Sven Skyum

A SIMPLE ALGORITHM FOR COMPUTING THE SMALLEST ENCLOSING CIRCLE

Περίληψη

Ένας απλός αλγόριθμος για τον υπολογισμό του μικρότερου περιβαλλόμενου κύκλου
Παρουσιάζεται ένας απλός αλγόριθμος O(n log n) για τον υπολογισμό του μικρότερου κύκλου που περικλείει ένα κυρτό πολύγωνο. Μπορεί εύκολα να επεκταθεί σε αλγορίθμους που υπολογίζουν το διάγραμμα Voronoi του πιο απομακρυσμένου και του πιο κοντινού σημείου ενός κυρτού πολυγώνου εντός του ίδιου χρονικού ορίου.

1. Εισαγωγή

Έστω ότι μας δίνονται n σημεία S={p1 , p2 ,..., pn} στο ευκλείδειο επίπεδο R^2. Ο μικρότερος περιβάλλον κύκλος του S, **SEC**(S), είναι ο κύκλος με ελάχιστη ακτίνα που περικλείει όλα τα σημεία του S. Είναι τετριμμένο και γνωστό ότι **SEC**(S)=**SEC**(H), όπου H ≤ S είναι τα ακραία σημεία του κυρτού περιβλήματος του S.

Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο για τον υπολογισμό του **SEC**(S). Ο αλγόριθμος σχετίζεται στενά με την κατασκευή του διαγράμματος Voronoi των πιο απομακρυσμένων σημείων και, αν τα S είναι σημεία που αποτελούν τις κορυφές ενός κυρτού πολυγώνου, και με την κατασκευή του συνηθισμένου διαγράμματος Voronoi. Η κατασκευή των διαγραμμάτων Voronoi παρουσιάζεται στην ενότητα 3. Οι αλγόριθμοι λαμβάνουν O(n log n) χρόνο, είναι πολύ εύκολοι στην υλοποίηση και αριθμητικά αξιόπιστοι. Ο Megiddo[3] έχει δώσει αλγορίθμους γραμμικού χρόνου για γραμμικό προγραμματισμό στον R^3 που εφαρμόζεται στο πρόβλημα του περιβάλλουσας κύκλου. Οι Aggraval, Guibas, Saxe και Shor [1] έδωσαν πρόσφατα γραμμικούς αλγορίθμους για τον υπολογισμό των διαγραμμάτων Voronoi των σημείων όταν αυτά αποτελούν τις κορυφές ενός κυρτού πολυγώνου. Και οι δύο αλγόριθμοι είναι αναδρομικοί αλγόριθμοι και οι εμπλεκόμενες σταθερές που κρύβονται στο O(n) είναι μεγάλες.

2. Ο αλγόριθμος

Έστω ότι μας δίνονται n σημεία S={p1, p2 ,...,pn} στο R^2, όπου το S αποτελεί τις κορυφές ενός κυρτού πολυγώνου. Πιο συγκεκριμένα τα σημεία αποθηκεύονται σε μια διπλά συνδεδεμένη λίστα έτσι ώστε next(pi)(before(pi)) να είναι ο δεξιόστροφος (αριστερόστροφος) γείτονας του pi στο πολύγωνο. Στη συνέχεια θα λέμε απλώς ότι το S είναι ένα κυρτό σύνολο σημείων.

Με **radius**(p, q, r) συμβολίζουμε την ακτίνα του κύκλου που διέρχεται από τα τρία σημεία p, q και r αν αυτά είναι διαφορετικά. Αν δύο σημεία είναι ίδια, τότε συμβολίζει τη μισή απόσταση μεταξύ ενός από αυτά και του τρίτου.
angle(p, q, r) συμβολίζει τη γωνία μεταξύ των ευθύγραμμων τμημάτων από το p στο q και από το q στο r. Θα ισχύει πάντα ότι p≠q και q≠r, αλλά όχι απαραίτητα ότι p≠r.

