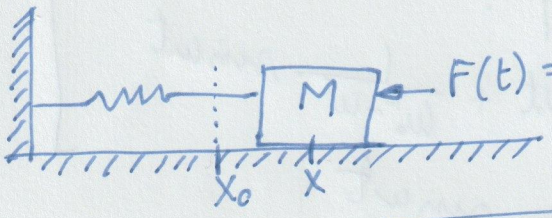
MASSA-MOLLA AMB EXCITACIÓ EXTERNA

(SENSE FREGAMENT)



$F(t) = A \cdot \sin \omega t$

C.I. $\left.\begin{array}{l} X(0) = 3 \\ X'(0) = 0 \end{array}\right\}$

Eq. diferencial: $\boxed{mX'' + kX = A \cdot \sin \omega t}$

$X'' + \frac{k}{m} X = \frac{A}{m} \sin \omega t$

$X'' + \omega_0^2 X = \frac{A}{m} \sin \omega t \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \; ; \; T_0 = \sqrt{\frac{2m}{k}}$

Eq. característica: $s^2 + \omega_0^2 = 0 \rightarrow s = \pm \omega_0 i$

sol. homogènea: $X_h = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$

sol. particular $X_p = \{\sin \omega t, \cos \omega t\}$

$X_p = a \sin \omega t + b \cos \omega t$

2 casos: $\omega \neq \omega_0$; i $\omega = \omega_0$

$\boxed{\text{cas } \omega \neq \omega_0}$ $\quad X_p = a \sin \omega t + b \cos \omega t$

$X_p' = a\omega \cos \omega t - b\omega \sin \omega t$

$X_p'' = -a\omega^2 \sin \omega t - b\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 (a \sin \omega t + b \cos \omega t)$

per tobar els coeficients a i b, substituim la solució particular a l'eq. diferencial:

$-\omega^2 (a \sin \omega t + b \cos \omega t) + \omega_0^2 (a \sin \omega t + b \cos \omega t) = \frac{A}{m} \sin \omega t$

$(\omega_0^2 - \omega^2) a \sin \omega t + (\omega_0^2 - \omega^2) b \cos \omega t = \frac{A}{m} \sin \omega t$

$\rightarrow \boxed{b = 0 \; ; \; a = \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}} \qquad \boxed{X_p = \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t}$

$X_T = X_h + X_p = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t$

C.I. $\left.\begin{array}{l} X(0) = 3 \\ X'(0) = 0 \end{array}\right. \rightarrow \boxed{C_1 = 3}$

$C_2 \omega_0 + \frac{A\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = 0 \rightarrow C_2 = \frac{-A\omega}{m\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)}$

$$\left[x_T = 3\cos\omega_0 t - \frac{A\omega}{\omega_0 m(\omega_0^2-\omega^2)}\sin\omega t + \frac{A}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\sin\omega t \right]$$

agafant els valors $\boxed{A=1,\ m=1\,kg}$:

$$\left[x_T = 3\cos\omega_0 t - \frac{\omega}{\omega_0(\omega_0^2-\omega^2)}\sin\omega t + \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t \right]$$

si $\omega_0 \gg \omega$, $x_T = \underbrace{3\cos\omega_0 t}_{\text{freq principal}} + \underbrace{\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t}_{\text{ruigat}}$

si $\omega_0 \ll \omega$ $x_T \simeq \underbrace{3\cos\omega_0 t}_{\text{terme que guanya}} - \frac{1}{\omega_0\omega}\sin\omega_0 t + \frac{1}{-\omega^2}\sin\omega t$

però si $\omega \sim \omega_0$ apareixen altres efectes, i com més igual sigui ω a ω_0, es veu l'efecte de la ressonància

si $\omega \sim \omega_0$ $x_T = \underbrace{\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}}_{\text{factor gran que té a veure amb la ressonància.}}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right)$

$\boxed{\text{cas 2}}$ $\boxed{\text{cas } \omega=\omega_0}$ → ressonància

la solució particular que teníem: $x_p = a\sin\omega_0 t + b\cos\omega_0 t$ és la matexia que l'homogènia. Per tant hem de probar: $x_p = t(a\sin\omega_0 t + b\cos\omega_0 t)$

$x_p' = a\sin\omega_0 t + b\cos\omega_0 t + \omega_0 t(a\cos\omega_0 t - b\sin\omega_0 t)$

$x_p'' = a\omega_0\cos\omega_0 t - b\omega_0\sin\omega_0 t + \omega_0 a\cos\omega_0 t - b\omega_0\sin\omega_0 t +$
$+ \omega_0^2 t(-a\sin\omega_0 t - b\cos\omega_0 t) =$
$= (2a\omega_0 - b\omega_0^2 t)\cos\omega_0 t + (-2b\omega_0 - a\omega_0^2 t)\sin\omega_0 t$

ho substituïm a l'eq. diferencial: $x'' + \omega_0^2 x = \frac{A}{m}\sin\omega_0 t$

