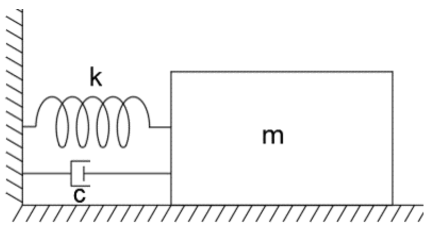
==

Práctica 12. EDOs

Contenidos

Problema 1. Métodos de Euler en el sistema masa-resorte-amortiguador (MRA)

Consideramos el clásico sistema físico con una masa m conectada a un muelle o resorte con constante elástica k y un amortiguador con coeficiente de amortiguamiento c:



La ecuación del movimiento de la masa (sin rozamiento) viene dada por $m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$.

Es común escribir esta ecuación usando otras parámetros que ayudan mejor a entender el comportamiento del sistema, concretamente la frecuencia natural $\omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y el factor de amortiguación $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$. Con ellos, la ecuación del movimiento es:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_N\dot{x} + \omega_N^2 x = 0.$$

Para este ejercicio asumimos $\omega_N = 3\pi$ y $\zeta = 0.3$.

- Transformar a mano la ecuación del movimiento en un sistema de EDOs de primer orden. Escribir una función anónima para la ecuación del movimiento de orden dos y usar la función `odeToVectorField()` para comprobar los resultados. Observar que el sistema de EDOs es lineal y autónomo. Escribir la matriz del sistema A.

dy1 = y_2

dy2 =

$$-\frac{3125302502557517\, y_1}{35184372088832} - \frac{9\,\pi\, y_2}{5}$$

sist =

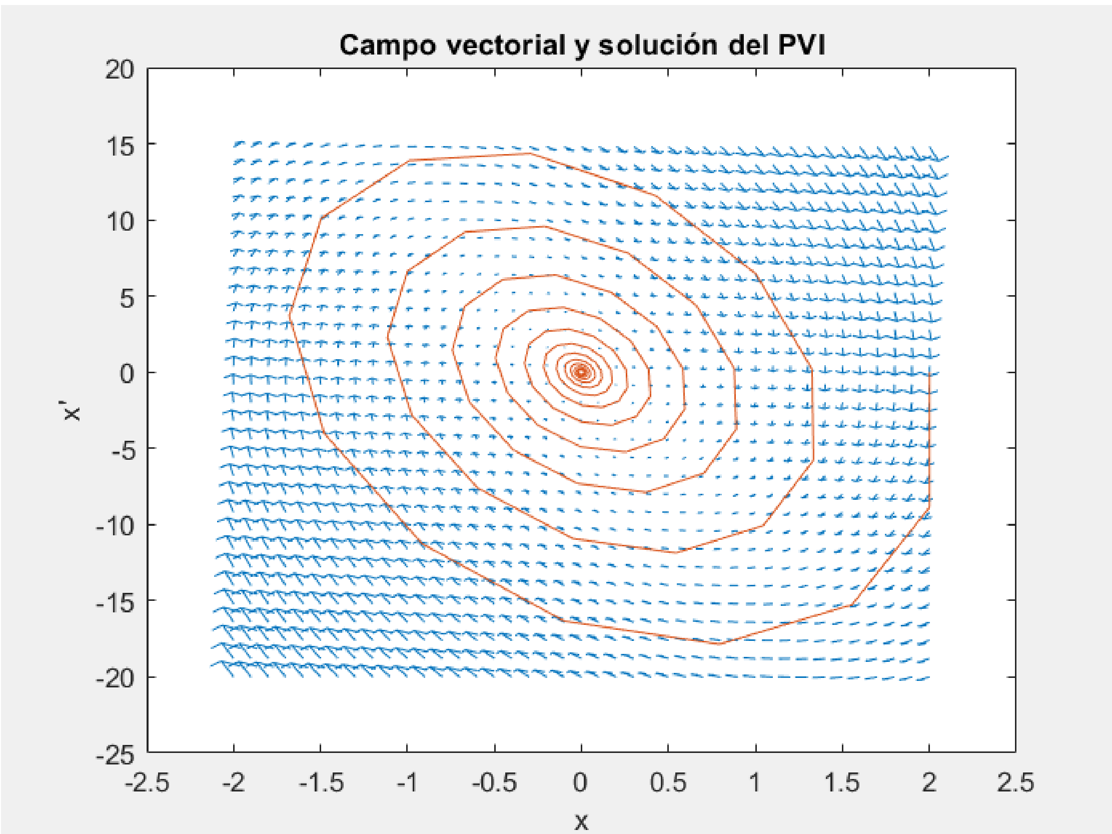
$$\begin{pmatrix} Y_2 \\ -\frac{9\,\pi\,Y_2}{5} - \frac{3125302502557517\,Y_1}{35184372088832} \end{pmatrix}$$

```
A = 2×2
                    0   1.000000000000000
 -88.826439609804225  -5.654866776461628
```

- Dibujar el campo vectorial resultante con la función `quiver()` de MATLAB. Para ello grear una malla `meshgrid(-2:0.1:2, -20:1.2:15)`.

