

---

**Υλοποίηση Αλγορίθμου για τον Υπολογισμό  
του Ελάχιστου Περικλείοντος Κύκλου και του  
Διαγράμματος Voronoi**

**Ιωάννης Πρίφτη**

**Διπλωματική Εργασία**

Επιβλέπων: Λεωνίδας Παληός

Ιωάννινα, Φεβρουάριος, 2023



**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧ. Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ**

---

**DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE & ENGINEERING  
UNIVERSITY OF IOANNINA**

---

# Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους ανθρώπους που συνέβαλαν και βοήθησαν στο να γίνω ο άνθρωπος που είμαι σήμερα.

20/02/2023

Ιωάννης Πρίφτη

---

# Περίληψη

Η εργασία αυτή αφορά την υλοποίηση και οπτικοποίηση του αλγορίθμου για τον υπολογισμό του Ελάχιστου Περικλείοντος Κύκλου [3] καθώς επίσης και των αντίστοιχων Διαγραμμάτων Voronoi για τους Πλησιέστερους και πιο Απομακρυσμένους Γείτονες [3] διατηρώντας πάντα τις πολυπλοκότητες των αλγορίθμων σε χρονικό πλαίσιο  $O(n \log n)$ . Για την ανάπτυξη χρησιμοποιήθηκε η γλώσσα προγραμματισμού Java [7] καθώς επίσης και javafx [8] για το γραφικό περιβάλλον. Τέλος, αποτελεί μια πλήρη εφαρμογή η οποία μπορεί να γίνει εγκατάσταση και να χρησιμοποιηθεί από οποιονδήποτε χρήστη χωρίς να απαιτούνται γνώσεις προγραμματισμού.

**Λέξεις Κλειδιά:** Ελάχιστος Περικλείοντας Κύκλος, Διάγραμμα Voronoi, Πολυπλοκότητα, Εφαρμογή

---

# Πίνακας Περιεχομένων

<b>Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή.....</b>	<b>6</b>
1.1 Βασικοί Ορισμοί.....	6
1.2 Αντικείμενο της Διπλωματικής Εργασίας.....	8
1.3 Σχετικά Ερευνητικά Αποτελέσματα.....	8
1.4 Δομή της Διπλωματικής Εργασίας.....	9
<b>Κεφάλαιο 2. Υπολογισμός Ελάχιστου Περικλείοντος Κύκλου και των Διαγραμμάτων Voronoi 10</b>	
2.1 Υπολογισμός Κυρτού Περιβλήματος.....	10
2.1.1 Θεωρητικό Υπόβαθρο.....	10
2.1.2 Περιγραφή του Αλγορίθμου.....	11
2.1.3 Παράδειγμα Εφαρμογής του Αλγορίθμου.....	12
2.2 Υπολογισμός Ελάχιστου Περικλείοντος Κύκλου.....	15
2.2.1 Θεωρητικό Υπόβαθρο.....	15
2.2.2 Περιγραφή του Αλγορίθμου.....	18
2.2.3 Παράδειγμα Εφαρμογής του Αλγορίθμου.....	20
2.3 Υπολογισμός Διαγράμματος Voronoi 1 <sup>ης</sup> τάξης.....	23
2.3.1 Θεωρητικό Υπόβαθρο.....	23
2.3.2 Περιγραφή του Αλγορίθμου.....	23
2.3.3 Παράδειγμα Εφαρμογής του Αλγορίθμου.....	24
2.4 Υπολογισμός Διαγράμματος Voronoi n-1 τάξης.....	27
2.4.1 Θεωρητικό Υπόβαθρο.....	27
2.4.2 Περιγραφή του Αλγορίθμου.....	27
2.4.3 Παράδειγμα Εφαρμογής του Αλγορίθμου.....	28
<b>Κεφάλαιο 3. Η Υλοποίηση.....</b>	<b>29</b>
3.1 Είσοδος-Έξοδος.....	29
3.2 Δομές Δεδομένων.....	29
3.3 Κλάσεις/Πακέτα.....	30

---

3.3.1	MainGUI/View.....	31
3.3.2	SmallestEnclosingCircleGUI/View.....	37
3.3.3	VoronoiGraphGUI/View.....	43
3.3.4	AlgorithmsHandler/Control.....	49
3.3.5	ChangeLanguageButtonHandler/Control.....	51
3.3.6	CustomMouseListener/Control.....	53
3.3.7	ExitButtonHandler/Control.....	54
3.3.8	GraphGUIHandler/Control.....	55
3.3.9	InfoButtonHandler/Control.....	57
3.3.10	InfoContentHandler/Control.....	61
3.3.11	LoadFileButtonHandler/Control.....	62
3.3.12	PaperTitleHandler/Control.....	65
3.3.13	PutPointsButtonHandler/Control.....	66
3.3.14	DataBase/Model.....	68
3.3.15	GrahamScan/Model.....	84
3.3.16	NeighborVoronoiDiagram/Model.....	87
3.3.17	SmallestEnclosingCircle/Model.....	90
3.3.18	TextHandler/Model.....	92
3.3.19	CSVLoader/Model_Loaders.....	99
3.3.20	ExcelLoader/Model_Loader.....	101
3.3.21	FileLoader/Model_Loader.....	103
3.3.22	FileLoaderFactory/Model_Loaders.....	104
3.3.23	TXTLoader/Model_Loader.....	106
3.4	Παραδείγματα Εκτέλεσης του Προγράμματος.....	108
<b>Κεφάλαιο 4. Επίλογος.....</b>		<b>118</b>
4.1	Συμπεράσματα.....	118
4.2	Μελλοντικές Ενημερώσεις.....	118
<b>Κεφάλαιο 5. Βιβλιογραφία.....</b>		<b>119</b>

---

# Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή

## 1.1 Βασικοί Ορισμοί

Σε αυτήν την ενότητα θα αναλύσουμε τους βασικούς ορισμούς που αφορούν το Κυρτό Περίβλημα, τον Ελάχιστο Περικλείοντα Κύκλο καθώς και των Διαγραμμάτων Voronoi για τον Πλησιέστερο και πιο Απομακρυσμένο Γείτονα.

Το Κυρτό Περίβλημα [1] είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει όλα τα σημεία στον ευκλείδειο χώρο, πιο συγκεκριμένα είναι εκείνο το πολύγωνο που έχει ως κορυφές του τα πιο εξωτερικά σημεία του ευκλείδειου χώρου με την ιδιότητα να καλύπτει όλα τα υπόλοιπα και ταυτόχρονα να είναι το μικρότερο δυνατό.

Ο Ελάχιστος Περικλείοντας Κύκλος είναι ο Κύκλος με την μικρότερη ακτίνα που περιέχει όλα τα σημεία στον ευκλείδειο χώρο και κάποια εξ' αυτών (2-3 συνήθως) βρίσκονται πάνω στον κύκλο.

Το Διάγραμμα Voronoi του Πλησιέστερου Γείτονα (ή 1ης τάξης) [3] για ένα σύνολο  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  είναι η υποδιαίρεση του χώρου σε περιοχές (πολύγωνα ή κελιά Voronoi), μια για κάθε σημείο του  $S$  με την ιδιότητα ότι ένα σημείο  $q$  κείται στην περιοχή που αντιστοιχεί στο αντίστοιχο  $p_i$  αν και μόνο αν  $ap(q, p_i) < ap(q, p_j)$  για κάθε  $p_j$  που ανήκει στο  $S$  με  $j \neq i$ , όπου  $ap(p, q) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}$ .

Το Διάγραμμα Voronoi του πιο Απομακρυσμένου Γείτονα (ή n-1 τάξης) [3] για ένα σύνολο  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  είναι η υποδιαίρεση του χώρου σε περιοχές (πολύγωνα ή κελιά Voronoi) στις οποίες το ίδιο σημείο του  $S$  είναι το πιο απομακρυσμένο σημείο. Ένα σημείο του  $S$  έχει μια περιοχή στο διάγραμμα Voronoi του πιο Απομακρυσμένου Γείτονα αν και μόνο αν είναι κορυφή του Κυρτού Περιβλήματος. Έστω  $H = \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$  είναι το Κυρτό Περίβλημα του  $S$ , τότε το διάγραμμα Voronoi του πιο Απομακρυσμένου Γείτονα είναι μια υποδιαίρεση του επιπέδου σε  $k$  κελιά, ένα για κάθε σημείο του  $H$ , με την ιδιότητα ότι ένα σημείο  $q$  βρίσκεται στο κελί που αντιστοιχεί σε

---

μια θέση  $h_i$  αν και μόνο αν  $\alpha\pi(q, h_i) > \alpha\pi(q, p_j)$  για κάθε  $p_j$  του  $S$  με  $h_i \neq p_j$ , όπου

$$\alpha\pi(p, q) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}.$$

---

## 1.2 Αντικείμενο της Διπλωματικής Εργασίας

Σε αυτήν την διπλωματική εργασία είχαμε ως στόχο να μελετήσουμε και να υλοποιήσουμε τον Αλγόριθμο για τον Υπολογισμό του Ελάχιστου Περικλείοντος Κύκλου [3] καθώς επίσης και των Διαγραμμάτων Voronoi του Πλησιέστερου και πιο Απομακρυσμένου γείτονα [3]. Καταφέραμε να διατηρήσουμε την πολυπλοκότητα των Αλγορίθμων σε  $O(n \log n)$  χρησιμοποιώντας αποδοτικές δομές (όπως λεξικά, κοκκινόμαυρα δυαδικά δέντρα αναζήτησης κτλ.) και δημιουργήσαμε μια εφαρμογή στην γλώσσα προγραμματισμού Java [7] με εύχρηστο γραφικό περιβάλλον ικανή να μπορεί να την χρησιμοποιεί ο χρήστης χωρίς να απαιτούνται γνώσεις προγραμματισμού.

## 1.3 Σχετικά Ερευνητικά Αποτελέσματα

Ο Megiddo έχει δώσει αλγορίθμους γραμμικού χρόνου για γραμμικό προγραμματισμό στον  $R^3$  που εφαρμόζεται στο πρόβλημα του περιβάλλοντος κύκλου [21].

Οι Aggraval, Guibas, Saxe και Shor έδωσαν γραμμικούς αλγορίθμους για τον υπολογισμό των διαγραμμάτων Voronoi των σημείων όταν αυτά αποτελούν τις κορυφές ενός κυρτού πολυγώνου [22].

Οι Piotr Berman και Andrzej Lingas έχουν δώσει επίσης σχεδόν βέλτιστο παράλληλο αλγόριθμο για τον υπολογισμό των διαγραμμάτων Voronoi των σημείων ενός κυρτού πολυγώνου σε  $O(\log n)$  χρόνο [23].

Οι Alon Efrat, Micha Shafir και Alon Ziv πρότειναν έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό του Ελάχιστου k-Περικλείοντος Κύκλου για δεδομένο σύνολο σημείων  $S$  όπου  $k$  είναι ένα υποσύνολο του  $S$  [24].

Οι Pooya Shivanasab και Rahim Ali Abbaspour πρότειναν ένα νέο αλγόριθμο για τον υπολογισμό του διαγράμματος Voronoi 1<sup>ης</sup> τάξης όσο και του τριγωνισμού Delaunay σε  $O(n \log n)$  χρόνο [25].



---

## 1.4 Δομή της Διπλωματικής Εργασίας

Σε αυτήν την ενότητα θα αναφέρουμε περιληπτικά τα περιεχόμενα των κεφαλαίων που ακολουθούν.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα περιγράψουμε τους αλγορίθμους που χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε το Κυρτό Περίβλημα [\[1\]](#), τον Ελάχιστο Περικλείοντα Κύκλο [\[3\]](#) και τα Διαγράμματα Voronoi [\[3\]](#), κάποια απαραίτητα μαθηματικά στα οποία αυτοί βασίζονται για την ορθή λειτουργία τους καθώς επίσης και κάποια απλά παραδείγματα ώστε να γίνει κατανοητός ο τρόπος λειτουργίας τους.

Επιπλέον, στο μεθεπόμενο κεφάλαιο θα αναλύσουμε εκτενώς την υλοποίηση του συνολικού προγράμματος σε Java [\[7\]](#), την είσοδο και την έξοδο του, τις δομές που χρησιμοποιήσαμε καθώς επίσης και θα εκτελέσουμε βήμα-βήμα το πρόγραμμα ώστε να δούμε τον τρόπο λειτουργίας του.

Τέλος, ακολουθεί μια σύνοψη του τι κάναμε συνολικά σε αυτήν την διπλωματική εργασία καθώς επίσης και κάποια μελλοντικά σχέδια όσον αφορά μελλοντικές λειτουργίες του προγράμματος.

---

# Κεφάλαιο 2. Υπολογισμός Ελάχιστου

## Περικλείοντος

## Κύκλου και των

## Διαγραμμάτων

## Voronoi

### 2.1 Υπολογισμός Κυρτού Περιβλήματος

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε το Κυρτό Περίβλημα καθώς επίσης θα περιγράψουμε τον αλγόριθμο σάρωσης του Graham [\[1\]](#) για τον υπολογισμό των σημείων που ορίζουν το κυρτό περίβλημα από ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων σε  $O(n) + O(n \log n)$  χρόνο. Επίσης θα εξηγήσουμε μέσω ενός απλού παραδείγματος τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί.

#### 2.1.1 Θεωρητικό Υπόβαθρο

Ένα υποσύνολο  $S$  του επιπέδου λέγεται κυρτό εάν και μόνο εάν για κάθε ζεύγος σημείων  $p, q$  του  $S$  το ευθύγραμμο τμήμα  $\overline{pq}$  περιέχεται πλήρως στο  $S$ . Το κυρτό περίβλημα  $KP(S)$  ενός συνόλου  $S$  είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει το  $S$ . Ακριβέστερα είναι η τομή όλων των κυρτών συνόλων που περιέχουν το  $S$  [\[19\]](#).

Το κυρτό περίβλημα έχει την ιδιότητα ότι όλες οι εσωτερικές γωνίες του είναι το πολύ  $180^\circ$  ή κάθε μία και αυτό μπορεί να αποδειχθεί πολύ εύκολα χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών οποιουδήποτε πολυγώνου  $n$

---

πλευρών ισούται με  $(n-2)*180^\circ$ . Αυτή η ιδιότητα είναι χρήσιμη διότι ο αλγόριθμος του Graham [1] ταξινομεί τα σημεία με βάση την γωνία που σχηματίζουν με τον άξονα x.

## 2.1.2 Περιγραφή του Αλγορίθμου

### Αλγόριθμος

1. Βρες το σημείο με την μικρότερη y συντεταγμένη (στην περίπτωση ισοπαλίας επέλεξε εκείνο με την μικρότερη x συντεταγμένη).
2. Ταξινόμησε τα υπόλοιπα σημεία με βάση την πολική τους γωνία ως προς το σημείο με την μικρότερη y συντεταγμένη του βήματος (1).
3. Αρχικοποίησε μια κενή στοίβα και εισήγαγε το σημείο με την μικρότερη y συντεταγμένη του βήματος (1) στην στοίβα.
4. Για κάθε εναπομείναν σημείο της ταξινομημένης λίστας:
  - a) Όσο τα δύο τελευταία σημεία της στοίβας και το τρέχον σημείο κάνουν μη-αριστερή στροφή:
    - (i) Εξήγαγε το τελευταίο σημείο από τη στοίβα.
  - b) Εισήγαγε το τρέχον σημείο στη στοίβα.
5. Η στοίβα περιέχει τα σημεία του κυρτού περιβλήματος.

Το πρώτο βήμα (1) του αλγορίθμου είναι η εύρεση του σημείου με την μικρότερη συντεταγμένη y και στην περίπτωση ισοπαλίας επιλέγεται εκείνο με την μικρότερη συντεταγμένη x σε  $O(n)$  χρόνο, έστω min. Αυτό γίνεται πολύ εύκολα με έναν βρόχο ο οποίος σε κάθε επανάληψη κρατάει εκείνο το σημείο με την μικρότερη y συντεταγμένη και το συγκρίνει με το επόμενο μέχρι να εξαντλήσει όλα τα στοιχεία σε γραμμικό  $O(n)$  χρόνο.

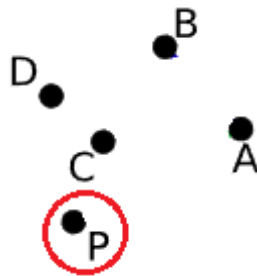
Στη συνέχεια (βήμα (2)), ο αλγόριθμος ταξινομεί το σύνολο των σημείων σε αύξουσα σειρά με βάση την πολική γωνία ( $\text{Math.atan2}$ ) που σχηματίζει το κάθε σημείο του συνόλου με το min ως προς τον άξονα x. Ο συγκριτής συγκρίνει πρώτα τις πολικές γωνίες των δύο σημείων και επιστρέφει -1, 0 ή 1 ανάλογα με το αν η γωνία του πρώτου σημείου είναι μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη από την γωνία του δεύτερου σημείου. Εάν οι πολικές γωνίες είναι ίσες, ο συγκριτής συγκρίνει τις αποστάσεις των δύο σημείων από το σημείο min και επιστρέφει το αποτέλεσμα της σύγκρισης. Η ταξινόμηση γίνεται με τον Αλγόριθμο Merge Sort (`Collections.short`) [14] σε  $O(n \log n)$  χρόνο.

Έπειτα (βήμα (3)), εκτελείται η σάρωση του Graham [1] (4) επί της λίστας (`List<Point2D>`) με τα ταξινομημένα στοιχεία που προέκυψαν στο προηγούμενο βήμα (βήμα (2)). Δημιουργεί μια νέα λίστα (`List<Point2D>`) που θα διατηρεί τα σημεία που ορίζουν το κυρτό περίβλημα στην οποία αρχικά προσθέτει το σημείο min. Για κάθε

σημείο της ταξινομημένης λίστας ελέγχει αν το σημείο κάνει αριστερή στροφή με τα δύο προηγούμενα σημεία του κυρτού περιβλήματος από την αντίστοιχη λίστα τότε το προσθέτει στην αντίστοιχη λίστα με τα σημεία του κυρτού περιβλήματος. Διαφορετικά, αφαιρεί το προηγούμενο σημείο από το κυρτό περίβλημα μέχρι το τρέχον σημείο να κάνει αριστερή στροφή. Τέλος, ο αλγόριθμος προσθέτει ξανά το αρχικό σημείο στη λίστα με τα σημεία του κυρτού περιβλήματος για να ολοκληρώσει τον βρόχο και επιστρέφει την λίστα. Ο έλεγχος της στροφής γίνεται μέσω της μεθόδου `crossProduct` (βλέπε μέθοδο `Model/GrahamScan/crossProduct`).

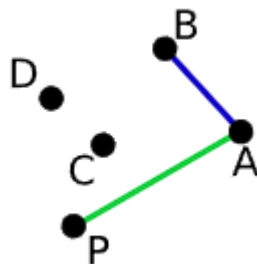
### 2.1.3 Παράδειγμα Εφαρμογής του Αλγορίθμου

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε 5 σημεία στον ευκλείδειο χώρο. Τα A, B, C και D. Εκ των οποίων επιλέγεται εκείνο με την μικρότερη συντεταγμένη y, δηλαδή το P (βλέπε **Σχήμα 1.1**).



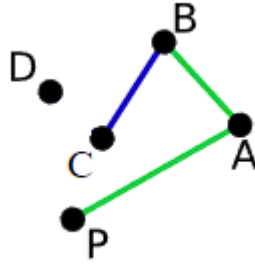
**Σχήμα 1.1:** Επιλογή σημείου P.

Αφού λοιπόν προστεθούν τα P και A στην λίστα με τα σημεία του κυρτού περιβλήματος, ο αλγόριθμος ελέγχει αν η ευθεία  $\overline{BA}$  σχηματίζει αριστερή στροφή με την ευθεία  $\overline{AP}$  (βλέπε **Σχήμα 1.2**).



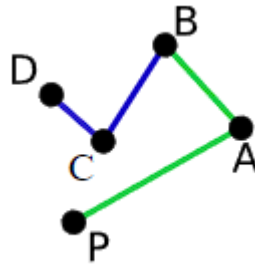
**Σχήμα 1.2:** Έλεγχος στροφής  $\overline{BA}$  και  $\overline{AP}$ .

Εφόσον σχηματίζουν αριστερή στροφή τότε προστίθεται το B στην λίστα με τα σημεία του κυρτού περιβλήματος και ο αλγόριθμος συνεχίζει στο επόμενο σημείο, το C. Ελέγχει αν η ευθεία  $\overline{CB}$  σχηματίζει αριστερή στροφή με την ευθεία  $\overline{BA}$  (βλέπε **Σχήμα 1.3**).



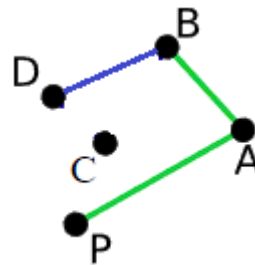
**Σχήμα 1.3:** Έλεγχος στροφής  $\overline{CB}$  και  $\overline{BA}$ .

Εφόσον σχηματίζουν αριστερή στροφή τότε προστίθενται το C στην λίστα με τα σημεία του κυρτού περιβλήματος και ο αλγόριθμος συνεχίζει στο επόμενο σημείο, το D. Ελέγχει αν η ευθεία  $\overline{DC}$  σχηματίζει αριστερή στροφή με την ευθεία  $\overline{CB}$  (βλέπε **Σχήμα 1.4**).



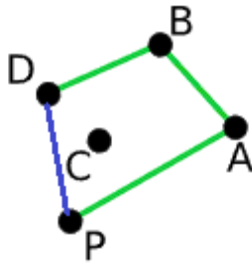
**Σχήμα 1.4:** Έλεγχος στροφής  $\overline{DC}$  και  $\overline{CB}$ .

Εφόσον σχηματίζουν δεξιά στροφή τότε αφαιρείται το C από την λίστα με τα σημεία του κυρτού περιβλήματος και ο αλγόριθμος ελέγχει αν η ευθεία  $\overline{DB}$  σχηματίζει αριστερή στροφή με την ευθεία  $\overline{BA}$  (βλέπε **Σχήμα 1.5**).



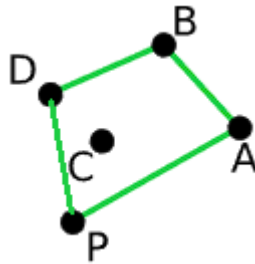
**Σχήμα 1.5:** Έλεγχος στροφής  $\overline{DB}$  και  $\overline{BA}$ .

Εφόσον σχηματίζουν αριστερή στροφή τότε προστίθενται το D στην λίστα με τα σημεία του κυρτού περιβλήματος και ο αλγόριθμος συνεχίζει στο επόμενο σημείο, το P. Ελέγχει αν η ευθεία  $\overline{PD}$  σχηματίζει αριστερή στροφή με την ευθεία  $\overline{DB}$  (βλέπε **Σχήμα 1.6**).



**Σχήμα 1.6:** Έλεγχος στροφής  $\overline{PD}$  και  $\overline{DB}$ .

Εφόσον σχηματίζουν αριστερή στροφή τότε προστίθενται το P στην λίστα με τα σημεία του κυρτού περιβλήματος και ο αλγόριθμος τερματίζει (βλέπε **Σχήμα 1.7**).



**Σχήμα 1.7:** Τα σημεία του Κυρτού περιβλήματος.

---

## 2.2 Υπολογισμός Ελάχιστου Περικλείοντος Κύκλου

Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε το θεωρητικό υπόβαθρο, κάποια απαραίτητα μαθηματικά καθώς επίσης και ένα παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου. Θα εξηγήσουμε αναλυτικά πως ο αλγόριθμος παίρνει ως είσοδο ένα σύνολο τυχαίων σημείων, πως από αυτά επιλέγει μόνο εκείνα που ορίζουν το κυρτό περίβλημα και έπειτα τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζει τον Ελάχιστο Περικλείοντα Κύκλο [31] καθώς και τα Αντίστοιχα Διαγράμματα Voronoi.

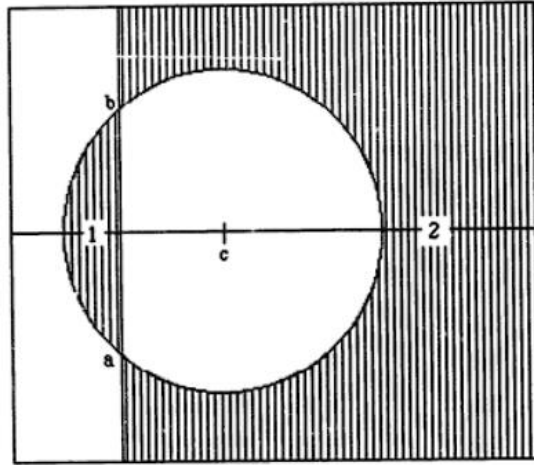
### 2.2.1 Θεωρητικό Υπόβαθρο

Η ορθότητα του αλγορίθμου βασίζεται σε κάποια Λήμματα και Παρατηρήσεις που παραθέτουμε παρακάτω.

