Resumen sobre funciones para 12mo grado

Debido a las inquietudes recibidas y a la cantidad de preguntas realizadas a nuestro Repasador Virtual sobre el tema Funciones, nuestra empresa CINESOFT para colaborar con tu preparación al examen de ingreso de Matemática a la Educación Superior, ha elaborado este resumen.

En nuestro portal CubaEduca en la página matematica.cubaeduca.cu aparecen ya desarrollados en diferentes módulos, los temas de cada una de las funciones con ejemplos resueltos, ejercicios interactivos y tareas.

En este tema es importante que sepas:

En este tema es importante que sepas:

1. **Aplicar el concepto de función a ejercicios de formato diverso.**
2. **Dada la ecuación de una función, esbozar la gráfica y escribir las propiedades.**
3. **Dada la representación gráfica de una función, escribir su ecuación y escribir las propiedades.**
4. **Calcular la inversa de una función.**
5. **Determinar la función compuesta entre dos funciones.**

Además, debes saber calcular valores funcionales y verificar si determinados pares pertenecen a las funciones.

Rogamos nos disculpes cualquier imprecisión y la hagas llegar a nosotros para hacer la corrección inmediatamente.

Esperamos que te sea útil para lograr una mejor preparación.

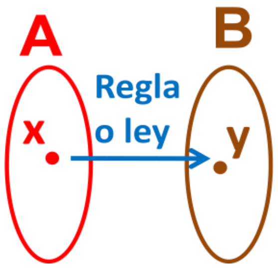
Autores: MSc. Jesús Cantón Arenas

MSc. Mirta Capote Jaume

Resumen sobre funciones

Definición 1: Una función ***f*** es una correspondencia entre dos conjuntos **A** y **B**, que a cada elemento **x**∈**A** se le asocia un **único** elemento **y**∈**B**.

El conjunto **A** se denomina **conjunto de partida** y es el **dominio** de la función.

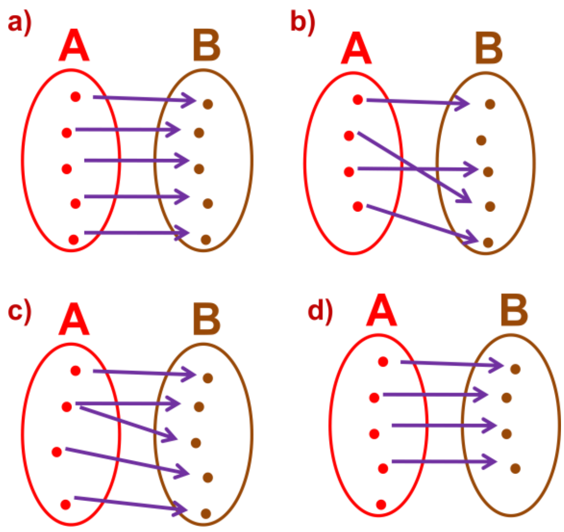


El conjunto **B** es el conjunto de llegada.
El elemento de **B**, que corresponde a un elemento ***x*** de **A**, se llama **imagen** de **x** y se denota ***f***(x). El conjunto de todas las imágenes es la **imagen** de la función.

A ***x*** se le llama **variable independiente** y la ***y***, **variable dependiente**.

Definición 2: Una función ***f*: X → Y** es un conjunto de pares ordenados **(*x* ; *y*)** tal que cada ***x***∈**X** aparece como la primera coordenada de **solo un par ordenado**.

Sobre el **concepto** de función debes saber resolver ejercicios como los siguientes:



Ejemplo 1: Diga cuáles de las correspondencias siguientes son funciones y cuáles no. Argumenta en cada caso, el por qué.

Solución:

a) Es función.

A cada elemento de **A** se le asocia un **único** elemento en **B**.

b) Es función.

A cada elemento de **A** se le asocia un **único** elemento en **B**. En **B** hay un elemento **sin relación**, pero en el conjunto de llegada eso **no influye**, solo que ese elemento **no** formará parte del **conjunto imagen**.

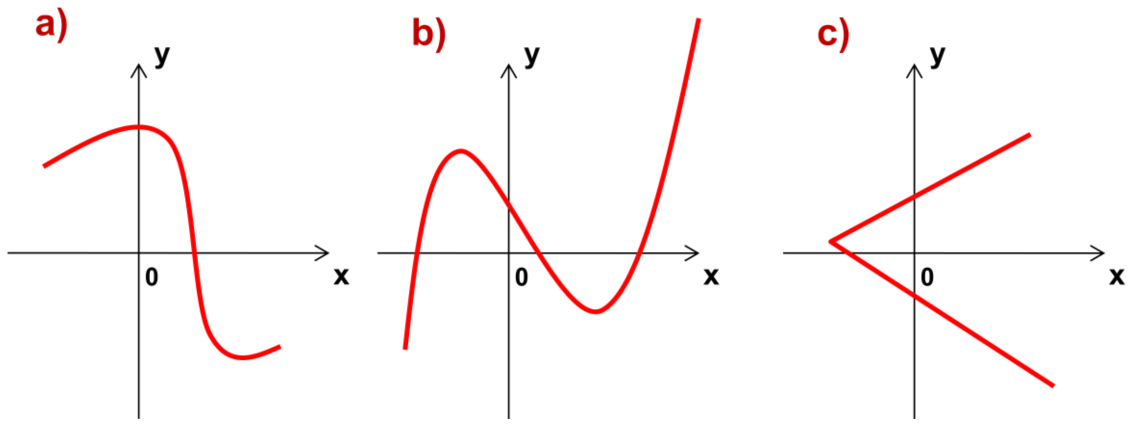
c) No es función.

Hay un elemento de **A** al que se le asocian **dos** elementos en **B**.

d) No es función.

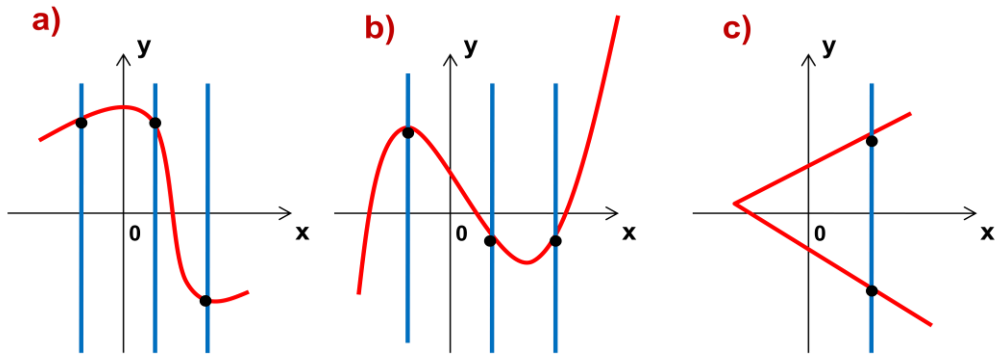
Hay un elemento de **A** al que **no** se le asocia **ningún** elemento en **B**.