Consideramos el PVI con condiciones iniciales $x(0) = 2$ y $\dot{x}(0) = 0$. Buscamos la trayectora en el intervalo de tiempo $[0, 8]$.

- Integrar (encontrar la trayectoria) usando la fórmula de Euler explícita con $h = 0.05$ (crear esta variable h y trabajar con ella de manera que se pueda modificar). Dibujar la posición x frente a la velocidad $\dot{x}$ de la solución sobre el campo vectorial.




```
yEe = 161×2
   2.000000000000000                   0
   2.000000000000000  -8.882643960980422
   1.555867801950979 -15.253779510856560
   0.793178826408151 -17.850984829827741
  -0.099370415083236 -16.326500333948022
  -0.915695431780638 -11.268955109511793
  -1.479143187256227  -4.015834868199187
  -1.679934930666187   3.688966840451030
```

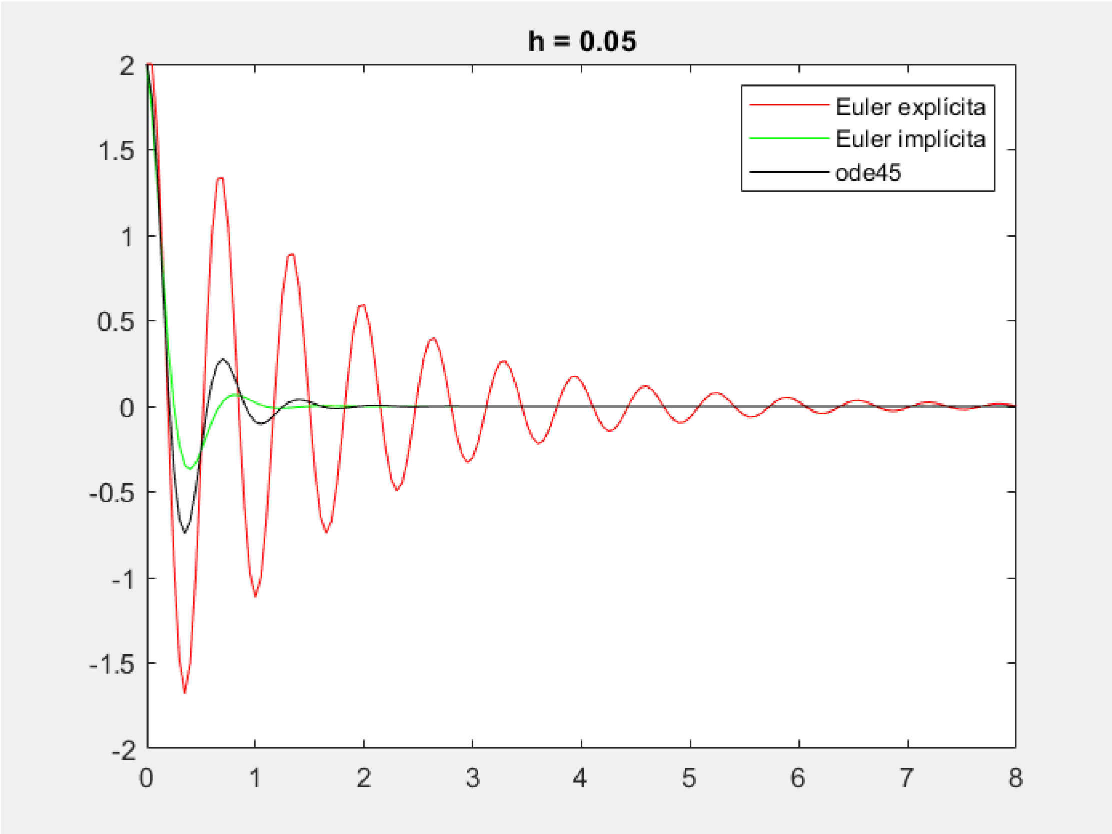
```
  -1.495486588643635  10.107067972535306
  -0.990133190016870  13.891299285940141
        ⋮
```

- Hacer una representación gráfica de x en el tiempo en rojo.

- Encontrar la solución ahora usando la fórmula de Euler implícita (con la misma h). Añadir a la gráfica anterior esta solución en verde.

