Computación Numérica

Tema 3. Interpolación (I): interpolación polinómica.

Irene Parada

irene.parada@upc.edu

Departamento de Matemáticas

Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech

15 de abril de 2024

Repaso

Breve recordatorio del Tema 2.4

- Autovalores, autovectores y radio espectral: definiciones e interpretación geométrica.
- Fórmula de Euler. Autovalores y autovectores en la solución de sistemas de EDOs lineales. Linealización de sistemas dinámicos.
- Método de las potencias para calcular el autovalor y un autovector dominante. Cociente de Rayleigh.
- Método de las potencias para calcular otros valores espectrales. Deflación de Wielandt.
- Valores singulares. Descomposición SVD y matriz pseudoinversa.

Introducción

La interpolación es un recurso de primer orden dentro del campo de la aproximación de funciones.

- Por interpolación se puede sustituir una función de expresión muy costosa de evaluar por otra expresión más sencilla: polinomios, funciones racionales, ...
- Por interpolación se puede, a partir de una tabla de valores, $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$, obtener valores aproximados de $f(x)$ para $x \neq x_i,\ i = 0, \ldots, n$.
- Por interpolación se puede aproximar funciones que no se pueden obtener por métodos analíticos.

Ejemplo

Tabla de valores de temperatura de congelación de un anticongelante, una solución de glicerina (%) con agua.

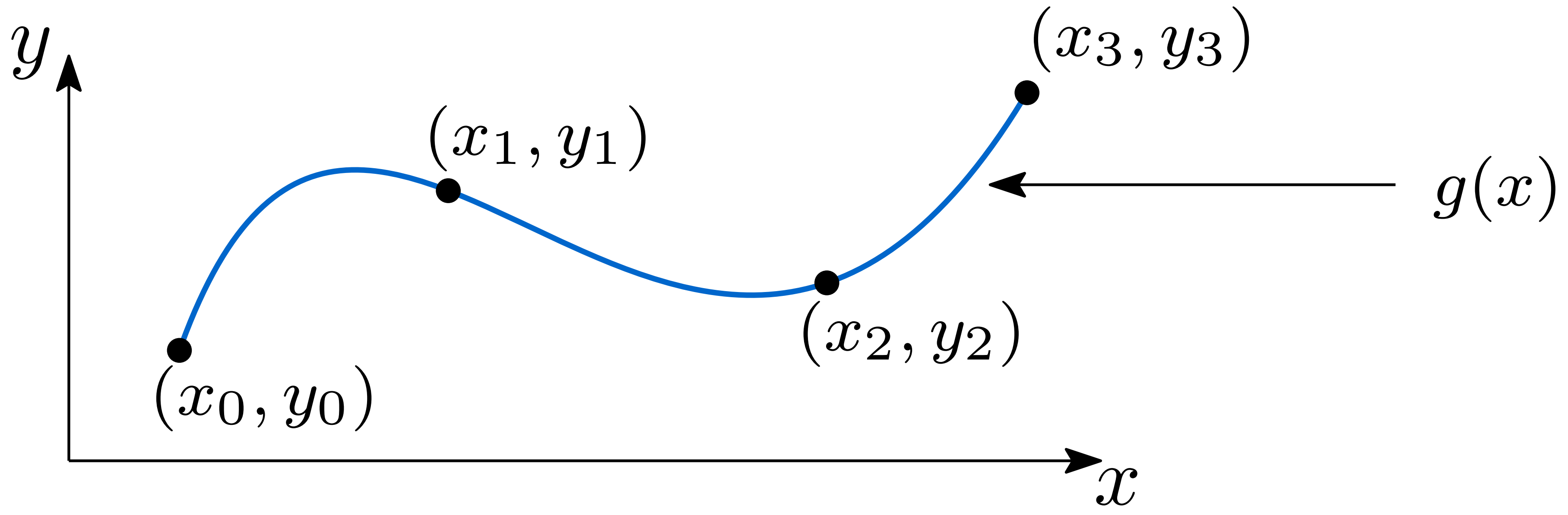
%	C°
0	0
10	-1.6
20	-4.8
30	-9.5
40	-15.4
50	-21.9
60	-33.6
70	-37.8
80	-19.1
90	-1.6
100	17

Pregunta: ¿Cuál será el punto de congelación para un anticongelante con un 45% de glicerina?

Introducción: interpolación

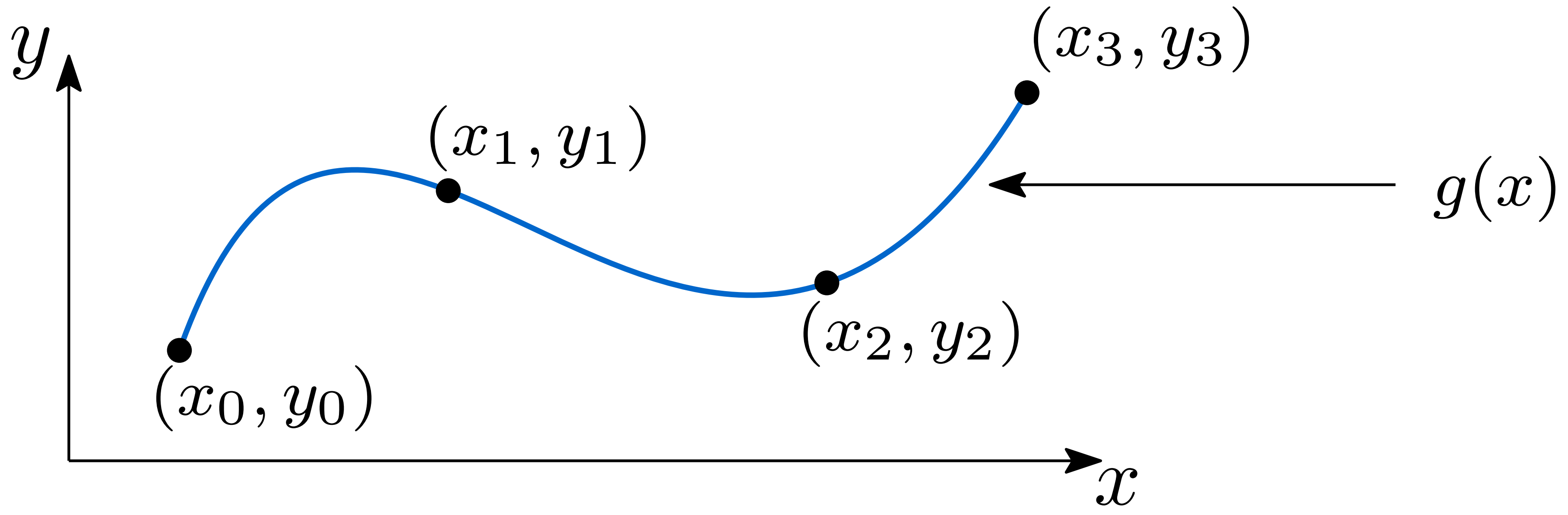
Muchas veces de una función $y = f(x)$ solo se conoce en un conjunto de puntos discretos $(x_0, y_0 = f(x_0)), (x_1, y_1 = f(x_1)), \ldots, (x_n, y_n = f(x_n))$.

¿Cómo se puede encontrar el valor de $y = f(x)$ en cualquier otro valor de x?



Introducción: interpolación

Muchas veces de una función $y = f(x)$ solo se conoce en un conjunto de puntos discretos $(x_0, y_0 = f(x_0)), (x_1, y_1 = f(x_1)), \ldots, (x_n, y_n = f(x_n))$.
¿Cómo se puede encontrar el valor de $y = f(x)$ en cualquier otro valor de x?

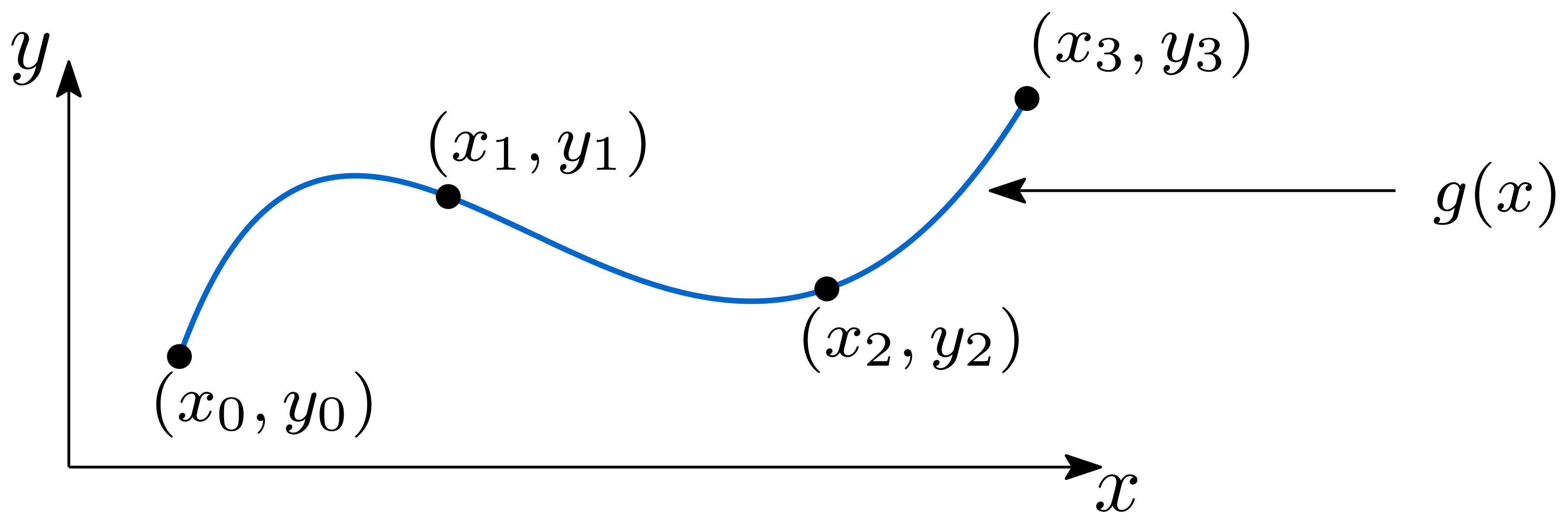


- **Interpolar:** encontrar una función continua g que pasa por los $n+1$ puntos.

Introducción: interpolación

Muchas veces de una función $y = f(x)$ solo se conoce en un conjunto de puntos discretos $(x_0, y_0 = f(x_0)), (x_1, y_1 = f(x_1)), \ldots, (x_n, y_n = f(x_n))$.

¿Cómo se puede encontrar el valor de $y = f(x)$ en cualquier otro valor de x?

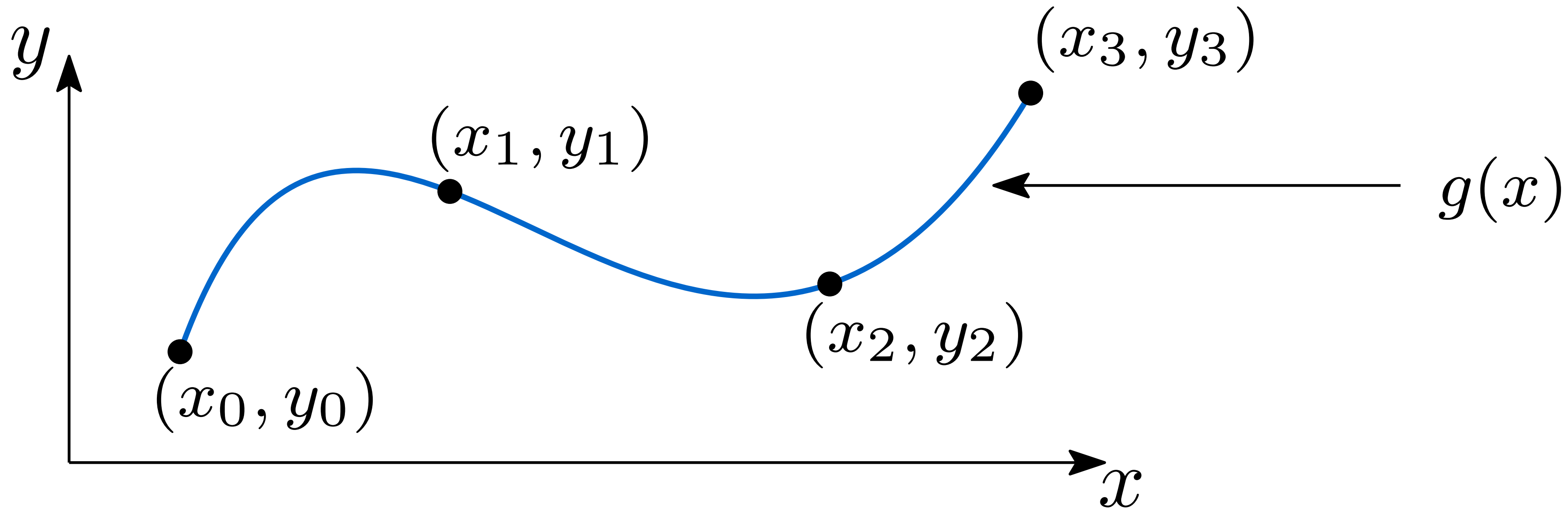


- Interpolar: encontrar una función continua g que pasa por los $n + 1$ puntos.
- Permite encontrar el valor de y en cualquier otro valor de x como $y = g(x)$.