Algorithm 1.

```
if |S| ≠ 1 then
   finish := false;
   repeat
   (1) find p in S maximizing
          (radius (before(p), p, next(p)),
           angle (before(p), p, next(p))
       in the lexicographic order;
   (2) if angle (before(p), p, next(p)) ≤ π/2 then
          finish := true
       else
          remove p from S
       fi
   until finish
fi;
```

Ο αλγόριθμος θα τερματίσει, καθώς είτε το μέγεθος του S είναι 1 στην αρχή είτε το μέγεθος του S θα μειωθεί το πολύ μέχρι να έχει μέγεθος 2, οπότε η εμπλεκόμενη γωνία είναι 0. Στην πραγματικότητα, θα μειωθεί σε μέγεθος 2, 3 ή 4.

Κατά τον τερματισμό, το τελευταίο σημείο p που επιλέχθηκε στο βήμα (1) (ή ενδεχομένως το μοναδικό σημείο στο S για να ξεκινήσει) θα έχει την ιδιότητα ότι **SEC**(before(p), p, next(p))=**SEC**(S0), όπου S0 είναι το αρχικό σύνολο σημείων. Αυτό προκύπτει από τις ακόλουθες παρατηρήσεις και λήμματα.

Οι δύο παρατηρήσεις αποδεικνύονται με εύκολα γεωμετρικά επιχειρήματα και οι αποδείξεις δεν περιλαμβάνονται εδώ.

Το ευθύγραμμο τμήμα από ένα σημείο p έως q συμβολίζεται με pq και το t λέγεται ότι βρίσκεται δεξιά (αριστερά) του pq αν τα σημεία p, q και t σχηματίζουν δεξιά (αριστερή) στροφή.

Παρατήρηση 1.
Αν τα a και b είναι σημεία στο R^2, β ένας κύκλος που διέρχεται από τα α και β, με ακτίνα r και κέντρο c στα δεξιά του ab, τότε r<**radius**(a, b, p) για κάθε σημείο p μέσα στο β στα αριστερά του ab(περιοχή 1 του Σχ. 1) ή έξω από το β στα δεξιά του ab (περιοχή 2 του Σχ. 1).

Λήμμα 2.
Έστω S οι κορυφές ενός κυρτού πολυγώνου στο R^2.
Αν (a, b, c) μεγιστοποιεί (**radius**(a, b, c), **angle**(a, b, c)) στη λεξικογραφική σειρά, τότε
(i) τα a, b και c είναι διαδοχικές κορυφές του πολυγώνου.
(ii) ο **circle**(a, b, c) περικλείει όλα τα σημεία του S.

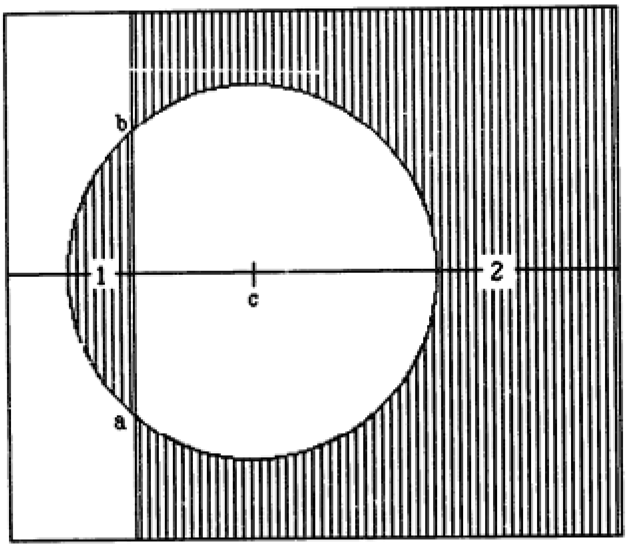

Fig. 1. Observation 1.

