Computación Numérica

Tema 2. Álgebra lineal numérica (IV): autovalores y autovectores

Irene Parada

irene.parada@upc.edu

Departamento de Matemáticas

Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech

11 de marzo de 2024

Repaso

Breve recordatorio del Tema 2.3

- Métodos iterativos estacionarios. Vector residuo y teorema de convergencia.
- Métodos iterativos estacionarios. Factor y velocidad de convergencia. Cotas del error.
- Método iterativo de Jacobi.
- Método iterativo de Gauss-Seidel.
- Métodos de sobrerrelajación (SOR): variantes de Jacobi y Gauss-Seidel. Convergencia para ciertos tipos de matrices.
- Precondicionamiento.
- Métodos iterativos no estacionarios.

Autovalores, autovectores y valores singulares

Conceptos básicos

Autovalores y autovectores: definiciones

Definición: Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ con $a_{ij} \in \mathbb{C}, 1 \leq i, j \leq n$, una matriz cuadrada.

- El número $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor (valor propio) de A
- con autovector (vector propio) asociado $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{v} \neq 0$

si se cumple la ecuación $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Autovalores y autovectores: definiciones

Definición: Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ con $a_{ij} \in \mathbb{C}, 1 \leq i, j \leq n$, una matriz cuadrada.

- El número $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor (valor propio) de A
- con autovector (vector propio) asociado $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{v} \neq 0$

si se cumple la ecuación $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

- Espectro: spec$(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \,|\, \lambda_k$ autovalor de $A\}$.

Autovalores y autovectores: definiciones

Definición: Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ con $a_{ij} \in \mathbb{C}, 1 \leq i, j \leq n$, una matriz cuadrada.

- El número $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor (valor propio) de A
- con autovector (vector propio) asociado $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{v} \neq 0$

si se cumple la ecuación $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

- Espectro: $\text{spec}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \,|\, \lambda_k$ autovalor de $A\}$.
- Radio espectral: $\rho(A) = \max(\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n| \,|\, \lambda_k$ autovalor de $A\})$.

Autovalores y autovectores: definiciones

Definición: Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ con $a_{ij} \in \mathbb{C}, 1 \leq i, j \leq n$, una matriz cuadrada.

- El número $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor (valor propio) de A
- con autovector (vector propio) asociado $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{v} \neq 0$

si se cumple la ecuación $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

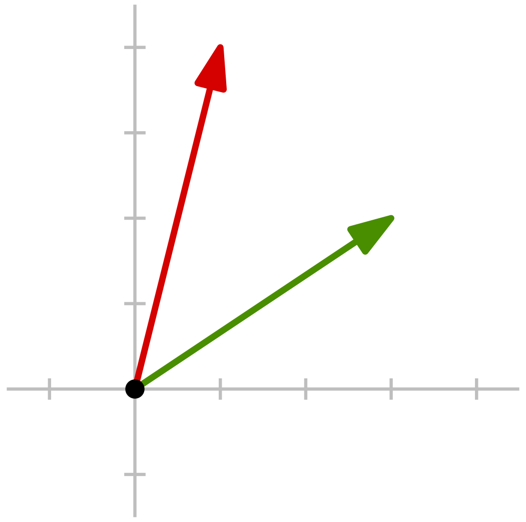
- Espectro: $\text{spec}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \,|\, \lambda_k$ autovalor de $A\}$.
- Radio espectral: $\rho(A) = \max(\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n| \,|\, \lambda_k$ autovalor de $A\})$.
- Polinomio característico: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
  Los autovalores son la raíces del polinomio característico.

Autovalores y autovectores: interpretación geométrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

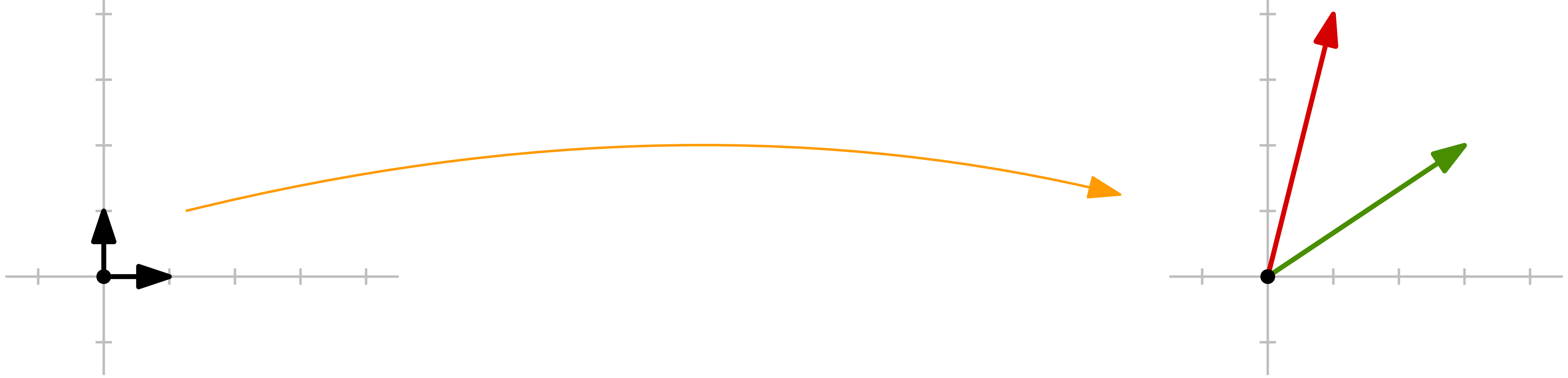
Autovalores y autovectores: interpretación geométrica

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$



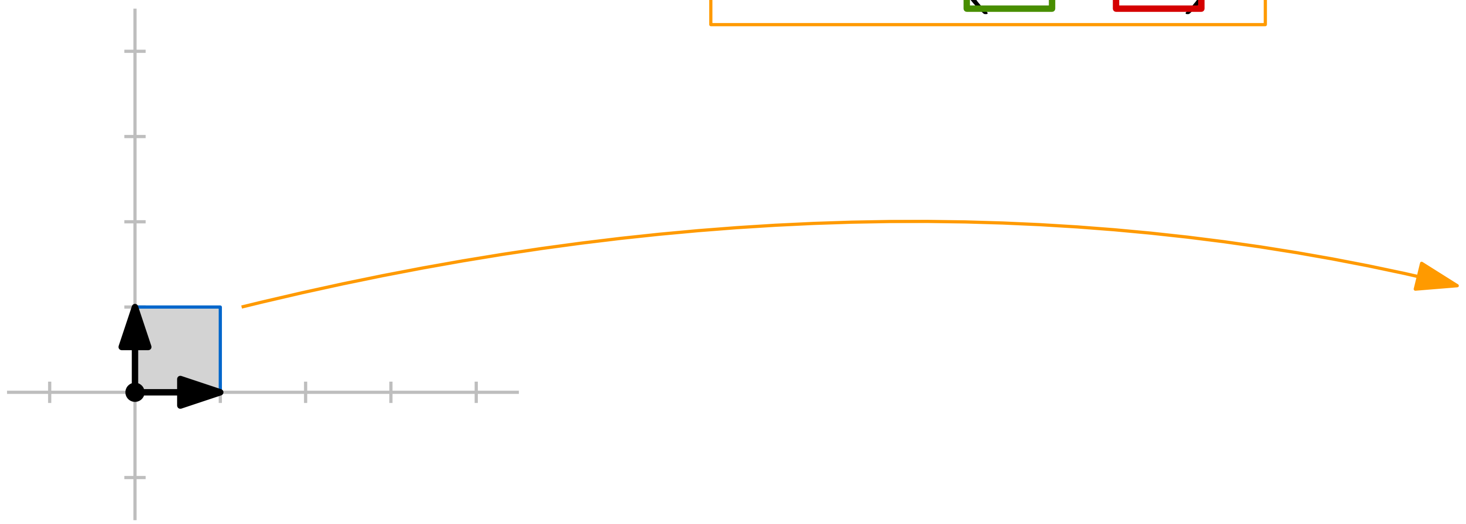
Autovalores y autovectores: interpretación geométrica

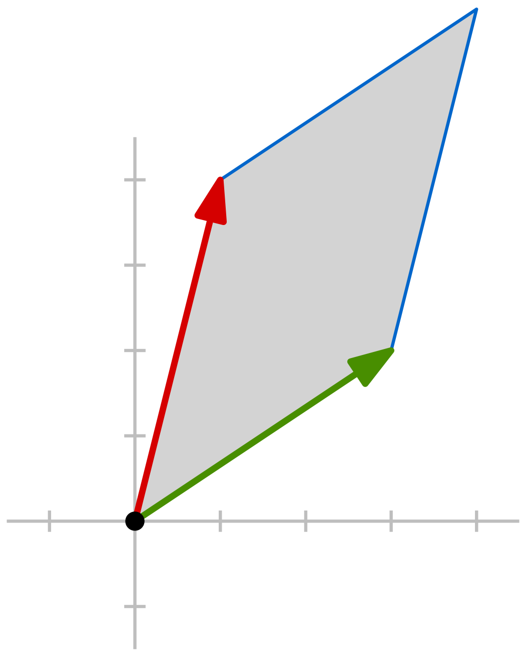
$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$



Autovalores y autovectores: interpretación geométrica

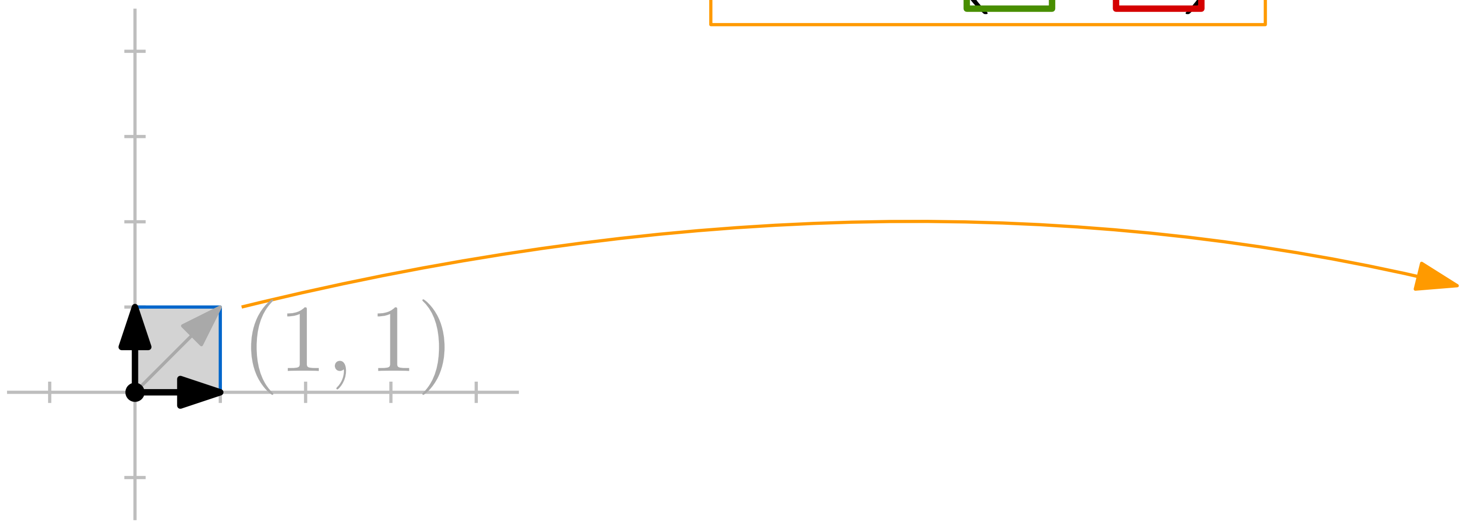
$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

