dot{y} = y' = \frac{dy}{dt}$, $\ddot{y} = y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$, ...

Ecuaciones diferenciales

- Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función y sus derivadas respecto a una o más variables independientes.

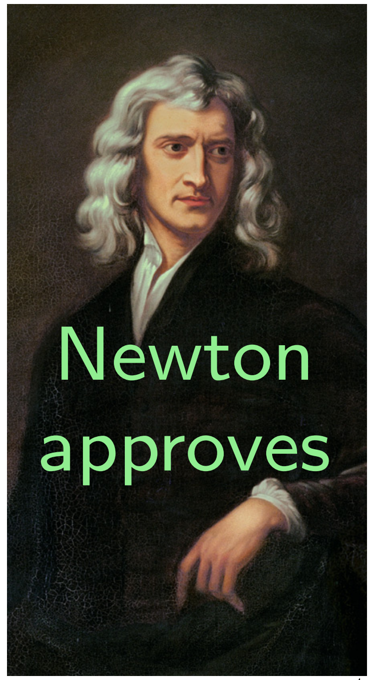
- Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una ecuación que relaciona una función y sus derivadas respecto a una variable independiente.

$$\boxed{F\left(\boxed{t}, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.}$$

Forma implícita

Cuando t es el tiempo, es común la notación $\dot{y} = y' = \frac{dy}{dt}$, $\ddot{y} = y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$, $\ldots$

$$\overset{10}{\dot{y}} = \overset{\vdots\vdots}{y} = \frac{d^{10}y}{dt^{10}}$$



Ecuaciones diferenciales

- Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función y sus derivadas respecto a una o más variables independientes.

- Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una ecuación que relaciona una función y sus derivadas respecto a una variable independiente.

$$\boxed{F\left(\boxed{t}, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.}$$

Forma implícita

Cuando t es el tiempo, es común la notación $\dot{y} = y' = \frac{dy}{dt}$, $\ddot{y} = y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$, ...

- El orden de una ecuación diferencial es el mayor de los órdenes de las derivadas.

Ecuaciones diferenciales

- Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función y sus derivadas respecto a una o más variables independientes.

- Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una ecuación que relaciona una función y sus derivadas respecto a una variable independiente.

$$\boxed{F\left(\boxed{t}, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.}$$

Forma implícita

Cuando t es el tiempo, es común la notación $\dot{y} = y' = \frac{dy}{dt}$, $\ddot{y} = y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$, ...

- El orden de una ecuación diferencial es el mayor de los órdenes de las derivadas.

EDOs de primer orden:

$F(t, y, \dot{y}) = 0$ o bien $\dot{y} = f(t, y).$

Ecuaciones diferenciales

- Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función y sus derivadas respecto a una o más variables independientes.

- Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una ecuación que relaciona una función y sus derivadas respecto a una variable independiente.

$$\boxed{F\left(\boxed{t}, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.}$$

Forma implícita

Cuando t es el tiempo, es común la notación $\dot{y} = y' = \frac{dy}{dt}$, $\ddot{y} = y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$, $\ldots$

- El orden de una ecuación diferencial es el mayor de los órdenes de las derivadas.

EDOs de primer orden:

$F(t, y, \dot{y}) = 0$ o bien $\dot{y} = f(t, y)$.

Ejemplo: $\dot{y} = t^2 + y + \cos(y)$

Ecuaciones diferenciales

- Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función y sus derivadas respecto a una o más variables independientes.

- Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una ecuación que relaciona una función y sus derivadas respecto a una variable independiente.

$$\boxed{F\left(\boxed{t}, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0.}$$

Forma implícita

Cuando t es el tiempo, es común la notación $\dot{y} = y' = \frac{dy}{dt}$, $\ddot{y} = y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$, ...

- El orden de una ecuación diferencial es el mayor de los órdenes de las derivadas.

EDOs de primer orden:

$F(t, y, \dot{y}) = 0$ o bien $\dot{y} = f(t, y)$.

Ejemplo: $\dot{y} = \cancel{t^2} + y + \cos(y)$

Si f no depende de t la ecuación diferencial es autónoma.

Sistemas de EDOs

Una ecuación diferencial de segundo orden puede considerarse como un sistema de dos ecuaciones de primer orden:

Sistemas de EDOs

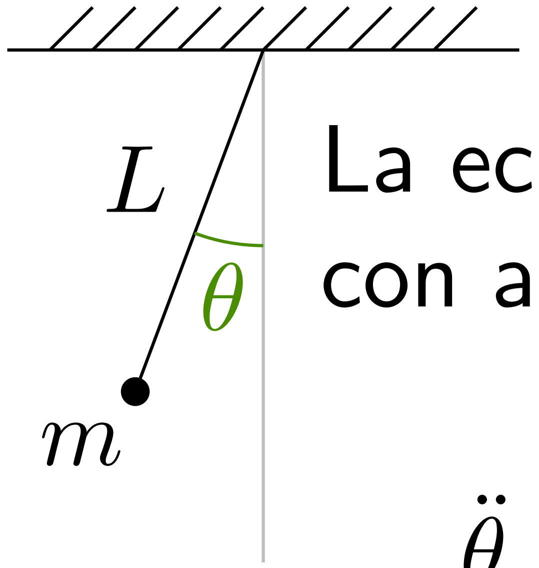
Una ecuación diferencial de segundo orden puede considerarse como un sistema de dos ecuaciones de primer orden:

→ como en el ejemplo del péndulo que ya vimos

Sistemas de EDOs

Una ecuación diferencial de segundo orden puede considerarse como un sistema de dos ecuaciones de primer orden:

como en el ejemplo del péndulo que ya vimos



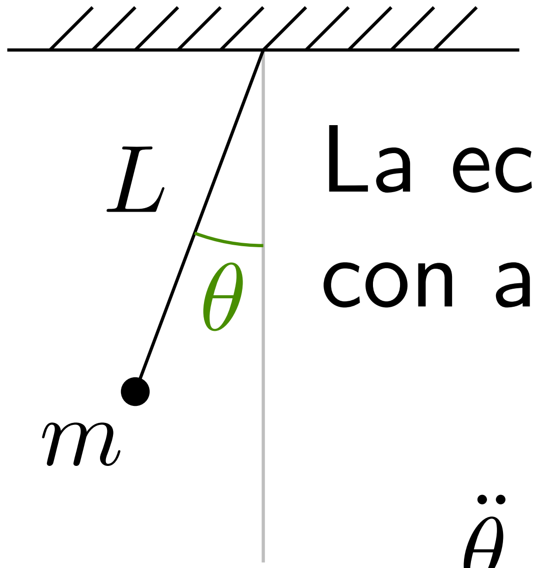
La ecuación del péndulo con amortiguación es:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta - \delta\dot{\theta}$$

Sistemas de EDOs

Una ecuación diferencial de segundo orden puede considerarse como un sistema de dos ecuaciones de primer orden:

como en el ejemplo del péndulo que ya vimos



La ecuación del péndulo con amortiguación es:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta - \delta\dot{\theta}$$

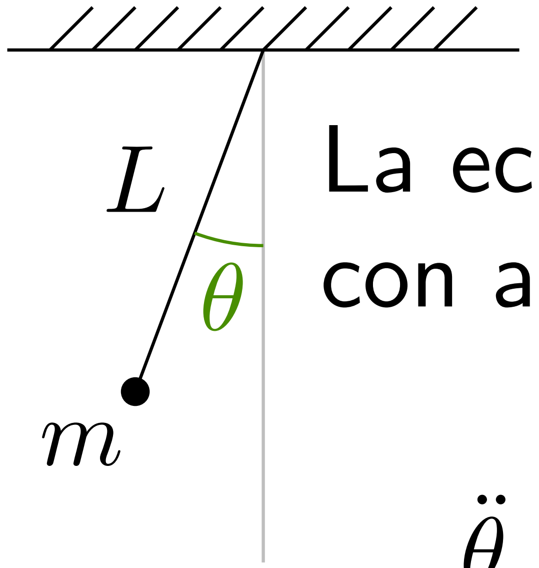
Con $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$ tenemos:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L}\sin(x_1) - \delta x_2 \end{pmatrix}.$$

Sistemas de EDOs

Una ecuación diferencial de segundo orden puede considerarse como un sistema de dos ecuaciones de primer orden:

como en el ejemplo del péndulo que ya vimos



La ecuación del péndulo con amortiguación es:

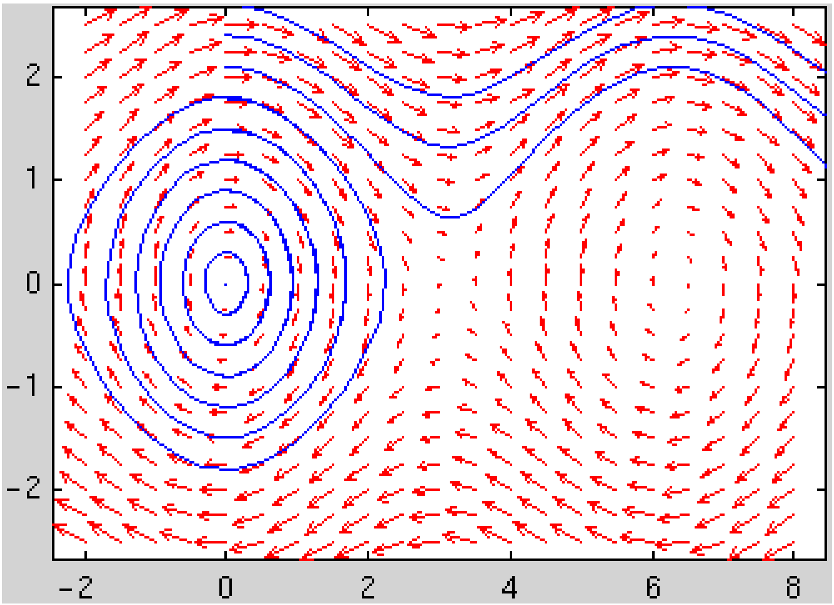
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta - \delta\dot{\theta}$$

Con $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$ tenemos:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L}\sin(x_1) - \delta x_2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo sin amortiguación:

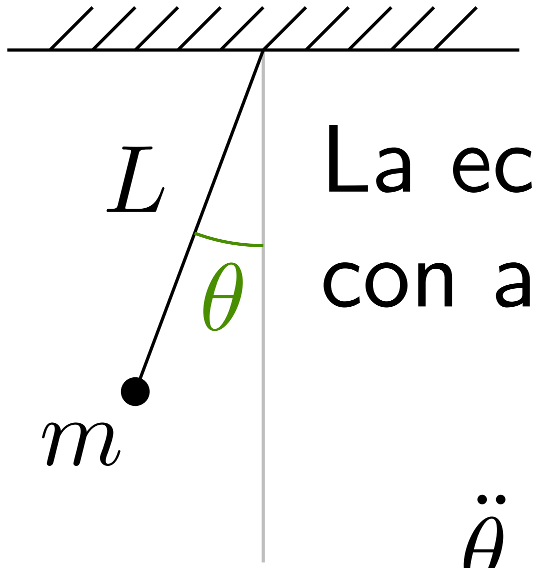
$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) \end{pmatrix}$$



Sistemas de EDOs

Una ecuación diferencial de segundo orden puede considerarse como un sistema de dos ecuaciones de primer orden:

como en el ejemplo del péndulo que ya vimos



La ecuación del péndulo con amortiguación es:

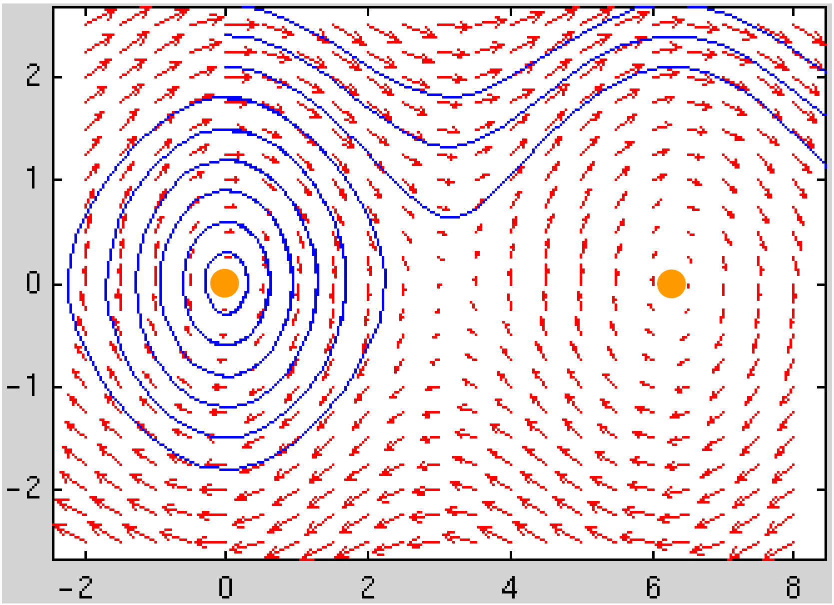
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta - \delta\dot{\theta}$$

Con $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$ tenemos:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L}\sin(x_1) - \delta x_2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo sin amortiguación:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) \end{pmatrix}$$



La habíamos linealizado en torno a los puntos fijos tal que

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}.$$

Sistemas de EDOs

Una ecuación diferencial de orden n puede escribirse como un sistema de n ecuaciones de primer orden:

$$\boxed{F\left(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.}$$

Forma implícita

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}).}$$

Sistema de EDOs de primer orden

Sistemas de EDOs

Una ecuación diferencial de orden n puede escribirse como un sistema de n ecuaciones de primer orden:

$$\boxed{F\left(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.}$$

Forma implícita

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}).}$$

Sistema de EDOs de primer orden

Si f no depende de t la ecuación diferencial es autónoma.

Ecuación diferencial lineal

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es lineal si es de la forma

$$c_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + c_{n-1}(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + c_1(t)\frac{dy}{dt} + c_0 y = f(t)$$

donde las funciones $c_i(t)$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ y $f(t)$ son continuas, no necesariamente lineales, y $c_n(t) \neq 0$.

Ecuación diferencial lineal

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es lineal si es de la forma

$$c_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + c_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + c_1(t)\frac{dy}{dt} + c_0 y = f(t)$$

donde las funciones $c_i(t)$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ y $f(t)$ son continuas, no necesariamente lineales, y $c_n(t) \neq 0$.

Ejemplos:

- Lineal orden 1: $y' + y = t^2 \cos(t)$.
- Lineal orden 2: $t^3 y'' + e^t y' + y = e^{2t}$.
- Lineal orden 2: $y'' + 8y' + 16y = e^{2t}$ de coeficientes constantes.
- Lineal orden 2: $y'' + 8y' = 0$ de coeficientes constantes y homogénea.

Ecuación diferencial lineal

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es lineal si es de la forma

$$c_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + c_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + c_1(t)\frac{dy}{dt} + c_0 y = f(t)$$

donde las funciones $c_i(t)$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ y $f(t)$ son continuas, no necesariamente lineales, y $c_n(t) \neq 0$.

Ejemplos:

- Lineal orden 1: $y' + y = t^2 \cos(t)$.
- Lineal orden 2: $t^3 y'' + e^t y' + y = e^{2t}$.
- Lineal orden 2: $y'' + 8y' + 16y = e^{2t}$ de coeficientes constantes.
- Lineal orden 2: $y'' + 8y' = 0$ de coeficientes constantes y homogénea.

Homogénea $\neq$ autónoma
Ejemplos: $y'' - ty = 0;$
$y' - 2y = 1.$

Ecuación diferencial lineal

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es lineal si es de la forma

$$c_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + c_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + c_1(t)\frac{dy}{dt} + c_0 y = f(t)$$

donde las funciones $c_i(t)$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ y $f(t)$ son continuas, no necesariamente lineales, y $c_n(t) \neq 0$.

Homogénea $\neq$ autónoma

Ejemplos: $y'' - ty = 0$;

$y' - 2y = 1$.

Ejemplos:

- Lineal orden 1: $y' + y = t^2\cos(t)$.
- Lineal orden 2: $t^3y'' + e^t y' + y = e^{2t}$.
- Lineal orden 2: $y'' + 8y' + 16y = e^{2t}$ de coeficientes constantes.
- Lineal orden 2: $y'' + 8y' = 0$ de coeficientes constantes y homogénea.

Podemos escribir toda ecuación diferencial de orden n como un sistema de orden 1 y dimensión n. Sistema lineal de EDOs de orden 1: $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$.

Ecuación en derivadas parciales

Si la ecuación contiene derivadas parciales de una o más variables independientes, se dice ecuación en derivadas parciales (EDP).

Ejemplos:

- Ecuación del calor: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x}.$
- Ecuación de Laplace: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0.$
- Ecuación de ondas 3D: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$

Solución de una ecuación diferencial

$$F\left(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

Una solución de la ecuación diferencial de orden n en el intervalo $a < t < b$ es una función continua $\phi(t)$, con todas las derivadas de orden menor o igual a n continuas, tal que

$$F\left(t, \phi(t), \phi'(t), \phi''(t), \ldots, \phi^{(n)}(t)\right) = 0, \quad t \in [a, b]$$

Solución de una ecuación diferencial

$$F\left(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

Una solución de la ecuación diferencial de orden n en el intervalo $a < t < b$ es una función continua $\phi(t)$, con todas las derivadas de orden menor o igual a n continuas, tal que

$$F\left(t, \phi(t), \phi'(t), \phi''(t), \ldots, \phi^{(n)}(t)\right) = 0, \quad t \in [a, b]$$

Ejemplos:

- $y(t) = e^{3t}$ es solución de $y' - 3y = 0$.
- $y(t) = \cos(3t)$ es solución de $y'' + 9y' = 0$.

Ya sabemos resolver sistemas $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ a partir de los autovalores y autovectores de la matriz del sistema.

Problema de valores iniciales: problema de Cauchy

Un problema de valor inicial (PVI) consiste en resolver una ecuación diferencial sujeta a condiciones iniciales para modelar las condiciones del sistema en el instante t_0.

Problema de valores iniciales: problema de Cauchy

Un problema de valor inicial (PVI) consiste en resolver una ecuación diferencial sujeta a condiciones iniciales para modelar las condiciones del sistema en el instante t_0.

- Un PVI consta de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de orden n y n condiciones iniciales impuestas a la función desconocida y a sus $n-1$ primeras derivadas en un valor de la variable independiente t.

Problema de valores iniciales: problema de Cauchy

Un problema de valor inicial (PVI) consiste en resolver una ecuación diferencial sujeta a condiciones iniciales para modelar las condiciones del sistema en el instante t_0.

- Un PVI consta de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de orden n y n condiciones iniciales impuestas a la función desconocida y a sus $n-1$ primeras derivadas en un valor de la variable independiente t.

Ejemplo:

$$y'(t) = \frac{1}{2}y(t), \quad y(0) = 2$$

Problema de valores iniciales: problema de Cauchy

Un problema de valor inicial (PVI) consiste en resolver una ecuación diferencial sujeta a condiciones iniciales para modelar las condiciones del sistema en el instante t_0.

- Un PVI consta de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de orden n y n condiciones iniciales impuestas a la función desconocida y a sus $n-1$ primeras derivadas en un valor de la variable independiente t.

Ejemplo:

$$y'(t) = \frac{1}{2}y(t), \quad y(0) = 2$$

Solución analítica:
`dsolve()` en MATLAB.

Solución aproximada numérica:
`ode23()` y `ode45()` en MATLAB.

Teorema de Picard(-Lindelöf)

Sea $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ continua, consideremos el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y), \\ y(t_0) &= y_0, \qquad (t_0, y_0) \in [a, b] \times [c, d] \end{cases} \tag{1}$$

Teorema de Picard-Lindelöf

Si $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ es una función continua en la región $[a, b] \times [c, d]$, podemos encontrar h tal que para todo t del intervalo $|t - t_0| \leq h$ existe una y solo una solución del problema de valor inicial (1).

Teorema de Picard(-Lindelöf)

Sea $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continua, consideremos el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t,y), \\ y(t_0) &= y_0, \qquad (t_0, y_0) \in [a,b] \times [c,d] \end{cases} \tag{1}$$

Teorema de Picard-Lindelöf

Si $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)$ es una función continua en la región $[a,b]\times[c,d]$, podemos encontrar h tal que para todo t del intervalo $|t - t_0| \leq h$ existe una y solo una solución del problema de valor inicial (1).

Se puede generalizar para sistemas de EDOs de primer orden.

Soluciones analíticas

Resolución analítica: tipos de ecuaciones

- Variables separables.
  Una ecuación diferencial que se puede escribir como $g(y)y' = h(t)$, se llama ecuación diferencial de variables separables.

- Lineales de primer orden.
  Una ecuación diferencial que se puede escribir como $y' = p(t)y + q(t)$, se llama ecuación diferencial lineal de primer orden.

- Lineales de segundo orden con coeficientes constantes.
  Una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes tiene la forma $y'' + by' + cy = q(t)$, donde b, c son constantes reales y $q(t)$ es una función real.

Aproximación numérica

Introducción

La resolución analítica de las ecuaciones diferenciales no es posible más que en un número de casos muy limitado.

Es indispensable disponer de técnicas de resolución aproximada.

Introducción

La resolución analítica de las ecuaciones diferenciales no es posible más que en un número de casos muy limitado.

Es indispensable disponer de técnicas de resolución aproximada.

- Para entender el funcionamiento de los principales métodos de resolución de problemas de valor inicial, nos centraremos en ecuaciones diferenciales de primer orden.

Introducción

La resolución analítica de las ecuaciones diferenciales no es posible más que en un número de casos muy limitado.

Es indispensable disponer de técnicas de resolución aproximada.

- Para entender el funcionamiento de los principales métodos de resolución de problemas de valor inicial, nos centraremos en ecuaciones diferenciales de primer orden.

Problema y objetivo

Para el problema de valor inicial,

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(a) = \alpha, \quad t \in [a, b],$$

el objetivo es obtener un valor aproximado de $y(b)$.

Siempre que se cumplan las hipótesis del teorema de Picard.

Familias de métodos

El método numérico nos define cómo obtener la aproximación de $y(t+h)$, en función de las aproximaciones anteriores (para $h > 0$):

$$y(t+h) = \underbrace{y(t) + h \cdot \Phi(t, y(t), h)}_{\text{Método}} + \underbrace{h \cdot \mathcal{T}(h)}_{\text{Error}}$$

Básicamente, hay tres grandes familias de métodos:

- Métodos derivados de la serie de Taylor.
- Métodos de Euler y métodos Runge-Kutta.
- Métodos lineales multipaso.