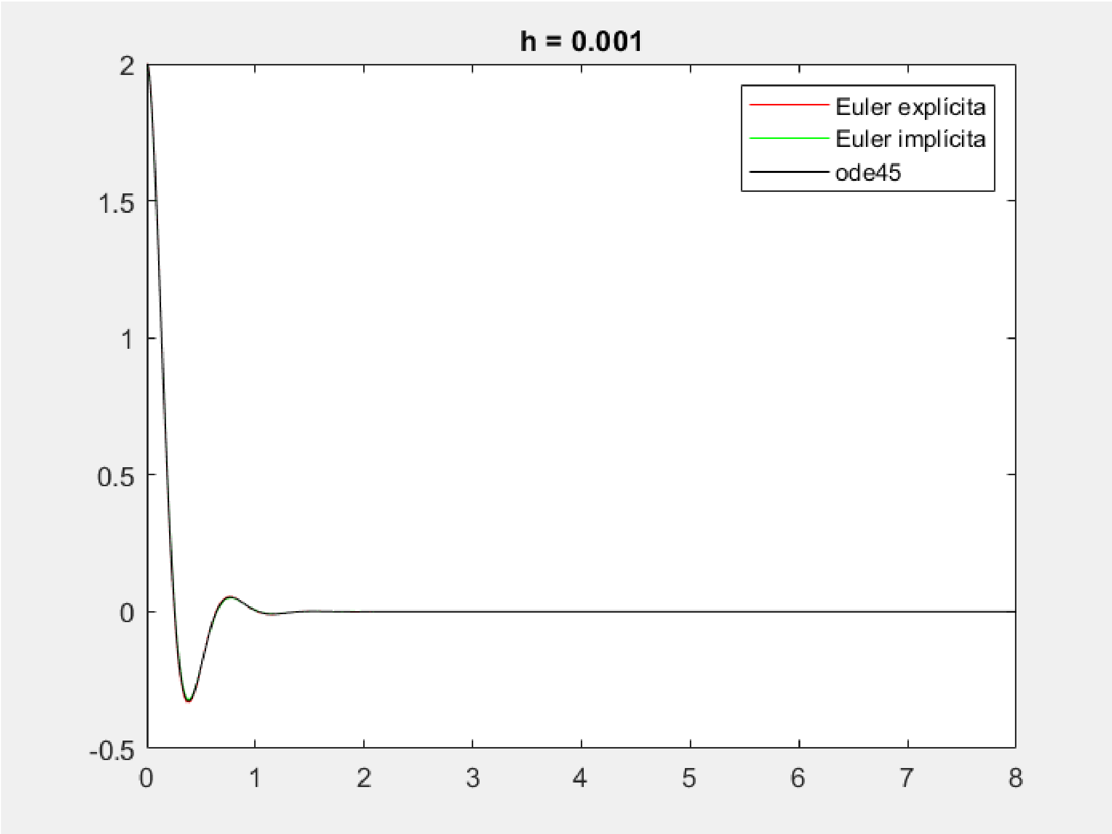
- Encontrar la (mejor) solución que da Matlab con la función `ode45()` y añadira a la gráfica en negro.

```
t = 161×1
                   0
   0.050000000000000
   0.100000000000000
   0.150000000000000
   0.200000000000000
   0.250000000000000
   0.300000000000000
   0.350000000000000
   0.400000000000000
   0.450000000000000
        ⋮

yMatlab = 161×2
   2.000000000000000                   0
   1.800756113850447  -7.456332700348387
   1.309084128679579 -11.656036302938004
   0.689414963923974 -12.608477985830817
   0.092237720801198 -10.933989821531695
  -0.375864383775181  -7.594158967395527
  -0.657003639409723  -3.636892152317186
  -0.744280974351968   0.036384917323358
  -0.668644989567461   2.797821230172334
  -0.484847399079850   4.347473677372724
        ⋮
```