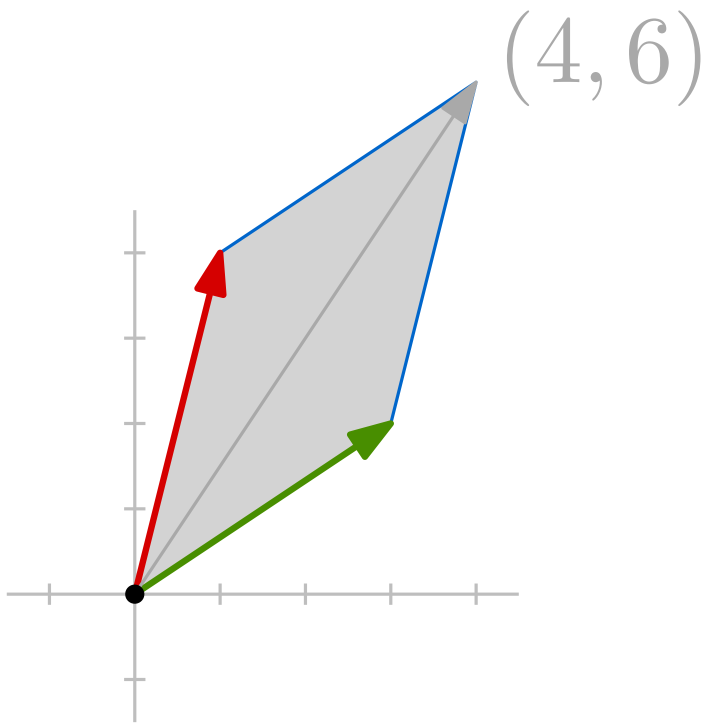




Autovalores y autovectores: interpretación geométrica

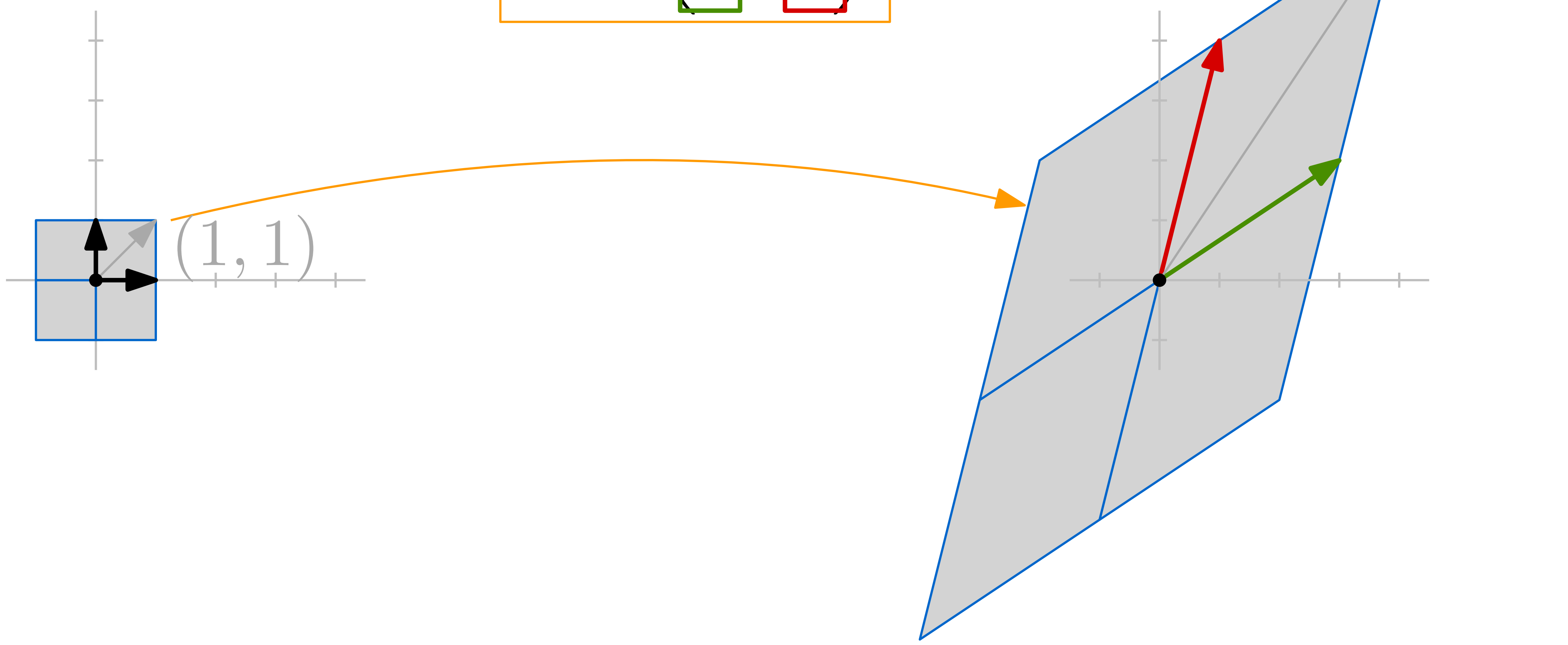
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$





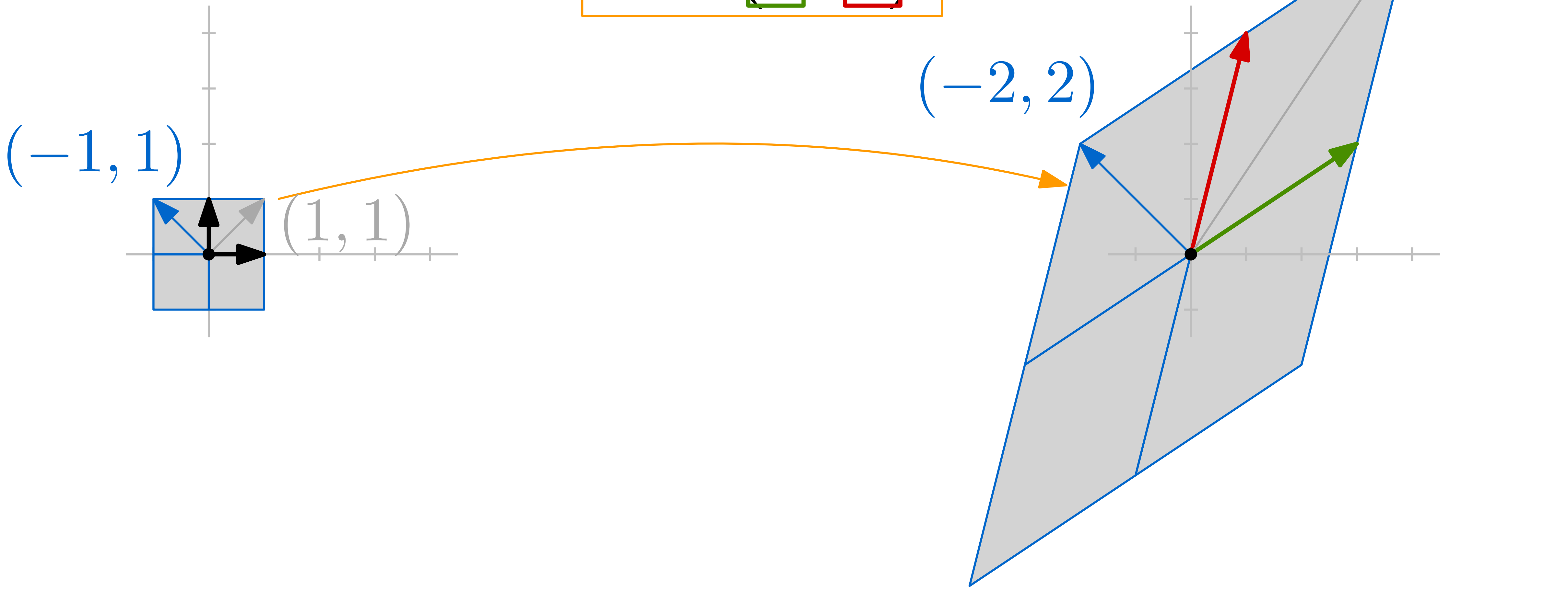
Autovalores y autovectores: interpretación geométrica

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}3\\2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}} \end{pmatrix}$$



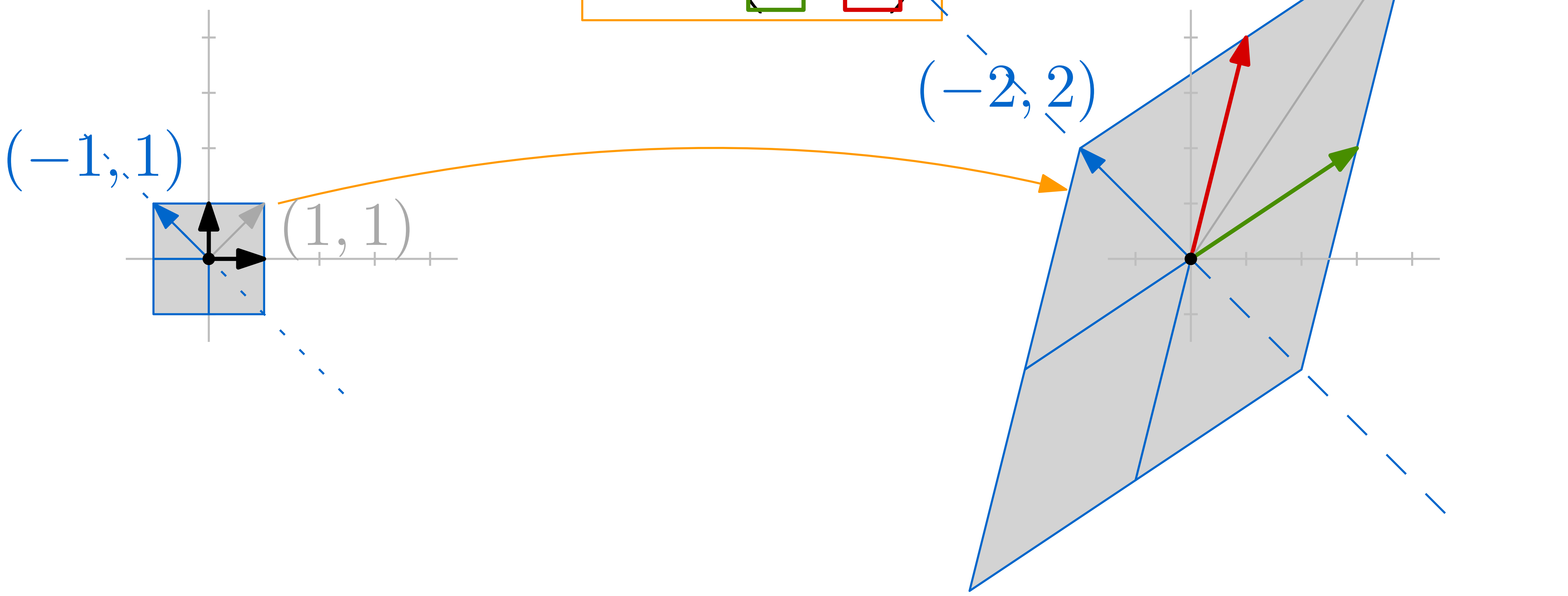
Autovalores y autovectores: interpretación geométrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

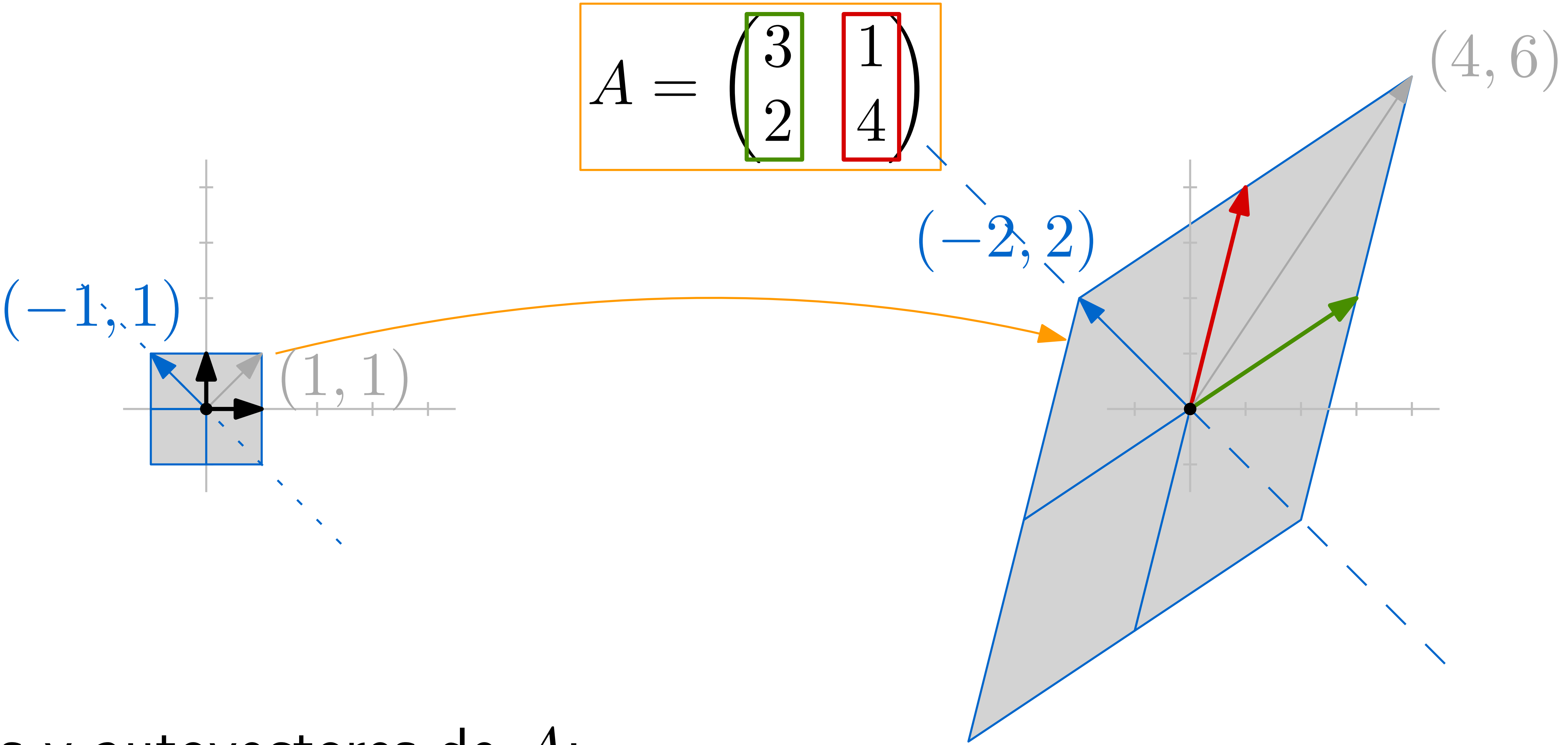


Autovalores y autovectores: interpretación geométrica

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}3\\2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}} \end{pmatrix}$$