Introducción: interpolación

Muchas veces de una función $y = f(x)$ solo se conoce en un conjunto de puntos discretos $(x_0, y_0 = f(x_0)), (x_1, y_1 = f(x_1)), \ldots, (x_n, y_n = f(x_n))$.

¿Cómo se puede encontrar el valor de $y = f(x)$ en cualquier otro valor de x?

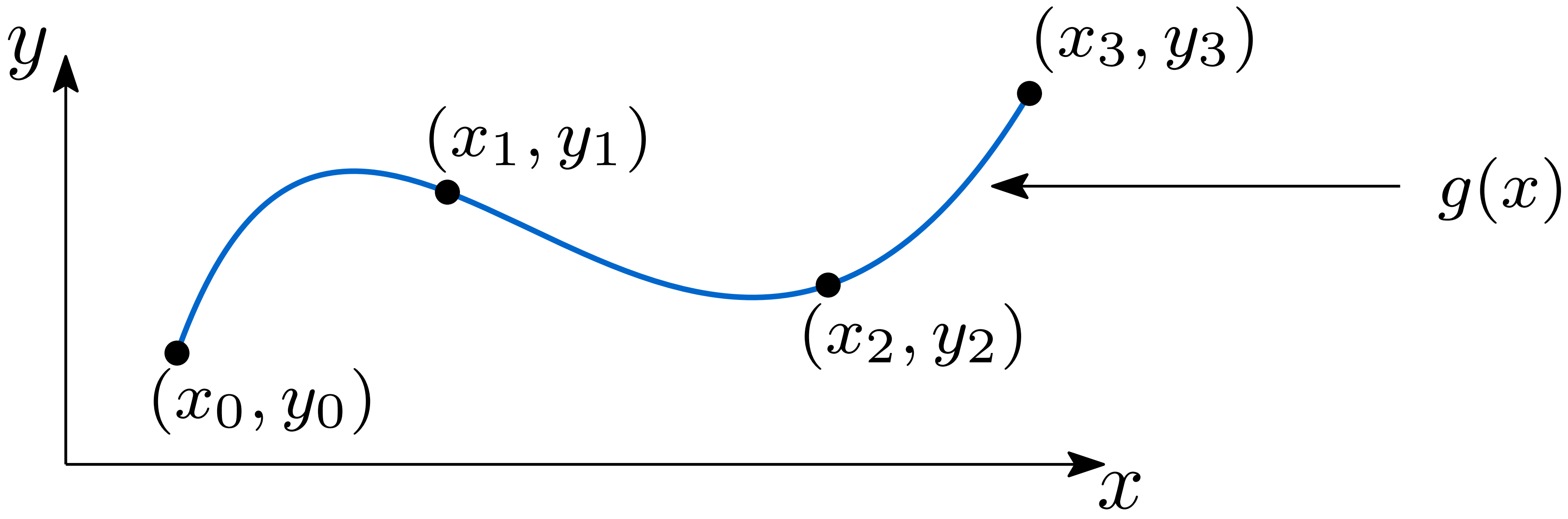


- Interpolar: encontrar una función continua g que pasa por los $n + 1$ puntos.
- Permite encontrar el valor de y en cualquier otro valor de x como $y = g(x)$.
- Extrapolación: si x está fuera del intervalo para el cual se dan los datos.

Introducción: interpolación

Muchas veces de una función $y = f(x)$ solo se conoce en un conjunto de puntos discretos $(x_0, y_0 = f(x_0)), (x_1, y_1 = f(x_1)), \ldots, (x_n, y_n = f(x_n))$.

¿Cómo se puede encontrar el valor de $y = f(x)$ en cualquier otro valor de x?



- Interpolar: encontrar una función continua g que pasa por los $n+1$ puntos.
- Permite encontrar el valor de y en cualquier otro valor de x como $y = g(x)$.
- Extrapolación: si x está fuera del intervalo para el cual se dan los datos.
- Ningún método de interpolación es apropiado para extrapolar información.

Tipos de interpolación

- Las $n+1$ parejas $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, con todos los x_i diferentes, reciben el nombre de nodos, nudos o puntos de soporte.

Tipos de interpolación

- Las $n+1$ parejas $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, con todos los x_i diferentes, reciben el nombre de nodos, nudos o puntos de soporte.
- Usualmente la función continua g que interpola los nodos y representa la función que hay detrás de la tabla de valores se busca de un determinado tipo:

Tipos de interpolación

- Las $n+1$ parejas $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, con todos los x_i diferentes, reciben el nombre de nodos, nudos o puntos de soporte.
- Usualmente la función continua g que interpola los nodos y representa la función que hay detrás de la tabla de valores se busca de un determinado tipo:

Polinómica: $g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

Racional: $g(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k}{b_0 + \ldots + b_m x^m}$.

Exponencial: $g(x) = a_n e^{\lambda_n x} + \ldots + a_1 e^{\lambda_1 x} + a_0$.

Trigonòmetrica: $g(x) = a_{-m} e^{-mxi} + \ldots + a_0 + \ldots + a_m e^{mxj}$,
$m = \lfloor n/2 \rfloor$ e i la unidad imaginaria. Recordamos la fórmula de Euler:

$$e^{kxj} = \cos(kx) + j \sin(kx).$$

Interpolación polinómica

Polinomio interpolador

Interpolación polinómica

Dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, queremos determinar los $n+1$ coeficientes del polinomio de grado n,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

que pasa por todos los puntos de soporte (x_i, y_i): $P(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$

Interpolación polinómica

Dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, queremos determinar los $n+1$ coeficientes del polinomio de grado n,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

que pasa por todos los puntos de soporte (x_i, y_i): $P(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$

- Las condiciones, todas juntas, dan lugar a un sistema lineal de $n+1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas: $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$.

Interpolación polinómica

Dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, queremos determinar los $n+1$ coeficientes del polinomio de grado n,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

que pasa por todos los puntos de soporte (x_i, y_i): $P(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$

- Las condiciones, todas juntas, dan lugar a un sistema lineal de $n+1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas: $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$.

¿Cuál?

Interpolación polinómica

Dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, queremos determinar los $n+1$ coeficientes del polinomio de grado n,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

que pasa por todos los puntos de soporte (x_i, y_i): $P(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$

- Las condiciones, todas juntas, dan lugar a un sistema lineal de $n+1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas: $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$.

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \ldots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^n & x_{n-1}^{n-1} & \ldots & x_{n-1} & 1 \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

Interpolación polinómica

Dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, queremos determinar los $n+1$ coeficientes del polinomio de grado n,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

que pasa por todos los puntos de soporte (x_i, y_i): $P(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$

- Las condiciones, todas juntas, dan lugar a un sistema lineal de $n+1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas: $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$.

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \ldots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^n & x_{n-1}^{n-1} & \ldots & x_{n-1} & 1 \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

- Matriz del sistema: Matriz de Vandermonde (`vander()` en MATLAB).

Existencia y unicidad

Teorema

Dados $x_0, x_1, \ldots, x_n$ números reales distintos entre sí, y valores arbitrarios $y_0, y_1, \ldots, y_n$, existe un único polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ tal que $P(x_i) = y_i$, es decir, que interpola los $n+1$ nodos (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$.

Existencia y unicidad

Teorema

Dados $x_0, x_1, \ldots, x_n$ números reales distintos entre sí, y valores arbitrarios $y_0, y_1, \ldots, y_n$, existe un único polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ tal que $P(x_i) = y_i$, es decir, que interpola los $n+1$ nodos (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$.

- El determinante de Vandermonde es:

$$\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \ldots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & x_n & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n} \prod_{j=i+1}^{n} (x_i - x_j).$$

Existencia y unicidad

Teorema

Dados $x_0, x_1, \dots, x_n$ números reales distintos entre sí, y valores arbitrarios $y_0, y_1, \dots, y_n$, existe un único polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ tal que $P(x_i) = y_i$, es decir, que interpola los $n+1$ nodos (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$.

- El determinante de Vandermonde es:

$$\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n} \prod_{j=i+1}^{n} (x_i - x_j).$$

- Si todos los x_is son diferentes, la solución del problema existe y es única, ya que el problema de interpolación da lugar a un sistema lineal compatible y determinado.

Error en la interpolación polinómica

Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con derivadas hasta el orden $n+1$ con continuidad, sea $P_n(x)$ el polinomio interpolador de f en $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Error en la interpolación polinómica

Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con derivadas hasta el orden $n+1$ con continuidad, sea $P_n(x)$ el polinomio interpolador de f en $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Teorema del error interpolación polinómica

Sea $w(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$ y $\overline{x} \in [a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que:

$$E(\overline{x}) = f(\overline{x}) - P_n(\overline{x}) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} w(\overline{x})$$

Error en la interpolación polinómica

Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con derivadas hasta el orden $n + 1$ con continuidad, sea $P_n(x)$ el polinomio interpolador de f en $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Teorema del error interpolación polinómica

Sea $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$ y $\overline{x} \in [a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que:

$$E(\overline{x}) = f(\overline{x}) - P_n(\overline{x}) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} w(\overline{x})$$

- $w(\bar{x})$ solo depende de $\bar{x}$ y de las x_is.

Error en la interpolación polinómica: ejemplo

Ejemplo: Tenemos una tabla que nos da el valor de la función

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

para $x = 1.0,\ 1.1,\ 1.2.$ Dar una cota del error cuando interpolamos la función con un polinomio de frado 2 para aproximar $f(1.15)$.

Error en la interpolación polinómica: ejemplo

Ejemplo: Tenemos una tabla que nos da el valor de la función

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

para $x = 1.0,\ 1.1,\ 1.2.$ Dar una cota del error cuando interpolamos la función con un polinomio de frado 2 para aproximar $f(1.15)$.

- $f'(x) = e^{x^2}$, $f''(x) = 2xe^{x^2}$ y $f'''(x) = (4x^2 + 2)e^{x^2}$.

Error en la interpolación polinómica: ejemplo

Ejemplo: Tenemos una tabla que nos da el valor de la función

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

para $x = 1.0,\ 1.1,\ 1.2$. Dar una cota del error cuando interpolamos la función con un polinomio de frado 2 para aproximar $f(1.15)$.

- $f'(x) = e^{x^2}$, $f''(x) = 2xe^{x^2}$ y $f'''(x) = (4x^2+2)e^{x^2}$.
- $\max_{1\leq x\leq 1.2} |f'''(x)| = (4(1.2)^2+2)e^{(1.2)^2} < 32.752.$

Error en la interpolación polinómica: ejemplo

Ejemplo: Tenemos una tabla que nos da el valor de la función

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt$$

para $x = 1.0,\ 1.1,\ 1.2$. Dar una cota del error cuando interpolamos la función con un polinomio de frado 2 para aproximar $f(1.15)$.

- $f'(x) = e^{x^2}$, $f''(x) = 2xe^{x^2}$ y $f'''(x) = (4x^2 + 2)e^{x^2}$.
- $\max_{1 \le x \le 1.2} |f'''(x)| = (4(1.2)^2 + 2)e^{(1.2)^2} < 32.752.$
- Cota del error: $\frac{32.652}{3!}|(1.15 - 1)(1.15 - 1.1)(1.15 - 1.2)| < 0.0021.$

Fórmulas para calcular el polinomio interpolador

Método directo, polinomios de Lagrange y diferencias divididas de Newton

Cálculo del polinomio interpolador: método directo

Usando MATLAB resolvemos el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^n & x_{n-1}^{n-1} & \dots & x_{n-1} & 1 \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Cálculo del polinomio interpolador: método directo

Usando MATLAB resolvemos el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^n & x_{n-1}^{n-1} & \dots & x_{n-1} & 1 \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}.$$

La solución obtenida son los coeficientes del polinomio en orden decreciente:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Cálculo del polinomio interpolador: método directo

Usando MATLAB resolvemos el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^n & x_{n-1}^{n-1} & \dots & x_{n-1} & 1 \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}.$$

La solución obtenida son los coeficientes del polinomio en orden decreciente:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

- La dificultad de resolver sistemas lineales grandes, costosos (($\Theta(n^3)$ para los métodos vistos, aunque los hay más eficientes) y con posible inestabilidad numérica (puede estar muy mal condicionado), hace que propongamos otras formulaciones para calcular el (mismo) polinomio interpolador.

Cálculo del polinomio interpolador: fórmula de Lagrange

El método de la fórmula de Lagrange es una manera de obtener el polinomio interpolador de los $n+1$ nodos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

Cálculo del polinomio interpolador: fórmula de Lagrange

El método de la fórmula de Lagrange es una manera de obtener el polinomio interpolador de los $n+1$ nodos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

- En este método el polinomio interpolador se escribe de la forma:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot L_k(x).$$

Cálculo del polinomio interpolador: fórmula de Lagrange

El método de la fórmula de Lagrange es una manera de obtener el polinomio interpolador de los $n+1$ nodos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

- En este método el polinomio interpolador se escribe de la forma:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot L_k(x).$$

- Los polinomios $L_k(x)$ se llaman polinomios de Lagrange:

Cálculo del polinomio interpolador: fórmula de Lagrange

El método de la fórmula de Lagrange es una manera de obtener el polinomio interpolador de los $n+1$ nodos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

- En este método el polinomio interpolador se escribe de la forma:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot L_k(x).$$

- Los polinomios $L_k(x)$ se llaman polinomios de Lagrange:
  - $L_k(x_i) = \delta_{ki}$ donde δ_{ki} es la delta de Kronecker: $\delta_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = k \\ 0, & \text{si } i \neq k \end{cases}.$

Cálculo del polinomio interpolador: fórmula de Lagrange

El método de la fórmula de Lagrange es una manera de obtener el polinomio interpolador de los $n+1$ nodos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

- En este método el polinomio interpolador se escribe de la forma:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot L_k(x).$$

- Los polinomios $L_k(x)$ se llaman polinomios de Lagrange:
  - $L_k(x_i) = \delta_{ki}$ donde δ_{ki} es la delta de Kronecker: $\delta_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = k \\ 0, & \text{si } i \neq k \end{cases}.$

Vamos a construirla: primero los ceros, luego $L_k(x_k) = 1$.

