==

Práctica 4. Resolución de sistemas lineales: factorización LU y QR

Contenidos

Métodos directos

Ejercicio 1. Eliminación gaussiana y factorización LU

Generar (o adaptar, si se hizo en la sesión anterior) una función en MATLAB para encontrar la solución de un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ utilizando el método de eliminación gaussiana.

- Crear una función en Matlab `[L,U] = gaussLU(A)` que, en caso de que exista, calcule la factorización $A = LU$ de una matriz cuadrada A (**sin pivotamiento**).
- Comprobar si en el proceso el valor absoluto de un elemento pivote es menor o igual al épsilon de la máquina.
- Crear una funcion en Matlab `x = solveLU(L, U, b)` que, usando la función `gaussLU()` resuelva el sistema $Ax = b$ **sin pivotamiento** por el método de Gauss a partir de la descomposición LU. Se puede usar la función de substitución hacia atrás backsubs() que se proporciona abajo.
- Crear una función en Matlab `[L, U, P] = gaussparcialLUP(A)` que calcule la factorización $PA = LU$ de una matriz cuadrada A usando **pivotamiento parcial**.
- Crear una funcion en Matlab `x = solveLUP(L, U, P, b)` que, usando la función `gaussparcialLUP()` resuelva el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con **pivotamiento parcial** por el método de Gauss a partir de la descomposición LU. Se puede usar la función de substitución hacia atrás `backsubs()` que se proporciona abajo.

Usar la función `solveLU()` con `gaussLU()` cuando sea posible y la función `solveLUP()` con `gausspartialLUP()` para resolver los siguientes sistemas. Calcular el vector residuo y su norma 2.

- Comparar con la solución `A\b` de MATLAB, su vector residuo y su norma 2.

a) $A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$

```
L = 4×4
    1.0000         0         0         0
   -0.3000    1.0000         0         0
    0.5000  -25.0000    1.0000         0
   -0.1000    7.0000   -0.2581    1.0000
U = 4×4
   10.0000   -7.0000         0    1.0000
         0   -0.1000    6.0000    0.3000
         0         0  155.0000    7.0000
         0         0         0   -1.1935

xsolLU = 4×1
    0.4324
    0.2162
    0.8108
    4.1892

vec_residuo = 4×1
```
10^{-14} ×
```
         0
         0
    0.7994
    0.0444
norm2_residuo = 8.0059e-15

L = 4×4
    1.0000         0         0         0
    0.5000    1.0000         0         0
   -0.3000   -0.0400    1.0000         0
   -0.1000   -0.2800    0.5484    1.0000
U = 4×4
   10.0000   -7.0000         0    1.0000
         0    2.5000    5.0000   -0.5000
         0         0    6.2000    0.2800
         0         0         0   -1.1935
P = 4×4
     1     0     0     0
     0     0     1     0
     0     1     0     0
     0     0     0     1

xsolLUP = 4×1
    0.4324
    0.2162
    0.8108
    4.1892

vec_residuo = 4×1
```
10^{-15} ×
```
         0
         0
         0
   -0.8882
norm2_residuo = 8.8818e-16

xMatlab = 4×1
    0.4324
    0.2162
    0.8108
    4.1892

vec_residuo = 4×1
```
10^{-14} ×
```
         0
    0.1332
```

```
   -0.0888
         0
norm2_residuo = 1.6012e-15
```

b) $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{pmatrix}.$

```
L = 4×4
    1.0000         0         0         0
    0.2500    1.0000         0         0
   -0.5000   -0.1667    1.0000         0
    0.5000         0    0.2927    1.0000
U = 4×4
   12.0000   -4.0000    2.0000    2.0000
         0  -12.0000    8.5000    2.5000
         0         0    3.4167  -16.5833
         0         0         0    7.8537
P = 4×4
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
     1     0     0     0

xsolLUP = 4×1
    1.9627
   -5.1429
   -5.0932
    0.0311

vec_residuo = 4×1
10^-14 ×
   -0.1776
         0
    0.3553
   -0.7105
norm2_residuo = 8.1403e-15

xMatlab = 4×1
    1.9627
   -5.1429
   -5.0932
    0.0311

vec_residuo = 4×1
10^-14 ×
    0.1776
         0
   -0.3553
    0.7105
norm2_residuo = 8.1403e-15
```