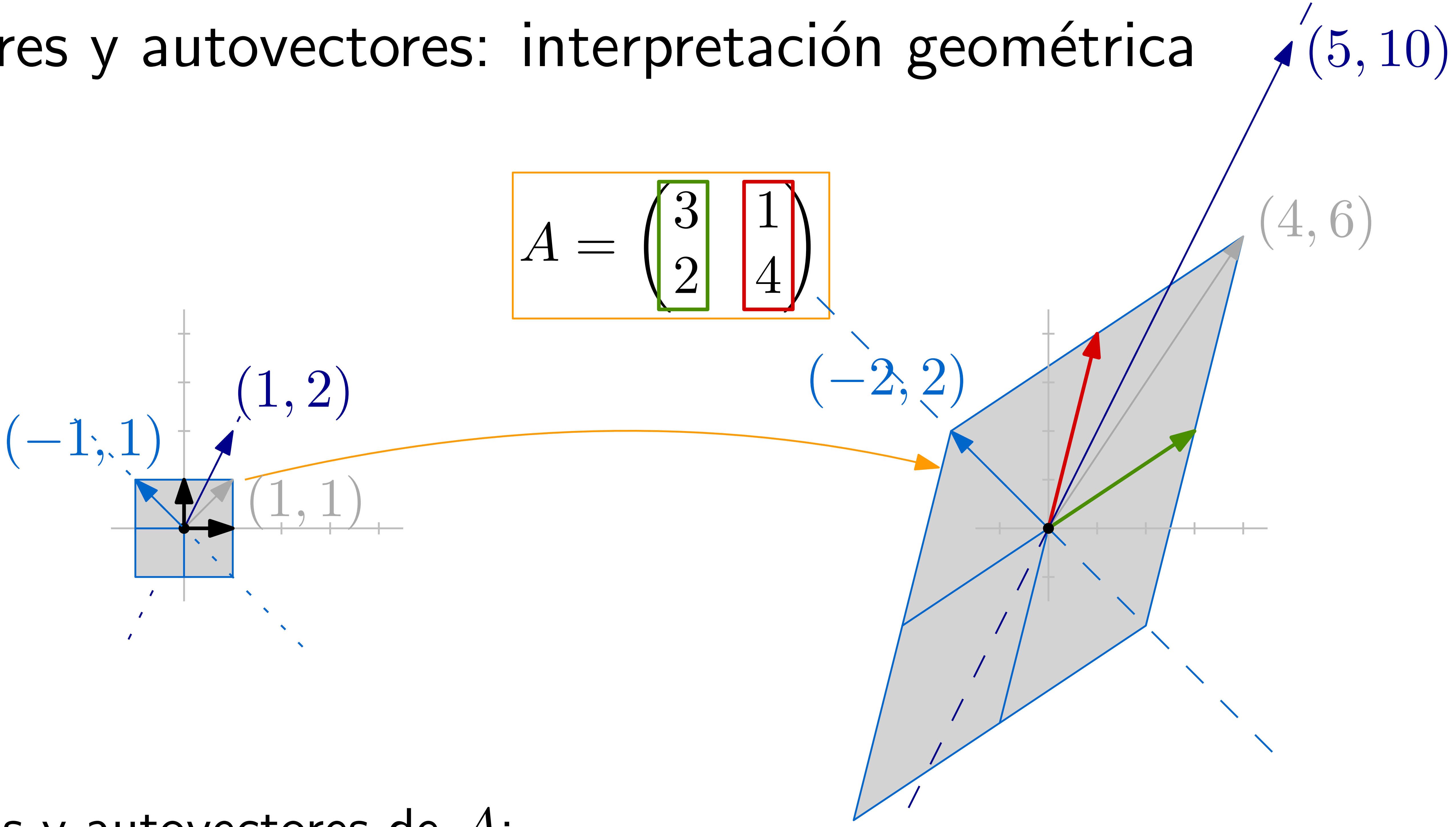
Autovalores y autovectores: interpretación geométrica



Autovalores y autovectores de A:

- Autovalor 2 con autovector asociado $(-1,1)$.
- Autovalor 5 con autovector asociado $(1,2)$.

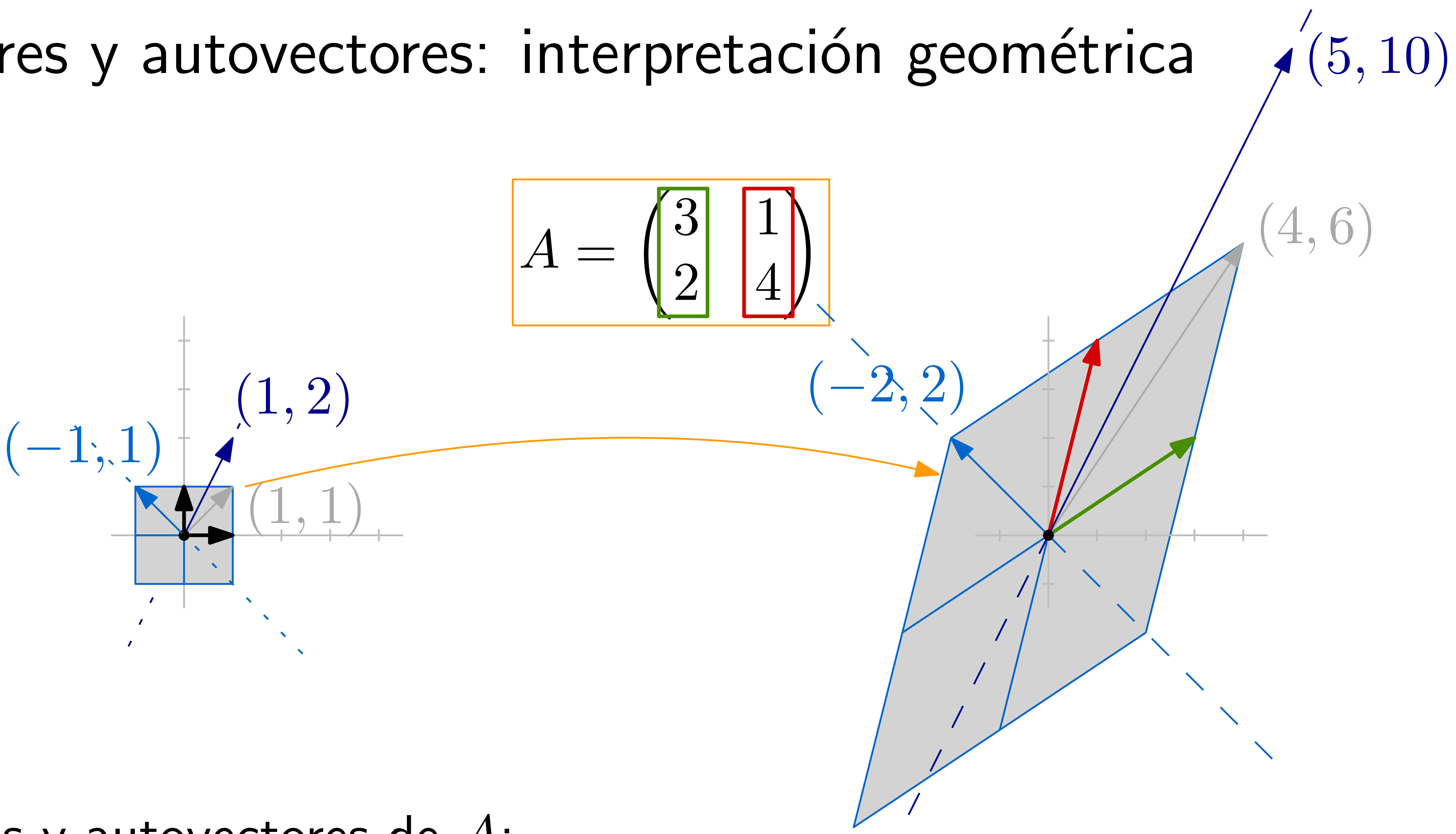
Autovalores y autovectores: interpretación geométrica



Autovalores y autovectores de A:

- Autovalor 2 con autovector asociado $(-1, 1)$.
- Autovalor 5 con autovector asociado $(1, 2)$.

Autovalores y autovectores: interpretación geométrica



Autovalores y autovectores de A:

- Autovalor 2 con autovector asociado $(-1,1)$.
- Autovalor 5 con autovector asociado $(1,2)$.

Pregunta: ¿Qué sucede con las matrices de rotación?

Valores espectrales: propiedades (I)

Si λ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ cumplen $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ (son un autovalor λ de A con autovector asociado $\mathbf{v}$), entonces:

- Para todo $k \neq 0$, $k \in \mathbb{C}$, $k\mathbf{v}$ es también un autovector de A asociado a λ.

Valores espectrales: propiedades (I)

Si λ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ cumplen $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ (son un autovalor λ de A con autovector asociado $\mathbf{v}$), entonces:

- Para todo $k \neq 0$, $k \in \mathbb{C}$, $k\mathbf{v}$ es también un autovector de A asociado a λ.
- Para todo $k \neq 0$, $k \in \mathbb{C}$, $k\lambda$ es un autovalor de kA. En particular, $(-A)\mathbf{v} = -\lambda\mathbf{v}$.

Valores espectrales: propiedades (I)

Si λ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ cumplen $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ (son un autovalor λ de A con autovector asociado $\mathbf{v}$), entonces:

- Para todo $k \neq 0$, $k \in \mathbb{C}$, $k\mathbf{v}$ es también un autovector de A asociado a λ.
- Para todo $k \neq 0$, $k \in \mathbb{C}$, $k\lambda$ es un autovalor de kA. En particular, $(-A)\mathbf{v} = -\lambda\mathbf{v}$.
- $(A^{-1})\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$.

Valores espectrales: propiedades (I)

Si λ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ cumplen $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ (son un autovalor λ de A con autovector asociado $\mathbf{v}$), entonces:

- Para todo $k \neq 0$, $k \in \mathbb{C}$, $k\mathbf{v}$ es también un autovector de A asociado a λ.
- Para todo $k \neq 0$, $k \in \mathbb{C}$, $k\lambda$ es un autovalor de kA. En particular, $(-A)\mathbf{v} = -\lambda\mathbf{v}$.
- $(A^{-1})\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$.
- Para todo $k \in \mathbb{C}$, $(A - kI)\mathbf{v} = (\lambda - k)\mathbf{v}$.

Valores espectrales: propiedades (I)

Si λ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ cumplen $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ (son un autovalor λ de A con autovector asociado $\mathbf{v}$), entonces:

- Para todo $k \neq 0$, $k \in \mathbb{C}$, $k\mathbf{v}$ es también un autovector de A asociado a λ.
- Para todo $k \neq 0$, $k \in \mathbb{C}$, $k\lambda$ es un autovalor de kA. En particular, $(-A)\mathbf{v} = -\lambda\mathbf{v}$.
- $(A^{-1})\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$.
- Para todo $k \in \mathbb{C}$, $(A - kI)\mathbf{v} = (\lambda - k)\mathbf{v}$.
- Para todo $k \in \mathbb{C}$, $(A - kI)^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{(\lambda - k)}\mathbf{v}$.

Valores espectrales: propiedades (I)

Si λ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ cumplen $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ (son un autovalor λ de A con autovector asociado $\mathbf{v}$), entonces:

- Para todo $k \neq 0$, $k \in \mathbb{C}$, $k\mathbf{v}$ es también un autovector de A asociado a λ.
- Para todo $k \neq 0$, $k \in \mathbb{C}$, $k\lambda$ es un autovalor de kA. En particular, $(-A)\mathbf{v} = -\lambda\mathbf{v}$.
- $(A^{-1})\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$.
- Para todo $k \in \mathbb{C}$, $(A - kI)\mathbf{v} = (\lambda - k)\mathbf{v}$.
- Para todo $k \in \mathbb{C}$, $(A - kI)^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{(\lambda - k)}\mathbf{v}$.
- $|\lambda| \leq \rho(A) \leq \|A\|$, donde $\|\cdot\|$ es una norma submultiplicativa.

Valores espectrales: propiedades (II)

Sea A una matriz cuadrada con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Entonces:

Valores espectrales: propiedades (II)

Sea A una matriz cuadrada con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Entonces:

- Teorema de Gerschgorin: cada λ_i pertenece a la unión de los discos

$$S_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|\}.$$

Valores espectrales: propiedades (II)

Sea A una matriz cuadrada con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Entonces:

- Teorema de Gerschgorin: cada λ_i pertenece a la unión de los discos

$$S_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|\}.$$

- $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \mathrm{tr}(A)$.

Valores espectrales: propiedades (II)

Sea A una matriz cuadrada con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Entonces:

- Teorema de Gerschgorin: cada λ_i pertenece a la unión de los discos

$$S_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|\}.$$

- $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \mathrm{tr}(A)$.
- $\prod_{i=1}^{k} \lambda_i = \det(A)$.

Valores espectrales: propiedades (II)

Sea A una matriz cuadrada con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Entonces:

- Teorema de Gerschgorin: cada λ_i pertenece a la unión de los discos

$$S_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|\}.$$

- $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \mathrm{tr}(A)$.
- $\prod_{i=1}^{k} \lambda_i = \det(A)$.
- Los autovalores de una matriz triangular son los valores en su diagonal.

Valores espectrales: propiedades (II)

Sea A una matriz cuadrada con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Entonces:

- Teorema de Gerschgorin: cada λ_i pertenece a la unión de los discos

$$S_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|\}.$$

- $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \mathrm{tr}(A)$.
- $\prod_{i=1}^{k} \lambda_i = \det(A)$.
- Los autovalores de una matriz triangular son los valores en su diagonal.
- Los autovectores $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}^{(k)}$ asociados a autovalores diferentes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, forman un conjunto de vectores linealmente independientes.

Introducción: ámbitos

En el campo de la ingeniería, los valores y vectores propios tienen una relevancia destacada para analizar modelos con oscilaciones y resonancias. Su estudio es fundamental en:

- Sistemas eléctricos de corriente alterna.
- Vibración natural de estructuras.
- Mecánica cuántica.
- Láseres.
- Resonancia Magnética Nuclear (RMN).
- Análisis de Componentes Principales.
- Algoritmo PageRank.

Ejemplo autovalores y autovectores: sistema de EDOs lineales

$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$

condiciones

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo autovalores y autovectores: sistema de EDOs lineales

$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$

condiciones

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Autovalores y autovectores:

Ejemplo autovalores y autovectores: sistema de EDOs lineales

$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$

condiciones

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Autovalores y autovectores:

$\lambda_1 = 3$

$\mathbf{v}_1 = (1,\ 1,\ 1)^t$

$\lambda_2 = 1$

$\mathbf{v}_2 = (-1,\ 1,\ 1)^t$

$\lambda_3 = -2$

$\mathbf{v}_3 = (11,\ 1,\ -14)^t$

Ejemplo autovalores y autovectores: sistema de EDOs lineales

$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$

condiciones

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Autovalores y autovectores:

$\lambda_1 = 3$

$\mathbf{v}_1 = (1,\ 1,\ 1)^t$

$\lambda_2 = 1$

$\mathbf{v}_2 = (-1,\ 1,\ 1)^t$

$\lambda_3 = -2$

$\mathbf{v}_3 = (11,\ 1,\ -14)^t$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_3 \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

$c_1,\ c_2,\ c_3$ son constantes que dependen de las condiciones.

