Computación Numérica

Tema 5 (II). Integración Numérica.

Irene Parada

irene.parada@upc.edu

Departamento de Matemáticas

Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech

13 de mayo de 2024

Repaso

Breve recordatorio del Tema 5.1

- Fórmula forward y backward. Error de truncamiento y orden.
- Fórmula centrada. Error de truncamiento y orden.
- Fórmula backward mejorada. Error de truncamiento y orden.
- Fórmula centrada para la segunda derivada. Error de truncamiento y orden.
- Error total en las fórmulas de integración y expresión para la fórmula backward.
- Extrapolación de Richardson.
- Derivación de funciones usando la FFT.

Introducción

La integración numérica nos proporciona valores aproximados de $\int_a^b f(x)\,dx$ que nos serán de utilidad

- cuando la función $f(x)$ no tenga primitiva:

$$\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dt$$

- cuando la integral necesita mucho esfuerzo de cálculo o
- cuando no se conoce la expresión analítica de $f(x)$.

Fórmula de integración

Los métodos que se consideran son de la forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + E_n(f).$$

Fórmula de integración

Los métodos que se consideran son de la forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + E_n(f).$$

- $\{x_i\}$ son los nodos de integración o cuadratura.

Fórmula de integración

Los métodos que se consideran son de la forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + E_n(f).$$

- $\{x_i\}$ son los nodos de integración o cuadratura.
- $\{w_i\}$ son los coeficientes o pesos de la fórmula.

Fórmula de integración

Los métodos que se consideran son de la forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + E_n(f).$$

- $\{x_i\}$ son los nodos de integración o cuadratura.
- $\{w_i\}$ son los coeficientes o pesos de la fórmula.
- $Q_n(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$ es una fórmula de cuadratura de $n+1$ puntos.

Fórmula de integración

Los métodos que se consideran son de la forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + E_n(f).$$

- $\{x_i\}$ son los nodos de integración o cuadratura.
- $\{w_i\}$ son los coeficientes o pesos de la fórmula.
- $Q_n(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$ es una fórmula de cuadratura de $n+1$ puntos.
- $E_n(f)$ es el error de truncamiento de la fórmula.

Grado de precisión

Una fórmula de cuadratura para una función f en un intervalo $[a, b]$ se dice que tiene grado de precisión n si y solo si todos los monomios de grado menor o igual que n, $(x^k, k = 0, 1, \ldots, n)$, son integrados de forma exacta con la fórmula:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

y existe un polinomio f_{n+1} de grado $n+1$ para el cual el error de truncamiento no es cero, $E_n(f_{n+1}) \neq 0$.

Grado de precisión

Una fórmula de cuadratura para una función f en un intervalo $[a, b]$ se dice que tiene grado de precisión n si y solo si todos los monomios de grado menor o igual que n, $(x^k, k = 0, 1, \ldots, n)$, son integrados de forma exacta con la fórmula:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

y existe un polinomio f_{n+1} de grado $n + 1$ para el cual el error de truncamiento no es cero, $E_n(f_{n+1}) \neq 0$.

- En el caso de abcisas equiespaciadas $h = \frac{b-a}{n}$, también se dice que el error es de orden n cuando $E_n(f) = \mathcal{O}(h^n)$ (cuidado con esta definición).

Grado de precisión

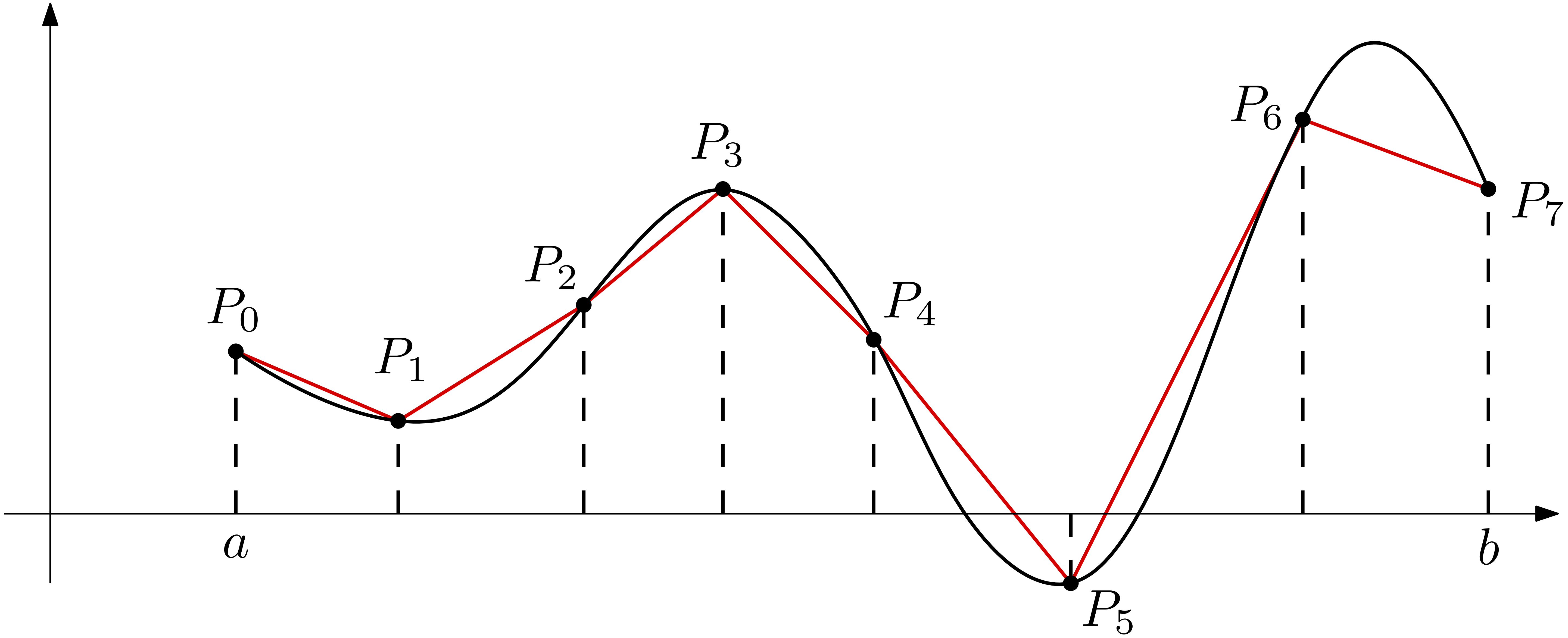
Ejercicio: Para qué coeficientes a, b y c la fórmula de integración:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = af(0) + bf\left(\frac{1}{2}\right) + cf(1)$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual a dos?

Fórmulas de Newton-Côtes

Fórmulas de Newton-Côtes



Método de los trapecios e interpolante lineal

Fórmulas de Newton-Côtes

Si $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función real de variable real continua, sea $P_n(x)$ el polinomio interpolador de f en los nodos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P_n(x)\,dx.$$

La expresión obtenida de $\int_a^b P_n(x)\,dx$ se llama fórmula de Newton-Côtes de $n+1$ puntos.

Fórmulas de Newton-Côtes

Si $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función real de variable real continua, sea $P_n(x)$ el polinomio interpolador de f en los nodos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P_n(x)\,dx.$$

La expresión obtenida de $\int_a^b P_n(x)\,dx$ se llama fórmula de Newton-Côtes de $n+1$ puntos.

- Tiene un grado de precisión de al menos n.

Fórmulas de Newton-Côtes

Si $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función real de variable real continua, sea $P_n(x)$ el polinomio interpolador de f en los nodos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \int_a^b P_n(x)\, dx.$$

La expresión obtenida de $\int_a^b P_n(x)\, dx$ se llama fórmula de Newton-Côtes de $n + 1$ puntos.

- Tiene un grado de precisión de al menos n.
- La forma general del error de truncamiento (para fórmulas cerradas) es:

  $$E(f) = K f^{(n+1)}(c),$$

  donde $c \in (a, b)$ y K es una constante adecuada.

Fórmulas de Newton-Côtes: expresiones genéricas

- Asumimos $n+1$ nodos equiespaciados $x_k = x_0 + kh$ en $[a, b]$, $k = 0, \ldots, n$.

Fórmulas de Newton-Côtes: expresiones genéricas

- Asumimos $n+1$ nodos equiespaciados $x_k = x_0 + kh$ en $[a,b]$, $k = 0,\ldots,n$.
- Haciendo uso del polinomio interpolador en forma de Lagrange:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j) dx = \sum_{j=0}^{n} \left(\int_a^b L_j(x) dx \right) f(x_j)$$

Fórmulas de Newton-Côtes: expresiones genéricas

- Asumimos $n+1$ nodos equiespaciados $x_k = x_0 + kh$ en $[a,b]$, $k = 0, \ldots, n$.
- Haciendo uso del polinomio interpolador en forma de Lagrange:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j) dx = \sum_{j=0}^{n} \left(\int_a^b L_j(x)dx \right) f(x_j)$$

Con el cambio $x = a + th$: $L_j(x) = \varphi_j(t) = \displaystyle\prod_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{t-k}{j-k}$.

Fórmulas de Newton-Côtes: expresiones genéricas

- Asumimos $n+1$ nodos equiespaciados $x_k = x_0 + kh$ en $[a,b]$, $k = 0,\ldots,n$.
- Haciendo uso del polinomio interpolador en forma de Lagrange:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j)dx = \sum_{j=0}^{n}\left(\int_a^b L_j(x)dx\right) f(x_j)$$

Con el cambio $x = a + th$: $L_j(x) = \varphi_j(t) = \displaystyle\prod_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{t-k}{j-k}$.
Obtenemos:

$$= h\sum_{j=0}^{n}\left(\int_0^1 \varphi_j(t)dt\right) f(x_j) = h\cdot\sum_{j=0}^{n}\alpha_j f(x_j) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i).$$

Los $\alpha_j = \int_0^n \varphi_j(t)dt$ dependen solo n y son racionales que suman n.

Fórmulas de Newton-Côtes: expresiones genéricas

- Asumimos $n+1$ nodos equiespaciados $x_k = x_0 + kh$ en $[a,b]$, $k = 0, \dots, n$.
- Haciendo uso del polinomio interpolador en forma de Lagrange:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j) dx = \sum_{j=0}^{n} \left(\int_a^b L_j(x) dx \right) f(x_j)$$

Con el cambio $x = a + th$: $L_j(x) = \varphi_j(t) = \displaystyle\prod_{k=0, k\neq j}^{n} \frac{t-k}{j-k}$.
Obtenemos:

$$= h \sum_{j=0}^{n} \left(\int_0^1 \varphi_j(t) dt \right) f(x_j) = h \cdot \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(x_j) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i).$$

Los $\alpha_j = \int_0^n \varphi_j(t)dt$ dependen solo n y son racionales que suman n.

- Los pesos son tediosos, pero no se usan estas fórmulas más allá de $n = 4$ o 6 (para $n \geq 9$ aparecen pesos negativos $\Rightarrow$ peligro de cancelación catastrófica).

Ejercicio

Deducir la fórmula de Newton-Côtes para:

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ y nodos a, b.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ y nodos $a, \dfrac{a+b}{2}, b$.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ y nodos $0, 1/3, 2/3, 1$.

Fórmulas de Newton-Côtes abiertas y cerradas

- **Fórmulas cerradas de $n+1$ puntos:** Los extremos del intervalo $[a,b]$ se incluyen como nodos.

  Los nodos equiespaciados son $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, y $x_k = a + kh$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, con $h = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$.

Fórmulas de Newton-Côtes abiertas y cerradas

- Fórmulas cerradas de $n+1$ puntos: Los extremos del intervalo $[a,b]$ se incluyen como nodos.

  Los nodos equiespaciados son $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, y $x_k = a + kh$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, con $h = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$.

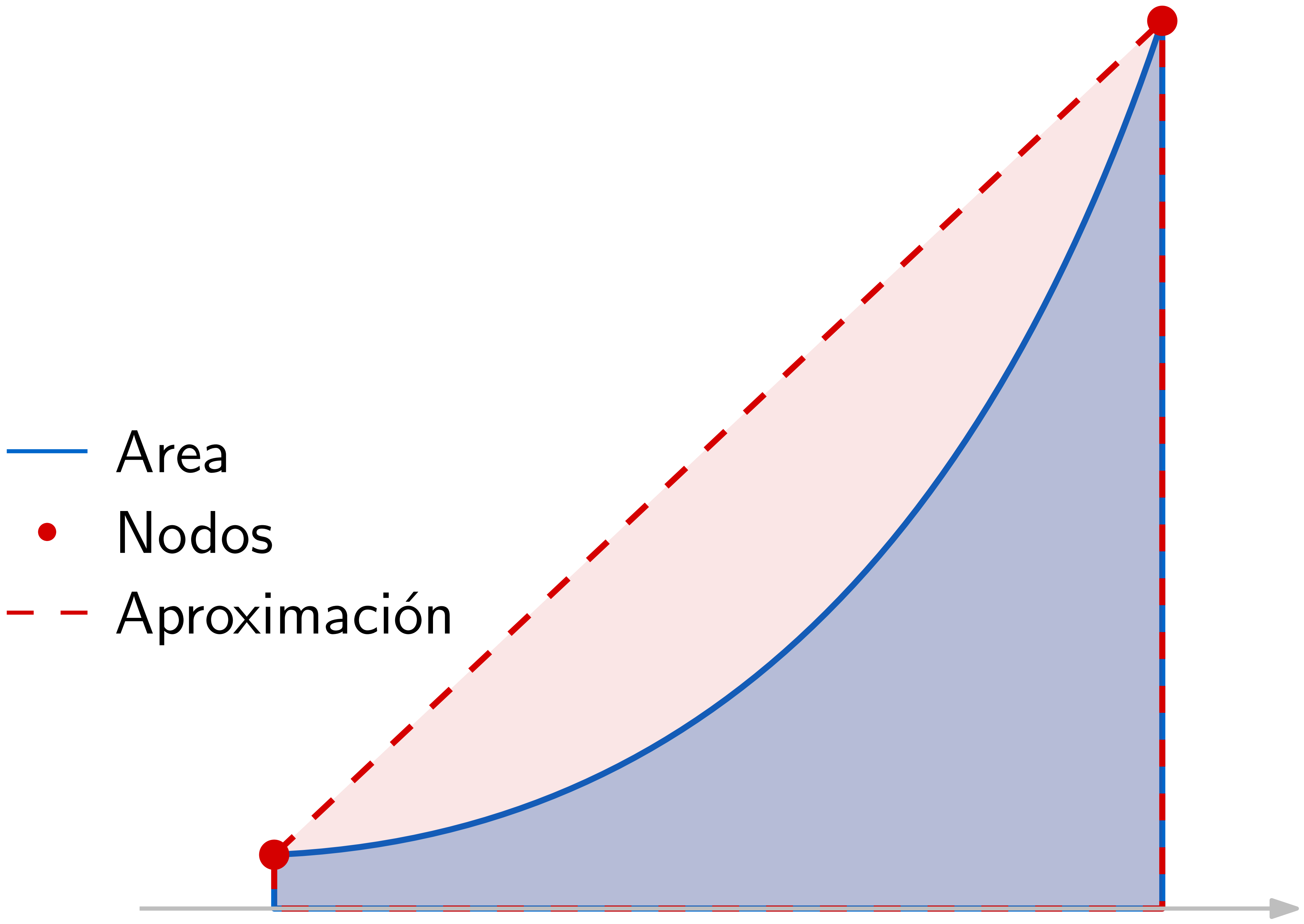
- Fórmulas abiertas de $n+1$ puntos: Todos los nodos están en el intervalo abierto (a,b), los extremos del intervalo no se incluyen como nodos.