Familias de métodos

El método numérico nos define cómo obtener la aproximación de $y(t+h)$, en función de las aproximaciones anteriores (para $h > 0$):

$$y(t+h) = \underbrace{y(t) + h \cdot \Phi(t, y(t), h)}_{\text{Método}} + \underbrace{h \cdot \mathcal{T}(h)}_{\text{Error}}$$

Básicamente, hay tres grandes familias de métodos:

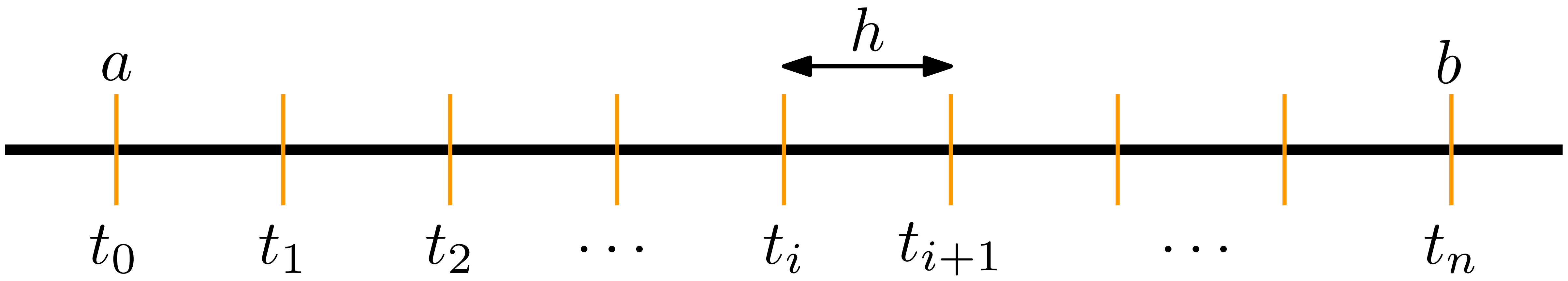
- Métodos derivados de la serie de Taylor.
- Métodos de Euler y métodos Runge-Kutta.
- Métodos lineales multipaso.

- Error
- Estabilidad

Discretización

Generalmente se consideran puntos equiespaciados: dado n tomamos

$$t_i = a + ih, \text{ para } i = 0, 1, 2, \ldots, n, \text{ con } h = t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

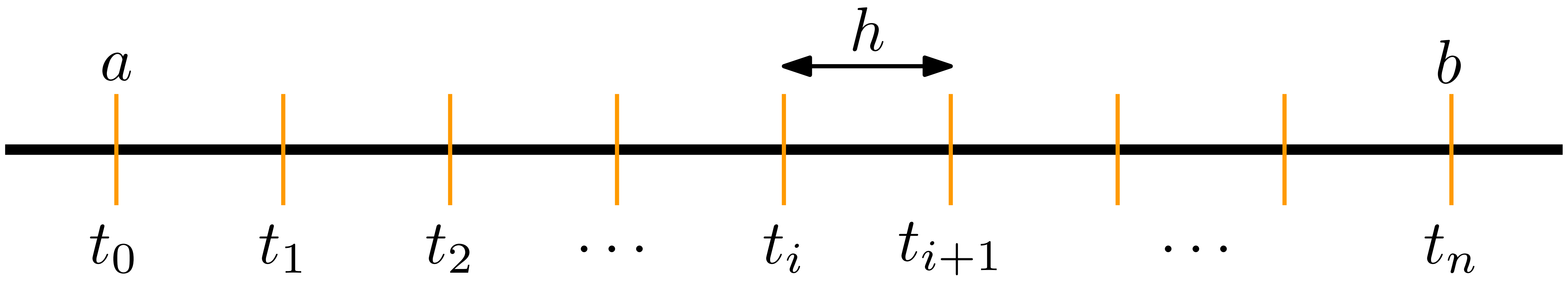


Los métodos nos permitirán encontrar la solución aproximada en $Y_i \simeq y_i \equiv y(t_i)$ en estos puntos del dominio, y en particular $y(b) \simeq Y_n$.

Discretización

Generalmente se consideran puntos equiespaciados: dado n tomamos

$$t_i = a + ih, \text{ para } i = 0, 1, 2, \ldots, n, \text{ con } h = t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$



Los métodos nos permitirán encontrar la solución aproximada en $Y_i \simeq y_i \equiv y(t_i)$ en estos puntos del dominio, y en particular $y(b) \simeq Y_n$.

- $y_i \equiv y(t_i)$ la solución analítica exacta, $y(t)$, evaluada en los puntos $t_i = a + ih$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.
- $Y_i \simeq y(t_i)$ el valor obtenido por el método numérico empleado en los puntos $t_i = a + ih$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Aproximación numérica: orden del método

Problema de valor inicial:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(a) = \alpha, \quad t \in [a, b].$$

Método de resolución numérica:

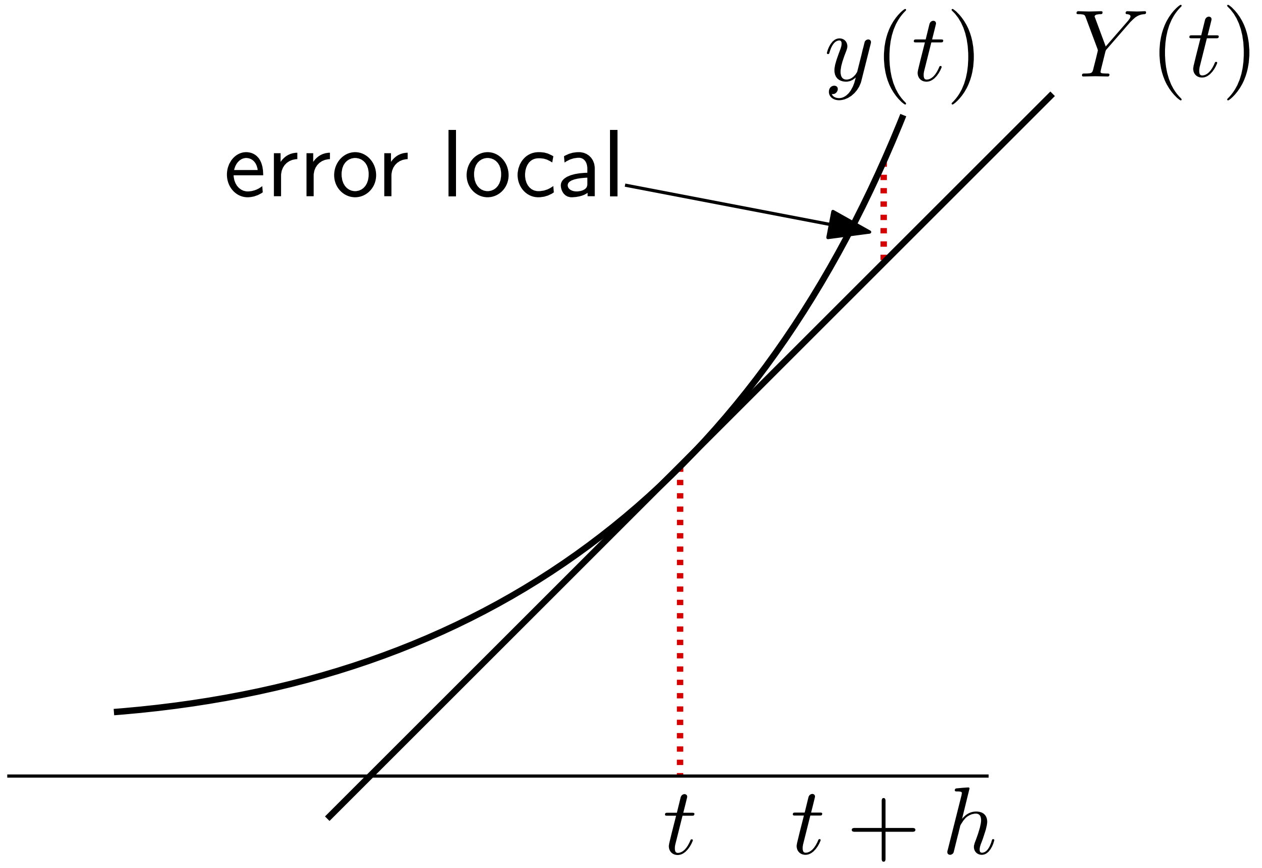
$$y(t+h) = \underbrace{y(t) + \Phi(f, t, y(t), h)}_{\text{Método}} + \underbrace{h \cdot \mathcal{T}(h)}_{\text{Error}}, \quad h > 0$$

se dice que es un método de orden k si

$$\mathcal{T}(h) = O(h^k).$$

Aproximación numérica: error local

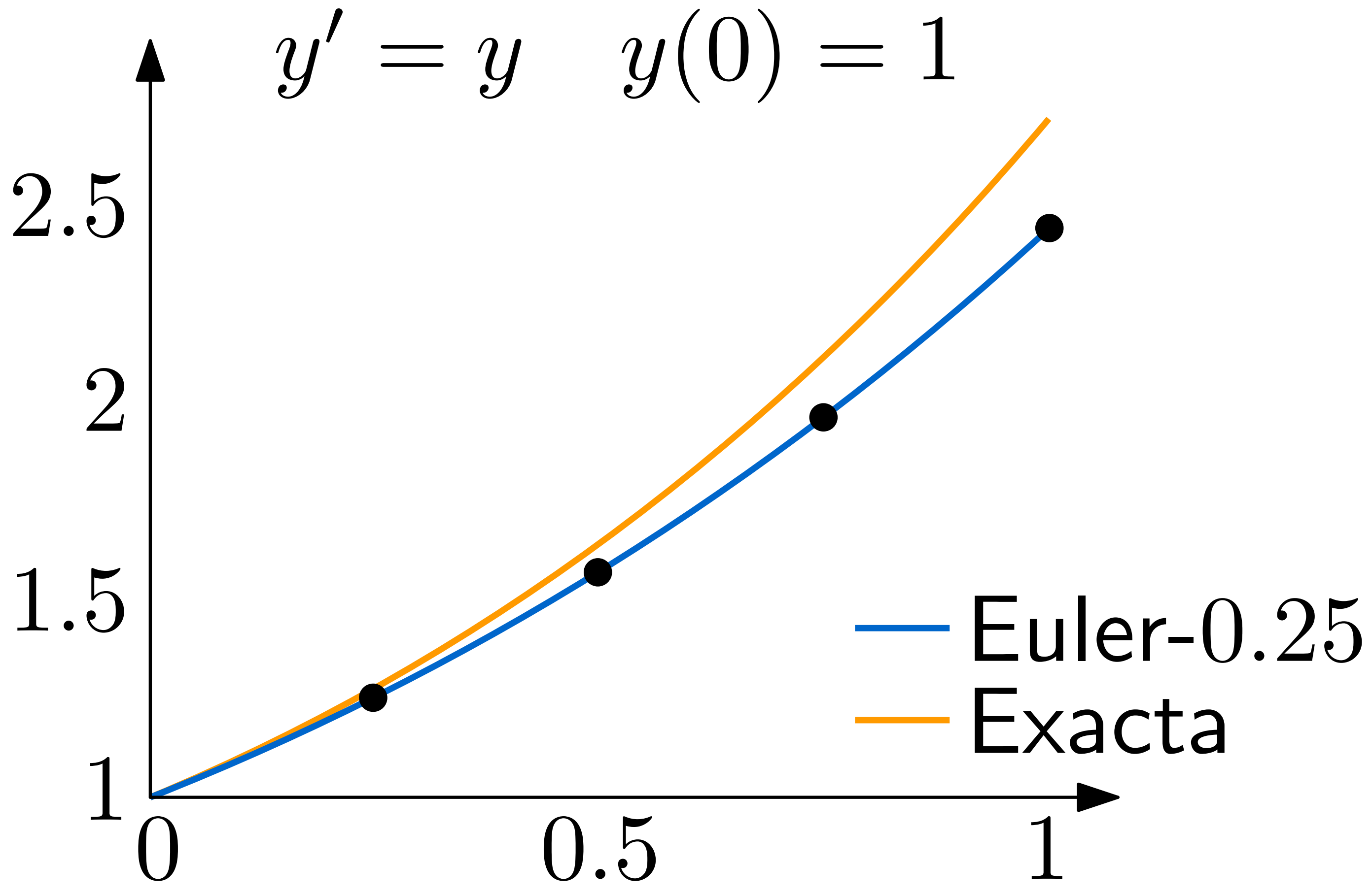
Error local: debido al método de aproximación que empleamos, es un error de truncamiento.