Ejemplo autovalores y autovectores: sistema de EDOs lineales

$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$

condiciones

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Autovalores y autovectores:

$\lambda_1 = 3$

$\mathbf{v}_1 = (1,\ 1,\ 1)^t$

$\lambda_2 = 1$

$\mathbf{v}_2 = (-1,\ 1,\ 1)^t$

$\lambda_3 = -2$

$\mathbf{v}_3 = (11,\ 1,\ -14)^t$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_3 \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

$c_1,\ c_2,\ c_3$ son constantes que dependen de las condiciones.

Fórmula de Euler:

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$$

Linealización de sistemas dinámicos

$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \to \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$

Linealización de sistemas dinámicos

$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \to \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$

Paso 1: Encontrar puntos fijos.

$\bar{\mathbf{x}}$ tal que $f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$

Linealización de sistemas dinámicos

$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \rightarrow \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$

Paso 1: Encontrar puntos fijos.

$\bar{\mathbf{x}}$ tal que $f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$

Paso 2: Linealizar en torno a $\bar{\mathbf{x}}$.

Jacobiano

$$\frac{Df}{D\mathbf{x}}\Big|_{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{\mathbf{x}}) & \cdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{\mathbf{x}}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Linealización de sistemas dinámicos

$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \to \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$

Paso 1: Encontrar puntos fijos.

$\bar{\mathbf{x}}$ tal que $f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$

Paso 2: Linealizar en torno a $\bar{\mathbf{x}}$.

Jacobiano

$$\frac{Df}{D\mathbf{x}}\Big|_{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{\mathbf{x}}) & \cdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{\mathbf{x}}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

La linealización describe bien el comportamiento en torno a $\bar{\mathbf{x}}$ si los autovalores del Jacobiano en $\bar{\mathbf{x}}$ tienen una parte real distinta de cero.

Algunas referencias

- *Xataka: El colapso del puente Tacoma Narrows: cuando la naturaleza nos dio una ejemplar lección de física.*
- *Hundimiento del Puente Tacoma Narrows, Washington, 1940. Video original.*
- *The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine. S. Brin y L. Page, 1998.*
- *El secreto de Google y el álgebra lineal. P. Fernández Gallardo, 2006.*
- *PageRank, Wikipedia.*
- *La descomposición en valores singulares (SVD) y algunas de sus aplicaciones. J. J. Martínez Fernández de las Heras, 2005.*

Matrices semejantes

Dos matrices A y B cuadradas de orden n son semejantes si existe una matriz S tal que $A = S^{-1}BS$.

Matrices semejantes

Dos matrices A y B cuadradas de orden n son semejantes si existe una matriz S tal que $A = S^{-1}BS$.

- Una matriz es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.

Matrices semejantes

Dos matrices A y B cuadradas de orden n son semejantes si existe una matriz S tal que $A = S^{-1}BS$.

- Una matriz es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal. A^k?

Matrices semejantes

Dos matrices A y B cuadradas de orden n son semejantes si existe una matriz S tal que $A = S^{-1}BS$.

- Una matriz es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.
- Igualdad de valores propios: Sea A una matriz cuadrada con autovalor λ y autovector asociado $\mathbf{v}$, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Si A y B son semejantes, con $A = S^{-1}BS$, entonces λ es un autovalor de B con un autovector asociado $S\mathbf{v}$.

Matrices semejantes

Dos matrices A y B cuadradas de orden n son semejantes si existe una matriz S tal que $A = S^{-1}BS$.

- Una matriz es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.
- Igualdad de valores propios: Sea A una matriz cuadrada con autovalor λ y autovector asociado $\mathbf{v}$, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Si A y B son semejantes, con $A = S^{-1}BS$, entonces λ es un autovalor de B con un autovector asociado $S\mathbf{v}$.
- Factorización de Schur:
  Si A es una matriz cuadrada, entonces existen matrices T y Q tal que $A = QTQ^{*^t}$ con Q unitaria y T triangular superior. No es única.

Matrices semejantes

Dos matrices A y B cuadradas de orden n son semejantes si existe una matriz S tal que $A = S^{-1}BS$.

- Una matriz es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.
- Igualdad de valores propios: Sea A una matriz cuadrada con autovalor λ y autovector asociado $\mathbf{v}$, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Si A y B son semejantes, con $A = S^{-1}BS$, entonces λ es un autovalor de B con un autovector asociado $S\mathbf{v}$.
- Factorización de Schur:
  Si A es una matriz cuadrada, entonces existen matrices T y Q tal que $A = QTQ^{*^t}$ con Q unitaria y T triangular superior. No es única.
  - Los elementos de la diagonal de T son los valores propios de la matriz A.

Matrices semejantes

Dos matrices A y B cuadradas de orden n son semejantes si existe una matriz S tal que $A = S^{-1}BS$.

- Una matriz es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.
- Igualdad de valores propios: Sea A una matriz cuadrada con autovalor λ y autovector asociado $\mathbf{v}$, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Si A y B son semejantes, con $A = S^{-1}BS$, entonces λ es un autovalor de B con un autovector asociado $S\mathbf{v}$.
- Factorización de Schur:
  Si A es una matriz cuadrada, entonces existen matrices T y Q tal que $A = QTQ^{*^t}$ con Q unitaria y T triangular superior. No es única.
  - Los elementos de la diagonal de T son los valores propios de la matriz A.
  - T y Q pueden ser complejas aunque A sea real.

Matrices semejantes

Dos matrices A y B cuadradas de orden n son semejantes si existe una matriz S tal que $A = S^{-1}BS$.

- Una matriz es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.
- Igualdad de valores propios: Sea A una matriz cuadrada con autovalor λ y autovector asociado $\mathbf{v}$, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Si A y B son semejantes, con $A = S^{-1}BS$, entonces λ es un autovalor de B con un autovector asociado $S\mathbf{v}$.
- Factorización de Schur:
  Si A es una matriz cuadrada, entonces existen matrices T y Q tal que $A = QTQ^{*^t}$ con Q unitaria y T triangular superior. No es única.
  - Los elementos de la diagonal de T son los valores propios de la matriz A.
  - T y Q pueden ser complejas aunque A sea real.
  - Factorización de Schur real: T es casi triangular superior con bloques diagonales 1×1 (autovalores reales) o 2×2 (complejos conjugados).

Valores espectrales: cálculo con ordenador

- Los autovalores de una matriz cuadrada A son las raíces del polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Útil para matrices muy pequeñas: ✍

Valores espectrales: cálculo con ordenador

- Los autovalores de una matriz cuadrada A son las raíces del polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Útil para matrices muy pequeñas:

  Para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $m = \frac{a+d}{2}$, los valores propios $\lambda_{1,2}$ de A son:

$$\lambda_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - \det(A)}$$

Valores espectrales: cálculo con ordenador

- Los autovalores de una matriz cuadrada A son las raíces del polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Útil para matrices muy pequeñas:

  Para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $m = \frac{a+d}{2}$, los valores propios $\lambda_{1,2}$ de A son:

  $$\lambda_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - \det(A)}$$

  Lo cual se puede derivar de: $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a + d = \mathsf{tr}(A) \\ \lambda_1 \lambda_2 = ad - bc = \det(A) \end{cases}$

Valores espectrales: cálculo con ordenador

- Los autovalores de una matriz cuadrada A son las raíces del polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Útil para matrices muy pequeñas:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ tiene como autovalor } \lambda = -3$$

Valores espectrales: cálculo con ordenador

- Los autovalores de una matriz cuadrada A son las raíces del polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Útil para matrices muy pequeñas:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ tiene como autovalor } \lambda = -3$$

Para obtener un vector propio asociado: $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Valores espectrales: cálculo con ordenador

- Los autovalores de una matriz cuadrada A son las raíces del polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Útil para matrices muy pequeñas:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ tiene como autovalor } \lambda = -3$$

Para obtener un vector propio asociado: $A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned} 8v_1 + 3v_2 - 3v_3 &= 0 \\ 4v_1 + 5v_2 + 3v_3 &= 0 \\ 2v_1 + 6v_2 + 6v_3 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} 8v_1 + 3v_2 - 3v_3 &= 0 \\ 7v_2 + 9v_3 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} \frac{8}{3}v_1 &= v_3 - v_2 \\ v_3 &= -\frac{7}{9}v_2 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} v_1 &= -\frac{2}{3}v_2 \\ v_3 &= -\frac{7}{9}v_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ un autovector de A asociado a $\lambda = -3$ es $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 7 \end{pmatrix}^t$.

Valores espectrales: cálculo con ordenador

- Los autovalores de una matriz cuadrada A son las raíces del polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Útil para matrices muy pequeñas:
- Para $n \geq 4$ los autovalores y autovectores deben encontrarse numéricamente.

Valores espectrales: cálculo con ordenador

- Los autovalores de una matriz cuadrada A son las raíces del polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Útil para matrices muy pequeñas:
- Para $n \geq 4$ los autovalores y autovectores deben encontrarse numéricamente.
- Calcular los autovalores con la formula anterior es mala idea:

Valores espectrales: cálculo con ordenador

- Los autovalores de una matriz cuadrada A son las raíces del polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Útil para matrices muy pequeñas:
- Para $n \geq 4$ los autovalores y autovectores deben encontrarse numéricamente.
- Calcular los autovalores con la formula anterior es mala idea:
  - Calcular el polinomio característico.
  - Encontrar las raíces del polinomio (recordemos el polinomio de Wilkinson).

Autovalores, autovectores y valores singulares

Método de las potencias

Método de las potencias

- Si λ_1 es un autovalor de A tal que $|\lambda_1| > |\lambda|$ para cualquier otro autovalor λ de A, λ_1 se llama autovalor dominante.

Método de las potencias

- Si λ_1 es un autovalor de A tal que $|\lambda_1| > |\lambda|$ para cualquier otro autovalor λ de A, λ_1 se llama autovalor dominante.
  - No toda matriz tiene un autovalor dominante, por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Método de las potencias

- Si λ_1 es un autovalor de A tal que $|\lambda_1| > |\lambda|$ para cualquier otro autovalor λ de A, λ_1 se llama autovalor dominante.
  - No toda matriz tiene un autovalor dominante, por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- El método de las potencias está diseñado para aproximar iterativamente el autovalor dominante λ_1 de A, si existe, y un autovector asociado.

Método de las potencias

- Si λ_1 es un autovalor de A tal que $|\lambda_1| > |\lambda|$ para cualquier otro autovalor λ de A, λ_1 se llama autovalor dominante.
  - No toda matriz tiene un autovalor dominante, por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- El método de las potencias está diseñado para aproximar iterativamente el autovalor dominante λ_1 de A, si existe, y un autovector asociado.
- Veremos modificaciones para calcular también otros autovalores y autovectores.

Cálculo de autovector dominante: primer intento

- Dada una matriz A cuadrada y diagonalizable con autovalor dominante λ_1 y un vector $\mathbf{x}^{(0)}$ que no es perpendicular a los autovectores asociados a λ_1, el método iterativo

$$\mathbf{x}^{(k)} = A\mathbf{x}^{(k-1)} = A^k\mathbf{x}^{(0)}, \ k \geq 1$$

converge a un (múltiplo del) autovector asociado al autovalor dominante λ_1.

Cálculo de autovector dominante: primer intento

- Dada una matriz A cuadrada y diagonalizable con autovalor dominante λ_1 y un vector $\mathbf{x}^{(0)}$ que no es perpendicular a los autovectores asociados a λ_1, el método iterativo
$$\mathbf{x}^{(k)} = A\mathbf{x}^{(k-1)} = A^k\mathbf{x}^{(0)}, \ k \geq 1$$
converge a un (múltiplo del) autovector asociado al autovalor dominante λ_1.

  Vamos a verlo. Asumimos que:

  - Los autovalores de A son $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ con $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$.
  - Existen n autovectores linealmente independientes, $\left\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}\right\}$.
  - $\mathbf{x}^{(0)} = c_1\mathbf{v}^{(1)} + c_2\mathbf{v}^{(2)} + \ldots + c_n\mathbf{v}^{(n)}$ con $c_1 \neq 0$

Cálculo de autovector dominante: primer intento

- Dada una matriz A cuadrada y diagonalizable con autovalor dominante λ_1 y un vector $\mathbf{x}^{(0)}$ que no es perpendicular a los autovectores asociados a λ_1, el método iterativo

$$\mathbf{x}^{(k)} = A\mathbf{x}^{(k-1)} = A^k\mathbf{x}^{(0)}, \; k \geq 1$$

  converge a un (múltiplo del) autovector asociado al autovalor dominante λ_1.

  Vamos a verlo. Asumimos que:

  - Los autovalores de A son $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ con $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$.
  - Existen n autovectores linealmente independientes, $\left\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}\right\}$.
  - $\mathbf{x}^{(0)} = c_1\mathbf{v}^{(1)} + c_2\mathbf{v}^{(2)} + \ldots + c_n\mathbf{v}^{(n)}$ con $c_1 \neq 0$

$$A^k\mathbf{x}^{(0)} = c_1\lambda_1^k\mathbf{v}^{(1)} + c_2\lambda_2^k\mathbf{v}^{(2)} + \ldots + c_n\lambda_n^k\mathbf{v}^{(n)}.$$

Cálculo de autovector dominante: primer intento

- Dada una matriz A cuadrada y diagonalizable con autovalor dominante λ_1 y un vector $\mathbf{x}^{(0)}$ que no es perpendicular a los autovectores asociados a λ_1, el método iterativo

$$\mathbf{x}^{(k)} = A\mathbf{x}^{(k-1)} = A^k\mathbf{x}^{(0)}, \;\; k \geq 1$$

  converge a un (múltiplo del) autovector asociado al autovalor dominante λ_1.