Ejemplo 2: Diga cuáles de las siguientes correspondencias que se muestran a partir de gráficas son funciones y cuáles no. Argumenta en cada caso, el por qué.



Solución:

Para determinar si una correspondencia dada por su gráfica es **función**, se trazan rectas **paralelas** al **eje "y"** y estas deben cortar a la gráfica en un **único** punto.



a) Sí es función.

Todas las rectas **paralelas** al eje **"y"** que traces, cortarán en un **único** punto a la gráfica.

b) Sí es función.

Todas las rectas **paralelas** al eje **"y"** que traces, cortarán en un **único** punto a la gráfica.

c) No es función.

Habrá **infinitas** rectas **paralelas** al eje **"y"** que cortarán en **dos puntos** a la gráfica. Con que ocurra con al menos una de ellas basta.

Ejemplo 3: Escribe verdadero o falso. En el caso de las falsas, argumenta el por qué.

a) __ La correspondencia definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real le asocia raíz cuadrada, es una función.

R/ Falso. Hay números reales para los cuales **no existe** la raíz cuadrada, por ejemplo **– 2**.

b) __ La correspondencia definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real le asocia su valor absoluto, es una función.

R/ Verdadero. El valor absoluto es el **módulo**, que siempre se puede calcular y es **único**.

c) __ La correspondencia definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real le asocia la expresión $\frac{1}{x+4}+3$, es una función.

R/ Falso. Para **x = – 4** la fracción se **indefine**.

Nota: Sería verdadero si el conjunto de partida fuese los **reales**, **distinto** de **– 4**.

d) __ La correspondencia definida de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{N}$ que a cada número entero le asocia su opuesto, es una función.

R/ Falso. Por ejemplo, el **opuesto** de **1** es **– 1** que no está en el conjunto de llegada.

Nota: De $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ sería verdadero.

e) __ La correspondencia definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real le asocia su cubo disminuido en 6, es una función.

R/ Verdadero. El **cubo** de un número siempre existe y es **único**.

f) __ La correspondencia definida de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ que a cada número entero le asocia su mitad aumentada en 5, es una función.

R/ Falso. Porque hay números, por ejemplo **3** cuya **mitad no** es un número entero y al **sumarle 5** tampoco da un número entero.

g) __ Si **A** = {– 2 ; 0 ; 3} y **B** = {5}, entonces la correspondencia de **A** en **B**, cuyos pares ordenados son {(– 2; 5) ; (0 ; 5) ; (3 ; 5)}, es una función.

R/ Verdadero. Porque la **primera componente** de cada par **no se repite** y se tomaron **todos** los elementos de **A**. Los elementos de **B** se pueden repetir.

h) __ Si **M** = {– 1 ; 1 ; 5,5} y **P** = {2 ; 3 ; 5}, entonces la correspondencia de **M** en **P**, cuyos pares ordenados son {(– 1; 2) ; (– 1 ; 3) ; (1 ; 5) ; (5,5 ; 5)}, es una función.

R/ Falso. Porque la **primera componente** de los dos primeros pares, – 1, **se repite**.

i) __ La correspondencia definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real le asocia raíz cúbica, es una función.

R/ Verdadero. La raíz cúbica está **definida** para todos los reales y es **única**.

j) __ La correspondencia definida de $\mathbb{R}_+$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real le asocia la expresión $log_2 x + 3$, es una función.

R/ Falso. El **argumento** de un logaritmo tiene que ser **mayor** que **cero**, por lo que para $x = 0$, no está definido ese logaritmo.

Nota: En el conjunto de partida se excluyen los números **negativos**, pero **no** el **cero**.

k)__ La correspondencia definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{N}$ que a cada número real le asocia la expresión $4^{x+1} - 2$, es una función.

R/ Falso. Por ejemplo, para $x = -1$ se obtiene -1 que **no** es un **número natural**.

$$4^{x+1} - 2 = 4^{-1+1} - 2 = 4^0 - 2 = 1 - 2 = -1$$

l)___ La correspondencia definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real le asocia la expresión $2sen\ x$, es una función.

R/ Verdadero. La función **seno** está definida para cualquier valor real.

m)___ La correspondencia definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real le asocia la expresión $tan\ x$, es una función.

R/ Falso. Porque hay ángulos para los cuales la **tangente no está definida**, por ejemplo para $x = \frac{\pi}{2}$.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES

∗ **Dominio**: Desde el punto de vista **analítico**, es el conjunto de **valores admisibles** para la variable independiente (***x***), o sea, todos los valores que puede tomar dicha variable.

Desde el punto de vista **gráfico** podemos analizar el **dominio** mirando el comportamiento de la representación gráfica de la función respecto al eje "***x***", o sea, si **cubre todo** el eje o solo una **parte** de él. Esto se hace **proyectando** cada punto de la gráfica sobre el eje "***x***".

∗ **Imagen**: Desde el punto de vista **analítico**, es el conjunto de **valores admisibles** para la variable dependiente (***y***), o sea, todos los valores que puede tomar dicha variable, que se corresponden con elementos del **conjunto de partida**.

Desde el punto de vista **gráfico** podemos analizar la **imagen** mirando el comportamiento de la representación gráfica de la función respecto al eje "***y***", o sea, si **cubre todo** el eje o solo una **parte** de él. Esto se hace proyectando cada punto de la gráfica sobre el eje "***y***".

∗ **Cero**: Desde el punto de vista **analítico**, es el **valor del dominio (*x*)** cuya **imagen (*y*) es igual a cero**.

Por lo tanto, se calcula:

1. **Sustituyendo** en la ecuación la variable ***y*** por cero.
2. **Resolviendo** la ecuación planteada.

Desde el punto de vista **gráfico** es la **abscisa** (***x***) del punto, donde la gráfica **intercepta** el **eje de las "*x*"**. El punto que lo contiene tiene coordenadas $(x\ ;\ 0)$.

∗ **Intercepto con el eje "y"**: Desde el punto de vista **analítico**, es el valor de la **imagen (*y*)** para el cual su valor correspondiente del **dominio** es igual a **cero**.

Por lo tanto, se calcula:

1. **Sustituyendo** en la ecuación la variable ***x*** por **cero**.
2. **Efectuando** las operaciones indicadas hasta obtener el valor de ***y***.

Desde el punto de vista **gráfico** es la **ordenada** del punto donde la gráfica **intercepta** el **eje de las "*y*"**. El punto que lo contiene tiene coordenadas $(\mathbf{0}\ ;\ \boldsymbol{y})$.

