

Práctica 10. Derivación numérica

Contenidos

Ejercicio 1. Fórmula forward	1
Ejercicio 2. Fórmula centrada	2
Ejercicio 3. Extrapolación de Richardson.....	4
Ejercicio 4. Derivación espectral y derivada segunda.....	4
Funciones internas.....	6

Ejercicio 1. Fórmula forward $f'(x)$

Calcular la derivada de $f(x) = \ln(x)$ en $x = 3$ usando la fórmula forward.

- Empezar por $x = 3.5$ y a cada paso dividir entre dos la distancia a 3. Hacer 50 iteraciones y producir una tabla que muestre estas distancias, los resultados, el error absoluto en cada iteración y una estimación del error absoluto sin tener en cuenta los errores de redondeo.
- Dar una cota de la derivada segunda $|f''(x)|$ en el intervalo estudiado. Predecir, dada la precisión con la que se trabaja, una estimación del valor de la distancia que minimiza el error total que se comete. Dar por tanto la mejor estimación de $f'(2)$ y comparar con el resultado correcto.

i	h = 1/2 ⁱ	f'(3) aprox	error absoluto	error estimado
1	0.5	0.308301359654517	0.0250319736788163	0.0277777777777778
2	0.25	0.320170830694146	0.0131625026391869	0.0138888888888889
3	0.125	0.326575956162042	0.00675737717129127	0.00694444444444444
4	0.0625	0.329908595243772	0.00342473808956117	0.00347222222222222
5	0.03125	0.331609185137495	0.00172414819583838	0.00173611111111111
6	0.015625	0.332468280134663	0.000865053198670751	0.00086805555555556
7	0.0078125	0.332900057607361	0.000433275725972238	0.00043402777777778
8	0.00390625	0.333116507640852	0.000216825692480882	0.000217013888888889
9	0.001953125	0.333224873460949	0.000108459872384004	0.00010850694444444
10	0.0009765625	0.333279091631994	5.42417013396634e-05	5.42534722222222e-05
11	0.00048828125	0.333306209540751	2.71237925820178e-05	2.71267361111111e-05
12	0.000244140625	0.333319770701564	1.35626317690485e-05	1.35633680555556e-05
13	0.0001220703125	0.333326551834034	6.78149929927985e-06	6.78168402777778e-06
14	6.103515625e-05	0.333329942539422	3.39079391170616e-06	3.39084201388889e-06
15	3.0517578125e-05	0.333331637928495	1.69540483813124e-06	1.69542100694444e-06
16	1.52587890625e-05	0.333332485635765	8.4769756841796e-07	8.47710503472222e-07
17	7.62939453125e-06	0.333332909503952	4.2382938164609e-07	4.23855251736111e-07
18	3.814697265625e-06	0.333333121438045	2.11895288260155e-07	2.11927625868056e-07
19	1.9073486328125e-06	0.333333227434196	1.05899137736731e-07	1.05963812934028e-07
20	9.5367431640625e-07	0.333333280403167	5.2930166305476e-08	5.29819064670139e-08
21	4.76837158203125e-07	0.33333330694586	2.63874729289348e-08	2.64909532335069e-08
22	2.38418579101562e-07	0.333333320915699	1.24176343097027e-08	1.32454766167535e-08
23	1.19209289550781e-07	0.33333332836628	4.96705371277884e-09	6.62273830837674e-09
24	5.96046447753906e-08	0.33333333209157	1.24176341431692e-09	3.31136915418837e-09
25	2.98023223876953e-08	0.33333333581686	2.48352688414499e-09	1.65568457709418e-09
26	1.49011611938477e-08	0.333333343267441	9.93410748106882e-09	8.27842288547092e-10
27	7.45058059692383e-09	0.333333343267441	9.93410748106882e-09	4.13921144273546e-10
28	3.72529029846191e-09	0.333333373069763	3.97364298687641e-08	2.06960572136773e-10
29	1.86264514923096e-09	0.333333373069763	3.97364298687641e-08	1.03480286068386e-10
30	9.31322574615479e-10	0.333333492279053	1.58945719419545e-07	5.17401430341932e-11