  Los nodos equiespaciados son $a < x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n < b$, y $h = x_k - x_{k-1} = \frac{(b-a)}{(n+2)}$ donde $a = x_{-1}$ y $b = x_{n+1}$.

Fórmulas de Newton-Côtes

Cerradas

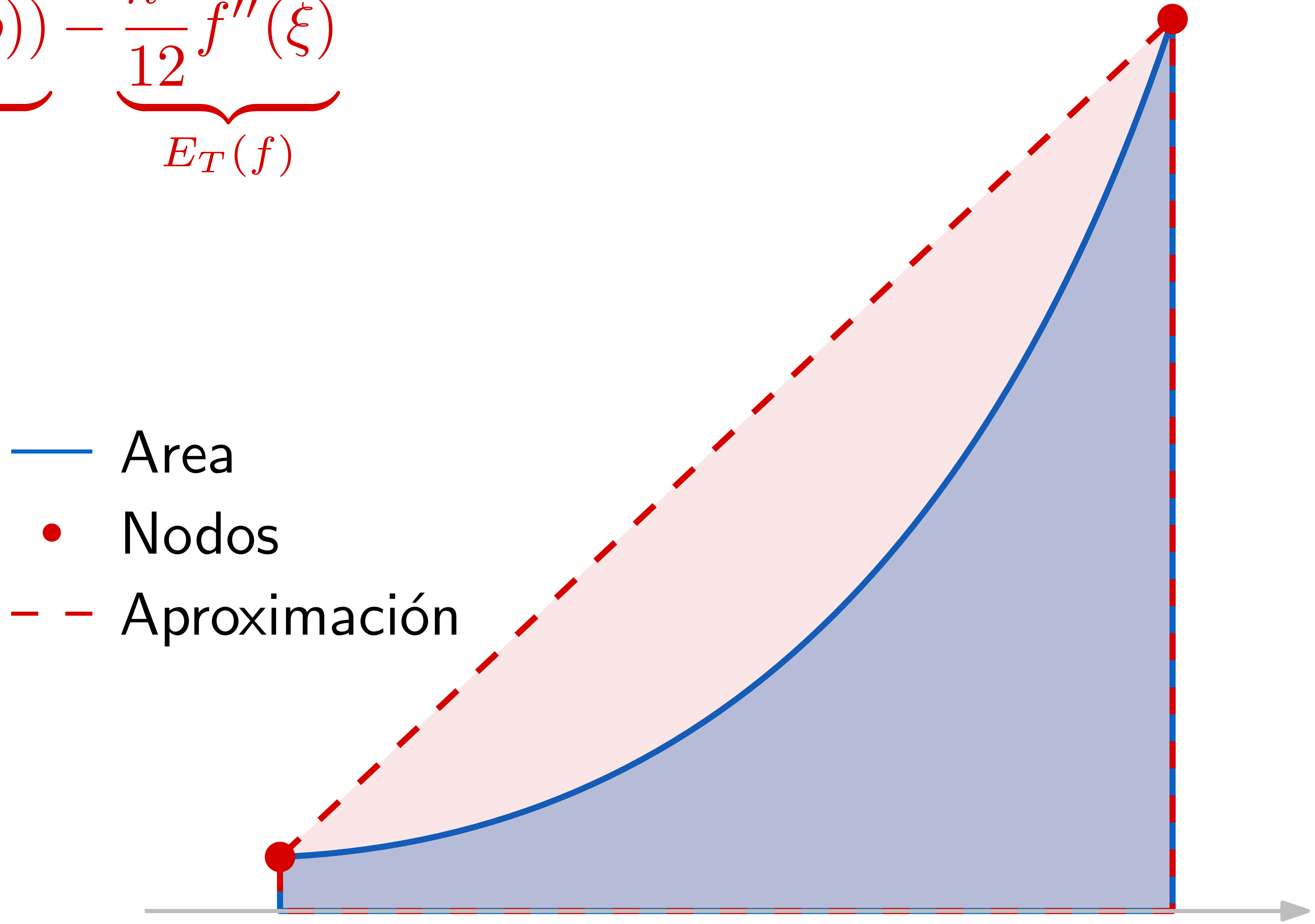
Fórmula de Newton-Côtes cerrada, $n = 1$: regla del trapecio



Fórmula de Newton-Côtes cerrada, $n = 1$: regla del trapecio

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right)}_{T(f)} - \underbrace{\frac{h^3}{12}f''(\xi)}_{E_T(f)}$$

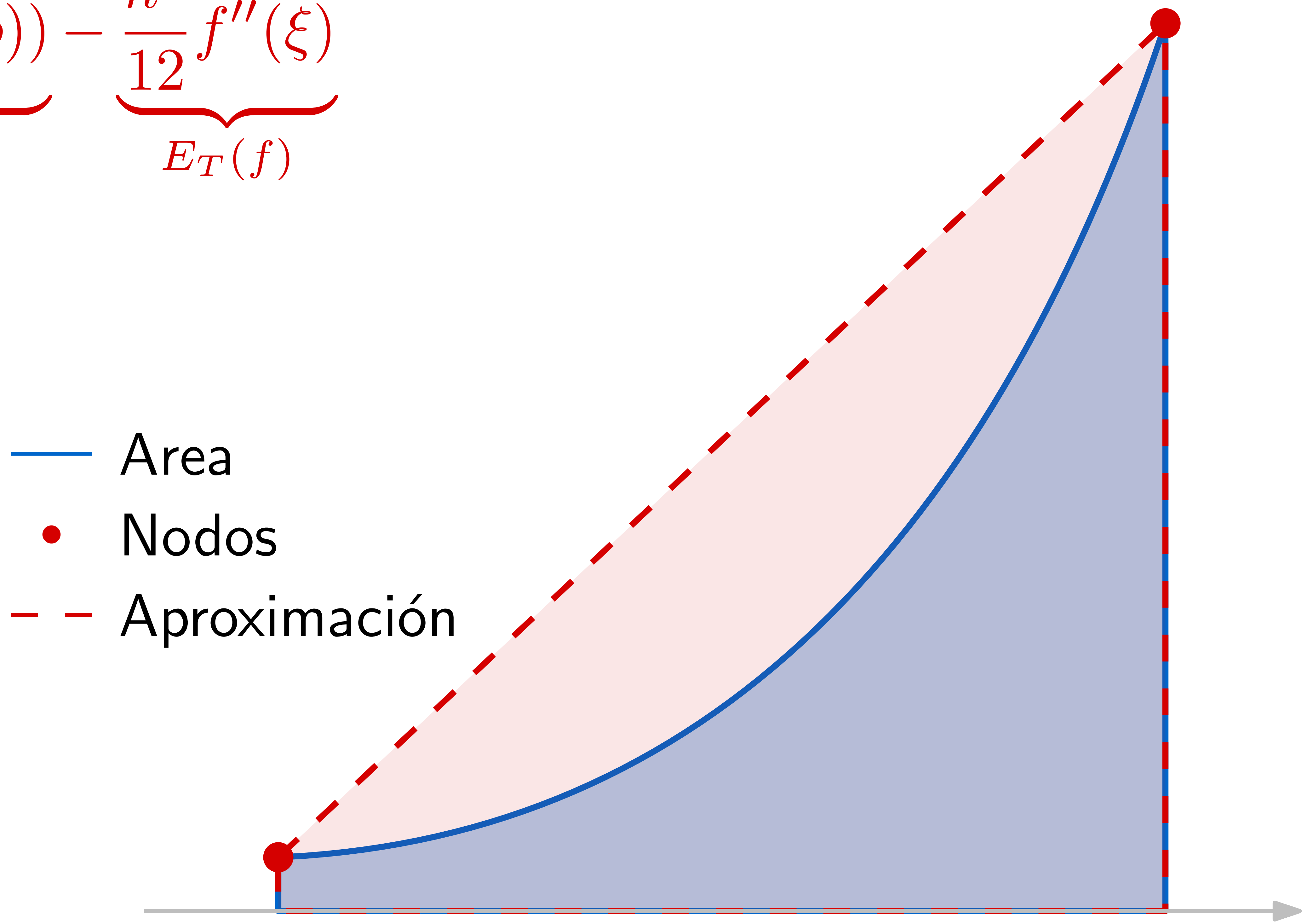
donde $h = b - a$, $a < \xi < b$.



Fórmula de Newton-Côtes cerrada, $n = 1$: regla del trapecio

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right)}_{T(f)} - \underbrace{\frac{h^3}{12}f''(\xi)}_{E_T(f)}$$

donde $h = b - a$, $a < \xi < b$.



Da el resultado exacto para polinomios de grado

. . . .

Regla del trapecio: demostración

- Usando el polinomio de Lagrange y su error para $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$:

$$f(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} + f''(\xi)\frac{(x-a)(x-b)}{2} \text{ con } \xi \in [a,b].$$

Regla del trapecio: demostración

- Usando el polinomio de Lagrange y su error para $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$:

$$f(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} + f''(\xi)\frac{(x-a)(x-b)}{2} \text{ con } \xi \in [a,b].$$

Integramos: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$

$$= \frac{f(a)}{a-b}\int_a^b (x-b)\,dx + \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b (x-a)\,dx + f''(\xi)\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2}\,dx$$

Regla del trapecio: demostración

- Usando el polinomio de Lagrange y su error para $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$:

$$f(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} + f''(\xi)\frac{(x-a)(x-b)}{2} \text{ con } \xi \in [a,b].$$

Integramos: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$

$$= \frac{f(a)}{a-b}\int_a^b (x-b)\,dx + \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b (x-a)\,dx + f''(\xi)\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2}\,dx$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{12} = \frac{f(a)+f(b)}{2}h - f''(\xi)\frac{h^3}{12},$$

Regla del trapecio: demostración

- Usando el polinomio de Lagrange y su error para $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$:

$$f(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} + f''(\xi)\frac{(x-a)(x-b)}{2} \text{ con } \xi \in [a,b].$$

Integramos: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$

$$= \frac{f(a)}{a-b}\int_a^b (x-b)\,dx + \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b (x-a)\,dx + f''(\xi)\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2}\,dx$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{12} = \frac{f(a)+f(b)}{2}h - f''(\xi)\frac{h^3}{12},$$

en este caso $b - a = h$

Regla del trapecio: demostración

- Usando el polinomio de Lagrange y su error para $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$:

$$f(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} + f''(\xi)\frac{(x-a)(x-b)}{2} \text{ con } \xi \in [a,b].$$

Integramos: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$

$$= \frac{f(a)}{a-b}\int_a^b (x-b)\,dx + \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b (x-a)\,dx + f''(\xi)\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2}\,dx$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{12} = \frac{f(a)+f(b)}{2}h - f''(\xi)\frac{h^3}{12},$$

- El error E_1 es proporcional a la derivada segunda.