El error local de truncamiento es el error que se comete al aproximar el valor de $y(t+h)$ si se conociera el valor exacto de $y(t)$.

Aproximación numérica: error global

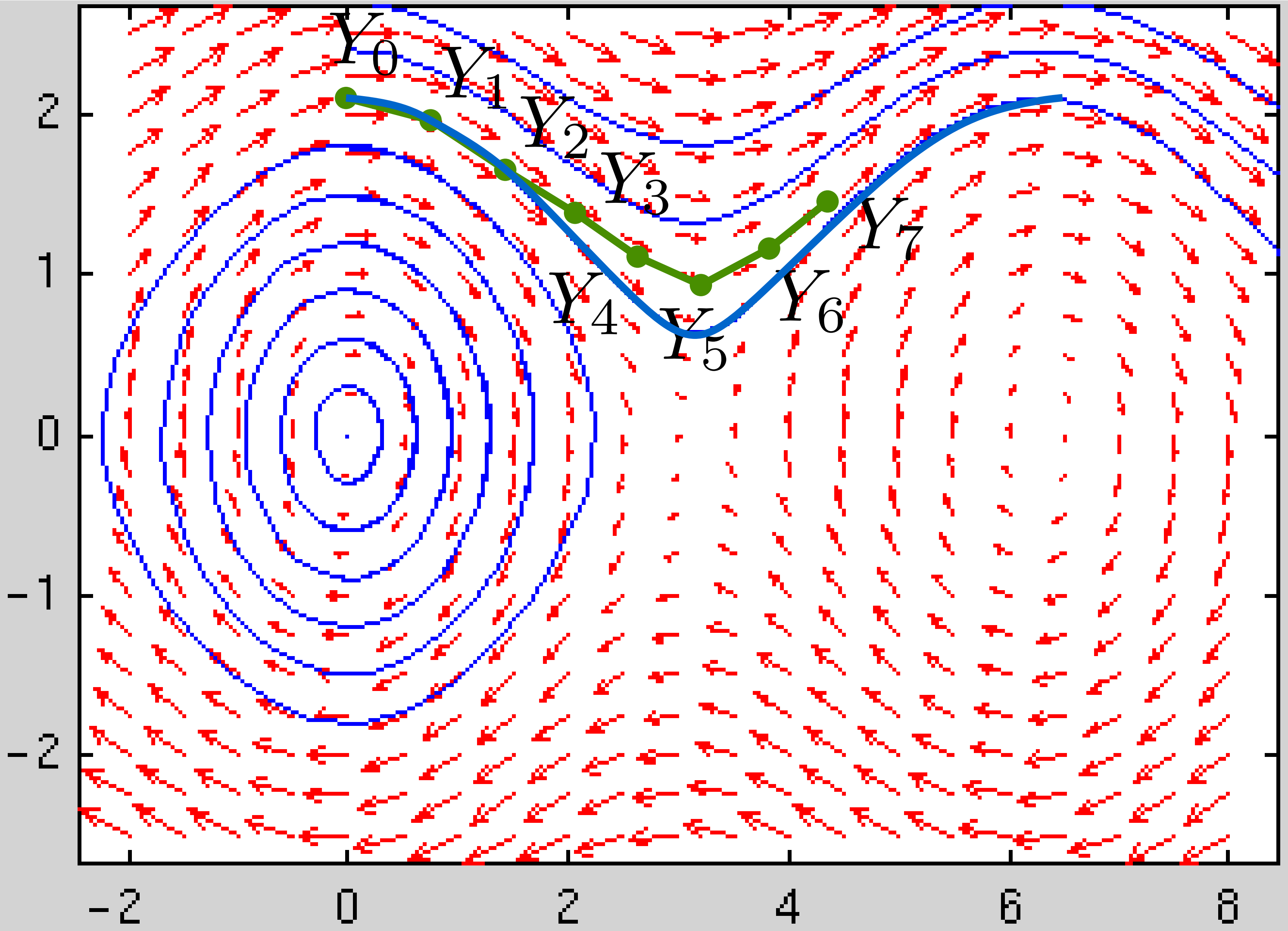
Error global: debido a los errores locales anteriores acumulados, o porque conocemos la condición inicial con error, ...



El error global es el error que se acumula al aplicar n pasos del método, es decir,

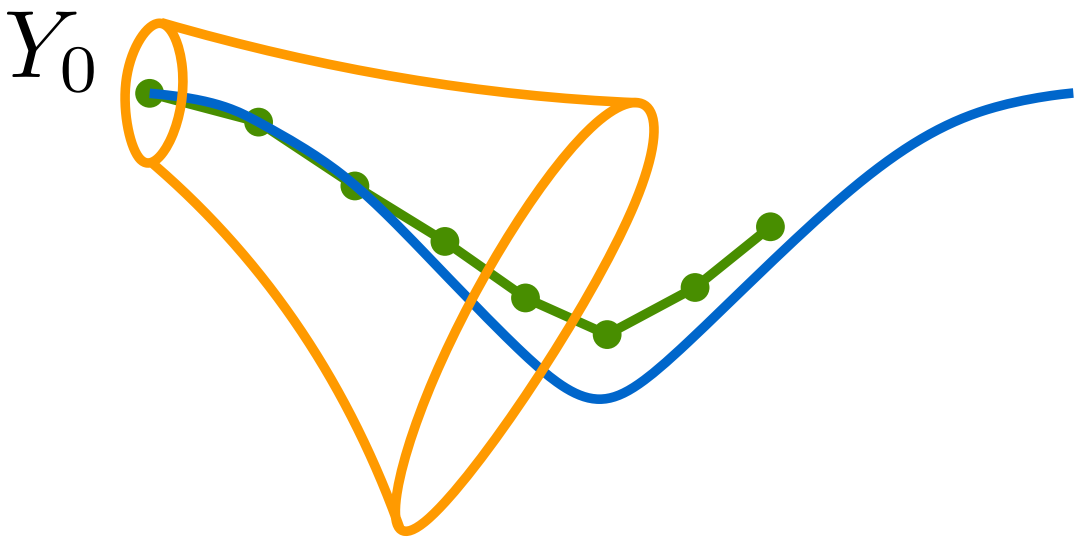
$$y(t_n) - Y_n.$$

Resolución numérica de EDOs



En un instante de tiempo t tenemos un campo vectorial dado por $f(\mathbf{x}, t)$.

La incertidumbre en el valor inicial se propaga en el tiempo.



Tipos de aproximación numérica: paso simple vs. multipaso

Los métodos de resolución numérica se clasifican en:

- **Paso simple**. Calculan la solución y_{i+1} en el instante t_{i+1} a partir del valor de la función en y_i en el instante t_i.
  Método de Euler:
  $$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$
- **Pasos múltiples**. Calculan la solución y_{i+1} en el instante t_{i+1} a partir del valor de la función en los instantes $t_i, t_{i-1}, \ldots, t_{i-n+1}$.
  Método de Adams-Bashforth de dos pasos:
  $$y_{i+2} = y_{i+1} + \frac{h}{2}\left(3f(t_{i+1}, y_{i+1}) - f(t_i, y_i)\right).$$

Tipos de aproximación numérica: métodos explícitos e implícitos

Los métodos de resolución numérica se clasifican en:

- **Métodos explícitos**. Los métodos explícitos calculan y_{i+1} directamente.
  Método de Adams-Bashforth de dos pasos:

$$y_{i+2} = y_{i+1} + \frac{h}{2}\left(3f(t_{i+1}, y_{i+1}) - f(t_i, y_i)\right).$$

- **Métodos implícitos**. Los métodos implícitos necesitan resolver un sistema de ecuaciones no lineal para calcular la solución y_{i+1}.
  Regla trapezoidal:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})\right).$$

Método de Euler explícito

Método de Euler de un paso explícito

El problema

$$y'(t_i) = f(t_i, y(t_i)), \quad y(t_0) = y_0,$$

se transforma en

$$Y_{i+1} = Y_i + hf(t_i, Y_i) \quad Y_0 = y_0,$$

haciendo la sustitución

$$y'(t_i) \longleftrightarrow \frac{Y_{i+1} - Y_i}{h}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Método de Euler: deducción

La idea principal del método de Euler es aproximar la derivada en cada t_i de la discretización usando la fórmula forward:

$$y'(t_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + \mathcal{T}(h), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

donde $\mathcal{T}(h)$ es el error local de truncamiento.

Método de Euler: deducción

La idea principal del método de Euler es aproximar la derivada en cada t_i de la discretización usando la fórmula forward:

$$y'(t_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + \mathcal{T}(h), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

donde $\mathcal{T}(h)$ es el error local de truncamiento.

Entonces, realizando la sustitución se obtiene

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i) + h \cdot \mathcal{T}(h), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Método de Euler: deducción

La idea principal del método de Euler es aproximar la derivada en cada t_i de la discretización usando la fórmula forward:

$$y'(t_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + \mathcal{T}(h), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

donde $\mathcal{T}(h)$ es el error local de truncamiento.

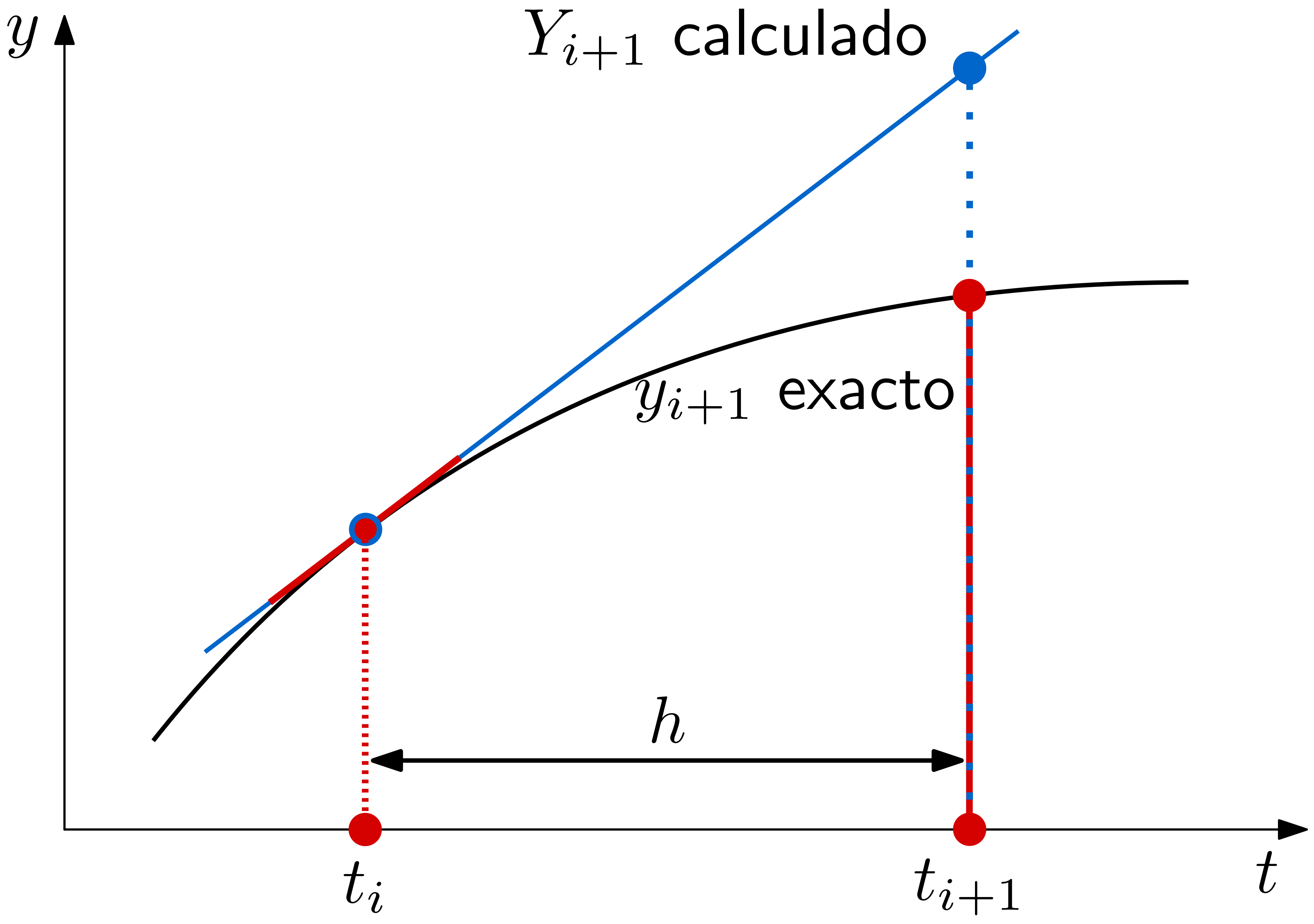
Entonces, realizando la sustitución se obtiene