Αρχικά, θα παραθέσουμε τους απαραίτητους συμβολισμούς.

- $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ : Σύνολο  $n$  σημείων στο ευκλείδειο επίπεδο
- $SEC(S)$ : Είναι ο κύκλος με την μικρότερη ακτίνα που περικλείει όλα τα σημεία του  $S$ .
- $before(p)$ : Αριστερόστροφος γείτονα του  $p$ .
- $next(p)$ : Δεξιόστροφος γείτονας του  $p$ .
- $radius(p, q, r)$ : Ακτίνα του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία  $p$ ,  $q$  και  $r$  αν αυτά είναι διαφορετικά.
- $angle(p, q, r)$ : Γωνία μεταξύ των ευθύγραμμων τμημάτων από το  $p$  στο  $q$  και από το  $q$  στο  $r$ . Θα ισχύει πάντα  $p \neq q$  και  $q \neq r$  αλλά όχι απαραίτητα ότι  $p \neq r$ .
- $centre(a, b, c)$ : Κέντρο του κύκλου που διέρχεται από τρία μη γραμμικά σημεία  $a$ ,  $b$  και  $c$  στον  $R^3$ .
- $V_{-1}(S)(K, E)$ : Γράφημα Voronoi του πιο απομακρυσμένου γείτονα με  $K$  κορυφές και  $E$  ακμές.

**Παρατήρηση 1:** Αν τα  $a$  και  $b$  είναι σημεία στο  $R^2$ ,  $\beta$  ένας κύκλος που διέρχεται από τα  $a$  και  $b$ , με ακτίνα  $r$  και κέντρο  $c$  στα δεξιά της ευθείας  $\overline{ab}$ , τότε  $r < radius(a, b, p)$  για κάθε σημείο  $p$  μέσα στο  $\beta$  στα αριστερά της ευθείας  $\overline{ab}$  (περιοχή 1 του Σχ. 2.1) ή έξω από το  $\beta$  στα δεξιά της ευθείας  $\overline{ab}$  (βλέπε **Σχήμα 2.1** περιοχή 2).



Σχήμα 2.1: Παρατήρηση 1 [3].

**Λήμμα 2:** Έστω  $S$  οι κορυφές ενός κυρτού πολυγώνου στο  $R^2$ . Αν  $(a, b, c)$  μεγιστοποιεί  $(radius(a, b, c), angle(a, b, c))$  στη λεξικογραφική σειρά, τότε:

- (i) Τα  $a, b$  και  $c$  είναι διαδοχικές κορυφές του πολυγώνου.
- (ii) Ο  $circle(a, b, c)$  περικλείει όλα τα σημεία του  $S$ .

**Απόδειξη:**

- (i) **Περίπτωση 1:**  $angle(a, b, c) \leq \frac{\pi}{2}$ .

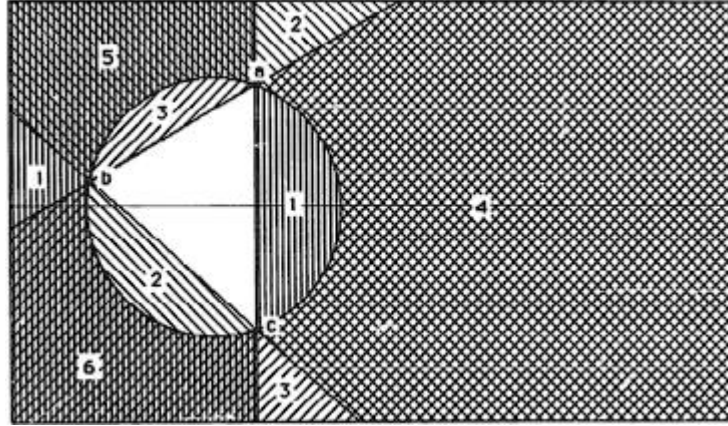
Όλες οι γωνίες στο τρίγωνο με κορυφές  $a, b$  και  $c$  είναι μικρότερες ή ίσες με  $\frac{\pi}{2}$ , αφού η  $angle(a, b, c)$  είναι η μεγαλύτερη από τις τρεις. Εφόσον η  $radius(a, b, c)$  είναι μέγιστη, η **Παρατήρηση 1** εφαρμοσμένη στα  $\{a, b\}$  συνεπάγεται ότι κανένα σημείο του  $S$  δεν μπορεί να βρίσκεται στις περιοχές με τους αριθμούς 3, 4 ή 6 τους **Σχήματος 2.2**. Εφαρμοσμένη στις  $\{b, c\}$  και  $\{a, b\}$  προκύπτει ότι κανένα σημείο στο  $S$  δεν μπορεί να βρίσκεται στις περιοχές με αριθμούς 2, 4, 5 ή 1, 5, 6. Εφόσον το  $S$  είναι ένα κυρτό σύνολο σημείων, όλα τα σημεία του  $S$  πρέπει να βρίσκονται στον κύκλο που διέρχεται από τα  $a, b$  και  $c$ , οπότε ο  $circle(a, b, c)$  περικλείει το  $S$ . Το ότι τα  $a, b$  και  $c$  είναι διαδοχικά είναι τότε επακόλουθο του ότι η  $angle(a, b, c)$  είναι μέγιστη μεταξύ όλων των εμφανιζόμενων γωνιών. Σημειώστε ότι το  $S$  μπορεί να περιέχει μόνο ένα σημείο περισσότερο από τα  $a, b$  και  $c$  και ότι τα σημεία σχηματίζουν τότε τις κορυφές ενός κυρτού τετραγώνου.

- (ii) **Περίπτωση 2:**  $angle(a, b, c) > \frac{\pi}{2}$ .

Η εφαρμογή της **Παρατήρησης 1** και πάλι στα  $\{a, b\}$ ,  $\{b, c\}$  και  $\{a, c\}$  εξασφαλίζει ότι κανένα σημείο στο  $S$  δεν μπορεί να βρίσκεται στην περιοχή 1 του **Σχήματος 2.3**. Ένα σημείο  $p$  από το  $S$  δεν μπορεί να βρίσκεται στην περιοχή 2 διότι τότε το  $b$  θα ήταν ένας κυρτός συνδυασμός των  $a, p$  και  $c$

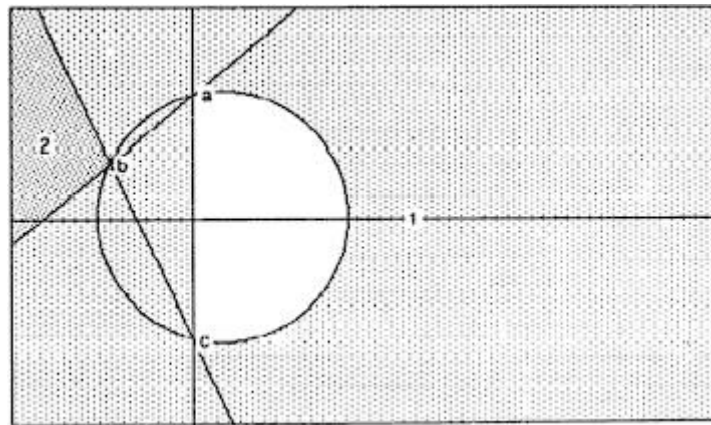


παραβιάζοντας το  $S$  που είναι ένα συρτό σύνολο σημείων. Η μεγιστοποίηση της  $angle(a, b, c)$  εξασφαλίζει και πάλι ότι τα  $a$ ,  $b$  και  $c$  είναι διαδοχικά. Αν το  $p$  βρίσκεται στο  $S - \{a, b, c\}$ , τότε το  $p$  πρέπει να βρίσκεται στην περιοχή χωρίς καπέλο και προκύπτει η **Δήλωση (ii)** του λήμματος.



**Σχήμα 2.2:** Λήμμα 2, Περίπτωση 1 [3].

**Παρατήρηση 3:** Αν η  $angle(a, b, c)$  είναι η μεγαλύτερη από τις τρεις γωνίες του τριγώνου με κορυφές  $a$ ,  $b$  και  $c$ , και αν  $\beta$  είναι κύκλος με ακτίνα μικρότερη από την  $radius(a, b, c)$  που περικλείει τα  $a$  και  $c$ , τότε ο  $\beta$  περικλείει το  $b$  αν και μόνο αν  $angle(a, b, c) \geq \frac{\pi}{2}$ .



**Σχήμα 2.3:** Λήμμα 2, Περίπτωση 2 [3].

**Παρατηρήσεις:**

- (1) Αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι η ακτίνα του  $SEC(S)$  περιορίζεται παραπάνω από το  $R$ , μπορούμε να αφαιρούμε διαδοχικά σημεία από το  $S$  όπου η  $radius(before(p), p, next(p)) > R$  χωρίς να ελέγξουμε τη μεγιστοποίηση.
- (2) Εάν το  $S$  δεν σχηματίζει τις κορυφές ενός κυρτού πολυγώνου για να ξεκινήσει, η σάρωση του Graham [1] μπορεί να ενσωματωθεί φυσικά στον Αλγόριθμο

---

αφήνοντας την  $radius(a, b, c)$  να είναι άπειρη εάν το  $c$  είναι στα αριστερά της ευθείας  $\overline{ab}$ .

- (3) Οι Παρατηρήσεις 1 και 2 υποδηλώνουν ότι με την τροποποίηση του Αλγορίθμου όπως αναφέρεται στο (1) η ύπαρξη (και μια πιθανή κατασκευή) ενός περιβαλλόμενου κύκλου με δεδομένη ακτίνα  $R$  ελέγχεται (κατασκευάζεται) σε γραμμικό χρόνο για ένα πολύγωνο σε σχήμα αστέρα.

**Λήμμα 4:** Έστω  $S$  οι κορυφές ενός κυρτού πολυγώνου στο  $R^2$ . Αν το  $(a, b, c)$  μεγιστοποιεί το  $(radius(a, b, c), angle(a, b, c))$  σε λεξικογραφική σειρά, τότε

- (i) Τα  $a, b$  και  $c$  είναι διαδοχικές κορυφές του πολυγώνου.
- (ii) Κανένα σημείο από το  $S$  δεν βρίσκεται μέσα στον  $circle(a, b, c)$ .
- (iii) Αν το  $b$  είναι μέσα στον  $circle(a', b', c')$  για τρία σημεία  $a', b'$  και  $c'$  από το  $s$ , τότε είτε το  $a$  είτε το  $c$  είναι επίσης μέσα.

## 2.2.2 Περιγραφή του Αλγορίθμου

### Αλγόριθμος

- (i) Αν μέγεθος  $S$  δεν είναι 1 τότε

Τέλος = Ψευδής.

a) Επανάλαβε

(1) Βρες το σημείο  $p$  του  $S$  που μεγιστοποιεί  $(radius(before(p), p, next(p)), angle(before(p), p, next(p)))$  σε λεξικογραφική σειρά.

(2) Αν  $angle(before(p), p, next(p))$  ισούται το πολύ με  $\frac{\pi}{2}$  τότε

a) Τέλος = Αληθής.

(3) Αλλιώς αφαίρεσε το  $p$  από το  $S$ .

b) Μέχρις ότου Τέλος

- (ii) Αλλιώς τερματισμός

Έστω ότι μας δίνεται ένα σύνολο  $S$  με  $n$  κορυφές στο  $R^2$ . Αρχικά θα τρέξει ο αλγόριθμος του Graham [1] στο σύνολο  $S$  και θα υπολογίσει ποιες από τις κορυφές του  $S$  συνθέτουν το κυρτό περίβλημα. Οπότε, από το  $S$  θα αφαιρεθούν όλες εκείνες που δεν το αποτελούν. Έπειτα το νέο σύνολο  $S$  θα το πάρει ως είσοδο ο αλγόριθμος για τον υπολογισμό του ελάχιστου περικλείοντος κύκλου. Στη συνέχεια, θα ελέγξει αν το  $S$  έχει μέγεθος 1 και αν ισχύει θα τερματίσει, αλλιώς επαναληπτικά θα υπολογίζει το εκείνο το  $p$  για το οποίο μεγιστοποιείται το  $(radius(before(p), p, next(p)), angle(before(p), p, next(p)))$  (ουσιαστικά το  $lastkey$  από το δέντρο) σε λεξικογραφική σειρά και αν για εκείνο το  $p$  ισχύει

---

$angle(before(p), p, next(p)) \leq \frac{\pi}{2}$  τότε ο αλγόριθμος τερματίζει αλλιώς αφαιρεί εκείνο το  $p$  από το  $S$  και επαναλαμβάνει την διαδικασία μέχρις ότου να ισχύει  $angle(before(p), p, next(p)) \leq \frac{\pi}{2}$ .

Η ορθότητα του αλγορίθμου βασίζεται στα παραπάνω λήμματα και παρατηρήσεις που αναφέραμε προηγουμένως.

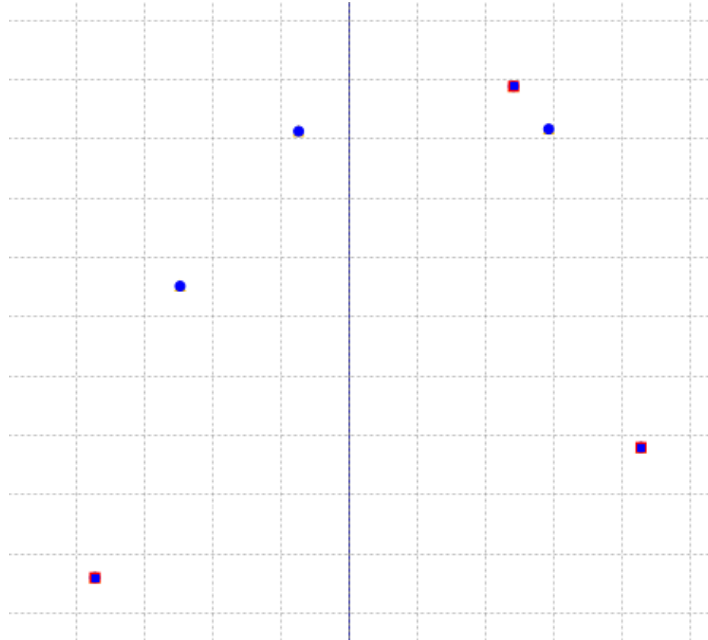
Για να διατηρήσουμε την πολυπλοκότητα χρόνου σε  $O(n \log n)$  χρησιμοποιήσαμε ένα κοκκινόμαυρο ισοζυγισμένο δυαδικό δέντρο αναζήτησης (TreeMap) [6] στο οποίο αποθηκεύουμε ως κλειδί όλα τα radius για κάθε  $p$  και ως τιμή το αντίστοιχο  $p$ . Οπότε κάθε φορά που θέλουμε το μέγιστο radius μπορούμε εύκολα σε  $O(1)$  να το βρούμε καθώς επίσης και  $2 * O(\log n)$  για να βρούμε και να σβήσουμε τα άλλα 2 radius στα οποία συμμετέχει το  $p$ .

Έπειτα χρησιμοποιήσαμε και ένα λεξικό (HashMap) [6] το οποίο χρησιμοποιήσαμε ως πίνακα γειτνίασης με κλειδί τον κόμβο  $p$  και τιμή τους  $before(p)$  και  $next(p)$ . Κάθε φορά που ρωτάμε το λεξικό για τους γείτονές του  $p$  μας κοστίζει  $O(1)$  καθώς επίσης και η ενημέρωση των γειτόνων σε περίπτωση διαγραφής του  $p$ .

Τέλος χρησιμοποιήσαμε και ένα δεύτερο λεξικό το οποίο και χρησιμοποιήσαμε ακριβώς όπως το δέντρο. Ο λόγος είναι διότι κάθε φορά που κάνουμε τις 2 νέες εισαγωγές στο δέντρο πρέπει να ελέγξουμε αν υπάρχει ήδη αντίστοιχο radius με ίδιο  $p$  ώστε να κρατήσουμε εκείνο με το μεγαλύτερο angle και η ερώτηση στο λεξικό μας κοστίζει  $O(1)$  ενώ στο δέντρο  $O(\log n)$ .

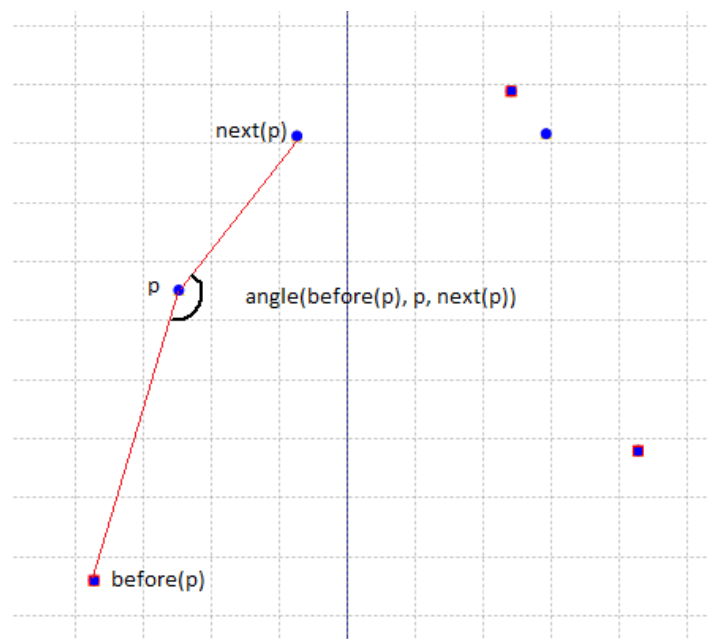
### 2.2.3 Παράδειγμα Εφαρμογής του Αλγορίθμου

Έστω ότι έχουμε 6 σημεία τα οποία έχουν προκύψει από τον αλγόριθμο του Graham [\[1\]](#) οπότε αποτελούν τα σημεία ενός κυρτού πολυγώνου (βλέπε **Σχήμα 3.1**).



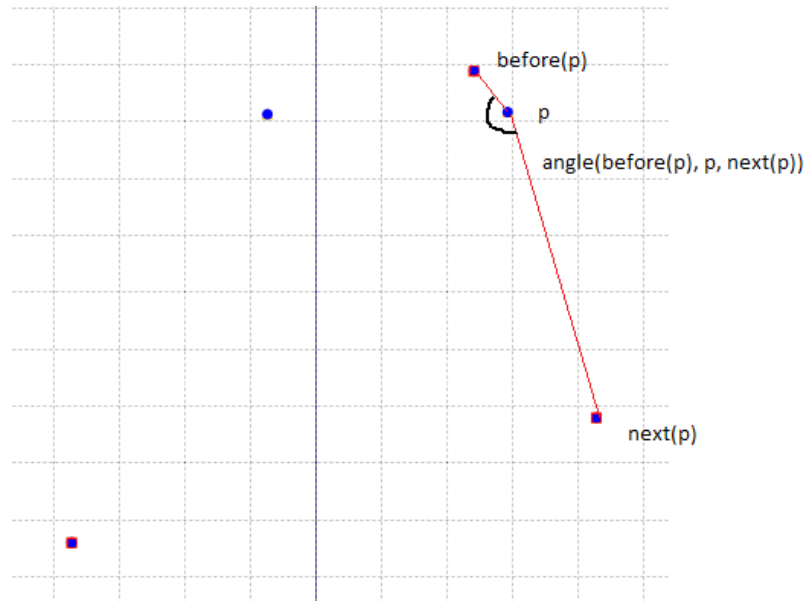
**Σχήμα 3.1:** Σημεία κυρτού πολυγώνου

Έπειτα βρίσκουμε την τριάδα εκείνη που μεγιστοποιεί το radius και παρατηρούμε ότι το angle για εκείνη την τριάδα είναι μεγαλύτερο από  $\frac{\pi}{2}$  οπότε και ο μεσαίος κόμβος αφαιρείται (βλέπε **Σχήμα 3.2**).



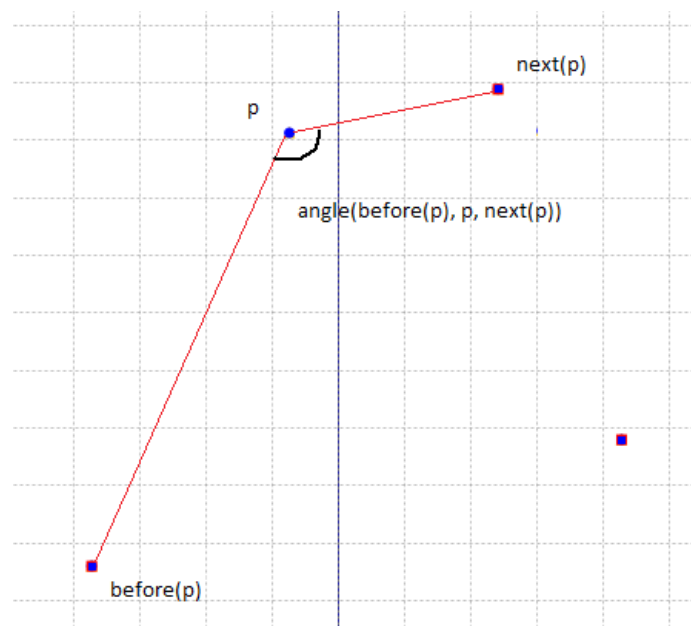
**Σχήμα 3.2:** Επιλογή και διαγραφή του p.

Έπειτα, επιλέγεται η επόμενη μέγιστη τριάδα και πάλι αφαιρείται ο αντίστοιχος διότι το angle είναι μεγαλύτερο από  $\frac{\pi}{2}$  (βλέπε **Σχήμα 3.3**).



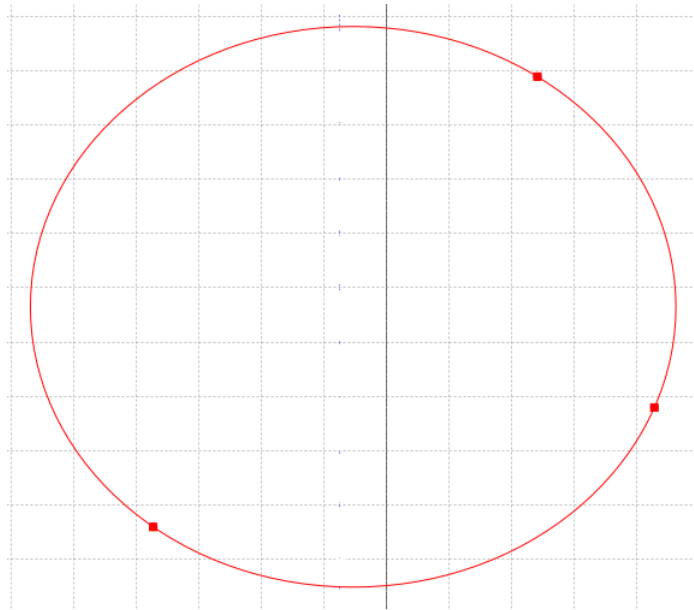
**Σχήμα 3.3:** Επιλογή και διαγραφή του p.

Έπειτα, επιλέγεται η επόμενη μέγιστη τριάδα και πάλι αφαιρείται ο αντίστοιχος διότι το angle είναι μεγαλύτερο από  $\frac{\pi}{2}$  (βλέπε **Σχήμα 3.4**).



**Σχήμα 3.4:** Επιλογή και διαγραφή του p.

Τέλος, ο αλγόριθμος τερματίζει διότι όλα τα angle είναι μικρότερα από  $\frac{\pi}{2}$  και έτσι σχεδιάζεται ο κύκλος (βλέπε **Σχήμα 3.5**).



**Σχήμα 3.5:** Ο ελάχιστος περικλείοντας κύκλος.

---

## 2.3 Υπολογισμός Διαγράμματος Voronoi 1<sup>ης</sup> τάξης

### 2.3.1 Θεωρητικό Υπόβαθρο

Αρχικά, ορίζουμε ως  $ap(p, q) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}$  την ευκλείδεια απόσταση μεταξύ δύο σημείων  $p$  και  $q$ .