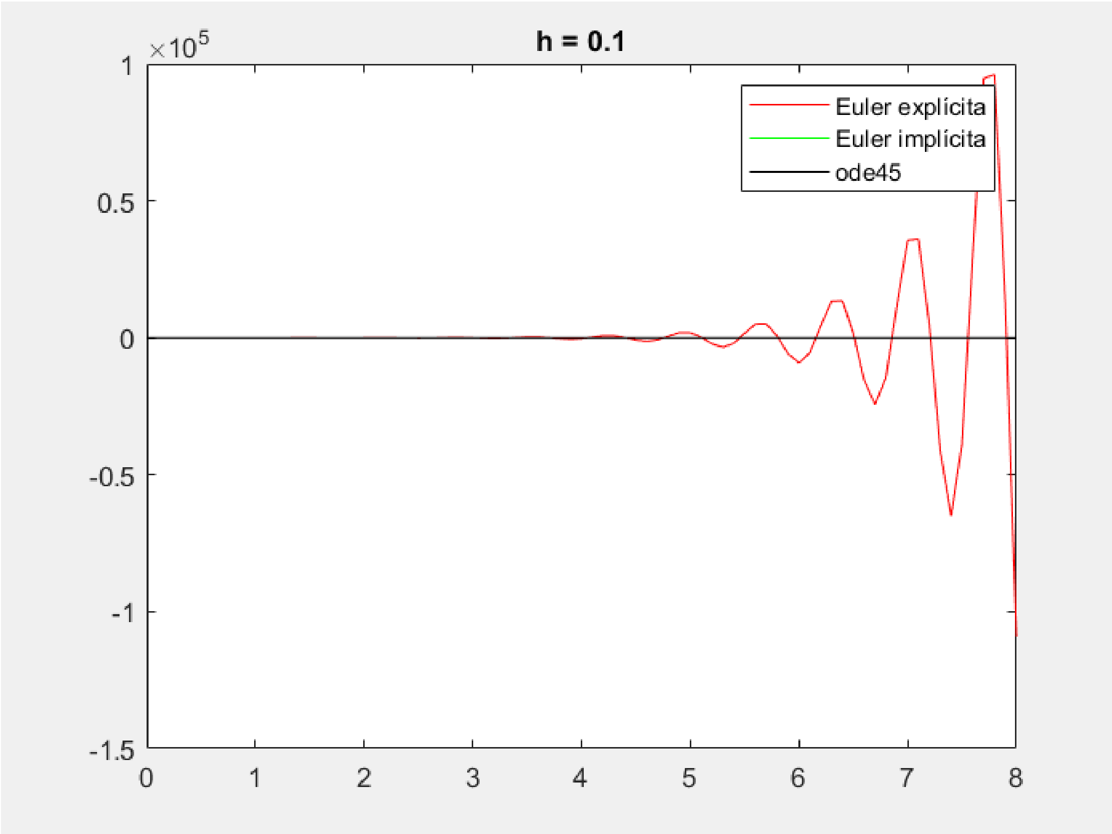


- Observar qué sucede cuando cambiamos $h = 0.001$ y $h = 0.1$. ¿Qué está pasando?

```
t = 8001×1
                    0
   0.001000000000000
   0.002000000000000
   0.003000000000000
   0.004000000000000
   0.005000000000000
   0.006000000000000
   0.007000000000000
   0.008000000000000
   0.009000000000000
      ⋮

yMatlab = 8001×2
   2.000000000000000                    0
   1.999911452614610  -0.176815715924840
   1.999646926615425  -0.351957178977873
   1.999208096232548  -0.525424611200507
   1.998596635316273  -0.697218379754263
   1.997814213856452  -0.867338966011855
   1.996862493472547  -1.035786926395154
   1.995743151932308  -1.202563109167100
   1.994457866566530  -1.367668505776249
   1.993008312255121  -1.531104232927553
      ⋮
```




```
t = 81×1
                  0
   0.100000000000000
   0.200000000000000
   0.300000000000000
   0.400000000000000
   0.500000000000000
   0.600000000000000
   0.700000000000000
   0.800000000000000
   0.900000000000000
      ⋮

yMatlab = 81×2
   2.000000000000000                   0
   1.309084128679579 -11.656036302938004
   0.092237720801198 -10.933989821531695
  -0.657003639409723  -3.636892152317186
  -0.668644989567461   2.797821230172334
  -0.254048753931051   4.690295242387287
   0.141368677866737   2.811096690064144
   0.276960138973625  -0.026371070990964
   0.179543042856906  -1.621555228079014
   0.011125680526126  -1.505998861074785
      ⋮
```



Problema 2. Método de Runge-Kutta RK4

Implementar el método RK4 para una EDO $\dot{y} = f(t, y)$. La función debe tomar como argumentos:

- la función f,
- el valor inicial $y(t_0)$,
- el paso h para el método,
- el intervalo de integración $[t_0, t_{max}]$

Y debe devolver la solución discretizada (trayectoria).

Consideramos los siguientes PVIs:

- $y' = -y + t + 1, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$,
- $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$,
- $y' = \cos(2t) + sin(3t), \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$.