  Vamos a verlo. Asumimos que:

  - Los autovalores de A son $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ con $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$.
  - Existen n autovectores linealmente independientes, $\left\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}^{(k)}\right\}$.
  - $\mathbf{x}^{(0)} = c_1\mathbf{v}^{(1)} + c_2\mathbf{v}^{(2)} + \dots + c_n\mathbf{v}^{(n)}$ con $c_1 \neq 0$

$$A^k\mathbf{x}^{(0)} = \lambda_1^k\left(c_1\mathbf{v}^{(1)} + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}^{(2)} + \dots + c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}^{(n)}\right).$$

Cálculo de autovector dominante: primer intento

- Dada una matriz A cuadrada y diagonalizable con autovalor dominante λ_1 y un vector $\mathbf{x}^{(0)}$ que no es perpendicular a los autovectores asociados a λ_1, el método iterativo

$$\mathbf{x}^{(k)} = A\mathbf{x}^{(k-1)} = A^k\mathbf{x}^{(0)}, \ k \geq 1$$

converge a un (múltiplo del) autovector asociado al autovalor dominante λ_1.

Vamos a verlo. Asumimos que:

  - Los autovalores de A son $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ con $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$.
  - Existen n autovectores linealmente independientes, $\left\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}\right\}$.
  - $\mathbf{x}^{(0)} = c_1\mathbf{v}^{(1)} + c_2\mathbf{v}^{(2)} + \ldots + c_n\mathbf{v}^{(n)}$ con $c_1 \neq 0$

$$A^k\mathbf{x}^{(0)} = \lambda_1^k\left(c_1\mathbf{v}^{(1)} + c_2\underset{\substack{\downarrow k\to\infty\\ 0}}{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k}\mathbf{v}^{(2)} + \ldots + c_n\underset{\substack{\downarrow k\to\infty\\ 0}}{\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k}\mathbf{v}^{(n)}\right).$$

Cálculo de autovector dominante: primer intento

- Dada una matriz A cuadrada y diagonalizable con autovalor dominante λ_1 y un vector $\mathbf{x}^{(0)}$ que no es perpendicular a los autovectores asociados a λ_1, el método iterativo
$$\mathbf{x}^{(k)} = A\mathbf{x}^{(k-1)} = A^k\mathbf{x}^{(0)}, \;\; k \geq 1$$
converge a un (múltiplo del) autovector asociado al autovalor dominante λ_1.

  Vamos a verlo. Asumimos que:

  - Los autovalores de A son $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ con $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$.
  - Existen n autovectores linealmente independientes, $\left\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}\right\}$.
  - $\mathbf{x}^{(0)} = c_1\mathbf{v}^{(1)} + c_2\mathbf{v}^{(2)} + \ldots + c_n\mathbf{v}^{(n)}$ con $c_1 \neq 0$

$$A^k\mathbf{x}^{(0)} = \lambda_1^k \left(c_1\mathbf{v}^{(1)} + c_2 \underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k}_{\downarrow k\to\infty \atop 0} \mathbf{v}^{(2)} + \ldots + c_n \underbrace{\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k}_{\downarrow k\to\infty \atop 0} \mathbf{v}^{(n)} \right).$$

Convergencia rápida si $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \ll 1$

Cálculo de autovector dominante: primer intento

- Dada una matriz A cuadrada y diagonalizable con autovalor dominante λ_1 y un vector $\mathbf{x}^{(0)}$ que no es perpendicular a los autovectores asociados a λ_1, el método iterativo

$$\mathbf{x}^{(k)} = A\mathbf{x}^{(k-1)} = A^k\mathbf{x}^{(0)}, \quad k \geq 1$$

$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \lambda_1^k c_1 \mathbf{v}^{(1)}.$

converge a un (múltiplo del) autovector asociado al autovalor dominante λ_1.

Vamos a verlo. Asumimos que:

  - Los autovalores de A son $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ con $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$.
  - Existen n autovectores linealmente independientes, $\left\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}\right\}$.
  - $\mathbf{x}^{(0)} = c_1\mathbf{v}^{(1)} + c_2\mathbf{v}^{(2)} + \ldots + c_n\mathbf{v}^{(n)}$ con $c_1 \neq 0$

$$A^k\mathbf{x}^{(0)} = \lambda_1^k \left(c_1\mathbf{v}^{(1)} + c_2 \underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k}_{\downarrow k\to\infty \atop 0} \mathbf{v}^{(2)} + \ldots + c_n \underbrace{\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k}_{\downarrow k\to\infty \atop 0} \mathbf{v}^{(n)} \right).$$

Convergencia rápida si $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \ll 1$

Cálculo de autovector dominante: primer intento

- Dada una matriz A cuadrada y diagonalizable con autovalor dominante λ_1 y un vector $\mathbf{x}^{(0)}$ que no es perpendicular a los autovectores asociados a λ_1, el método iterativo

$$\mathbf{x}^{(k)} = A\mathbf{x}^{(k-1)} = A^k\mathbf{x}^{(0)}, \ k \geq 1$$

$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \lambda_1^k c_1 \mathbf{v}^{(1)}$.

converge a un (múltiplo del) autovector asociado al autovalor dominante λ_1.

- ¿Cuál es el problema de este método?

Cálculo de autovector dominante: segundo intento

Cálculo de autovector dominante: segundo intento

- Idea: Escalar el vector $A\mathbf{x}^{(k-1)}$ en cada iteración de manera que el mayor de sus valores sea 1 (es decir, normalizar para la norma $\|\cdot\|_\infty$).

Cálculo de autovector dominante: segundo intento

- Idea: Escalar el vector $A\mathbf{x}^{(k-1)}$ en cada iteración de manera que el mayor de sus valores sea 1 (es decir, normalizar para la norma $\|\cdot\|_\infty$).

Ejemplo: Matriz A: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Vector inicial: $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cálculo de autovector dominante: segundo intento

- Idea: Escalar el vector $A\mathbf{x}^{(k-1)}$ en cada iteración de manera que el mayor de sus valores sea 1 (es decir, normalizar para la norma $\|\cdot\|_\infty$).

Ejemplo: Matriz A: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Vector inicial: $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Iteración 1: $A\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.60 \\ 0.20 \\ 1.00 \end{pmatrix}$.

Cálculo de autovector dominante: segundo intento

- Idea: Escalar el vector $A\mathbf{x}^{(k-1)}$ en cada iteración de manera que el mayor de sus valores sea 1 (es decir, normalizar para la norma $\|\cdot\|_\infty$).

Ejemplo: Matriz A: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Vector inicial: $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Iteración 1: $A\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.60 \\ 0.20 \\ 1.00 \end{pmatrix}$.
- Iteración 2: $A\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 2.20 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}^{(2)} = \frac{1}{2.20} \begin{pmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 2.20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.45 \\ 1.00 \end{pmatrix}$.

Cálculo de autovector dominante: segundo intento

- Idea: Escalar el vector $A\mathbf{x}^{(k-1)}$ en cada iteración de manera que el mayor de sus valores sea 1 (es decir, normalizar para la norma $\|\cdot\|_\infty$).

Ejemplo: Matriz A: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Vector inicial: $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{x}^{(0)}$	$\mathbf{x}^{(1)}$	$\mathbf{x}^{(2)}$	$\mathbf{x}^{(3)}$	$\mathbf{x}^{(4)}$	$\mathbf{x}^{(5)}$	$\mathbf{x}^{(6)}$
$\begin{pmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.60 \\ 0.20 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.45 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.48 \\ 0.55 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.51 \\ 0.51 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.50 \\ 0.49 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.50 \\ 0.50 \\ 1.00 \end{pmatrix}$

Cálculo de autovector dominante: segundo intento

- Idea: Escalar el vector $A\mathbf{x}^{(k-1)}$ en cada iteración de manera que el mayor de sus valores sea 1 (es decir, normalizar para la norma $\|\cdot\|_\infty$).

Ejemplo: Matriz A: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Vector inicial: $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{x}^{(0)}$	$\mathbf{x}^{(1)}$	$\mathbf{x}^{(2)}$	$\mathbf{x}^{(3)}$	$\mathbf{x}^{(4)}$	$\mathbf{x}^{(5)}$	$\mathbf{x}^{(6)}$
$\begin{pmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.60 \\ 0.20 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.45 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.48 \\ 0.55 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.51 \\ 0.51 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.50 \\ 0.49 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.50 \\ 0.50 \\ 1.00 \end{pmatrix}$

La sucesión aproxima el autovector dominante.

Cálculo de autovector dominante: segundo intento

- Idea: Escalar el vector $A\mathbf{x}^{(k-1)}$ en cada iteración de manera que el mayor de sus valores sea 1 (es decir, normalizar para la norma $\|\cdot\|_\infty$).

Ejemplo: Matriz A: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Vector inicial: $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{x}^{(0)}$	$\mathbf{x}^{(1)}$	$\mathbf{x}^{(2)}$	$\mathbf{x}^{(3)}$	$\mathbf{x}^{(4)}$	$\mathbf{x}^{(5)}$	$\mathbf{x}^{(6)}$
$\begin{pmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.60 \\ 0.20 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.45 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.48 \\ 0.55 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.51 \\ 0.51 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.50 \\ 0.49 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.50 \\ 0.50 \\ 1.00 \end{pmatrix}$

La sucesión aproxima el autovector dominante.

Coeficientes usados para escalar:

$5.00 \quad 2.20 \quad 2.82 \quad 3.13 \quad 3.02 \quad 2.99$

Cálculo de autovector dominante: segundo intento

- Idea: Escalar el vector $A\mathbf{x}^{(k-1)}$ en cada iteración de manera que el mayor de sus valores sea 1 (es decir, normalizar para la norma $\|\cdot\|_\infty$).

Ejemplo: Matriz A: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Vector inicial: $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{x}^{(0)}$	$\mathbf{x}^{(1)}$	$\mathbf{x}^{(2)}$	$\mathbf{x}^{(3)}$	$\mathbf{x}^{(4)}$	$\mathbf{x}^{(5)}$	$\mathbf{x}^{(6)}$
$\begin{pmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.60 \\ 0.20 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.45 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.48 \\ 0.55 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.51 \\ 0.51 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.50 \\ 0.49 \\ 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.50 \\ 0.50 \\ 1.00 \end{pmatrix}$

La sucesión aproxima el autovector dominante.

Coeficientes usados para escalar:

$5.00 \quad 2.20 \quad 2.82 \quad 3.13 \quad 3.02 \quad 2.99$

¡La sucesión aproxima el autovalor dominante!

Cociente de Rayleigh: aproximación del autovalor

- Si $\mathbf{x}$ es un autovector de A asociado al autovalor λ, se cumple:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Cociente de Rayleigh: aproximación del autovalor

- Si $\mathbf{x}$ es un autovector de A asociado al autovalor λ, se cumple:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Sistema sobredeterminado $\mathbf{x}\lambda = A\mathbf{x}$

Cociente de Rayleigh: aproximación del autovalor

- Si $\mathbf{x}$ es un autovector de A asociado al autovalor λ, se cumple:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \lambda = \frac{\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{x}^t \cdot \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2^2}.$$

Sistema sobredeterminado $\mathbf{x}\lambda = A\mathbf{x}$

Cociente de Rayleigh: aproximación del autovalor

- Si $\mathbf{x}$ es un autovector de A asociado al autovalor λ, se cumple:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \lambda = \boxed{\frac{\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{x}^t \cdot \mathbf{x}}} = \frac{\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2^2}.$$

Sistema sobredeterminado $\mathbf{x}\lambda = A\mathbf{x}$

Cociente de Rayleigh

Cociente de Rayleigh: aproximación del autovalor

- Si $\mathbf{x}$ es un autovector de A asociado al autovalor λ, se cumple:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \lambda = \boxed{\frac{\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{x}^t \cdot \mathbf{x}}} = \frac{\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2^2}.$$

Sistema sobredeterminado $\mathbf{x}\lambda = A\mathbf{x}$

Cociente de Rayleigh

- Para matrices hermíticas (o simétricas), se aconseja la siguiente sucesión para la aproximación del valor propio:

$$r^{(k)} = \frac{\mathbf{x}^{(k)} \cdot A \cdot \mathbf{x}^{(k)}}{\mathbf{x}^{(k)} \cdot \mathbf{x}^{(k)}}.$$

La convergencia de $r^{(k)}$ hacia $|\lambda_1|$ es del orden de $\left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^2$.

Cociente de Rayleigh: aproximación del autovalor

- Si $\mathbf{x}$ es un autovector de A asociado al autovalor λ, se cumple:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \lambda = \boxed{\frac{\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{x}^t \cdot \mathbf{x}}} = \frac{\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2^2}.$$

Sistema sobredeterminado $\mathbf{x}\lambda = A\mathbf{x}$

Cociente de Rayleigh

- Para matrices hermíticas (o simétricas), se aconseja la siguiente sucesión para la aproximación del valor propio:

$$r^{(k)} = \frac{\mathbf{x}^{(k)} \cdot A \cdot \mathbf{x}^{(k)}}{\mathbf{x}^{(k)} \cdot \mathbf{x}^{(k)}}.$$

La convergencia de $r^{(k)}$ hacia $|\lambda_1|$ es del orden de $\left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^2$.

- Aplicable a cualquier matriz, pero no se mantiene el orden de convergencia.