∗ **Monotonía**: Desde el punto de vista **analítico**, una función:

- ✓ es **creciente** si a medida que **crecen** los valores del dominio (***x***) van **creciendo** los valores de la imagen (***y***),
- ✓ es **decreciente** si cuando **crecen** los valores de ***x*** **disminuyen** los valores de ***y***,
- ✓ es **constante** si cuando **crecen** los valores de ***x***, **no cambia** el valor de la variable ***y***.

Gráficamente se analiza el comportamiento de la función **de izquierda a derecha**, observando si **asciende**, **desciende** o **se mantiene**.

∗ **Signos**:

Desde el punto de vista **analítico**, una función:

- ✓ Es **positiva** para todos los valores de ***x*** cuyas **imágenes son positivas**.

  Para determinar cuándo una función es **positiva**, se plantea y resuelve la **inecuación** $f(x) > 0$.

- ✓ Es **negativa** para los valores de **x** cuya **imagen es negativa**.

  Para determinar cuándo una función es **negativa**, se plantea y se resuelve la inecuación $f(x) < 0$.

Desde el punto de vista **gráfico**, una función es **positiva** cuando **su gráfica está por encima del eje “x”** y es **negativa** cuando **su gráfica está por debajo de dicho eje**.

∗ **Paridad**:

- ✓ Una función es **par**, desde el punto de vista **analítico**, si cumple que $f(x) = f(-x)$. Desde el punto de vista gráfico es **par**, cuando su gráfica es **simétrica** con respecto al eje “***y***”.

- ✓ Una función es **impar**, desde el punto de vista **analítico**, si cumple que $f(x) = -f(-x)$. Desde el punto de vista gráfico es **impar**, cuando su gráfica es **simétrica** con respecto al **origen de coordenadas**, o sea, el punto $(0\,;\,0)$.

- ✓ En todos los demás casos la función **no es par ni impar**.

∗ **Inyectividad**: Una función es **inyectiva** desde el punto de vista **gráfico,** si al trazar **rectas paralelas** al eje "***x***" cortan a la gráfica en **un único punto**.

Analíticamente, una función es **inyectiva** si elementos **diferentes** del dominio, tienen imágenes diferentes, o sea, $\boldsymbol{x_1} \neq \boldsymbol{x_2}$, entonces $f(\boldsymbol{x_1}) \neq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})$.

También se puede expresar que, **para dos valores iguales de la imagen le corresponden valores iguales del dominio**, o sea, a cada valor de la **imagen** corresponderá **solo un valor** del **dominio**.

NOTA: Si una función ***f*** es **inyectiva**, entonces tiene **inversa**.

Para hallar la inversa $\boldsymbol{f}^{-1}$ de una función ***f*** debes realizar dos pasos:

1. Despejar la variable $\boldsymbol{x}$ en la ecuación de la función.

2. Cambiar las variables, o sea, en el lugar de $\boldsymbol{x}$ poner $\boldsymbol{y}$, mientras que en el lugar de la $\boldsymbol{y}$ colocar $\boldsymbol{x}$.

Y se cumple que:

$*$ Si $\boldsymbol{f}$ es una función **inyectiva** con dominio **A** e imagen **B**, entonces la función inversa $\boldsymbol{f}^{-1}$ tiene dominio **B** e imagen **A** y se define por

$$\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \text{ cuando } \boldsymbol{f}(x) = y\text{, para todo } y \in \mathbf{B}.$$

Es decir: $Dom(\boldsymbol{f}^{-1}) = Im(\boldsymbol{f})$ y $Im(\boldsymbol{f}^{-1}) = Dom(\boldsymbol{f})$

$*$ La gráfica de $\boldsymbol{f}^{-1}$ es **simétrica** de la gráfica de $\boldsymbol{f}$ respecto a la recta $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$.

Existen otras propiedades que son específicas de algunas funciones, las cuales se relacionan a continuación:

$*$ **Vértice:** Es el punto de coordenadas $V(\boldsymbol{x}_V\,;\,\boldsymbol{y}_V)$ de la función donde **su gráfica cambia de monotonía**.

$*$ **Valor máximo (mínimo):** Es el **mayor** (**menor**) valor que toma la **imagen** (***y***) de la función.

⁎ **Ecuación del eje de simetría:** para las funciones **simétricas** es la ecuación de la recta que divide a su gráfico en dos partes iguales y se puede escribir de dos formas: $x - a = 0$ o también $x = a$, donde a es el valor de x por donde pasa la recta.

⁎ **Ecuación de la asíntota:** La **asíntota** es una recta a la cual la gráfica se acerca, pero no llega a tocar.

- ✓ Si la **asíntota** es **vertical** su ecuación es $x = a$, donde a es el valor de x por donde pasa la recta,
- ✓ Si la **asíntota** es **horizontal**, su ecuación es $y = b$, donde b es el valor de y por donde pasa la recta.

Función compuesta

Para hallar la función compuesta $(f_{\circ}g)(x)$ o también $f[g(x)]$ debes:

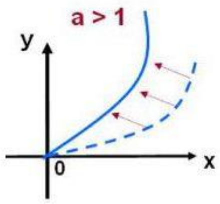
1. Sustituir la función interna g en cualquier lugar donde aparezca la x en la función externa f.

2. Realizar las operaciones posibles.

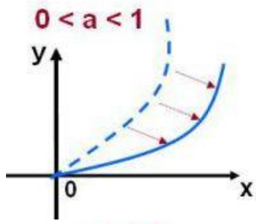
El dominio de una función compuesta es la **intersección** del dominio de la función interna g y el dominio de la función resultante $(f_{\circ}g)(x)$.

Transformaciones en las funciones numéricas. Influencia de los parámetros en sus gráficos y propiedades

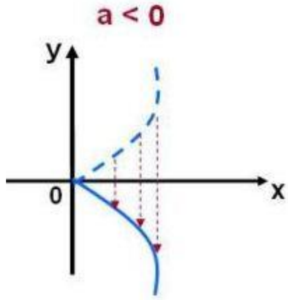
- **Del valor que toma el coeficiente de una función** depende que en ella ocurra una **dilatación**, una **contracción** o una **reflexión**. De esta manera para $y = \boldsymbol{a} \cdot f(x)$:
    - ✓ ocurre una **dilatación respecto al eje "$\boldsymbol{y}$"** si $\boldsymbol{a > 1}$



    - ✓ ocurre una **contracción respecto al eje "$\boldsymbol{y}$"** si $\boldsymbol{0 < a < 1}$

