===

Pràctica 3. Introducción al álgebra lineal numérica

Table of Contents

Matrices

Ejercicio 1. Álgebra lineal

Calcular el determinante, la transpuesta y la inversa de A. Probar a multiplicar la inversa por A por la izquierda y por la derecha y comparar con el resultado esperable. Calcular también los valores propios, los vectores propios y el radio espectral de la matriz A definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

```
A = 3×3
     1     2     1
    -2     7     3
     1    -1    10

ans = 
   114
ans = 3×3
     1    -2     1
     2     7    -1
     1     3    10
iA = 3×3
   0.640350877192982  -0.184210526315789  -0.008771929824561
   0.201754385964912   0.078947368421053  -0.043859649122807
  -0.043859649122807   0.026315789473684   0.096491228070175
AiA = 3×3
   1.000000000000000   0.000000000000000   0.000000000000000
   0.000000000000000   1.000000000000000                   0
  -0.000000000000000   0.000000000000000   1.000000000000000
iAA = 3×3
   1.000000000000000  -0.000000000000000   0.000000000000000
  -0.000000000000000   1.000000000000000                   0
                   0                   0   1.000000000000000

V = 3×3
  -0.919030257845083   0.346326907490038   0.243874364006417
  -0.388880012325729   0.920364115899649   0.673449920758499
   0.064464883298897   0.181624798176474   0.697847045426745
D = 3×3
```

```
   -1.776138908663436                   0                   0
                    0  -6.839433743778461                   0
                    0                   0  -9.384427347558100

rho =
   9.384427347558100
```

Ejercicio 2. Normas matriciales

Calcular las normas $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ y $||\cdot||_\infty$ de las siguientes matrices:

$a)\ \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{pmatrix}$

n1 = $\max(|a+1|+|a|,|a-1|+|a|)$

ni = $\max(|a+1|+|a|,|a-1|+|a|)$

n2 =

$$\sqrt{\max\left(2\,|a|\,\sqrt{|a|^2+1}+2\,|a|^2+1,\left|2\,|a|^2-2\,|a|\,\sqrt{|a|^2+1}+1\right|\right)}$$

nf = $\sqrt{|a-1|^2+|a+1|^2+2\,|a|^2}$

$b)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

```
A = 2×2
     0     1
    -2     0

n1 =
     2
ni =
     2
n2 =
     2
nf =
   2.236067977499790
```

Ejercicio 3. Norma p

Aproximar la norma $p=2$ matricial de una matriz 20×20 con números aleatorios uniformes en el intervalo [-2,2]. Para ello usar la definición y generar 1000 y 50000 vectores aleatorios. Comparar con la norma que da MATLAB. ¿Qué se observa?

Métodos directos

Documentación de MATLAB: Sistemas lineales - Systems of linear equations

MATLAB implementa métodos directos a través de los operadores de división de matrices `/` y `\`, así como funciones como `decomposition`, `lsqminnorm`, and `linsolve`. Verificar, cuando sea aplicable, que tu solución resuelve el sistema lineal $Ax-b$ mediante la verificación de que $||Ax-b||\leq 10^{-10}$

Ejercicio 4. Regla de Cramer

Escribir una funcion y resolver el siguiente sistema lineal utilizando la regla de Cramer.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1\,, \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0\,, \\ 2x_1 + 5x_2 \quad &= 0\,. \end{aligned}$$

```
x = 3×1
  -0.416666666666667
   0.166666666666667
   1.166666666666667

isgood = logical
   1
```

Ejercicio 5. Sistemas triangulares superiores

Escribir una función en MATLAB para encontrar la solución de un sistema lineal triangular superior mediante el método de sustitución hacia atrás. Resolver los siguientes sistemas y comparar la solución con la solución que proporciona MATLAB.

Juego de pruebas

a) $$\left\{\begin{aligned} 3x - 2y + z - t &= 8 \\ 4y - z + 2t &= -3 \\ 2z + 3t &= 11 \\ 5t &= 15 \end{aligned}\right.$$

```
b = 4×1
     8
    -3
    11
    15

x = 4×1
     2
    -2
     1
     3

xMatlab = 4×1
     2
    -2
     1
     3

norm_dif =
     0

isgood = logical
   1
```

b) $U = (u_{ij})_{15\times 15}$ y $b = (b_i)_{15\times 1}$ con $u_{ij} = \begin{cases} \cos(ij) & i \leq j\,, \\ 0 & i > j\,, \end{cases}$ y $b_i = \tan(i)$.

```
x = 15×1
10^4 ×
  -3.592206364964321
```

```
  -8.428354043861166
  -3.270368865664464
  -1.610905505542223
  -1.111322341835487
  -4.334472333346712
  -0.993609813652240
  -0.330174342206650
   0.271154729737024
   0.516544848629924
       ⋮

xMatlab = 15×1
10⁴ ×
  -3.592206364964331
  -8.428354043861169
  -3.270368865664466
  -1.610905505542224
  -1.111322341835487
  -4.334472333346713
  -0.993609813652239
  -0.330174342206650
   0.271154729737024
   0.516544848629924
       ⋮

norm_dif =
     1.090227729280795e-10

isgood = logical
   1
```

Ejercicio 6. Eliminación gaussiana [para la próxima sesión]

Generar un script en MATLAB para encontrar la solución de un sistema lineal $Ax = b$ utilizando el método de eliminación gaussiana.

Juego de pruebas

$$e)\quad A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

```
x = 4×1
    0.4324
    0.2162
    0.8108
    4.1892

isgood = logical
   1
```

$$f)\quad A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{pmatrix}.$$

```
x = 4×1
    2.8973
    8.6486
    4.2324
   43.5676

isgood = logical
   1
```

$g)$ $A = (a_{ij})_{51\times 51}$ y $b = (b_i)_{51\times 1}$ con $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^i & i = j\,, \\ \\ 2 & 1 \le |i-j| \le 2\,, \end{cases}$ y $b_i = i\,.$

```
x = 51×1
   39.9999
   22.4633
   -1.9634
  -48.2681
  -13.6767
   19.3109
   26.5823
   28.7071
  -17.5501
  -38.6966
      ⋮

isgood = logical
   1
```

Documento preparado por Irene Parada, 28 de febrero de 2024