Regla del trapecio: demostración

- Usando el polinomio de Lagrange y su error para $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$:

$$f(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} + f''(\xi)\frac{(x-a)(x-b)}{2} \text{ con } \xi \in [a,b].$$

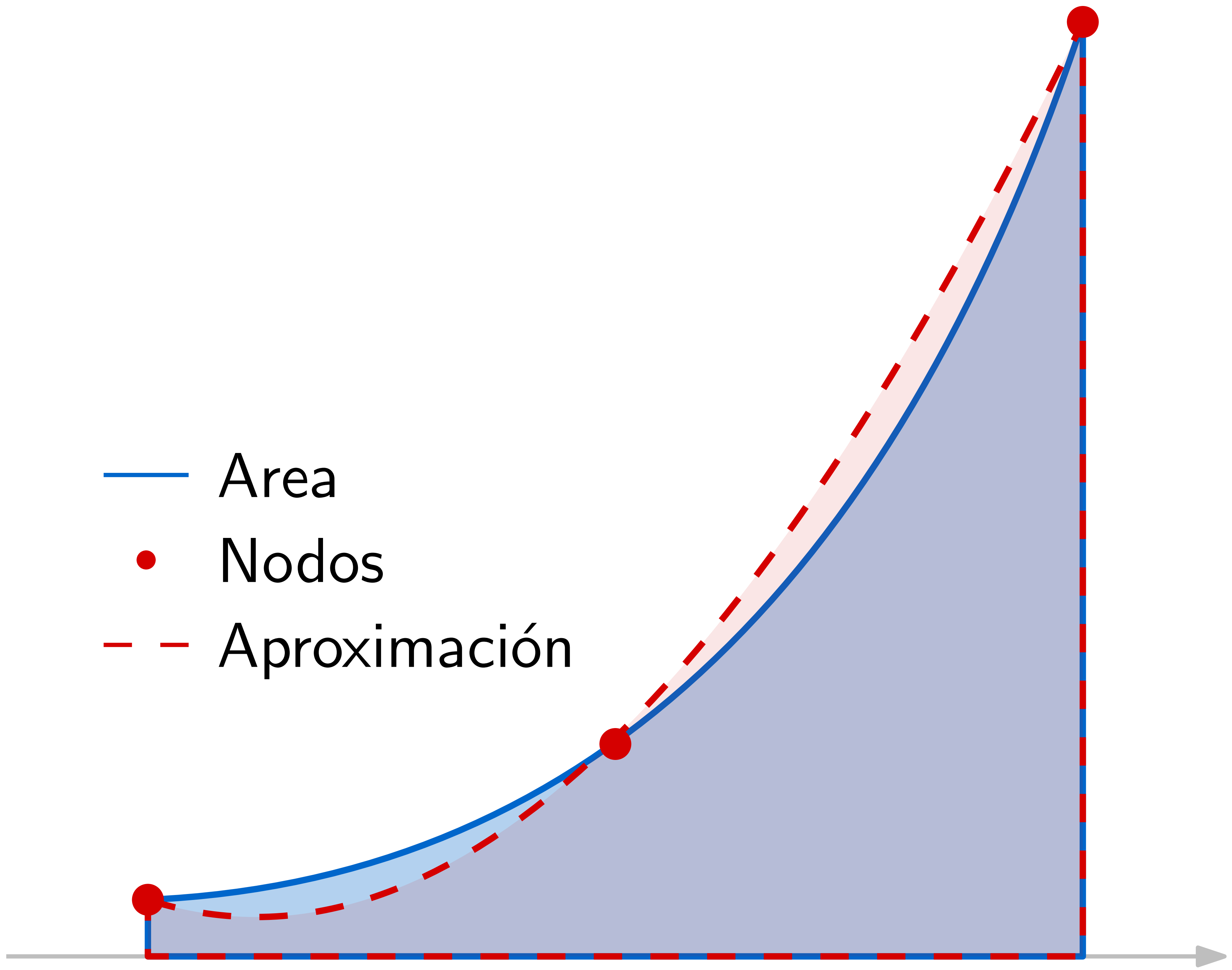
Integramos: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$

$$= \frac{f(a)}{a-b}\int_a^b (x-b)\,dx + \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b (x-a)\,dx + f''(\xi)\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2}\,dx$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{12} = \frac{f(a)+f(b)}{2}h - f''(\xi)\frac{h^3}{12},$$

- El error E_1 es proporcional a la derivada segunda.
- Para $[a,b] = [0,1]$, $K = -1/12$ se puede obtener de $E_n(t^m) = Km!$, $m = 2$.

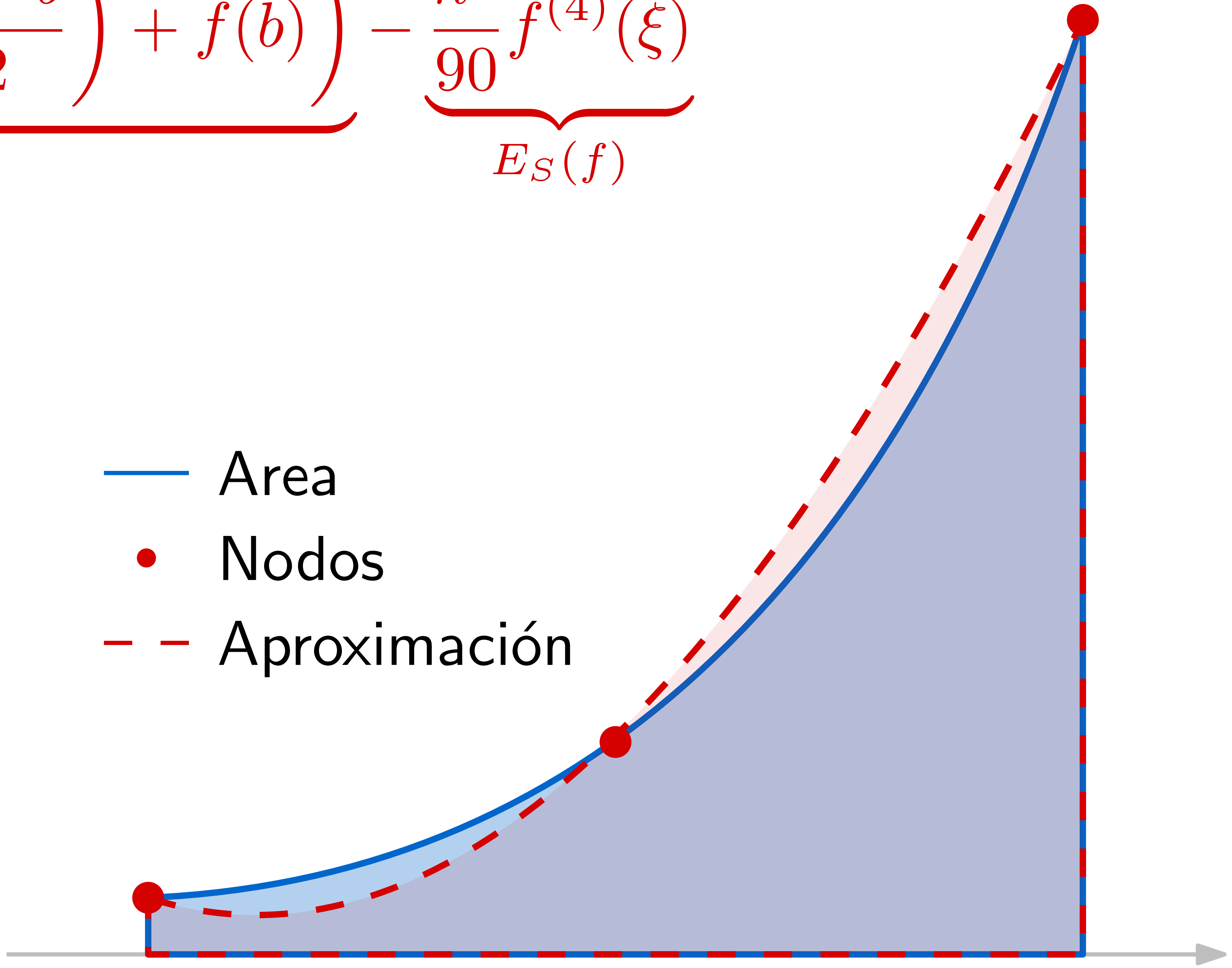
Fórmula de Newton-Côtes cerrada, $n = 2$: regla del Simpson



Fórmula de Newton-Côtes cerrada, $n = 2$: regla del Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}_{S(f)} - \underbrace{\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)}_{E_S(f)}$$

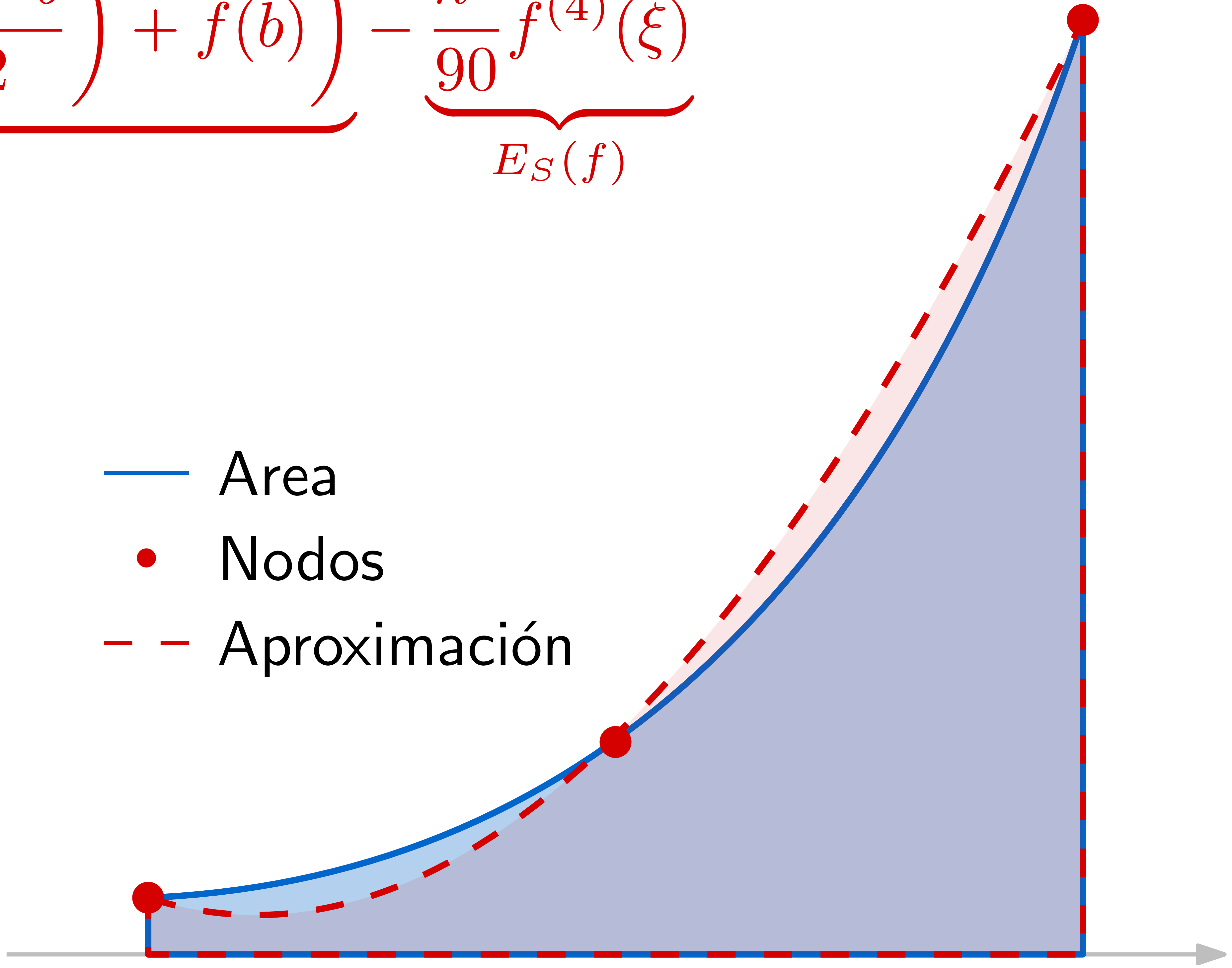
donde $h = \frac{b-a}{2}$, $a < \xi < b$.



Fórmula de Newton-Côtes cerrada, $n = 2$: regla del Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}_{S(f)} - \underbrace{\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)}_{E_S(f)}$$

donde $h = \frac{b-a}{2}$, $a < \xi < b$.



Da el resultado exacto para polinomios de grado . . . .

Fórmula de Newton-Côtes cerrada, $n = 3$: fórmula de $\frac{3}{8}$ de Simpson

Por $n = 3, h = \frac{b-a}{n}, x_k = a + kh,\ k = 0, 1, 2, 3$ se obtiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right) - \underbrace{\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)}_{\text{error}}$$

con $x_0 = a$, $x_1 = \frac{2a+b}{3}$, $x_2 = \frac{a+2b}{3}$, $x_3 = b$ y $a < \xi < b$.

Fórmula de Newton-Côtes cerrada, $n = 3$: fórmula de $\frac{3}{8}$ de Simpson

Por $n = 3, h = \frac{b-a}{n}, x_k = a + kh$, $k = 0, 1, 2, 3$ se obtiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right) \underbrace{- \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)}_{\text{error}}$$

con $x_0 = a$, $x_1 = \frac{2a+b}{3}$, $x_2 = \frac{a+2b}{3}$, $x_3 = b$ y $a < \xi < b$.

Da el resultado exacto para polinomios de grado ...