Para cada uno de ellos calculamos la solución con $t \in [0, 1]$ usando tres métodos:

1. La implementación realizada de `RK4`.
2. La función `ode45` de MATLAB.

3. La solución analítica con la función `dsolve` de MATLAB o con las soluciones analíticas siguienetes, respectivamente:

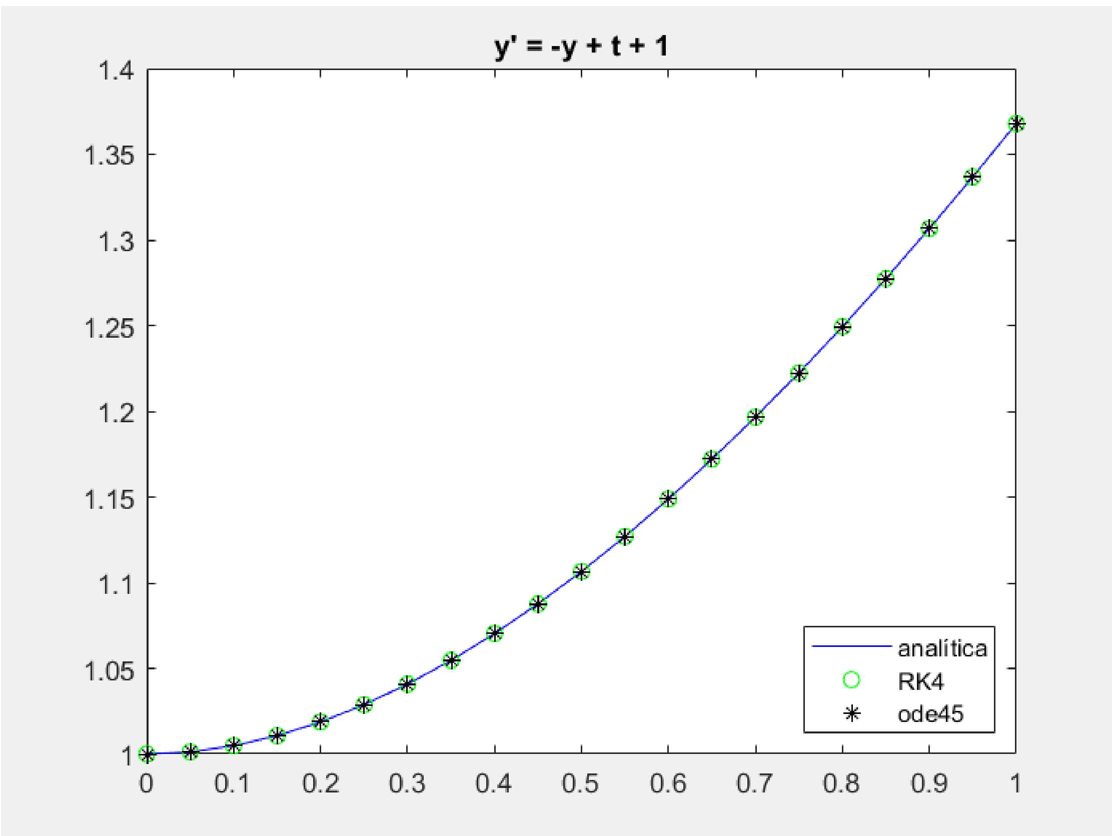
$$y(t) = e^{-t} + t\,,$$

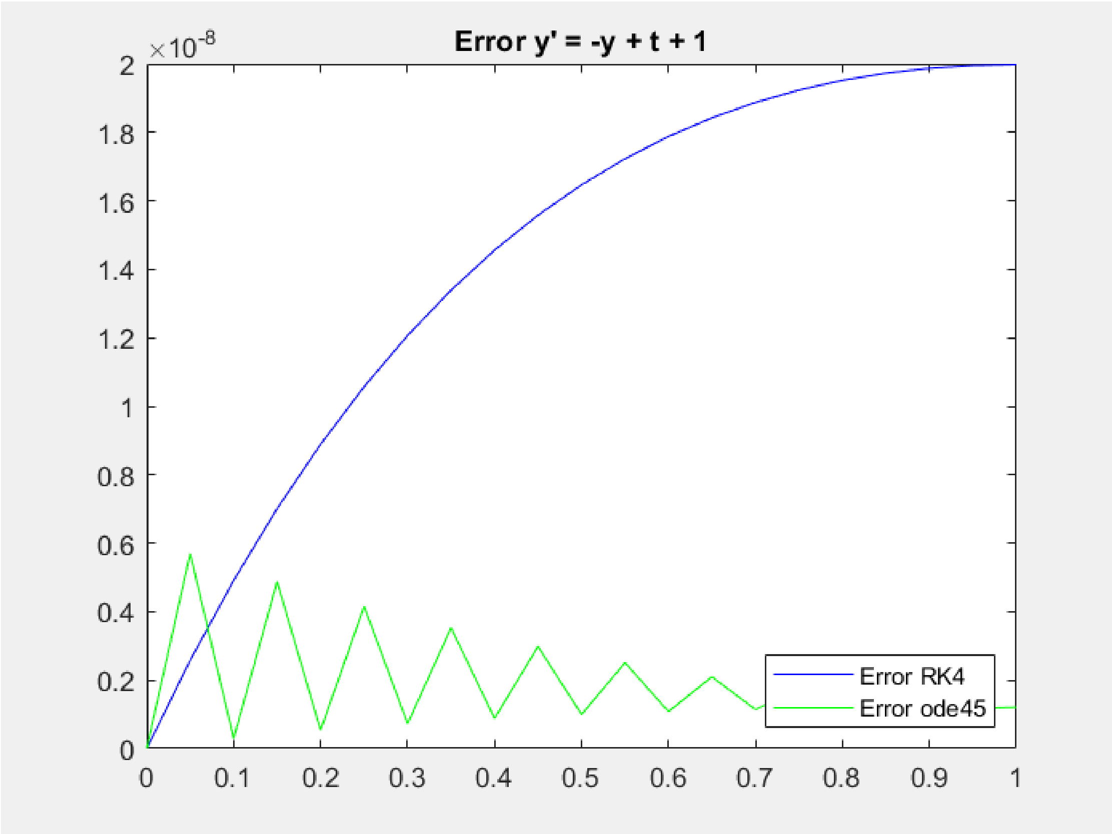
$$y(t) = \frac{1}{5} t e^{3t} - \frac{1}{25} e^{3t} + \frac{1}{25} e^{-2t}\,,$$