Cálculo del polinomio interpolador: fórmula de Lagrange

El método de la fórmula de Lagrange es una manera de obtener el polinomio interpolador de los $n+1$ nodos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

- En este método el polinomio interpolador se escribe de la forma:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot L_k(x).$$

- Los polinomios $L_k(x)$ se llaman polinomios de Lagrange:
  - $L_k(x_i) = \delta_{ki}$ donde δ_{ki} es la delta de Kronecker: $\delta_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = k \\ 0, & \text{si } i \neq k \end{cases}.$
  - $L_k(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}.$

Cálculo del polinomio interpolador: fórmula de Lagrange

El método de la fórmula de Lagrange es una manera de obtener el polinomio interpolador de los $n+1$ nodos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

- En este método el polinomio interpolador se escribe de la forma:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot L_k(x).$$

- Los polinomios $L_k(x)$ se llaman polinomios de Lagrange:
  - $L_k(x_i) = \delta_{ki}$ donde δ_{ki} es la delta de Kronecker: $\delta_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = k \\ 0, & \text{si } i \neq k \end{cases}.$
  - $L_k(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}.$
  - Alternativamente, si $w(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n)$, $L_k(x) = \frac{w(x)}{w'(x_k)(x-x_k)}.$

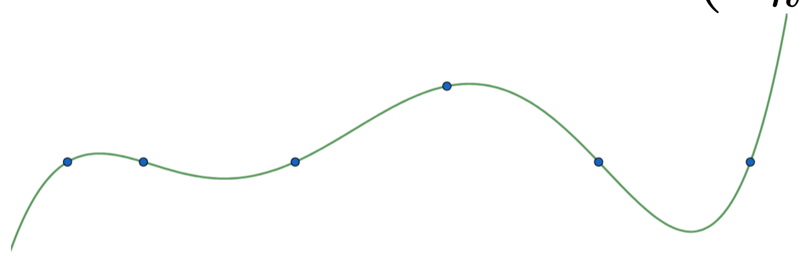
Cálculo del polinomio interpolador: fórmula de Lagrange

El método de la fórmula de Lagrange es una manera de obtener el polinomio interpolador de los $n+1$ nodos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.

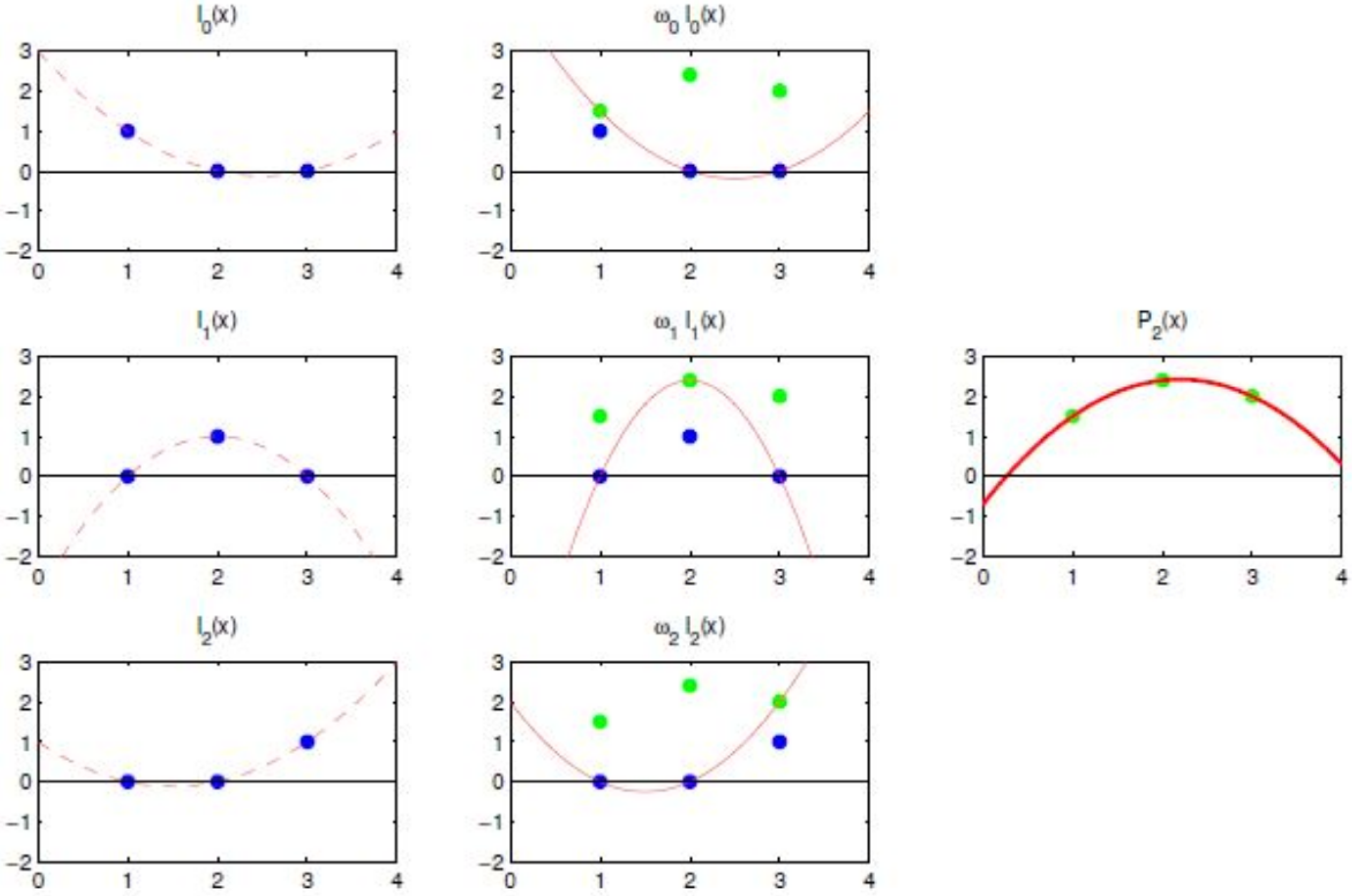
- En este método el polinomio interpolador se escribe de la forma:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot L_k(x).$$

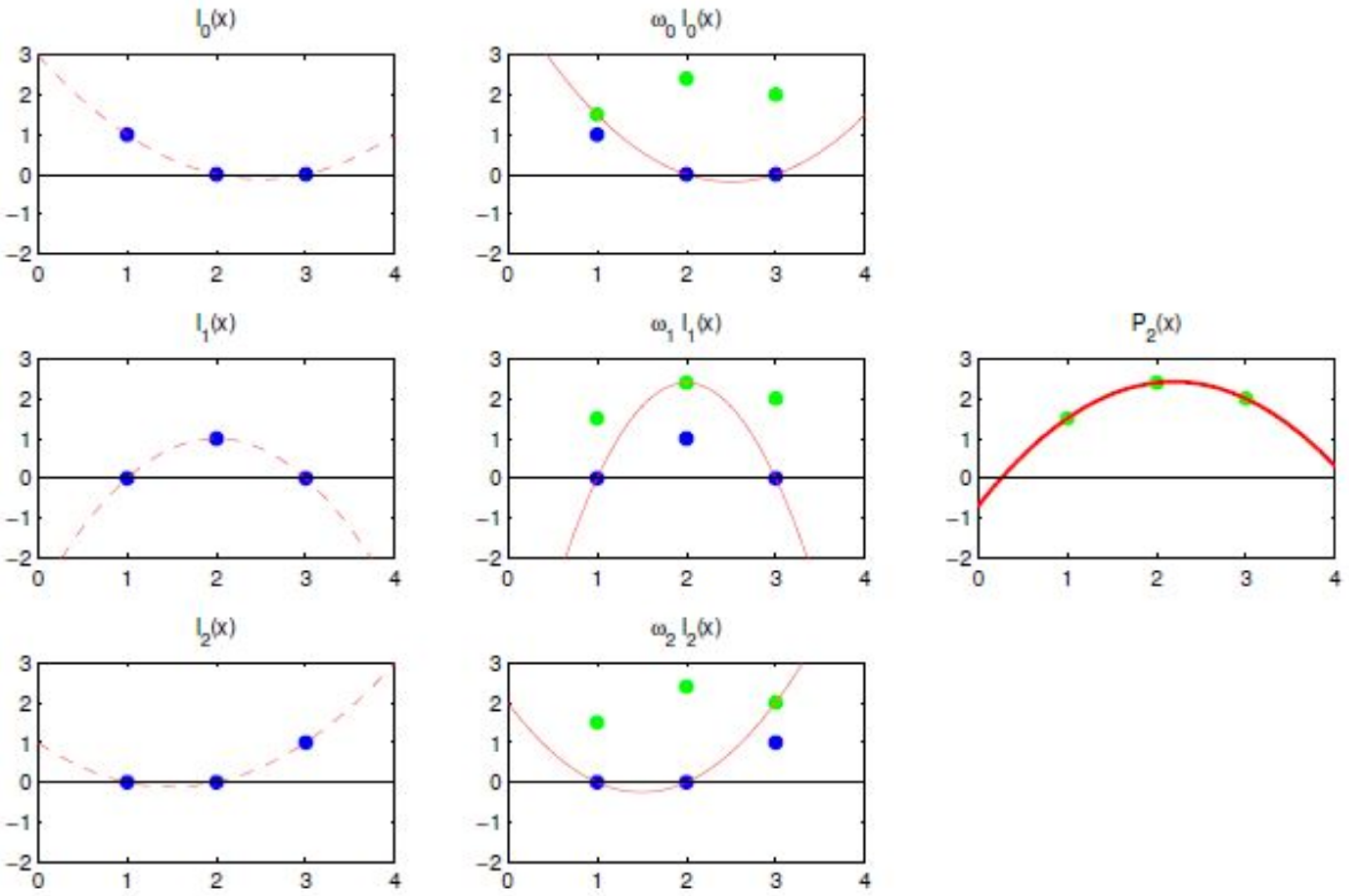
- Los polinomios $L_k(x)$ se llaman polinomios de Lagrange:
  - $L_k(x_i) = \delta_{ki}$ donde δ_{ki} es la delta de Kronecker: $\delta_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = k \\ 0, & \text{si } i \neq k \end{cases}.$
  - $L_k(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}.$
  - Alternativamente, si $w(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n)$, $L_k(x) = \frac{w(x)}{w'(x_k)(x-x_k)}.$
  - $L_k(x)$ solo depende de las x_is, no de las y_is.



Cálculo del polinomio interpolador: polinomios de Lagrange



Cálculo del polinomio interpolador: polinomios de Lagrange



- Operaciones: $\Theta(n^2)$.
- Cuando se añade un punto, hay que recalcular todos los coeficientes.

Cálculo del polinomio interpolador: diferencias divididas de Newton

El método de Newton de diferencias divididas es otra forma de obtener el polinomio interpolador de los $n+1$ puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.

Cálculo del polinomio interpolador: diferencias divididas de Newton

El método de Newton de diferencias divididas es otra forma de obtener el polinomio interpolador de los $n+1$ puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.

En este método, el polinomio interpolador se escribe de la siguiente manera:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

Cálculo del polinomio interpolador: diferencias divididas de Newton

El método de Newton de diferencias divididas es otra forma de obtener el polinomio interpolador de los $n+1$ puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.

En este método, el polinomio interpolador se escribe de la siguiente manera:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

- Los coeficientes c_i se obtienen como lo que se conoce como diferencias divididas:

Cálculo del polinomio interpolador: diferencias divididas de Newton

El método de Newton de diferencias divididas es otra forma de obtener el polinomio interpolador de los $n+1$ puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.