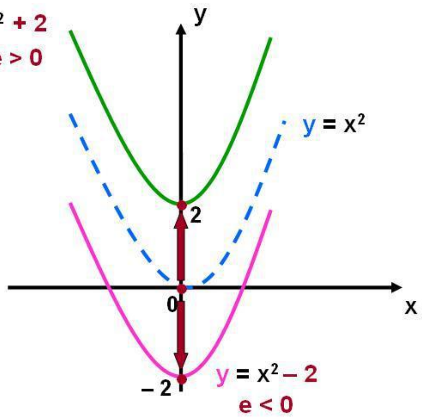


    - ✓ ocurre una **reflexión respecto al eje "$\boldsymbol{y}$"** si $\boldsymbol{a < 0}$



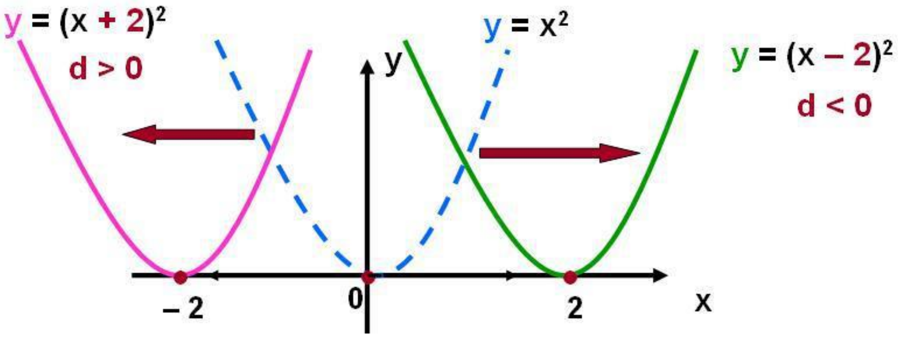
- **Del valor que toma el término independiente que acompaña a la función** depende que en ella ocurra una **traslación en sentido del eje $\boldsymbol{y}$**. De esta manera para $y = f(x) + \boldsymbol{e}$:
    - ✓ ocurre un **desplazamiento en sentido positivo** si $\boldsymbol{e > 0}$

- ✓ ocurre un **desplazamiento en sentido negativo** si $e < 0$



Nota: La traslación con respecto al eje "y" , **coincide con el valor que toma el parámetro**.

- **Del valor que toma el término independiente que acompaña a la variable que se encuentra en el argumento de una función** depende que en ella ocurra una **traslación en sentido del eje "x"**. De esta manera para $y = f(x + d)$:
  - ✓ ocurre un **desplazamiento en sentido negativo** si $d > 0$
  - ✓ ocurre un si $d < 0$ el **desplazamiento en sentido positivo**



Nota: La traslación con respecto al eje "x", **es opuesta al valor que toma el parámetro**.

- En una función $y = \boldsymbol{a} \cdot f(x + \boldsymbol{d}) + \boldsymbol{e}$ puedes encontrar varias de estas transformaciones en dependencia de los valores que tomen los parámetros presentes en ella.

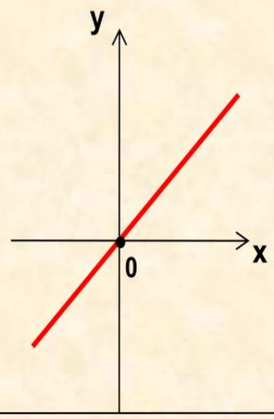
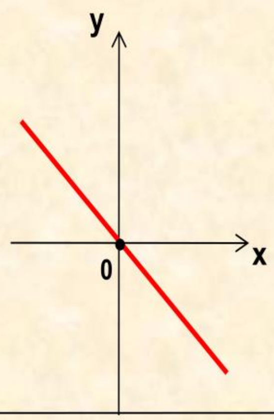
Función lineal

Analicemos la función **lineal**, (sin desplazamiento), su **gráfico** y **propiedades.**

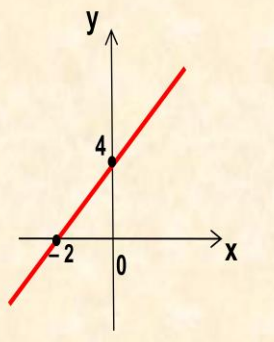
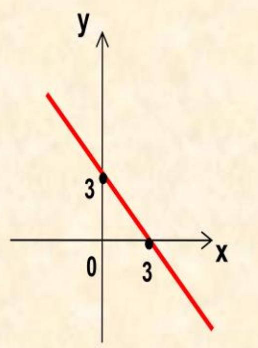
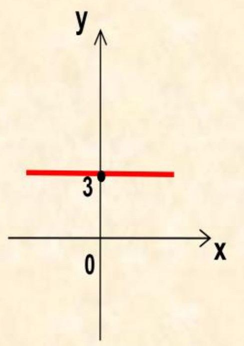
Función lineal

$y = mx + n$

$a \neq 0$

	$y = ax$	$y = -ax$
		
Dominio	$x \in \Re$	$x \in \Re$
Imagen	$y \in \Re$	$y \in \Re$
Cero	$x = 0$	$x = 0$
Monotonía	creciente	decreciente
Signos	positiva: $x > 0$ negativa: $x < 0$	positiva: $x < 0$ negativa: $x > 0$
Paridad	impar	impar
Inyectiva	Sí	Sí
Intercepto con “y”	$y = 0$	$y = 0$

Observa algunos ejemplos de la función **lineal**, (con desplazamiento), su **gráfico** y **propiedades.**

Función lineal $y = mx + n$	$y = 2x + 4$	$y = -x + 3$	$y = 3$
			
Dominio	$x \in \Re$	$x \in \Re$	$x \in \Re$
Imagen	$y \in \Re$	$y \in \Re$	$y = 3$
Cero	$x = -2$	$x = 3$	No tiene
Monotonía	creciente	decreciente	constante
Signos	positiva: $x > -2$ negativa: $x < -2$	positiva: $x < 3$ negativa: $x > 3$	positiva
Paridad	No es par ni impar	No es par ni impar	par
Inyectiva	Sí	Sí	No
Intercepto con "y"	$y = 4$	$y = 3$	$y = 3$

Comentarios:

♦ La **función lineal constante** tiene como imagen un **único elemento**, el valor de n.

♦ Ceros de una **función lineal**:

- ✓ tiene **un cero** si es de la forma $y = mx + n$, con $m \neq 0, n \neq 0$ o $y = mx$, con $m \neq 0$; o sea, si su **gráfica** está **inclinada** respecto al eje "x".
- ✓ **no tiene cero** si es de la forma $y = n$, con $n \neq 0$; o sea, si su **gráfica** es **paralela** al eje "x" y **no** coincide con dicho eje.
- ✓ tiene **infinitos ceros** si es de la forma $y = 0$; o sea, si su **gráfica coincide** con el eje "x".

♦ La **función lineal siempre** interseca al eje "y ".

♦ La **función lineal** $y = mx + n$:

- ✓ es **creciente** si $m > 0$
- ✓ es **decreciente** si $m < 0$
- ✓ es **constante** si $m = 0$

♦ Para escribir los signos se toma como referencia el **cero**.