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i) + h \cdot \mathcal{T}(h), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Sin los errores, obtenemos el método numérico de Euler:

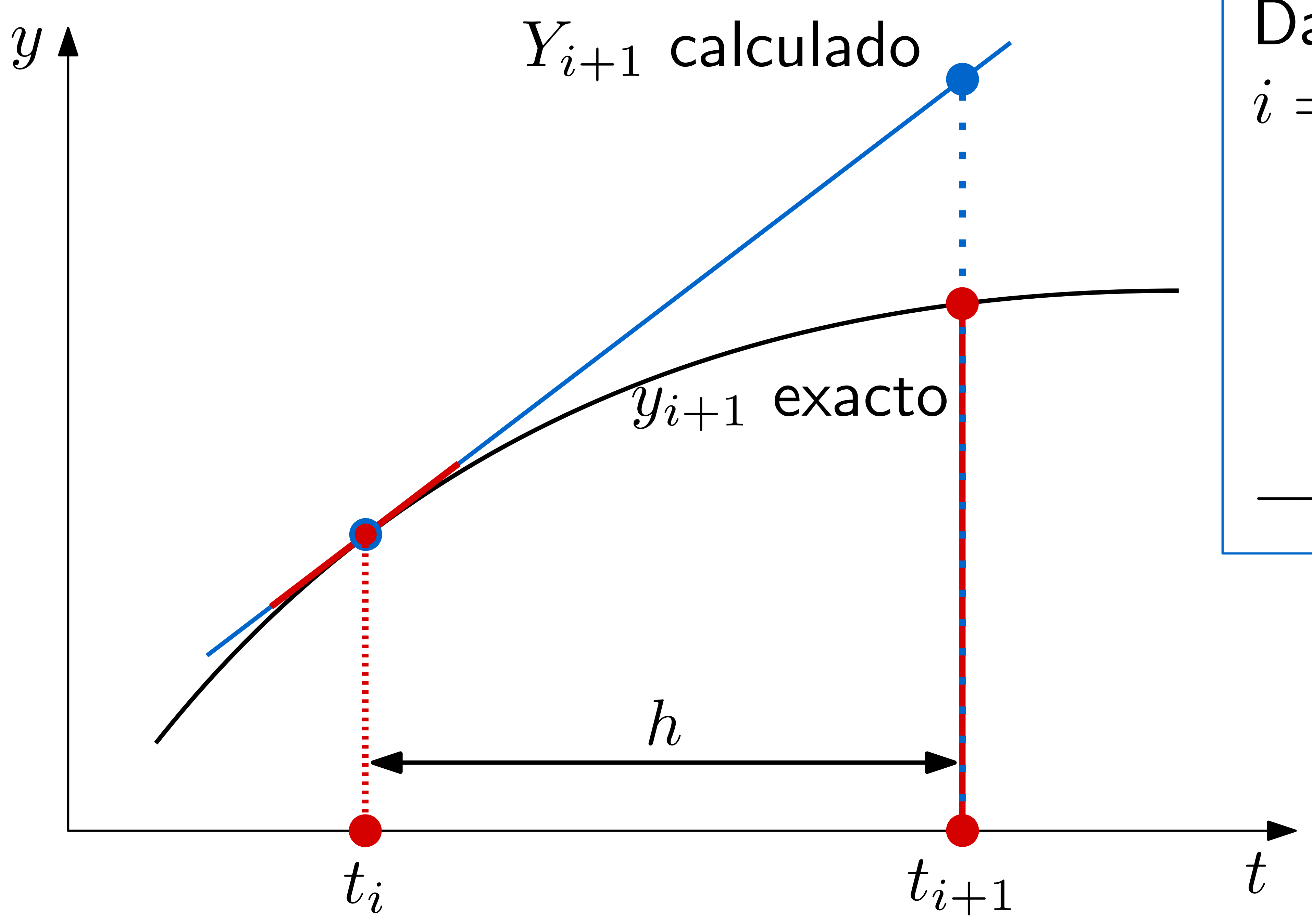
$$Y_{i+1} = Y_i + h \cdot f(t_i, Y_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Método de Euler de un paso explícito



La idea es avanzar por la recta tangente.

Método de Euler de un paso explícito



Dado n, tomamos $t_i = a + ih$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, con $h = \frac{b-a}{n}$

$$\left.\begin{aligned} Y_0 &= y_0 \\ Y_{i+1} &= Y_i + h \cdot f(t_i, Y_i) \end{aligned}\right\}$$

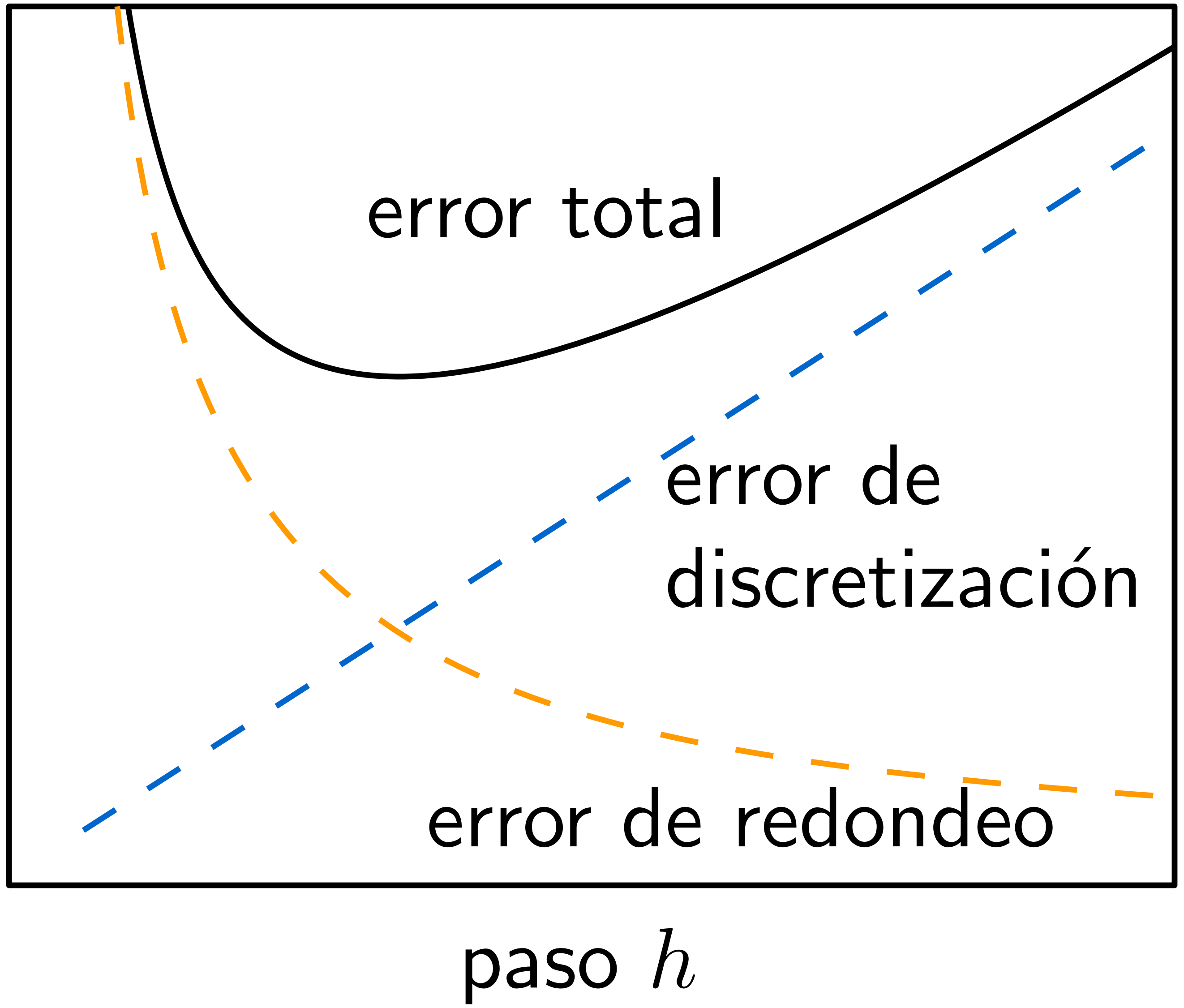
$\longrightarrow y(b) \approx Y_n.$

La idea es avanzar por la recta tangente.

Método de Euler: error total

- Error local de discretización $\mathcal{T} = \mathcal{O}(h)$.
- Error local $h \cdot \mathcal{T} = \mathcal{O}\left(h^2\right)$.
- Error global $\mathcal{O}(h) =$ Número de pasos $\mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right) \times$ Error Local $\mathcal{O}\left(h^2\right)$.
- Error de redondeo, debido a la precisión de la aritmética del ordenador.

Comentario:
Disminuir el paso h de integración de la ecuación diferencial no implica un aumento de la precisión de la solución obtenida.



Método de Euler implícito

Método de Euler ímplicito

El problema

$$y'(t_i) = f(t_i, y(t_i)), \quad y(t_0) = y_0,$$

se transforma en

$$Y_{i+1} = Y_i + hf(t_{i+1}, Y_{i+1}), \quad Y_0 = y_0,$$

haciendo la sustitución

$$y'(t_{i+1}) \longleftrightarrow \frac{Y_{i+1} - Y_i}{h}, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Método de Euler ímplicito

El problema

$$y'(t_i) = f(t_i, y(t_i)), \quad y(t_0) = y_0,$$

se transforma en

$$Y_{i+1} = Y_i + hf(t_{i+1}, Y_{i+1}), \quad Y_0 = y_0,$$

haciendo la sustitución

$$y'(t_{i+1}) \longleftrightarrow \frac{Y_{i+1} - Y_i}{h}, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

La expresión obtenida $\boxed{\text{no}}$ nos da directamente una fórmula para la nueva aproximación Y_{i+1}.