31	4.65661287307739e-10	0.333333492279053	1.58945719419545e-07	2.58700715170966e-11
32	2.3283064365387e-10	0.333333969116211	6.3578287762267e-07	1.29350357585483e-11
33	1.16415321826935e-10	0.333333969116211	6.3578287762267e-07	6.46751787927416e-12
34	5.82076609134674e-11	0.333335876464844	2.54313151043517e-06	3.23375893963708e-12
35	2.91038304567337e-11	0.333335876464844	2.54313151043517e-06	1.61687946981854e-12
36	1.45519152283669e-11	0.333343505859375	1.01725260416852e-05	8.08439734909269e-13
37	7.27595761418343e-12	0.333343505859375	1.01725260416852e-05	4.04219867454635e-13
38	3.63797880709171e-12	0.3333740234375	4.06901041666852e-05	2.02109933727317e-13
39	1.81898940354586e-12	0.3333740234375	4.06901041666852e-05	1.01054966863659e-13
40	9.09494701772928e-13	0.33349609375	0.000162760416666685	5.05274834318293e-14
41	4.54747350886464e-13	0.33349609375	0.000162760416666685	2.52637417159147e-14
42	2.27373675443232e-13	0.333984375	0.000651041666666685	1.26318708579573e-14
43	1.13686837721616e-13	0.333984375	0.000651041666666685	6.31593542897867e-15
44	5.6843418860808e-14	0.3359375	0.00260416666666669	3.15796771448933e-15
45	2.8421709430404e-14	0.3359375	0.00260416666666669	1.57898385724467e-15
46	1.4210854715202e-14	0.34375	0.0104166666666667	7.89491928622333e-16
47	7.105427357601e-15	0.34375	0.0104166666666667	3.94745964311167e-16
48	3.5527136788005e-15	0.375	0.0416666666666667	1.97372982155583e-16
49	1.77635683940025e-15	0.375	0.0416666666666667	9.86864910777917e-17
50	8.88178419700125e-16	0.5	0.166666666666667	4.93432455388958e-17

```

cotad2f =
    0.111111111111111

h_opt =
    8.940696716308594e-08

fder_forward =
    0.333333328366280

resultado_correcto =
    0.333333333333333

error =
    4.967053712778835e-09

```

Ejercicio 2. Fórmula centrada $f'(x)$

Calcular la derivada de la función del apartado anterior $f(x) = \ln(x)$ en $x = 3$ usando esta vez la fórmula centrada.

- Empezar por una distancia $h = 0.5$ y a cada paso dividir entre dos la distancia a 3. Hacer 50 iteraciones y producir una tabla que muestre estas distancias, los resultados, el error absoluto en cada iteración y una estimación del error absoluto sin tener en cuenta los errores de redondeo.
- Predecir, dada la precisión con la que se trabaja, una estimación del valor de la distancia que minimiza el error total que se comete con una fórmula apropiada para la fórmula centrada. Con esta información, ¿cuál sería en este caso la mejor estimación de $f'(3)$? Calcular el error absoluto.
- *Pista: si el mínimo de una función derivable está en el interior de un intervalo, su derivada es 0 en ese punto. Se puede usar la función solve() de MATLAB si se quiere.*

```

resultado_correcto =
    0.333333333333333

```

i	h = 1/2 ⁱ	f''(3) aprox	error absoluto	error estimado
1	0.5	0.336472236621213	0.00313890328787964	0.00308641975308642
2	0.25	0.334108169326333	0.000774835992999268	0.000771604938271605
3	0.125	0.333526435756204	0.000193102422871128	0.000192901234567901