Nota: Cuando no tiene cero, es **positiva**, si $n > 0$, **negativa** si $n < 0$.

♦ La **función lineal** es **impar** cuando tiene la forma $y = mx$ ($m \neq 0$) y es **par** si es de la forma $y = n$, en los demás casos no es par ni impar.

♦La **función lineal** es **inyectiva**, excepto cuando tiene la forma $\boldsymbol{y = n}$, donde la recta es **paralela** al eje “$\boldsymbol{x}$”.

♦ La función **inversa** de una función lineal es también una función lineal.

¿Cómo esbozar el gráfico de una función lineal?

Ejemplos:

a) $y = 2x + 6$

Se necesitan al menos **dos puntos**, los más cómodos son los **interceptos** con los ejes:

- Hallas el **intercepto** con **“x”** (**cero**):

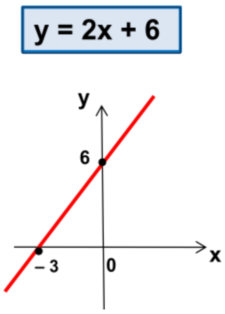
$2x + 6 = 0$ (sustituyes la ***y*** por cero)

$\boldsymbol{x = -3}$ (despejas ***x***)

- Hallas el **intercepto** con **“y”** (valor de **n**):

$\boldsymbol{y = 6}$

- Ubicas los interceptos en el sistema de coordenadas y trazas la recta:



Propiedades:

♦ **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}\}$

♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦ **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R}\}$

♦ **Inyectiva**: sí

♦ **Cero**: $x = -3$

♦ **Intercepto con "y"**: $y = 6$

♦ **Monotonía**: creciente

♦ **Signos**: La función es positiva para $x > -3$ y negativa para $x < -3$

b) $y = -2x + 6$

Se necesitan al menos **dos puntos**, los más cómodos son los **interceptos** con los ejes:

● Hallas el **intercepto** con **"x"** (**cero**):

$-2x + 6 = 0$ (sustituyes la ***y*** por cero)

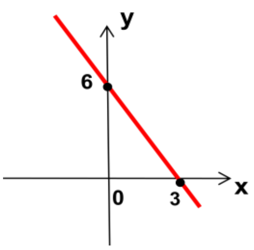
$\boldsymbol{x = 3}$ (despejas ***x***)

● Hallas el **intercepto** con **"y"** (valor de **n**):

y = 6

● Ubicas los interceptos en el sistema de coordenadas y trazas la recta:

y = – 2x + 6



Propiedades:

♦ **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}\}$

♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦ **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R}\}$

♦ **Inyectiva**: sí

♦ **Cero**: $x = 3$

♦ **Intercepto con "y"**: $y = 6$

♦ **Monotonía**: decreciente

♦ **Signos**: La función es positiva para $x < 3$ y negativa para $x > 3$.

c) $y = 3x$

● Hallas el **intercepto** con **"x"** (**cero**):

$3x = 0$

$\boldsymbol{x = 0}$.

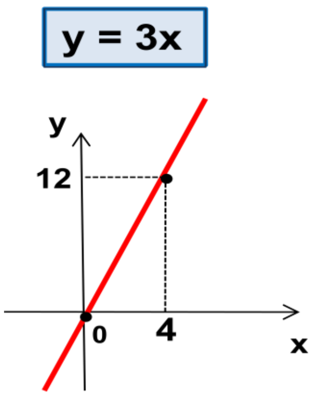
● Hallas el **intercepto** con **"y"** (valor de **n**):

$\boldsymbol{y = 0}$

● En este caso coinciden ambos valores, para dar mayor precisión a la gráfica se halla al menos **otro par**.

Para $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{4}$, $y = 3x = 3 \cdot 4 = \boldsymbol{12}$

● Ubicas los puntos en el sistema de coordenadas y trazas la recta:



Propiedades:

♦ **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}\}$

♦ **Paridad**: impar

♦ **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R}\}$

♦ **Inyectiva**: sí

♦ **Cero**: $x = 0$

♦ **Intercepto con "y"**: $y = 0$

♦ **Monotonía**: creciente

♦ **Signos**: La función es positiva para $x > 0$ y negativa para $x < 0$

d) $y = 2$

• Hallas el **intercepto** con **"x"** (**cero**):

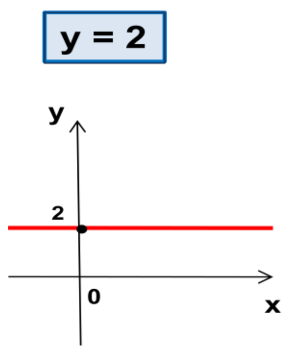
no tiene

• Hallas el **intercepto** con **"y"** (valor de **n**):

y = 2

• Ubicas el punto en el sistema de coordenadas y trazas la recta:

Nota: En este caso la función es **constante** y la recta es **paralela** al eje "x".



Propiedades:

♦ **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}\}$

♦ **Paridad**: par

♦ **Imagen**: $\{2\}$

♦ **Inyectiva**: sí

♦ **Cero**: no tiene

♦ **Intercepto con "y"**: y = 2

♦ **Monotonía**: creciente

♦ **Signos**: La función es positiva para todos los números reales, es decir $\{x \in \mathbb{R}\}$

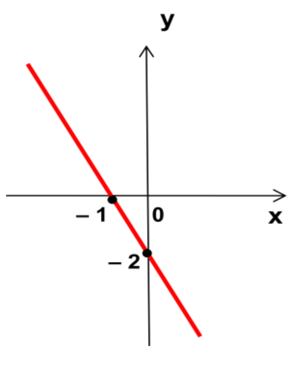
¿Cómo escribir la ecuación de una función lineal?

Para escribir la ecuación de una función lineal, debes tener en cuenta qué información te brinda el ejercicio. A continuación, te proponemos algunas ideas.

Ejemplos:

A continuación aparecen las gráficas de varias funciones de la forma $y = mx + n$. Escribe en cada caso su ecuación.

a)



Solución:

Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$.

1. Como la **recta** se inclina hacia **abajo** de izquierda a derecha, su **pendiente** es **negativa**.

2. Determinas los valores de $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$:

- De la **gráfica** se puede extraer el valor de $\boldsymbol{n}$ del **intercepto con el eje "y"**:

$$\boldsymbol{n} = -\ \mathbf{2}$$

- La ecuación toma la forma $y = \boldsymbol{m}x - \mathbf{2}$
  Para hallar el valor de $\boldsymbol{m}$, tomas un **punto** de la recta y **sustituyes** sus **coordenadas** en la ecuación:
  El **punto** que se puede tomar de la gráfica, **no puede ser el que utilizaste para obtener la n**, entonces tomas el par $(-\ 1\ ;\ 0)$.

