(1)

- 327 → 3 + 2 + 7 = 12 → $3 \mid 12$ ⇒ $3 \mid 327$
- 7983 → 7+9+8+3 = 27 → $3 \mid 27$ ⇒ $3 \mid 7983$

- FINAL 27-7-22

(1) Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(7\cdot 3^n - 5^{n+1} : 3^{n+1} + 7\cdot 5^n)$$

es igual a 264.

→ busco un d tal que:

$$\begin{cases} d \mid 7\cdot 3^n - 5^{n+1} \to d \mid 3(7\cdot 3^n - 5^{n+1}) \to d \mid 7\cdot 3^{n+1} - 3\cdot 5^{n+1} \\ d \mid 3^{n+1} + 7\cdot 5^n \to d \mid 7(3^{n+1} + 7\cdot 5^n) \to d \mid 7\cdot 3^{n+1} + 7^2\cdot 5^n \end{cases}$$

Luego:

$$d \mid \cancel{-7\cdot 3^{n+1}} + 3\cdot 5^{n+1} + \cancel{7\cdot 3^{n+1}} + 7^2\cdot 5^n \to d \mid 5^n(3\cdot 5 + 7^2)$$

$$\to \boxed{d \mid 5^n \cdot 64}$$

$$\begin{cases} d \mid 7\cdot 3^n - 5^{n+1} \to d \mid 7(7\cdot 3^n - 5^n) \to d \mid 7^2\cdot 3^n - 5^{n+1}\cdot 7 \\ d \mid 3^{n+1} + 7\cdot 5^n \to d \mid 5(3^{n+1} + 7\cdot 5^n) \to d \mid 5\cdot 3^{n+1} + 7\cdot 5^{n+1} \end{cases}$$

Luego:

$$d \mid 5\cdot 3^{n+1} + \cancel{7\cdot 5^{n+1}} + 7^2\cdot 3^n - \cancel{5^{n+1}\cdot 7} \to d \mid 3^n(5\cdot 3 + 7^2)$$

$$\to \boxed{d \mid 3^n \cdot 64}$$

Entonces $d \mid 3^n \cdot 64 \ \wedge \ d \mid 5^n \cdot 64$

Obs: $64 = 2^6$

⇒ Luego: $d \mid 3^n \cdot 2^6 \ \wedge \ d \mid 5^n \cdot 2^6$

⇒ por Teorema Fundamental de la aritmética

⇒ $d \in Div_+(64)$

con factorización en primos $a = \pm p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$,

Luego: analizo congruencia con los diferentes divisores de 64 para saber para cuales n divide los números $(7 \cdot 3^n - 5^{n+1}) \wedge (3^{n+1} + 7 \cdot 5^n)$

→ <u>analizo congruencia mod 2:</u>

- $7 \cdot 3^n - 5^{n+1} \equiv 1 \cdot 1^n - 1^{n+1} \equiv 0 \ (2)$
- $3^{n+1} + 7 \cdot 5^n \equiv 1^{n+1} + 1 \cdot 1^n \equiv 2 \equiv 0 \ (2)$

↳ Luego 2 divide a ambas partes para todo $n \in \mathbb{N}$

→ <u>analizo congruencia mod 4:</u>

- $7 \cdot 3^n - 5^{n+1} \equiv (-1) \cdot (-1)^n - (1)^{n+1} \equiv (-1)^{n+1} - 1 \ (4)$
- $3^{n+1} + 7 \cdot 5^n \equiv (-1)^{n+1} + (-1) \cdot (1)^n \equiv (-1)^{n+1} - 1 \ (4)$

→ Si n es par $(n = 2k)$: $(-1)^{2k+1} - 1 = -1 - 1 = -2 \equiv 2 \ (4)$

↳ Si n es par $4 \nmid 7 \cdot 3^n - 5^{n+1} \wedge 4 \nmid 3^{n+1} + 7 \cdot 5^n$

→ Si n es impar $(n = 2k+1)$: $(-1)^{2k+2} - 1 = 1 - 1 = 0 \equiv 0 \ (4)$

↳ Si n es impar $4 \mid 7 \cdot 3^n - 5^{n+1} \wedge 4 \mid 3^{n+1} + 7 \cdot 5^n$

→ <u>analizo congruencia mod 8:</u>

- $7 \cdot 3^n - 5^{n+1} \equiv (-1) \cdot 3^n - 5^{n+1} \ (8)$

↳ Si n es par $4 \nmid 7 \cdot 3^n - 5^{n+1} \Rightarrow 8 \nmid 7 \cdot 3^n - 5^{n+1}$

↳ Si n es impar $(n = 2k+1)$: $(-1) \cdot 3^{2k+1} - 5^{2k+2} =$

$\equiv (-1) \cdot \underbrace{9^k}_{\equiv 1 (8)} \cdot 3 - 25^k \cdot 5^2 \equiv -3 - 25^{k+1} \equiv$

$\equiv -3 - 1^{k+1} \equiv -3 - 1 \equiv -4 \equiv 4 \ (8) \Rightarrow 8 \nmid 7 \cdot 3^n - 5^{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

Sean $a, b \neq 0, \pm 1$ con factorización en primos $a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$.

(2) Luego si $8 \nmid 7 \cdot 3^n - 5^{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} 16 \nmid 7 \cdot 3^n - 5^{n+1} \\ 32 \nmid \quad '' \\ 64 \nmid \quad '' \end{array} \right.$

$\downarrow$

Por TFA

Por lo tanto concluyo que:

$(7 \cdot 3^n - 5^{n+1} ; 3^{n+1} + 7 \cdot 5^n) = d$ tal que

↳ si n es impar $\Rightarrow d = 4$

↳ si n es par $\Rightarrow d = 2$