Απόδειξη.
Περίπτωση 1: angle(a, b, c)≤π/2.
Όλες οι γωνίες στο τρίγωνο με κορυφές a, b και c είναι μικρότερες ή ίσες με π/2, αφού η γωνία(a, b, c) είναι η μεγαλύτερη από τις τρεις. Εφόσον η **radius**(a, b, c) είναι μέγιστη, η **Παρατήρηση 1** εφαρμοσμένη στα {a, b} συνεπάγεται ότι κανένα σημείο του S δεν μπορεί να βρίσκεται στις περιοχές με τους αριθμούς 3, 4 ή 6 του Σχήματος 2. Εφαρμοσμένη στις {b, c} και {a, c} προκύπτει ότι κανένα σημείο στο S δεν μπορεί να βρίσκεται στις περιοχές με αριθμούς 2, 4, 5 ή 1, 5, 6. Εφόσον το S είναι ένα κυρτό σύνολο σημείων, όλα τα σημεία του S πρέπει να βρίσκονται στον κύκλο που διέρχεται από τα a, b και c, οπότε ο **circle**(a, b, c) περικλείει το S. Το ότι τα a, b και c είναι διαδοχικά είναι τότε επακόλουθο του ότι η **angle**(a, b, c) είναι μέγιστη μεταξύ όλων των εμφανιζόμενων γωνιών. Σημειώστε ότι το S μπορεί να περιέχει μόνο ένα σημείο περισσότερο από τα a, b και c και ότι τα σημεία σχηματίζουν τότε τις κορυφές ενός τετραγώνου.
Περίπτωση 2: angle(a, b, c)> π/2.
Η εφαρμογή της **Παρατήρησης 1** και πάλι στα {a, b}, {b, c} και {a, c} εξασφαλίζει ότι κανένα σημείο στο S δεν μπορεί να βρίσκεται στην περιοχή 1 του Σχήματος 3. Ένα σημείο p από το S δεν μπορεί να βρίσκεται στην περιοχή 2 διότι τότε το b θα ήταν ένας κυρτός συνδυασμός των a, p και c παραβιάζοντας το S που είναι ένα κυρτό σύνολο σημείων. Η μεγιστοποίηση της **angle**(a, b, c) εξασφαλίζει και πάλι ότι τα a, b και c είναι διαδοχικά. Αν το ρ βρίσκεται στο S-{a, b, c}, τότε το ρ πρέπει να βρίσκεται στην περιοχή χωρίς καπέλο και προκύπτει η **Δήλωση(ii)** του λήμματος.

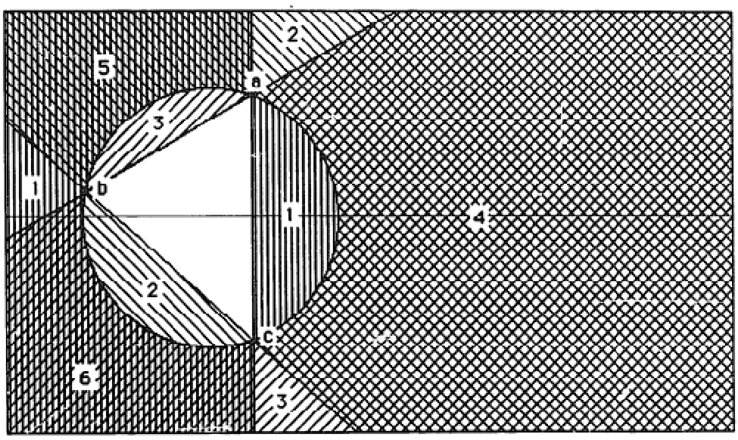

Fig. 2. Lemma 2, Case 1.

Παρατήρηση 3.
Αν η **angle**(a, b, c) είναι η μεγαλύτερη από τις τρεις γωνίες του τριγώνου με κορυφές a, b και c, και αν β είναι κύκλος με ακτίνα μικρότερη από την **radius**(a, b, c) που περικλείει τα a και c, τότε ο β περικλείει το β αν και μόνο αν angle(a, b, c)≥π/2.

Η ορθότητα του **Αλγορίθμου 1** προκύπτει τώρα. Η **Παρατήρηση 3** και το **Λήμμα 2** συνεπάγονται ότι αν εκτελεστεί το μέρος **"else"** της πρότασης **(2)**, τότε **SEC**(S)=**SEC**(S-{p}) και στην περίπτωση που εκτελεστεί το μέρος **"then"** κανένας κύκλος με ακτίνα μικρότερη από την **radius**(before(p), p, next(p)) δεν μπορεί να περιέχει τα before(p), p, και next(p), οπότε το p και οι γείτονές του καθορίζουν το **SEC**(S) που με τη σειρά του είναι ο μικρότερος περιβάλλον κύκλος του αρχικού δεδομένου συνόλου σημείων.