$0 = \boldsymbol{m}(-\ 1) - \mathbf{2}$ (sustituyes las coordenadas)

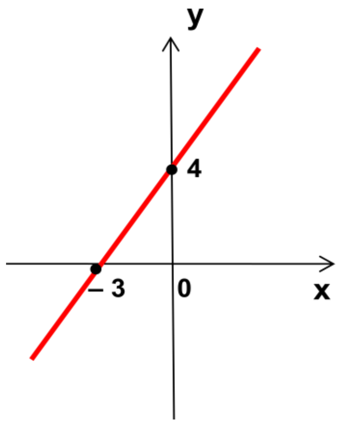
$2 = \boldsymbol{m}(-\ 1)$ (transpones – 2)

$\boldsymbol{m} = \frac{2}{-1} = -\ \mathbf{2}$ (despejas y efectúas)

Nota: Observa que la **pendiente** da **negativa**, puedes verificarlo por la inclinación de la recta hacia **abajo**.

3. Escribes la ecuación: $y = -\ \mathbf{2}x - \mathbf{2}$

b)



Solución:

Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros m y n.

1. Como la **recta** se inclina hacia **arriba** de izquierda a derecha, su **pendiente** es **positiva**.

2. Determinas los valores de m y n:

- De la **gráfica** se puede extraer el valor de n:

$$n = 4$$

- La ecuación toma la forma $y = mx + 4$

  Para hallar el valor de m, tomas un **punto** de la recta y **sustituyes** sus **coordenadas** en la ecuación:

El **punto** que se puede tomar de la gráfica, **no puede ser el utilizado para obtener** la **n**, entonces tomas el par $(-3\,;\ 0)$.

$0 = \boldsymbol{m}(-3) + \mathbf{4}$ (sustituyes las coordenadas)

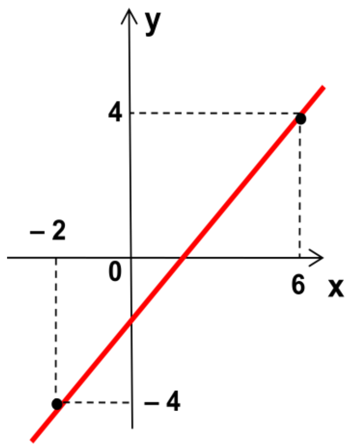
$-4 = \boldsymbol{m}(-3)$ (transpones 4)

$\boldsymbol{m} = \frac{-4}{-3} = \mathbf{\frac{4}{3}}$ (despejas y efectúas)

Nota: Observa que la **pendiente** da **positiva**, puedes verificarlo por la inclinación de la recta hacia **arriba**.

3. Escribes la ecuación: $y = \mathbf{\frac{4}{3}}x + \mathbf{4}$

c)



Solución:

Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$.

1. Como la **recta** se inclina hacia **arriba** de izquierda a derecha, su **pendiente** es **positiva**.

2. Determinas los valores de $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$:

- A diferencia de los incisos anteriores, ahora no puedes obtener el valor de **n** de la **gráfica**. En este caso conoces **dos puntos** de la recta, por lo que primero hay que calcular la **pendiente** $\boldsymbol{m}$ aplicando la **fórmula**:

$$\boldsymbol{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Extraes de la gráfica los **puntos** de coordenadas:

$$(\underset{x_1}{\underset{\downarrow}{-2}}\,;\ \underset{y_1}{\underset{\downarrow}{-4}}) \text{ y } (\underset{x_2}{\underset{\downarrow}{6}}\,;\ \underset{y_2}{\underset{\downarrow}{4}})$$

- Sustituyes y calculas **m**:

$$\boldsymbol{m} = \frac{4-(-4)}{6-(-2)} = \frac{4+4}{6+2} = \frac{8}{8} = \mathbf{1}$$

- Determinas el valor de $\boldsymbol{n}$:

Para ello sustituyes en la ecuación $y = \boldsymbol{m}x + \boldsymbol{n}$, debes utilizar el valor de $\boldsymbol{m}$ hallado y cualquiera de los puntos que pertenecen a la recta:

$\boldsymbol{m} = \mathbf{1}$ y tomas el punto $(\mathbf{6}\ ;\ \mathbf{4})$

$y = \mathbf{1}x + \boldsymbol{n}$ (sustituyes el valor de **m**)

$\mathbf{4} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{6} + \boldsymbol{n}$ (sustituyes las coordenadas del punto)

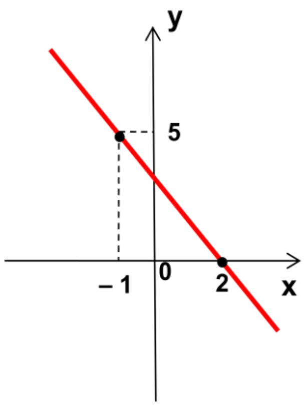
$\mathbf{4} = \mathbf{6} + \boldsymbol{n}$ (efectúas el producto)

$\mathbf{4} - \mathbf{6} = \boldsymbol{n}$ (transpones el 6)

$n = -2$ (efectúas la sustracción)

3. Escribes la ecuación: $y = x - 2$

d)



Solución:

Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros m y n.

1. Como la **recta** se inclina hacia **abajo** de izquierda a derecha, su **pendiente** es **negativa**.

2. Determinas los valores de m y n:

- A diferencia de los incisos anteriores, ahora no puedes obtener el valor de **n** de la **gráfica**. En este caso conoces **dos puntos** de la recta, por lo que primero hay que calcular la **pendiente** m aplicando la **fórmula**:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Extraes de la gráfica los **puntos** de coordenadas:

$$\underset{x_1}{(2}\,;\,\underset{y_1}{0)} \text{ y } \underset{x_2}{(-1}\,;\,\underset{y_2}{5)}$$

- Sustituyes y calculas **m**:

$$m = \frac{5-0}{-1-2} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$$

- Determinas el valor de n:

Para ello sustituyes en la ecuación $y = mx + n$, debes utilizar el valor de m hallado y cualquiera de los puntos que pertenecen a la recta:

$m = -\frac{5}{3}$ y tomas el punto $(2\,;\,0)$

$y = -\frac{5}{3}x + n$ (sustituyes el valor de **m**)

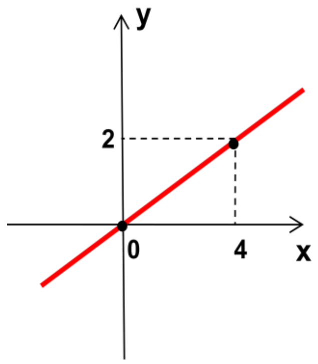
$0 = -\frac{5}{3} \cdot 2 + n$ (sustituyes las coordenadas del punto)

$0 = -\frac{10}{3} + n$ (efectúas el producto)

$n = \frac{10}{3}$ (transpones el $-\frac{10}{3}$)

3. Escribes la ecuación: $y = -\frac{5}{3}x + \frac{10}{3}$

e)



Solución:

Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$.