4	0.0625	0.333381571204544	4.82378712109433e-05	4.82253086419753e-05
5	0.03125	0.333345390445473	1.20571121395296e-05	1.20563271604938e-05
6	0.015625	0.333336347464183	3.01413084952129e-06	3.01408179012346e-06
7	0.0078125	0.333334086856851	7.535235179712e-07	7.53520447530864e-07
8	0.00390625	0.333333521713655	1.8838032173063e-07	1.88380111882716e-07
9	0.001953125	0.333333380428371	4.70950378139712e-08	4.7095027970679e-08
10	0.0009765625	0.333333345107008	1.17736742022423e-08	1.17737569926698e-08
11	0.00048828125	0.333333336276837	2.94350382956665e-09	2.94343924816744e-09
12	0.000244140625	0.333333334069266	7.35932814688312e-10	7.3585981204186e-10
13	0.0001220703125	0.333333333517658	1.84324278063031e-10	1.83964953010465e-10
14	6.103515625e-05	0.333333333379414	4.60810833935454e-11	4.59912382526162e-11
15	3.0517578125e-05	0.333333333343035	9.70129532262831e-12	1.14978095631541e-11
16	1.52587890625e-05	0.333333333335759	2.42533770844489e-12	2.87445239078851e-12
17	7.62939453125e-06	0.333333333343035	9.70129532262831e-12	7.18613097697128e-13
18	3.814697265625e-06	0.333333333343035	9.70129532262831e-12	1.79653274424282e-13
19	1.9073486328125e-06	0.333333333313931	1.94025351341054e-11	4.49133186060705e-14
20	9.5367431640625e-07	0.333333333255723	7.76101960475728e-11	1.12283296515176e-14
21	4.76837158203125e-07	0.333333333255723	7.76101960475728e-11	2.80708241287941e-15
22	2.38418579101562e-07	0.333333333488554	1.55220447606297e-10	7.01770603219852e-16
23	1.19209289550781e-07	0.333333333954215	6.20881734914036e-10	1.75442650804963e-16
24	5.96046447753906e-08	0.333333333954215	6.20881734914036e-10	4.38606627012407e-17
25	2.98023223876953e-08	0.33333333209157	1.24176341431692e-09	1.09651656753102e-17
26	1.49011611938477e-08	0.333333333581686	2.48352688414499e-09	2.74129141882755e-18
27	7.45058059692383e-09	0.33333332836628	4.96705371277884e-09	6.85322854706887e-19
28	3.72529029846191e-09	0.333333343267441	9.93410748106882e-09	1.71330713676722e-19
29	1.86264514923096e-09	0.333333313465118	1.98682149066265e-08	4.28326784191804e-20
30	9.31322574615479e-10	0.333333373069763	3.97364298687641e-08	1.07081696047951e-20
31	4.65661287307739e-10	0.333333253860474	7.94728596820171e-08	2.67704240119878e-21
32	2.3283064365387e-10	0.333333492279053	1.58945719419545e-07	6.69260600299694e-22
33	1.16415321826935e-10	0.333333015441895	3.1789143878358e-07	1.67315150074924e-22
34	5.82076609134674e-11	0.333333969116211	6.3578287762267e-07	4.18287875187309e-23
35	2.91038304567337e-11	0.333333061767578	1.27156575518983e-06	1.04571968796827e-23
36	1.45519152283669e-11	0.3333335876464844	2.54313151043517e-06	2.61429921992068e-24
37	7.27595761418343e-12	0.333328247070312	5.08626302081483e-06	6.5357480498017e-25
38	3.63797880709171e-12	0.333343505859375	1.01725260416852e-05	1.63393701245042e-25
39	1.81898940354586e-12	0.33331298828125	2.03450520833148e-05	4.08484253112606e-26
40	9.09494701772928e-13	0.3333740234375	4.06901041666852e-05	1.02121063278152e-26
41	4.54747350886464e-13	0.333251953125	8.13802083333148e-05	2.55302658195379e-27
42	2.27373675443232e-13	0.33349609375	0.000162760416666685	6.38256645488447e-28
43	1.13686837721616e-13	0.3330078125	0.000325520833333315	1.59564161372112e-28
44	5.6843418860808e-14	0.333984375	0.000651041666666685	3.9891040343028e-29
45	2.8421709430404e-14	0.33203125	0.001302083333333331	9.97276008575699e-30
46	1.4210854715202e-14	0.3359375	0.00260416666666669	2.49319002143925e-30
47	7.105427357601e-15	0.328125	0.005208333333333331	6.23297505359812e-31
48	3.5527136788005e-15	0.34375	0.0104166666666667	1.55824376339953e-31
49	1.77635683940025e-15	0.3125	0.0208333333333333	3.89560940849882e-32
50	8.88178419700125e-16	0.375	0.0416666666666667	9.73902352124706e-33