Έστω  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  ένα σύνολο  $n$  διαφορετικών σημείων στο επίπεδο, τα σημεία αυτά είναι οι εστίες. Ορίζουμε ως διάγραμμα Voronoi του  $S$  την υποδιαίρεση του επιπέδου σε  $n$  κυψελίδες (ή αλλιώς «κελιά»), μία για κάθε εστία στο  $S$ , η οποία έχει την ιδιότητα ότι ένα σημείο  $q$  κείται στην κυψελίδα που αντιστοιχεί σε μια εστία  $p_i$  αν και μόνο αν  $ap(q, p_i) < ap(q, p_j)$  για κάθε  $p_j$  που ανήκει στο  $S$  με  $j \neq i$  [19].

### 2.3.2 Περιγραφή του Αλγορίθμου

#### Αλγόριθμος

- (i) Για κάθε σημείο  $p$  από το  $S$  πρόσθεσε το  $u(p)$  στο  $K$ .
- (ii) Αν το  $n$  είναι μεγαλύτερο από 2 τότε
  - a) Επανάλαβε
    - (1) Βρες το  $p$  που μεγιστοποιεί το  $(-radius(before(p), p, next(p)), angle(before(p), p, next(p)))$  σε λεξικογραφική σειρά.
    - (2)  $q = before(p)$ .
    - (3)  $c = centre(q, p, next(p))$ .
    - (4) Πρόσθεσε το  $c$  στο  $K$ .
    - (5) Πρόσθεσε τα  $(c, u(p))$  και  $(c, u(q))$  στο  $E$ .
    - (6)  $u(q) = c$ .
    - (7) Αφαίρεσε το  $p$  από το  $S$ .
  - b) Μέχρις ότου το  $n$  να γίνει ίσο με 2.
- (iii) Αλλιώς Αν το  $n$  είναι ίσο με 2 τότε πρόσθεσε το  $(u(p_1), u(p_2))$  στο  $E$ .
- (iv) Τερματισμός

Ο αλγόριθμος για τον υπολογισμό του διαγράμματος Voronoi 1<sup>ης</sup> τάξης είναι ακριβώς ίδιος με τον αλγόριθμο για τον υπολογισμό του ελάχιστου περικλείοντα κύκλου με την διαφορά ότι διατηρούμε δύο επιπλέον δομές για τα  $(K, E)$  που είναι απλές λίστες (`ArrayList<Point2D>`, `ArrayList< ArrayList<Point2D>>`) [6]. Όλες οι υπόλοιπες δομές δεδομένων καθώς και ο αλγόριθμος έχουν συνολικά ακριβώς την ίδια πολυπλοκότητα χρόνου όπως προαναφέραμε ( $O(n \log n)$ ).

---

Αρχικά, ο αλγόριθμος υπολογίζει με βάση την μέθοδο  $u(p)$  (βλέπε μέθοδο **Model/DataBase/Up2**) το  $u(p)$  για όλα τα  $p$  του συνόλου  $S$  και τα προσθέτει στην λίστα κορυφών  $K$  και στο λεξικό  $u(\text{HashMap}<\text{Point2D}, \text{Point2D}>)$  όπου κλειδί του λεξικού είναι το  $p$  και τιμή το  $u(p)$  σε  $O(n)$  χρόνο. Το  $u(p)$  είναι ένα σημείο πάνω στην μεσοκάθετο  $\overline{pnext(p)}$  με την ιδιότητα να αποτελεί κέντρο κύκλου το οποίο περιέχει τα  $p$  και  $next(p)$  και κανένα άλλο σημείο.

Έπειτα, όπως και στον αλγόριθμο για τον υπολογισμό του ελάχιστου περικλείοντα κύκλου υπολογίζει επαναληπτικά με το  $p$  για το οποίο μεγιστοποιείται το  $(-radius(before(p), p, next(p)), angle(before(p), p, next(p)))$ , ουσιαστικά το  $firstkey$  από το δέντρο.

Στην συνέχεια, υπολογίζει το  $centre(before(p), p, next(p))$  (έστω  $c$ ) και το προσθέτει την λίστα κορυφών  $K$ .

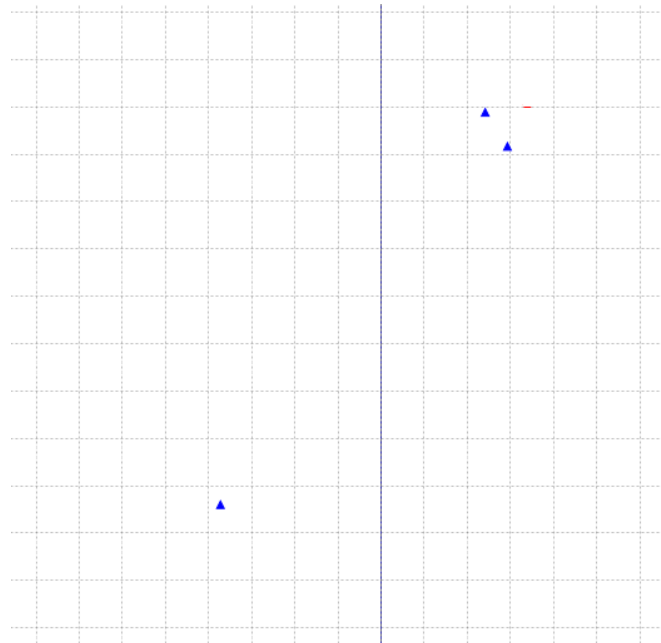
Έπειτα, προσθέτει στην λίστα των ακμών  $E$  τα ζεύγη  $(c, u(p))$  και  $(c, u(before(p)))$  τα οποία  $u(p)$  και  $u(q)$  δεν τα υπολογίζει ξανά, αλλά τα παίρνει από το λεξικό  $u$ .

Στη συνέχεια, ενημερώνει το αντίστοιχο  $u(before(p))$  στο λεξικό  $u$  με το  $c$ .

Τέλος, σβήνει το  $p$  από την λίστα και επαναλαμβάνονται όλα τα προηγούμενα βήματα έως ότου μείνουν 2 σημεία.

### 2.3.3 Παράδειγμα Εφαρμογής του Αλγορίθμου

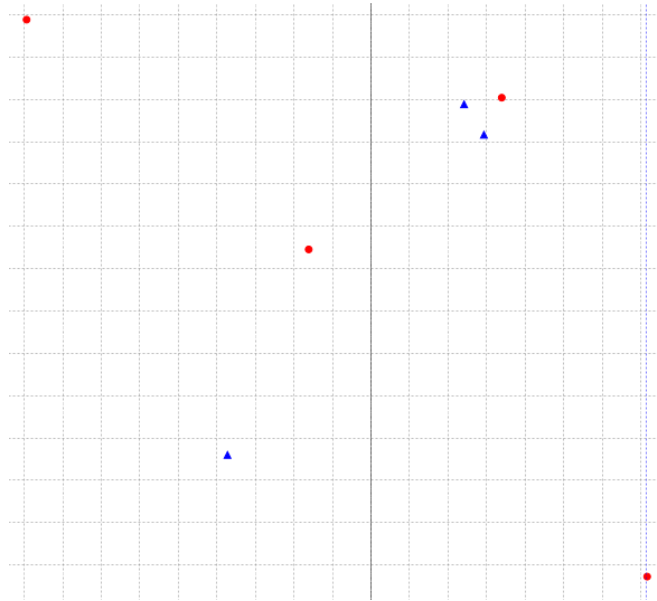
Έστω ότι έχουμε 3 σημεία τα οποία έχουν προκύψει από τον αλγόριθμο του Graham [\[1\]](#) οπότε αποτελούν τα σημεία ενός κυρτού πολυγώνου (βλέπει **Σχήμα 3.6**).



**Σχήμα 3.6:** Σημεία κυρτού πολυγώνου.

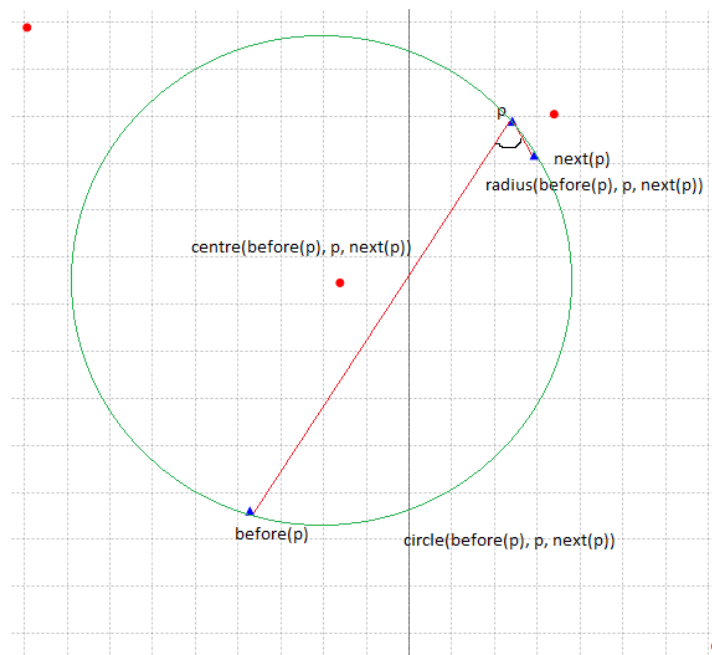


Αρχικά, ο αλγόριθμος θα υπολογίσει (εκτιμήσει) το  $u(p)$  για κάθε σημείο  $p$  του συνόλου με τα σημεία του κυρτού πολυγώνου (βλέπε **Σχήμα 3.7**).



**Σχήμα 3.7:**  $u(p)$  (κόκκινα) για κάθε σημείο (μπλε).

Έπειτα βρίσκουμε την τριάδα εκείνη που μεγιστοποιεί το radius. Έπειτα υπολογίζεται το κέντρο του κύκλου που περνάει από τα  $before(p), p$  και  $next(p)$  ( $centre(before(p), p, next(p))$ ) (έστω  $c$ ) το οποίο θα προστεθεί την λίστα των κορυφών  $K$ . Στην συνέχεια, προστίθενται στην λίστα ακμών  $E$  τα  $(c, u(p))$  και  $(c, before(p))$ . Τέλος, ενημερώνεται το αντίστοιχο  $u(p)$  από την λίστα (λεξικό)  $u$  με το νέο  $c$  και αφαιρείται το  $p$  (βλέπε **Σχήμα 3.8**).



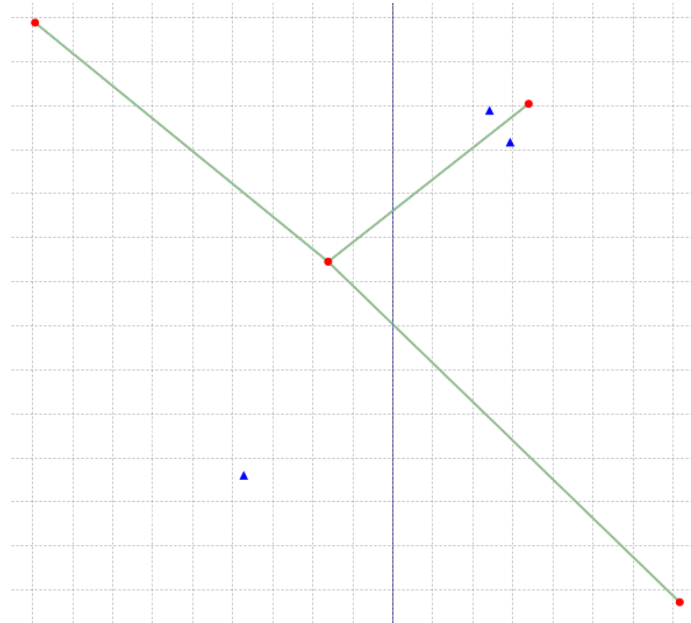
**Σχήμα 3.8:** Επιλογή και διαγραφή του  $p$ .

---

Η διαδικασία αυτή θα επαναληφθεί έως ότου το μέγεθος του συνόλου  $S$  γίνει 2.

Τέλος, προστίθενται στην λίστα ακμών  $E$  τα  $(c, u(next(p)))$ .

Οπότε, το τελικό διάγραμμα φαίνεται στην **Σχήμα 3.9**.



**Σχήμα 3.9:** Διάγραμμα Voronoi Πλησιέστερου Γείτονα (1<sup>ης</sup> τάξης).

---

## 2.4 Υπολογισμός Διαγράμματος Voronoi n-1 τάξης

### 2.4.1 Θεωρητικό Υπόβαθρο

Αρχικά, ορίζουμε ως  $ap(p, q) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}$  την ευκλείδεια απόσταση μεταξύ δύο σημείων  $p$  και  $q$ .

Έστω  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  ένα σύνολο  $n$  διαφορετικών σημείων στο επίπεδο. Ορίζουμε ως διάγραμμα Voronoi του πιο Απομακρυσμένου Γείτονα του  $S$  την διαίρεση του επιπέδου σε  $n$  κυψελίδες (ή αλλιώς «κελιά»), στα οποία το ίδιο σημείο του  $S$  είναι το πιο απομακρυσμένο σημείο. Ένα σημείο του  $S$  έχει μια κυψελίδα στο διάγραμμα Voronoi του πιο Απομακρυσμένου Γείτονα αν και μόνο αν είναι κορυφή του Κυρτού Περιβλήματος το  $S$  [11]. Έστω  $H = \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$  είναι το Κυρτό Περίβλημα του  $S$ , τότε το διάγραμμα Voronoi του πιο Απομακρυσμένου Γείτονα είναι μια υποδιαίρεση του επιπέδου σε  $k$  κυψελίδες, ένα για κάθε σημείο του  $H$ , με την ιδιότητα ότι ένα σημείο  $q$  βρίσκεται στην κυψελίδα που αντιστοιχεί σε μια θέση  $h_i$  αν και μόνο αν  $ap(q, h_i) > ap(q, p_j)$  για κάθε  $p_j$  του  $S$  με  $h_i \neq p_j$ . Τα όρια των κελιών του διαγράμματος Voronoi του πιο Απομακρυσμένου Γείτονα έχουν τη δομή ενός τοπολογικού δέντρου, με άπειρες ακτίνες ως φύλλα του [20].

### 2.4.2 Περιγραφή του Αλγορίθμου

#### Αλγόριθμος

- (i) Για κάθε σημείο  $p$  από το  $S$  πρόσθεσε το  $u(p)$  στο  $K$ .
- (ii) Αν το  $n$  είναι μεγαλύτερο από 2 τότε
  - a) Επανάλαβε
    - (1) Βρες το  $p$  που μεγιστοποιεί το  $(radius(before(p), p, next(p)), angle(before(p), p, next(p)))$  σε λεξικογραφική σειρά.
    - (2)  $q = before(p)$ .
    - (3)  $c = centre(q, p, next(p))$ .
    - (4) Πρόσθεσε το  $c$  στο  $K$ .
    - (5) Πρόσθεσε τα  $(c, u(p))$  και  $(c, u(q))$  στο  $E$ .
    - (6)  $u(q) = c$ .
    - (7) Αφαίρεσε το  $p$  από το  $S$ .
  - b) Μέχρις ότου το  $n$  να γίνει ίσο με 2.
- (iii) Αλλιώς Αν το  $n$  είναι ίσο με 2 τότε πρόσθεσε το  $(u(p1), u(p2))$  στο  $E$ .
- (iv) Τερματισμός

---

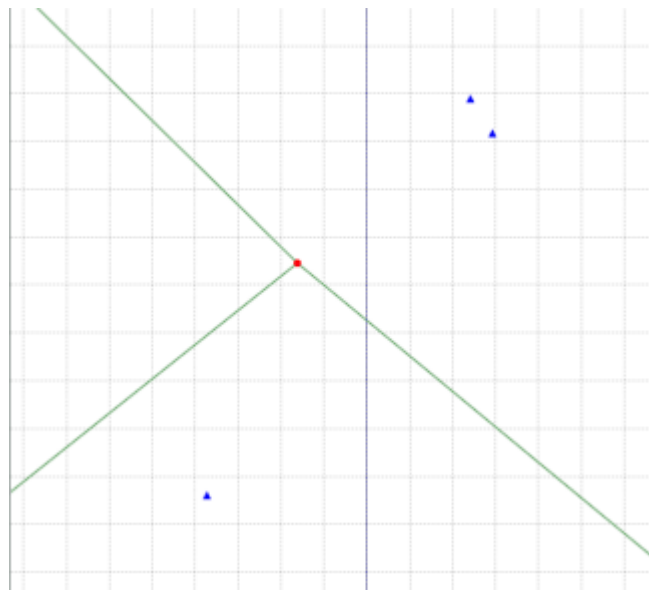
Ο αλγόριθμος για τον υπολογισμό του Διαγράμματος Voronoi  $n-1$  τάξης [3] είναι ακριβώς ο ίδιος με εκείνον για τον υπολογισμό του Διαγράμματος Voronoi 1<sup>ης</sup> [3] τάξης με δύο βασικές διαφορές.

Η πρώτη διαφορά μεταξύ έγκειται στο γεγονός ότι η μέθοδος  $u(p)$  υπολογίζεται με παρόμοιο τρόπο (βλέπε μέθοδο **Model/DataBase/Up2**). Σε αυτήν την περίπτωση το  $u(p)$  είναι ένα σημείο πάνω στην μεσοκάθετο  $\overline{pnext(p)}$  με την ιδιότητα να αποτελεί κέντρο κύκλου το οποίο περιέχει τα  $p$  και  $next(p)$  και όλα τα υπόλοιπα σημεία.

Η δεύτερη διαφορά είναι στην εύρεση του  $p$  που μεγιστοποιεί αυτήν την φορά το  $(radius(before(p), p, next(p)), angle(before(p), p, next(p)))$  όπως και στον αλγόριθμο για τον υπολογισμό του ελάχιστου περικλείοντα κύκλου [3], ουσιαστικά το  $lastkey$  από το δέντρο.

### 2.4.3 Παράδειγμα Εφαρμογής του Αλγορίθμου

Εφόσον λοιπόν ο τρόπος λειτουργίας είναι ίδιος με εκείνον του προηγούμενου αλγορίθμου παραθέτουμε το τελικό διαγράμματα για το ίδιο σύνολο  $S$  (βλέπε **Σχήμα 3.10**).



**Σχήμα 3.10:** Διάγραμμα Voronoi του πιο Απομακρυσμένου Γείτονα ( $n-1$  τάξης).

---

## Κεφάλαιο 3. Η Υλοποίηση

### 3.1 Είσοδος-Έξοδος

Η εφαρμογή έχει την δυνατότητα να διαβάσει ένα σύνολο σημείων το ευκλείδειου επιπέδου από ένα σύνολο αρχείων και να εξάγει τα αντίστοιχα γραφήματα.

Πιο συγκεκριμένα, ο χρήστης μπορεί να φορτώσει τα σημεία του από το παρακάτω σύνολο αρχείων:

- .csv: Csv αρχείο με δύο στήλες αριθμών
- .txt: Txt αρχείο με δύο στήλες αριθμών χωρισμένους με κόμμα μεταξύ του
- .xls: Excel 1997-2003 αρχείο με δύο στήλες αριθμών
- .xlsx: Excel 2007-2022 αρχείο με δύο στήλες αριθμών

Έπειτα, η εφαρμογή να υπολογίσει και θα εμφανίσει σε 3 ξεχωριστά παράθυρα τα αντίστοιχα γραφήματα για το κάθε διάγραμμα.

### 3.2 Δομές Δεδομένων

Στην εφαρμογή χρησιμοποιούμε κατά βάση 3 Δομές Δεδομένων [\[7\]](#).

Η πρώτη Δομή είναι ένα σύνολο από πίνακες (ArrayList) που χρησιμοποιήσαμε για να αποθηκεύσουμε το αρχικό σύνολο σημείων, των σημείων του κυρτού πολυγώνου, των σημείων του κύκλου καθώς. Κύριος σκοπός αυτής της δομής είναι η αποθήκευση και μόνο των αντίστοιχων σημείων και δεν συμμετέχουν σε υπολογισμούς παρά μόνο για ανάγνωση των περιεχομένων τους διότι έχουν πολύ υψηλή πολυπλοκότητα για βασικές λειτουργίες που χρειαστήκαμε κατά την υλοποίηση των αλγορίθμων (όπως  $O(n)$  για διαγραφή ενός στοιχείου).

Η δεύτερη Δομή είναι ένα Κοκκινόμαυρο Ισοζυγισμένο Δυαδικό Δένδρο Αναζήτησης (Tree Map) [\[4\]](#) το οποίο χρησιμοποιήσαμε για να αποθηκεύσουμε τα radius για κάθε 3-

---

άδα καθώς επίσης και τον κεντρικό κόμβο-σημείο της 3-άδας. Αυτό μας βοήθησε πολύ διότι για σχεδόν όλες τις υποστηριζόμενες λειτουργίες που χρειαστήκαμε η πολυπλοκότητα είναι  $O(\log n)$  και επιπλέον έχει την ιδιότητα ότι διατηρεί τα στοιχεία του ταξινομημένα. Αυτό επίσης μας βοήθησε στο γεγονός ότι ο κάθε αλγόριθμος χρειαζόταν σε κάθε επανάληψη να αφαιρεί και έναν κόμβο το οποίο σημαίνει ότι θα έπρεπε να υπολογιστούν ξανά 3 radius (μιας και ένας κόμβος συμμετέχει σε 3 3-άδες) τα οποία και θα έπρεπε να αφαιρεθούν από το δέντρο (πολυπλοκότητα  $3 * O(\log n)$ ) και να γίνουν 2 νέες εισαγωγές radius στο δέντρο (πολυπλοκότητα  $2 * O(\log n)$ ) στην σωστή θέση ώστε το δένδρο να παραμείνει ισοζυγισμένο.

Η τρίτη και τελευταία Δομή είναι ένα σύνολο από λεξικά (HashMap) [5] που τα χρησιμοποιήσαμε για να αποθηκεύσουμε στο πρώτο τον πίνακα γειτνίασης και στο δεύτερο αντίστοιχα radius και τους κεντρικούς κόμβων. Ο λόγος που χρησιμοποιήσαμε λεξικά είναι διότι η πολυπλοκότητα για τις βασικές λειτουργίες που χρειαστήκαμε είναι  $O(1)$ . Αυτό μας βοήθησε αρκετά διότι κάναμε πολλές αναζητήσεις με συγκεκριμένο κλειδί όπως επίσης και διαγραφές.

### 3.3 Κλάσεις/Πακέτα

Σε αυτήν την ενότητα θα περιγράψουμε περιληπτικά και θα παραθέσουμε κομμάτια (κλάσεις και μεθόδους) του κώδικα. Αξίζει να σημειώσουμε ότι χρησιμοποιήσαμε το πρότυπο αρχιτεκτονικής MVC (Model View Control) [13] για την γενική μορφή του κώδικα καθώς και άλλες μεθόδους δημιουργίας κλάσεων (όπως Factory Pattern) [12] ώστε ο κώδικας να είναι αναγνώσιμος και επεκτάσιμος από κάποιον άλλον.