Método de Euler ímplicito: ejemplo

Ejemplo:

$$\mathbf{PVI} \equiv \begin{cases} y'(t) = -\alpha(y - t^2) + 2t, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \qquad \Rightarrow y(t) = y_0 e^{-\alpha t} + t^2.$$

Método de Euler ímplicito: ejemplo

Ejemplo:

$$\mathbf{PVI} \equiv \begin{cases} y'(t) = -\alpha(y - t^2) + 2t, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \qquad \Rightarrow y(t) = y_0 e^{-\alpha t} + t^2.$$

El algoritmo de Euler implícito para el PVI anterior sería

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + h\left(-\alpha(Y_{i+1} - t^2) + 2t\right) \\ &= Y_i - h\alpha Y_{i+1} + h(\alpha t^2 + 2t) \end{aligned}$$

Método de Euler ímplicito: ejemplo

Ejemplo:

$$\mathbf{PVI} \equiv \begin{cases} y'(t) = -\alpha(y - t^2) + 2t, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \qquad \Rightarrow y(t) = y_0 e^{-\alpha t} + t^2.$$

El algoritmo de Euler implícito para el PVI anterior sería

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + h\left(-\alpha(Y_{i+1} - t^2) + 2t\right) \\ &= Y_i - h\alpha Y_{i+1} + h(\alpha t^2 + 2t) \end{aligned}$$

El resultado es una ecuación no lineal. En este caso, si aislamos Y_i de la expresión anterior se obtiene el método iterativo de punto fijo ($Y = g(Y)$) a implementar:

$$Y_{i+1} = \frac{Y_i + h(\alpha t^2 + 2t)}{1 + \alpha h}, \quad Y_0 = y_0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

en este caso es convergente si $g'(Y) = 1/(1 + \alpha h) < 1$, cierto para $\alpha > 0$.

Estabilidad de los métodos explícito e implícito de Euler

Estabilidad de los métodos de Euler explícito e implícito

Para el análisis, asumimos una ecuación lineal $y' = Ay, \quad y(t_0) = y_0$.

Estabilidad de los métodos de Euler explícito e implícito

Para el análisis, asumimos una ecuación lineal $y' = Ay, \quad y(t_0) = y_0.$

Explícito

$Y_{i+1} = Y_i + hf(t_i, Y_i) \quad Y_0 = y_0$

$Y_{i+1} = Y_i + hAY_i$

$\Rightarrow Y_{i+1} = (1 + hA)Y_i.$

Estabilidad de los métodos de Euler explícito e implícito

Para el análisis, asumimos una ecuación lineal $y' = Ay, \quad y(t_0) = y_0$.

Explícito

$$Y_{i+1} = Y_i + hf(t_i, Y_i) \quad Y_0 = y_0$$

$$Y_{i+1} = Y_i + hAY_i$$

$$\Rightarrow Y_{i+1} = (1 + hA)Y_i.$$

Implícito

$$Y_{i+1} = Y_i + hf(t_{i+1}, Y_{i+1}), \quad Y_0 = y_0$$

$$Y_{i+1} = Y_i + hAY_{i+1}$$

$$\Rightarrow Y_{i+1} = (1 - hA)^{-1}Y_i.$$

Estabilidad de los métodos de Euler explícito e implícito

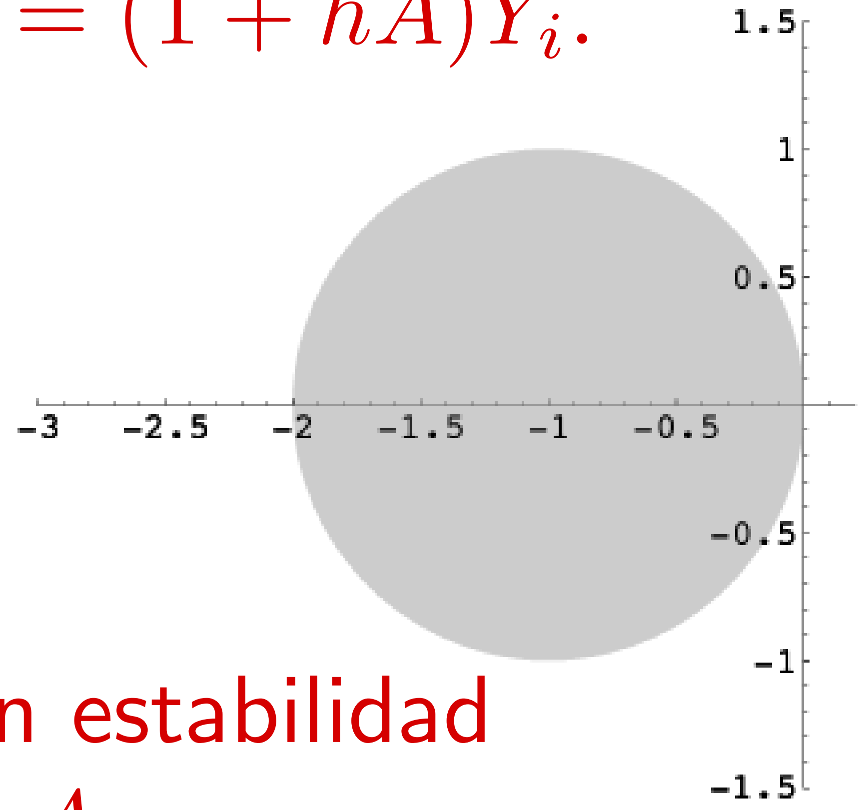
Para el análisis, asumimos una ecuación lineal $y' = Ay, \quad y(t_0) = y_0$.

Explícito

$Y_{i+1} = Y_i + hf(t_i, Y_i) \quad Y_0 = y_0$

$Y_{i+1} = Y_i + hAY_i$

$\Rightarrow Y_{i+1} = (1 + hA)Y_i.$



Region estabilidad para hA

Implícito

$Y_{i+1} = Y_i + hf(t_{i+1}, Y_{i+1}), \quad Y_0 = y_0$

$Y_{i+1} = Y_i + hAY_{i+1}$

$\Rightarrow Y_{i+1} = (1 - hA)^{-1}Y_i.$

Estabilidad de los métodos de Euler explícito e implícito

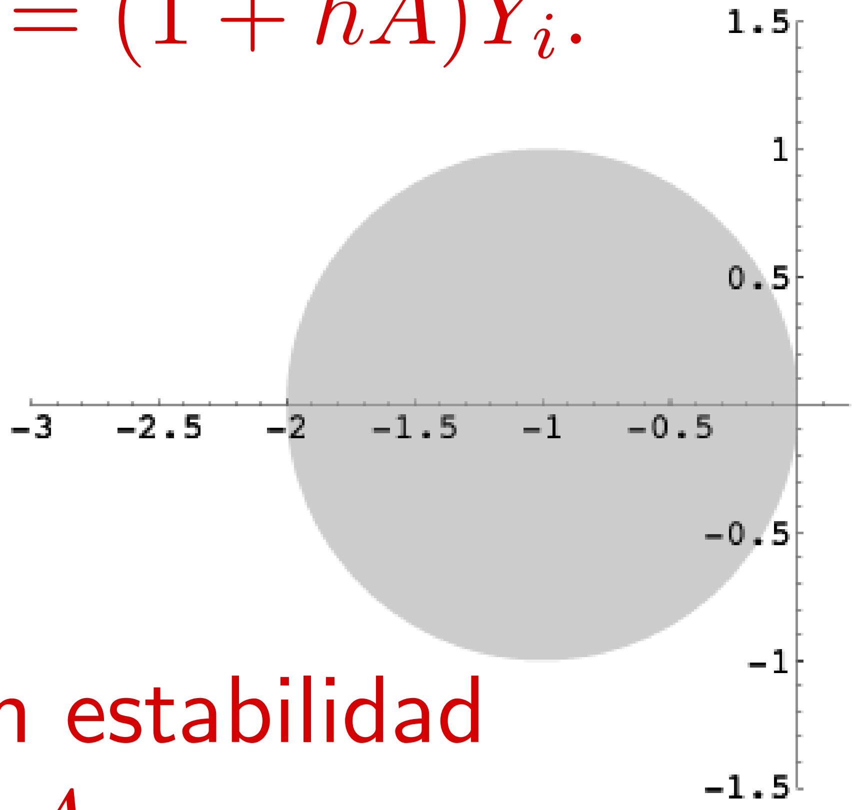
Para el análisis, asumimos una ecuación lineal $y' = Ay, \quad y(t_0) = y_0$.

Explícito

$Y_{i+1} = Y_i + hf(t_i, Y_i) \quad Y_0 = y_0$

$Y_{i+1} = Y_i + hAY_i$

$\Rightarrow Y_{i+1} = (1 + hA)Y_i.$



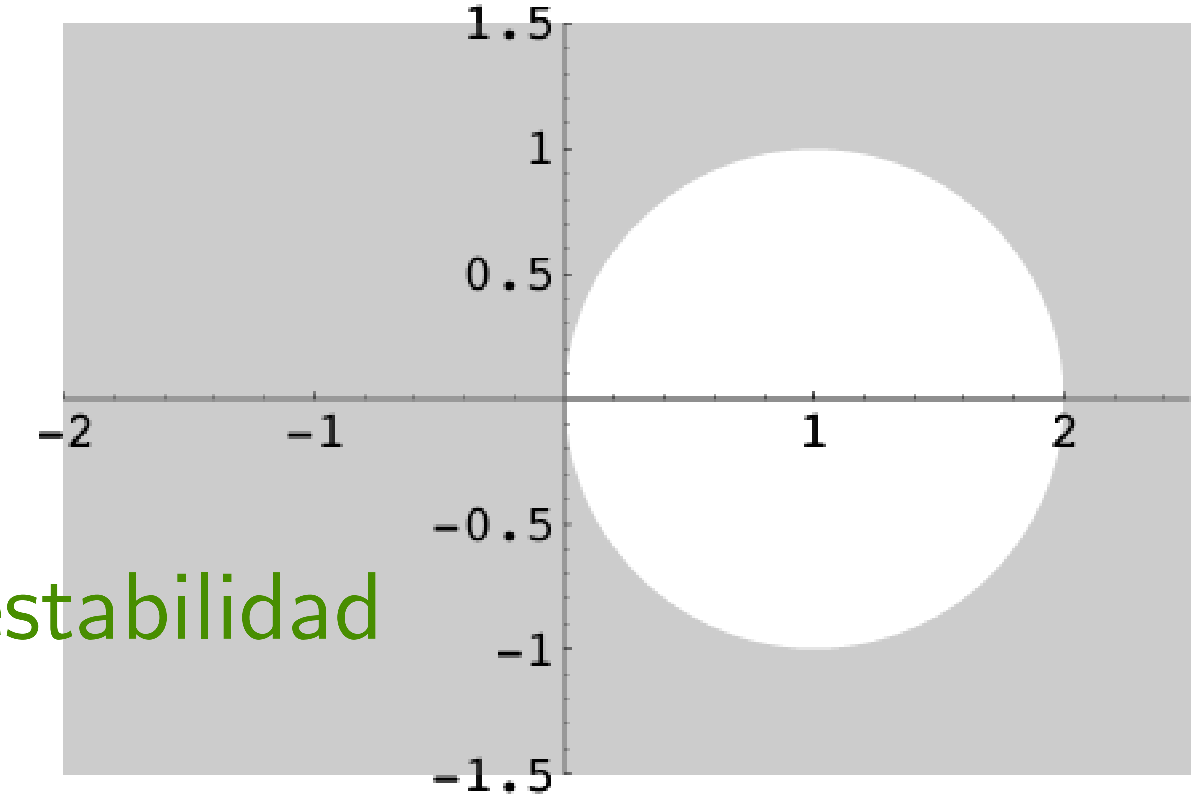
Region estabilidad para hA

Implícito

$Y_{i+1} = Y_i + hf(t_{i+1}, Y_{i+1}), \quad Y_0 = y_0$

$Y_{i+1} = Y_i + hAY_{i+1}$

$\Rightarrow Y_{i+1} = (1 - hA)^{-1}Y_i.$



Region estabilidad para hA

Estabilidad de los métodos de Euler explícito e implícito

Para el análisis, asumimos una ecuación lineal $y' = Ay, \quad y(t_0) = y_0$.