cotad3f =
0.074074074074074

h_opt =
2.782601387884250e-04

fder_centrada =
0.333333334289277

resultado_correcto =
0.333333333333333

error =
9.559438240991369e-10

Ejercicio 3. Extrapolación de Richardson $f'(x)$

Calcular la derivada de la función de los apartados anteriores $f(x) = \ln(x)$ en $x = 3$ usando esta vez extrapolación de Richardson para mejorar la convergencia de la fórmula centrada. Empezar por una distancia $h = 0.5$ y obtener una aproximación de orden $O(h^{32})$. Calcular el error absoluto.

```
dfx = 16x16
    0.336472236621213          0          0          0 ...
    0.334108169326333          0.333950564840007          0          0
    0.333526435756204          0.333487653518196          0.333480305719437          0
    0.333381571204544          0.333371913567767          0.333370076425697          0.333369644153957
    0.333345390445473          0.333342978394868          0.333342519106409          0.333342411038491
    0.333336347464183          0.333335744598764          0.333335629776603          0.333335602759623
    0.333334086856851          0.333333936149696          0.333333907444155          0.333333900689910
    0.333333521713655          0.333333484037442          0.333333476861057          0.333333475172496
    0.333333380428371          0.333333371009352          0.333333369215256          0.333333368793115
    0.333333345107008          0.333333342752250          0.333333342303725          0.333333342198189
    :
    :

fder_richardson =
    0.333333333335163

error =
    1.829869589187183e-12
```

Ejercicio 4. Derivación espectral y derivada segunda

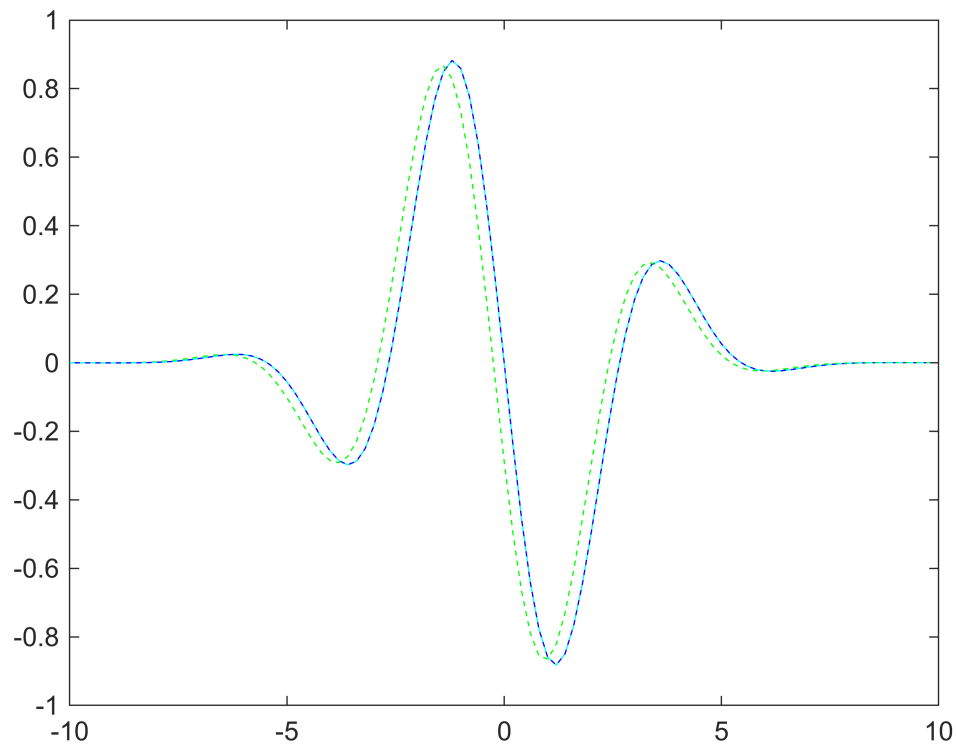
Queremos encontrar la primera y la segunda derivada de la función $f(x) = \cos(x) \cdot e^{-x^2/10}$ en el intervalo $[-10, 10]$.