Η δομή των παρακάτω κεφαλαίων είναι η εξής: Κλάση/Πακέτο

---

### 3.3.1 MainGUI/View

Η κλάση 'MainGUI' είναι υπεύθυνη για την δημιουργία του κύριου παραθύρου καθώς και την αρχικοποίηση των Handlers (Κλάσεις που διαχειρίζονται τις λειτουργίες). Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της. Επιπλέον βρίσκεται και με μέθοδος 'main' η οποία είναι υπεύθυνη για την έναρξη του προγράμματος.

```
package View;

import java.net.URL;

import java.util.ArrayList;

import Control.ChangeLanguageButtonHandler;

import Control.ExitButtonHandler;

import Control.InfoButtonHandler;

import Control.LoadFileButtonHandler;

import Control.PaperTitleHandler;

import Control.PutPointsButtonHandler;

import javafx.application.Application;

import javafx.event.EventHandler;

import javafx.geometry.Pos;

import javafx.scene.Cursor;

import javafx.scene.Scene;

import javafx.scene.control.Button;

import javafx.scene.control.Label;

import javafx.scene.image.Image;

import javafx.scene.image.ImageView;

import javafx.scene.layout.BorderPane;

import javafx.scene.layout.VBox;

import javafx.stage.Stage;

import javafx.stage.WindowEvent;

public class MainGUI extends Application

{
```

---

```
private String javaVersion = System.getProperty("java.version");

private String javafxVersion = System.getProperty("javafx.version");

private String version = "v0.9.9";

private Stage stage;

private Scene scene;

private Button changeLanguageButton;

private Button loadFileButton;

private Button putPointsButton;

private Button exitButton;

private Button infoButton;

private BorderPane borderPane;

private VBox vbox;

private Label paperTitle;

private ImageView imageViewMain;

private ImageView imageViewMain2;

private ArrayList<Button> buttons;

@Override

public void start(Stage stage)

{

    buttons = new ArrayList<Button>();

    this.stage = stage;

    createButtons();

    createPaperTitle();

    createSecondPane();

    createMainPane();

    scene = new Scene(borderPane);

    scene.getStylesheets().add("styles.css");

    createAndSetHandlers();

    createMainLogo2();
```



---

```
createStage();

}

public static void main(String[] args)

{

    launch();

}

private void createAndSetHandlers()

{

    changeLanguageButton.setOnAction(new ChangeLanguageButtonHandler(buttons,
    paperTitle));

    loadFileButton.setOnAction(new LoadFileButtonHandler());

    putPointsButton.setOnAction(new PutPointsButtonHandler());

    exitButton.setOnAction(new ExitButtonHandler(stage));

    infoButton.setOnAction(new InfoButtonHandler());

}

private void createButtons()

{

    changeLanguageButton = new Button();

    loadFileButton = new Button();

    putPointsButton = new Button();

    exitButton = new Button();

    infoButton = new Button(" ? ");

    changeLanguageButton.setId("changeLanguageButton");

    loadFileButton.setId("loadFileButton");

    putPointsButton.setId("putPointsButton");

    exitButton.setId("exitButton");

    infoButton.setId("infoButton");

    changeLanguageButton.setCursor(Cursor.HAND);

    loadFileButton.setCursor(Cursor.HAND);

    putPointsButton.setCursor(Cursor.HAND);
```

---

```
exitButton.setCursor(Cursor.HAND);

infoButton.setCursor(Cursor.HAND);

loadFileButton.setMaxWidth(Double.MAX_VALUE);

putPointsButton.setMaxWidth(Double.MAX_VALUE);

exitButton.setMaxWidth(Double.MAX_VALUE);

buttons.add(changeLanguageButton);

buttons.add(loadFileButton);

buttons.add(putPointsButton);

buttons.add(exitButton);

buttons.add(infoButton);

}

private void createMainPane()

{

borderPane = new BorderPane();

borderPane.setId("borderPane");

createMainLogo();

borderPane.setTop(null);

borderPane.setLeft(imageViewMain);

borderPane.setAlignment(imageViewMain, Pos.CENTER);

//-----

borderPane.setCenter(vbox);

borderPane.setAlignment(vbox, Pos.CENTER);

//-----

borderPane.setTop(changeLanguageButton);

borderPane.setAlignment(changeLanguageButton, Pos.CENTER_RIGHT);

borderPane.setBottom(infoButton);

borderPane.setAlignment(infoButton, Pos.CENTER_RIGHT);

}

private void createPaperTitle()
```

---

```
{

paperTitle = new Label();

paperTitle.setCursor(Cursor.HAND);

paperTitle.setOnMouseClicked(new PaperTitleHandler());

}

private void createSecondPane()

{

vbox = new VBox(10);

vbox.setId("vbox");

vbox.getChildren().addAll(paperTitle, loadFileButton, putPointsButton,
exitButton);

}

private void createMainLogo()

{

URL url = getClass().getResource("/Icons/MainLogo_W.png");

Image imageMain = new Image(url.toString());

imageViewMain = new ImageView(imageMain);

imageViewMain.setFitHeight(573);

imageViewMain.setFitWidth(300);

}

private void createMainLogo2()

{

URL url = getClass().getResource("/Icons/MainLogo_W.png");

Image imageMain2 = new Image(url.toString());

imageViewMain2 = new ImageView(imageMain2);

imageViewMain2.setFitHeight(38);

imageViewMain2.setFitWidth(17);

}

private void createStage()

{
```

---

```
URL url = getClass().getResource("/Icons/circle.png");

Image stageImage = new Image(url.toString());

stage.getIcons().add(stageImage);

stage.setTitle("Sven Skyum 1991, JavaFX " + javafxVersion + ", running on
Java " + javaVersion + ", "+version);

stage.setHeight(700);

stage.setWidth(600);

stage.setResizable(false);

stage.setScene(scene);

stage.setOnCloseRequest(new EventHandler<WindowEvent>() {

    public void handle(WindowEvent we)

    {

        stage.close();

        System.exit(0);

    }

});

stage.show();

}
```

---

### 3.3.2 SmallestEnclosingCircleGUI/View

Η κλάση 'SmallestEnclosingCircleGUI' είναι υπεύθυνη για την δημιουργία και την εμφάνιση του διαγράμματος του Ελάχιστου Περικλείοντος Κύκλους στον χρήστη. Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της.

```
package View;

import java.awt.BasicStroke;

import java.awt.Color;

import java.awt.Font;

import java.awt.geom.Ellipse2D;

import java.net.URL;

import java.util.ArrayList;

import org.jfree.chart.ChartFactory;

import org.jfree.chart.JFreeChart;

import org.jfree.chart.annotations.XYShapeAnnotation;

import org.jfree.chart.fx.ChartViewer;

import org.jfree.chart.plot.XYPlot;

import org.jfree.chart.renderer.xy.XYLineAndShapeRenderer;

import org.jfree.chart.title.TextTitle;

import org.jfree.data.xy.XYSeries;

import org.jfree.data.xy.XYSeriesCollection;

import Control.CustomMouseListener;

import javafx.scene.Scene;

import javafx.scene.image.Image;

import javafx.stage.Stage;

import javafx.geometry.Point2D;

public class SmallestEnclosingCircleGraphGUI

{

    private ArrayList<Point2D> allPoints;

    private ArrayList<Point2D> convexPoints;
```

---

```
private ArrayList<Point2D> circlePoints;

private Stage circleStage;

private String path;

private String title;

private XYSeriesCollection dataset;

private XYPlot plot;

private TextTitle textSubTitle;

private Ellipse2D circle;

public SmallestEnclosingCircleGraphGUI(String path)

{

this.path = path;

}

public void setTitle(String title)

{

this.title = title;

}

public void setAllPoints(ArrayList<Point2D> allPoints)

{

this.allPoints = allPoints;

}

public void setConvexPoints(ArrayList<Point2D> convexPoints)

{

this.convexPoints = convexPoints;

}

public void setCirclePoints(ArrayList<Point2D> circlePoints)

{

this.circlePoints = circlePoints;

}

public void setCircleObject(Ellipse2D circle)
```

---

```

{

this.circle = circle;

}

public void initialize(int x, int y)

{

    createStage(x, y);

    displaySmallestEnclosingCircle();

    circleStage.show();

}

private void createStage(int x, int y)

{

    circleStage = new Stage();

    circleStage.setTitle(title+" -> "+path+" -> "+(allPoints.size())+" points");

    circleStage.setHeight(700);

    circleStage.setWidth(700);

    circleStage.setX(x);

    circleStage.setY(y);

    circleStage.setResizable(true);

    URL url = getClass().getResource("/Icons/circle.png");

    Image stageImage = new Image(url.toString());

    circleStage.getIcons().add(stageImage);

}

private void displaySmallestEnclosingCircle()

{

    textSubTitle = new TextTitle("Current Point: None");

    textSubTitle.setFont(new Font("SansSerif", Font.PLAIN, 12));

    makePlot();

    ChartViewer viewer = new ChartViewer(makeChart());

    viewer.addChartMouseListener(new CustomMouseListener(textSubTitle));

```

---

```

circleStage.setScene(new Scene(viewer));

}

private XYSeriesCollection makeSeriesAndDataset()

{

    int circlePointsSize = circlePoints.size();

    int convexPointsSize = convexPoints.size();

    int allPointsSize = allPoints.size();

    XYSeries series1 = new XYSeries("allPoints -> "+(allPointsSize-
convexPointsSize)+"convexPoints+circlePoints");

    XYSeries series2 = new XYSeries("convexPoints -> "+(convexPointsSize -
circlePointsSize)+"circlePoints"+" ||");

    XYSeries series3 = new XYSeries("circlePoints -> "+circlePointsSize+" ||");

    dataset = new XYSeriesCollection();

    for(int i=0; i<allPointsSize; i++)

    {

        series1.add(allPoints.get(i).getX(), allPoints.get(i).getY());

    }

    for(int i=0; i<convexPointsSize; i++)

    {

        series2.add(convexPoints.get(i).getX(), convexPoints.get(i).getY());

    }

    for(int i=0; i<circlePointsSize; i++)

    {

        series3.add(circlePoints.get(i).getX(), circlePoints.get(i).getY());

    }

    dataset.addSeries(series3);

    dataset.addSeries(series2);

    dataset.addSeries(series1);

    dataset.setAutoWidth(true);

    return dataset;

```



---

```

}

private void makePlot()

{

JFreeChart scatterPlot = ChartFactory.createScatterPlot(

"Current Point: None", // Chart title

"X", // X-Axis Label

"Y", // Y-Axis Label

makeSeriesAndDataset() // Dataset for the Chart

);

plot = (XYPlot)scatterPlot.getPlot();

plot.addAnnotation(makeCircle());

plot.setDomainPannable(true);

plot.setRangePannable(true);

plot.setDomainCrosshairLockedOnData(true);

plot.setRangeMinorGridlinesVisible(true);

plot.setDomainCrosshairVisible(true);

plot.setDomainZeroBaselineVisible(true);

plot.setOutlineVisible(true);

plot.setBackgroundPaint(Color.WHITE);

plot.setDomainGridlinePaint(Color.GRAY);

plot.setRangeGridlinePaint(Color.GRAY);

plot.setRenderer(makeRenderer());

}

private XYShapeAnnotation makeCircle(){

XYShapeAnnotation annotation = new XYShapeAnnotation(circle, new

BasicStroke(1.0f), Color.RED, null);

annotation.setToolTipText("center="+circle.getCenterX()+"",

"+circle.getCenterY()+"\nradius="+circle.getWidth()/2);

return annotation;

}

```

---

```
private XYLineAndShapeRenderer makeRenderer(){

XYLineAndShapeRenderer renderer2 = new XYLineAndShapeRenderer();

renderer2.setSeriesPaint(0, Color.RED); //circle points

renderer2.setSeriesLinesVisible(0, false);

renderer2.setSeriesShapesVisible(0, true);

renderer2.setSeriesPaint(1, Color.BLUE); //convex points

renderer2.setSeriesLinesVisible(1, false);

renderer2.setSeriesShapesVisible(1, true);

renderer2.setSeriesPaint(2, Color.ORANGE); // all points

renderer2.setSeriesLinesVisible(2, false);

renderer2.setSeriesShapesVisible(2, true);

return renderer2;

}

private JFreeChart makeChart(){

JFreeChart chart = new JFreeChart(plot);

chart.setTitle(title);

chart.getTitle().setPaint(Color.decode("#006699"));

chart.getTitle().setFont(new Font("Arial", Font.TRUETYPE_FONT, 24));

chart.setBackgroundPaint(Color.decode("#f0f9f6"));

chart.addSubtitle(textSubTitle);

chart.setElementHinting(true);

chart.setTextAntiAlias(true);

chart.setNotify(true);

chart.setAntiAlias(true);

chart.setBorderVisible(false);

return chart;

}

}
```

---

### 3.3.3 VoronoiGraphGUI/View

Η κλάση 'VoronoiGraphGUI' είναι υπεύθυνη για την δημιουργία και την εμφάνιση των διαγραμμάτων Voronoi (πλησιέστερου και πιο απομακρυσμένου γείτονα) στον χρήστη. Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της.

```
package View;

import java.awt.BasicStroke;

import java.awt.Color;

import java.awt.Font;

import java.net.URL;

import java.util.ArrayList;

import org.jfree.chart.ChartFactory;

import org.jfree.chart.JFreeChart;

import org.jfree.chart.fx.ChartViewer;

import org.jfree.chart.plot.XYPlot;

import org.jfree.chart.renderer.xy.XYLineAndShapeRenderer;

import org.jfree.chart.title.TextTitle;

import org.jfree.data.xy.XYSeries;

import org.jfree.data.xy.XYSeriesCollection;

import Control.CustomMouseListener;

import javafx.geometry.Point2D;

import javafx.scene.Scene;

import javafx.scene.image.Image;

import javafx.stage.Stage;

public class VoronoiGraphGUI

{

    private int allPointsSize;

    private ArrayList<Point2D> convexPoints;

    private ArrayList<Point2D> K;

    private ArrayList<ArrayList<Point2D>> E;
```

---

```
private Stage voronoiStage;

private String path;

private String title;

private XYPlot plot;

private TextTitle textSubTitle;

public VoronoiGraphGUI(String path)

{

    this.path = path;

}

public void setTitle(String title)

{

    this.title = title;

}

public void setAllPointsSize(int allPointsSize)

{

    this.allPointsSize = allPointsSize;

}

public void setConvexPoints(ArrayList<Point2D> convexPoints)

{

    this.convexPoints = convexPoints;

}

public void setK(ArrayList<Point2D> K)

{

    this.K = K;

}

public void setE(ArrayList<ArrayList<Point2D>> E)

{

    this.E = E;

}
```

---

```
public void initialize(int x, int y)

{

createStage(x, y);

displaySmallestEnclosingCircle();

voronoiStage.show();

}

private void createStage(int x, int y)

{

voronoiStage = new Stage();

voronoiStage.setTitle(title+" -> "+path+" -> "+(allPointsSize)+" points");

voronoiStage.setHeight(700);

voronoiStage.setWidth(700);

voronoiStage.setX(x);

voronoiStage.setY(y);

voronoiStage.setResizable(true);

URL url = getClass().getResource("/Icons/circle.png");

Image stageImage = new Image(url.toString());

voronoiStage.getIcons().add(stageImage);

}

private void displaySmallestEnclosingCircle()

{

textSubTitle = new TextTitle("Current Point: None");

textSubTitle.setFont(new Font("SansSerif", Font.PLAIN, 12));

makePlot();

ChartViewer viewer = new ChartViewer(makeChart());

viewer.addChartMouseListener(new CustomMouseListener(textSubTitle));

voronoiStage.setScene(new Scene(viewer));

}

private XYSeriesCollection makeSeriesAndDataset()
```

---

```

{

XYSeries series0 = new XYSeries("convexPoints -> "+(convexPoints.size()));

XYSeries series1 = new XYSeries("Voronoi Edges -> "+(K.size())+" ||");

XYSeries series2 = new XYSeries("Voronoi Lines -> "+(E.size())+" ||");

XYSeriesCollection dataset = new XYSeriesCollection();

for(int i=0; i<convexPoints.size(); i++)

{

series0.add(convexPoints.get(i).getX(), convexPoints.get(i).getY());

}

for(int i=0; i<K.size(); i++)

{

series1.add(K.get(i).getX(), K.get(i).getY());

}

dataset.addSeries(series2); // Voronoi Cell

dataset.addSeries(series1); // Voronoi Edges

dataset.addSeries(series0); // convexPoints

for(int i=0; i<E.size(); i++) // Voronoi Cells

{

XYSeries series = new XYSeries(i+"");

series.add(E.get(i).get(0).getX(), E.get(i).get(0).getY());

series.add(E.get(i).get(1).getX(), E.get(i).get(1).getY());

dataset.addSeries(series);

}

dataset.setAutoWidth(true);

return dataset;

}

private void makePlot()

{

JFreeChart scatterPlot = ChartFactory.createScatterPlot(

```

---

```

"Current Point: None", // Chart title

"X", // X-Axis Label

"Y", // Y-Axis Label

makeSeriesAndDataset() // Dataset for the Chart

);

plot = (XYPlot)scatterPlot.getPlot();

plot.setDomainPannable(true);

plot.setRangePannable(true);

plot.setDomainCrosshairLockedOnData(true);

plot.setRangeMinorGridlinesVisible(true);

plot.setDomainCrosshairVisible(true);

plot.setDomainZeroBaselineVisible(true);

plot.setOutlineVisible(true);

plot.setBackgroundPaint(Color.WHITE);

plot.setDomainGridlinePaint(Color.GRAY);

plot.setRangeGridlinePaint(Color.GRAY);

plot.setRenderer(makeRenderer());

}

private XYLineAndShapeRenderer makeRenderer()

{

XYLineAndShapeRenderer renderer2 = new XYLineAndShapeRenderer();

renderer2.setSeriesPaint(2, Color.BLUE); //convex points

renderer2.setSeriesLinesVisible(2, false);

renderer2.setSeriesShapesVisible(2, true);

renderer2.setSeriesPaint(1, Color.RED); //voronoi edges

renderer2.setSeriesLinesVisible(1, false);

renderer2.setSeriesShapesVisible(1, true);

renderer2.setSeriesPaint(0, Color.PINK); //voronoi cells

renderer2.setSeriesLinesVisible(0, false);

```

---

```

render2.setSeriesShapesVisible(0, false);

for(int i=0; i<E.size(); i++)
{
    int offset = 3;

    render2.setSeriesPaint(offset+i, Color.decode("#8fbc8f")); //voronoi cells
    render2.setSeriesLinesVisible(offset+i, true);
    render2.setSeriesShapesVisible(offset+i, false);

    render2.setSeriesStroke(offset+i, new BasicStroke(2.0f)); //light green
    render2.setSeriesItemLabelsVisible(offset+i, false);
    render2.setDefaultItemLabelsVisible(false);
    render2.setSeriesVisibleInLegend(offset+i, false);
}

return render2;
}

private JFreeChart makeChart() {
    JFreeChart chart = new JFreeChart(plot);

    chart.setTitle(title);

    chart.getTitle().setPaint(Color.decode("#006699"));

    chart.getTitle().setFont(new Font("Arial", Font.TRUETYPE_FONT, 24));

    chart.setBackgroundPaint(Color.decode("#f0f9f6"));

    chart.addSubtitle(textSubTitle);

    chart.setElementHinting(true);

    chart.setTextAntiAlias(true);

    chart.setNotify(true);

    chart.setAntiAlias(true);

    chart.setBorderVisible(false);

    return chart;
}
}

```



---

### 3.3.4 AlgorithmsHandler/Control

Η κλάση 'AlgorithmsHandler' είναι υπεύθυνη για την δημιουργία και την έναρξη όλων των αλγορίθμων(GrahamScan[\[1\]](#), SmallestEnclosingCircle[\[3\]](#), Voronoi[\[3\]](#)). Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της.

```
package Control;

import Model.SmallestEnclosingCircle;

import Model.NeighborVoronoiDiagram;

import Model.DataBase;

import Model.GrahamScan;

public class AlgorithmsHandler
{
    private GrahamScan grahamScan;

    private SmallestEnclosingCircle algorithm1;

    private NeighborVoronoiDiagram nearestNeighbor;

    private NeighborVoronoiDiagram farthestNeighbor;

    private DataBase dataBase;

    public AlgorithmsHandler()
    {
        dataBase = DataBase.getInstance();

        dataBase.initializeKandE();

        callAlgorithms();
    }

    private void callAlgorithms()
    {
        callGrahamScan();

        callSmallestEnclosingCircle();

        callNearestNeighborVoronoi();
    }
}
```

---

```
callFarthestNeighborVoronoi();
}

private void callGrahamScan()
{
    grahamScan = new GrahamScan();
    grahamScan.initialize();
}

private void callSmallestEnclosingCircle()
{
    algorithm1 = new SmallestEnclosingCircle();
    DataBase.prepareForAlgorithm(0);
    algorithm1.computeSmallestEnclosingCircle();
}

private void callNearestNeighborVoronoi()
{
    nearestNeighbor = new NeighborVoronoiDiagram();
    DataBase.prepareForAlgorithm(1);
    nearestNeighbor.computeVoronoiDiagram();
}

private void callFarthestNeighborVoronoi()
{
    farthestNeighbor = new NeighborVoronoiDiagram();
    DataBase.prepareForAlgorithm(2);
    farthestNeighbor.computeVoronoiDiagram();
}
}
```

---

### 3.3.5 ChangeLanguageButtonHandler/Control

Η κλάση 'ChangeLanguageButtonHandler' είναι υπεύθυνη για την εναλλαγή της γλώσσας του προγράμματος μεταξύ Ελληνικών-Αγγλικών. Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της.

```
package Control;

import java.util.ArrayList;

import Model.TextHandler;

import javafx.event.ActionEvent;

import javafx.event.EventHandler;

import javafx.scene.control.Button;

import javafx.scene.control.Label;

public class ChangeLanguageButtonHandler implements
EventHandler<ActionEvent>

{

    private TextHandler textHandler;

    private Boolean flag=true;

    private Button changeLanguageButton;

    private Label paperTitle;

    private Button loadFileButton;

    private Button putPointsButton;

    private Button exitButton;

    public ChangeLanguageButtonHandler(ArrayList<Button> buttons, Label
paperTitle)

    {

        textHandler = TextHandler.getInstance();

        this.paperTitle = paperTitle;

        changeLanguageButton = buttons.get(0);

        loadFileButton = buttons.get(1);
```

---

```
putPointsButton = buttons.get(2);

exitButton = buttons.get(3);

//first time

setTexts();

}

@Override

public void handle(ActionEvent arg0)

{

    //flag=true -> EN

    //flag=false -> GR

    flag=!flag;

    textHandler = TextHandler.getInstance();

    textHandler.setLanguage(flag? "EN" : "GR");

    setTexts();

}

private void setTexts()

{

    changeLanguageButton.setText(textHandler.getChangeLanguageButtonText());

    paperTitle.setText(textHandler.getPaperTitleText());

    loadFileButton.setText(textHandler.getLoadFileButtonText());

    putPointsButton.setText(textHandler.getPutPointsButtonText());

    exitButton.setText(textHandler.getExitButtonText());

}

}
```

---

### 3.3.6 CustomMouseListener/Control

Η κλάση 'CustomMouseListener' είναι υπεύθυνη για την εμφάνιση των συντεταγμένων ενός σημείου καθώς και επιπλέον πληροφοριών πάνω στα διαγράμματα όταν ο χρήστη αλληλεπιδρά με αυτά μέσω του ποντικιού. Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της.

```
package Control;

import org.jfree.chart.fx.interaction.ChartMouseEventFX;
import org.jfree.chart.fx.interaction.ChartMouseListenerFX;
import org.jfree.chart.title.TextTitle;

public class CustomMouseListener implements ChartMouseListenerFX
{
    private TextTitle textTitle;

    private double x;

    private double y;

    public CustomMouseListener(TextTitle textTitle)
    {
        this.textTitle = textTitle;
    }

    @Override
    public void chartMouseClicked(ChartMouseEventFX arg0)
    {
        x = arg0.getChart().getXYPlot().getDomainCrosshairValue();
        y = arg0.getChart().getXYPlot().getRangeCrosshairValue();
        textTitle.setText("Current Point: (" + x + "1, " + y + ")");
    }
}
```

---

### 3.3.7 ExitButtonHandler/Control

Η κλάση 'ExitButtonHandler' είναι υπεύθυνη για τον τερματισμό του προγράμματος καθώς και όλων των διεργασιών του όταν εκείνος κάνει κλικ στο κουμπί 'Exit'-'Εξοδος'. Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της.

```
package Control;

import javafx.event.ActionEvent;
import javafx.event.EventHandler;
import javafx.stage.Stage;

public class ExitButtonHandler implements EventHandler<ActionEvent>
{
    private Stage stage;

    public ExitButtonHandler(Stage stage)
    {
        this.stage = stage;
    }

    @Override
    public void handle(ActionEvent arg0)
    {
        stage.close();

        System.exit(0);
    }
}
```

---

### 3.3.8 GraphGUIHandler/Control

Η κλάση 'GraphGUIHandler' είναι υπεύθυνη για την δημιουργία και την έναρξη όλων των διαγραμμάτων καθώς και να περάσει τις απαραίτητες πληροφορίες σε αυτά(π.χ. σημεία κυρτού πολυγώνου κτλ.). Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της.

```
package Control;

import Model.DataBase;

import View.SmallestEnclosingCircleGraphGUI;

import View.VoronoiGraphGUI;

public class GraphGUIHandler
{
    private String path;

    private DataBase dataBase;

    private SmallestEnclosingCircleGraphGUI circleGraphGUI;

    private VoronoiGraphGUI farthestNeighborVoronoiGraphGUI;

    public GraphGUIHandler(String path)
    {
        this.path = path;

        dataBase = DataBase.getInstance();

        makeCircleGraph("Smallest Enclosing Circle", 0, 0);

        makeVoronoiGraph("Nearest Neighbor Voronoi Diagram", 700, 0, 0);

        makeVoronoiGraph("Farthest Neighbor Voronoi Diagram", 1400, 0, 1);
    }

    private void makeCircleGraph(String title, int x, int y)
    {
        circleGraphGUI = new SmallestEnclosingCircleGraphGUI(path);

        circleGraphGUI.setTitle(title);

        circleGraphGUI.setAllPoints(dataBase.getAllPoints());
    }
}
```