Método de las potencias: otros valores espectrales

El método de las potencias solo calcula el autovalor/autovector dominante.
Usando las propiedades de los autovalores de A podemos calcular otros:

Método de las potencias: otros valores espectrales

El método de las potencias solo calcula el autovalor/autovector dominante.
Usando las propiedades de los autovalores de A podemos calcular otros:

Si $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{C}$

- $(A - kI)\mathbf{v} = (\lambda - k)\mathbf{v}$.
- $(A - kI)^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{(\lambda - k)}\mathbf{v}$.

Método de las potencias: otros valores espectrales

El método de las potencias solo calcula el autovalor/autovector dominante.
Usando las propiedades de los autovalores de A podemos calcular otros:
Si $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{C}$

- $(A - kI)\mathbf{v} = (\lambda - k)\mathbf{v}$.
- $(A - kI)^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{(\lambda - k)}\mathbf{v}$.

- Método de la potencia inversa: para obtener el autovalor de módulo mínimo. Método de la potencia aplicado a $B = A^{-1}$.

Método de las potencias: otros valores espectrales

El método de las potencias solo calcula el autovalor/autovector dominante.
Usando las propiedades de los autovalores de A podemos calcular otros:
Si $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{C}$ ▶ $(A - kI)\mathbf{v} = (\lambda - k)\mathbf{v}$. ▶ $(A - kI)^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{(\lambda - k)}\mathbf{v}$.

- Método de la potencia inversa: para obtener el autovalor de módulo mínimo. Método de la potencia aplicado a $B = A^{-1}$.
- Método de la potencia con desplazamiento: para obtener el autovalor más alejado de μ. Método de la potencia aplicado a $B = A - \mu I$.

Método de las potencias: otros valores espectrales

El método de las potencias solo calcula el autovalor/autovector dominante.
Usando las propiedades de los autovalores de A podemos calcular otros:

Si $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{C}$
- $(A - kI)\mathbf{v} = (\lambda - k)\mathbf{v}$.
- $(A - kI)^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{(\lambda-k)}\mathbf{v}$.

- Método de la potencia inversa: para obtener el autovalor de módulo mínimo. Método de la potencia aplicado a $B = A^{-1}$.
- Método de la potencia con desplazamiento: para obtener el autovalor más alejado de μ. Método de la potencia aplicado a $B = A - \mu I$.
- Método de la potencia inversa con desplazamiento: para obtener el autovalor más cercano a μ. Método de la potencia aplicado a $B = (A - \mu I)^{-1}$.

Método de las potencias: otros valores espectrales

El método de las potencias solo calcula el autovalor/autovector dominante.
Usando las propiedades de los autovalores de A podemos calcular otros:
Si $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{C}$ ▶ $(A - kI)\mathbf{v} = (\lambda - k)\mathbf{v}$. ▶ $(A - kI)^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{(\lambda - k)}\mathbf{v}$.

- Método de la potencia inversa: para obtener el autovalor de módulo mínimo. Método de la potencia aplicado a $B = A^{-1}$.
- Método de la potencia con desplazamiento: para obtener el autovalor más alejado de μ. Método de la potencia aplicado a $B = A - \mu I$.
- Método de la potencia inversa con desplazamiento: para obtener el autovalor más cercano a μ. Método de la potencia aplicado a $B = (A - \mu I)^{-1}$.

  Útil para refinar autovalores:
  - Si μ aproxima un valor propio λ_i de A, λ_i es valor propio dominante B.
  - Si la aproximación es buena, la convergencia es muy rápida.

Método de las potencias: todos los valores espectrales

Usamos la deflación de Wielandt.

Método de las potencias: todos los valores espectrales

Usamos la deflación de Wielandt.

- Sea λ_1 un valor propio de la matriz A cuadrada $n \times n$ y $\mathbf{x}_1$ un vector propio asociado tal que su primera componente es igual a 1.

Método de las potencias: todos los valores espectrales

Usamos la deflación de Wielandt.

- Sea λ_1 un valor propio de la matriz A cuadrada $n \times n$ y $\mathbf{x}_1$ un vector propio asociado tal que su primera componente es igual a 1.
- Consideremos la matriz: $B = A - \mathbf{x}_1 \mathbf{a}_1$, donde $\mathbf{a}_1$ denota la primera fila de A.

Método de las potencias: todos los valores espectrales

Usamos la deflación de Wielandt.

- Sea λ_1 un valor propio de la matriz A cuadrada $n \times n$ y $\mathbf{x}_1$ un vector propio asociado tal que su primera componente es igual a 1.
- Consideremos la matriz: $B = A - \mathbf{x}_1 \mathbf{a}_1$, donde $\mathbf{a}_1$ denota la primera fila de A.
- B tiene toda la primera fila igual a cero.

Método de las potencias: todos los valores espectrales

Usamos la deflación de Wielandt.

- Sea λ_1 un valor propio de la matriz A cuadrada $n \times n$ y $\mathbf{x}_1$ un vector propio asociado tal que su primera componente es igual a 1.
- Consideremos la matriz: $B = A - \mathbf{x}_1 \mathbf{a}_1$, donde $\mathbf{a}_1$ denota la primera fila de A.
- B tiene toda la primera fila igual a cero.
- Eliminamos la primera fila y la primera columna de B para obtener $\tilde{B}$.

Método de las potencias: todos los valores espectrales

Usamos la deflación de Wielandt.

- Sea λ_1 un valor propio de la matriz A cuadrada $n \times n$ y $\mathbf{x}_1$ un vector propio asociado tal que su primera componente es igual a 1.
- Consideremos la matriz: $B = A - \mathbf{x}_1 \mathbf{a}_1$, donde $\mathbf{a}_1$ denota la primera fila de A.
- B tiene toda la primera fila igual a cero.
- Eliminamos la primera fila y la primera columna de B para obtener $\tilde{B}$.
- Calculamos un nuevo valor propio λ_2 y un vector propio $\tilde{\mathbf{z}}$ de $\tilde{B}$.

Método de las potencias: todos los valores espectrales

Usamos la deflación de Wielandt.

- Sea λ_1 un valor propio de la matriz A cuadrada $n \times n$ y $\mathbf{x}_1$ un vector propio asociado tal que su primera componente es igual a 1.
- Consideremos la matriz: $B = A - \mathbf{x}_1 \mathbf{a}_1$, donde $\mathbf{a}_1$ denota la primera fila de A.
- B tiene toda la primera fila igual a cero.
- Eliminamos la primera fila y la primera columna de B para obtener $\tilde{B}$.
- Calculamos un nuevo valor propio λ_2 y un vector propio $\tilde{\mathbf{z}}$ de $\tilde{B}$.
- Añadiendo un cero a la primera componente de $\tilde{\mathbf{z}}$ obtenemos $\mathbf{z}$.

Método de las potencias: todos los valores espectrales

Usamos la deflación de Wielandt.

- Sea λ_1 un valor propio de la matriz A cuadrada $n \times n$ y $\mathbf{x}_1$ un vector propio asociado tal que su primera componente es igual a 1.
- Consideremos la matriz: $B = A - \mathbf{x}_1\mathbf{a}_1$, donde $\mathbf{a}_1$ denota la primera fila de A.
- B tiene toda la primera fila igual a cero.
- Eliminamos la primera fila y la primera columna de B para obtener $\tilde{B}$.
- Calculamos un nuevo valor propio λ_2 y un vector propio $\tilde{\mathbf{z}}$ de $\tilde{B}$.
- Añadiendo un cero a la primera componente de $\tilde{\mathbf{z}}$ obtenemos $\mathbf{z}$.
- λ_2 es el nuevo valor propio de A y su vector propio es: $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\mathbf{a}_1\mathbf{z}}\mathbf{z}$.

Autovalores, autovectores y valores singulares

Algoritmo QR

The QR algorithm is one of the most important, widely used, and successful tools we have in technical computation.

C. B. Moler, 2004

Algoritmo QR: descripción general

- Proporciona todas las parejas autovalor-autovector de una matriz.

Algoritmo QR: descripción general

- Proporciona todas las parejas autovalor-autovector de una matriz.
- Desarrollado a finales de los años 50, independientemente por J. G. F. Francis (Inglaterra) y V. N. Kublanovskaya (URSS).

Algoritmo QR: descripción general

- Proporciona todas las parejas autovalor-autovector de una matriz.
- Desarrollado a finales de los años 50, independientemente por J. G. F. Francis (Inglaterra) y V. N. Kublanovskaya (URSS).
- Muy usado en software, incluido MATLAB, para el cálculo de valores propios.

Algoritmo QR: descripción general

- Proporciona todas las parejas autovalor-autovector de una matriz.
- Desarrollado a finales de los años 50, independientemente por J. G. F. Francis (Inglaterra) y V. N. Kublanovskaya (URSS).
- Muy usado en software, incluido MATLAB, para el cálculo de valores propios.

Intuición:

Algoritmo QR: descripción general

- Proporciona todas las parejas autovalor-autovector de una matriz.
- Desarrollado a finales de los años 50, independientemente por J. G. F. Francis (Inglaterra) y V. N. Kublanovskaya (URSS).
- Muy usado en software, incluido MATLAB, para el cálculo de valores propios.

Intuición:

- Querríamos obtener simultaneamente varios autovectores por el método de las potencias.

Algoritmo QR: descripción general

- Proporciona todas las parejas autovalor-autovector de una matriz.
- Desarrollado a finales de los años 50, independientemente por J. G. F. Francis (Inglaterra) y V. N. Kublanovskaya (URSS).
- Muy usado en software, incluido MATLAB, para el cálculo de valores propios.

Intuición:

- Querríamos obtener simultaneamente varios autovectores por el método de las potencias.
- Creamos una matrix $X^{(0)}$ cuyas columnas (linealmente indep.) son los vectores iniciales.

Algoritmo QR: descripción general

- Proporciona todas las parejas autovalor-autovector de una matriz.
- Desarrollado a finales de los años 50, independientemente por J. G. F. Francis (Inglaterra) y V. N. Kublanovskaya (URSS).
- Muy usado en software, incluido MATLAB, para el cálculo de valores propios.

Intuición:

- Querríamos obtener simultaneamente varios autovectores por el método de las potencias.
- Creamos una matrix $X^{(0)}$ cuyas columnas (linealmente indep.) son los vectores iniciales.

$$X^{(k)} = AX^{(k-1)}$$

Las columnas de $X^{(k)}$ convergen a ser linealmente dependientes (autovectores para el mismo autovalor).

Algoritmo QR: descripción general

- Proporciona todas las parejas autovalor-autovector de una matriz.
- Desarrollado a finales de los años 50, independientemente por J. G. F. Francis (Inglaterra) y V. N. Kublanovskaya (URSS).
- Muy usado en software, incluido MATLAB, para el cálculo de valores propios.

Intuición:

- Querríamos obtener simultaneamente varios autovectores por el método de las potencias.
- Creamos una matrix $X^{(0)}$ cuyas columnas (linealmente indep.) son los vectores iniciales.

$$X^{(k)} = AX^{(k-1)}$$

Las columnas de $X^{(k)}$ convergen a ser linealmente dependientes (autovectores para el mismo autovalor).

Idea: Forzar independencia lineal.

Algoritmo QR: descripción general

- Proporciona todas las parejas autovalor-autovector de una matriz.
- Desarrollado a finales de los años 50, independientemente por J. G. F. Francis (Inglaterra) y V. N. Kublanovskaya (URSS).
- Muy usado en software, incluido MATLAB, para el cálculo de valores propios.

Intuición:

- Querríamos obtener simultaneamente varios autovectores por el método de las potencias.
- Creamos una matrix $X^{(0)}$ cuyas columnas (linealmente indep.) son los vectores iniciales.

$$X^{(k)} = AX^{(k-1)}$$

Las columnas de $X^{(k)}$ convergen a ser linealmente dependientes (autovectores para el mismo autovalor).

Idea: Forzar independencia lineal.

- Escoger $\hat{Q}^{(0)}$ con p columnas ortonormales.

$$X^{(k)} = A\hat{Q}^{(k-1)}$$

$$\hat{Q}^{(k)}\hat{R}^{(k)} \underset{\uparrow}{=} X^{(k)}$$

factorización QR

Algoritmo QR: descripción general

- Proporciona todas las parejas autovalor-autovector de una matriz.
- Desarrollado a finales de los años 50, independientemente por J. G. F. Francis (Inglaterra) y V. N. Kublanovskaya (URSS).
- Muy usado en software, incluido MATLAB, para el cálculo de valores propios.

Intuición:

- Querríamos obtener simultaneamente varios autovectores por el método de las potencias.
- Creamos una matrix $X^{(0)}$ cuyas columnas (linealmente indep.) son los vectores iniciales.

$$X^{(k)} = AX^{(k-1)}$$

Las columnas de $X^{(k)}$ convergen a ser linealmente dependientes (autovectores para el mismo autovalor).

Idea: Forzar independencia lineal.

- Escoger $\hat{Q}^{(0)}$ con p columnas ortonormales.

$$X^{(k)} = A\hat{Q}^{(k-1)}$$

$$\hat{Q}^{(k)}\hat{R}^{(k)} = X^{(k)}$$

Las columnas de $\hat{Q}^{(k)}$ convergen a los p autovectores dominantes de A.