Ο **Αλγόριθμος 1** μπορεί εύκολα να υλοποιηθεί ώστε να εκτελείται σε χρόνο O(n log n). Με την αφαίρεση ενός σημείου από το S πρέπει μόνο να υπολογίσουμε εκ νέου τις ακτίνες και τις γωνίες για τους παλιούς γείτονες, πράγμα που μπορεί να γίνει σε σταθερό χρόνο. Σημειώστε ότι οι νέες ακτίνες δεν είναι μικρότερες από τις παλιές. Αρκετές δομές δεδομένων υποστηρίζουν τις πραγματικές διαγραφές και εισαγωγές που εμπλέκονται στις προτάσεις **(1)** και **(2)** σε συνολικό χρόνο O(n log n).

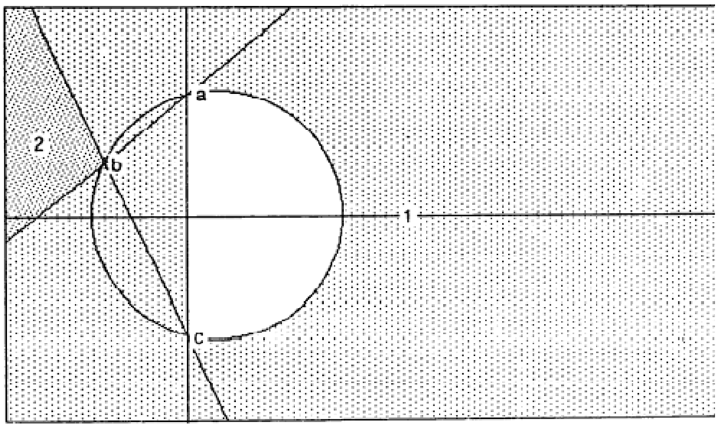

Fig. 3. Lemma 2. Case 2.

Παρατηρήσεις.

(1) Αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι η ακτίνα του **SEC**(S) περιορίζεται παραπάνω από το R, μπορούμε να αφαιρούμε διαδοχικά σημεία από το S όπου η **radius**(before(p), p, next(p))> R χωρίς να ελέγξουμε τη μεγιστοποίηση.

(2) Εάν το S δεν σχηματίζει τις κορυφές ενός κυρτού πολυγώνου για να ξεκινήσει, η σάρωση του Graham (βλέπε [2] ή [4]) μπορεί να ενσωματωθεί φυσικά στον **Αλγόριθμο 1** αφήνοντας την **radius**(a, b, c) να είναι άπειρη εάν το c είναι στα αριστερά του ab.

(3) Οι **Παρατηρήσεις (1)** και **(2)** υποδηλώνουν ότι με την τροποποίηση του **Αλγορίθμου 1** όπως αναφέρεται στο (1) η ύπαρξη (και μια πιθανή κατασκευή) ενός περιβαλλόμενου κύκλου με δεδομένη ακτίνα R ελέγχεται (κατασκευάζεται) σε γραμμικό χρόνο για ένα πολύγωνο σε σχήμα αστέρα.

3. Κατασκευή διαγραμμάτων Voronoi

Σε αυτή την ενότητα αποδεικνύουμε ότι με μια απλή επέκταση, ουσιαστικά ο ίδιος αλγόριθμος με αυτόν που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή του διαγράμματος Voronoi του πιο απομακρυσμένου σημείου ενός κυρτού συνόλου σημείων S.

Έστω **centre**(a, b, c) για τρία μη γραμμικά σημεία στον R^3, το κέντρο του κύκλου που διέρχεται από τα a, b και c.

Θα αντιμετωπίσουμε το διάγραμμα Voronoi του S με το πιο απομακρυσμένο σημείο, που συμβολίζεται με V-1(S) ως γράφημα (K, E) όπου ο βαθμός των κορυφών Voronoi K είναι είτε 1 είτε 3. Εάν το u έχει βαθμό 1 είναι μια κορυφή "στο άπειρο" σε μια διχοτόμο δύο γειτονικών σημείων του S (ένα "τελικό σημείο" των μισών άπειρων ευθύγραμμων τμημάτων του διαγράμματος). Εάν η u έχει βαθμό 3, είναι το **centre**(a, b, c) τριών σημείων στο S και κανένα σημείο στο S δεν απέχει περισσότερο από το κέντρο(a, b, c) από τα a, b και c.