---

```
circleGraphGUI.setConvexPoints(dataBase.getConvexPoints());
circleGraphGUI.setCirclePoints(dataBase.getCirclePoints());
circleGraphGUI.setCircleObject(dataBase.getCircleShape());
circleGraphGUI.initialize(x, y);
}

private void makeVoronoiGraph(String title, int x, int y, int mode)
{
    farthestNeighborVoronoiGraphGUI = new VoronoiGraphGUI(path);
    farthestNeighborVoronoiGraphGUI.setTitle(title);
    farthestNeighborVoronoiGraphGUI.setAllPointsSize(dataBase.getAllPointsSize(
));
    farthestNeighborVoronoiGraphGUI.setConvexPoints(dataBase.getConvexPoints())
;
    farthestNeighborVoronoiGraphGUI.setK(dataBase.getK(mode));
    farthestNeighborVoronoiGraphGUI.setE(dataBase.getE(mode));
    farthestNeighborVoronoiGraphGUI.initialize(x, y);
}
}
```



---

### 3.3.9 InfoButtonHandler/Control

Η κλάση 'InfoButtonHandler' είναι υπεύθυνη για την εμφάνιση του παραθύρου με απαραίτητες πληροφορίες για το πρόγραμμα όταν ο χρήστης κάνει κλικ στο κουμπί '?'. Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της.

```
package Control;

import java.net.URL;

import Model.TextHandler;

import javafx.event.ActionEvent;

import javafx.event.EventHandler;

import javafx.geometry.Insets;

import javafx.scene.Cursor;

import javafx.scene.Scene;

import javafx.scene.control.Label;

import javafx.scene.image.Image;

import javafx.scene.image.ImageView;

import javafx.scene.layout.HBox;

import javafx.scene.layout.VBox;

import javafx.stage.Modality;

import javafx.stage.Stage;

public class InfoButtonHandler implements EventHandler<ActionEvent>

{

    private Stage stage;

    private VBox layout;

    private Scene scene;

    private Label label;

    private ImageView circle;

    private ImageView nearestVoronoi;

    private ImageView farthestVoronoi;

    private TextHandler textHandler;
```

---

```
@Override

public void handle(ActionEvent arg0)

{

    textHandler = TextHandler.getInstance();

    createAndShowInfoWindow();

}

private void createAndShowInfoWindow()

{

    stage = new Stage();

    stage.setTitle(textHandler.getInfoWindowTitle());

    URL url = getClass().getResource("/Icons/circle.png");

    Image stageImage = new Image(url.toString());

    stage.getIcons().add(stageImage);

    createLabelContent();

    createGrahpImages(200);

    createBox();

    scene = new Scene(layout, 640, 700);

    scene.getStylesheets().add("styles.css");

    stage.setScene(scene);

    stage.initModality(Modality.APPLICATION_MODAL);

    stage.setResizable(false);

    stage.show();

}

private void createLabelContent()

{

    label = new Label(textHandler.getInfoContent());

    label.setId("infoLabel");

    label.setCursor(Cursor.HAND);

    label.setOnMouseClicked(new InfoContentHandler());
```

---

```
}

private void createBox()

{

    layout = new VBox(10);

    HBox hbox = new HBox(10);

    hbox.setPadding(new Insets(10, 10, 10, 10));

    hbox.getChildren().addAll(circle, nearestVoronoi, farthestVoronoi);

    layout.getChildren().addAll(label, hbox);

}

private void createGrahpImages(int size)

{

    createCircleImage(size);

    createNearestVoronoiImage(size);

    createFarthestVoronoiImage(size) ;

}

private void createCircleImage(int size)

{

    URL url0 = getClass().getResource("/Icons/circle (2).png");

    Image circleImage = new Image(url0.toString());

    circle = new ImageView(circleImage);

    circle.setFitHeight(size);

    circle.setFitWidth(size);

}

private void createNearestVoronoiImage(int size)

{

    URL url1 = getClass().getResource("/Icons/nearestVoronoi.png");

    Image nearestVoronoiImage = new Image(url1.toString());

    nearestVoronoi = new ImageView(nearestVoronoiImage);

    nearestVoronoi.setFitHeight(size);
```

---

```
nearestVoronoi.setFitWidth(size);

}

private void createFarthestVoronoiImage(int size)

{

URL url2 = getClass().getResource("/Icons/farthestVoronoi.png");

Image farthestVoronoiImage = new Image(url2.toString());

farthestVoronoi = new ImageView(farthestVoronoiImage);

farthestVoronoi.setFitHeight(size);

farthestVoronoi.setFitWidth(size);

}

}
```

---

### 3.3.10 InfoContentHandler/Control

Η κλάση 'InfoContentHandler' είναι υπεύθυνη για την εμφάνιση του αποθετηρίου στο οποίο βρίσκεται ο κώδικας του προγράμματος όταν ο χρήστης κάνει κλικ πάνω σε οποιοδήποτε σημείο του κειμένου πληροφοριών. Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της.

```
package Control;

import java.awt.Desktop;

import java.io.IOException;

import java.net.URI;

import java.net.URISyntaxException;

import javafx.event.EventHandler;

import javafx.scene.input.MouseEvent;

public class InfoContentHandler implements EventHandler<MouseEvent>

{

    private String paperURL = "https://github.com/johnprif/Thesis";

    @Override

    public void handle(MouseEvent arg0)

    {

        try {

            Desktop.getDesktop().browse(new URI(paperURL));

        } catch (IOException | URISyntaxException e) {

            e.printStackTrace();

        }

    }

}
```

---

### 3.3.11 LoadFileButtonHandler/Control

Η κλάση 'LoadFileButtonHandler' είναι υπεύθυνη για την εμφάνιση του παραθύρου εξερεύνησης του λειτουργικού συστήματος δίνοντας έτσι την δυνατότητα στον χρήστη να μπορεί να φορτώσει το αρχείο με τα σημεία που επιθυμεί και δίνει τις απαραίτητες πληροφορίες στις υπόλοιπες κλάσεις. Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της.

```
package Control;

import java.io.File;

import Model.TextHandler;

import Model_Loaders.FileLoaderFactory;

import javafx.event.ActionEvent;

import javafx.event.EventHandler;

import javafx.stage.FileChooser;

import javafx.stage.Stage;

public class LoadFileButtonHandler implements EventHandler<ActionEvent>

{

    private Stage fileChooserStage;

    private String path;

    private TextHandler textHandler;

    private FileChooser fileChooser;

    private FileLoaderFactory fileFactoryLoader;

    private AlgorithmsHandler algorithmsHandler;

    private GraphGUIHandler graphGUIHandler;

    public LoadFileButtonHandler()

    {

        textHandler = TextHandler.getInstance();

    }

    @Override
```

---

```
public void handle(ActionEvent arg0)
{
    fileChooserStage = new Stage();
    fileChooser();
}

private void fileChooser()
{
    fileChooser = new FileChooser();
    fileChooser.setTitle(textHandler.getFileChooserTitleText());
    fileChooser.getExtensionFilters().addAll(
        new FileChooser.ExtensionFilter("CSV", "*.csv")
        ,new FileChooser.ExtensionFilter("txt", "*.txt")
        ,new FileChooser.ExtensionFilter("Excel 2007-2022", "*.xlsx")
        ,new FileChooser.ExtensionFilter("Excel 1997-2003", "*.xls")
    );
    File selectedFile = fileChooser.showOpenDialog(fileChooserStage);
    if(selectedFile != null)//pressed OK
    {
        path = selectedFile.getAbsolutePath();
        nextSteps();
    }else//pressed Cancel
    {
    }
}

private void nextSteps()
{
    fileFactoryLoader = new FileLoaderFactory(path);
```

---

```
fileFactoryLoader.getAllPoints();  
  
algorithmsHandler = new AlgorithmsHandler();  
  
graphGUIHandler = new GraphGUIHandler(path);  
  
}  
  
}
```



---

### 3.3.12 PaperTitleHandler/Control

Η κλάση 'PaperTitleHandler' είναι υπεύθυνη για την εμφάνιση του αποθετηρίου στο οποίο βρίσκεται η δημοσίευση του Paper(Sven Skyum 1991) όταν ο χρήστης κάνει κλικ πάνω σε οποιοδήποτε σημείο του τίτλου. Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της.

```
package Control;

import java.awt.Desktop;

import java.io.IOException;

import java.net.URI;

import java.net.URISyntaxException;

import javafx.event.EventHandler;

import javafx.scene.input.MouseEvent;

public class PaperTitleHandler implements EventHandler<MouseEvent>

{

    private String paperURL =
    "https://reader.elsevier.com/reader/sd/pii/002001909190030L?token=792B047EF
    D2FBA85B976C2FCB728380392A08F2C78D489ECFB26B2F3CE023E7512BEC247BC14F3EBE21A
    61E69DDFFC54&originRegion=eu-west-1&originCreation=20230129211433";

    @Override

    public void handle(MouseEvent arg0)

    {

        try {

            Desktop.getDesktop().browse(new URI(paperURL));

        } catch (IOException | URISyntaxException e) {

            e.printStackTrace();

        }

    }

}
```

---

### 3.3.13 PutPointsButtonHandler/Control

ΥΠΟ-ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ!

ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΟ ΣΕΝΑΡΙΟ

Η κλάση 'PutPointsButtonHandler' είναι υπεύθυνη για την εμφάνιση ενός παραθύρου στο οποίο μπορεί ο χρήστης να τοποθετήσει τα δικά του σημεία, κάνοντας κλικ πάνω στο κουμπί 'Create Points'-'Δημιουργία Σημείων'. Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της.

ΤΩΡΙΝΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

Η κλάση 'PutPointsButtonHandler' είναι υπεύθυνη για την εμφάνιση ενός παραθύρου με το οποίο ενημερώνει τον χρήστη ότι η λειτουργία αυτή δεν είναι ακόμα διαθέσιμη και βρίσκεται υπό ανάπτυξη, κάνοντας κλικ πάνω στο κουμπί 'Create Points'-'Δημιουργία Σημείων'. Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της.

```
package Control;

import Model.TextHandler;

import javafx.event.ActionEvent;

import javafx.event.EventHandler;

import javafx.scene.control.Alert;

import javafx.scene.control.Alert.AlertType;

public class PutPointsButtonHandler implements EventHandler<ActionEvent>

{

    private TextHandler textHandler;

    public PutPointsButtonHandler()

    {

        textHandler = TextHandler.getInstance();

    }

    @Override

    public void handle(ActionEvent arg0)

    {
```

---

```
notImpementPopup();  
  
}  
  
public void notImpementPopup()  
{  
    Alert a = new Alert(AlertType.INFORMATION);  
    a.setTitle(textHandler.getNotImpementPopupTitle());  
    a.setHeaderText(textHandler.getNotImpementPopupHeaderText());  
    a.setContentText(textHandler.getNotImpementContentText());  
    a.show();  
}  
}
```

---

### 3.3.14 DataBase/Model

Η κλάση 'DataBase' είναι υπεύθυνη για όλους τους υπολογισμούς που χρειαζόμαστε για τα διαγράμματα καθώς και για την αποδοτική τους αποθήκευση ώστε να μπορούν να γίνονται γρήγορα όλοι οι υπολογισμοί χωρίς να ξεπερνάει κανένας το χρονικό όριο  $O(\log n)$ . Βρίσκονται όλες οι συναρτήσεις που αφορούν τους μαθηματικούς υπολογισμούς(πχ εύρεση της ακτίνας που περνάει από τρία σημεία) καθώς και τις δομές που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα. Οπότε, αποτελεί επιπλέον και την βάση δεδομένων όπου οι αλγόριθμοι διαβάζουν-γράφουν δεδομένα καθώς επίσης αντλούν τα δεδομένα τους και τα γραφήματα. Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της.

```
package Model;

import java.awt.geom.Ellipse2D;

import java.util.ArrayList;

import java.util.HashMap;

import java.util.TreeMap;

import javafx.geometry.Point2D;

public class DataBase

{

    private ArrayList<Point2D> allPoints;

    private ArrayList<Point2D> convexPoints;

    private ArrayList<Point2D> circlePoints;

    private static final DataBase instance = new DataBase();

    private int mode;

    private Ellipse2D circle;

    private ArrayList<Point2D> K;

    private ArrayList<ArrayList<Point2D>> E;

    private HashMap<Point2D, Point2D> u_p;

    private HashMap<Point2D, ArrayList<Point2D>> neighbours;

    private TreeMap<Double, Point2D> radiusForEachNode;

    private HashMap<Double, Point2D> existingRadius;
```

---

```
private Point2D currCustom;

private Point2D prevCustom;

private Point2D nextCustom;

private double maxAngleCustom;

private double maxRadiusCustom;

private ArrayList<ArrayList<Point2D>> allK;

private ArrayList<ArrayList<ArrayList<Point2D>>> allE;

private DataBase()

{

}

public static DataBase getInstance()

{

return instance;

}

public ArrayList<Point2D> getAllPoints()

{

return allPoints;

}

public ArrayList<Point2D> getConvexPoints()

{

return convexPoints;

}

public ArrayList<Point2D> getCirclePoints()

{

return circlePoints;

}

public ArrayList<Point2D> getK(int mode)

{

return allK.get(mode);

}
```

---

```

}

public ArrayList<ArrayList<Point2D>> getE(int mode)
{
    return allE.get(mode);
}

public void setAllPoints(ArrayList<Point2D> allPoints)
{
    this.allPoints = new ArrayList<Point2D>(allPoints);
}

public void setConvexPoints(ArrayList<Point2D> convexPoints)
{
    this.convexPoints = new ArrayList<Point2D>(convexPoints);
}

public void setCirclePoints(ArrayList<Point2D> circlePoints)
{
    this.circlePoints = new ArrayList<Point2D>(circlePoints);
}

public void prepareForAlgorithm(int mode)
{
    this.mode = mode;

    loadMaps();

    if(mode == 1 || mode == 2)
    {
        circle = getCircleShape();
    }
}

// -----O(nlog(n))-----

private void loadMaps()
{

```

---

```

int size = getConvexPointsSize();

double radius;

neighbours = new HashMap<Point2D, ArrayList<Point2D>>();

radiusForEachNode = new TreeMap<>();

existingRadius = new HashMap<Double, Point2D>();

for (int i = 0; i < size; i++)
{
    Point2D prev = convexPoints.get((i + size - 1) % size); //O(1)

    Point2D curr = convexPoints.get(i); //O(1)

    Point2D next = convexPoints.get((i + 1) % size); //O(1)

    radius = getRadius(prev, curr, next); //O(1)

    ArrayList<Point2D> kati = new ArrayList<Point2D>();

    kati.add(prev);

    kati.add(next);

    neighbours.put(curr, kati); //O(1)

    radiusForEachNode.put(radius, curr); //O(log(n))

    existingRadius.put(radius, curr);

}

}

//-----O(log(n)) for each calling-----

public Point2D findMaxP()
{
    int size = neighbours.size(); //O(1)

    if (size <= 2)
    {
        return new Point2D(-1, -1);
    }

    if(mode == 0 || mode == 2) //circle or nearest
    {

```

---

```

maxRadiusCustom = radiusForEachNode.lastKey(); //O(1)

}else //mode == 1 farthest

{

maxRadiusCustom = radiusForEachNode.firstKey(); //O(1)

}

currCustom = radiusForEachNode.get(maxRadiusCustom); //O(log(n))

prevCustom = neighbours.get(currCustom).get(0); //O(1)

nextCustom = neighbours.get(currCustom).get(1); //O(1)

maxAngleCustom = getAngle(prevCustom, currCustom, nextCustom); //O(1)

if(mode == 0)

{

return new Point2D(maxAngleCustom, maxAngleCustom);

}

return currCustom;

}

//-----5*O(log(n)) for each calling-----

public void deleteMaxP()

{

ArrayList<Point2D> left = new ArrayList<Point2D>();

ArrayList<Point2D> right = new ArrayList<Point2D>();

//---I found that has changed

Point2D leftCurr = neighbours.get(currCustom).get(0);

Point2D leftPrev = neighbours.get(leftCurr).get(0);

Point2D leftNext = neighbours.get(leftCurr).get(1);

Point2D rightCurr = neighbours.get(currCustom).get(1); //O(1)

Point2D rightPrev = neighbours.get(rightCurr).get(0); //O(1)

Point2D rightNext = neighbours.get(rightCurr).get(1); //O(1)

radiusForEachNode.remove(maxRadiusCustom); //O(log(n))

radiusForEachNode.remove(getRadius(leftPrev, leftCurr, leftNext));

//O(log(n))

```



---

```

radiusForEachNode.remove(getRadius(rightPrev, rightCurr, rightNext));
//O(log(n))

existingRadius.remove(maxRadiusCustom); //O(1)

existingRadius.remove(getRadius(leftPrev, leftCurr, leftNext)); //O(1)

existingRadius.remove(getRadius(rightPrev, rightCurr, rightNext)); //O(1))

neighbours.remove(leftCurr); //O(1)

neighbours.remove(currCustom); //O(1)

neighbours.remove(rightCurr); //O(1)

left.add(leftPrev); //O(1)

left.add(rightCurr); //O(1)

right.add(leftCurr); //O(1)

right.add(rightNext); //O(1)

neighbours.put(leftCurr, left); //O(1)

neighbours.put(rightCurr, right); //O(1)

double beforeRadius = getRadius(leftPrev, leftCurr, rightCurr);

double nextRadius = getRadius(leftCurr, rightCurr, rightNext);

Point2D currPoint;

if(!existingRadius.containsKey(beforeRadius)) //O(1)

{

radiusForEachNode.put(beforeRadius, leftCurr); //O(log(n))

existingRadius.put(beforeRadius, leftCurr); //O(1)

} else

{

currPoint = existingRadius.get(beforeRadius); //O(1)

if(getAngle(neighbours.get(leftCurr).get(0), leftCurr,
neighbours.get(leftCurr).get(1)) >=
getAngle(neighbours.get(currPoint).get(0), currPoint,
neighbours.get(currPoint).get(1)))

{

radiusForEachNode.put(getRadius(neighbours.get(currPoint).get(0), currPoint,
neighbours.get(currPoint).get(1)), leftCurr); //O(log(n))

```

---

```

existingRadius.put(getRadius(neighbours.get(currPoint).get(0), currPoint,
neighbours.get(currPoint).get(1)), leftCurr); //O(1)

}

}

if(!existingRadius.containsKey(nextRadius)) //O(1)

{

radiusForEachNode.put(nextRadius, rightCurr); //O(log(n))

existingRadius.put(nextRadius, rightCurr); //O(1)

} else

{

currPoint = existingRadius.get(nextRadius); //O(1)

if(getAngle(neighbours.get(rightCurr).get(0), rightCurr,
neighbours.get(rightCurr).get(1)) >=
getAngle(neighbours.get(currPoint).get(0), currPoint,
neighbours.get(currPoint).get(1)))

{

radiusForEachNode.put(getRadius(neighbours.get(currPoint).get(0), currPoint,
neighbours.get(currPoint).get(1)), rightCurr); //O(log(n))

existingRadius.put(getRadius(neighbours.get(currPoint).get(0), currPoint,
neighbours.get(currPoint).get(1)), rightCurr); //O(1)

}

}

}

public int getHashCirclePointsSize()

{

return neighbours.size();

}

public void moveToCircleArray()

{

HashMap<Point2D, Point2D> neighboursTemp = new HashMap<Point2D, Point2D>();

for (Point2D key : neighbours.keySet())

{

```

---

```
neighboursTemp.put(key, key);

}

circlePoints = new ArrayList<Point2D>(neighboursTemp.values());

}

public Point2D getPrev()

{

return prevCustom;

}

public Point2D getNext()

{

return nextCustom;

}

public int getAllPointsSize()

{

return allPoints.size();

}

public int getConvexPointsSize()

{

return convexPoints.size();

}

public int getCirclePointsSize()

{

return circlePoints.size();

}

public Ellipse2D getCircleShape()

{

int n = getCirclePointsSize();

Point2D point1 = circlePoints.get(0);

Point2D point2 = circlePoints.get(1);
```

---

```
Point2D point3 = null;

if (n == 3)

{

point3 = circlePoints.get(2);

}

circle = new Ellipse2D.Double(getCenter(point1, point2, point3).getX() -
getRadius(point1, point2, point3), getCenter(point1, point2, point3).getY()
- getRadius(point1, point2, point3), getRadius(point1, point2, point3) * 2,
getRadius(point1, point2, point3) * 2);

return circle;

}

public double getRadius(Point2D p, Point2D q, Point2D r)

{

double x1 = p.getX();

double y1 = p.getY();

double x2 = q.getX();

double y2 = q.getY();

double x3;

double y3;

double R = 0;

if(r == null)

{

R = p.distance(q) / 2;

return R;

}

if ((!p.equals(q)) && (!q.equals(r)) && (!p.equals(r)))

{

//-----

x3 = r.getX();

y3 = r.getY();

//-----

}
```

---

```
double x12 = x1 - x2;

double x13 = x1 - x3;

double y12 = y1 - y2;

double y13 = y1 - y3;

double y31 = y3 - y1;

double y21 = y2 - y1;

double x31 = x3 - x1;

double x21 = x2 - x1;

// x1^2 - x3^2

double sx13 = x1 * x1 - x3 * x3;

// y1^2 - y3^2

double sy13 = y1 * y1 - y3 * y3;

double sx21 = x2 * x2 - x1 * x1;

double sy21 = y2 * y2 - y1 * y1;

double f = ((sx13) * (x12)

+ (sy13) * (x12)

+ (sx21) * (x13)

+ (sy21) * (x13))

/ (2 * ((y31) * (x12) - (y21) * (x13)));

double g = ((sx13) * (y12)

+ (sy13) * (y12)

+ (sx21) * (y13)

+ (sy21) * (y13))

/ (2 * ((x31) * (y12) - (x21) * (y13)));

double c = -x1 * x1 - y1 * y1 - 2 * g * x1 - 2 * f * y1;

// eqn of circle be x^2 + y^2 + 2*g*x + 2*f*y + c = 0

// where centre is (h = -g, k = -f) and radius r

// as r^2 = h^2 + k^2 - c

double h = -g;
```

---

```
double k = -f;

double sqr_of_r = h * h + k * k - c;

// r is the radius

R = Math.sqrt(sqr_of_r);

}

return R;

}

public Point2D getCenter(Point2D p, Point2D q, Point2D r)
{

double x1 = p.getX();

double y1 = p.getY();

double x2 = q.getX();

double y2 = q.getY();

double x3;

double y3;

double R = 0;

if(r == null)

{

double centerX = (x1 + x2) / 2;

double centerY = (y1 + y2) / 2;

return new Point2D(centerX, centerY);

}

if ((!p.equals(q)) && (!q.equals(r)) && (!p.equals(r)))

{

//-----

x3 = r.getX();

y3 = r.getY();

//-----

double x12 = x1 - x2;
```

---

```
double x13 = x1 - x3;

double y12 = y1 - y2;

double y13 = y1 - y3;

double y31 = y3 - y1;

double y21 = y2 - y1;

double x31 = x3 - x1;

double x21 = x2 - x1;

// x1^2 - x3^2

double sx13 = x1 * x1 - x3 * x3;

// y1^2 - y3^2

double sy13 = y1 * y1 - y3 * y3;

double sx21 = x2 * x2 - x1 * x1;

double sy21 = y2 * y2 - y1 * y1;

double f = ((sx13) * (x12)

+ (sy13) * (x12)

+ (sx21) * (x13)

+ (sy21) * (x13))

/ (2 * ((y31) * (x12) - (y21) * (x13)));

double g = ((sx13) * (y12)

+ (sy13) * (y12)

+ (sx21) * (y13)

+ (sy21) * (y13))

/ (2 * ((x31) * (y12) - (x21) * (y13)));

double c = -x1 * x1 - y1 * y1 - 2 * g * x1 - 2 * f * y1;

// eqn of circle be x^2 + y^2 + 2*g*x + 2*f*y + c = 0

// where centre is (h = -g, k = -f) and radius r

// as r^2 = h^2 + k^2 - c

double h = -g;

double k = -f;
```