El algoritmo QR

Dada una matriz real cuadrada A:

$A^{(0)} = A$

for $k = 1, 2, \dots$ do

  $[Q^{(k-1)}, R^{(k-1)}] =$ factQR$(A^{(k-1)})$

  $A^{(k)} = R^{(k-1)} Q^{(k-1)}$

end

El algoritmo QR

Dada una matriz real cuadrada A:

$A^{(0)} = A$

for $k = 1, 2, \ldots$ do

$\quad [Q^{(k-1)}, R^{(k-1)}] = \mathrm{factQR}(A^{(k-1)})$

$\quad A^{(k)} = R^{(k-1)} Q^{(k-1)}$

end

Teorema de convergencia:

El algoritmo QR

Dada una matriz real cuadrada A:

$A^{(0)} = A$
for $k = 1, 2, \ldots$ do
  $[Q^{(k-1)}, R^{(k-1)}] = \text{factQR}(A^{(k-1)})$
  $A^{(k)} = R^{(k-1)} Q^{(k-1)}$
end

Teorema de convergencia: Si

- Los autovalores de A son de la forma $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$,

El algoritmo QR

Dada una matriz real cuadrada A:

$A^{(0)} = A$
for $k = 1, 2, \ldots$ do
  $[Q^{(k-1)}, R^{(k-1)}] = \text{factQR}(A^{(k-1)})$
  $A^{(k)} = R^{(k-1)} Q^{(k-1)}$
end

Teorema de convergencia: Si

- Los autovalores de A son de la forma $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$,
- $(\Rightarrow)$ A es diagonalizable: existen S y D (diagonal) tal que $A = SDS^{-1}$.

El algoritmo QR

Dada una matriz real cuadrada A:

$A^{(0)} = A$
for $k = 1, 2, \ldots$ do
  $[Q^{(k-1)}, R^{(k-1)}] =$ factQR($A^{(k-1)}$)
  $A^{(k)} = R^{(k-1)} Q^{(k-1)}$
end

Teorema de convergencia: Si

- Los autovalores de A son de la forma $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$,
- $(\Rightarrow)$ A es diagonalizable: existen S y D (diagonal) tal que $A = SDS^{-1}$.

entonces $A^{(k)}$ tiende a una matriz triangular superior con los λ_is en la diagonal.

El algoritmo QR

Dada una matriz real cuadrada A:

$A^{(0)} = A$
for $k = 1, 2, \ldots$ do
  $[Q^{(k-1)}, R^{(k-1)}] = \text{factQR}(A^{(k-1)})$
  $A^{(k)} = R^{(k-1)} Q^{(k-1)}$
end

Teorema de convergencia: Si

- Los autovalores de A son de la forma $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$,
- $(\Rightarrow)$ A es diagonalizable: existen S y D (diagonal) tal que $A = SDS^{-1}$.

entonces $A^{(k)}$ tiende a una matriz triangular superior con los λ_is en la diagonal.

  - Si S^{-1} admite una factorización LU, los λ_is aparecen ordenados.

El algoritmo QR

Dada una matriz real cuadrada A:

$A^{(0)} = A$
for $k = 1, 2, \ldots$ do
  $[Q^{(k-1)}, R^{(k-1)}] = \mathsf{factQR}(A^{(k-1)})$
  $A^{(k)} = R^{(k-1)} Q^{(k-1)}$
end

Teorema de convergencia: Si

- Los autovalores de A son de la forma $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$,
- $(\Rightarrow)$ A es diagonalizable: existen S y D (diagonal) tal que $A = SDS^{-1}$.

entonces $A^{(k)}$ tiende a una matriz triangular superior con los λ_is en la diagonal.

- Si S^{-1} admite una factorización LU, los λ_is aparecen ordenados.
- Si hay s autovalores con el mismo módulo, $A^{(k)}$ converge a una matriz casi triangular, con bloques diagonales de dimensión s.

El algoritmo QR

Dada una matriz real cuadrada A:

$A^{(0)} = A$
for $k = 1, 2, \ldots$ do
  $[Q^{(k-1)}, R^{(k-1)}] =$ factQR$(A^{(k-1)})$
  $A^{(k)} = R^{(k-1)} Q^{(k-1)}$
end

Teorema de convergencia: Si

- Los autovalores de A son de la forma $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$,
- $(\Rightarrow)$ A es diagonalizable: existen S y D (diagonal) tal que $A = SDS^{-1}$.

entonces $A^{(k)}$ tiende a una matriz triangular superior con los λ_is en la diagonal.

La convergencia de los elementos subdiagonales es $a_{ij}^{(k)} = \mathcal{O}\left(|\frac{\lambda_i}{\lambda_j}|^k\right)$, para $i > j$.

El algoritmo QR

Dada una matriz real cuadrada A:

$A^{(0)} = A$
for $k = 1, 2, \dots$ do
  $[Q^{(k-1)}, R^{(k-1)}] = \text{factQR}(A^{(k-1)})$
  $A^{(k)} = R^{(k-1)} Q^{(k-1)}$
end

Se hacen transformaciones de similitud:

$$\begin{aligned} A^{(k)} &= R^{(k-1)} Q^{(k-1)} \\ &= (Q^{(k-1)})^t Q^{(k-1)} R^{(k-1)} Q^{(k-1)} \\ &= (Q^{(k-1)})^t A^{(k-1)} Q^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Teorema de convergencia: Si

- Los autovalores de A son de la forma $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$,
- $(\Rightarrow)$ A es diagonalizable: existen S y D (diagonal) tal que $A = SDS^{-1}$.

entonces $A^{(k)}$ tiende a una matriz triangular superior con los λ_is en la diagonal.

La convergencia de los elementos subdiagonales es $a_{ij}^{(k)} = \mathcal{O}\left(|\frac{\lambda_i}{\lambda_j}|^k\right)$, para $i > j$.

El algoritmo QR

Dada una matriz real cuadrada A:

$A^{(0)} = A$
for $k = 1, 2, \ldots$ do
  $[Q^{(k-1)}, R^{(k-1)}] =$ factQR($A^{(k-1)}$)
  $A^{(k)} = R^{(k-1)} Q^{(k-1)}$
end

Se hacen transformaciones de similitud:

$$\begin{aligned} A^{(k)} &= R^{(k-1)} Q^{(k-1)} \\ &= (Q^{(k-1)})^t Q^{(k-1)} R^{(k-1)} Q^{(k-1)} \\ &= (Q^{(k-1)})^t A^{(k-1)} Q^{(k-1)}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ factorización de Schur de A.

Teorema de convergencia: Si

- Los autovalores de A son de la forma $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$,
- ($\Rightarrow$) A es diagonalizable: existen S y D (diagonal) tal que $A = SDS^{-1}$.

entonces $A^{(k)}$ tiende a una matriz triangular superior con los λ_is en la diagonal.

La convergencia de los elementos subdiagonales es $a_{ij}^{(k)} = \mathcal{O}\left(|\frac{\lambda_i}{\lambda_j}|^k\right)$, para $i > j$.

Algoritmo QR: matrices de Hessenberg

Una matriz de Hessenberg es cuadrada y tiene ceros por debajo de la primera subdiagonal (superior) o por encima de la primera superdiagonal (inferior).

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \dots & h_{2n} \\ 0 & h_{32} & h_{33} & \dots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

Algoritmo QR: matrices de Hessenberg

Una matriz de Hessenberg es cuadrada y tiene ceros por debajo de la primera subdiagonal (superior) o por encima de la primera superdiagonal (inferior).

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \dots & h_{2n} \\ 0 & h_{32} & h_{33} & \dots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema: Si A es una matriz de Hessenberg, el algoritmo QR es aplicado a A da lugar a matrices $A^{(k)}$, todas ellas matrices de Hessenberg.

Algoritmo QR: matrices de Hessenberg

Una matriz de Hessenberg es cuadrada y tiene ceros por debajo de la primera subdiagonal (superior) o por encima de la primera superdiagonal (inferior).

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \dots & h_{2n} \\ 0 & h_{32} & h_{33} & \dots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema: Si A es una matriz de Hessenberg, el algoritmo QR es aplicado a A da lugar a matrices $A^{(k)}$, todas ellas matrices de Hessenberg.

Teorema: Si A es una matriz tridiagonal, el algoritmo QR es aplicado a A da lugar a matrices $A^{(k)}$, todas ellas matrices tridiagonales.

El algoritmo QR en la práctica

Hemos visto la versión básica del algoritmo QR. En la práctica:

El algoritmo QR en la práctica

Hemos visto la versión básica del algoritmo QR. En la práctica:

- La convergencia se acelera incluyendo desplazamientos.

El algoritmo QR en la práctica

Hemos visto la versión básica del algoritmo QR. En la práctica:

- La convergencia se acelera incluyendo desplazamientos.
- Se reduce A a forma Hessenberg superior (usando reflexiones de Householder) antes de usar el algoritmo QR.

El algoritmo QR en la práctica

Hemos visto la versión básica del algoritmo QR. En la práctica:

- La convergencia se acelera incluyendo desplazamientos.
- Se reduce A a forma Hessenberg superior (usando reflexiones de Householder) antes de usar el algoritmo QR.
- Las factorizaciones QR son implícitas.

El algoritmo QR en la práctica

Hemos visto la versión básica del algoritmo QR. En la práctica:

- La convergencia se acelera incluyendo desplazamientos.
- Se reduce A a forma Hessenberg superior (usando reflexiones de Householder) antes de usar el algoritmo QR.
- Las factorizaciones QR son implícitas.
- Se realiza deflación cuando los elementos subdiagonales de $A^{(k)}$ se hacen pequeños.

Autovalores, autovectores y valores singulares

Valores singulares

Autovalores, autovectores y valores singulares

Valores singulares

In the past the conventional way to determine the rank of A was to convert A to a row-echelon form... But in floating-point calculations it may not be so easy to decide whether some number is effectively zero or not... In other words, without looking explicitly at the singular values there seems to be no satisfactory way to assign rank to A.

Golub & Kahan, 1965

Valores singulares

- Sea A una matriz $m \times n$, la matriz $A^t A$ es cuadrada $n \times n$, simétrica y semidefinida positiva; sus n valores propios, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, son reales y no negativos.

Valores singulares

- Sea A una matriz $m \times n$, la matriz A^tA es cuadrada $n \times n$, simétrica y semidefinida positiva; sus n valores propios, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, son reales y no negativos.
- Se llaman valores singulares de A y se denotan por $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n$ a las n raíces cuadradas (positivas) de los valores propios (no negativos) de A^tA.

Valores singulares

- Sea A una matriz $m \times n$, la matriz $A^t A$ es cuadrada $n \times n$, simétrica y semidefinida positiva; sus n valores propios, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, son reales y no negativos.
- Se llaman valores singulares de A y se denotan por $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n$ a las n raíces cuadradas (positivas) de los valores propios (no negativos) de $A^t A$.

But the calculation of $A^t A$ using ordinary floating point arithmetic does serious violence to the smaller singular values...

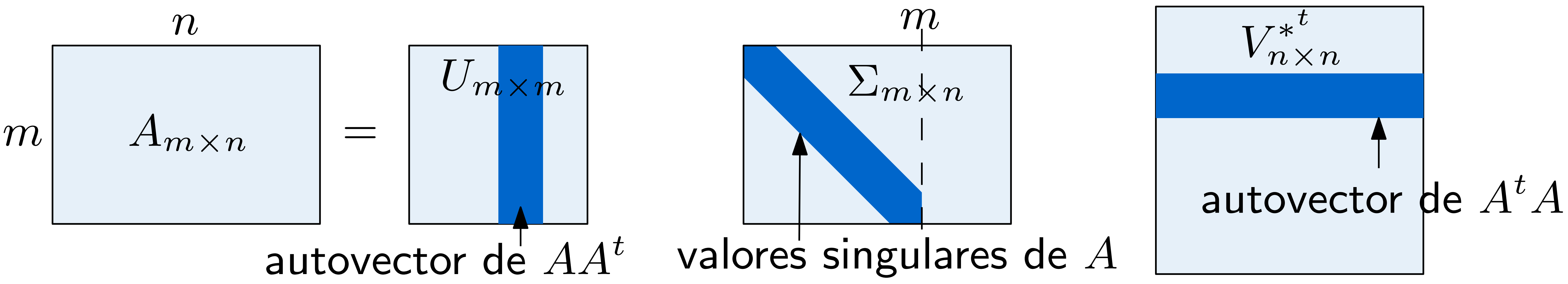
Golub & Kahan, 1965

Descomposición en valores singulares (SVD)

Teorema: Para cualquier matriz A de orden $m \times n$, existen matrices unitarias U de orden $m \times m$ y V de orden $n \times n$, y una matriz diagonal Σ de orden $m \times n$ tal que $A = U\Sigma {V^*}^t$.La diagonal de Σ son los valores singulares de A (ordenados $\downarrow$).

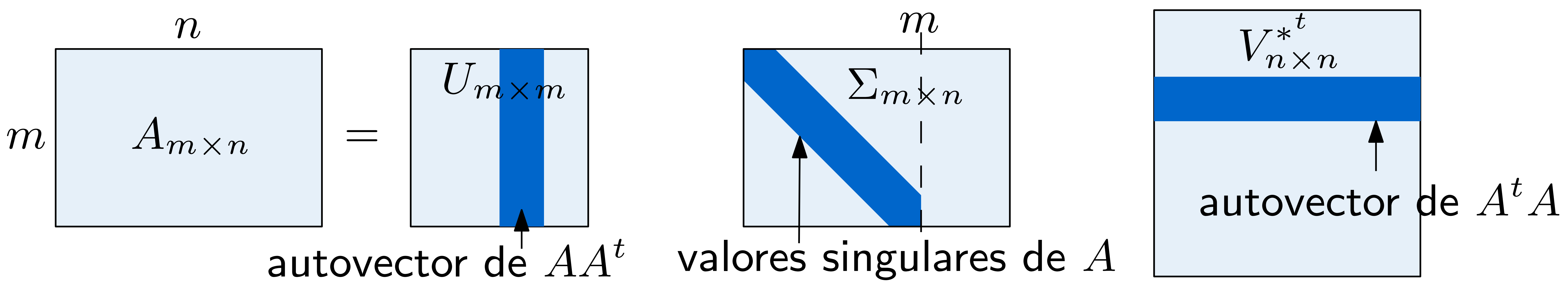
Descomposición en valores singulares (SVD)

Teorema: Para cualquier matriz A de orden $m \times n$, existen matrices unitarias U de orden $m \times m$ y V de orden $n \times n$, y una matriz diagonal Σ de orden $m \times n$ tal que $A = U\Sigma {V^*}^t$.La diagonal de Σ son los valores singulares de A (ordenados ↓).