En este método, el polinomio interpolador se escribe de la siguiente manera:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + c_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

- Los coeficientes c_i se obtienen como lo que se conoce como diferencias divididas:

$$\begin{aligned} P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + \\ & f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + \ldots + \\ & f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}). \end{aligned}$$

Cálculo del polinomio interpolador: definición de diferencias divididas

Dados $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$, se definen:

Cálculo del polinomio interpolador: definición de diferencias divididas

Dados $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$, se definen:

- las diferencias divididas de orden 0 de la función f, para cada $i = 0, \ldots, n$:

$$f[x_i] = f(x_i).$$

Cálculo del polinomio interpolador: definición de diferencias divididas

Dados $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$, se definen:

- las diferencias divididas de orden 0 de la función f, para cada $i = 0, \ldots, n$:
$$f[x_i] = f(x_i).$$
- las diferencias divididas de orden 1 de f, para cada $i = 0, \ldots, n-1$:
$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}.$$

Cálculo del polinomio interpolador: definición de diferencias divididas

Dados $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$, se definen:

- las diferencias divididas de orden 0 de la función f, para cada $i = 0, \ldots, n$:

$$f[x_i] = f(x_i).$$

- las diferencias divididas de orden 1 de f, para cada $i = 0, \ldots, n-1$:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}.$$

- A partir de las diferencias divididas de orden $k-1$, $f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]$ y $f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}]$, se definen las diferencias divididas de orden k correspondientes a $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}$ como:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

Cálculo del polinomio interpolador: tabla de diferencias divididas

x	$f(x)$
x_0	$f[x_0]$
x_1	$f[x_1]$
x_2	$f[x_2]$
x_3	$f[x_3]$
x_4	$f[x_4]$
x_5	$f[x_5]$

Cálculo del polinomio interpolador: tabla de diferencias divididas

x	$f(x)$	Primeras diferencias divididas
x_0	$f[x_0]$	
		$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$
x_1	$f[x_1]$	
		$f[x_1,x_2]=\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$
x_2	$f[x_2]$	
		$f[x_2,x_3]=\frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$
x_3	$f[x_3]$	
		$f[x_3,x_4]=\frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$
x_4	$f[x_4]$	
		$f[x_4,x_5]=\frac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$
x_5	$f[x_5]$	

Cálculo del polinomio interpolador: tabla de diferencias divididas

x	$f(x)$	Primeras diferencias divididas	Segundas diferencias divididas
x_0	$f[x_0]$		
		$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$
		$f[x_1,x_2]=\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$
		$f[x_2,x_3]=\frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$
		$f[x_3,x_4]=\frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$	
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5]=\frac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$
		$f[x_4,x_5]=\frac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$	
x_5	$f[x_5]$		

Cálculo del polinomio interpolador: tabla de diferencias divididas

x	$f(x)$	Primeras diferencias divididas	Segundas diferencias divididas	Terceras diferencias divididas
x_0	$\boxed{f[x_0]}$			
		$\boxed{f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}}$		
x_1	$f[x_1]$		$\boxed{f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}}$	
		$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$\boxed{f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	
		$f[x_4, x_5] = \frac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

Cálculo del polinomio interpolador: tabla de diferencias divididas

x	$f(x)$	Primeras diferencias divididas	Segundas diferencias divididas	Terceras diferencias divididas
x_0	$\boxed{f[x_0]}$			
		$\boxed{f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}}$		
x_1	$f[x_1]$		$\boxed{f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}}$	
		$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$\boxed{f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	
		$f[x_4, x_5] = \frac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

El polinomio interpolador de grado n se escribe como:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots +$$
$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}).$$

Cálculo del polinomio interpolador: tabla de diferencias divididas

x	$f(x)$	Primeras diferencias divididas	Segundas diferencias divididas	Terceras diferencias divididas
x_0	$\boxed{f[x_0]}$			
		$\boxed{f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}}$		
x_1	$f[x_1]$		$\boxed{f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}}$	
		$f[x_1,x_2]=\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$\boxed{f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3]=\frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4]=\frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5]=\frac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5]=\frac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	
		$f[x_4,x_5]=\frac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

Operaciones: $\Theta(n^2)$.

El polinomio interpolador de grado n se escribe como:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \ldots + f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Cálculo del polinomio interpolador: tabla de diferencias divididas

x	$f(x)$	Primeras diferencias divididas	Segundas diferencias divididas	Terceras diferencias divididas
x_0	$\boxed{f[x_0]}$			
		$\boxed{f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}}$		
x_1	$f[x_1]$		$\boxed{f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}}$	
		$f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$\boxed{f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4] = \frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5] = \frac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5] = \frac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	
		$f[x_4,x_5] = \frac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

Operaciones: $\Theta(n^2)$.

¿Qué pasa si añadimos un nodo?

El polinomio interpolador de grado n se escribe como:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \ldots + f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Fenómeno de Runge

Comportamiento del error en la interpolación

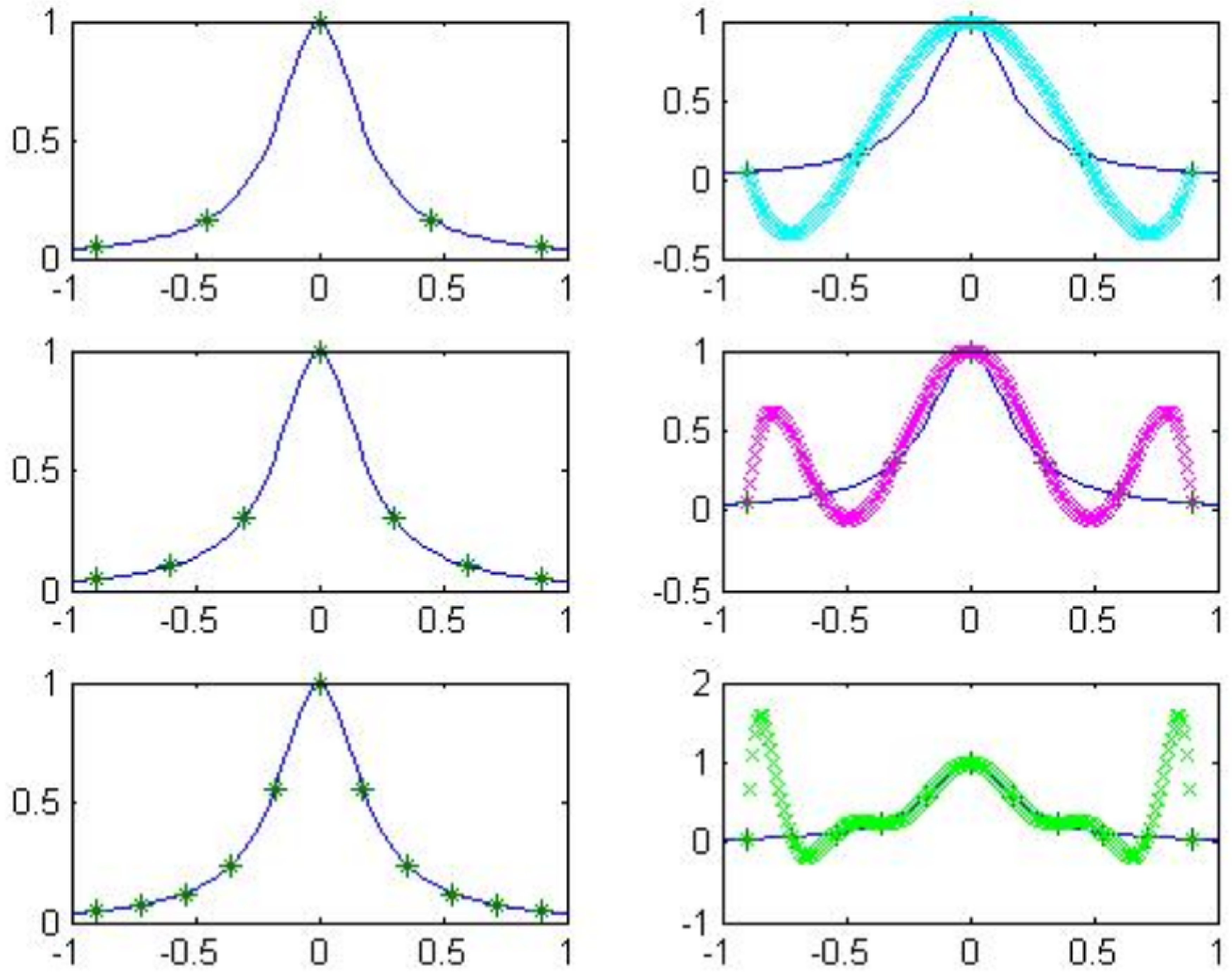
Fenómeno de Runge

Fenómeno de Runge: Considerar la función

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Calcular los polinomios interpoladores de grados 3,6, 9 y12 a partir de valores de puntos equiespaciados en su coordenada x. Representar gráficamente $f(x)$ y los polinomios obtenidos. Evaluar el error que se comete. ¿Qué se observa?

Fenómeno de Runge



Nodos equiespaciados

Mitigando el problema de fenómeno de Runge

El fenómeno demuestra que los polinomios de grado alto generalmente no son adecuados para la interpolación n con nodos equidistantes. Podemos:

Mitigando el problema de fenómeno de Runge

El fenómeno demuestra que los polinomios de grado alto generalmente no son adecuados para la interpolación n con nodos equidistantes. Podemos:

- Cambiar los nodos de interpolación: utilizando nodos que se distribuyan más densamente hacia los bordes del intervalo. Ej: nodos de Chebyshev.

Mitigando el problema de fenómeno de Runge

El fenómeno demuestra que los polinomios de grado alto generalmente no son adecuados para la interpolación n con nodos equidistantes. Podemos:

- Cambiar los nodos de interpolación: utilizando nodos que se distribuyan más densamente hacia los bordes del intervalo. Ej: nodos de Chebyshev.
- Minimización con restricciones: Se puede ajustar un polinomio de grado superior que permita restringir las derivadas.

Mitigando el problema de fenómeno de Runge

El fenómeno demuestra que los polinomios de grado alto generalmente no son adecuados para la interpolación n con nodos equidistantes. Podemos:

- Cambiar los nodos de interpolación: utilizando nodos que se distribuyan más densamente hacia los bordes del intervalo. Ej: nodos de Chebyshev.
- Minimización con restricciones: Se puede ajustar un polinomio de grado superior que permita restringir las derivadas.
- Uso de polinomios a trozos: se puede aumentar el número de piezas polinómicas en vez de aumentar el grado de los polinomios utilizados.

Mitigando el problema de fenómeno de Runge

El fenómeno demuestra que los polinomios de grado alto generalmente no son adecuados para la interpolación n con nodos equidistantes. Podemos:

- Cambiar los nodos de interpolación: utilizando nodos que se distribuyan más densamente hacia los bordes del intervalo. Ej: nodos de Chebyshev.
- Minimización con restricciones: Se puede ajustar un polinomio de grado superior que permita restringir las derivadas.
- Uso de polinomios a trozos: se puede aumentar el número de piezas polinómicas en vez de aumentar el grado de los polinomios utilizados.
- Ajuste de mínimos cuadrados: ajustar un polinomio de menor grado mediante el método de mínimos cuadrados. Generalmente, cuando se usan m abscisas equidistantes, si el grado es $< 2\sqrt{m}$ la aproximación de mínimos cuadrados está bien condicionada.

Elección óptima de nodos

Elección óptima de nodos

Sabemos que la fórmula del error para la interpolación polinómica de una función f es:

$$E(\overline{x}) = f(\overline{x}) - P_n(\overline{x}) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} w(\overline{x}),$$

donde $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ y $c \in [a, b]$, donde $[a, b]$ es el menor intervalo que continene a los x_is y a $\overline{x}$.

- Nos interesa elegir los puntos de manera que se obtenga el mínimo error posible.

Elección óptima de nodos

Sabemos que la fórmula del error para la interpolación polinómica de una función f es:

$$E(\overline{x}) = f(\overline{x}) - P_n(\overline{x}) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} w(\overline{x}),$$

donde $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ y $c \in [a, b]$, donde $[a, b]$ es el menor intervalo que continene a los x_is y a $\overline{x}$.

- Nos interesa elegir los puntos de manera que se obtenga el mínimo error posible.
- Queremos seleccionar los mejores n x_is en $[a, b]$ independientemente de la función f.

Elección óptima de nodos

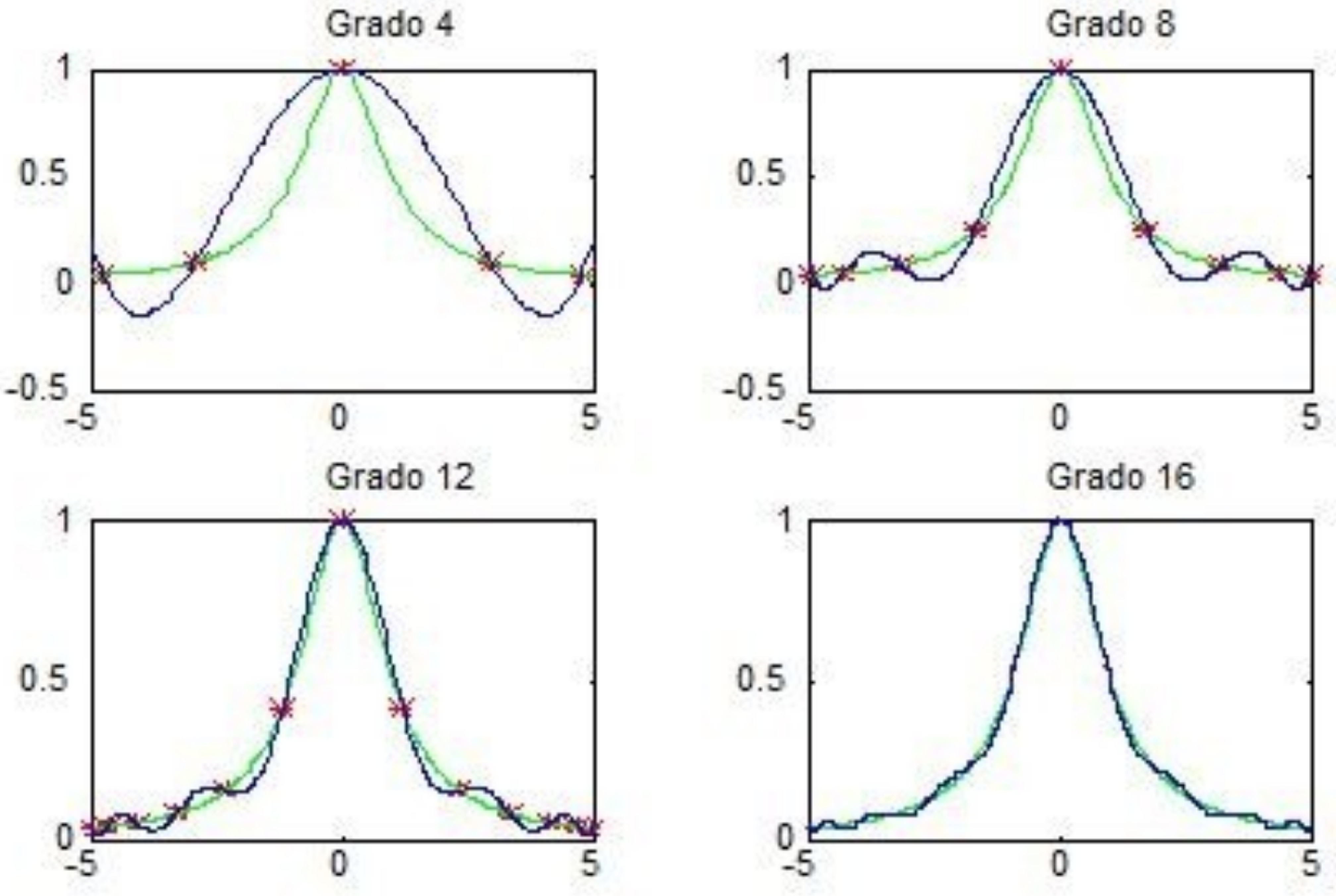
Sabemos que la fórmula del error para la interpolación polinómica de una función f es:

$$E(\overline{x}) = f(\overline{x}) - P_n(\overline{x}) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} w(\overline{x}),$$

donde $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ y $c \in [a, b]$, donde $[a, b]$ es el menor intervalo que continene a los x_is y a $\overline{x}$.