---

```
double sqr_of_r = h * h + k * k - c;

// r is the radius

R = Math.sqrt(sqr_of_r);

return new Point2D(h,k);

}

return null;

}

private double getAngle(Point2D p, Point2D q, Point2D r)

{

double a = (q.getX() - p.getX()) * (q.getX() - p.getX()) + (q.getY() -
p.getY()) * (q.getY() - p.getY());

double b = (q.getX() - r.getX()) * (q.getX() - r.getX()) + (q.getY() -
r.getY()) * (q.getY() - r.getY());

double c = (r.getX() - p.getX()) * (r.getX() - p.getX()) + (r.getY() -
p.getY()) * (r.getY() - p.getY());

return Math.acos((a + b - c) / Math.sqrt(4 * a * b));

}

//for nearest voronoi

private Point2D Up1(Point2D p)

{

Point2D nextP = neighbours.get(p).get(1); //O(1)

double mx = (p.getX() + nextP.getX()) / 2.0;

double my = (p.getY() + nextP.getY()) / 2.0;

double dx = nextP.getY() - p.getY();

double dy = p.getX() - nextP.getX();

double ux = mx + dx;

double uy = my + dy;

return new Point2D(ux, uy);

}

//for farthest voronoi

private Point2D Up2(Point2D p)
```



---

```

{
    Point2D nextP = neighbours.get(p).get(1); //O(1)

    Point2D nextNextP = neighbours.get(nextP).get(1); //O(1)

    double mx = (p.getX() + nextP.getX()) / 2.0;

    double my = (p.getY() + nextP.getY()) / 2.0;

    double dx = nextP.getY() - p.getY();

    double dy = p.getX() - nextP.getX();

    double radius = getRadius(p, nextP, nextNextP);

    double ux = mx - radius*dx;

    double uy = my - radius*dy;

    return new Point2D(ux, uy);
}

public boolean isPointInCircle(Point2D point, Point2D center, double radius)
{
    double distance = point.distance(center);

    return distance < radius;
}

public void updateUp(Point2D p, Point2D c)
{
    u_p.replace(p, c);
}

//-----O(n)-----

public void addAllUpToK()
{
    int size = getConvexPointsSize();

    u_p = new HashMap<Point2D, Point2D>();

    if(mode == 1) //nearest voronoi
    {

```

---

```

for (int i = 0; i < size; i++)

{

Point2D curr = convexPoints.get(i); //O(1)

Point2D Ucurr = Up1(curr);

u_p.put(curr, Ucurr);

K.add(Ucurr);

}

} else //mode==2 farthest voronoi

{

for (int i = 0; i < size; i++)

{

Point2D curr = convexPoints.get(i); //O(1)

Point2D Ucurr = Up2(curr);

u_p.put(curr, Ucurr);

K.add(Ucurr);

}

}

}

public void addCtoK(Point2D c)

{

K.add(c);

}

public void addCandUtoE(Point2D c, Point2D up)

{

ArrayList<Point2D> inner = new ArrayList<Point2D>();

inner.add(c);

inner.add(up);

E.add(inner);

}

```

---

```
public Point2D getUp(Point2D p)

{

return u_p.get(p);

}

public void makeKandE()

{

K = new ArrayList<Point2D>();

E = new ArrayList<ArrayList<Point2D>>();

}

public void moveKandE()

{

allK.add(K);

allE.add(E);

}

public void initializeKandE()

{

allK = new ArrayList<ArrayList<Point2D>>();

allE = new ArrayList<ArrayList<ArrayList<Point2D>>>();

}

}
```

---

### 3.3.15 GrahamScan/Model

Η κλάση 'GrahamScan' είναι υπεύθυνη για τον υπολογισμό των σημείων που ορίζουν το Κυρτό Περίβλημα σε  $O(n \log n)$  χρόνο. Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της.

```
package Model;

import java.util.ArrayList;
import java.util.Collections;
import java.util.List;
import javafx.geometry.Point2D;

public class GrahamScan
{
    private static Point2D start;

    private ArrayList<Point2D> allPoints;
    private ArrayList<Point2D> convexHullPoints;
    private DataBase dataBase;

    public GrahamScan()
    {
        dataBase = DataBase.getInstance();
    }

    public void initialize()
    {
        allPoints = new ArrayList<Point2D>(dataBase.getAllPoints());
        convexHullPoints = new
ArrayList<Point2D>(computeGrahamScan(allPoints));
        convexHullPoints.remove(convexHullPoints.size()-1);
        dataBase.setConvexPoints(convexHullPoints);
    }

    //-----O(nlogn)-----
    -----

    private static List<Point2D> computeGrahamScan(List<Point2D> points) {
        // Find the point with the lowest y-coordinate (or the leftmost
        point in case of a tie)
```

---

```

start = points.get(0);

for (Point2D point : points) {
    if (point.getY() < start.getY() || (point.getY() == start.getY()
&& point.getX() < start.getX())) {
        start = point;
    }
}

// Sort the points by polar angle with respect to the start point
List<Point2D> sortedPoints = new ArrayList<>(points);
sortedPoints.remove(start);
Collections.sort(sortedPoints, (a, b) -> {
    double angleA = Math.atan2(a.getY() - start.getY(), a.getX() -
start.getX());
    double angleB = Math.atan2(b.getY() - start.getY(), b.getX() -
start.getX());
    if (angleA < angleB) {
        return -1;
    } else if (angleA > angleB) {
        return 1;
    } else {
        return Double.compare(a.distance(start), b.distance(start));
    }
});

// Perform the Graham's scan
List<Point2D> hull = new ArrayList<>();
hull.add(start);
for (Point2D point : sortedPoints) {
    while (hull.size() >= 2) {
        Point2D p2 = hull.get(hull.size() - 1);
        Point2D p1 = hull.get(hull.size() - 2);
        if (crossProduct(p1, p2, point) < 0)
        {
            hull.remove(hull.size() - 1);
        } else
        {
            break;
        }
    }
}

```

---

```
        }

    }

    hull.add(point);
}

hull.add(start);
return hull;
}

private static double crossProduct(Point2D p, Point2D q, Point2D r) {
    double y1 = q.getY() - p.getY();
    double y2 = r.getY() - p.getY();
    double x1 = q.getX() - p.getX();
    double x2 = r.getX() - p.getX();
    return x1 * y2 - x2 * y1;
}
}
```

---

### 3.3.16 NeighborVoronoiDiagram/Model

Η κλάση 'NeighborVoronoiDiagram' είναι υπεύθυνη για τον υπολογισμό των σημείων που ορίζουν τα διαγράμματα Voronoi (πλησιέστερου και πιο απομακρυσμένου) γείτονα σε  $O(n \log n)$  χρόνο. Ουσιαστικά, η ίδια κλάση χρησιμοποιείται δύο φορές ξεχωριστά ώστε την πρώτη φορά να υπολογίσει το Διάγραμμα Voronoi του πλησιέστερου γείτονα και την δεύτερη φορά για να υπολογίσει το Διάγραμμα Voronoi του πιο απομακρυσμένου γείτονα. Ο κάθε αλγόριθμος χρειάζεται  $O(n \log n)$  χρόνο. Οπότε και δύο μαζί χρειάζονται  $O(n \log n)$ . Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της.

```
package Model;

import javafx.geometry.Point2D;

public class NeighborVoronoiDiagram
{
    private DataBase dataBase;

    public NeighborVoronoiDiagram()
    {
        dataBase = DataBase.getInstance();
    }

    public void computeVoronoiDiagram()
    {
        System.out.println("I am the second algorithm!");

        int n = dataBase.getConvexPointsSize();

        //I have to make (K,E) ArrayLits for each K, E
        dataBase.makeKandE();

        //for all p in S add u(p) to K;
        dataBase.addAllUpToK();

        Point2D before_p;

        Point2D p;

        Point2D next_p;

        Point2D c;
```

---

```

if(n > 2)

{

System.out.println("Algorithm 2 started with = " + n);

do

{

//find p maximizing radius and angle

p = DataBase.findMaxP();

before_p = DataBase.getPrev();

next_p = DataBase.getNext();

c = DataBase.getCenter(before_p, p, next_p);

DataBase.addCtoK(c);

DataBase.addCandUtoE(c, DataBase.getUp(p));

DataBase.addCandUtoE(c, DataBase.getUp(before_p));

DataBase.updateUp(before_p, c);

DataBase.deleteMaxP();

n = n-1;

}while(n != 2);

DataBase.addCandUtoE(c, DataBase.getUp(next_p));

else

{

System.out.println("Algorithm 2 started with = " + n);

if(n == 2) //S={p1, p2}

{

Point2D p1 = DataBase.getConvexPoints().get(0);

Point2D p2 = DataBase.getConvexPoints().get(1);

Point2D u_p1 = DataBase.getUp(p1);

Point2D u_p2 = DataBase.getUp(p2);

//add (u(p1), u(p2)) to E;

DataBase.addCandUtoE(u_p1, u_p2);

```



---

```
}  
  
}  
  
dataBase.moveKandE();  
  
System.out.println("Algorithm 2 finished!");  
  
}  
  
}
```

---

### 3.3.17 SmallestEnclosingCircle/Model

Η κλάση ‘SmallestEnclosingCircle’ είναι υπεύθυνη για τον υπολογισμό των σημείων που ορίζουν τα σημεία του Ελάχιστου Περικλείοντος Κύκλου σε  $O(n \log n)$  χρόνο. Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της.

```
package Model;

import java.lang.Math;

public class SmallestEnclosingCircle

{

    private DataBase DataBase;

    public SmallestEnclosingCircle()

    {

        DataBase = DataBase.getInstance();

    }

    public void computeSmallestEnclosingCircle()

    {

        boolean finish;

        double maxAngle;

        double myPi2 = Math.PI/2;

        if(DataBase.getHashCirclePointsSize() != 1)

        {

            finish = false;

            do

            {

                maxAngle = DataBase.findMaxP().getX();

                if(maxAngle>myPi2)

                {

                    DataBase.deleteMaxP();

                }else

                {


```

---

```
dataBase.moveToCircleArray();

System.out.println("The algorithm 1 finished =
"+dataBase.getHashCirclePointsSize());

finish = true;

}

}while(!finish);

}else

{

System.out.println("Only 1 point");

}

}

}
```

---

### 3.3.18 TextHandler/Model

Η κλάση 'TextHandler' είναι υπεύθυνη για την αποθήκευση των κειμένων για όλα τα κουμπιά και κείμενα του προγράμματος καθώς επίσης και την εναλλαγή τους μεταξύ Ελληνικών-Αγγλικών. Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της.

```
package Model;

public class TextHandler

{

    private static TextHandler instance;

    //-----parallel-----

    private String changeLanguageButtonText = "EN";

    private String paperTitleText = "Implementation of an Algorithm for the
Calculation of the Smallest Enclosing Circle and the Voronoi Diagram";

    private String loadFileButtonText = "Load Points From File";

    private String putPointsButtonText = "Create Points";

    private String exitButtonText = "Exit";

    //-----notParallel-----

    private String fileChooserTitleText = "Choose the file who contains the
points";

    private String notImpementPopupTitle = "Put points";

    private String notImpementPopupHeaderText = "Under construction!";

    private String notImpementContentText = "The manual addition of points has
not been implemented yet!\nIn the future the user will be able to add
points manually and modify them without having to load them from an external
file.";

    private String infoWindowTitle = "Information + Instructions for use";

    private String infoContent = "ABOUT\n"

+ "This thesis was developed in the context of the paper by Sven Skyum 1991
entitled \"A Implementation of an Algorithm for the Calculation of the
Smallest Enclosing Circle and the Voronoi Diagram \" and concerns the
implementation and visualization of an efficient complexity algorithm
O(nlogn) and computes the least pericycle and with small changes and
maintaining the same complexity is able to compute both the Voronoi diagrams
of the nearest and the farthest neighbor\r\n\n"

+ "IMPLEMENTATION INSTRUCTIONS:\r\n"
```

---

```
+ "1) You can change the language from Greek to English and vice versa in
real time by pressing the button on the top right with the corresponding
mark\r\n"

+ "2) By pressing the 'Exit' button the application terminates\r\n"

+ "3) Pressing the 'Load Points' button will display a window asking you to
load a file with points x,y from the supported application types (csv, txt,
excel)\r\n"

+ "4) Finally, the three charts with their corresponding graphs will be
displayed.\r\n"

+ "5) You can do the following actions on the graphs:\r\n"

+ " - alt+leftclick: drag and drop\r\n"

+ " - rightclick: export to file\r\n"

+ " - leftclick: choose a point \r\n"

+ " - scroll: zoom in or zoom out\r\n"

+ "*** The 'Create Points' button has not been implemented yet and will be
implemented at some point in the future\r\n"

+ "*** Leftclicking on the title will open the browser in the thesis
paper\r\n\r\n"

+ "IMAGES FROM THE APP\r\n";
```

```
private TextHandler()

{

    //TextClass();

}

//Get the only object available

public static TextHandler getInstance()

{

    if (instance == null)

    {

        instance = new TextHandler();

    }

    return instance;

}

public void setLanguage(String language)
```

---

```

{

changeLanguageButtonText = language;

if(language.equals("EN"))

{

//-----MainWidnow-----

paperTitleText = " Implementation of an Algorithm for the Calculation of the
Smallest Enclosing Circle and the Voronoi Diagram ";

loadFileButtonText = "Load Points From File";

putPointsButtonText = "Create Points";

exitButtonText = "Exit";

//-----FileChooserWindow-----

fileChooserTitleText = "Choose the file who contains the points";

//PutPointsButtonHandler popup

notImpementPopupTitle = "Put points";

notImpementPopupHeaderText = "Under construction!";

notImpementContentText = "The manual addition of points has not been
implemented yet!\nIn the future the user will be able to add points manually
and modify them without having to load them from an external file.";

//Info button

infoWindowTitle = "Information + Instructions for use";

infoContent = "ABOUT\n"

+ "This thesis was developed in the context of the paper by Sven Skyum 1991
entitled \" Implementation of an Algorithm for the Calculation of the
Smallest Enclosing Circle and the Voronoi Diagram \" and concerns the
implementation and visualization of an efficient complexity algorithm
O(nlogn) and computes the least pericycle and with small changes and
maintaining the same complexity is able to compute both the Voronoi diagrams
of the nearest and the farthest neighbor\r\n\n"

+ "IMPLEMENTATION INSTRUCTIONS:\r\n"

+ "1) You can change the language from Greek to English and vice versa in
real time by pressing the button on the top right with the corresponding
mark\r\n"

+ "2) By pressing the 'Exit' button the application terminates\r\n"

+ "3) Pressing the 'Load Points' button will display a window asking you to
load a file with points x,y from the supported application types (csv, txt,
excel)\r\n"

```

---

```

+ "4) Finally, the three charts with their corresponding graphs will be
displayed.\r\n"

+ "5) You can do the following actions on the graphs:\r\n"

+ " - alt+leftclick: drag and drop\r\n"

+ " - rightclick: export to file\r\n"

+ " - leftclick: choose a point \r\n"

+ " - scroll: zoom in or zoom out\r\n"

+ "*** The 'Create Points' button has not been implemented yet and will be
implemented at some point in the future\r\n"

+ "**** Leftclicking on the title will open the browser in the thesis
paper\r\n\r\n"

+ "IMAGES FROM THE APP\n";

}else //GR

{

//-----MainWidnow-----

paperTitleText = "Υλοποίηση Αλγορίθμου για τον Υπολογισμό του Ελάχιστου
Περικλείοντος Κύκλου και του Διαγράμματος Voronoi\n\t";

loadFileButtonText = "Φόρτωση Σημείων από Αρχείο";

putPointsButtonText = "Δημιουργία σημείων";

exitButtonText = "Εξοδος";

//-----FileChooserWindow-----

fileChooserTitleText = "Επιλέξτε το αρχείο που περιέχει τα σημεία";

//PutPointsButtonHandler popup

notImpementPopupTitle = "Προσθήκη Σημείων";

notImpementPopupHeaderText = "Υπό κατασκευή!";

notImpementContentText = "Η χειροκίνητη προσθήκη σημείων δεν έχει υλοποιηθεί
ακόμα!\nΜελλοντικά ο χρήστης θα μπορεί να προσθέσει σημεία με το χέρι του
και να τα τροποποιεί χωρίς να χρειάζεται η φόρτωση τους από εξωτερικό
αρχείο.";

//Info button

infoWindowTitle = "Πληροφορίες + Οδηγίες χρήσης";

infoContent = "ΣΧΕΤΙΚΑ\n"

+ "Αυτή η διπλωματική εργασία αναπτύχθηκε στα πλαίσια του Paper από τον Sven
Skyum 1991 με τίτλο \" Implementation of an Algorithm for the Calculation of

```

---

```

the Smallest Enclosing Circle and the Voronoi Diagram \" και αφορά την
υλοποίηση και οπτικοποίηση ενός αποδοτικού αλγορίθμου πολυπλοκότητας
 $O(n \log n)$  και υπολογίζει τον ελάχιστο περικλείοντα κύκλο και με μικρές
αλλαγές και διατηρώντας την ίδια πολυπλοκότητα είναι ικανός να υπολογίσει
και τα διαγράμματα Voronoi του πλησιέστερου και του πιο απομακρυσμένου
γείτονα\r\n\n"

+ "ΟΔΗΓΙΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ:\r\n"

+ "1) Μπορείτε να αλλάξετε την γλώσσα από ελληνικά σε αγγλικά και αντίστροφα
σε πραγματικό χρόνο πατώντας το κουμπί πάνω δεξιά με την αντίστοιχη
σήμανση\r\n"

+ "2) Πατώντας το κουμπί 'Εξοδος' η εφαρμογή τερματίζει\r\n"

+ "3) Πατώντας το κουμπί 'Φόρτωση Σημείων' θα σας εμφανιστεί ένα παράθυρο
στο οποίο θα σας ζητηθεί να φορτώσετε ένα αρχείο με σημεία x,y από τους
υποστηριζόμενους τύπους της εφαρμογής(csv, txt, excel)\r\n"

+ "4) Τέλος, εμφανίζονται τα τρία διαγράμματα με τα αντίστοιχα
γραφήματα.\r\n"

+ "5) Μπορείτε να κάνετε τις εξής ενέργειες στα γραφήματα:\r\n"

+ " - alt+αριστερό-κλικ: μετακίνηση\r\n"

+ " - δεξί-κλικ: export to file\r\n"

+ " - leftclick: choose a point \r\n"

+ " - scroll: zoom in or zoom out\r\n"

+ "*** Το κουμπί 'Δημιουργία Σημείων' δεν έχει υλοποιηθεί ακόμα και θα
υλοποιηθεί κάποια στιγμή στο μέλλον\r\n"

+ "**** Κάνοντας αριστερό-κλικ στον τίτλο θα ανοίξει ο browser στο paper της
δηλωματικής εργασίας\n\n"

+ "ΕΙΚΟΝΕΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ\n";

}

}

public String getChangeLanguageButtonText()

{

return changeLanguageButtonText;

}

public String getPaperTitleText()

{

return paperTitleText;

}

```



---

```
public String getLoadFileButtonText()  
{  
    return loadFileButtonText;  
}  
  
public String getPutPointsButtonText()  
{  
    return putPointsButtonText;  
}  
  
public String getExitButtonText()  
{  
    return exitButtonText;  
}  
  
public String getFileChooserTitleText()  
{  
    return fileChooserTitleText;  
}  
  
public String getNotImpementPopupTitle()  
{  
    return notImpementPopupTitle;  
}  
  
public String getNotImpementPopupHeaderText()  
{  
    return notImpementPopupHeaderText;  
}  
  
public String getNotImpementContentText()  
{  
    return notImpementContentText;  
}  
  
public String getInfoWindowTitle()
```

---

```
{  
  
    return infoWindowTitle;  
  
}  
  
public String getInfoContent()  
  
{  
  
    return infoContent;  
  
}  
  
}
```

---

### 3.3.19 CSVLoader/Model\_Loaders

Η κλάση 'CSVLoader' είναι υπεύθυνη για την ανάγνωση και αποθήκευση των σημείων από .csv αρχεία. Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της.

```
package Model_Loaders;

import java.io.FileReader;
import java.io.IOException;
import java.util.ArrayList;
import java.util.List;
import com.opencsv.*;
import com.opencsv.exceptions.CsvException;
import javafx.geometry.Point2D;

public class CSVLoader implements FileLoader
{
    private String csvPath;
    private List<String[]> stringCSVData;
    private ArrayList<Point2D> points2DCSVData;

    public CSVLoader(String csvPath) throws IOException, CsvException
    {
        this.csvPath=csvPath;
        stringCSVData = new ArrayList<String[]>();
        points2DCSVData = new ArrayList<Point2D>();
        System.out.println("I am CSV LOADER");
        readValues();
        convertStringToPoint2D();
    }

    private void readValues() throws IOException, CsvException
    {
        CSVParser csvParser = new
        CSVParserBuilder().withSeparator(',').build();
        CSVReader csvReader = new CSVReaderBuilder(new
        FileReader(csvPath))
        //
        .withCSVParser(csvParser)
```

---

```
.withSkipLines(0).build();

        stringCSVData.addAll(csvReader.readAll());
    }

    public void convertStringToPoint2D()
    {
        //Convert data from String to double
        double a;
        double b;
        String temp1;
        String temp2;

        for(int i=0; i<stringCSVData.size(); i++)
        {
            temp1 = stringCSVData.get(i)[0].replace(',', ' ');
            temp2 = stringCSVData.get(i)[1].replace(',', ' ');
            a=Double.parseDouble(temp1);
            b=Double.parseDouble(temp2);

            points2DCSVData.add(new Point2D(a, b));
        }
    }

    public ArrayList<Point2D> get2Dvalues()
    {
        return points2DCSVData;
    }
}
```

---

### 3.3.20 ExcelLoader/Model\_Loader

Η κλάση 'ExcelLoader' είναι υπεύθυνη για την ανάγνωση και αποθήκευση των σημείων από .xlsx ή .xls αρχεία. Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της.

```
package Model_Loaders;

import org.apache.poi.ss.usermodel.*;
import java.io.File;
import java.io.FileInputStream;
import java.util.ArrayList;
import org.apache.poi.ss.usermodel.Cell;
import org.apache.poi.ss.usermodel.Row;
import javafx.geometry.Point2D;

public class ExcelLoader implements FileLoader
{
    private String path;
    private ArrayList<Point2D> points2DXLSXData;

    public ExcelLoader(String path)
    {
        this.path = path;
        points2DXLSXData = new ArrayList<Point2D>();
        System.out.println("I am EXCEL LOADER");
        readValues();
    }

    private void readValues()
    {
        try {
            // Create a FileInputStream object to read the Excel file
            FileInputStream fis = new FileInputStream(new File(path));

            // Create a Workbook object to read the Excel file
            Workbook workbook = WorkbookFactory.create(fis);

            // Get the first sheet from the workbook
```

---

```
        Sheet sheet = workbook.getSheetAt(0);

        // Iterate through the rows of the sheet
        for (Row row : sheet)
        {
            convertDoubleToPoint2D(row.getCell(0), row.getCell(1));
        }

        // Close the FileInputStream object
        fis.close();
    } catch (Exception e) {
        e.printStackTrace();
    }
}

public void convertDoubleToPoint2D(Cell column1, Cell column2)
{
    double a = column1.getNumericCellValue();
    double b = column2.getNumericCellValue();
    points2DXLSXData.add(new Point2D(a, b));
}

@Override
public ArrayList<Point2D> get2Dvalues()
{
    return points2DXLSXData;
}

}
```

---

### 3.3.21 FileLoader/Model\_Loader

Το Interface 'FileLoader' ορίζει ότι όλες οι κλάσεις που διαβάζουν διάφορους τύπους αρχείων θα πρέπει να υλοποιούν την μέθοδο 'get2DValues()' η οποία αποθηκεύει όλα τα σημεία σε μια ArrayList<Point2D> και τα επιστρέφει.

```
//-----  
  
package Model_Loaders;  
  
import java.util.ArrayList;  
  
import javafx.geometry.Point2D;  
  
public interface FileLoader  
{  
  
    public ArrayList<Point2D> get2Dvalues();  
  
}
```

---

### 3.3.22 FileLoaderFactory/Model\_Loaders

Η Factory κλάση 'ExcelLoaderFactory' είναι υπεύθυνη για την δημιουργία του αντίστοιχου αντικειμένου με βάση την κατάληξη του αρχείου. Πιο συγκεκριμένα, αν το αρχείο έχει κατάληξη .csv τότε θα δημιουργήσει ένα αντικείμενο CSVLoader και θα εκκινήσει την διαδικασία ανάγνωσης η κλάση αυτή. Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της

```
package Model_Loaders;

import java.io.IOException;

import java.util.ArrayList;

import com.opencsv.exceptions.CsvException;

import Model.DataBase;

import javafx.geometry.Point2D;

public class FileLoaderFactory

{

    private String path;

    private CSVLoader csvLoader;

    private TXTLoader txtLoader;

    private ExcelLoader xlsLoader;

    private ArrayList<Point2D> allPoints;

    private DataBase DataBase;

    public FileLoaderFactory(String path)

    {

        this.path = path;

        DataBase = DataBase.getInstance();

    }

    public ArrayList<Point2D> getAllPoints()

    {

        try {

            if(path.contains(".csv"))
```



