

Resumen de inferencia estadística

Luis Gerardo Guzmán Rojas

9/28/2020

Intervalo de confianza para la media poblacional con desviación típica conocida

Sea X una variable aleatoria con media poblacional μ desconocida y desviación típica poblacional σ conocida (a la práctica, usualmente, estimada en un experimento anterior)

Sea X_1, \dots, X_n una m.a.s de X , con una media muestral \bar{X}

Queremos determinar un intervalo de confianza para μ con un cierto nivel de confianza (digamos, 97.5%, $\alpha = 0.025$): un intervalo (A,B) tal que

$$P(A < \mu < B) = 1 - \alpha = 0.975$$

Bajo estas condiciones, sabemos que

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

sigue una distribución normal estandar.

Entonces el intervalo de confianza estará dado por

$$P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

sustituyendo $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma\sqrt{n}}$

$$P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma\sqrt{n}} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$$P(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

Entonces, el intervalo de confianza estará definido por

$$(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

donde $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el $(1 - \frac{\alpha}{2})$ cuantil de la normal estándar Z (es decir, $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = F_Z^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$, o $P(Z \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$).

Lo que nos dice este intervalo es que el $1 - \alpha\%$ de las veces que tomemos una muestra de tamaño n de X , el verdadero valor de μ caéa dentro de este intervalo.

Amplitud del intervalo de confianza

La amplitud A del intervalo de confianza a un nivel $100 * (1 - \alpha)\%$ de confianza será:

$$A = \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - (\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 2 \cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Error máximo cometido.

El error máximo, al nivel de confianza $100 \cdot (1 - \alpha)\%$, que cometemos al estimar μ por \bar{X} es la mitad de la amplitud,

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Tamaño n mínimo

El tamaño n mínimo de la muestra para asegurar que el intervalo de confianza μ al nivel de confianza $(1 - \alpha)$ tenga una amplitud prefijada máxima A_0 o un error máximo $\frac{A_0}{2}$

Usando que la amplitud máxima tiene que ser A_0 tenemos que se tiene que verificar $A_0 \geq 2 \cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Despejando n de la expresión anterior, tendremos que el tamaño de la muestra mínimo será:

$$n \geq (2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})^2$$

Intervalos de confianza para el parámetro μ de una población normal con σ desconocida

Recordemos que para hallar el intervalo de confianza para el parámetro μ de una población normal, la clave era la variable aleatoria $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$. El problema es que ahora no la podemos usar al no conocer σ .

Lo que haremos será sustituir la desviación típica poblacional σ por la desviación típica muestral \tilde{S}_X y nos quedará: $\frac{\bar{X}-\mu}{\tilde{S}_X/\sqrt{n}}$, donde \bar{X} es la media muestral y n, el tamaño de la muestra.

La distribución de la variable anterior $\frac{\bar{X}-\mu}{\tilde{S}_X/\sqrt{n}}$, no será normal sino t de Student con $n - 1$ grados de libertad como nos dice el teorema siguiente:

Teorema: Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$. Sea X_1, \dots, X_n una m.a.s. de X , con media \bar{X} y desviación típica muestral \tilde{S}_X . En estas condiciones, la v.a. $t = \frac{\bar{X}-\mu}{\tilde{S}_X/\sqrt{n}}$, sigue una distribución t de Student con $n - 1$ grados de libertad, t_{n-1} .

Consideraremos la situación siguiente: * X una v.a. normal con μ y σ desconocidas. * X_1, \dots, X_n una m.a.s. de X de tamaño n con media \bar{X} y varianza muestral \tilde{S}_X

Intervalo de confianza para el parámetro μ . En estas condiciones, un intervalo de confianza del $(1 - \alpha)\%$ para el parámetro μ de una población normal con σ desconocida y n cualquiera es

$$(\bar{X} - t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\tilde{S}_X}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\tilde{S}_X}{\sqrt{n}})$$

Si n es grande ($n \geq 40$)

En estas condiciones, si n es grande $t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \approx Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ usando el **Teorema central del límite** $\frac{\bar{X}-\mu}{\tilde{S}_X/\sqrt{n}} \approx N(0, 1)$ podemos aproximar el intervalo de confianza anterior mediante la expresión siguiente:

$$(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\tilde{S}_X}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\tilde{S}_X}{\sqrt{n}})$$

La amplitud de

$$(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\tilde{S}_X}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\tilde{S}_X}{\sqrt{n}})$$

es $A = 2z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\tilde{S}_X}{\sqrt{n}}$.