Fórmula de Newton-Côtes cerrada, $n = 4$: fórmula de Boole

Por $n = 4, h = \frac{b-a}{n}, x_k = a + kh$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ se obtiene

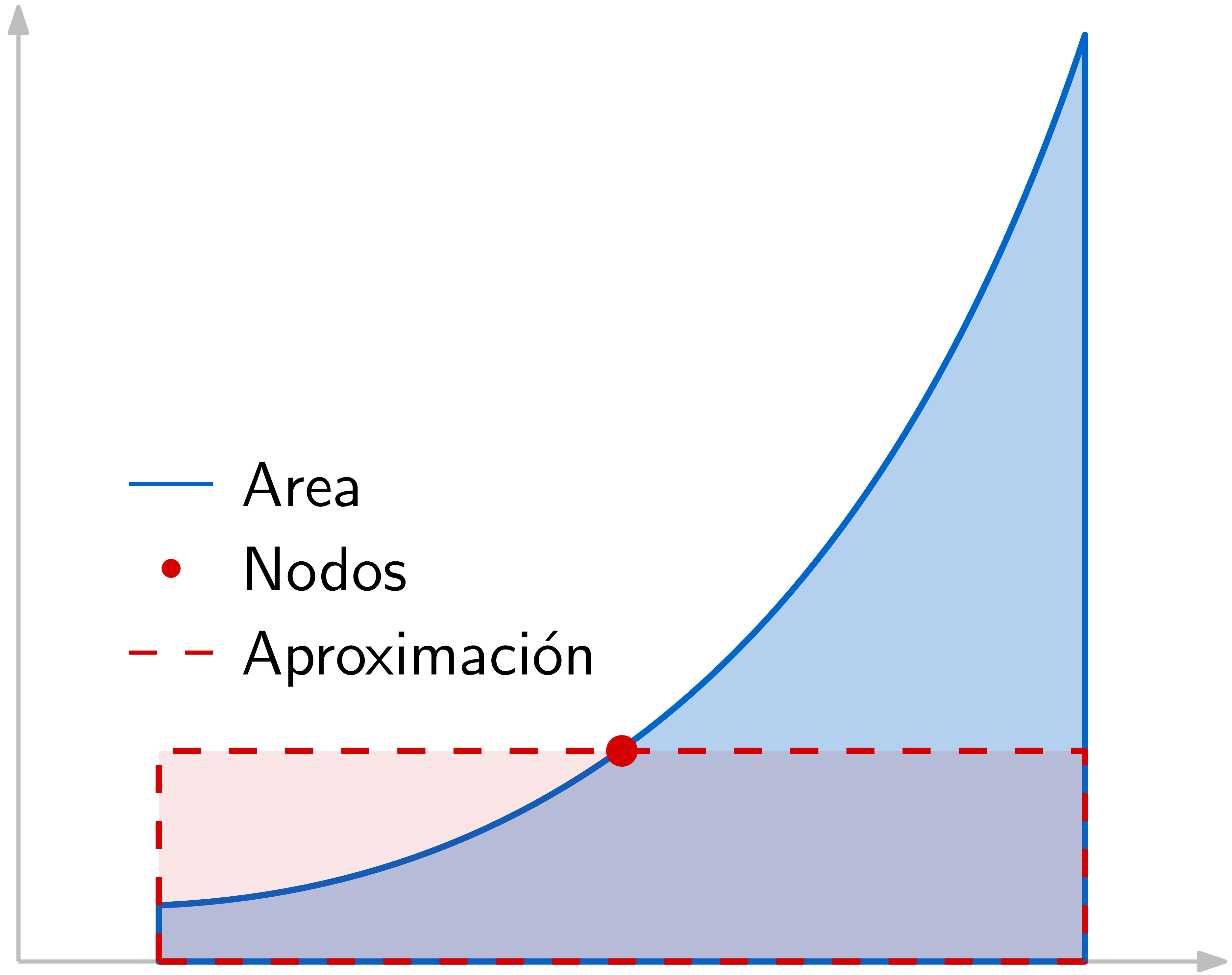
$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\frac{2h}{45}\left(7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)\right)}_{B(h)} - \underbrace{\frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi)}_{E_B(f)}$$

con $x_0 = a$, $x_1 = \frac{3a+b}{4}$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$, $x_3 = \frac{a+3b}{4}$, $x_4 = b$ y $a < \xi < b$.

Da el resultado exacto para polinomios de grado ...

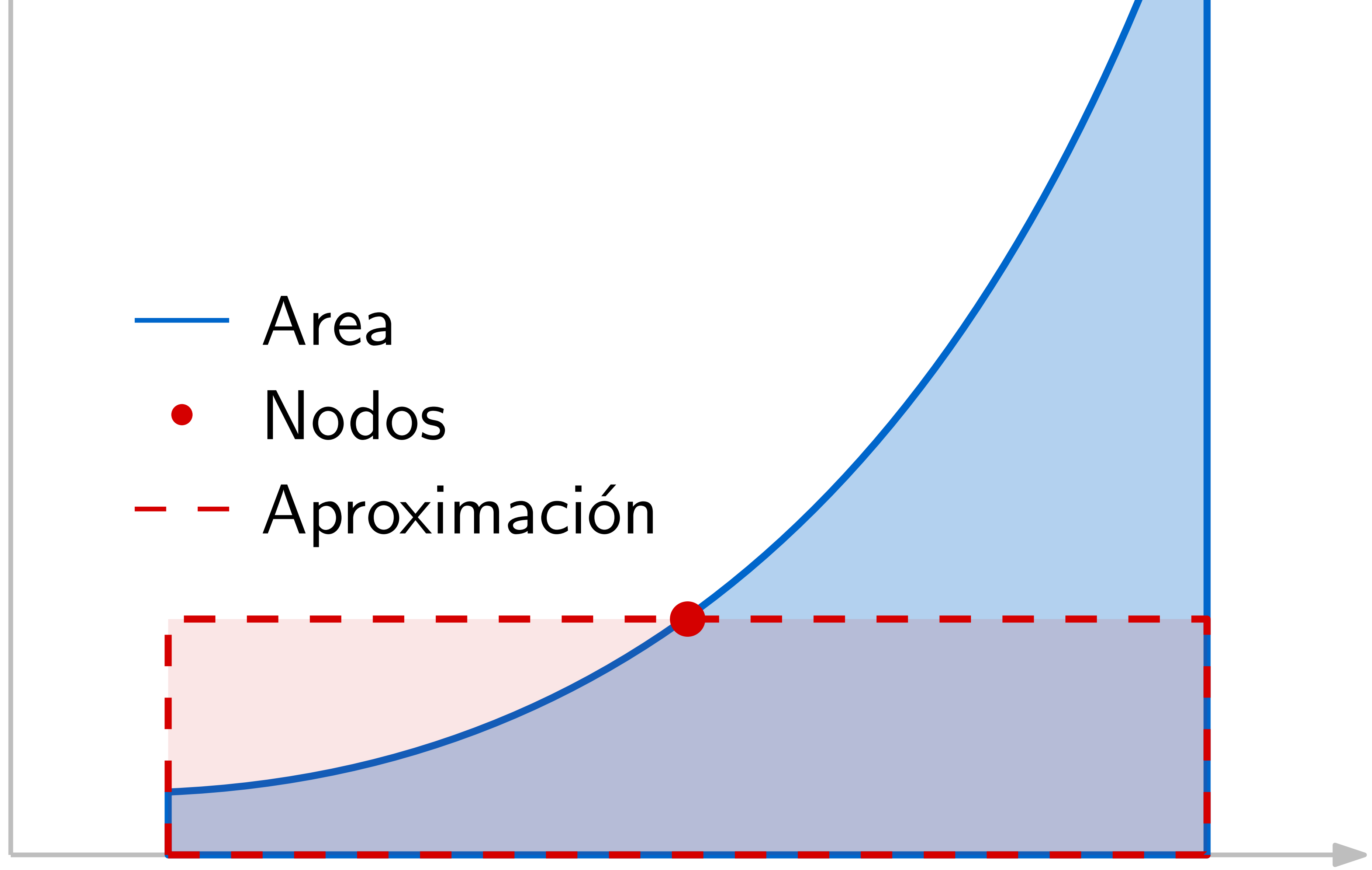
Fórmulas de Newton-Côtes
Abiertas

Fórmula de Newton-Côtes abierta $n = 0$: fórmula del punto medio



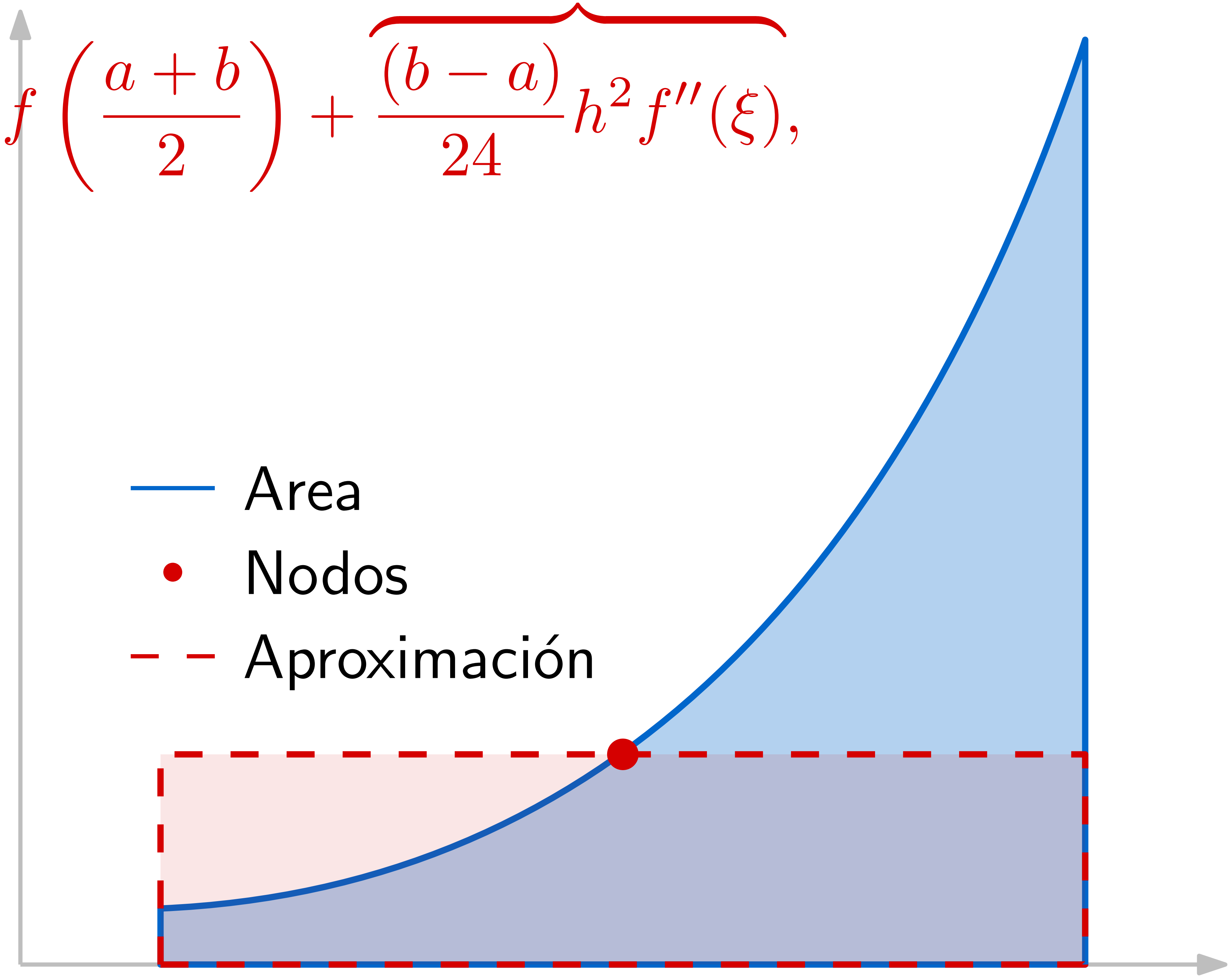
Fórmula de Newton-Côtes abierta $n = 0$: fórmula del punto medio

$$\int_a^b f(x)dx = h \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \overbrace{\frac{(b-a)}{24}h^2 f''(\xi)}^{\text{error}},$$



Fórmula de Newton-Côtes abierta $n = 0$: fórmula del punto medio

$$\int_a^b f(x)dx = h \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \overbrace{\frac{(b-a)}{24}h^2 f''(\xi)}^{\text{error}},$$



Da el resultado exacto para polinomios de grado ...

Fórmulas de Newton-Cotes abiertas $n = 1$ y $n = 2$

- Para $n = 1$, $h = \frac{b-a}{3}, x_{k-1} = a + kh, k = 0, 1, 2, 3$ se obtiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{2} \cdot \left[f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right] + \underbrace{\frac{3h^3}{4} f''(\xi),}_{\text{error}} \quad a < \xi < b.$$

Fórmulas de Newton-Cotes abiertas $n = 1$ y $n = 2$

- Para $n = 1$, $h = \frac{b-a}{3}, x_{k-1} = a + kh, k = 0, 1, 2, 3$ se obtiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{2} \cdot \left[f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right] + \underbrace{\frac{3h^3}{4} f''(\xi),}_{\text{error}} \quad a < \xi < b.$$

- Para $n = 2$, $h = \frac{b-a}{4}$, $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ se obtiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{4h}{3} \cdot \left[2f\left(\frac{3a+b}{4}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right] + \underbrace{\frac{14h^5}{4} f''(\xi),}_{\text{error}}$$

con $a < \xi < b$.

Fórmulas de Newton-Cotes abiertas $n = 1$ y $n = 2$

- Para $n = 1$, $h = \frac{b-a}{3}, x_{k-1} = a + kh, k = 0, 1, 2, 3$ se obtiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{2}\cdot\left[f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right] + \underbrace{\frac{3h^3}{4}f''(\xi),}_{\text{error}} \quad a < \xi < b.$$

- Para $n = 2$, $h = \frac{b-a}{4}$, $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ se obtiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{4h}{3}\cdot\left[2f\left(\frac{3a+b}{4}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right] + \underbrace{\frac{14h^5}{4}f''(\xi),}_{\text{error}}$$

  con $a < \xi < b$.

Dan el resultado exacto para polinomios de grado ...

Fórmulas de Newton-Côtes
Comparativa

Comparación de métodos

	n	Error truncamiento	Grado de precisión
Punto medio	0	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi_0)$	1
Trapecio	1	$\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi_1)$	1
Simpson	2	$\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi_2)$	3

Fórmulas de Newton-Côtes
Compuestas

Fórmulas de Newton-Côtes compuestas

- En general, el uso de fórmulas de Newton-Côtes no son adecuadas para muchos intervalos, ya que los polinomios interpoladores en nodos equiespaciados presentan grandes oscilaciones en los nodos de los extremos del intervalo de interpolación.

Fórmulas de Newton-Côtes compuestas

- En general, el uso de fórmulas de Newton-Côtes no son adecuadas para muchos intervalos, ya que los polinomios interpoladores en nodos equiespaciados presentan grandes oscilaciones en los nodos de los extremos del intervalo de interpolación.
- Una opción es trabajar por tramos con fórmulas de Newton-Côtes de pocos puntos, considerando la interpolación a trozos.