---

```
{

csvLoader = new CSVLoader(path);

allPoints = new ArrayList<Point2D>(csvLoader.get2Dvalues());

}else if(path.contains(".txt"))

{

txtLoader = new TXTLoader(path);

allPoints = new ArrayList<Point2D>(txtLoader.get2Dvalues());

}else if(path.contains(".xlsx") || path.contains(".xls"))

{

xlsxLoader = new ExcelLoader(path);

allPoints = new ArrayList<Point2D>(xlsxLoader.get2Dvalues());

}else

{

}

} catch (IOException | CsvException e)

{

e.printStackTrace();

}

database.setAllPoints(allPoints);

return allPoints;

}

}
```

---

### 3.3.23 TXTLoader/Model\_Loader

Η κλάση 'TXTLoader' είναι υπεύθυνη για την ανάγνωση και αποθήκευση των σημείων από .txt αρχεία. Το όνομα της κάθε μεθόδου είναι συνώνυμο με την λειτουργία της.

```
package Model_Loaders;

import java.io.File;
import java.io.IOException;
import java.util.ArrayList;
import java.util.Scanner;
import com.opencsv.exceptions.CsvException;

import javafx.geometry.Point2D;

public class TXTLoader implements FileLoader
{
    private String path;
    private ArrayList<Point2D> points2DTXTData;

    public TXTLoader(String path) throws IOException, CsvException
    {
        this.path = path;
        points2DTXTData = new ArrayList<Point2D>();
        System.out.println("I am TXT LOADER");
        readValues();
    }

    private void readValues() throws IOException, CsvException
    {
        File file = new File(path);
        Scanner scanner = new Scanner(file);
        String line;
        String[] values ;

        while (scanner.hasNextLine())
        {
            line = scanner.nextLine();
```

---

```
        values = line.split("\\s+"); // assuming the values are
separated by whitespace
        convertStringToPoint2D(values[0], values[1]);
    }
    scanner.close();
}

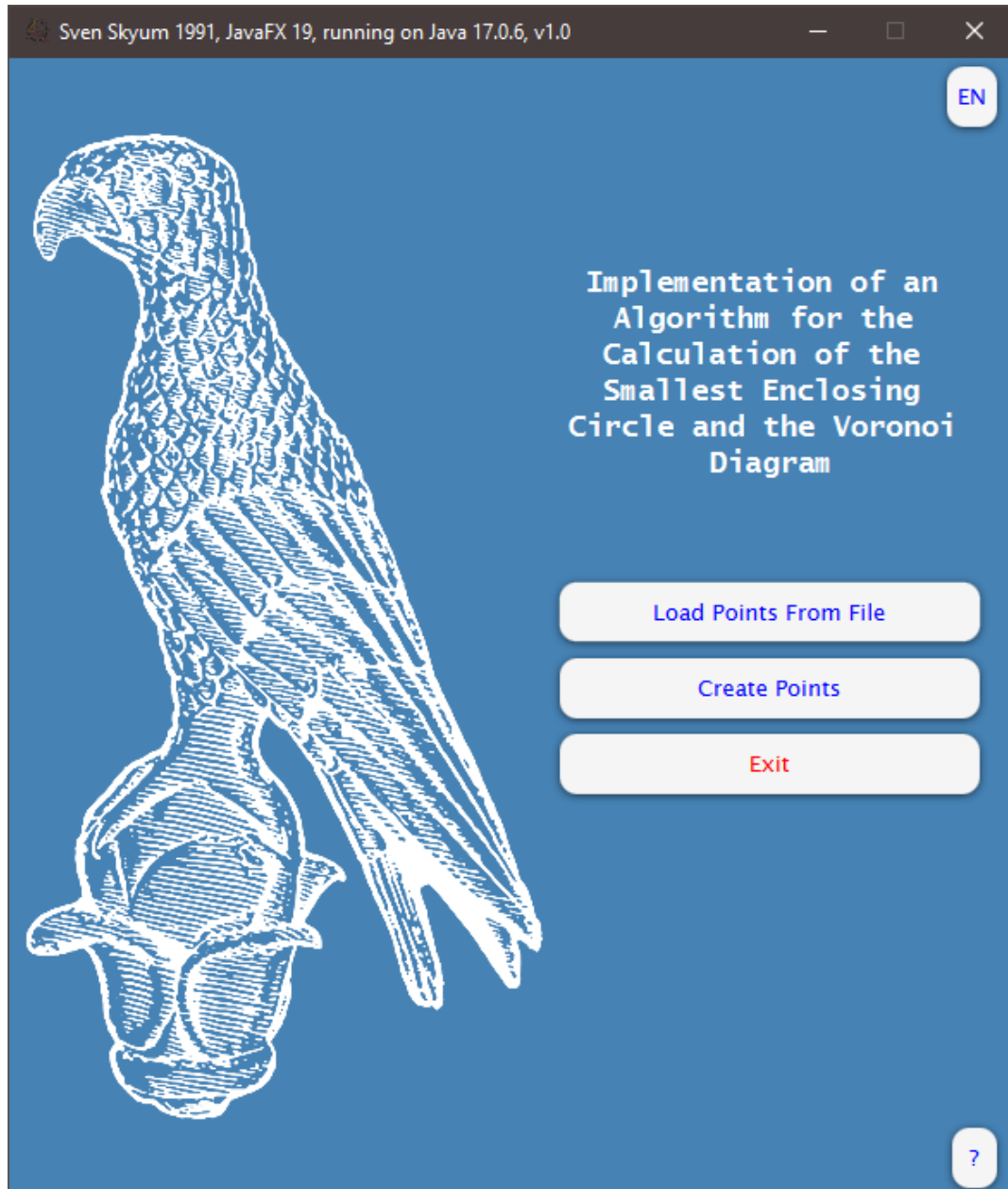
public void convertStringToPoint2D(String x, String y)
{
    String temp1 = x.replace(',', '.', '');
    String temp2 = y.replace(',', '.', '');
    double a = Double.parseDouble(temp1);
    double b = Double.parseDouble(temp2);
    points2DTXTData.add(new Point2D(a, b));
}

@Override
public ArrayList<Point2D> get2Dvalues()
{
    return points2DTXTData;
}
}
```

### 3.4 Παραδείγματα Εκτέλεσης του Προγράμματος

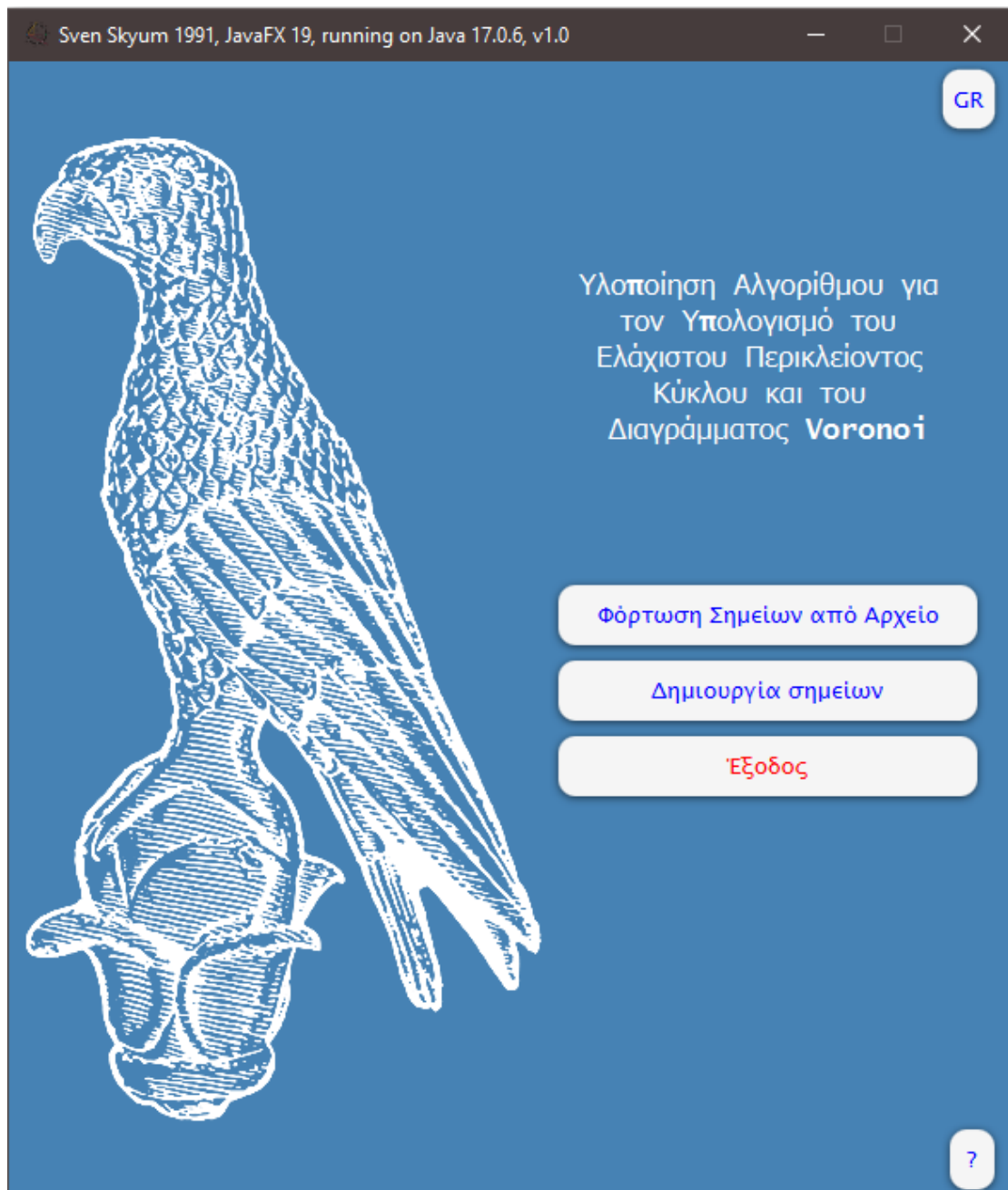
Εδώ θα δείξουμε πως δουλεύει το πρόγραμμά μας.

Αρχικά, τρέχοντας το πρόγραμμα θα εμφανιστεί στον χρήστη το κύριο παράθυρο (βλέπε **Σχήμα 4.1**)



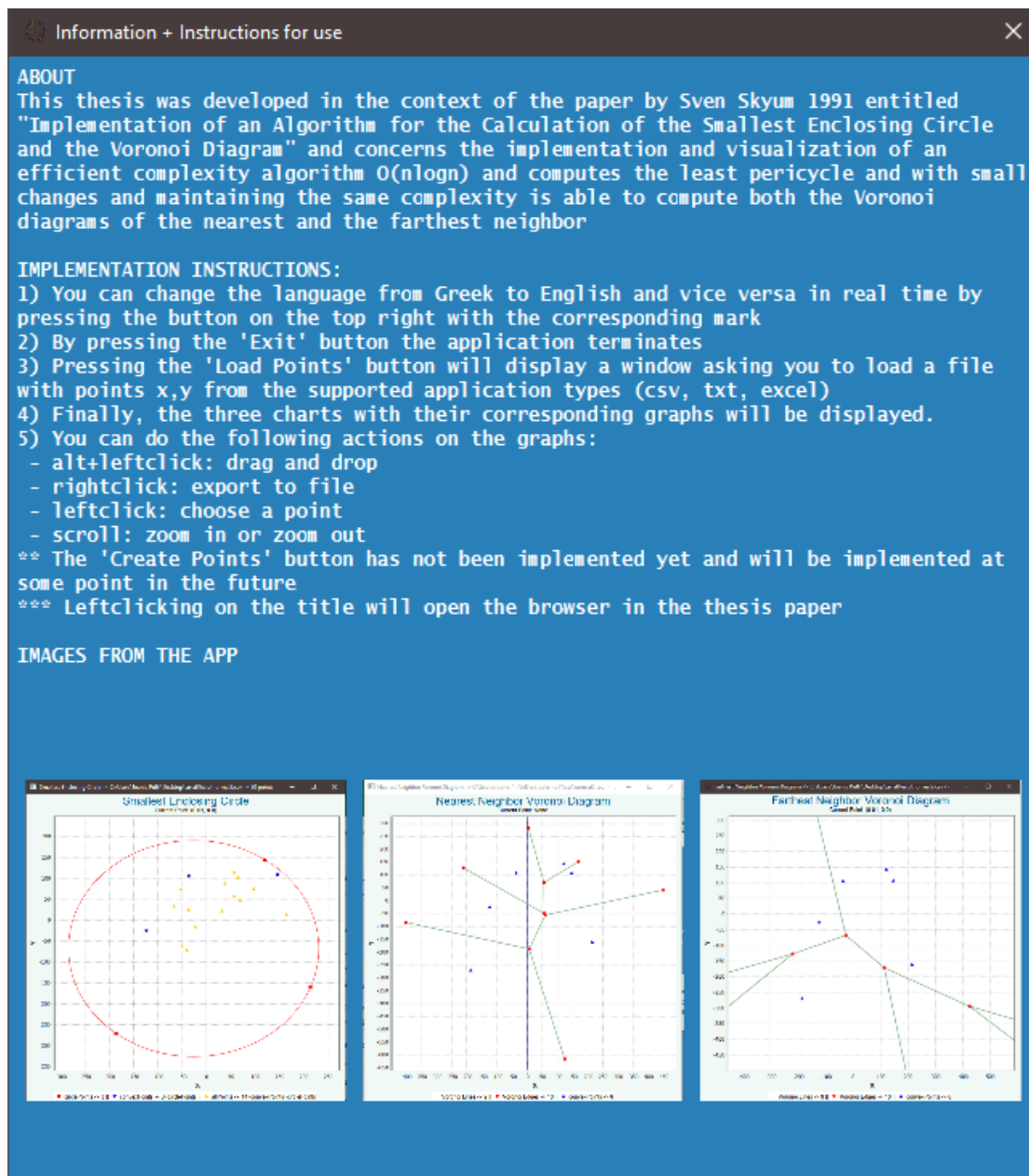
**Σχήμα 4.1:** Εισαγωγή του προγράμματος.

Το πρόγραμμα μας δίνει την δυνατότητα να αλλάξουμε την γλώσσα από Αγγλικά σε Ελληνικά και αντίστροφα (βλέπε **Σχήμα 4.2**).

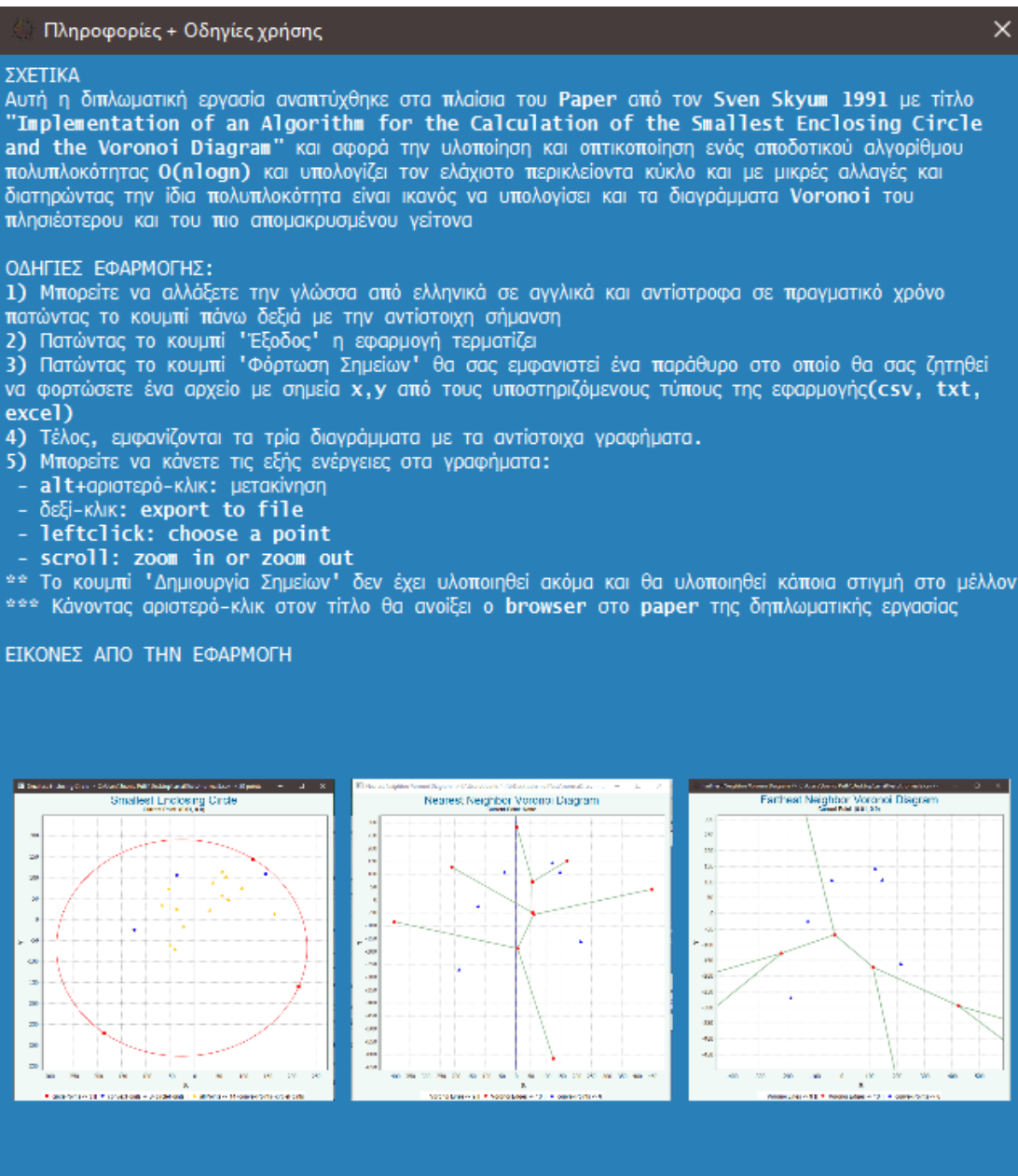


**Σχήμα 4.2:** Αλλαγή γλώσσας σε Ελληνικά.

Επιπλέον, πατώντας το κουμπί '?' ο χρήστης μπορεί να διαβάσει κάποιες απαραίτητες πληροφορίες για το πρόγραμμα καθώς και να ανακατευθυνθεί στον κώδικα κάνοντας κλικ πάνω στο κείμενο (βλέπε **Σχήμα 4.3-4.4**).



Σχήμα 4.3: Πληροφορίες + Οδηγίες χρήσης στα Αγγλικά.

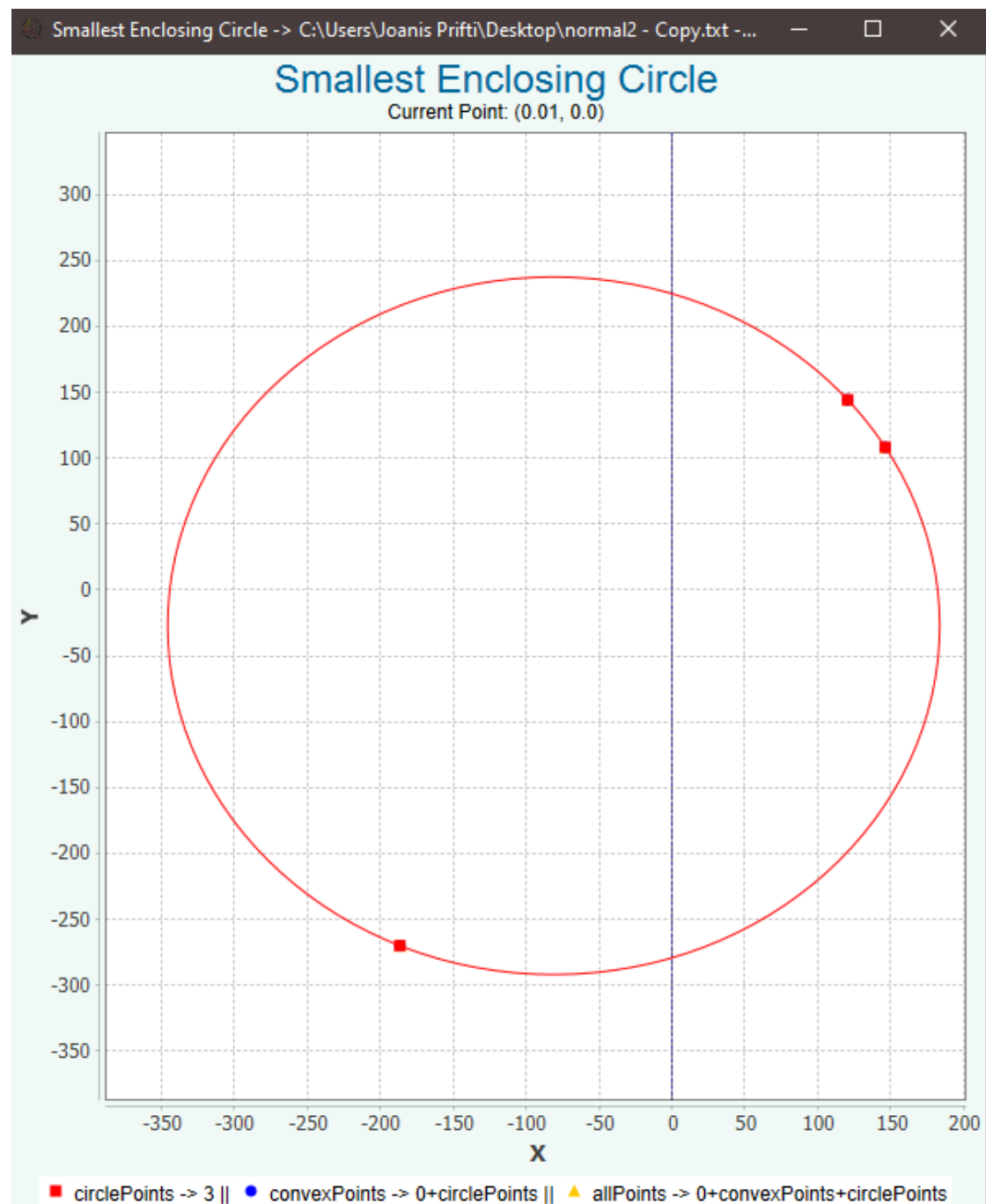


**Σχήμα 4.4:** Πληροφορίες + Οδηγίες χρήσης στα Ελληνικά.

Δίνεται επίσης η δυνατότητα στον χρήστη κάνοντας κλικ πάνω στον τίτλο να ανακατευθυνθεί στην πηγή του Αλγορίθμου για τον υπολογισμό του Ελάχιστου Περικλείοντα Κύκλου καθώς και των Διαγραμμάτων Voronoi [3].