Tamaño de la muestra (n)

Para determinar n (grande) que denomina como máximo una amplitud A prefijada, necesitamos \tilde{S}_X , que depende de la muestra.

Soluciones: * Si sabemos la desviación típica poblacional σ , la utilizaremos en lugar de \tilde{S}_X . * Si hemos tomado una muestra previa (piloto), emplearemos la desviación típica de esta **muestra piloto** para estimar σ .

Estimaremos que el tamaño mínimo n de una m.a.s. de X que de un intervalo de confianza I.C. para μ de una población normal con σ desconocida de nivel de confianza $(1 - \alpha)$ y amplitud máxima A_0 es

$$n = \left\lceil \left(2z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\tilde{S}_{(piloto)}}{\sqrt{n}} \right)^2 \right\rceil$$

Método exacto de Clopper-Pearson para el intervalo de confianza para la proporción \hat{p}

Consideraremos lo siguiente: * X una variable Bernoulli con p desconocido. * X_1, \dots, X_n una m.a.s. de X , con número de éxitos x y por tanto la frecuencia relativa de éxitos es $\hat{p}_x = \frac{x}{n}$.

En este caso, la distribución de la variable $Y =$ “número de éxitos en la muestra” es binomial de parámetros n y p , Y es $B(n, p)$

Definición. Un intervalo de confianza p_0, p_1 del $(1 - \alpha)100\%$ nivel de confianza para p de una población X de Bernoulli se obtiene encontrando el p_0 más grande y el p_1 más pequeño tales que

$$\sum_{k=x}^n \binom{n}{k} \cdot p_0^k \cdot (1 - p_0)^{n-k} \leq \frac{\alpha}{2}, \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} \cdot p_0^k \cdot (1 - p_0)^{n-k} \leq \frac{\alpha}{2}$$

Para hallar un intervalo de confianza para la proporción poblacional en R según el método de Clopper-Pearson, hay que usar la función **binom.exact** del paquete **epitools**. *binom.exact(x, n, conf.level)*. donde x y n representan, respectivamente, el número de éxitos y el tamaño de la muestra respectivamente y *conf.level* es el $(1 - \alpha)$, el nivel de confianza en tanto por uno.

Caso del tamaño $n \geq 40$

- X una variable Bernoulli con p desconocido.
- X_1, \dots, X_n una m.a.s. de X , con n grande y frecuencia relativa de éxitos \hat{p}_x .

En estas condiciones por el **Teorema Central del Límite**,

$$Z = \frac{\hat{p}_X - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \approx N(0, 1)$$

Por lo tanto

$$P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{p}_X - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

El problema es que no conocemos p ...

La literatura plantea entre otras soluciones: * El **método de Wilson**. * La solución de **Laplace** (1812).

Método de Wilson

Definición. En estas condiciones, un intervalo de confianza del $(1-\alpha) \cdot \%100$ I.C. para p (donde $\hat{q}_X = 1-\hat{p}_X$) es:

$$\left(\frac{\hat{p}_X + \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2n} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_X \hat{q}_X}{n} + \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{4n^2}}}{1 + \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{n}}, \frac{\hat{p}_X + \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2n} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_X \hat{q}_X}{n} + \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{4n^2}}}{1 + \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{n}} \right)$$

Para hallar un intervalo de confianza para la proporción poblacional en R según el metodo de Wilson, hay que usar la función **binom.wilson** del paquete **epitools**. `binom.wilson(x,n,conf.level)`. donde x y n representan, respectivamente, el número de éxitos y el tamaño de la muestra respectivamente y `conf.level` es el $(1-\alpha)$, el nivel de confianza en tanto por uno.