c) $A = (a_{ij})_{51\times 51}$ y $b = (b_i)_{51\times 1}$ con $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^i & i = j\,, \\ 2 & 1 \le |i-j| \le 2\,, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{y} \quad b_i = i\,.$

```
L = 51×51
    1.0000         0         0         0         0         0         0         0 ···
   -2.0000    1.0000         0         0         0         0         0         0
   -2.0000    1.2000    1.0000         0         0         0         0         0
```

```
         0    0.4000    0.0952    1.0000         0         0         0         0
         0         0   -0.4762    7.6000    1.0000         0         0         0
         0         0         0    8.4000    0.9565    1.0000         0         0
         0         0         0         0   -0.1449   -0.0274    1.0000         0
         0         0         0         0         0   -0.6301   -2.9032    1.0000
         0         0         0         0         0         0   -2.8258    0.9490
         0         0         0         0         0         0         0    0.2431
      ⋮

U = 51×51
   -1.0000    2.0000    2.0000         0         0         0         0         0 ···
         0    5.0000    6.0000    2.0000         0         0         0         0
         0         0   -4.2000   -0.4000    2.0000         0         0         0
         0         0         0    0.2381    1.8095    2.0000         0         0
         0         0         0         0  -13.8000  -13.2000    2.0000         0
         0         0         0         0         0   -3.1739    0.0870    2.0000
         0         0         0         0         0         0   -0.7078    2.0548
         0         0         0         0         0         0         0    8.2258
         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0
      ⋮

xsolLU = 51×1
   39.9999
   22.4633
   -1.9634
  -48.2681
  -13.6767
   19.3109
   26.5823
   28.7071
  -17.5501
  -38.6966
      ⋮

vec_residuo = 51×1
10^-13 ×
    0.0222
         0
    0.0355
         0
   -0.2842
   -0.2132
         0
         0
    0.2132
         0
      ⋮

norm2_residuo = 1.5702e-13

L = 51×51
    1.0000         0         0         0         0         0         0         0 ···
   -0.5000    1.0000         0         0         0         0         0         0
    1.0000    0.4000    1.0000         0         0         0         0         0
         0         0         0    1.0000         0         0         0         0
         0         0         0         0    1.0000         0         0         0
         0         0   -0.4762    0.9048   -0.9286    1.0000         0         0
         0         0         0         0         0    0.6774    1.0000         0
         0    0.8000    0.0952    0.1190    0.7857    0.1048    0.2500    1.0000
         0         0         0         0         0         0    0.8000   -0.5961
         0         0         0         0         0         0         0         0
```

```
       ⋮
U = 51×51
    2.0000    1.0000    2.0000    2.0000         0         0         0         0 ···
         0    2.5000    3.0000    1.0000         0         0         0         0
         0         0   -4.2000   -0.4000    2.0000         0         0         0
         0         0         0    2.0000    2.0000    1.0000    2.0000    2.0000
         0         0         0         0    2.0000    2.0000   -1.0000    2.0000
         0         0         0         0         0    2.9524   -0.7381    0.0476
         0         0         0         0         0         0    2.5000    0.9677
         0         0         0         0         0         0         0   -2.0565
         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0
       ⋮
P = 51×51
     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0 ···
     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0
     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0
       ⋮

xsolLUP = 51×1
   39.9999
   22.4633
   -1.9634
  -48.2681
  -13.6767
   19.3109
   26.5823
   28.7071
  -17.5501
  -38.6966
       ⋮

vec_residuo = 51×1
10^-13 ×
    0.0044
         0
    0.1421
    0.0711
         0
   -0.0711
         0
         0
         0
   -0.2132
       ⋮
norm2_residuo = 1.0485e-13

xMatlab = 51×1
   39.9999
   22.4633
   -1.9634
  -48.2681
  -13.6767
```

```
   19.3109
   26.5823
   28.7071
  -17.5501
  -38.6966
      ⋮

vec_residuo = 51×1
10^-13 ×
    0.0355
         0
         0
    0.0711
         0
   -0.0711
         0
   -0.1421
         0
   -0.0711
      ⋮
norm2_residuo = 8.0153e-14
```

Ejercicio 2. Cálculo del determinante

Crear una función `detLU(L,U)` que calcule de manera eficiente el determinante de una matriz $A = LU$ a partir de su descomposición LU. Usarla en combinación con la función `gaussLU()` del apartado anterior o la función `lu()` de MATLAB para calcular el determinante de la matriz A del Ejercicio 1(a) y comparar con la función `det()` de MATLAB:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

```
determinanteLU = 185.0000

detA = 185
```

Ejercicio 3. Método de Cholesky

Usar la descomposición de Cholesky para resolver sistemas de ecuaciones lineales y aplicarlo para resolver el siguiente sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcr} 6x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 & = & 7 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 & = & -1 \\ -x_1 - x_3 + 3x_4 & = & -2 \end{array}\right.$$