Fórmulas de Newton-Côtes compuestas

- En general, el uso de fórmulas de Newton-Côtes no son adecuadas para muchos intervalos, ya que los polinomios interpoladores en nodos equiespaciados presentan grandes oscilaciones en los nodos de los extremos del intervalo de interpolación.
- Una opción es trabajar por tramos con fórmulas de Newton-Côtes de pocos puntos, considerando la interpolación a trozos.

Ejercicio: Haciendo uso de la regla del trapecio, calcular:

$$\int_0^4 e^x\,dx = \int_0^2 e^x\,dx + \int_2^4 e^x\,dx = \int_0^1 e^x\,dx + \int_1^2 e^x\,dx + \int_2^3 e^x\,dx + \int_3^4 e^x\,dx.$$

Fórmula del punto medio compuesta

Para $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $C^2[a, b]$:

- Para $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, y $h_k = x_{k+1} - x_k$ se obtiene

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \left(h_k \cdot f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) + \frac{1}{24} h_k^3 f''(\xi_k) \right), \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k.$$

Fórmula del punto medio compuesta

Para $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $C^2[a, b]$:

- Para $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, y $h_k = x_{k+1} - x_k$ se obtiene

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \left(h_k \cdot f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) + \frac{1}{24} h_k^3 f''(\xi_k) \right), \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k.$$

- Si partición es equiespaciada, $h = \frac{b-a}{n}$ y $x_k = a + kh$ para $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$\int_a^b f(x)dx = h \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) + \frac{1}{24} h^2 (b-a) f''(\xi), \quad a < \xi < b.$$

Fórmula de los trapecios compuesta

Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $C^2[a, b]$:

- Para $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, y $h_k = x_{k+1} - x_k$ se obtiene

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{h_k}{2} \cdot (f(x_{k-1}) + f(x_k)) - \frac{1}{12} h_k^3 f''(\xi_k) \right), \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k.$$

Fórmula de los trapecios compuesta

Sea $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $C^2[a,b]$:

- Para $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, y $h_k = x_{k+1} - x_k$ se obtiene

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{h_k}{2} \cdot (f(x_{k-1}) + f(x_k)) - \frac{1}{12} h_k^3 f''(\xi_k) \right), \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k.$$

- Si partición equiespaciada, $h = \frac{b-a}{n}$ y $x_k = a + kh$ para $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\boxed{\frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right)}}_{T(f,h)} \underbrace{\boxed{- \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi),}}_{E_T(f,h)} \quad a < \xi < b.$$

Fórmula de Simpson compuesta

Para $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $C^4[a, b]$, para n par:

- Para $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, y $h_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{2}$ y $\ell_k = \frac{x_{k+1} + x_k}{2}$ se obtiene

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{h_k}{3} \cdot (f(x_{k+1}) + 4f(\ell_k) + f(x_k)) - \frac{h_k^5}{90} f^{(4)}(\xi_k) \right),$$

con $x_k < \xi_k < x_{k+1}$.

Fórmula de Simpson compuesta

Para $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $C^4[a,b]$, para n par:

- Para $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, y $h_k = \frac{x_{k+1}-x_k}{2}$ y $\ell_k = \frac{x_{k+1}+x_k}{2}$ se obtiene

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{h_k}{3} \cdot (f(x_{k+1}) + 4f(\ell_k) + f(x_k)) - \frac{h_k^5}{90} f^{(4)}(\xi_k) \right),$$

con $x_k < \xi_k < x_{k+1}$.

- Para partición equiespaciada, $h = \frac{b-a}{n}$ y $x_k = a + kh$ para $k = 0, 1, \ldots, n$,

con $a < \xi < b$.

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\boxed{\frac{h}{3} \left(f(a) + 4 \sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}) + 2 \sum_{k=1}^{n/2-1} f(x_{2k}) + f(b) \right)}}_{S(f,h)} \underbrace{\boxed{- \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)}}_{E_S(f,h)},$$

Fórmulas de Newton-Cotes compuestas: ejercicio

Ejercicio: Calcular

$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt \approx 0.946083070367 \pm 0.5 \times 10^{-12}$$

- Utilizar la regla del punto medio.
- Utilizar la regla de los trapecios.

Método de Romberg

Regla del trapecio recursiva

Sea $T(f,h)$ la regla del trapecio compuesta para una función f en un intervalo $[a,b]$ y con incremento h.

$$T(f,h)=\frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right).$$

Regla del trapecio recursiva

Sea $T(f,h)$ la regla del trapecio compuesta para una función f en un intervalo $[a,b]$ y con incremento h.

$$T(f,h) = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right).$$

- Reglas del trapecio sucesivas: supongamos que $J > 1$ y que los puntos $\{x_k = a + kh\}$ dividen $[a,b]$ en $2^J = n$ subintervalos de tamaño $h = (b-a)/2^J$. Entonces:

$$T(f,h) = \frac{T(f,2h)}{2} + h\sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}).$$

Regla del trapecio recursiva

Sea $T(f,h)$ la regla del trapecio compuesta para una función f en un intervalo $[a,b]$ y con incremento h.

$$T(f,h) = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right).$$

- Reglas del trapecio sucesivas: supongamos que $J > 1$ y que los puntos $\{x_k = a + kh\}$ dividen $[a,b]$ en $2^J = n$ subintervalos de tamaño $h = (b-a)/2^J$. Entonces:

$$T(f,h) = \frac{T(f,2h)}{2} + h\sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}).$$

- Se puede aplicar recursivamente para obtener una sucesión de aproximaciones $T(J)$ con $J = 1, 2, \ldots$

Regla recursiva de Simpson

Recordemos la fórmula compuesta de Simpson:

$$S(f,h) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} f(x_{2k}) + f(b)\right)$$

Regla recursiva de Simpson

Recordemos la fórmula compuesta de Simpson:

$$S(f,h)=\frac{h}{3}\left(f(a)+4\sum_{k=1}^{n/2}f(x_{2k-1})+2\sum_{k=1}^{n/2-1}f(x_{2k})+f(b)\right)$$

- Las reglas del trapecio $T(h,2f)$ y $T(f,h)$ pueden combinarse para obtener la aproximación dada por la regla de Simpson:

$$S(f,h)=\frac{4T(f,h)-T(f,2h)}{3}$$

Regla recursiva de Simpson

Recordemos la fórmula compuesta de Simpson:

$$S(f,h) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} f(x_{2k}) + f(b) \right)$$

- Las reglas del trapecio $T(h, 2f)$ y $T(f,h)$ pueden combinarse para obtener la aproximación dada por la regla de Simpson:

$$S(f,h) = \frac{4T(f,h) - T(f,2h)}{3}$$

- Regla recursiva de Simpson: Si $J > 1$ y $S(J)$ es la aproximación dada por la regla de Simpson con 2^J subintervalos de $[a,b]$, entonces

$$S(J) = \frac{4T(J) - T(J-1)}{3} \text{ para } J = 1, 2, \ldots$$

Regla recursiva de Boole

- La aplicación de la regla de Boole m veces sobre $n = 4m$ subintervalos de $[a, b]$ que todos tienen el mismo tamaño $h = (b - a)/n$ se llama regla compuesta de Boole:

$$B(f, h) = \frac{2h}{45} \sum_{k=1}^{n/4} (7f(x_{4k-4}) + 32f(x_{4k-3}) + 12f(x_{4k-2}) + 32f(x_{4k-1}) + 7f(x_{4k}))$$

Regla recursiva de Boole

- La aplicación de la regla de Boole m veces sobre $n = 4m$ subintervalos de $[a, b]$ que todos tienen el mismo tamaño $h = (b - a)/n$ se llama regla compuesta de Boole:

$$B(f, h) = \frac{2h}{45} \sum_{k=1}^{n/4} (7f(x_{4k-4}) + 32f(x_{4k-3}) + 12f(x_{4k-2}) + 32f(x_{4k-1}) + 7f(x_{4k}))$$

- Regla recursiva de Boole: Si $J > 1$ y $S(J)$ es la aproximación dada por la regla de Simpson y $B(J)$ es la aproximación con la relga de Boole con 2^J subintervalos de $[a, b]$, entonces

$$B(J) = \frac{16S(J) - S(J-1)}{15} \text{ para } J = 1, 2, \ldots$$

Método de integración de Roomberg

Método de Romberg

- Para la regla de los trapecios compuesta tenemos:

$$\int_a^b f(x)dx = T(f,h) + E_T(f,h),$$

y se puede demostrar que

$$E_T(f,h) = K_1 h^2 + K_2 h^4 + K_3 h^6 + \ldots,$$

con K_i constantes que dependen de la función f.

Método de Romberg

- Para la regla de los trapecios compuesta tenemos:

$$\int_a^b f(x)dx = T(f,h) + E_T(f,h),$$

y se puede demostrar que

$$E_T(f,h) = K_1 h^2 + K_2 h^4 + K_3 h^6 + \ldots,$$

con K_i constantes que dependen de la función f.

- Como hicimos en diferenciación numérica, podemos usar el método de Richardson para ir eliminando $K_1, K_2, \ldots$ y generar fórmulas de cuadratura curos términos de error tengan órdenes de aproximación $\mathcal{O}(h^4)$, $\mathcal{O}(h^6), \ldots$

Método de Romberg

- Para la regla de los trapecios compuesta tenemos:

$$\int_a^b f(x)dx = T(f,h) + E_T(f,h),$$

  y se puede demostrar que

$$E_T(f,h) = K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6 + \dots,$$

  con K_i constantes que dependen de la función f.

- Como hicimos en difernciación numérica, podemos usar el método de Richardson para ir eliminando $K_1, K_2, \dots$ y generar fórmulas de cuadratura curos términos de error tengan órdenes de aproximación $\mathcal{O}(h^4)$, $\mathcal{O}(h^6), \dots$

- Al hacer uso de la extrapolación de Richardson, se logra mejorar recursivamente la aproximación de la fórmula compuesta de los trapecios con poco coste computacional.

Esquema de Richardson para el método de Romberg

Trapecio $O(h^2)$ $R(J,0) = T(J)$	Simpson $O(h^4)$ $R(J,1) = S(J)$	Boole $O(h^6)$ $R(J,2) = B(J)$	Tercera mejora $O(h^8)$
$\mathbf{1}: R(0,0) = T(f,h)$			
$\mathbf{2}: R(1,0) = T(f,h/2)$	$\mathbf{3}: R(1,1)$		
$\mathbf{4}: R(2,0) = T(f,h/4)$	$\mathbf{5}: R(2,1)$	$\mathbf{6}: R(2,2)$	
$\mathbf{7}: R(3,0) = T(f,h/8)$	$\mathbf{8}: R(3,1)$	$\mathbf{9}: R(2,3)$	$\mathbf{10}: R(3,3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$R(J,K) = \frac{4^K R(J,K-1) - R(J-1,K-1)}{4^K - 1} \text{ para } J \geq K.$$

Ejemplo

$$\int_0^{0.8} \frac{\sin t}{t}\, dt \approx 0.772095 \pm 0.0000005$$

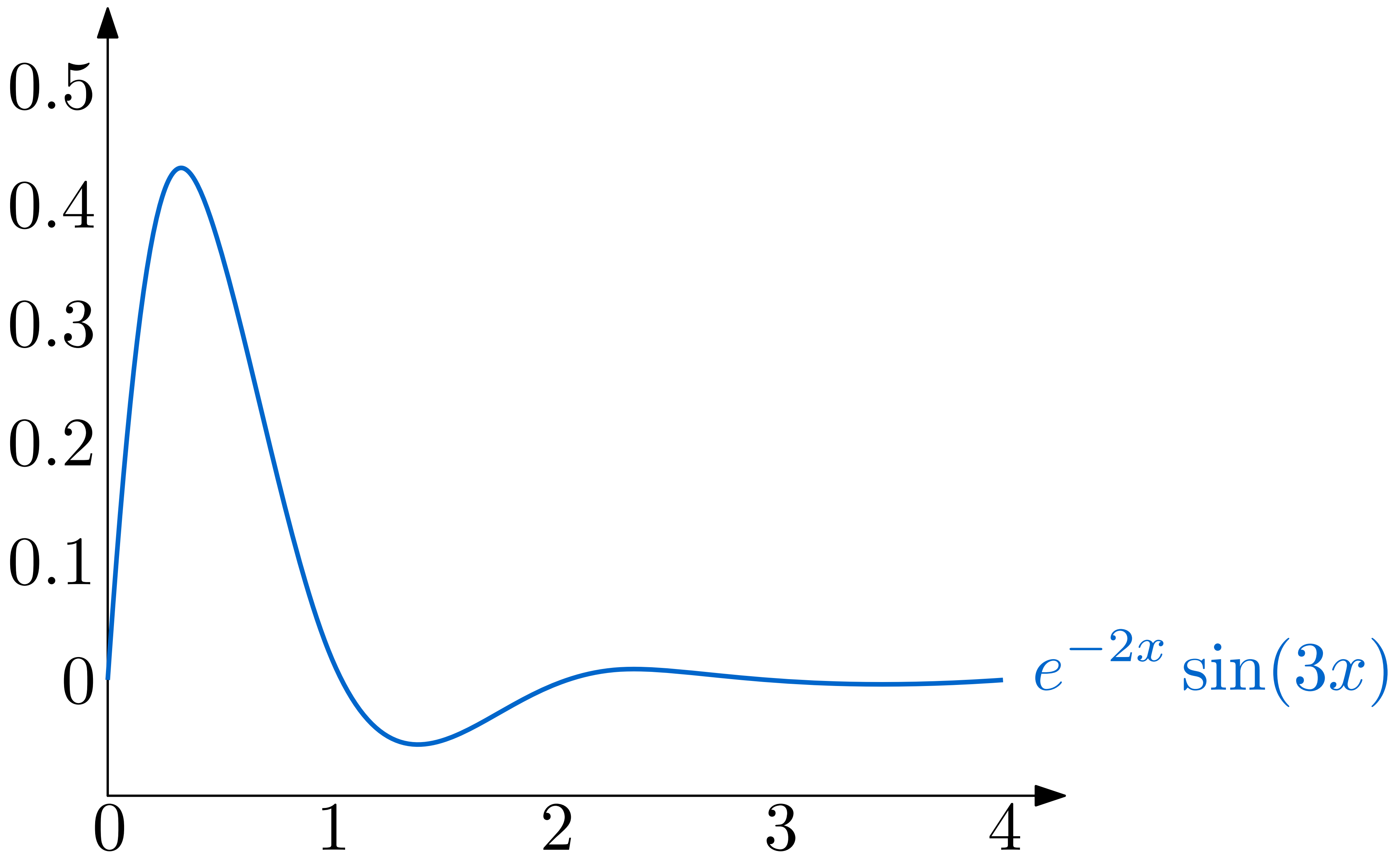
h	$T(J)$	$S(J)$	$B(J)$
0.8	0.758680		
0.4	0.768760	0.772120	
0.2	0.771262	0.772096	0.772095
0.1	0.771887	0.772095	0.772095