Fórmula de Laplace

Supongamos que la muestra aleatoria simple es considerablemente más grande que la usada en el método de Wilson y que ,además, la proporción muestral de éxitos \hat{p}_X esta alejada de 0 y 1. * O sea, $n \geq 100$ y que $n\hat{p}_X \geq 10$ y $n(1-\hat{p}_X) \geq 10$. * En este caso, podemos usar la fórmula de Laplace:

$$\hat{p}_X \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Fórmula de Laplace. Amplitud

La **amplitud** del intervalo de confianza usando la fórmula de Laplace es

$$A = 2z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

No podemos determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza tenga como máximo una cierta amplitud sin conocer \hat{p}_X .

Para esto vamos a considerar que estamos en el peor de los casos. O sea, usando $\hat{p}_X \in [0, 1]$, nos planteamos hallar el máximo de la expresión $\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)$ que aparece en la fórmula de la amplitud.

El máximo de la función anterior, para $\hat{p}_X \in [0, 1]$ se alcanza en $\hat{p}_X = \frac{1}{2}$ y dicho máximo vale $\frac{1}{4}$.

En resumen, calcularemos n para obtener una amplitud máxima A_0 suponiendo el peor de los casos ($\hat{p}_X = .05$)

$$A_0 \geq 2z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{(.5)^2}{n}} = \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n} \implies n \geq \left\lceil \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{A_0^2} \right\rceil$$

Intervalo de confianza para la varianza de una población normal

Consideremos la siguiente situación:

Consideramos una X una v.a. normal con μ y σ desconocidas. Sea X_1, \dots, X_n una m.a.s. de X y varianza muestral \tilde{S}_X^2 .

En estas condiciones tenemos el siguiente:

Teorema. La variable aleatoria $\frac{n-1\tilde{S}_X^2}{\sigma^2}$ se distribuye según una distribución χ_{n-1}^2

Teorema. En las condiciones anteriores, un intervalo de confianza del $(1 - \alpha) \cdot 100$ % para la varianza σ^2 de la población X es

$$\frac{n-1\tilde{S}_X^2}{\chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2}, \frac{n-1\tilde{S}_X^2}{\chi_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2}$$

donde $\chi_{\nu, q}^2$ es el q-cuantil de la distribución χ_{ν}^2

Para hallar un intervalo de confianza para la varianza poblacional en R hay que usar la función **varTest** del paquete EnvStats: **varTest(X, conf.level)\$conf.int** donde X es el vector que contiene la muestra y conf.level el nivel de confianza, que por defecto es igual a 0.95.

Bootstrap o remuestreo

Cuando no se satisfacen las condiciones teóricas que garantizan que el intervalo obtenido contiene el 95 % de las veces el parámetro poblacional deseado, podemos recurrir a un **método no paramétrico**. El más utilizado es el bootstrap, que básicamente consiste en:

1. **Remuestrear la muestra:** tomar muchas muestras aleatorias simples de la muestra de la que disponemos, cada una de ellas del mismo tamaño que la muestra original (pero simples, es decir, con reposición).
2. Calcular el estimador sobre cada una de estas submuestras.
3. Organizar los resultados en un vector.
4. Usar este vector para calcular un intervalo de confianza.

Bootstrap: método de los percentiles

La manera más sencilla de llevar a cabo el cálculo final del intervalo de confianza es el llamado **método de los percentiles**, en el que se toman como extremos del intervalo de confianza del $(1 - \alpha) \cdot 100$ % los cuantiles de orden $\frac{\alpha}{2}$ y $\frac{1-\alpha}{2}$ del vector de estimadores.

Ejemplo. Usaremos la función replicate de R para calcular las varianzas de 1000 muestras “remuestradas” de nuestra muestra original:

```
data("iris")
set.seed(1000)
flores.elegidas = sample(1:150, 60, replace=TRUE)
X=replicate(1000, var(sample(iris[flores.elegidas,]$Petal.Length, replace=TRUE)))
```

A continuación hallamos el intervalo de confianza al 95 % ($1 - \alpha = 0.95$) calculando los cuantiles del método: (cuantiles de orden $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ y $\frac{1-\alpha}{2} = 0.975$)

```
alpha = 0.05
IC.boot=c(quantile(X,alpha/2),quantile(X,1-alpha/2))
round(IC.boot,2)
```

```
## 2.5% 97.5%
## 2.41 3.49
```

Para aplicar el método de los percentiles en R, podemos usar la función **boot** del paquete boot: **boot(X,estadístico,R)**

donde: * *X* es el vector que forma la muestra de la que disponemos * *R* es el número de muestras que queremos extraer de la muestra original. * El **estadístico** es la función que calcula el estadístico deseado de la submuestra, y tiene que tener dos parámetros: el primero representa la muestra original *X* y el segundo representa el vector de índices de una m.a.s. de *X*.