$\cos w_0 t: \; 2a w_0 - \cancel{b w_0^2 t} + \cancel{b w_0^2 t} = 0 \rightarrow a = 0$

$\sin w_0 t: \; -2b w_0 - \cancel{a w_0^2 t} + \cancel{a w_0^2 t} = \frac{A}{m} \rightarrow b = \frac{-A}{2m w_0}$

$$\boxed{x_p = -\frac{A}{2m w_0} t \cos w_0 t}$$

factor lineal de la resonància

$$x_T = x_h + x_p = C_1 \cos w_0 t + C_2 \sin w_0 t - \frac{A}{2m w_0} t \cos w_0 t =$$
$$= \left(C_1 - \frac{A}{2m w_0} t\right) \cos w_0 t + C_2 \sin w_0 t$$

C.I. $x(0) = 3$, $x'(0) = 0$ $\rightarrow$ $\boxed{C_1 = 3}$

$x_T' = \frac{-A}{2m w_0} + C_2 w_0 = 0 \rightarrow \boxed{C_2 = \frac{A}{2m w_0^2}}$

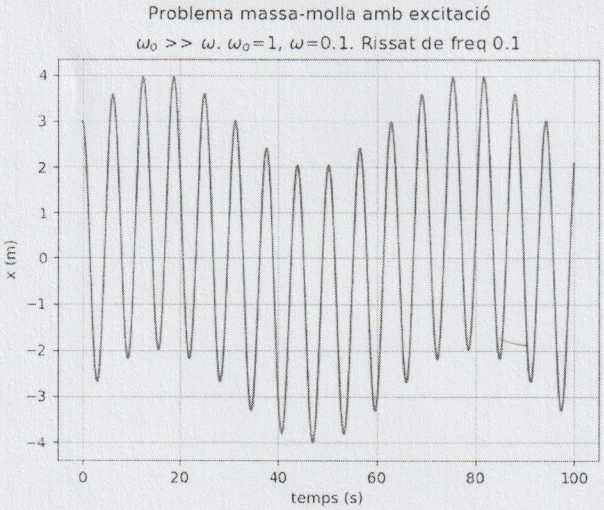
$$\left[x_T = \left(3 - \frac{A}{2m w_0} t\right) \cos w_0 t + \frac{A}{2m w_0^2} \sin w_0 t \right]$$

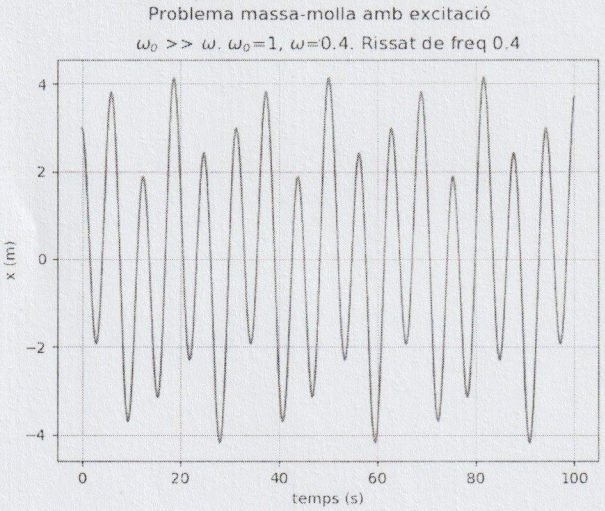
agafant els valors $A = 1$, $m = 1$ kg

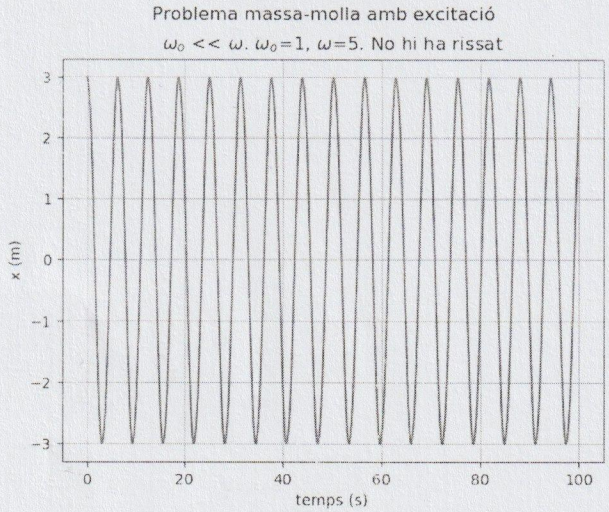
$$x_T = \left(3 - \frac{1}{2w_0} t\right) \cos w_0 t + \frac{1}{2w_0^2} \sin w_0 t$$