Método de Romberg

Integración adaptativa

Integración adaptativa: introducción

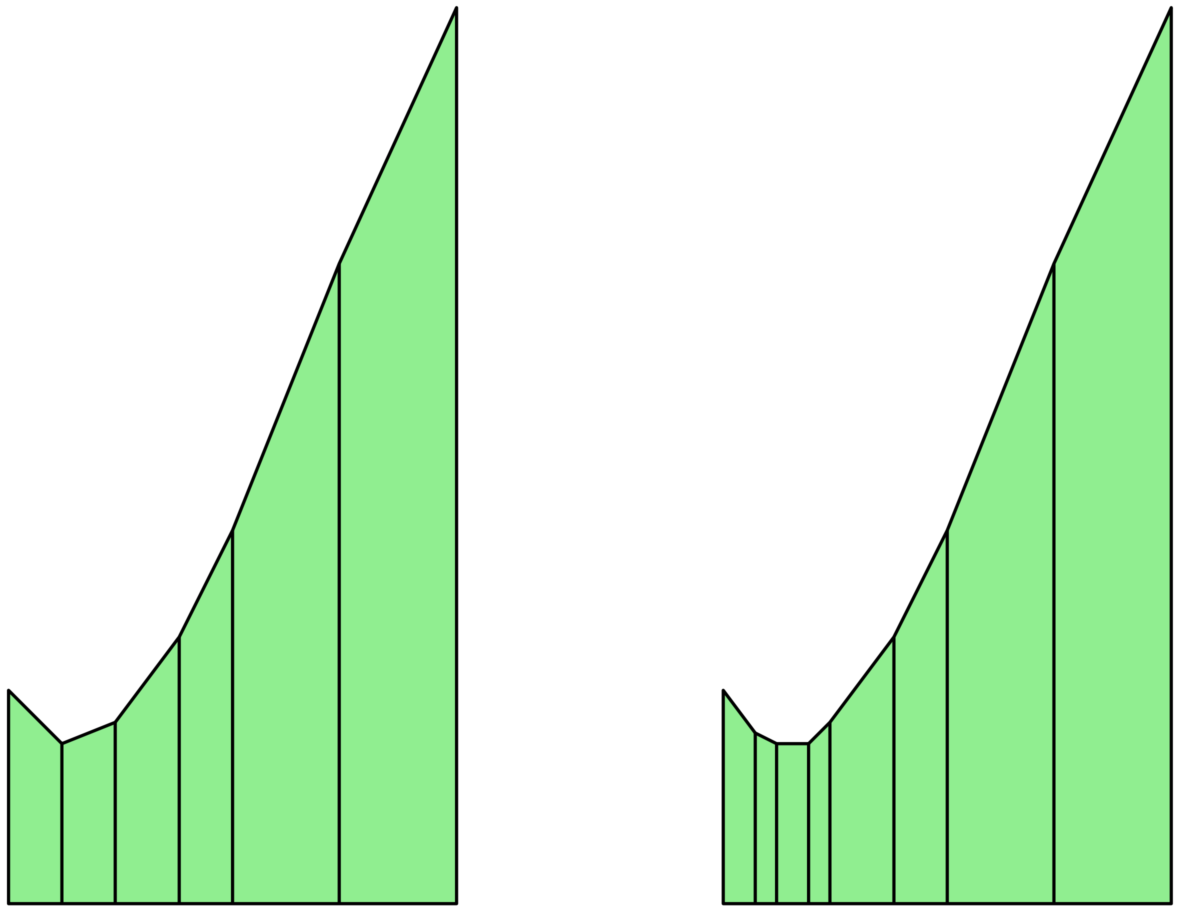
Las fórmulas compuestas son muy efectivas, pero con funciones del tipo



los métodos con nodos equiespaciados no son eficientes.

Integración adaptativa: ilustración

Los métodos que se consideran son de la forma



$$\Delta_4 = \left\{0, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

Integración adaptativa: procedimiento

Denotamos la regla de Simpson en el intervalo $[a_k, b_k]$ como

$$S(a_k, b_k) = \frac{h}{3}(f(a_k) + 4f(c_k) + f(b_k))$$

con $c_k = (a_k + b_k)/2$ y $h = (b_k - a_k)/2$.

Integración adaptativa: procedimiento

Denotamos la regla de Simpson en el intervalo $[a_k, b_k]$ como

$$S(a_k, b_k) = \frac{h}{3}(f(a_k) + 4f(c_k) + f(b_k))$$

con $c_k = (a_k + b_k)/2$ y $h = (b_k - a_k)/2$.

- Partimos del intervalo $[a_0 = a, b_0 = b]$ con una tolerancia tol_0 y se aproxima su integral por la fómula de Simpson: $I_0 = S(a_0, b_0)$.

Integración adaptativa: procedimiento

Denotamos la regla de Simpson en el intervalo $[a_k, b_k]$ como

$$S(a_k, b_k) = \frac{h}{3}(f(a_k) + 4f(c_k) + f(b_k))$$

con $c_k = (a_k + b_k)/2$ y $h = (b_k - a_k)/2$.

- Partimos del intervalo $[a_0 = a, b_0 = b]$ con una tolerancia tol$_0$ y se aproxima su integral por la fómula de Simpson: $I_0 = S(a_0, b_0)$.
- Se divide $[a_0, b_0]$ en dos subintervalos iguales $[a_{01}, b_{01}]$ y $[a_{02}, b_{02}]$ y, usando la fórmula de Simpson para se calculan $I_{01} = S(a_{01}, b_{01})$ e $I_{02} = S(a_{02}, b_{02})$.

Integración adaptativa: procedimiento

Denotamos la regla de Simpson en el intervalo $[a_k, b_k]$ como

$$S(a_k, b_k) = \frac{h}{3}(f(a_k) + 4f(c_k) + f(b_k))$$

con $c_k = (a_k + b_k)/2$ y $h = (b_k - a_k)/2$.

- Partimos del intervalo $[a_0 = a, b_0 = b]$ con una tolerancia tol$_0$ y se aproxima su integral por la fómula de Simpson: $I_0 = S(a_0, b_0)$.
- Se divide $[a_0, b_0]$ en dos subintervalos iguales $[a_{01}, b_{01}]$ y $[a_{02}, b_{02}]$ y, usando la fórmula de Simpson para se calculan $I_{01} = S(a_{01}, b_{01})$ e $I_{02} = S(a_{02}, b_{02})$.
- Comprobamos el criterio de exactitud: $\frac{1}{10}|I_{01} + I_{02} - I_0| < \text{tol}_0$.

Integración adaptativa: procedimiento

Denotamos la regla de Simpson en el intervalo $[a_k, b_k]$ como

$$S(a_k, b_k) = \frac{h}{3}(f(a_k) + 4f(c_k) + f(b_k))$$

con $c_k = (a_k + b_k)/2$ y $h = (b_k - a_k)/2$.

- Partimos del intervalo $[a_0 = a, b_0 = b]$ con una tolerancia tol_0 y se aproxima su integral por la fómula de Simpson: $I_0 = S(a_0, b_0)$.
- Se divide $[a_0, b_0]$ en dos subintervalos iguales $[a_{01}, b_{01}]$ y $[a_{02}, b_{02}]$ y, usando la fórmula de Simpson para se calculan $I_{01} = S(a_{01}, b_{01})$ e $I_{02} = S(a_{02}, b_{02})$.
- Comprobamos el criterio de exactitud: $\frac{1}{10}|I_{01} + I_{02} - I_0| < \mathrm{tol}_0$.
- Si se verifica nos quedamos con I_0 y si no consideramos los dos subintervalos en el siguiente paso de igual manera en cada subintevalo con tolerancia $\mathrm{tol}_0/2$.

Integración adaptativa: procedimiento

Denotamos la regla de Simpson en el intervalo $[a_k, b_k]$ como

$$S(a_k, b_k) = \frac{h}{3}(f(a_k) + 4f(c_k) + f(b_k))$$

con $c_k = (a_k + b_k)/2$ y $h = (b_k - a_k)/2$.

- Partimos del intervalo $[a_0 = a, b_0 = b]$ con una tolerancia tol_0 y se aproxima su integral por la fómula de Simpson: $I_0 = S(a_0, b_0)$.
- Se divide $[a_0, b_0]$ en dos subintervalos iguales $[a_{01}, b_{01}]$ y $[a_{02}, b_{02}]$ y, usando la fórmula de Simpson para se calculan $I_{01} = S(a_{01}, b_{01})$ e $I_{02} = S(a_{02}, b_{02})$.
- Comprobamos el criterio de exactitud: $\frac{1}{10}|I_{01} + I_{02} - I_0| < \text{tol}_0$.
- Si se verifica nos quedamos con I_0 y si no consideramos los dos subintervalos en el siguiente paso de igual manera en cada subintevalo con tolerancia $\text{tol}_0/2$.

Hay variantes: $1/15$ en vez de $1/10$, no dividir tolerancia,...

Integración adaptativa: procedimiento

Denotamos la regla de Simpson en el intervalo $[a_k, b_k]$ como

$$S(a_k, b_k) = \frac{h}{3}(f(a_k) + 4f(c_k) + f(b_k))$$

con $c_k = (a_k + b_k)/2$ y $h = (b_k - a_k)/2$.

Divide y vencerás

- Partimos del intervalo $[a_0 = a, b_0 = b]$ con una tolerancia tol_0 y se aproxima su integral por la fómula de Simpson: $I_0 = S(a_0, b_0)$.
- Se divide $[a_0, b_0]$ en dos subintervalos iguales $[a_{01}, b_{01}]$ y $[a_{02}, b_{02}]$ y, usando la fórmula de Simpson para se calculan $I_{01} = S(a_{01}, b_{01})$ e $I_{02} = S(a_{02}, b_{02})$.
- Comprobamos el criterio de exactitud: $\frac{1}{10}|I_{01} + I_{02} - I_0| < \mathrm{tol}_0$.
- Si se verifica nos quedamos con I_0 y si no consideramos los dos subintervalos en el siguiente paso de igual manera en cada subintevalo con tolerancia $\mathrm{tol}_0/2$.

Hay variantes: $1/15$ en vez de $1/10$, no dividir tolerancia,...

Métodos de Montecarlo
para integración aproximada

Métodos de Montecarlo: introducción

Métodos de Montecarlo: métodos para estimar el valor de una cantidad desconocida utilizando los principios de la inferencia estadística.

Aplicación: Integración múltiple.

Métodos de Montecarlo: introducción

Métodos de Montecarlo: métodos para estimar el valor de una cantidad desconocida utilizando los principios de la inferencia estadística.

Aplicación: Integración múltiple.

Se fundamenta en dos resultados:

Métodos de Montecarlo: introducción

Métodos de Montecarlo: métodos para estimar el valor de una cantidad desconocida utilizando los principios de la inferencia estadística.

Aplicación: Integración múltiple.

Se fundamenta en dos resultados:

- Si X es una variable aleatoria con función de densidad f y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función cualquiera, entonces el valor esperado de la v.a. $g(X)$ es:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

Métodos de Montecarlo: introducción

Métodos de Montecarlo: métodos para estimar el valor de una cantidad desconocida utilizando los principios de la inferencia estadística.

Aplicación: Integración múltiple.

Se fundamenta en dos resultados:

- Si X es una variable aleatoria con función de densidad f y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función cualquiera, entonces el valor esperado de la v.a. $g(X)$ es:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

- Ley fuerte de los grandes números.
  Si $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ es una sucesión de v.a.i.i.d., todas de media μ, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{n} = \mu$$

Integración de Montecarlo I: aproximación por media muestral

Se interpreta la integral:

$$\theta = \int_0^1 g(x)dx$$

como la esperanza $E[g(x)]$ para x variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$.

Aproximación:

- Generar $u_1, u_2, \ldots, u_m$ muestra de m números aleatorios uniformes $U(0, 1)$.
- Calcular $\hat{\theta}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} g(u_i)$.
- El error es $O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$.

Integración de Montecarlo: error en aproximación por media muestral

- Por la ley fuerte de los grandes números, verifica
  $\hat{\theta}_m \to \theta$ con probabilidad 1 cuando $m \to \infty$.

- El error $\hat{\theta}_m - \theta$ en la integración por el Montecarlo es $\sim$ una normal de media 0 y desviación $\sqrt{\frac{1}{m}}$.

- La convergencia depende del tamaño de la muestra. El método es más preciso al reducirse $\frac{\sigma}{\sqrt{m}}$.

- El valor s_m es el estimador de σ:

$$\sigma^2 = \int_0^1 (g(x) - \theta)^2 dx \quad \longrightarrow \quad s_m^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} \left(g(u_i) - \hat{\theta}_m \right)^2$$

Integración de Montecarlo: aproximación por media muestral en $[a, b]$

$$\int_a^b g(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} g(a+(b-a)u_i), \quad O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

para $u_1, u_2, \ldots, u_m$ son números aleatorios uniformes del intervalo $[0, 1]$.