Ejemplo anterior Vamos a aplicar la función boot al ejemplo anterior definiendo primero el estadístico a usar que sería la varianza en nuestro caso.

```
library(boot)
var.boot=function(X,indices){var(X[indices])}
simulación=boot(iris[flores.elegidas,]$Petal.Length,var.boot,1000)
```

El intervalo de confianza viene dado por la función boot.ci:

```
boot.ci(simulación)
```

```
## Warning in boot.ci(simulación): bootstrap variances needed for studentized
## intervals
```

```
## BOOTSTRAP CONFIDENCE INTERVAL CALCULATIONS
## Based on 1000 bootstrap replicates
##
## CALL :
## boot.ci(boot.out = simulación)
##
## Intervals :
## Level      Normal          Basic
## 95%   ( 2.533,  3.583 )   ( 2.533,  3.597 )
##
## Level      Percentile      BCa
## 95%   ( 2.415,  3.479 )   ( 2.527,  3.540 )
## Calculations and Intervals on Original Scale
```

Guía rápida

- **t.test(X, conf.level=...)\$conf.int** calcula el intervalo de confianza del $\text{conf.level} \times 100$ % para la media poblacional usando la fórmula basada en la *t* de Student aplicada a la muestra *X*.
- **binom.exact(x,n,conf.level=...)** del paquete epitools, calcula el intervalo de confianza del $\text{conf.level} \times 100$ % para la proporción poblacional aplicando el método de Clopper-Pearson a una muestra de tamaño *n* con *x* éxitos.

- **binom.wilson(x,n,conf.level=...)** del paquete epitools, calcula el intervalo de confianza del $\text{conf.level} \times 100$ % para la proporción poblacional aplicando el método de Wilson a una muestra de tamaño n con x éxitos.
- **binom.approx(x,n,conf.level=...)** del paquete epitools, calcula el intervalo de confianza del $\text{conf.level} \times 100$ % para la proporción poblacional aplicando la fórmula de Laplace a una muestra de tamaño n con x éxitos.
- **varTest(X,conf.level=...)\$conf.int** del paquete EnvStats, calcula el intervalo de confianza del $\text{conf.level} \times 100$ % para la varianza poblacional usando la fórmula basada en la khi cuadrado aplicada a la muestra X .
- **boot(X,E,R)** del paquete boot, lleva a cabo una simulación bootstrap, tomando R submuestras del vector X y calculando sobre ellas el estadístico representado por la función E .
- **boot.ci** del paquete boot, aplicado al resultado de una función boot, calcula diversos intervalos de confianza a partir del resultado de la simulación efectuada con boot. El nivel de confianza se especifica con el parámetro conf.

Contrastes de hipótesis paramétricos

Para que la estadística inferencial sea útil no solo necesitamos estimar un valor sino que además tendremos que tomar una decisión apoyada en los datos (muestras) que acepte o rechace alguna afirmación relativa al valor de un parámetro.

En un **contraste de hipótesis**, se contrastan dos hipótesis alternativas: la hipótesis nula H_0 y la hipótesis alternativa H_1 .

- La hipótesis alternativa H_1 es de la que buscamos evidencia.
- La hipótesis nula H_0 es la que rechazaremos si obtenemos evidencia de la hipótesis alternativa.

Si no obtenemos evidencia a favor de H_1 , no podemos rechazar H_0 (diremos que aceptamos H_0 , pero es un abuso de lenguaje).

Los contrastes de hipótesis

Definición. Un contraste de hipótesis

$$\begin{cases} H_0 : \text{hipótesis nula} \\ H_1 : \text{hipótesis alternativa} \end{cases}$$

Consiste en plantear dos hipótesis: * Hipótesis nula H_0 : es la hipótesis que “por defecto” aceptamos como verdadera, y que rechazamos si hay pruebas en contra, * Hipótesis alternativa H_1 : es la hipótesis contra la que contrastamos la hipótesis nula y que aceptamos cuando rechazamos la nula, y generar una regla de decisión para rechazar o no la hipótesis nula a partir de la información contenida en una muestra.