Αν (u1, u2) είναι μια ακμή Voronoi από το E, τότε για κάποια σημεία a και b στο S, το ευθύγραμμο τμήμα u1u2 περιέχεται στη διχοτόμο των a και b και κανένα σημείο στο S δεν απέχει περισσότερο από τα σημεία στο u1u2 από τα a και b.

Σημειώστε ότι αν κανένα από τα τέσσερα σημεία του S δεν είναι κοκκοειδές τότε το V-1(S) είναι μοναδικό. Διαφορετικά, η απόσταση μεταξύ u1 και u2 για κάποιες ακμές (u1, u2) στο E μπορεί να είναι 0.

Στον ακόλουθο **Αλγόριθμο 2**, το u(p) συμβολίζει ένα σημείο στη διχοτόμο των p και next(p). Κατά την αφαίρεση του p, το u(p) θα είναι μια κορυφή του V-1(S).

Αρχικά το u(p) είναι ένα σημείο στη διχοτόμο των p και next(p) "στο άπειρο" στα δεξιά του pnext(p).

Algorithm 2.

```
for all p in S add v(p) to K;
if n > 2 then
    repeat
        find p maximizing
            (radius (before(p), p, next(p)),
             angle (before(p), p, next(p));
        q := before(p);
        c := centre(q, p, next(p));
        add c to K;
        add (c, v(p)) and (c, v(q)) to E;
        v(q) := c;
        next(q) := next(p);
        before(next(q)) := q;
        n := n − 1;
    until n = 2;
    add (v(q), v(next(q)) to E
else
    if n = 2 then {S = {p1, p2}}
        add (v(p1), v(p2)) to E
    fi
fi;
```

Το **Λήμμα 2** από την **Ενότητα 2** εξασφαλίζει ότι όταν επιλέγεται το p, ο circle(before(p), p, next(p)) με κέντρο c=**centre**(before(p), p, next(p)) περικλείει όλα τα σημεία του S. Συνεπώς, το c είναι κορυφή Voronoi και οι (c, u(p)) καθώς και οι (c, u(before(p))) είναι ακμές Voronoi. Το ότι βρέθηκαν όλες οι κορυφές και ακμές Voronoi προκύπτει από την αναγνώριση, ότι αν n>1, ο αριθμός των κορυφών βαθμού 3 για τα διαγράμματα Voronoi είναι n-2 και ο αριθμός των ακμών είναι 2n-3 που ταιριάζει με τον αριθμό των κορυφών και ακμών που δημιουργήθηκαν από τον **Αλγόριθμο 2**.

Για την κατασκευή του συνηθισμένου διαγράμματος Voronoi V(S), όπου οι κορυφές είναι σημεία ελάχιστης ίσης απόστασης από τρία σημεία του S αντί της μέγιστης απόστασης και ισοδύναμα οι ακμές που καθορίζονται από την ελάχιστη απόσταση από ένα ζεύγος σημείων, αρκεί να τροποποιηθεί ο **Αλγόριθμος 2** με την προσθήκη ενός μείον πριν από την ακτίνα στη **Γραμμή 5**, δηλαδή να επιλεγεί το p έτσι ώστε η αντίστοιχη ακτίνα να είναι ελάχιστη και μεταξύ αυτών το p που μεγιστοποιεί τη γωνία. Επιπλέον το u(p) πρέπει αρχικά να είναι ένα σημείο στη διχοτόμο του p και next(p) "στο άπειρο" αριστερά του pnext(p).

Η ορθότητα της κατασκευής προκύπτει από το ακόλουθο **Λήμμα 4**, το οποίο είναι ανάλογο της **Παρατήρησης 3** και του **Λήμματος 2**. Η απόδειξη είναι παρόμοια και δεν περιλαμβάνεται εδώ.

Λήμμα 4.
Έστω S οι κορυφές ενός κυρτού πολυγώνου στο R^2. Αν το (a, b, c) μεγιστοποιεί το (-**radius**(a, b, c), **angle**(a, b, c)) σε λεξικογραφική σειρά, τότε
(i) τα a, b και c είναι διαδοχικές κορυφές του πολυγώνου,
(ii) κανένα σημείο από το S δεν βρίσκεται μέσα στον **circle**(a, b, c).
(iii) αν το b είναι μέσα στον circle(a', b', c') για τρία σημεία a', b' και c' από το S, τότε είτε το a είτε το c είναι επίσης μέσα.