- Nos interesa elegir los puntos de manera que se obtenga el mínimo error posible.
- Queremos seleccionar los mejores n x_is en $[a, b]$ independientemente de la función f.
- Objetivo: seleccionar x_is para minimizar $\|w(x)\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |w(x)|$.

Abscisas de Chebyshev

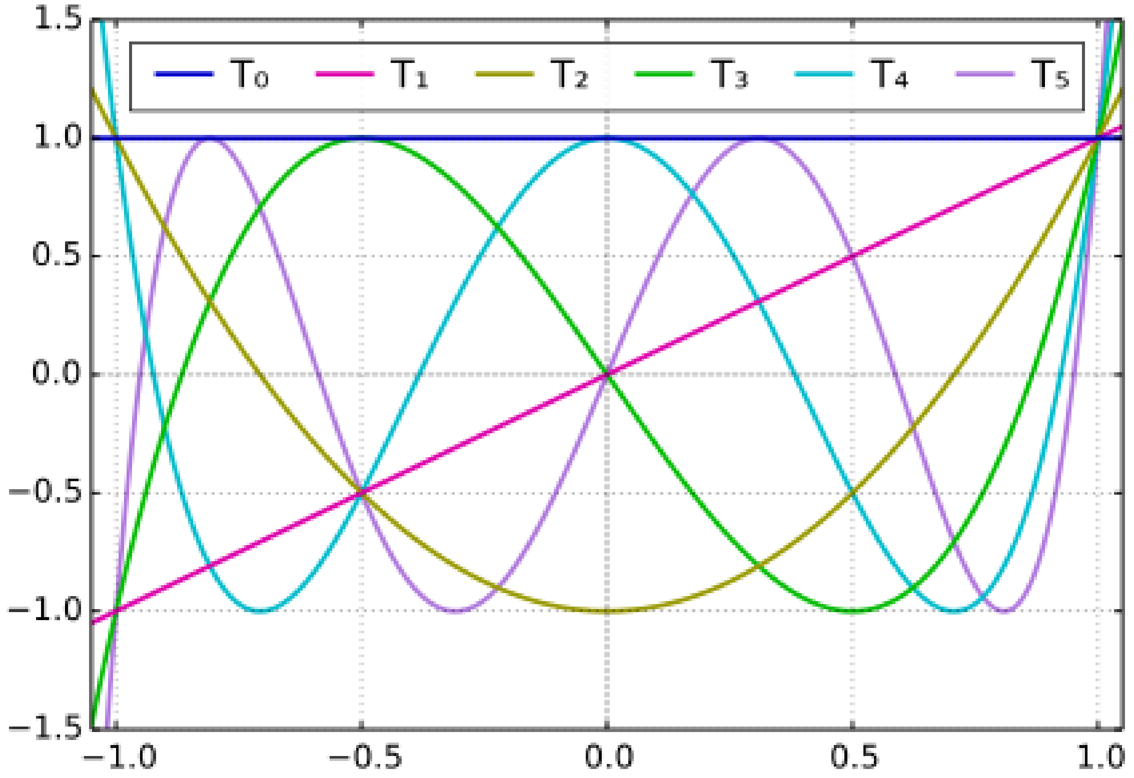


Nodos de Chebyshev

Polinomios de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev de primer tipo son

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad -1 \leq x \leq 1, n \geq 0.$$

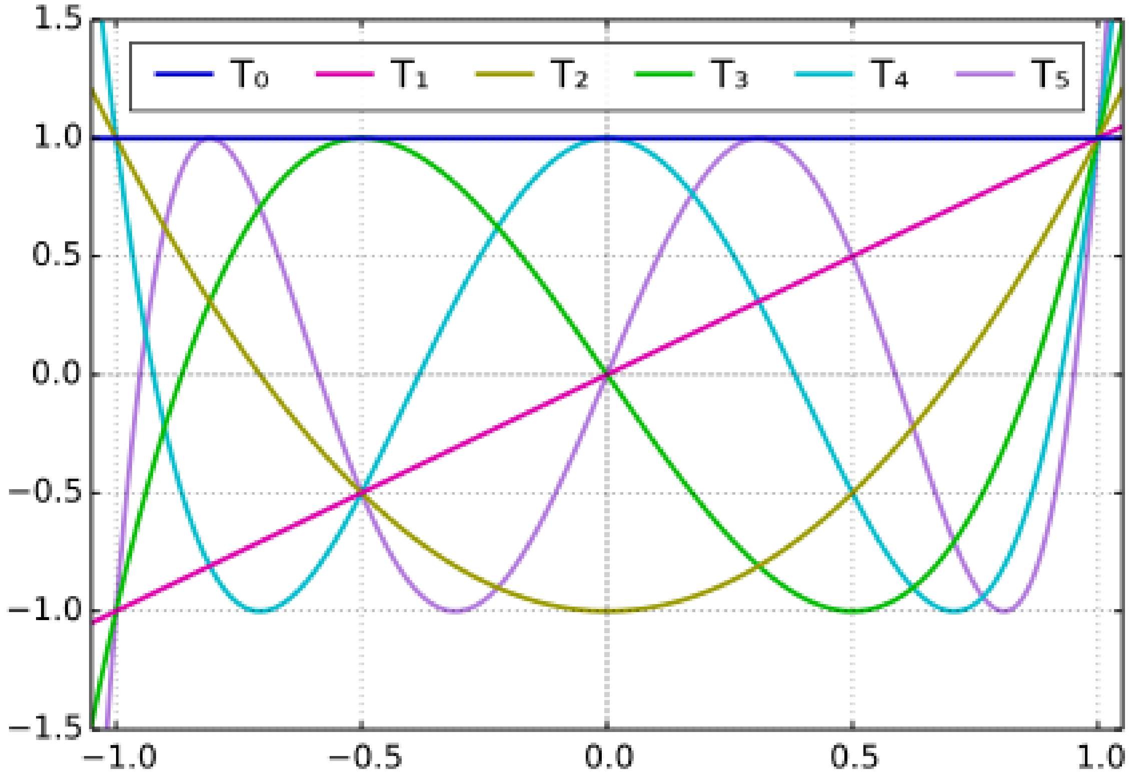


Y, por lo tanto, $|T_n(x)| \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$, $n \geq 0$.
Además, $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.

Polinomios de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev de primer tipo son

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad -1 \leq x \leq 1, n \geq 0.$$

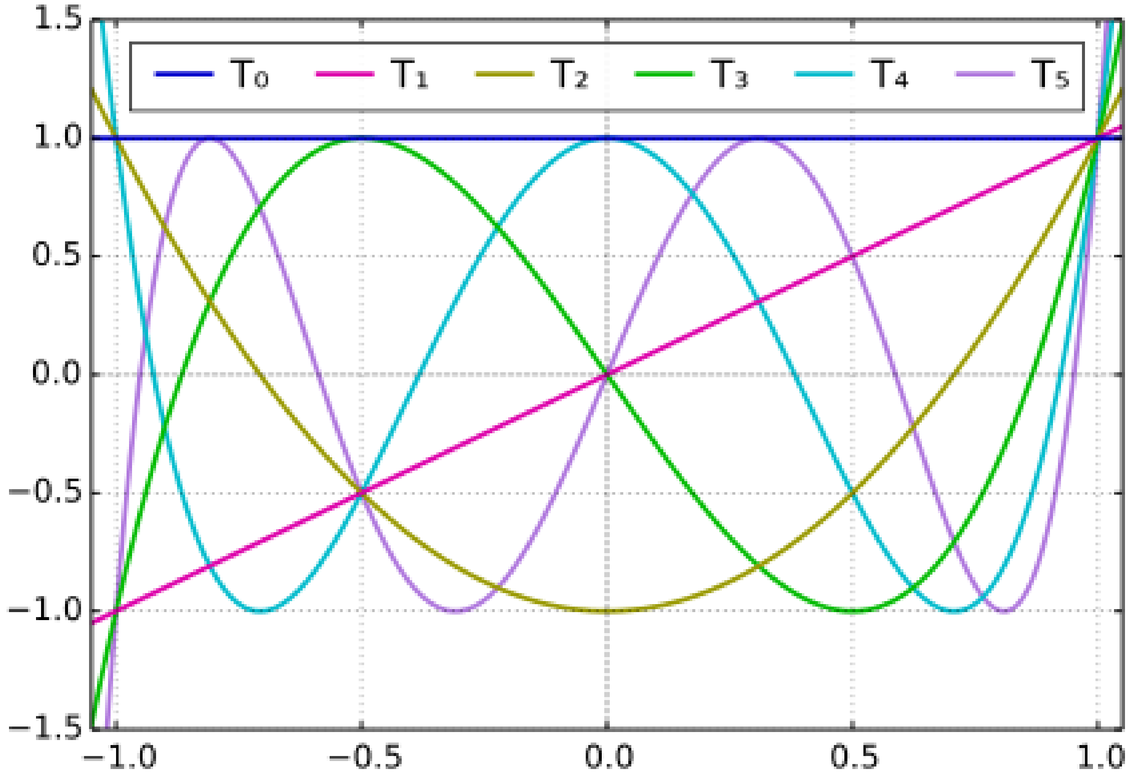


Y, por lo tanto, $|T_n(x)| \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$, $n \geq 0$.
Además, $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.
Definiciones alternativas:

Polinomios de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev de primer tipo son

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad -1 \le x \le 1, n \ge 0.$$



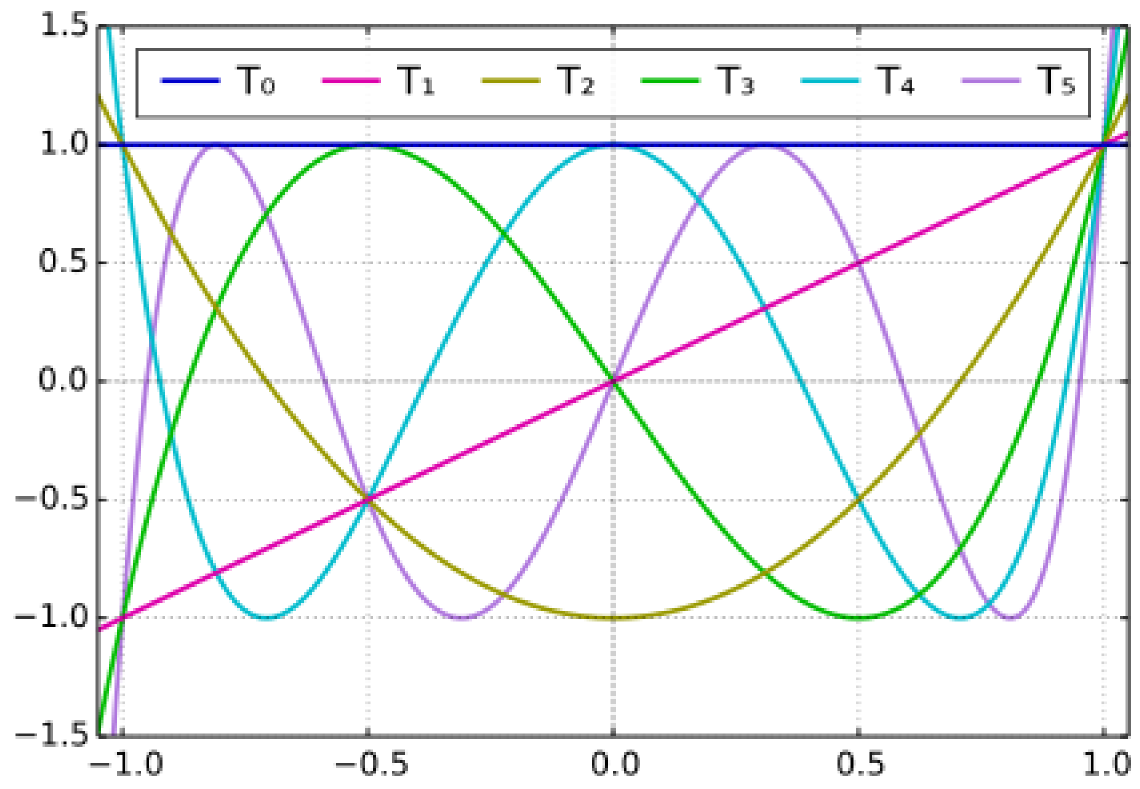
Y, por lo tanto, $|T_n(x)| \le 1$, $-1 \le x \le 1$, $n \ge 0$.
Además, $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.
Definiciones alternativas:

- $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta), \ n \ge 0.$

Polinomios de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev de primer tipo son

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad -1 \leq x \leq 1, n \geq 0.$$



Y, por lo tanto, $|T_n(x)| \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$, $n \geq 0$.
Además, $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.
Definiciones alternativas:

- $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta), \; n \geq 0$.
- Se cumple la recurrencia:

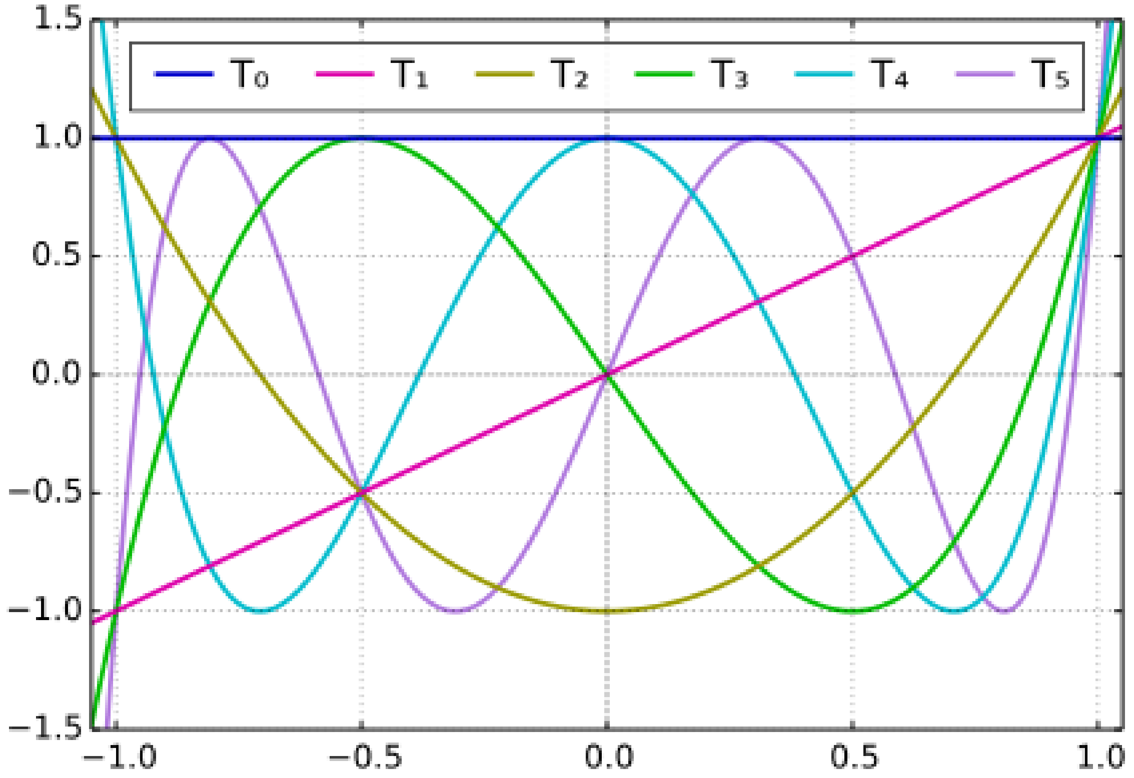
$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 2.$$

Polinomios de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev de primer tipo son

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad -1 \le x \le 1, n \ge 0.$$



Y, por lo tanto, $|T_n(x)| \le 1$, $-1 \le x \le 1$, $n \ge 0$.
Además, $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.
Definiciones alternativas:

- $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta),\ n \ge 0.$
- Se cumple la recurrencia:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \ge 2.$$

Por tanto, el coeficiente principal de T_n es 2^{n-1} para $n \ge 1$.

Abscisas de Chebyshev

- Entre todos los polinomios mónicos de grado $n+1$ que pueden escribirse como $\omega(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$ con $x_i \in [-1, 1]$ $\forall i$, el que minimiza la norma $\|\omega(x)\|_\infty$ es $\omega(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$.

Abscisas de Chebyshev

- Entre todos los polinomios mónicos de grado $n+1$ que pueden escribirse como $\omega(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_n)$ con $x_i \in [-1,1]\ \forall i$, el que minimiza la norma $\|\omega(x)\|_\infty$ es $\omega(x) = \frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)$.

Minimizando $\|w(x)\|_\infty$

Para $x \in [-1,1]$, en general $\max|w(x)| \geq \frac{1}{2^n}$ y si los puntos x_i son las raíces del polinomio de Chebyshev de grado $n+1$ se verifica

$$\max|w(x)| = \frac{1}{2^n}.$$

Abscisas de Chebyshev

- Entre todos los polinomios mónicos de grado $n+1$ que pueden escribirse como $\omega(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n)$ con $x_i \in [-1,1]\ \forall i$, el que minimiza la norma $\|\omega(x)\|_\infty$ es $\omega(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$.

Minimizando $\|w(x)\|_\infty$

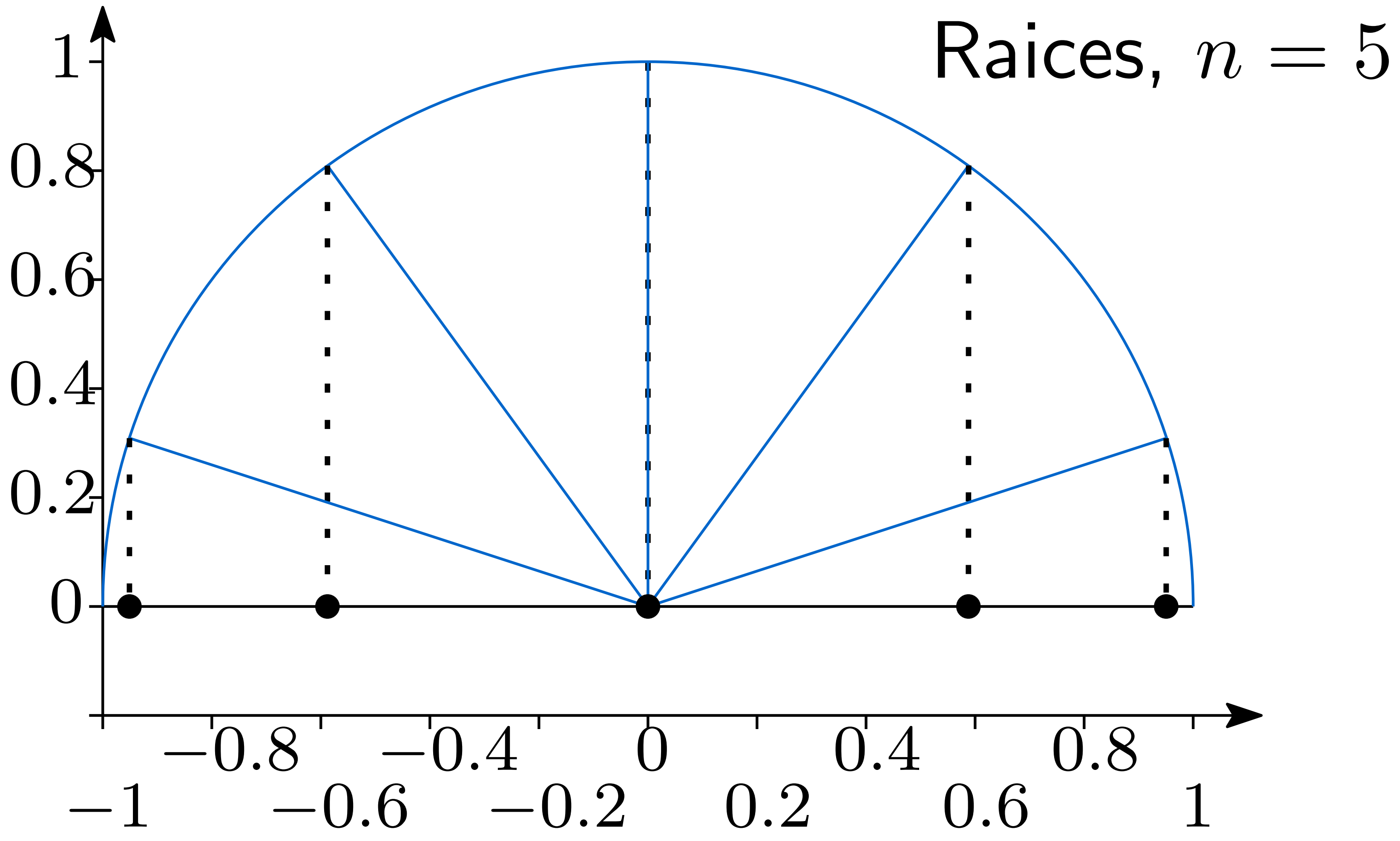
Para $x \in [-1,1]$, en general $\max|w(x)| \geq \frac{1}{2^n}$ y si los puntos x_i son las raíces del polinomio de Chebyshev de grado $n+1$ se verifica

$$\max|w(x)| = \frac{1}{2^n}.$$

- Las raíces del polinomio $T_n(x)$ son: (se obtienen igualando $\cos(n\theta) = 0$)

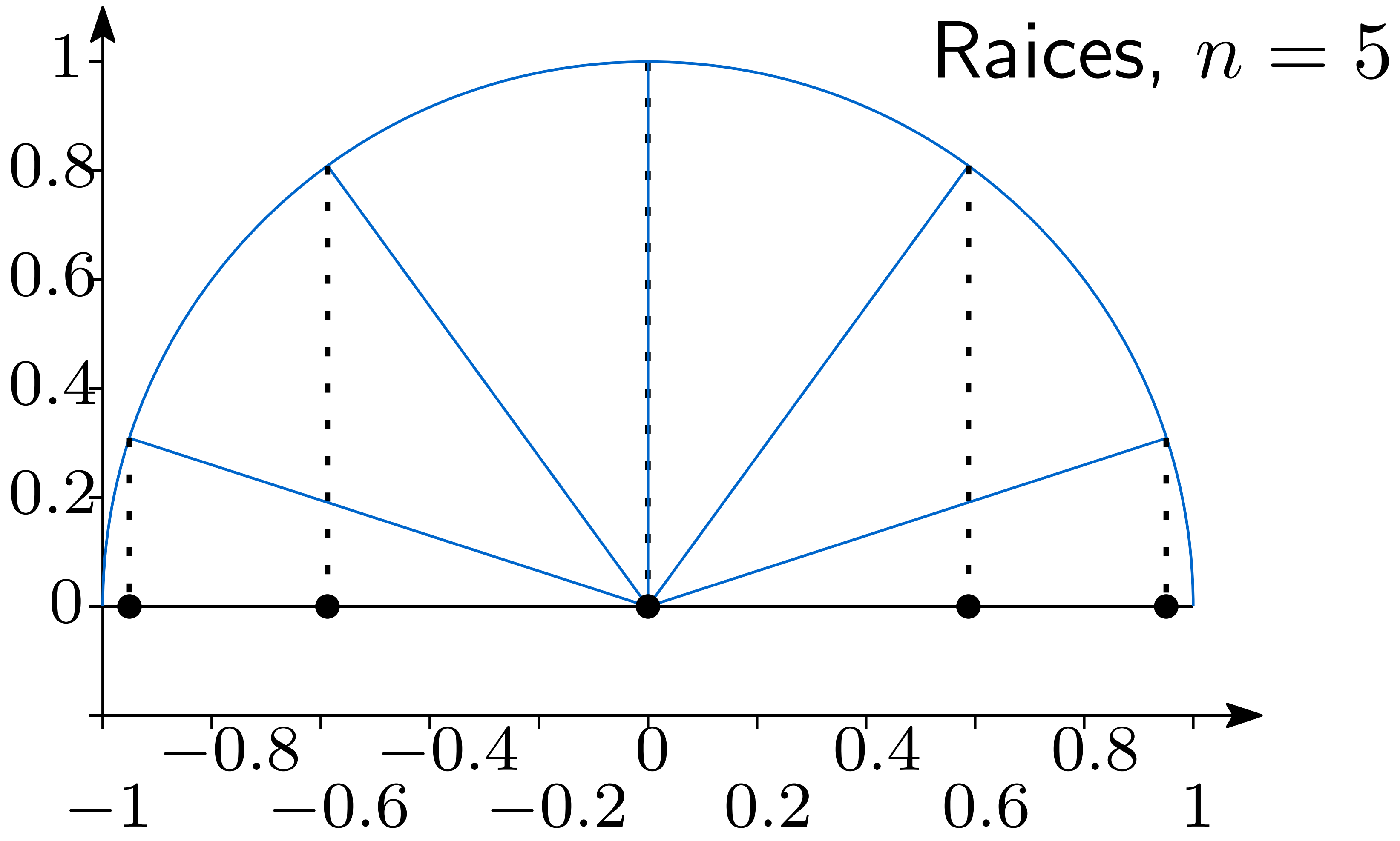
$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Abscisas de Chebyshev



Los nodos x_i de Chebyshev no son equiespaciados y tienen la propiedad de que $w(x)$ es mínimo en el intervalo $[-1, 1]$.