En un juicio, tenemos que declarar a un acusado inocente o culpable. O sea, se plantea el contraste siguiente:

$$\begin{cases} H_0 : \text{El acusado es inocente} \\ H_1 : \text{El acusado es culpable} \end{cases}$$

Las pruebas serían los elementos de la muestra.

Si el jurado encuentra pruebas suficientemente incriminatorias, declara culpable al acusado (rechaza H_0 en favor de H_1).

En caso contrario, si no las encuentra suficientemente incriminatorias, le declara no culpable (no rechaza H_0).

Considerar no culpable \neq declarar inocente.

Las pruebas tienen que aportar evidencia de H_1 , lo que nos permitirá rechazar H_0 . Es imposible encontrar evidencias de que μ sea igual a un cierto valor μ_0 . En cambio, sí que se puede hallar evidencias de que $\mu < \mu_0$, o de que $\mu > \mu_0$, o que $\mu \neq \mu_0$.

En este contexto: H_1 se define con $>$, $<$, o \neq . H_0 se define con $=$, \leq , o \geq .

H_1 es la hipótesis de la que podemos hallar pruebas incriminatorias, H_0 la que estamos dispuestos a aceptar si no hay pruebas en contra.

Tipos de hipótesis alternativas

- **Hipótesis unilateral** (one-sided, también de una cola, one-tailed): $H: \theta > \theta_0$ o $H: \theta < \theta_0$.
- **Hipótesis bilateral** (two-sided, también de dos colas, two-tailed): $H: \theta \neq \theta_0$.

Los tests suelen tomar el nombre de la hipótesis alternativa: test unilateral, test de dos colas, etc.

Tipos de errores

La tabla siguiente resume los 4 casos que se pueden dar dependiendo de la decisión tomada:

Decisión/Realidad	H_0 cierta	H_0 falsa
Aceptar H_0	Decisión correcta Probabilidad= $1 - \alpha$	Error Tipo II Probabilidad= β
Rechazar H_0	Error Tipo I Probabilidad= α	Decisión correcta Probabilidad= $1 - \beta$

- **Error de Tipo I:** rechazar H_0 cuando es cierta. La probabilidad de cometerlo es:

$$P(\text{Error Tipo I}) = P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

donde α es el nivel de significación del contraste.

- **Error de Tipo II:** aceptar H_0 cuando es falsa. La probabilidad de cometerlo es:

$$P(\text{Error Tipo II}) = P(\text{Aceptar } H_0 | H_0 \text{ falsa}) = \beta$$

donde, $1 - \beta = P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ falsa})$ es la potencia de prueba.

En un juicio, se declara un acusado inocente o culpable.

- El **Error de Tipo I** sería declarar culpable a un inocente.
- El **Error de Tipo II** sería declarar no culpable a un culpable.

Es más grave desde el punto de vista ético cometer un error tipo I ya que es peor castigar a un inocente que perdonar a un culpable. Por tanto, conviene minimizarlo.

En el desastre natural, damos la alerta si μ se acerca a cierto valor μ_0 .

- El **Error de Tipo I** sería no dar la alarma cuando el desastre natural ocurre (muertes varias).
- El **Error de Tipo II** sería dar la alarma a pesar de que no haya desastre natural (falsa alarma).

Lo más conveniente es encontrar una regla de rechazo de H_0 que tenga poca probabilidad de error de tipo I, α . Pero también querríamos minimizar la probabilidad de error de tipo II, β .

Observación: cuando hacemos disminuir α , suele aumentar β .

¿Qué se suele hacer?

- Encontrar una regla de decisión para a un α máximo fijado.
- Después, si es posible, controlar la tamaño n de la muestra para minimizar β .