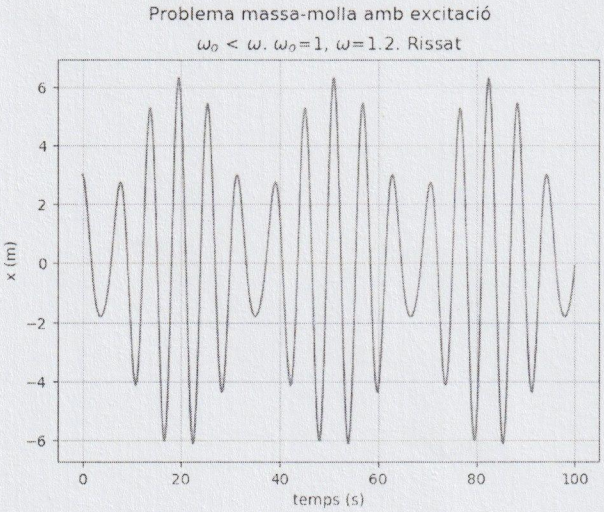
terme lineal: la força d'excitació està en resonància amb la freq natural de l'oscil·lador i es reforcen. El sistema va absorbint tota l'energia de la força externa.

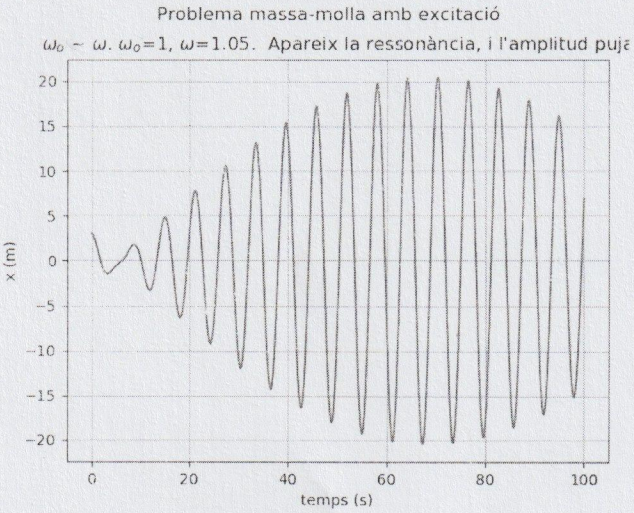
Es proporcionen les gràfiques, i el codi Python per reproduir la simulació i les gràfiques.

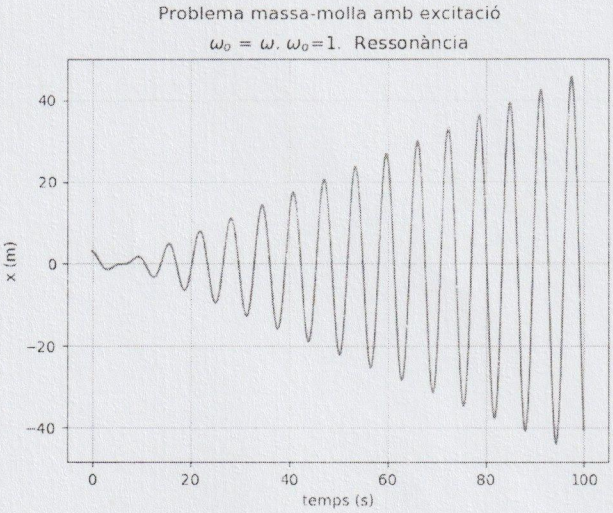

Problema massa-molla amb excitació
$\omega_0 >> \omega$. ω_0=1, ω=0.1. Rissat de freq 0.1
x (m)
temps (s)


Problema massa-molla amb excitació
$\omega_0 >> \omega$. ω_0=1, ω=0.4. Rissat de freq 0.4
x (m)
temps (s)


Problema massa-molla amb excitació
$\omega_0 << \omega$. ω_0=1, ω=5. No hi ha rissat
x (m)
temps (s)


Problema massa-molla amb excitació
$\omega_0 < \omega$. ω_0=1, ω=1.2. Rissat
x (m)
temps (s)


Problema massa-molla amb excitació
$\omega_0 \sim \omega$. ω_0=1, ω=1.05. Apareix la ressonància, i l'amplitud puja
x (m)
temps (s)


Problema massa-molla amb excitació
$\omega_0 = \omega$. ω_0=1. Ressonància
x (m)
temps (s)