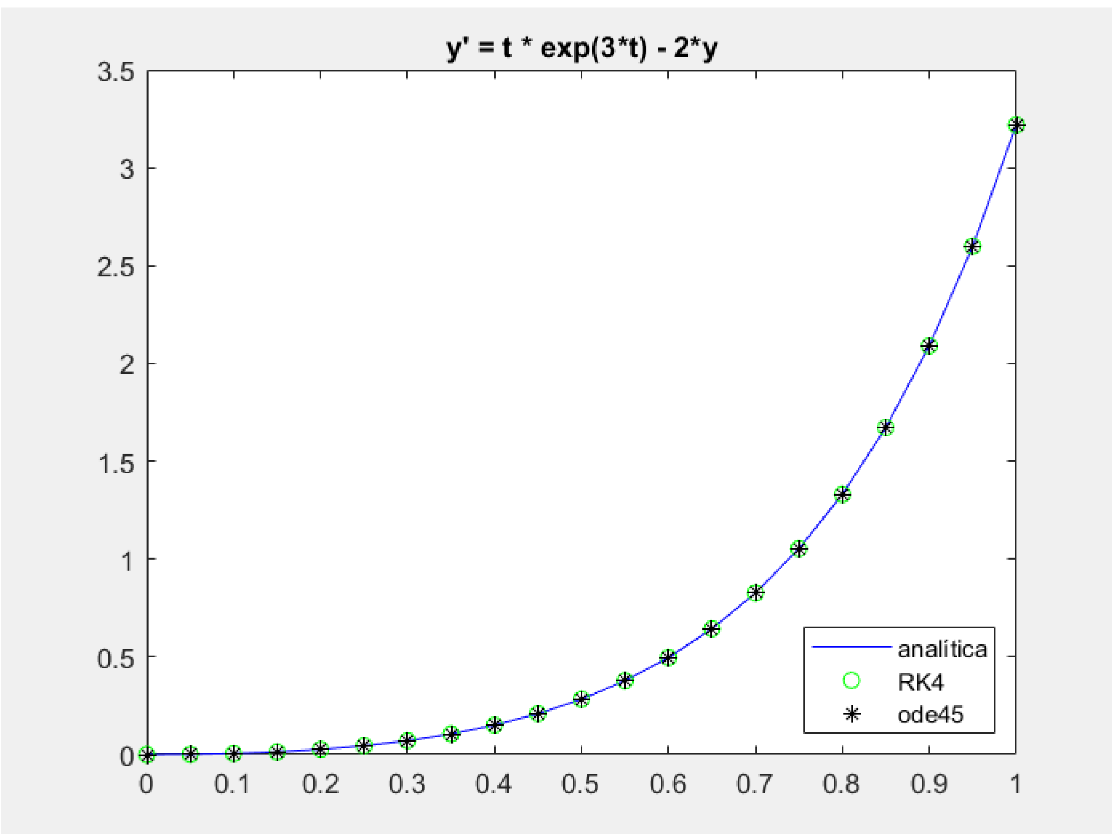
$$y(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) - \frac{1}{3}\cos(3t) + \frac{4}{3}.$$