Terminología

En un contraste de hipótesis, tenemos los siguientes conceptos:

- **Estadístico de contraste:** es una variable aleatoria función de la muestra que nos permite definir una regla de rechazo de H_0 .
- **Nivel de significación α :** la probabilidad de error de tipo I.
- **Región crítica o de rechazo:** zona o región de números reales donde se verifica que si el estadístico de contraste pertenece a la región crítica, entonces rechazamos H_0 .
- **Región de aceptación:** zona o región complementaria de la región crítica.
- **Intervalo de confianza del $(1 - \alpha) \cdot 100$ %:** intervalo de confianza para el parámetro poblacional del contraste. Es equivalente afirmar que el estadístico de contraste pertenece a la región de aceptación que afirmar que el parámetro del contraste pertenece al intervalo de confianza del contraste.

Contrastes de hipótesis para el parámetro μ de una variable normal con σ conocida

Sea X una variable aleatoria $N(\mu, \sigma)$ con μ desconocida y σ conocida.

Sea X_1, \dots, X_n una m.a.s. de X de tamaño n .

Nos planteamos el contraste siguiente:

$$\begin{cases} H_0 : & \mu = \mu_0 \\ H_1 : & \mu > \mu_0 \end{cases}$$

De cara a hallar la región de rechazo, pensemos que tenemos que rechazar H_0 en favor de H_1 si X es “bastante más grande” que μ_0 .

Si H_0 es verdadera,

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Entonces, la regla consistirá en rechazar H_0 si el estadístico de contraste Z es mayor que un cierto umbral, que determinaremos con α , el nivel de significación del contraste o el error tipo I.

De cara a hallar la región de rechazo, queremos que se cumpla lo siguiente:

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ cierta}) = P(Z > \text{umbral}) \\ \implies 1 - \alpha &= P(Z \leq \alpha) \implies \text{umbral} = z_{1-\alpha}\end{aligned}$$

Por tanto, para que el **nivel de significación** del contraste sea *alpha*, la regla de rechazo tiene que ser: $Z > z_{1-\alpha}$

En resumen, rechazamos H_0 si $\frac{\bar{X} - \mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > Z > z_{1-\alpha}$

El contraste anterior tiene como:

- Estadístico de contraste:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

- Región crítica: $(z_{1-\alpha}, \infty)$.
- Región de aceptación: $(-\infty, z_{1-\alpha}]$.
- Regla de decisión: rechazar H_0 si $Z > z_{1-\alpha}$. Intervalo de confianza:

$$\begin{aligned}Z < z_{1-\alpha} &\implies \frac{\bar{X} - \mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{1-\alpha} \Leftrightarrow \mu_0 > \bar{X} - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow \mu_0 \in (\bar{X} - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty)\end{aligned}$$

- Regla de decisión II: rechazar H_0 si el μ_0 contrastado no pertenece al intervalo de confianza.

Por otro lado

Si nos planteamos el contraste

$$\begin{cases} H_0 : & \mu = \mu_0 \\ H_1 : & \mu < \mu_0 \end{cases}$$

Donde vamos a rechazar H_0 si el estadístico de contraste $Z = \frac{\bar{X} - \mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ es inferior a un cierto umbral, que determinaremos con α .

Queremos que el **Error Tipo I** sea α :

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ cierta}) = P(Z < \text{umbral}) \\ \implies \text{umbral} &= z_\alpha\end{aligned}$$

Por tanto, para que el **nivel de significación** del contraste sea *alpha*, la regla de rechazo tiene que ser: $Z < z_\alpha$

El contraste anterior tiene como:

- Estadístico de contraste:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

- Región crítica: $(-\infty, z_{1-\alpha})$.

- Región de aceptación: $(z_{1-\alpha}, \infty]$.
- Regla de decisión: rechazar H_0 si $Z > -z_{1-\alpha}$. Intervalo de confianza:

$$Z < -z_{1-\alpha} \implies \frac{\bar{X} - \mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -z_{1-\alpha} \Leftrightarrow \mu_o > \bar{X} + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \mu_o \in (-\infty, \bar{X} + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

- Regla de decisión II: rechazar H_0 si el μ_0 contrastado no pertenece al intervalo de confianza.

Consideremos ahora el contraste

$$\begin{cases} H_0 : & \mu = \mu_0 \\ H_1 : & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

Donde vamos a rechazar H_0 si el estadístico de contraste $Z = \frac{\bar{X} - \mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ es está bastante lejos de 0, y la determinaremos con el valor de α .