- Aproximar $f'(x)$ en el intervalo $[-10, 10]$ usando diferencias forward con $h = 0.5$.
- Usar la transformada rápida de Fourier que da MATLAB (`fft()`) y una discretización con 100 puntos equiespaciados para aproximar $f'(x)$ en el intervalo $[-10, 10]$.
- Representar en azul la derivada calculada analíticamente, en verde con guiones la aproximación obtenida por diferencias forward y en cian con guiones la derivada obtenida por derivación espectral. Observar la diferencia.
- Aproximar $f''(x)$ en el intervalo $[-10, 10]$ usando diferencias centradas con $h = 0.5$.
- Usar la transformada rápida de Fourier que da MATLAB (`fft()`) y una discretización con 100 puntos equiespaciados para aproximar $f''(x)$ el intervalo $[-10, 10]$.
- Representar en rojo la derivada calculada analíticamente, en amarillo con guiones la aproximación obtenida por diferencias centradas y en magenta con guiones la derivada obtenida por derivación espectral. Observar la diferencia.

```
dfx =
    -x^2
    e^10 (5 sin(x) + x cos(x))
    5

df_forward = 1x100
    -0.000163857298937    -0.000222348226457    -0.000284258911761    -0.000337656518741 ...
```

```
dfFFT = 1×100
-0.000000000000000 -0.000186477120781 -0.000182592629807 -0.000285515586716 ...
```



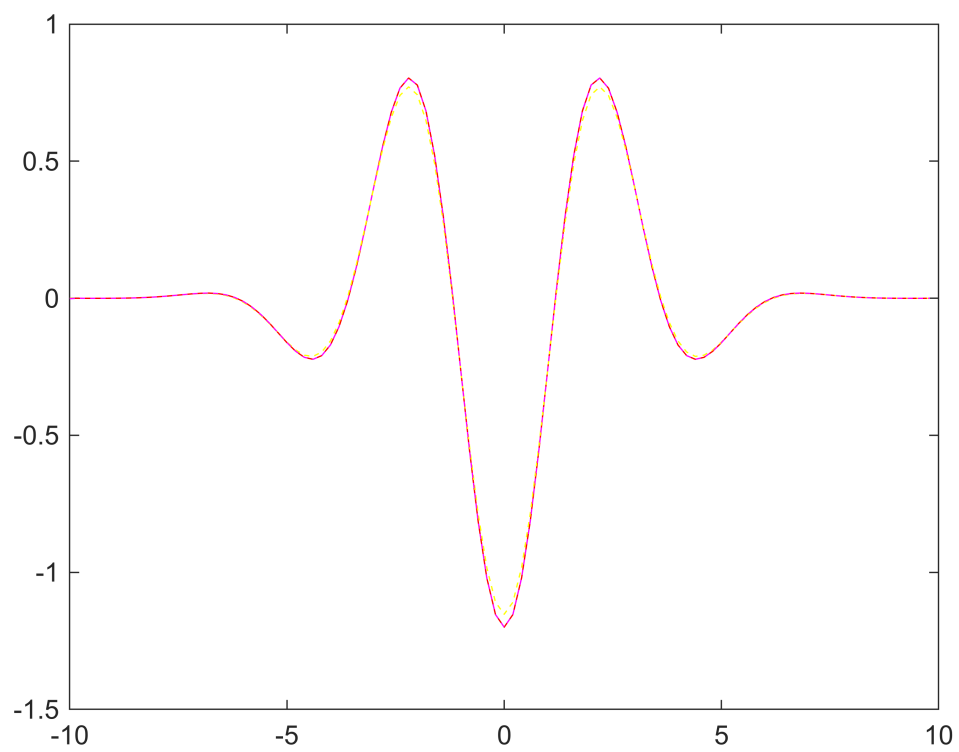
d2fx =

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{10}} (x^2 \cos(x) - 30 \cos(x) + 10 x \sin(x))}{25}$$

```
d2f_centrada = 1×100
-0.000206324163954 -0.000256931443144 -0.000292805445880 -0.000290909933721 ...
```

```
df2FFT = 1×100
-0.001613812444823 -0.000001876989256 -0.000406999013176 -0.000277000836395 ...
```

```
fder2 = 1×100
-0.000205456688655 -0.000262710672334 -0.000310014729920 -0.000325779912345 ...
```



Funciones internas

Documento preparado por I. Parada, 8 de mayo de 2024