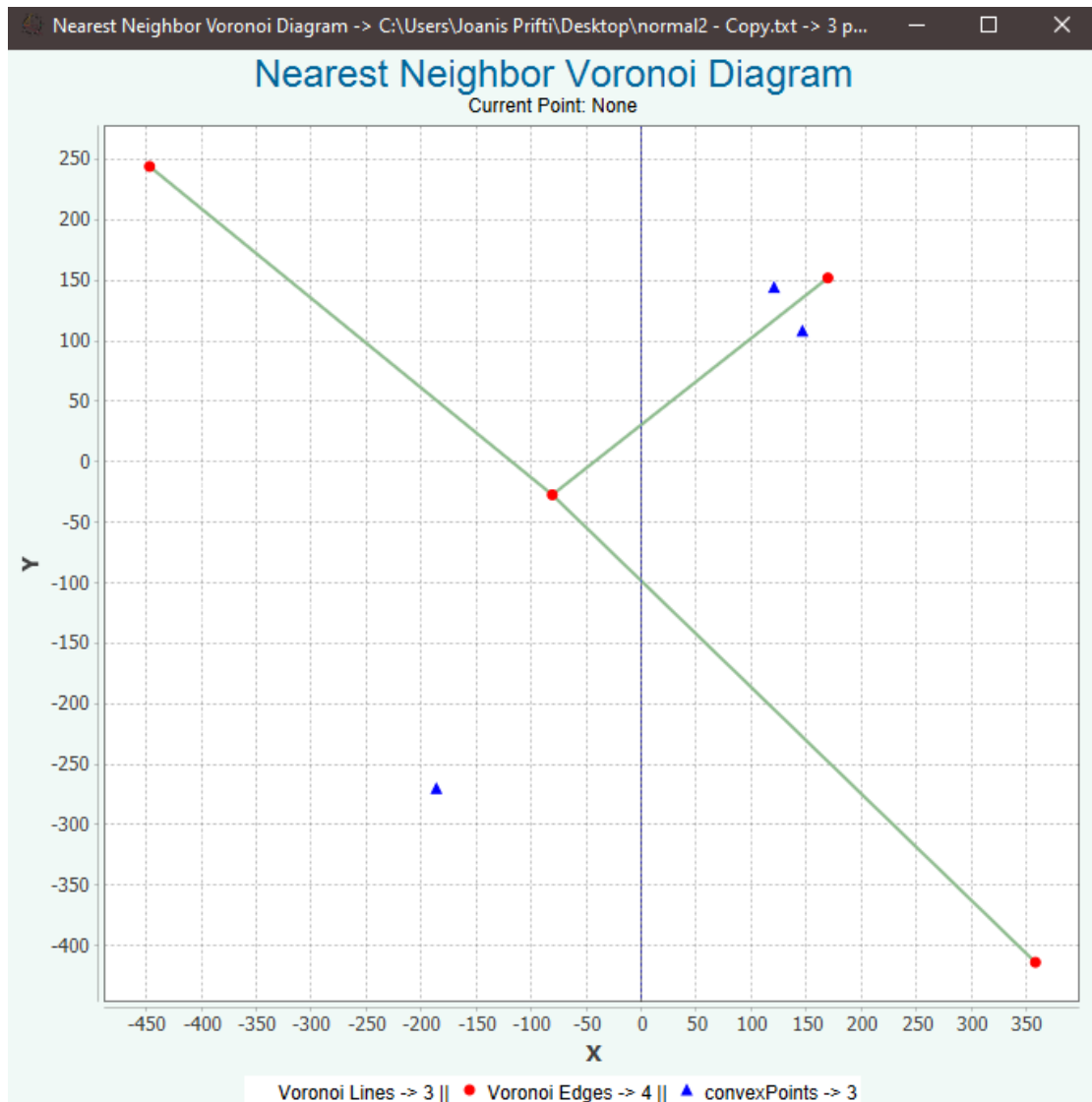
Ο χρήστης μπορεί να φορτώσει ένα αρχείο με σημεία και να δει τα αντίστοιχα διαγράμματα (βλέπε **Σχήμα 4.5-4.10**).

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα με ένα μικρό σύνολο 3 σημείων.

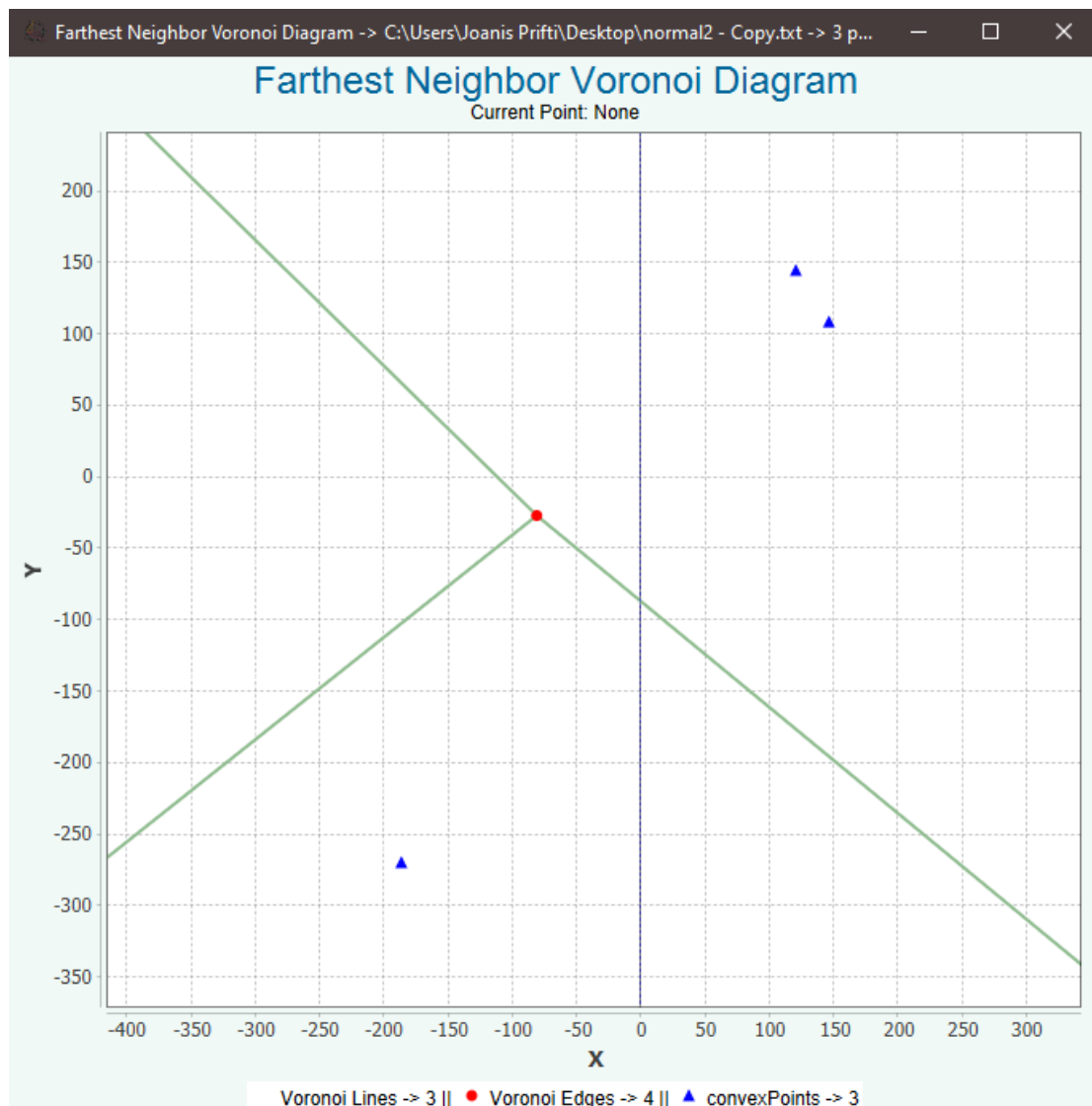


Σχήμα 4.5: Ελάχιστος Περικλείοντας Κύκλος.



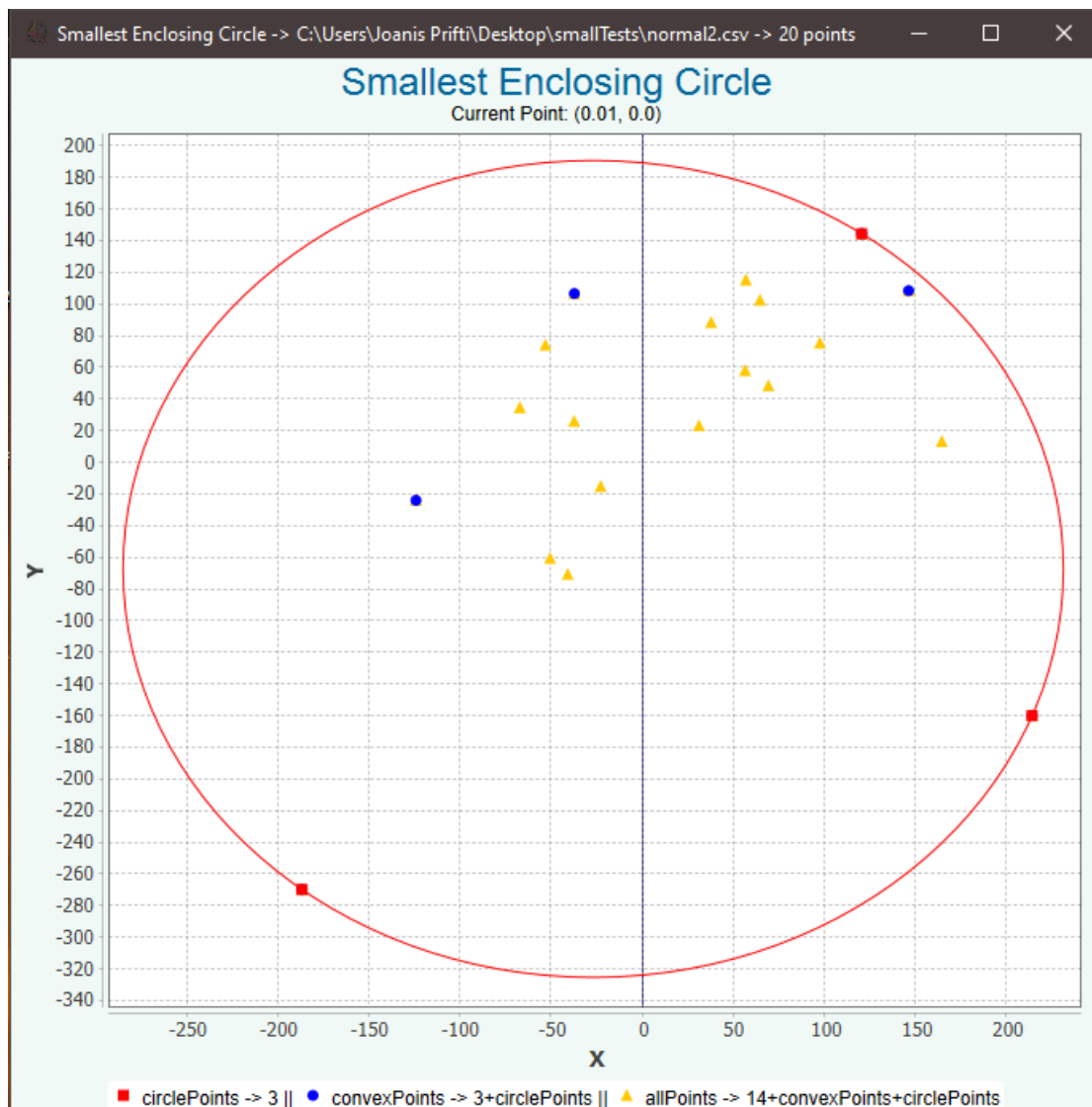


Σχήμα 4.6: Διάγραμμα Voronoi του Πλησιέστερου Γείτονα (1<sup>ης</sup> τάξης).

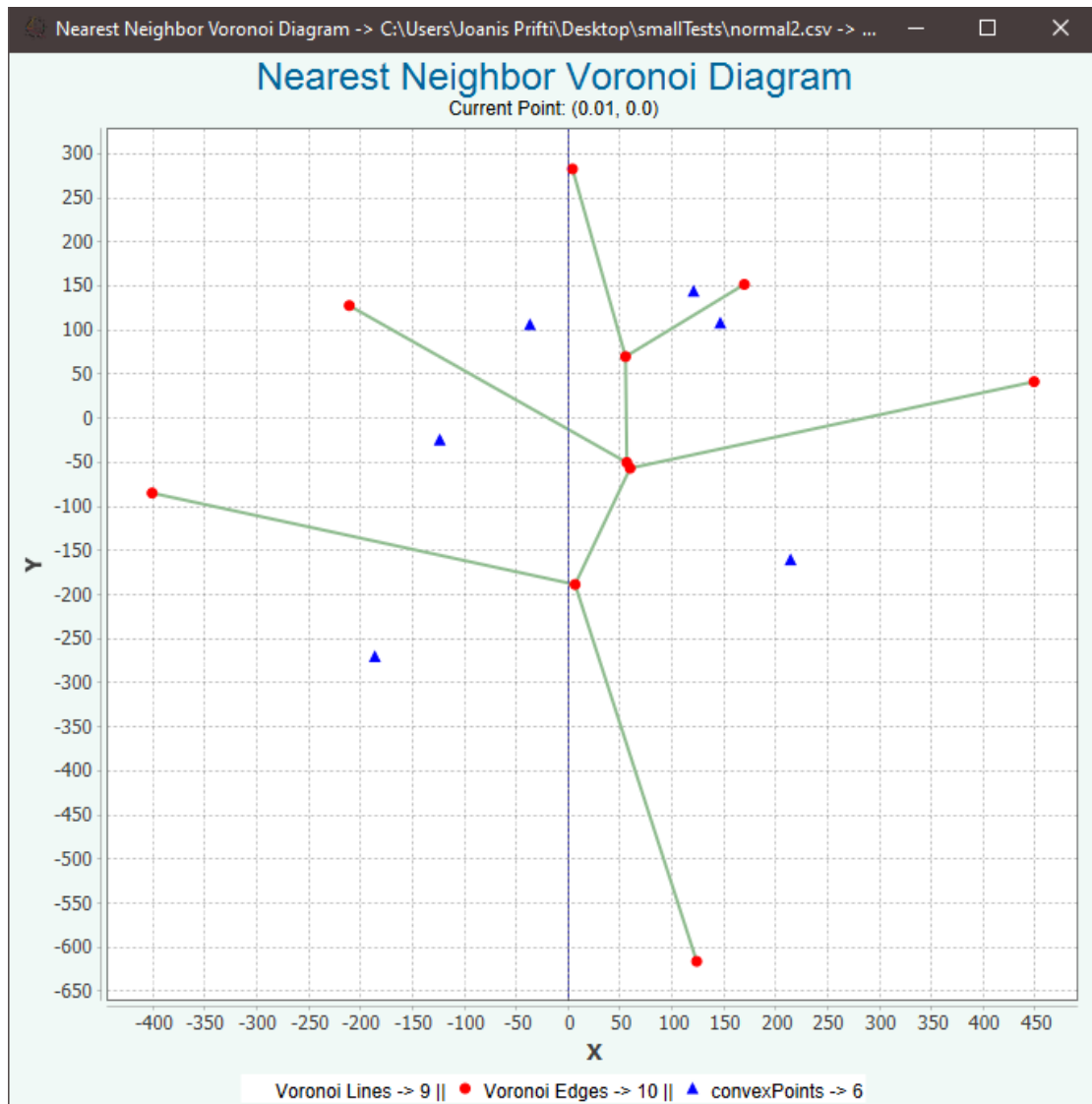


**Σχήμα 4.7:** Διάγραμμα Voronoi του πιο Απομακρυσμένου Γείτονα (n-1 τάξης).

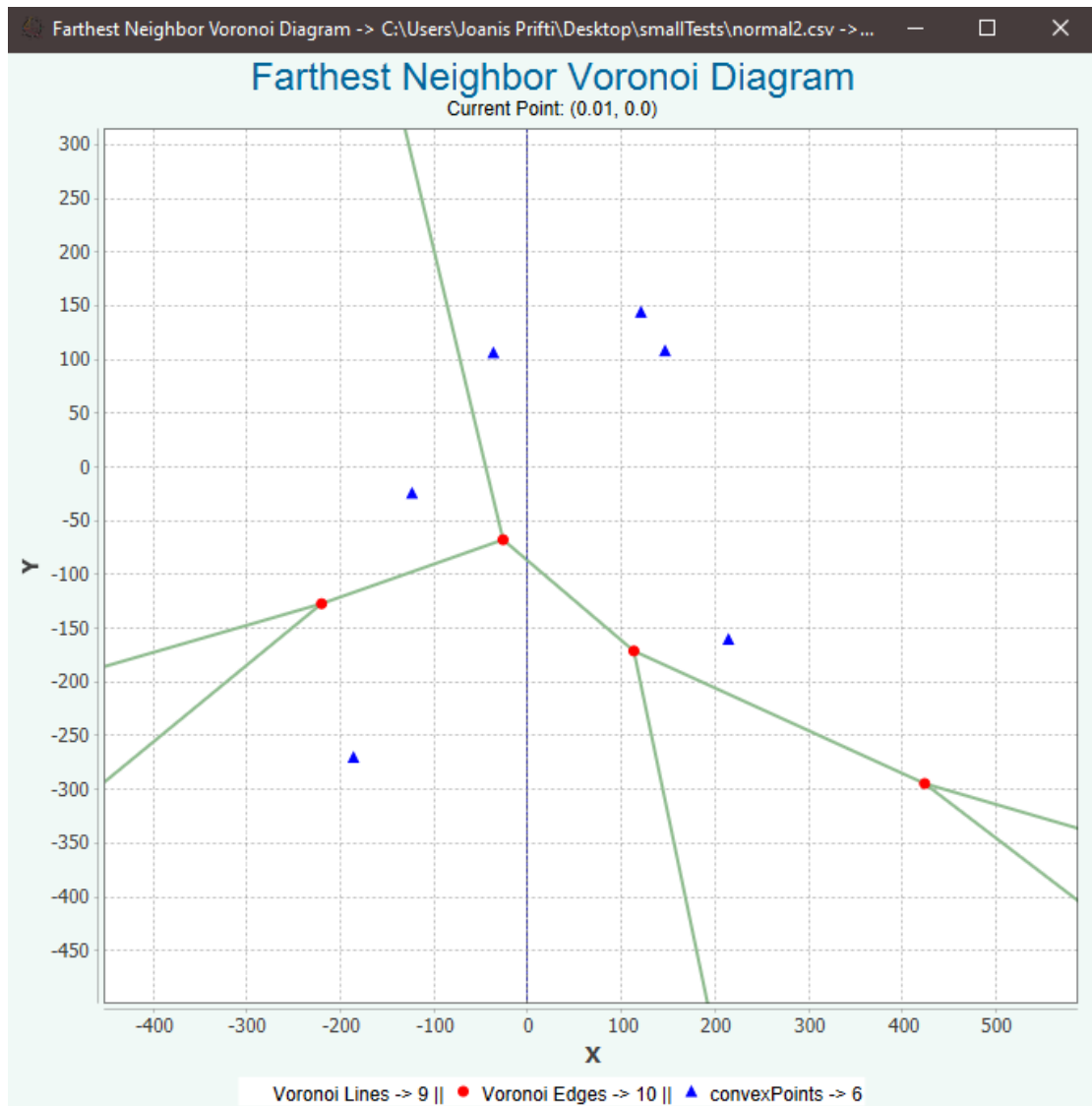
Ας δούμε τώρα ένα πιο σύνθετο παράδειγμα με ένα μεγαλύτερο σύνολο σημείων μεγέθους 20.



**Σχήμα 4.8:** Ελάχιστος Περικλείοντας Κύκλος.



Σχήμα 4.9: Διάγραμμα Voronoi του Πλησιέστερου Γείτονα (1<sup>ης</sup> τάξης).



**Σχήμα 4.10:** Διάγραμμα Voronoi του πιο Απομακρυσμένου Γείτονα ( $n-1$  τάξης).

---

## Κεφάλαιο 4. Επίλογος

### 4.1 Συμπεράσματα

Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήξαμε είναι ότι οι παραπάνω αλγόριθμοι μπορούσαν να υλοποιηθούν πολύ εύκολα αν δεν μας ενδιέφερε η πολυπλοκότητα σε χρόνο. Το γεγονός ότι έπρεπε να φτιάξουμε τους αλγορίθμους με τέτοιον τρόπο ώστε να μην ξεπερνούν το χρονικό όριο  $O(n) + O(n \log n)$  μας έκανε να ψάξουμε, να πειραματιστούμε και εν τέλει να ψάξουμε εις βάθος όλες τις υπάρχουσες δομές όπως επίσης και να πειραματιστούμε με κάποιες δικές μας ή με συνδυασμό πολλών ώστε να μπορούμε να πετύχουμε εκείνο το χρονικό όριο. Τέλος, χρειάστηκε να μελετήσουμε εις βάθος πολλά διαφορετικά κεφάλαια των μαθηματικών και πιο συγκεκριμένα της γεωμετρίας ώστε να πετύχουμε τον στόχο μας που δεν ήταν άλλος από την αποδοτική υλοποίηση αυτού του προγράμματος.

### 4.2 Μελλοντικές Ενημερώσεις

Το πρόγραμμα έχει γραφτεί με τέτοιον τρόπο ώστε να είναι επεκτάσιμο και έτσι να μπορούμε να προσθέσουμε ή να τροποποιήσουμε κάποια λειτουργία.

Μελλοντικά λοιπόν, θα θέλαμε να προσθέσουμε την λειτουργία φόρτωσης σημείων χειροκίνητα με την έννοια να μπορεί ο χρήστης να «ζωγραφίσει» σε έναν καμβά του προγράμματος τα σημεία που εκείνος επιθυμεί και μετά να πάει κάποια κουμπί ώστε να εκτελεστούν οι υπολογισμοί και να εμφανιστούν τα αντίστοιχα διαγράμματα.

Μια άλλη λειτουργία που θα θέλαμε να προσθέσουμε είναι να δίνεται η δυνατότητα στον χρήστη να μετακινεί κάποιο σημείο από κάποιο διάγραμμα και αυτό να υπολογίζεται εκ νέου σε πραγματικό χρόνο.

---

## Κεφάλαιο 5. Βιβλιογραφία

- [1] R.L. Graham, An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar, Inform. Process. Lett. 1 (1972) 132-133:  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020019072900452?via%3Dihub>
- [2] Graham Scan Images: [https://en.wikipedia.org/wiki/Graham\\_scan#cite\\_note-g72-1](https://en.wikipedia.org/wiki/Graham_scan#cite_note-g72-1)
- [3] Sven Skyum, A simple algorithm for computing the smallest enclosing circle, Inform. Process. Lett. 37 (1991) 121-125:  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002001909190030L>
- [4] Κοκκινόμαυρο δυαδικό δέντρο αναζήτησης:  
<https://docs.oracle.com/javase/8/docs/api/java/util/TreeMap.html>
- [5] Λεξικό: <https://docs.oracle.com/javase/8/docs/api/java/util/HashMap.html>
- [6] Δομές Δεδομένων και Πολυπλοκότητες:  
<https://algs4.cs.princeton.edu/cheatsheet/>
- [7] Java 17: <https://www.oracle.com/java/technologies/javase/jdk17-archive-downloads.html>
- [8] JavaFX 19: <https://openjfx.io/>
- [9] CSS for JavaFX:  
<https://openjfx.io/javadoc/19/javafx.graphics/javafx/scene/doc-files/cssref.html>
- [10] Eclipse IDE for Java: <https://www.eclipse.org/downloads/>
- [11] Δημιουργία εκτελέσιμου αρχείου .exe: <https://launch4j.sourceforge.net/>
- [12] Factory Pattern:  
[https://www.tutorialspoint.com/design\\_pattern/factory\\_pattern.htm](https://www.tutorialspoint.com/design_pattern/factory_pattern.htm)
- [13] MVC Pattern:  
<https://en.wikipedia.org/wiki/Model%E2%80%93view%E2%80%93controller>

- 
- [14] Merge Sort from Collections.sort: <https://www.geeksforgeeks.org/collections-sort-java-examples/>
- [15] JFreeChartFX library for plotting graphs in JavaFX: <https://www.jfree.org/jfreechart/>
- [16] Eclipse IDE: <https://www.eclipse.org/>
- [17] CSV Parsing: <https://opencsv.sourceforge.net/>
- [18] Excel Parsing: <https://poi.apache.org/>
- [19] Mark De Berg, Otfried Cheong, Mark Van Kreveld, Mark Overmars, Υπολογιστική Γεωμετρία Αλγόριθμοι και Εφαρμογές Πανεπιστημιακών Εκδόσεων Κρήτης, Ηράκλειο 2021: <https://www.cup.gr/book/ipologistiki-geometria/>
- [20] Farthest Neighbor Voronoi Diagram Definition: [https://en.wikipedia.org/wiki/Voronoi\\_diagram](https://en.wikipedia.org/wiki/Voronoi_diagram)
- [21] N. Megiddo, Linear time algorithms for linear programming in  $R^3$  and related problems, SIAM J., Comput. 12 (1983) 759-776: <https://theory.stanford.edu/~megiddo/pdf/lp3.pdf>
- [22] A. Aggraval L. J. Guibas, J. Saxe and P.W. Shor, A linear time algorithm for computing the Voronoi diagram of a convex polygon, Discrete Comput. Geom. 4 (1989) 491-604: <https://www.semanticscholar.org/paper/A-linear-time-algorithm-for-computing-the-voronoi-a-Aggarwal-Guibas/760e737914d015d537442626294b8b6872905e55>
- [23] Piotr Berman, Andrzej Lingas, A nearly optimal parallel algorithm for the Voronoi diagram of a convex polygon, Theoretical Computer Science 174 (1997) 193-202: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397596000242>
- [24] Alon Efrat, Micha Shafir, Alon Ziv, Computing the smallest l-enclosing circle and related problems, 4 (1994) 119-136: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0925772194900035>
- [25] Pooya Shivanasab, Rhim Ali Abbaaspour, An incremental algorithm for simultaneous construction of 2D Voronoi diagram and Delaunay triangulation based on a face-based data structure, 169 (2022) 103129: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0965997822000400>