Integración de Montecarlo: aproximación por media muestral en $[a, b]$

$$\int_a^b g(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} g(a+(b-a)u_i), \quad O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

para $u_1, u_2, \ldots, u_m$ son números aleatorios uniformes del intervalo $[0, 1]$.

Para evaluar una integral de la forma $\int_a^b g(x)dx$ se sigue el siguiente algoritmo

Integración de Montecarlo: aproximación por media muestral en $[a, b]$

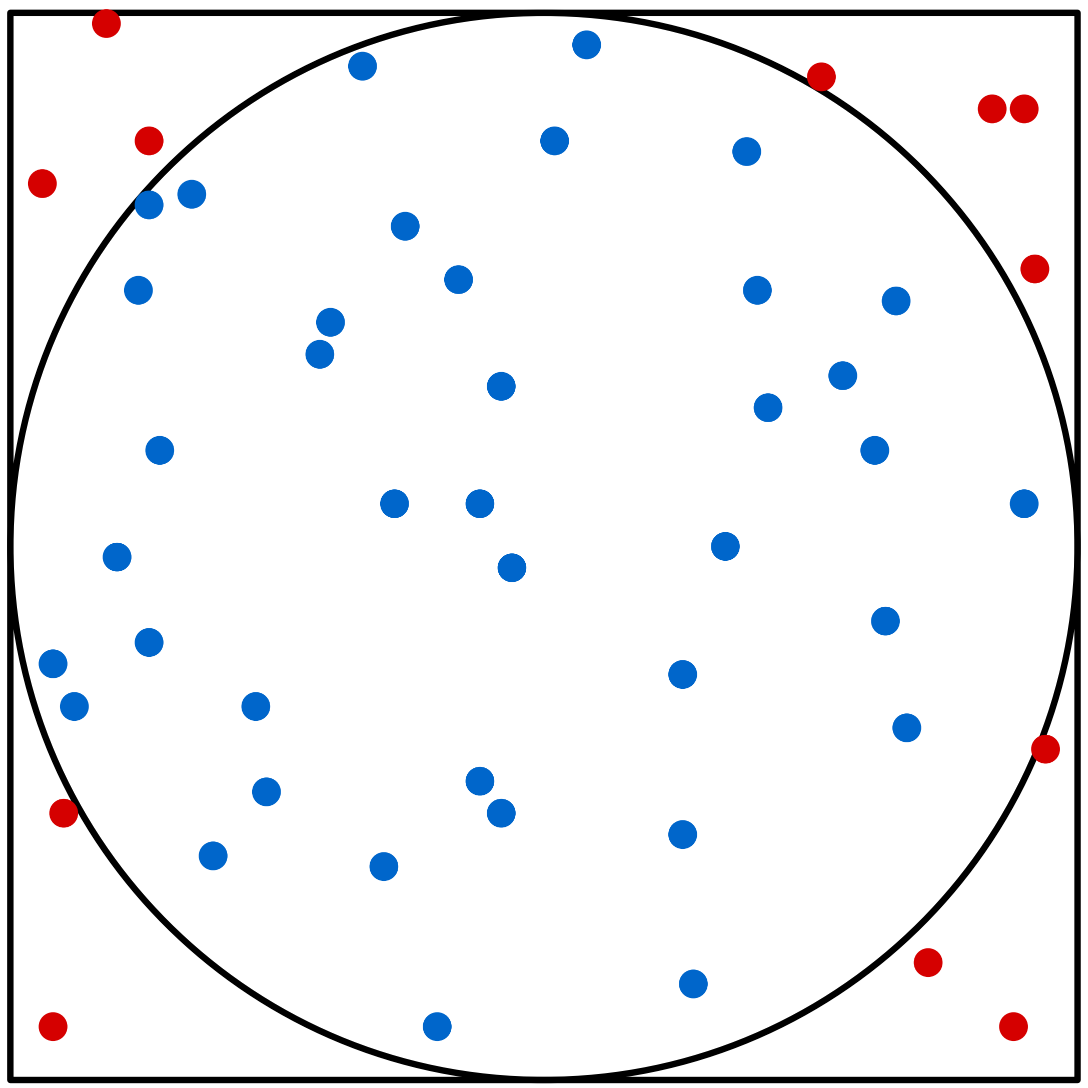
$$\int_a^b g(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} g(a+(b-a)u_i), \quad O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

para $u_1, u_2, \ldots, u_m$ son números aleatorios uniformes del intervalo $[0, 1]$.

Para evaluar una integral de la forma $\int_a^b g(x)dx$ se sigue el siguiente algoritmo

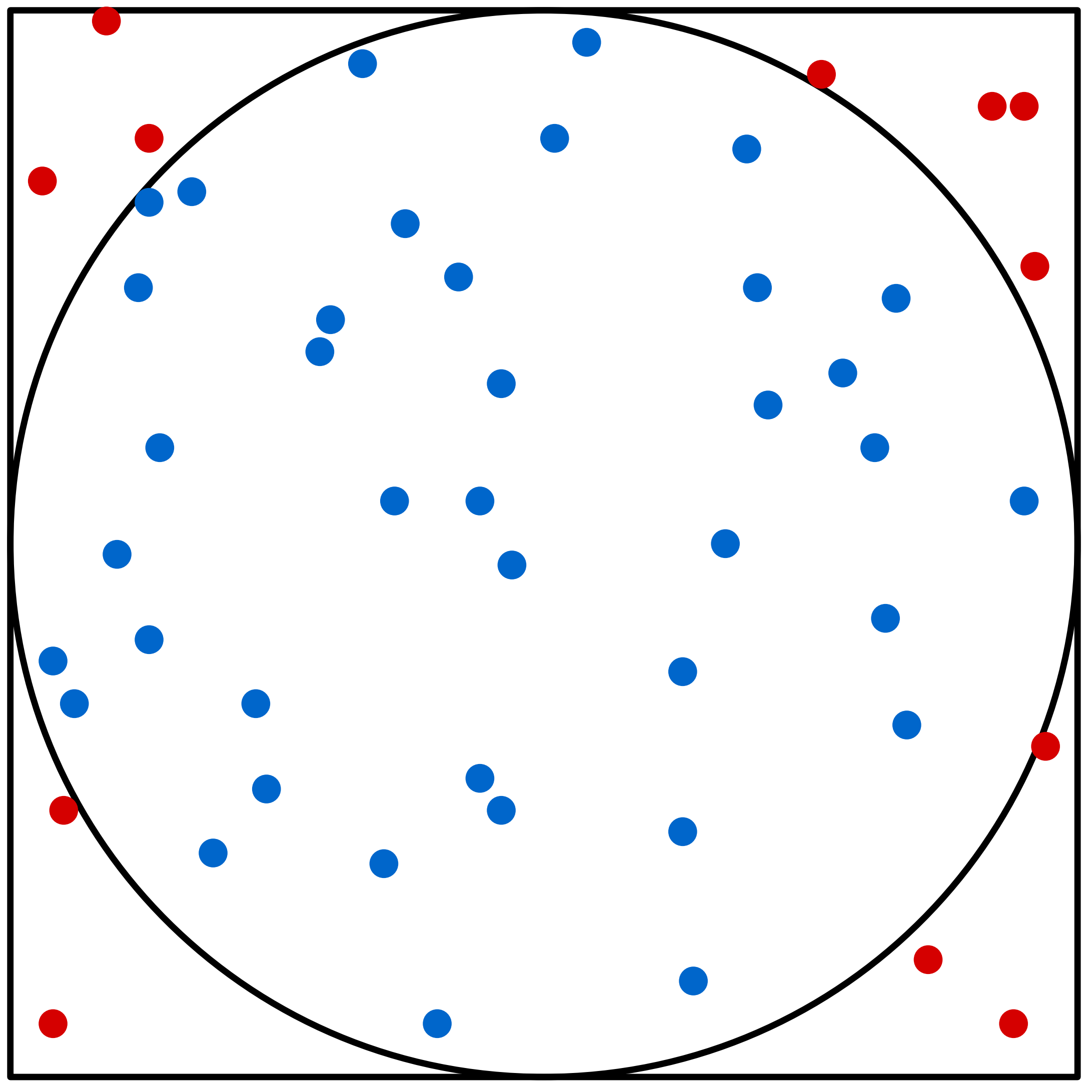
- Generar una muestra de tamaño n de $X \sim \mathrm{U}(a, b)$ (distribución uniforme en (a, b)): $x_1, \ldots, x_n$.
- Evaluar cada elemento de la muestra en la función g.
- Calcular $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} g(x_i)$.

Integración de Montecarlo II: hit-or-miss

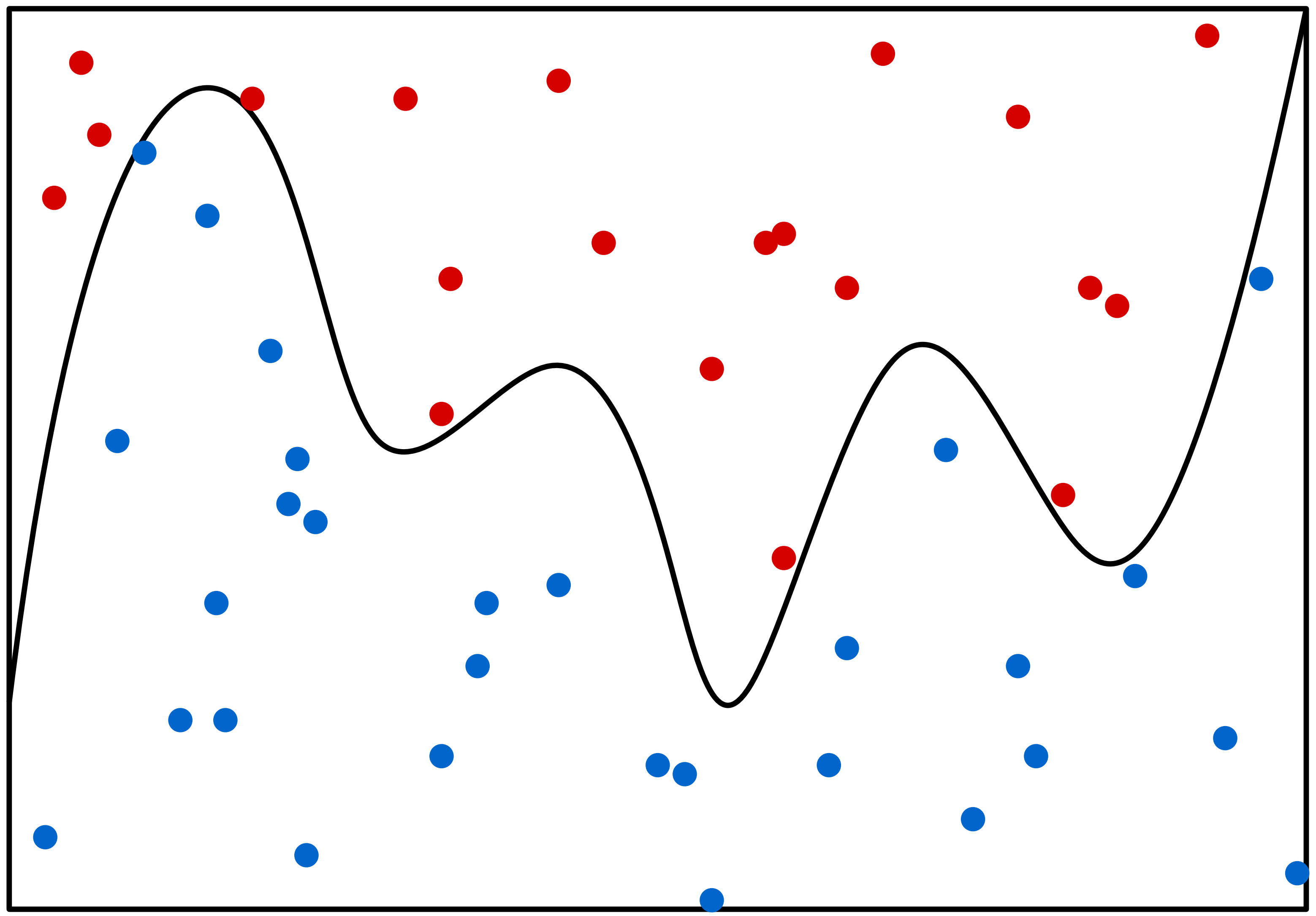


$$\frac{\#\text{puntos dentro}}{\#\text{puntos generados}} \approx \frac{\text{area del círculo}}{\text{area del cuadrado}}$$

Integración de Montecarlo II: hit-or-miss



$$\frac{\#\text{puntos dentro}}{\#\text{puntos generados}} \approx \frac{\text{area del círculo}}{\text{area del cuadrado}}$$



$$\frac{\#\text{puntos dentro}}{\#\text{puntos generados}} \approx \frac{\text{area debajo de la gráfica}}{\text{area del rectángulo}}$$

Integración de Montecarlo II: hit-or-miss

Usamos la técnica de estimación de área de Monte Carlo (hit-or-miss) para integrar g en (a, b): $I = \int_a^b g(x)dx$. Asumimos $0 < g(x) < c$ para $a \le x \le b$.

Integración de Montecarlo II: hit-or-miss

Usamos la técnica de estimación de área de Monte Carlo (hit-or-miss) para integrar g en (a, b): $I = \int_a^b g(x)dx$. Asumimos $0 < g(x) < c$ para $a \leq x \leq b$.

Integración de Montecarlo II: hit-or-miss

Usamos la técnica de estimación de área de Monte Carlo (hit-or-miss) para integrar g en (a, b): $I = \int_a^b g(x)dx$. Asumimos $0 < g(x) < c$ para $a \leq x \leq b$.