Ojo: la estabilidad en tiempo continuo y discreto no son iguales.

Explícito

$$Y_{i+1} = Y_i + hf(t_i, Y_i) \quad Y_0 = y_0$$

$$Y_{i+1} = Y_i + hAY_i$$

$$\Rightarrow Y_{i+1} = (1 + hA)Y_i.$$

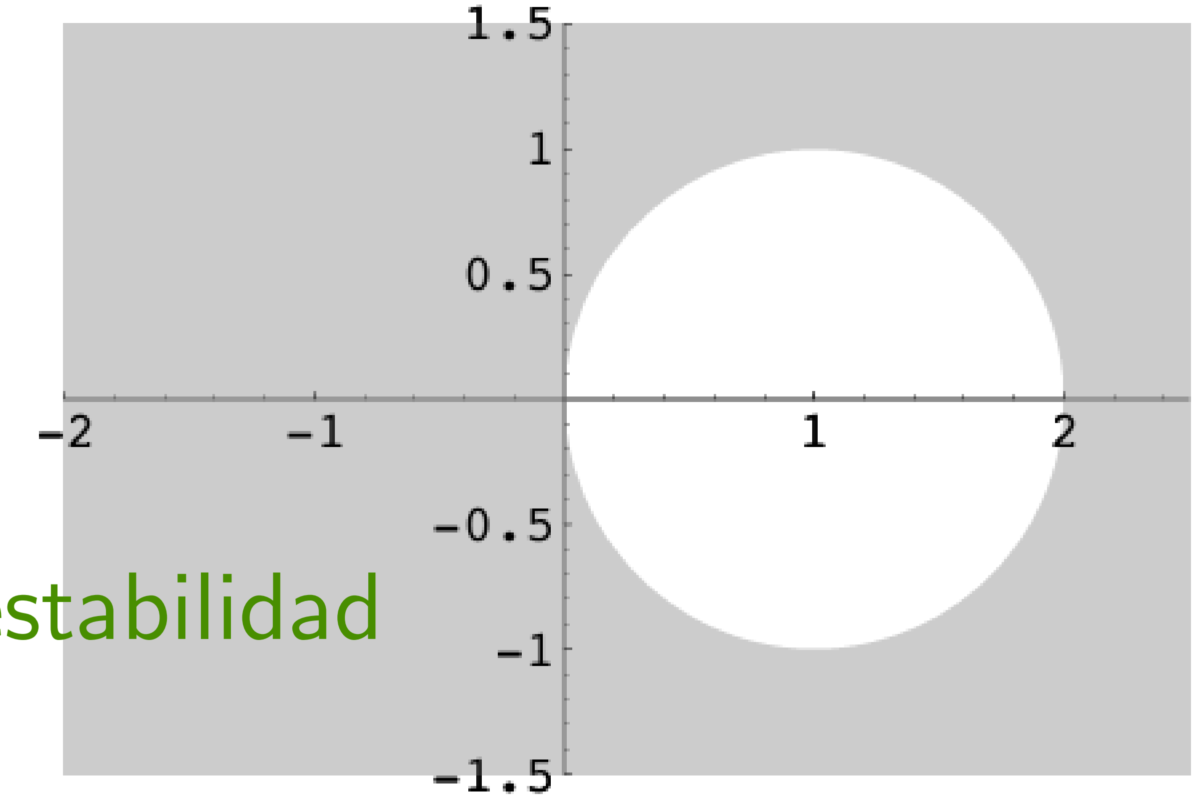
Region estabilidad para hA

Implícito

$$Y_{i+1} = Y_i + hf(t_{i+1}, Y_{i+1}), \quad Y_0 = y_0$$

$$Y_{i+1} = Y_i + hAY_{i+1}$$

$$\Rightarrow Y_{i+1} = (1 - hA)^{-1}Y_i.$$



Region estabilidad para hA

Variantes del método de Euler

Método de Euler modificado: método del punto medio explícito

Dado n, tomamos $h = \frac{b-a}{n}$ y $t_i = a + ih$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Inicializamos $Y_0 = \alpha$, el método es:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= Y_i + \tfrac{h}{2} f(t_i, Y_i) \\ Y_{i+1} &= Y_i + hf\left(t_i + \tfrac{h}{2}, k_1\right) \end{aligned}\right\} i = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

Tal que $Y_i \approx y(t_i)$, y por tanto, $Y_N \approx y(b)$.

Método de Euler modificado: método del punto medio explícito

Dado n, tomamos $h = \frac{b-a}{n}$ y $t_i = a + ih$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

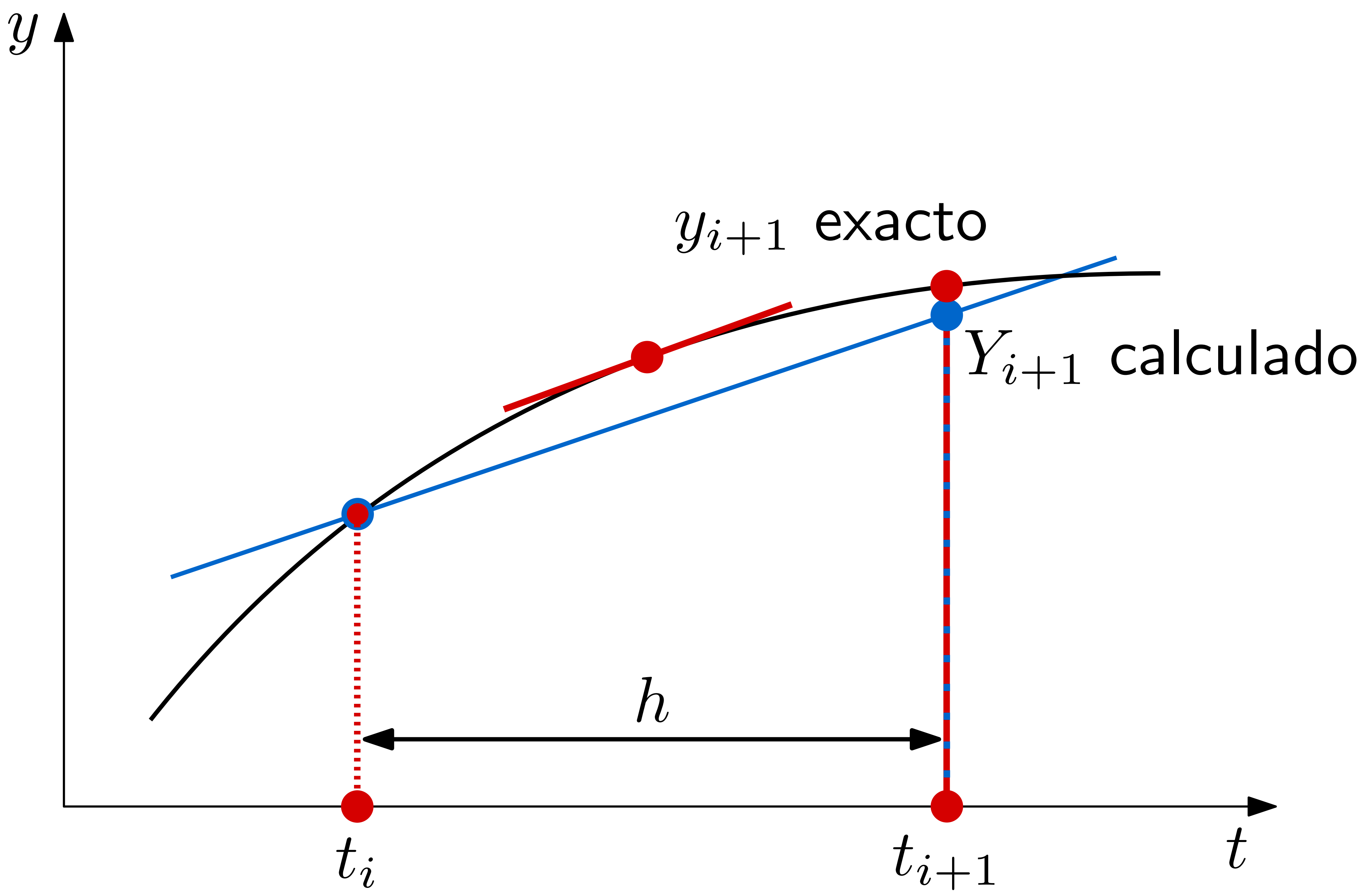
Inicializamos $Y_0 = \alpha$, el método es:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= Y_i + \tfrac{h}{2} f(t_i, Y_i) \\ Y_{i+1} &= Y_i + hf\left(t_i + \tfrac{h}{2}, k_1\right) \end{aligned}\right\} i = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

Tal que $Y_i \approx y(t_i)$, y por tanto, $Y_N \approx y(b)$.

Este método es un método de Runge-Kutta de segundo orden, $O\left(h^2\right)$.

Método de Euler del punto medio explícito



La idea es modificar el método de Euler empleando como pendiente la derivada en el punto medio del subintervalo.

Métodos de Taylor

Métodos de Taylor

Un método general para obtener aproximaciones numéricas de la solución de un problema de valores iniciales asociados a la ecuación diferencial

$$y' = f(t, y)$$

consiste en desarrollar en serie de Taylor $y(t)$ en el punto t_i para calcular $y(t_{i+1})$ hasta el orden deseado $O(h^{n+1})$:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2!}y''(t_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(t_i) + \ldots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(t_i) + O\left(h^{n+1}\right).$$

Las derivadas se calculan mediante la aplicación de la regla de la cadena:

$$y' = f(t, y)$$

$$y'' = f_t + f_y \cdot y' = f_t + f_y \cdot f$$

$$y''' = f_{tt} + 2f_{ty} \cdot f + f_{yy} \cdot f^2 + f_t \cdot f_y + f_y^2 \cdot f$$

$$\vdots$$

Métodos de Taylor

Substituyendo las expresiones calculadas de las derivadas en el desarrollo de Taylor se obtiene el método de Taylor del orden deseado. Por ejemplo:

El método de Euler es el método de Taylor de orden 1:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i).$$

El método de Taylor de orden 2 sería:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \left(f_t(t_i, y_i) + f_y(t_i, y_i) \cdot f(t_i, y_i) \right).$$

Métodos de Taylor

Substituyendo las expresiones calculadas de las derivadas en el desarrollo de Taylor se obtiene el método de Taylor del orden deseado. Por ejemplo:

El método de Euler es el método de Taylor de orden 1:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i).$$

El método de Taylor de orden 2 sería:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left(f_t(t_i, y_i) + f_y(t_i, y_i) \cdot f(t_i, y_i)\right).$$

- Todos los métodos de Taylor de orden k son de un paso y explícitos con error de truncamiento $\mathcal{O}(k)$.