Abscisas de Chebyshev



Los nodos x_i de Chebyshev no son equiespaciados y tienen la propiedad de que $w(x)$ es mínimo en el intervalo $[-1, 1]$.

- Nodos en el intervalo $[a, b]$:

$$x_k \in [-1, 1] \Rightarrow z(x_k) := \frac{b-a}{2} x_k + \frac{a+b}{2}, z \in [a, b].$$

Abscisas y convergencia

- Aunque los nodos de Chevyshev sean óptimos a la hora de minimizar $\|w(x)\|_\infty$, eso no significa que si los usamos la sucesión de polinomios vaya a converger uniformemente a la función modelo f.

Abscisas y convergencia

- Aunque los nodos de Chevyshev sean óptimos a la hora de minimizar $\|w(x)\|_\infty$, eso no significa que si los usamos la sucesión de polinomios vaya a converger uniformemente a la función modelo f.
- El teorema de Faber (1914) implica que para cualquier sucesión de abcisas existe una función f tal que la sucesión dada por los polinomios interpoladores $P_n(x)$ no converge uniformemente a $f(x)$ cuando $n \to \infty$.

Abscisas y convergencia

- Aunque los nodos de Chevyshev sean óptimos a la hora de minimizar $\|w(x)\|_\infty$, eso no significa que si los usamos la sucesión de polinomios vaya a converger uniformemente a la función modelo f.
- El teorema de Faber (1914) implica que para cualquier sucesión de abcisas existe una función f tal que la sucesión dada por los polinomios interpoladores $P_n(x)$ no converge uniformemente a $f(x)$ cuando $n \to \infty$.
- Para cualquier función $f(x)$ continua existe una sucesión de abscisas tal que la sucesión de polinomios interpoladores converge uniformemente a $f(x)$.

Interpolación de Hermite

Interpolación de Hermite

Obtener un polinomio

$$H_{2n+1}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{2n+1} x^{2n+1}$$

de grado $\leq 2n+1$ que cumpla con las condiciones

$$H_m(x_j) = y_j, \quad H'_m(x_j) = y'_j$$

para la tabla de datos

x	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y	y_0	y_1	$\ldots$	y_n
y'	y'_0	y'_1	$\ldots$	y'_n

Interpolación de Hermite: polinomios de Lagrange

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} y'_j \widehat{H}_{n,j}(x)$$

con

$$H_{n,j}(x) = \left(1 - 2(x - x_j) L'_{n,j}(x_j)\right) L^2_{n,j}(x)$$

y

$$\widehat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j) L^2_{n,j}(x)$$

donde $L_{n,j}(x)$ es el polinomio de Lagrange de grado n; $L_{n,j}(x_i) = \delta_{i,j}$.

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_n
y'	y'_0	y'_1	$\dots$	y'_n

Interpolación de Hermite: polinomios de Lagrange

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} y'_j \widehat{H}_{n,j}(x)$$

con

$$H_{n,j}(x) = \left(1 - 2(x - x_j)L'_{n,j}(x_j)\right) L^2_{n,j}(x)$$

y

$$\widehat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j)L^2_{n,j}(x)$$

donde $L_{n,j}(x)$ es el polinomio de Lagrange de grado n; $L_{n,j}(x_i) = \delta_{i,j}$.

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_n
y'	y'_0	y'_1	$\dots$	y'_n

$H_{2n+1}(x_i) = y_i$
$H'_{2n+1}(x_i) = y'_i$

Interpolación de Hermite: expresión por diferencias divididas

x_0	$f[x_0]$					
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_0]$				
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_1]$	$f[x_0, x_0, x_1, x_1]$		
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2]$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_2]$	$f[x_1, x_1, x_2, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_1, x_2, x_2]$	$f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2]$

Interpolación de Hermite: expresión por diferencias divididas

x_0	$f[x_0]$					
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_0]$				
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_1]$	$f[x_0, x_0, x_1, x_1]$		
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2]$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_2]$	$f[x_1, x_1, x_2, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_1, x_2, x_2]$	$f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2]$

Se considera $f[x_i, x_i] = f'(x_i) = y_i'$.

Interpolación de Hermite: expresión por diferencias divididas

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f[x_0] & & & & \\
x_0 & f[x_0] & f[x_0, x_0] & & & \\
x_1 & f[x_1] & f[x_0, x_1] & f[x_0, x_0, x_1] & & \\
x_1 & f[x_1] & f[x_1, x_1] & f[x_0, x_1, x_1] & f[x_0, x_0, x_1, x_1] & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_1, x_2] & f[x_1, x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_1, x_2] & f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2] \\
x_2 & f[x_2] & f[x_2, x_2] & f[x_1, x_2, x_2] & f[x_1, x_1, x_2, x_2] & f[x_0, x_1, x_1, x_2, x_2] & f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2]
\end{array}
$$

Se considera $f[x_i, x_i] = f'(x_i) = y_i'$.

$$
\begin{aligned}
H_5(x) = f[x_0] &+ f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 \\
&+ f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1) \\
&+ f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2](x - x_0)^2(x - x_1)^2 \\
&+ f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2](x - x_0)^2(x - x_1)^2(x - x_2).
\end{aligned}
$$

Interpolación de Hermite: tabla de diferencias divididas

z	$f(z)$	Primeras diferencias divididas	Segundas diferencias divididas
$z_0 = x_0$	$f[z_0] = f(x_0)$		
		$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$	
$z_1 = x_0$	$f[z_1] = f(x_0)$		$f[z_0, z_1, z_2] = \frac{f[z_1,z_2]-f[z_0,z_1]}{z_2-z_0}$
		$f[z_1, z_2] = \frac{f[z_2]-f[z_1]}{z_2-z_1}$	
$z_2 = x_1$	$f[z_2] = f(x_1)$		$f[z_1, z_2, z_3] = \frac{f[z_2,z_3]-f[z_1,z_2]}{z_3-z_1}$
		$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$	
$z_3 = x_1$	$f[z_3] = f(x_1)$		$f[z_2, z_3, z_4] = \frac{f[z_3,z_4]-f[z_2,z_3]}{z_4-z_2}$
		$f[z_3, z_4] = \frac{f[z_4]-f[z_3]}{z_4-z_3}$	
$z_4 = x_2$	$f[z_4] = f(x_2)$		$f[z_3, z_4, z_5] = \frac{f[z_4,z_5]-f[z_3,z_4]}{z_5-z_3}$
		$f[z_4, z_5] = f'(x_2)$	
$z_5 = x_2$	$f[z_5] = f(x_2)$		

Interpolación de Hermite: error

Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con derivadas hasta el orden $2n + 2$ con continuidad, y sea $H_{2n+1}(x)$ el polinomio interpolador de f en los nodos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Sea $w^2(x) = (x - x_0)^2(x - x_1)^2 \ldots (x - x_n)^2$ y $\bar{x} \in [a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que:

$$f(\bar{x}) - H_{2n+1}(\bar{x}) = \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} w^2(\bar{x})$$

Ejercicio

Encontrar el polinomio de interpolación para la tabla:

x	-1	2
$f(x)$	-11	14
$f'(x)$	14	5

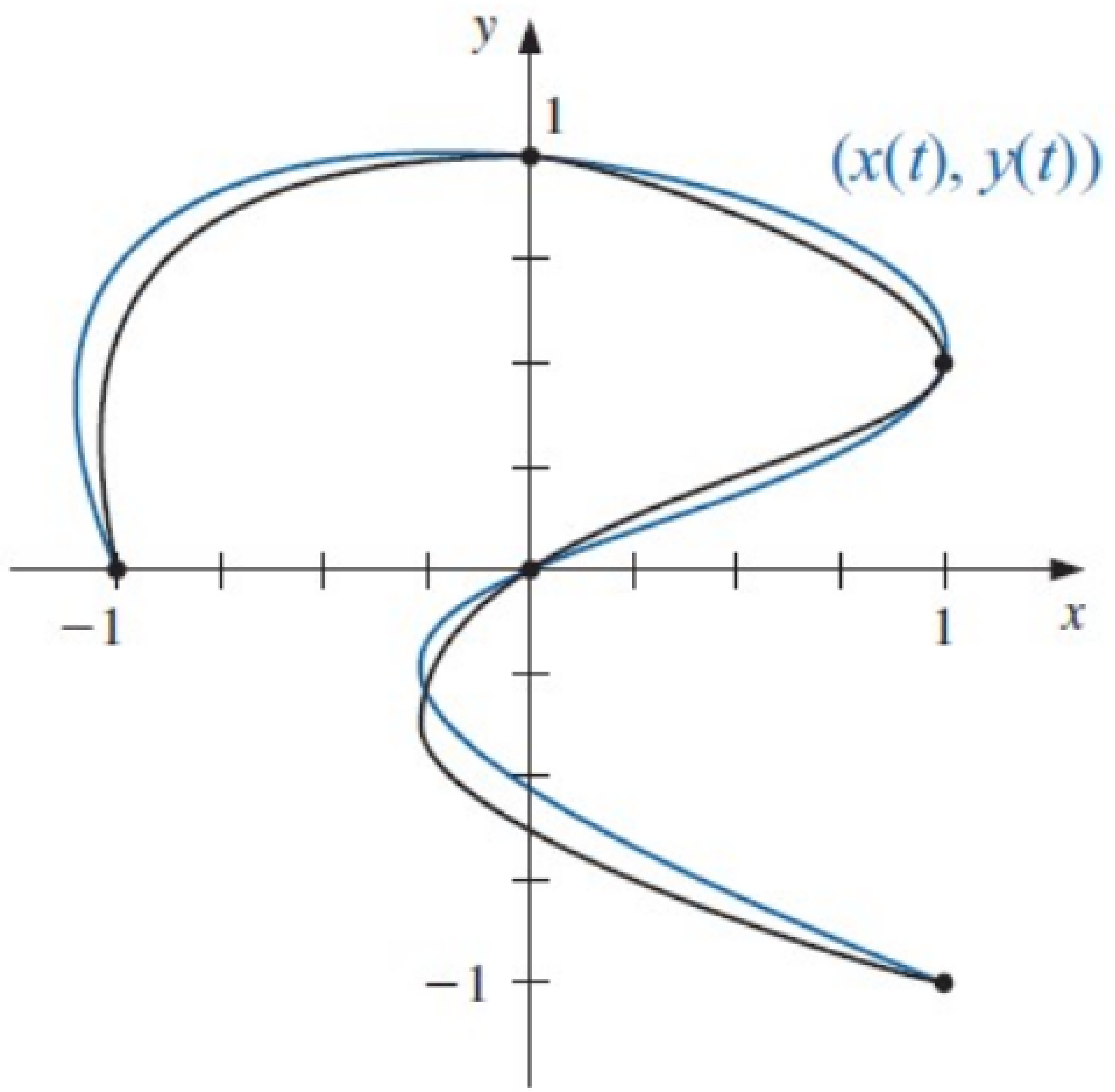
utilizando el método de las diferencias divididas de Newton.

Interpolación polinómica

Curvas paramétricas

Ajuste de curvas: curvas paramétricas

Una técnica paramétrica para encontrar un polinomio que conecte $n+1$ puntos en el orden previsto consiste en utilizar un parámetro t definido en un intervalo $[t_0, t_n]$, $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, e interpolar las funciones $x_i = x(t_i)$ e $y_i = y(t_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Se pueden usar polinomios de Lagrange, diferencias finitas de Newton, polinomios de Hermite o splines.



i	0	1	2	3	4
t_i	0	0.25	0.5	0.75	1
x_i	-1	0	1	0	1
y_i	0	1	0.5	0	-1

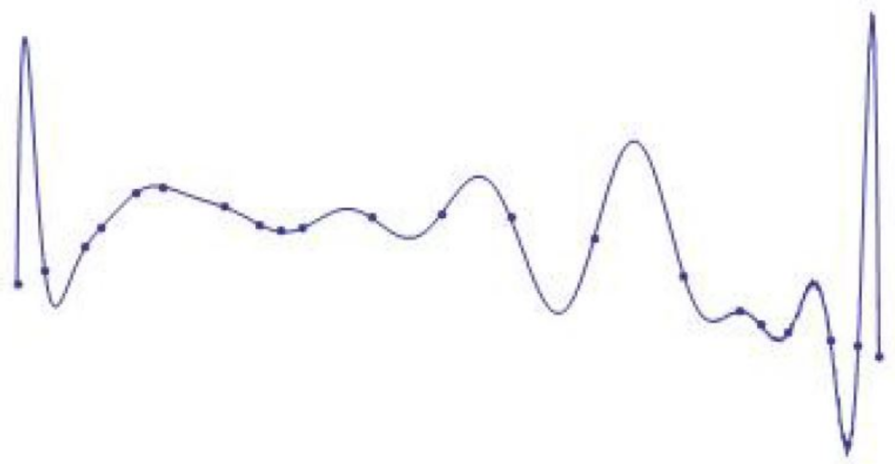
$$x(t) = (((64t - \tfrac{352}{3})t + 60)t - \tfrac{14}{3})t - 1$$
$$y(t) = (((-\tfrac{64}{3}t + 48)t - \tfrac{116}{3})t + 11)t$$

Interpolación polinómica

Perspectiva

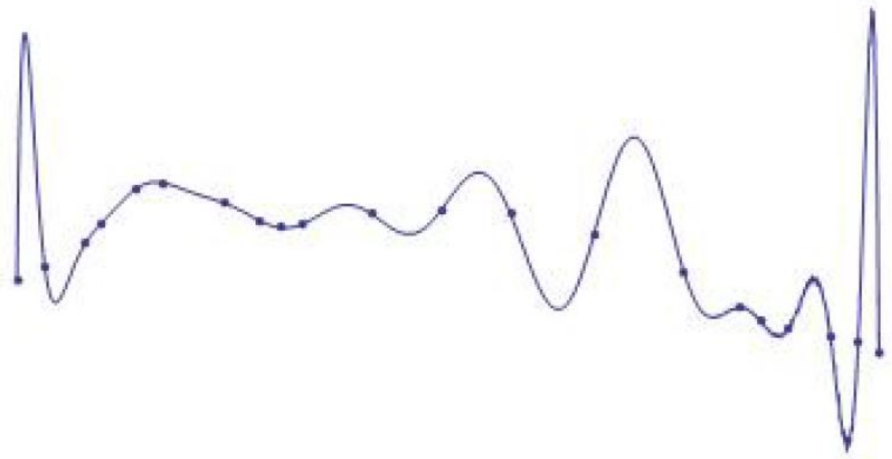
Problemas de usar un polinomio interpolador de grado n

- Computacionalmente costoso.