1. Como la **recta** se inclina hacia **arriba** de izquierda a derecha, su **pendiente** es **positiva**.

2. Determinas los valores de $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$:

- De la **gráfica** se puede extraer el valor de $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$$

- La ecuación toma la forma $y = \boldsymbol{m}x$

Para hallar el valor de $\boldsymbol{m}$, tomas un **punto** de la recta y **sustituyes** sus **coordenadas** en la ecuación:

El **punto** que se puede tomar de la gráfica, **no** puede ser el utilizado ya para obtener la **n**, entonces tomas el par $(4\,;\,2)$.

$2 = \boldsymbol{m}(4)$ (sustituyes las coordenadas)

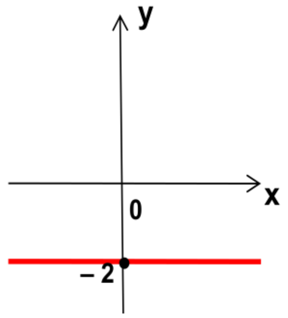
$\boldsymbol{m} = \frac{2}{4}$ (transpones el 4)

$\boldsymbol{m} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ (simplificas)

Nota: Observa que la **pendiente** da **positiva**, puedes verificarlo por la inclinación de la recta hacia **arriba**.

3. Escribes la ecuación: $y = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}x$

f)



Solución:

Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$.

1. Como la **recta** es **paralela** al eje "***x***", entonces la **pendiente** es igual a **cero**.

La ecuación toma la forma: $y = \boldsymbol{n}$.

De la gráfica se obtiene que $\boldsymbol{n} = -\mathbf{2}$.

2. Escribes la ecuación: $y = -\mathbf{2}$

Resumiendo:

Para escribir la **ecuación** de una **función lineal**:

1. Si conoces los **parámetros** m y n, escribes rápidamente la ecuación.

2. Si conoces el **parámetro** m y las **coordenadas** de un **punto**, hallas el valor de n **sustituyendo** ambos elementos en la ecuación y **despejando** n.

3. Si conoces el **parámetro** n y las **coordenadas** de un **punto**, hallas el valor de m **sustituyendo** ambos elementos en la ecuación y **despejando** m o utilizando la **fórmula** para el cálculo de la **pendiente** conocidos dos puntos.

4. Si no conoces los **parámetros** m y n, debes conocer las **coordenadas** de **dos puntos** de la gráfica. Hallas m utilizando la **fórmula** para el cálculo de la **pendiente** y luego el valor de n, por **despeje** (después de sustituir m y las coordenadas de uno de los puntos conocidos en la ecuación).

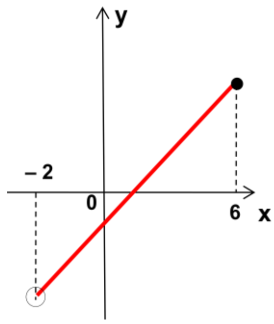
Funciones lineales con dominio restringido

En ocasiones encontrarás ejercicios sobre las funciones lineales con **dominio restringido**.

¿Qué implicaciones tiene esta situación al resolverlos?

En estos casos, se hace la **representación gráfica** de solo una **parte** de la **recta** y algunas **propiedades** cambian respecto a las de la función con su dominio sin restricción.

Ejemplo: En la gráfica aparece representada una función lineal f de ecuación $f(x) = 2x - 8$, en un subconjunto de $\mathbb{R}$.

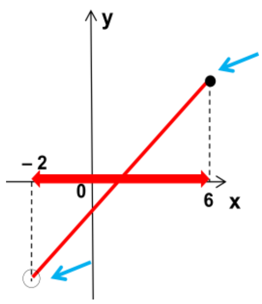


Completa los espacios en blanco:

a) El dominio de f es ______.

R/ $\{x \in \mathbb{R}: -2 < x \leq 6\}$.

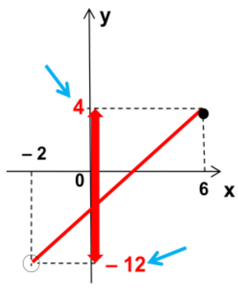
Nota: La gráfica está trazada entre **– 2** y 6, pero el valor **– 2 no se incluye** en el dominio, porque en su extremo izquierdo, aparece un círculo **sin sombrear** a diferencia del extremo derecho, donde aparece **sombreado** y sí se incluye.



b) El conjunto imagen de f es ______.

R/ $\{y \in \mathbb{R}: -12 < y \leq 4\}$.

Nota: Para hallar la **imagen** de esta función, es necesario sustituir las **abscisas** de cada extremo en la **ecuación** para



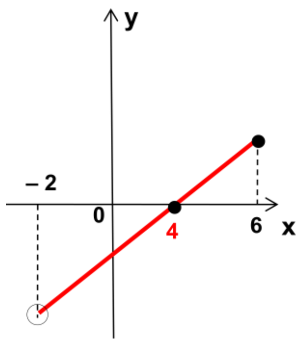
buscar sus respectivas **ordenadas**.

- Para $x = -2$: $f(-2) = 2\cdot(-2) - 8 = -4 - 8 = -12$
- Para $x = 6$: $f(6) = 2\cdot 6 - 8 = 12 - 8 = 4$

Nota: El valor **– 12 no se incluye** en la imagen, porque el valor correspondiente a su abscisa **-2** no está incluido en el dominio, observa que aparece un círculo **sin sombrear**.

c) El cero de f es ______.

R/ $x = 4$.



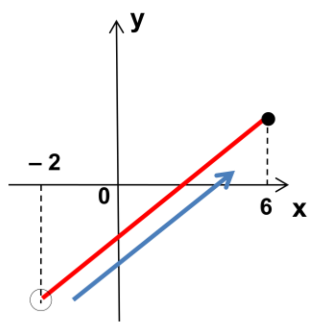
$2x - 8 = 0$ (sustituyes y por cero)

$2x = 8$ (transpones el – 8)

$x = 4$ (despejas y efectúas el cociente)

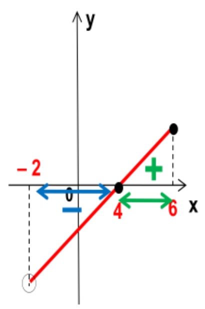
d) La función f es monótona ______.

R/ Creciente.



Nota: Es **creciente**, ya que la **pendiente** es **positiva** ($m = 2$) o porque la **gráfica** se inclina hacia **arriba**, de izquierda a derecha.

e) La función f es positiva para ______ y negativa para _______.