Queremos como antes que el **Error Tipo I** sea α :

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ cierta}) = P(Z < -\text{umbral} \text{ o } Z > \text{umbral}) \\ &= P(Z < -\text{umbral}) + P(Z > \text{umbral}) = 2P(Z > \text{umbral}) \\ &= 2(1 - P(Z < \text{umbral})) \implies P(Z < \text{umbral}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \\ &\implies \text{umbral} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

Por tanto, para que el **nivel de significación** del contraste sea *alpha*, la regla de rechazo tiene que ser:

$$Z < -z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ o } Z > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

La Región crítica es: $(-\infty, z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$.

Seguidamente, calculemos el **Intervalo de confianza** para el contraste anterior:

$$-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}} \implies -z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X} - \mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu_o < z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \mu_o \in \left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

El p -valor

El p -valor o valor crítico (p -value) de un contraste es la probabilidad que, si H_0 es verdadera, el estadístico de contraste tome un valor tan extremo o más que el que se ha observado.

Consideremos por ejemplo un contraste del tipo:

$$\begin{cases} H_0 : & \mu = \mu_0 \\ H_1 : & \mu > \mu_0 \end{cases}$$

Si el estadístico Z tiene el valor z_0 , el p -valor será:

$$p\text{-valor} = P(Z \geq z_0)$$

Para el contraste:

$$\begin{cases} H_0 : & \mu = \mu_0 \\ H_1 : & \mu < \mu_0 \end{cases}$$

Si el estadístico Z tiene el valor z_0 , el p -valor será:

$$p\text{-valor} = P(Z \leq z_0)$$

Si ahora consideramos el contraste

$$\begin{cases} H_0 : & \mu = \mu_0 \\ H_1 : & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

y si el estadístico Z ha dado z_0 , el p -valor será:

$$p\text{-valor} = 2 \cdot \min\{P(Z \leq |z_0|), P(Z \geq |z_0|)\} = 2 \cdot P(Z \geq |z_0|)$$

El p -valor o valor crítico (p -value) de un contraste es la probabilidad que, si H_0 es verdadera, el estadístico de contraste tome un valor tan extremo o más que el que se ha observado.

Es una medida inversa de la fuerza de las pruebas o evidencias que hay en contra de H_1 : si H_0 es verdadera, cuanto más pequeño sea el p -valor, más improbable es observar lo que hemos observado.

En consecuencia, cuanto más pequeño sea el p -valor, con más fuerza podemos rechazar H_0 .

Supongamos, por ejemplo, que hemos obtenido un p -valor de 0.03:

Significa que la probabilidad de que, si H_0 es verdadera, el estadístico de contraste tome un valor tan extremo o más que el que ha tomado, es 0.03 (pequeño: evidencia de que H_0 es falsa.)

No significa: - La probabilidad que H_0 Sea verdadera es 0.03 - H_0 es verdadera un 3 % de las veces

El p -valor de un contraste es: - El nivel de significación α más pequeño para el que rechazamos la hipótesis nula. - El nivel de significación α más grande para el que aceptaríamos la hipótesis nula. - La probabilidad mínima de error de Tipo I que permitimos si rechazamos la hipótesis nula con el valor del estadístico de contraste obtenido. - La probabilidad máxima de error de Tipo I que permitimos si aceptamos la hipótesis nula con el valor del estadístico de contraste obtenido.

Importante:

Si no establecemos un nivel de significación α , entonces - Aceptamos H_0 si el α -valor es “grande” ($\geq 0,1$). - Rechazamos H_0 si el α -valor es “pequeño” ($< 0,05$). En este caso, el α -valor es:

- Significativo si es $< 0,05$ (En R, se simboliza con un asterisco *).
- Fuertemente significativo si es $< 0,01$ (En R, se simboliza con dos asteriscos, **).
- Muy significativo si es $< 0,001$ (En R, se simboliza con tres asteriscos, ***).

Si el p -valor está entre 0.05 y 0.1 y no tenemos nivel de significación, se requieren estudios posteriores para tomar una decisión.

Es la denominada **zona crepuscular**, o **twilight zone**.