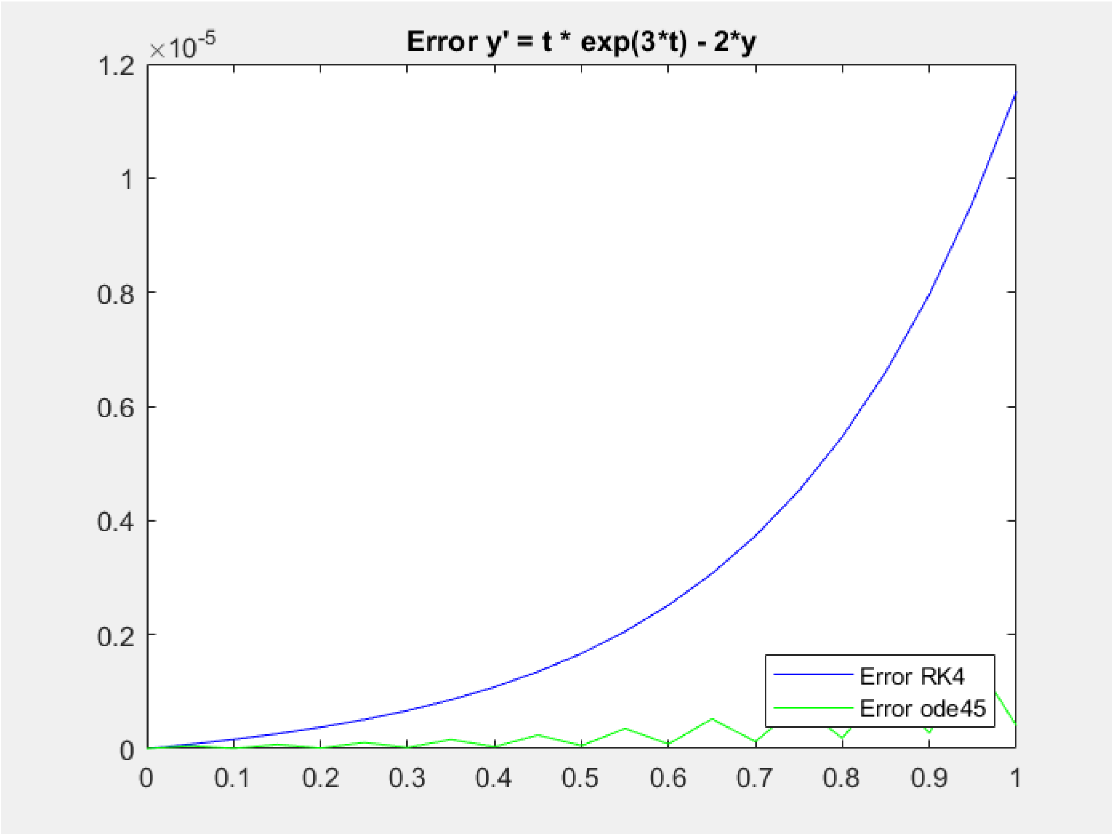
Representar gráficamente la solución analítica (continua) y las soluciones con `RK4` y `ode45` con asteriscos de distintos colores.

Para comparar más a fondo los métodos, calcular el error absoluto entre las soluciones obtenidas por `RK4` y `ode45` y la solución analítica. Hacer un gráfico que muestre los errores de cada una de las tres fórmulas.