Descomposición en valores singulares (SVD)

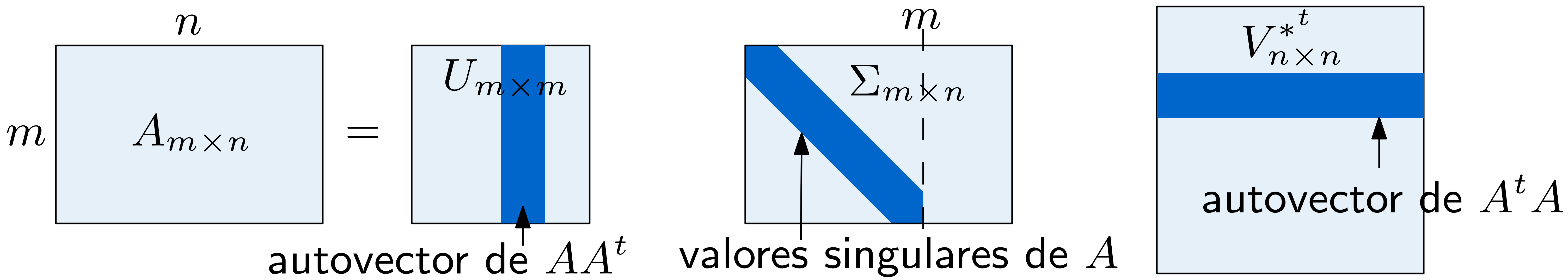
Teorema: Para cualquier matriz A de orden $m \times n$, existen matrices unitarias U de orden $m \times m$ y V de orden $n \times n$, y una matriz diagonal Σ de orden $m \times n$ tal que $A = U\Sigma {V^*}^t$.La diagonal de Σ son los valores singulares de A (ordenados ↓).



- Los autovalores de ciertas matrices pueden ser muy sensibles a perturbaciones.

Descomposición en valores singulares (SVD)

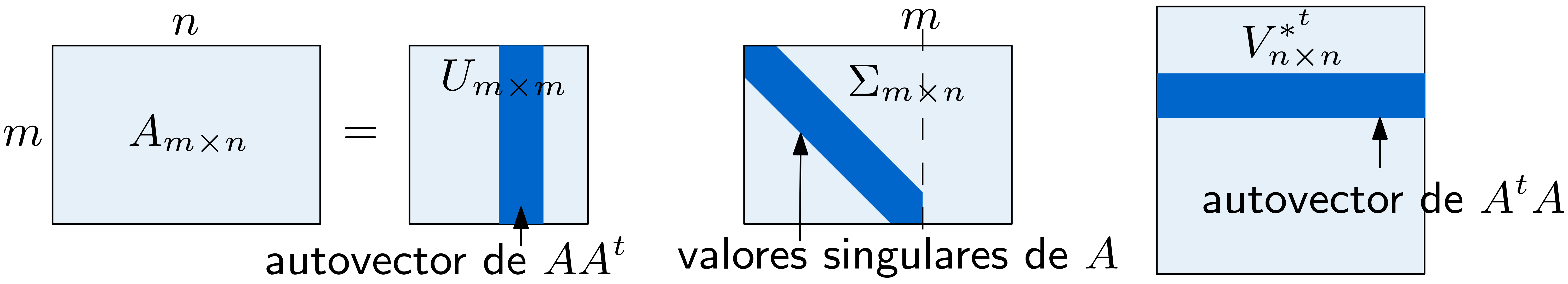
Teorema: Para cualquier matriz A de orden $m \times n$, existen matrices unitarias U de orden $m \times m$ y V de orden $n \times n$, y una matriz diagonal Σ de orden $m \times n$ tal que $A = U\Sigma {V^*}^t$.La diagonal de Σ son los valores singulares de A (ordenados $\downarrow$).



- Los autovalores de ciertas matrices pueden ser muy sensibles a perturbaciones.
- En cambio, el cálculo de valores singulares está siempre perfectamente condicionado.

Descomposición en valores singulares (SVD)

Teorema: Para cualquier matriz A de orden $m \times n$, existen matrices unitarias U de orden $m \times m$ y V de orden $n \times n$, y una matriz diagonal Σ de orden $m \times n$ tal que $A = U\Sigma {V^*}^t$.La diagonal de Σ son los valores singulares de A (ordenados ↓).



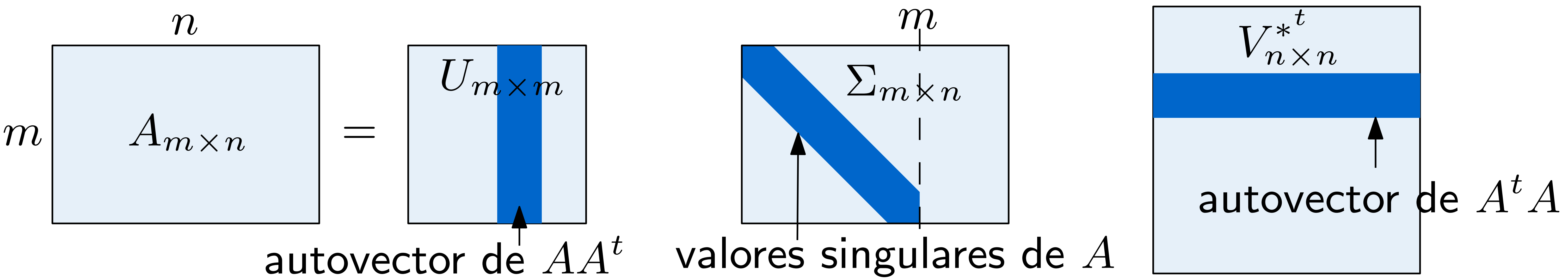
- Los autovalores de ciertas matrices pueden ser muy sensibles a perturbaciones.
- En cambio, el cálculo de valores singulares está siempre perfectamente condicionado.

$$\Sigma + \Delta\Sigma = {U^*}^t (A + \Delta A) V.$$

Como U y V son unitarias, preservan normas $\Rightarrow \|\Delta\Sigma\| = \|\Delta A\|$.

Descomposición en valores singulares (SVD)

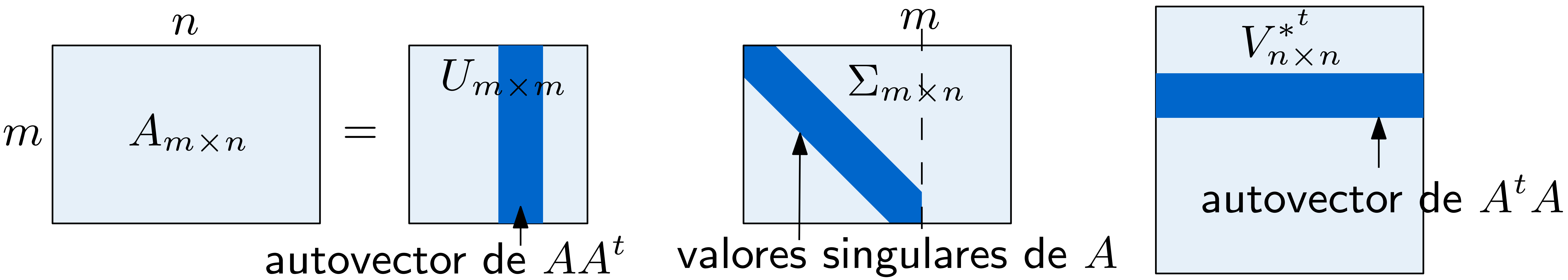
Teorema: Para cualquier matriz A de orden $m \times n$, existen matrices unitarias U de orden $m \times m$ y V de orden $n \times n$, y una matriz diagonal Σ de orden $m \times n$ tal que $A = U\Sigma {V^*}^t$.La diagonal de Σ son los valores singulares de A (ordenados ↓).



Si r =rang(A), $A = USV^t = [U_r, U_{m-r}] \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left[{V_r^*}^t, {V_{n-r}^*}^t\right]^t$. valores singulares no nulos de A

Descomposición en valores singulares (SVD)

Teorema: Para cualquier matriz A de orden $m \times n$, existen matrices unitarias U de orden $m \times m$ y V de orden $n \times n$, y una matriz diagonal Σ de orden $m \times n$ tal que $A = U\Sigma {V^*}^t$.La diagonal de Σ son los valores singulares de A (ordenados $\downarrow$).



Si $r =$rang(A), $A = USV^t = [U_r, U_{m-r}] \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left[{V_r^*}^t, {V_{n-r}^*}^t\right]^t$. valores singulares no nulos de A

- Permite escribir A como la suma de r matrices de rango 1:

$$A = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^t + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^t + \ldots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^t,$$

donde $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ y $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ son las r primeras columnas de U y V, resp.

SVD: teorema de aproximación

El cálculo de la SVD permite escribir A como la suma de r matrices de rango 1:

$$A = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^t + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^t + \ldots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^t,$$

$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ y $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ son las r primeras columnas de las matrices U y V.

Teorema de Eckart–Young, 1936

La mejor aproximación A_k de A entre todas las matrices de tamaño $m \times n$ y rango $\leq k < r =$ rango(A) (la que minimiza la norma espectral de la diferencia, $\|A - A_k\|_2$) es la matriz

$$A_k = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^t + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^t + \ldots + \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^t,$$

obtenida tomando solo los k mayores valores singulares.

La norma espectral verifica: $\|A\|_2 = \sigma_1, \quad$ y $\quad \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$

Matrix Computations, G. Golub, C. Van Loan, Johns Hopkins Uni. Press, (1996).

SVD: algoritmo

El algoritmo de Golub y Reinsch (1970) para el cálculo de valores singulares no calcula en ningún momento la matriz $A^t A$, sino que trabaja directamente sobre la matriz A.

SVD: algoritmo

El algoritmo de Golub y Reinsch (1970) para el cálculo de valores singulares no calcula en ningún momento la matriz $A^t A$, sino que trabaja directamente sobre la matriz A.

Básicamente, consiste en dos grandes pasos:

- primero se transforma la matriz inicial A en una de más sencilla y
- luego se aplica una variante del algoritmo QR para obtener una sucesión de matrices convergentes a una matriz diagonal que contiene los valores singulares.

Autovalores, autovectores y valores singulares

Pseudoinversa de Moore-Penrose

Pseudoinversa de Moore-Penrose

Sea A una matriz $m \times n$, la pseudoinversa de Moore-Penrose, A^+, es la única matriz $n \times m$ tal que

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+.$$

La matriz A^+ se puede calcular a partir de la descomposición en valores singulares de la matriz A.

Pseudoinversa de Moore-Penrose

Sea A una matriz $m \times n$, la pseudoinversa de Moore-Penrose, A^+, es la única matriz $n \times m$ tal que

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+.$$

La matriz A^+ se puede calcular a partir de la descomposición en valores singulares de la matriz A.

Valores singulares de A y matriz A^+

$$A = USV^t = [U_r, U_{m-r}] \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left[V_r^T, V_{n-r}^T\right]^t \Rightarrow A^+ = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^t$$

La matriz Σ_r es diagonal con los valores singulares no nulos.

Sistemas lineales sobredeterminados: matriz pseudoinversa

Sea A una matriz $m \times n$, $m \geq n$, $\mathbf{b}$ un vector de m componentes, $\mathbf{x}$ el vector de n incógnitas. La matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones normales, $A^t A$, es no singular si y solo si $\operatorname{rang}(A) = n$.

Sistemas lineales sobredeterminados: matriz pseudoinversa

Sea A una matriz $m \times n$, $m \geq n$, $\mathbf{b}$ un vector de m componentes, $\mathbf{x}$ el vector de n incógnitas. La matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones normales, $A^t A$, es no singular si y solo si $\text{rang}(A) = n$.

- La solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ que minimiza el residuo es la solución del sistema de ecuaciones normales $A^t A\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$.

Sistemas lineales sobredeterminados: matriz pseudoinversa

Sea A una matriz $m \times n$, $m \geq n$, $\mathbf{b}$ un vector de m componentes, $\mathbf{x}$ el vector de n incógnitas. La matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones normales, $A^t A$, es no singular si y solo si rang$(A) = n$.

- La solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ que minimiza el residuo es la solución del sistema de ecuaciones normales $A^t A\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$.

Teorema de la pseudo-inversa

La solución de **residuo mínimo** de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$.

Ajuste por mínimos cuadrados

Recta: $y = mx + b$.

Paràbola: $y = ax^2 + bx + c$.

Cúbica: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Potencia: $y = bx^m \Rightarrow \ln(y) = \ln(b) + m\ln(x)$.

Exponencial: $y = be^{mx} \Rightarrow \ln(y) = \ln(b) + mx$.

Logarítmica: $y = m\ln(x) + b$.

Hiperbólica: $y = \frac{1}{mx+b} \Rightarrow mx + b = \frac{1}{y}$.

Todos estos problemas de ajuste se transforman en sistemas lineales sobredeterminados.

Guia de estudio

Libro *Càlcul numèric: teoria i pràctica* de M. Grau Sánchez y M. Noguera Batlle.

- Conceptos y ejercicios resueltos: Capítulo 7, páginas 250–297.
- Problemas propuestos: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 8.
- Prácticas propuestas: páginas 298–309.

Libro *Cálculo numérico* de M. Grau Sánchez y M. Noguera Batlle.

- Conceptos y ejercicios resueltos: Capítulo 7, páginas 223–261.
- Problemas propuestos: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 8.
- Prácticas propuestas: páginas 262–274.

Libro *Cálculo científico con MATLAB y Octave* de A. Quarteroni y F. Saleri.

- Conceptos y ejercicios: Capítulo 6, páginas 173–190.
- Problemas y prácticas propuestos: 6.1–6.10.