- Escribir una función en MATLAB `R = mycholesky(A)` que calcule la factorización $A = LL^{*^t}$ con L triangular inferior para matrices simétricas definidas positivas. Comprobar que A es simétrica definida positiva.
- Comparar con la función de MATLAB `[L, iflag] = chol(A, "lower")`.
- Usar esta descomposición para calcular la solución del sistema. Calcular el vector residuo y su norma 2. (Se pueden usar funciones ya programadas en ejercicios anteriores.)

```
L = 4×4
   2.449489742783178                   0                   0                   0
   0.816496580927726   1.825741858350554                   0                   0
  -0.408248290463863   0.730296743340222   1.816590212458495                   0
  -0.408248290463863   0.182574185835055  -0.715626447332135   1.512573564451920

norma_dif = 
     8.881784197001252e-16

LMatlab = 4×4
   2.449489742783178                   0                   0                   0
   0.816496580927726   1.825741858350554                   0                   0
  -0.408248290463863   0.730296743340222   1.816590212458495                   0
  -0.408248290463863   0.182574185835055  -0.715626447332135   1.512573564451920
iflag = 
     0

x = 4×1
  -1.629139072847683
   3.033112582781458
  -1.874172185430464
  -1.834437086092716

vec_residuo = 4×1
10^-14 ×
   0.310862446895044
  -0.088817841970013
   0.133226762955019
                   0
norm2_residuo = 
     3.496761935123077e-15
```

Ejercicio 4. Factorización QR de Householder

Escribir una función `[Q, R] = QRHouseholder(A)` para calcular la descomposición QR de la matriz del sistema de ecuaciones lineales $A = QR$ con R triangular superior por el método de Hausholder. (Si se quiere comparar, en MATLAB `qr()` proporciona una descomposición QR.) Usarla para resolver el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Calcular el vector residuo y su norma 2.

$$a)\ \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 &= -1 \\ -x_1 - x_3 + 3x_4 &= -2 \end{cases}$$

```
Q = 4×4
  -0.925820099772551   0.202804574998328  -0.158718373828798   0.276651269698935
  -0.308606699924184  -0.878819824992753   0.286847388337863  -0.223955789756280
   0.154303349962092  -0.412369302496599  -0.829952805693858   0.342520619627252
```

```
   0.154303349962092  -0.128442897498941   0.451337339396799   0.869475419053794
R = 4×4
  -6.480740698407859  -2.931763649279747   1.080123449734643   1.234426799696735
  -0.000000000000000  -3.522039452470955  -2.602658712478537  -0.175763964998551
   0.000000000000000                   0  -3.325582800005571   2.342683197713054
   0.000000000000000   0.000000000000000   0.000000000000000   1.989254367835196

x = 4×1
  -1.629139072847682
   3.033112582781456
  -1.874172185430463
  -1.834437086092715

vec_residuo = 4×1
10^-14 ×
  -0.088817841970013
   0.177635683940025
   0.066613381477509
  -0.044408920985006
norm2_residuo =
     2.141320623259658e-15
```

$$b)\ \begin{cases} 0.05x_1 + 0.07x_2 + 0.06x_3 + 0.05x_4 &= 0.23 \\ 0.07x_1 + 0.10x_2 + 0.08x_3 + 0.07x_4 &= 0.32 \\ 0.06x_1 + 0.08x_2 + 0.10x_3 + 0.09x_4 &= 0.33 \\ 0.05x_1 + 0.07x_2 + 0.09x_3 + 0.10x_4 &= 0.31 \end{cases}$$

```
Q = 4×4
  -0.430331482911935  -0.084394947256971  -0.369528575478261  -0.819231920519040
  -0.602464076076709  -0.573885641347411  -0.257063356854442   0.491539152311424
  -0.516397779494322   0.810191493666933  -0.128531678427220   0.245769576155713
  -0.430331482911935  -0.084394947256973   0.883655289187144  -0.163846384103809
R = 4×4
  -0.116189500386223  -0.161804637574888  -0.164386626472359  -0.153198007916649
   0.000000000000000  -0.004388537257363   0.022449055970355   0.020085997447159
   0.000000000000000                   0   0.023939025107070   0.040326814106541
  -0.000000000000000  -0.000000000000000  -0.000000000000000  -0.000819231920519

x = 4×1
   1.000000000000377
   0.999999999999772
   0.999999999999907
   1.000000000000055

vec_residuo = 4×1
10^-16 ×
  -0.832667268468867
  -0.555111512312578
                   0
  -0.555111512312578
norm2_residuo =
     1.144391699630559e-16
```

Documento preparado por Irene Parada, 6 de marzo de 2024