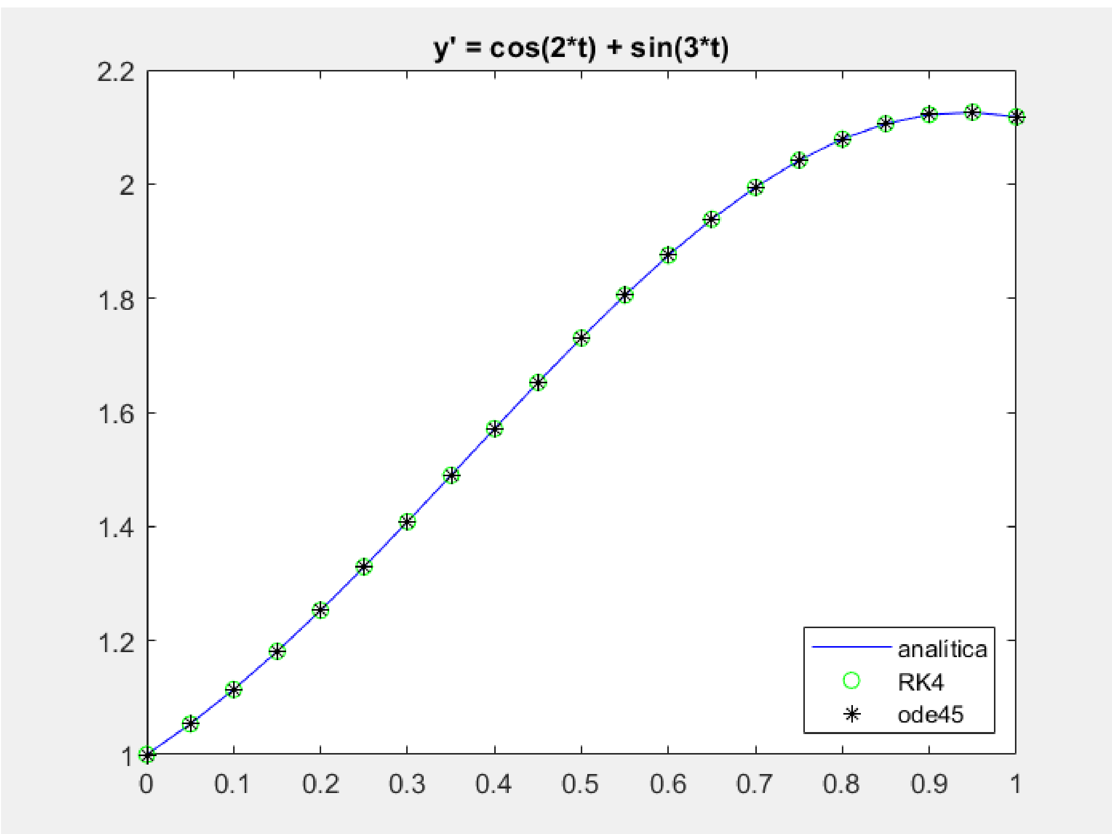



Error y' = -y + t + 1
×10^-8
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Error RK4
Error ode45

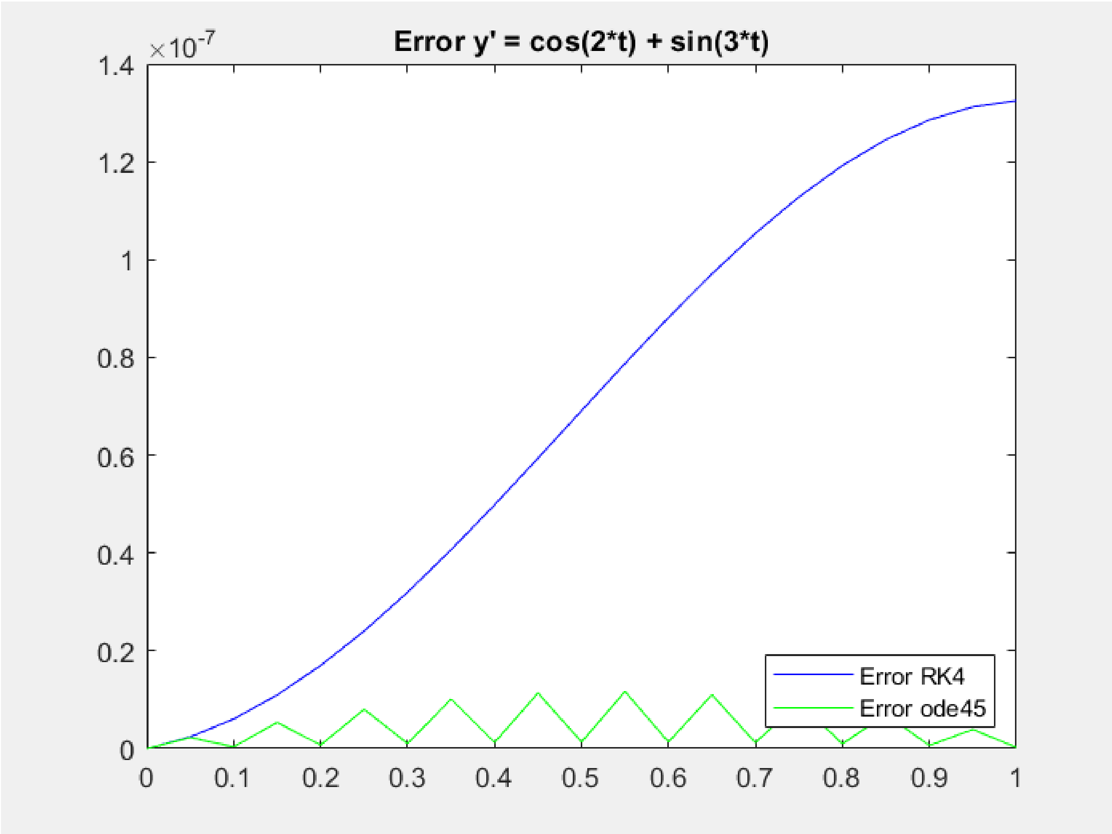

y' = t * exp(3*t) - 2*y
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
analítica
RK4
ode45



Error y' = t * exp(3*t) - 2*y
×10^-5
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Error RK4
Error ode45



y' = cos(2*t) + sin(3*t)
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
analítica
RK4
ode45



Funciones internas

`Documento preparado por I. Parada, 22 de mayo de 2024`