Métodos de Taylor

Substituyendo las expresiones calculadas de las derivadas en el desarrollo de Taylor se obtiene el método de Taylor del orden deseado. Por ejemplo:

El método de Euler es el método de Taylor de orden 1:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i).$$

El método de Taylor de orden 2 sería:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left(f_t(t_i, y_i) + f_y(t_i, y_i) \cdot f(t_i, y_i)\right).$$

- Todos los métodos de Taylor de orden k son de un paso y explícitos con error de truncamiento $\mathcal{O}(k)$.
- El problema de estos métodos es que se requiere calcular y evaluar las derivadas sucesivas de $f(t, y)$.

Métodos de Runge-Kutta

Métodos de Runge-Kutta

Son los métodos de un paso más utilizados. La idea es obtener aproximaciones que resulten del mismo orden que los métodos de Taylor, pero sin calcular las derivadas de orden alto de $f(t, y)$.

La expresión general del método sería

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \phi, \text{ con } \phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_n k_n.$$

Los coeficientes a_i son los pesos de las diferentes aproximaciones k_i de las derivadas de la función $f(t, y)$.

Teorema

El error local del método de Runge-Kutta de orden k es de orden $\mathcal{O}(h^{k+1})$ y el error global es de orden $\mathcal{O}(h^k)$.

Métodos de Runge-Kutta: deducción expresiones por integración

La idea general de los métodos de Runge-Kutta es sustituir el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0, \qquad (t_0, y_0) \in [a,b] \times [c,d] \end{cases}$$

por la ecuación integral equivalente

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{t_0}^{t} f(t, y(t))\, dt \Longrightarrow y = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, y(t)) dt,$$

y luego aproximar la última integral mediante un método de integración numérica. Paso a paso, con una discretización sería

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt.$$

Métodos de Runge-Kutta de orden 3

Un método de Runge-Kutta de tercer orden es

$$k_1 = h \cdot f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

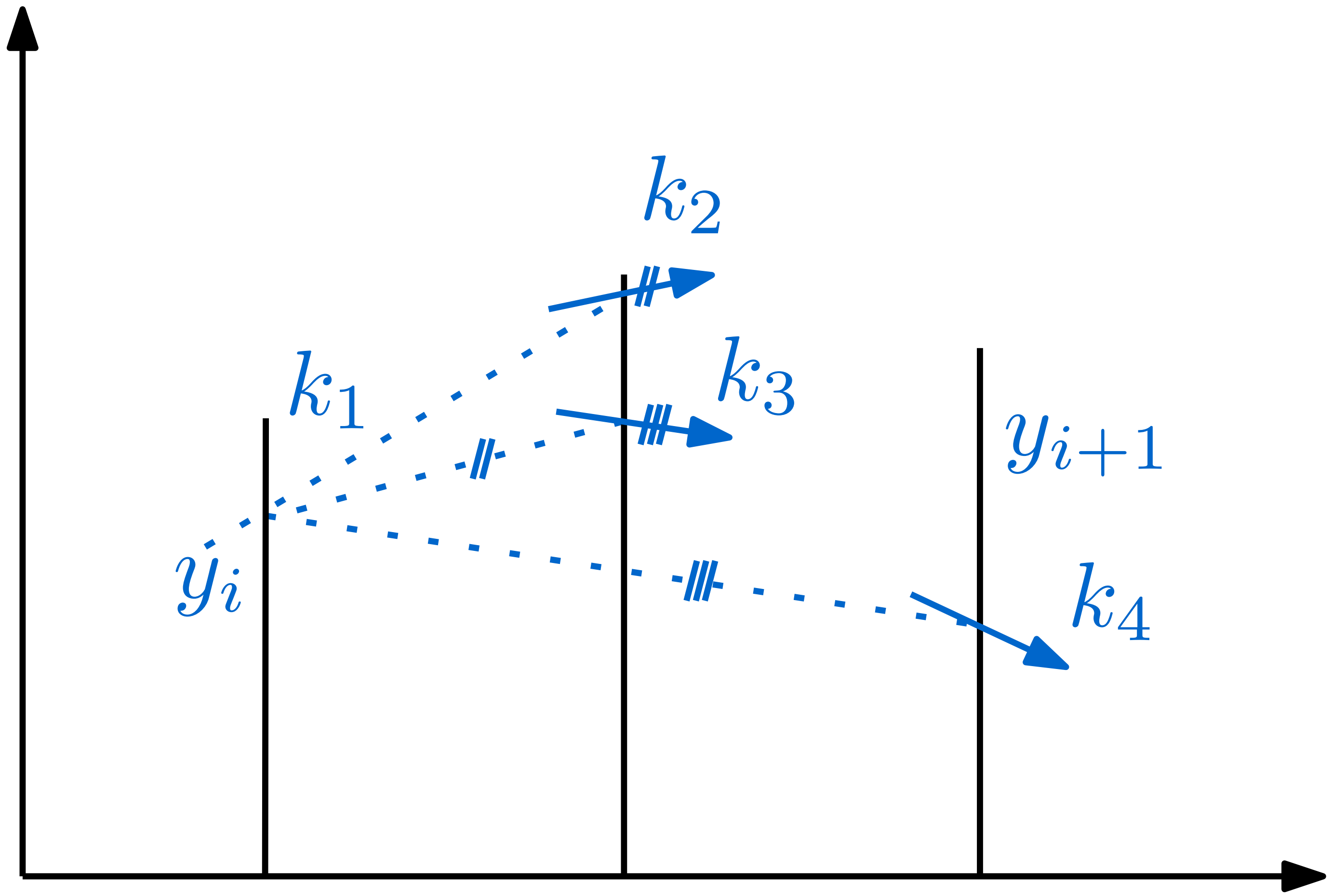
$$k_3 = h \cdot f(t_i + h, y_i - k_1 + 2k_2)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3).$$

Este método se basa en el método de integración de Simpson.

Métodos de Runge-Kutta de orden 4

Un método de Runge-Kutta de cuarto orden es



$$k_1 = h \cdot f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(t_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Comparación de métodos: eficiencia

Método	Orden	Evaluaciones
Euler	$O(h)$	1
RK4	$O(h^4)$	4

Estabilidad

Estabilidad: PVI estable

$$\mathbf{PVI} \equiv \begin{cases} y'(t) & = -y(t), \\ y(0) & = y_0, \end{cases}$$

Un **PVI** es estable si para algún $\delta > 0$, y una perturbación lo suficientemente pequeña de la condición inicial $|y_0 - \bar{y}_0|$, la solución del PVI

$$\begin{cases} \bar{y}'(t) = -\bar{y}(t) \\ \bar{y}(0) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

cumple que el error $|\bar{y}(t) - y(t)|$ es decreciente en t.

Un **PVI** es inestable si no es estable.

Estabilidad: ejemplo no estable, con crecimiento exponencial

$$\mathbf{PVI} \equiv \begin{cases} y'(t) & = y(t), \\ y(0) & = 1, \end{cases} \Rightarrow y(t) = e^t.$$

Cambiamos ligeramente la condición inicial,

$$\begin{cases} \bar{y}'(t) = \bar{y}(t) \\ \bar{y}(0) = 1 + \varepsilon \end{cases} \quad \Rightarrow \bar{y}(t) = (1+\varepsilon)e^t.$$

El error $|\overline{y(t)} - y(t)| = \varepsilon \cdot e^t$ es creciente en t.

Estabilidad: ejemplo estable con decrecimiento exponencial

$$\mathbf{PVI} \equiv \begin{cases} y'(t) & = -y(t), \\ y(0) & = 1, \end{cases} \Rightarrow y(t) = e^{-t}.$$

Cambiamos ligeramente la condición inicial,

$$\begin{cases} \bar{y}'(t) = -\bar{y}(t) \\ \bar{y}(0) = 1 + \varepsilon \end{cases} \quad \Rightarrow \bar{y}(t) = (1+\varepsilon)e^{-t}.$$

El error $|\overline{y(t)} - y(t)| = \varepsilon \cdot e^{-t}$ es decreciente en t.

Estabilidad: control del paso

$$\mathbf{PVI} \equiv \begin{cases} y'(t) & = -y(t), \\ y(0) & = y_0, \end{cases}$$

Tenemos un PVI y lo resolvemos aproximadamente por un método iterativo:

Estabilidad: control del paso

$$\mathbf{PVI} \equiv \begin{cases} y'(t) & = -y(t), \\ y(0) & = y_0, \end{cases}$$

Tenemos un PVI y lo resolvemos aproximadamente por un método iterativo:

- Mientras los sucesivos PVI con $y(t_0) = y_0$, $y(t_1) = y_1, \ldots$ sean estables, tenemos el error bajo control tomando el paso h pequeño.

Estabilidad: control del paso

$$\mathbf{PVI} \equiv \begin{cases} y'(t) & = -y(t), \\ y(0) & = y_0, \end{cases}$$

Tenemos un PVI y lo resolvemos aproximadamente por un método iterativo:

- Mientras los sucesivos PVI con $y(t_0) = y_0$, $y(t_1) = y_1, \ldots$ sean estables, tenemos el error bajo control tomando el paso h pequeño.
- Si nos encontramos en algún punto de la solución con un $y(t_j) = y_j$ inestable, el error $|\overline{y}(t) - y(t)|$ comienza a crecer, normalmente de manera exponencial en $t - t_j$. Hay que hacer el paso h muy, muy pequeño.

Estabilidad: control del paso

$$\mathbf{PVI} \equiv \begin{cases} y'(t) & = -y(t), \\ y(0) & = y_0, \end{cases}$$

Tenemos un PVI y lo resolvemos aproximadamente por un método iterativo:

- Mientras los sucesivos PVI con $y(t_0) = y_0$, $y(t_1) = y_1, \dots$ sean estables, tenemos el error bajo control tomando el paso h pequeño.
- Si nos encontramos en algún punto de la solución con un $y(t_j) = y_j$ inestable, el error $|\overline{y}(t) - y(t)|$ comienza a crecer, normalmente de manera exponencial en $t - t_j$. Hay que hacer el paso h muy, muy pequeño.
- La manera de gestionar el paso h y tener alguna esperanza de que $\overline{y}(t)$ aproxime la solución correcta $y(t)$ es usar alguna estrategia de control de paso.

Estabilidad: control del paso

Idea 1: Por cada paso h se calcula $\bar{y}(t_0 + h)$ a partir de $\bar{y}(t_0)$ usando dos métodos; se comparan los dos resultados, y si la diferencia entre ellos es mayor de lo que se considera admisible, se repite el cálculo con un paso h más pequeño.

Idea 2: Para cambiar de paso, con un costo razonable de tiempo de cálculo, es necesario estimar la magnitud del error local de truncamiento, lo cual puede hacerse con dos fórmulas de diferente orden o utilizando dos pasos diferentes: h y $h/2$ habitualmente.

Guia de estudio

Libro *Càlcul numèric: teoria i pràctica* de M. Grau Sánchez y M. Noguera Batlle.

- Conceptos asociados: Capítulo 8, páginas 318–344.

Libro *Cálculo numérico* de M. Grau Sánchez y M. Noguera Batlle.

- Conceptos asociados: Capítulo 8, páginas 275–304.

Libro *Cálculo científico con MATLAB y Octave* de A. Quarteroni y F. Saleri.

- Conceptos y ejercicios resueltos: Capítulo 7, páginas 194–243.
- Problemas y prácticas propuestas: 7.1, 7.2, 7.15, 7.18, y 7.19.

Sitio web *Chapter 08 Ordinary Differential Equations*

Sitio web *Solving ODEs - MATLAB*