- Reformulamos la integral como un problema de estimación de área con el rectángulo $R \equiv [a, b] \times [0, c]$ y la región objetivo $Q \equiv \{(x, y) \in R | y \leq g(x)\}$.

Integración de Montecarlo II: hit-or-miss

Usamos la técnica de estimación de área de Monte Carlo (hit-or-miss) para integrar g en (a, b): $I = \int_a^b g(x)dx$. Asumimos $0 < g(x) < c$ para $a \leq x \leq b$.

- Reformulamos la integral como un problema de estimación de área con el rectángulo $R \equiv [a, b] \times [0, c]$ y la región objetivo $Q \equiv \{(x, y) \in R | y \leq g(x)\}$.
- Notamos entonces que $I = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \int_0^c dxdy = \text{area}(Q)$.

Integración de Montecarlo II: hit-or-miss

Usamos la técnica de estimación de área de Monte Carlo (hit-or-miss) para integrar g en (a, b): $I = \int_a^b g(x)dx$. Asumimos $0 < g(x) < c$ para $a \leq x \leq b$.

- Reformulamos la integral como un problema de estimación de área con el rectángulo $R \equiv [a, b] \times [0, c]$ y la región objetivo $Q \equiv \{(x, y) \in R | y \leq g(x)\}$.
- Notamos entonces que $I = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \int_0^c dxdy = \text{area}(Q)$.
- X v.a. uniforme sobre (a, b) y Y v.a. uniforme sobre $(0, c)$. Generamos entonces n puntos $(X, Y) \to (x_i, y_i)_{i=1,\ldots,n}$.

Integración de Montecarlo II: hit-or-miss

Usamos la técnica de estimación de área de Monte Carlo (hit-or-miss) para integrar g en (a,b): $I = \int_a^b g(x)dx$. Asumimos $0 < g(x) < c$ para $a \le x \le b$.

- Reformulamos la integral como un problema de estimación de área con el rectángulo $R \equiv [a,b] \times [0,c]$ y la región objetivo $Q \equiv \{(x,y) \in R | y \le g(x)\}$.
- Notamos entonces que $I = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \int_0^c dxdy = \text{area}(Q)$.
- X v.a. uniforme sobre (a,b) y Y v.a. uniforme sobre $(0,c)$. Generamos entonces n puntos $(X,Y) \to (x_i, y_i)_{i=1,\ldots,n}$.
- Introducimos:

$$b_i = \begin{cases} 0, & \text{si } y_i > g(x_i) \\ 1, & \text{si } y_i \le g(x_i) \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Integración de Montecarlo II: hit-or-miss

Usamos la técnica de estimación de área de Monte Carlo (hit-or-miss) para integrar g en (a,b): $I = \int_a^b g(x)dx$. Asumimos $0 < g(x) < c$ para $a \le x \le b$.

- Reformulamos la integral como un problema de estimación de área con el rectángulo $R \equiv [a,b] \times [0,c]$ y la región objetivo $Q \equiv \{(x,y) \in R | y \le g(x)\}$.
- Notamos entonces que $I = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \int_0^c dxdy = \text{area}(Q)$.
- X v.a. uniforme sobre (a,b) y Y v.a. uniforme sobre $(0,c)$. Generamos entonces n puntos $(X,Y) \to (x_i, y_i)_{i=1,\ldots,n}$.
- Introducimos:

$$b_i = \begin{cases} 0, & \text{si } y_i > g(x_i) \\ 1, & \text{si } y_i \le g(x_i) \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

- Estimación de la integral:

$$\hat{I}_n = c(b-a) \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

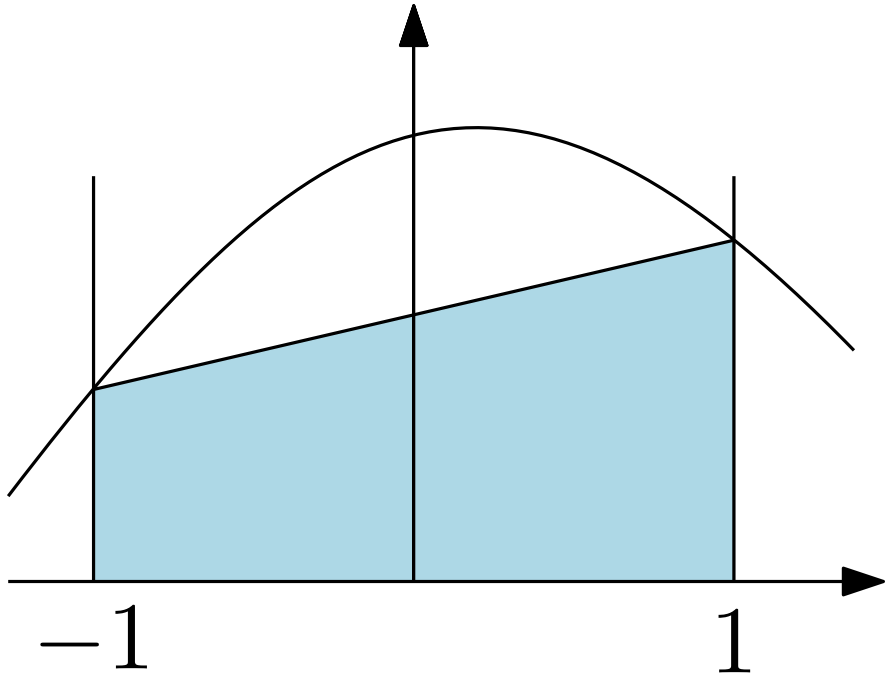
Integración de Montecarlo: ejercicio

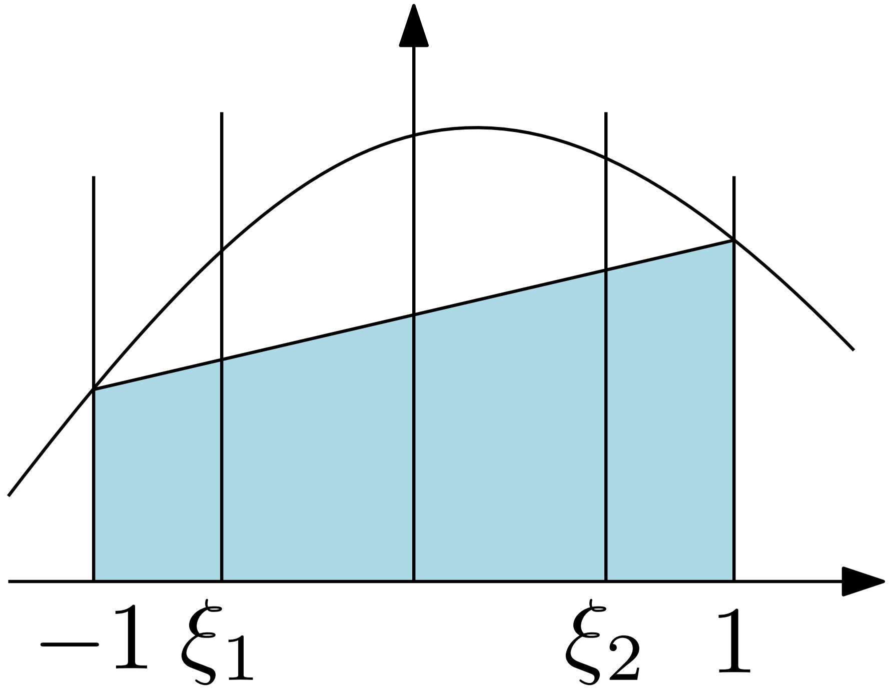
- Calcular $\int_0^1 x^2 dx$
- Calcular $\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^{3/2} dx$
- ¿Cómo tomar la muestra para obtener la misma exactitud que con la fórmula de los trapecios?

  Para trapecios usar $h = 0.1$, $h = 0.05$. Para cada método de Montecarlo, una muestra de tamaño suficientemente grande $(N > 1000)$.

Integración Gaussiana

Fórmula de cuadratura Gaussiana: introducción





A diferencia de las Fórmulas de Newton-Côtes, que hacen uso de una partición equiespaciada fijada a priori y, las diferentes técnicas de cuadraturas gaussianas obtienen los nodos de integración de tal modo que se optimice tanto la precisión como el gasto computacional realizado.

Fórmula de cuadratura Gaussiana: dos puntos

Si queremos hallar el área limitada por la curva $y = f(x)$ con $-1 \leq x \leq 1$ ¿qué metodo proporciona la mejor respuesta si solo pueden hacerse dos evaluaciones de la función?

Fórmula de cuadratura Gaussiana: dos puntos

Si queremos hallar el área limitada por la curva $y = f(x)$ con $-1 \leq x \leq 1$ ¿qué metodo proporciona la mejor respuesta si solo pueden hacerse dos evaluaciones de la función?

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

Fórmula de cuadratura Gaussiana: dos puntos

Si queremos hallar el área limitada por la curva $y = f(x)$ con $-1 \leq x \leq 1$ ¿qué metodo proporciona la mejor respuesta si solo pueden hacerse dos evaluaciones de la función?

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

- Queremos que sea exacta para polinomios cúbicos. Para determinar las cuatro incógnitas usamos como ecuaciones que la fomula es exacta en las funciones $1, x, x^2, x^3$.

Fórmula de cuadratura Gaussiana: dos puntos

Si queremos hallar el área limitada por la curva $y = f(x)$ con $-1 \leq x \leq 1$ ¿qué metodo proporciona la mejor respuesta si solo pueden hacerse dos evaluaciones de la función?

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

- Queremos que sea exacta para polinomios cúbicos. Para determinar las cuatro incógnitas usamos como ecuaciones que la fomula es exacta en las funciones $1, x, x^2, x^3$.

- Obtenemos $w_1 = w_2 = 1$ y $-x_1 = x_2 = \sqrt{1/3}$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\sqrt{1/3}) + f(\sqrt{1/3})$$

Fórmula de cuadratura Gaussiana en [-1,1]

Tabla 7.9 Nodos y pesos para el método de Gauss-Legendre.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N} w_{N,k} f(x_{N,k}) + E_N(f)$$

N	Nodos, $x_{N,k}$	Pesos, $w_{N,k}$	Error, $E_N(f)$
2	−0.5773502692 0.5773502692	1.0000000000 1.0000000000	$\frac{f^{(4)}(c)}{135}$
3	±0.7745966692 0.0000000000	0.5555555556 0.8888888888	$\frac{f^{(6)}(c)}{15\,750}$
4	±0.8611363116 ±0.3399810436	0.3478548451 0.6521451549	$\frac{f^{(8)}(c)}{3\,472\,875}$
5	±0.9061798459 ±0.5384693101 0.0000000000	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888888	$\frac{f^{(10)}(c)}{1\,237\,732\,650}$
6	±0.9324695142 ±0.6612093865 ±0.2386191861	0.1713244924 0.3607615730 0.4679139346	$\frac{f^{(12)}(c)2^{13}(6!)^4}{(12!)^3 13!}$
7	±0.9491079123 ±0.7415311856 ±0.4058451514 0.0000000000	0.1294849662 0.2797053915 0.3818300505 0.4179591837	$\frac{f^{(14)}(c)2^{15}(7!)^4}{(14!)^3 15!}$
8	±0.9602898565 ±0.7966664774 ±0.5255324099 ±0.1834346425	0.1012285363 0.2223810345 0.3137066459 0.3626837834	$\frac{f^{(16)}(c)2^{17}(8!)^4}{(16!)^3 17!}$

Fórmula de cuadratura Gaussiana: grado de precisión e intervalo [a,b]

La fórmula de integración:

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{m} w_i f(x_i) + E_m(f)$$

puede tener grado de precisión igual a $2m+1$ si los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_m$ son los ceros del polinomio ortogonal de Legendre (variantes: Laguerre, Chebyshev, Hermite, . . .) en $[a, b]$ de grado $m+1$.

Fórmula de cuadratura Gaussiana: grado de precisión e intervalo [a,b]

La fórmula de integración:

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{m} w_i f(x_i) + E_m(f)$$

puede tener grado de precisión igual a $2m+1$ si los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_m$ son los ceros del polinomio ortogonal de Legendre (variantes: Laguerre, Chebyshev, Hermite, ...) en $[a,b]$ de grado $m+1$.

- La relación $x = \frac{a+b+t(b-a)}{2}$ aplica el intervalo $[a,b]$ en el intervalo $[-1,1]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2} + t\frac{b-a}{2}\right)\,dt$$

Fórmula de cuadratura Gaussiana: grado de precisión e intervalo [a,b]

La fórmula de integración:

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{m} w_i f(x_i) + E_m(f)$$

puede tener grado de precisión igual a $2m+1$ si los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_m$ son los ceros del polinomio ortogonal de Legendre (variantes: Laguerre, Chebyshev, Hermite, ...) en $[a,b]$ de grado $m+1$.

- La relación $x = \frac{a+b+t(b-a)}{2}$ aplica el intervalo $[a,b]$ en el intervalo $[-1,1]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2} + t\frac{b-a}{2}\right)\,dt$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} w_{n,k} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x_{n,k}\right)\,dt$$

Guia de estudio

Libro *Càlcul numèric: teoria i pràctica* de M. Grau Sánchez y M. Noguera Batlle.

- Conceptos asociados: Capítulo 5, páginas 164–195

Libro *Cálculo numérico* de M. Grau Sánchez y M. Noguera Batlle.

- Conceptos asociados: Capítulo 6, páginas 145–174

Libro *Cálculo científico con MATLAB y Octave* de A. Quarteroni y F. Saleri.

- Conceptos y ejercicios resueltos: Capítulo 4, páginas 109–123.
- Problemas y prácticas propuestas: 4.5 a 4.18

Libro *Métodos numéricos con MATLAB* de J. H. Matthews and K. D. Fink

- Conceptos asociados: Capítulo 7, páginas 371–422