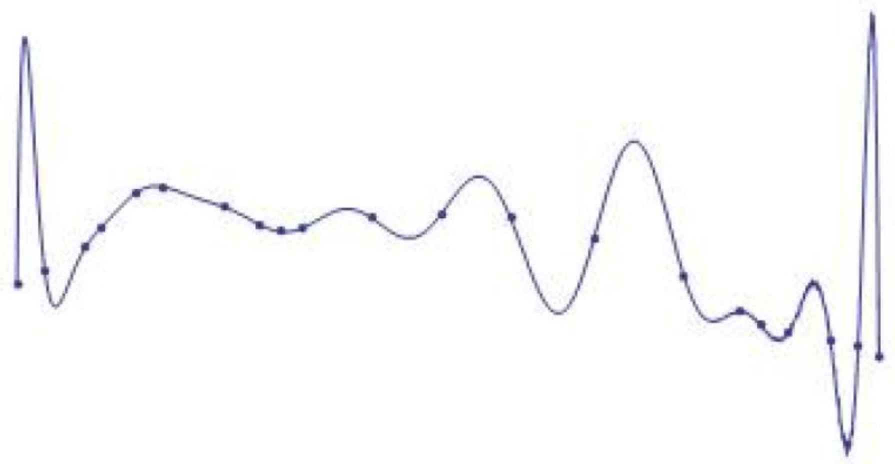
Problemas de usar un polinomio interpolador de grado n

- Computacionalmente costoso.
- Fenómeno de Runge.

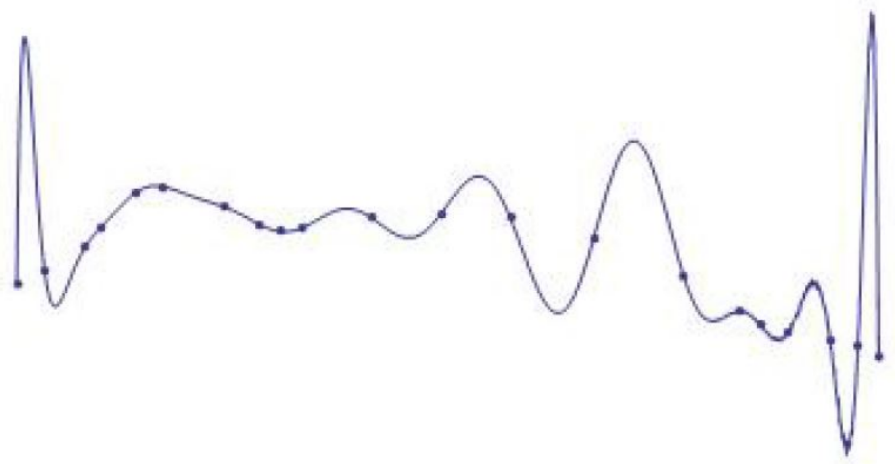


Problemas de usar un polinomio interpolador de grado n

- Computacionalmente costoso.
- Fenómeno de Runge.
- El grado alto del polinomio produce oscilaciones.

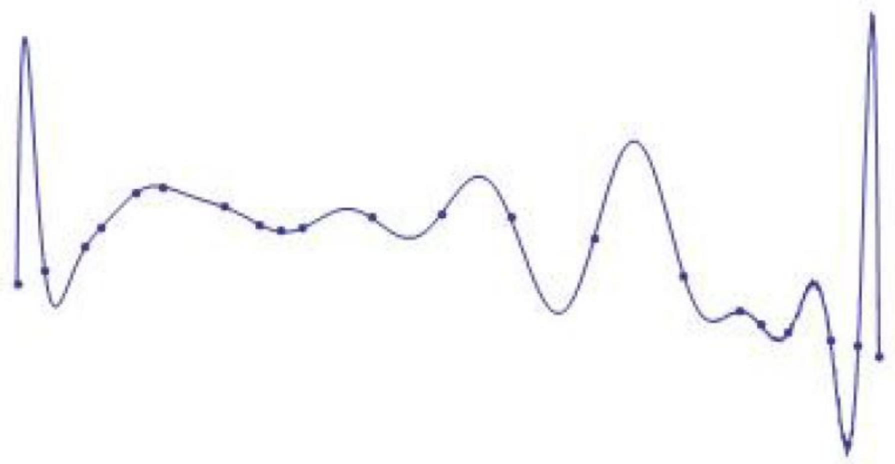


Problemas de usar un polinomio interpolador de grado n



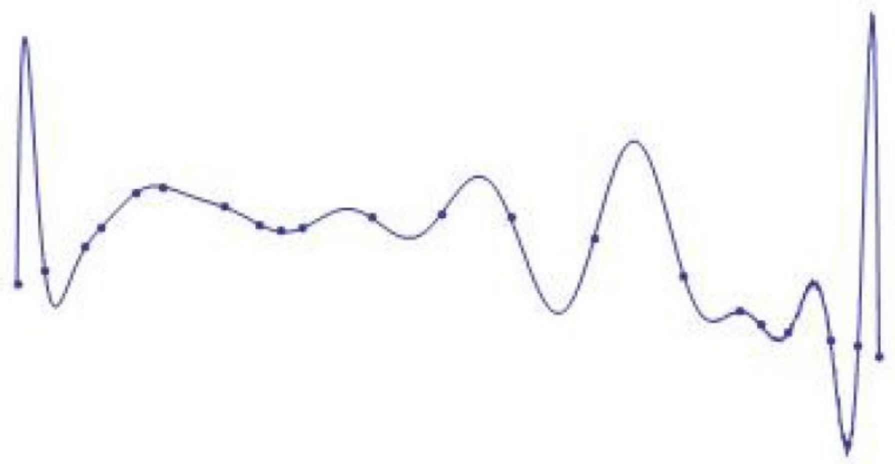
- Computacionalmente costoso.
- Fenómeno de Runge.
- El grado alto del polinomio produce oscilaciones.
- Puede estar mal condicionado: pequeñas variaciones en los puntos pueden producir grandes variaciones en el polinomio interpolador.

Problemas de usar un polinomio interpolador de grado n



- Computacionalmente costoso.
- Fenómeno de Runge.
- El grado alto del polinomio produce oscilaciones.
- Puede estar mal condicionado: pequeñas variaciones en los puntos pueden producir grandes variaciones en el polinomio interpolador.
- Los cambios no son locales: variaciones en un punto pueden producir variaciones en puntos lejanos.

Problemas de usar un polinomio interpolador de grado n



- Computacionalmente costoso.
- Fenómeno de Runge.
- El grado alto del polinomio produce oscilaciones.
- Puede estar mal condicionado: pequeñas variaciones en los puntos pueden producir grandes variaciones en el polinomio interpolador.
- Los cambios no son locales: variaciones en un punto pueden producir variaciones en puntos lejanos.
- Es difícil mejorar la curva interactivamente: lo único que se puede hacer es añadir puntos, lo cual no siempre mejora el error, o moverlos, lo cual puede dar lugar a mayores errores en puntos lejanos.

Ajuste de datos

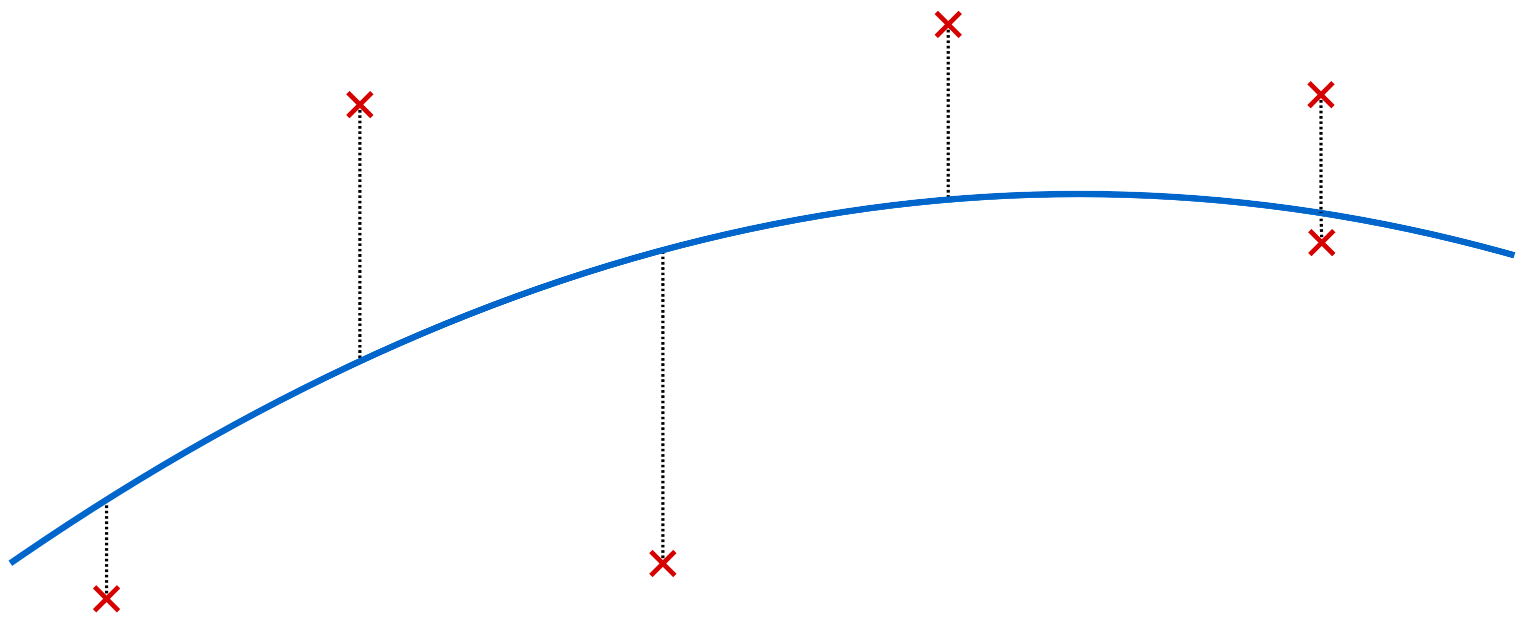
Mejor aproximación

Cuando en la tabla de valores para un mismo x_i tenemos varios valores de y_i, la interpolación mediante un polinomio no es posible, pero podemos construir una función que se ajuste lo mejor posible a los datos disponibles, sin que la curva pase por los puntos dados, sino que se "asemeje" lo más posible, por ejemplo, minimizando el error cuadrático (mínimos cuadrados).

Mejor aproximación

Cuando en la tabla de valores para un mismo x_i tenemos varios valores de y_i, la interpolación mediante un polinomio no es posible, pero podemos construir una función que se ajuste lo mejor posible a los datos disponibles, sin que la curva pase por los puntos dados, sino que se "asemeje" lo más posible, por ejemplo, minimizando el error cuadrático (mínimos cuadrados).

- La aproximación la realizamos con una función $f(x)$ que minimiza la suma de las distancias de los nodos a la curva.



$$SSE = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - y_k)^2$$

Guía de estudio

Guia de estudio

Libro *Càlcul numèric: teoria i pràctica* de M. Grau Sánchez y M. Noguera Batlle.

- Conceptos y ejercicios resueltos: Capítulo 2, apartados 2.1, 2.2.1, 2.2.3– 2.2.8.
- Problemas propuestos: 1, 2, 3, 5, 6, 16.

Libro *Cálculo numérico* de M. Grau Sánchez y M. Noguera Batlle.

- Conceptos y ejercicios resueltos: Capítulo 2, apartados 2.1, 2.2.1, 2.2.3– 2.2.8.
- Problemas propuestos: 1, 2, 3, 5, 6, 16.

Libro *Cálculo científico con MATLAB y Octave* de A. Quarteroni y F. Saleri.

- Conceptos y ejercicios: Capítulo 3, apartados 3.1.1 y 3.1.2.
- Problemas y prácticas propuestos: 3.3, 3.4.