R/ Positiva: $4 < x \leq 6$.

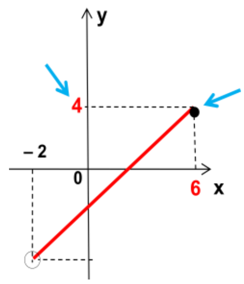
Negativa: $-2 < x < 4$.

Nota:

● En el intervalo donde es **positiva**, **no** se incluye el **4** por ser el **cero** y **sí** el **6**, porque para $x = 6$ la gráfica está por **encima** del eje "x".

● En el intervalo donde es **negativa**, **no** se incluye el **4** por ser el **cero** y **tampoco** el **– 2**, porque a pesar de que la gráfica está por **debajo** del eje "x", ese valor **no** forma parte del **dominio**.

f) La función f tiene valor máximo ___.



R/ $y = 4$

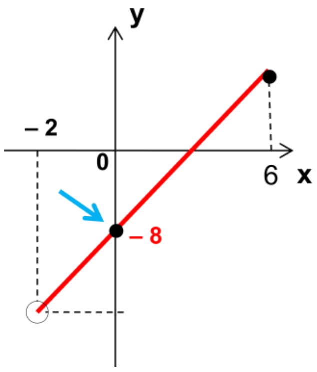
Nota: La **ordenada mayor** es $y = 4$, que se obtiene para $x = 6$.

g) La gráfica corta al eje de las ordenadas en el punto de coordenadas ___.

R/ $(0 ; -8)$

Nota:

● Para hallar el **intercepto** de la gráfica con el eje "y" (**ordenadas)**, puedes utilizar uno de estos dos procedimientos:



1. tomar el valor de n de la ecuación dada.

2. sustituir en la ecuación la x por **cero** y efectuar las operaciones indicadas.

• Como piden el **punto** se coloca en la respuesta sus **coordenadas**, si hubiesen pedido el **intercepto**, se escribe solo $\boldsymbol{y = -8}$.

Nota: Aunque no se pidió en los incisos, esta función es **inyectiva** y **no es par ni impar**. Además, no se pide el **valor mínimo**, ya que **– 2** no forma parte del dominio.

Función cuadrática

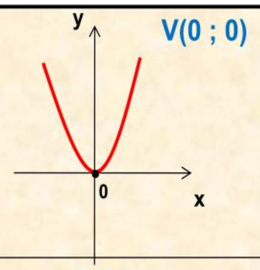
Analicemos la función **cuadrática**, (sin desplazamiento), su **gráfico** y **propiedades.**

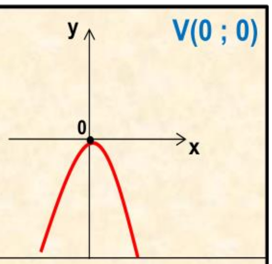
$y = ax^2$ $\quad a \neq 0 \quad$ $y = -ax^2$

Función cuadrática

$y = ax^2 + bx + c$

$y = (x + d)^2 + e$

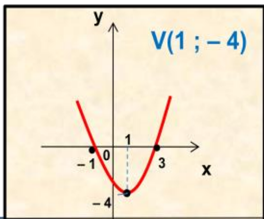
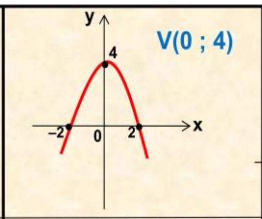
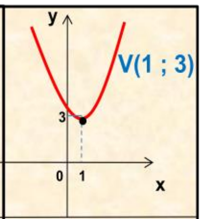




	$y = ax^2$	$y = -ax^2$
Dominio	$x \in \Re$	$x \in \Re$
Imagen	$\{y \in \Re: y \geq 0\}$	$\{y \in \Re: y \leq 0\}$
Cero	$x = 0$	$x = 0$
Monotonía	Creciente: $x \geq 0$ Decreciente: $x \leq 0$	Creciente: $x \leq 0$ Decreciente: $x \geq 0$
Signos	positiva: $\{x \in \Re: x \neq 0\}$	negativa: $\{x \in \Re: x \neq 0\}$
Paridad	par	par
Inyectiva	No	No
Intercepto con "y"	$y = 0$	$y = 0$
Valor	mínimo: $y = 0$	máximo: $y = 0$
Eje de simetría	$x = 0$	$x = 0$

Analicemos la función **cuadrática**, (con desplazamiento), su **gráfico** y **propiedades.**

:

Función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ $y = (x + d)^2 + e$	$y = x^2 - 2x - 3$ 	$y = -x^2 + 4$ 	$y = (x - 1)^2 + 3$ 
Dominio	$x \in \Re$	$x \in \Re$	$x \in \Re$
Imagen	$\{y \in \Re : y \geq -4\}$	$\{y \in \Re : y \leq 4\}$	$\{y \in \Re : y \geq 3\}$
Ceros	$x_1 = -1$ o $x_2 = 3$	$x_1 = -2$ o $x_2 = 2$	No tiene
Monotonía	Creciente: $x \geq 1$ Decreciente: $x \leq 1$	Creciente: $x \leq 0$ Decreciente: $x \geq 0$	Creciente: $x \geq 1$ Decreciente: $x \leq 1$
Signos	positiva: $x < -1$ o $x > 3$ negativa: $-1 < x < 3$	positiva: $-2 < x < 2$ negativa: $x < -2$ o $x > 2$	positiva
Paridad	No es par ni impar	par	No es par ni impar
Inyectiva	No	No	No
Intercepto con "y"	$y = -3$	$y = 4$	$y = 4$
Valor	mínimo: $y = -4$	máximo: $y = 4$	mínimo: $y = 3$
Eje de simetría	$x = 1$	$x = 0$	$x = 1$

Comentario:

♦La **ecuación** de una función cuadrática se expresa de **dos** formas:

1) $y = ax^2 + bx + c$, aquí la **abscisa** del vértice se halla por la fórmula $x_v = -\frac{b}{2a}$ y la **ordenada** del vértice se calcula sustituyendo la x_v en la ecuación. Además, el valor de c es el **intercepto** de la gráfica con el **eje "y"**.

2) $y = (x + d)^2 + e$, que nos muestra el **desplazamiento** de la parábola en ambos ejes. En esta forma las coordenadas del vértice son $V(-d\,;\,e)$.

♦ Para escribir la **imagen** de esta función se toma como referencia la **"y"** del **vértice** y siempre se incluye dicho valor en el intervalo:

- ✓ $y \geq y_v$, si la gráfica abre hacia **arriba**
- ✓ $y \leq y_v$, si abre hacia **abajo**.

♦ Para calcular los **ceros** debes resolver una **ecuación cuadrática** factorizando o aplicando la fórmula general, por lo que la **parábola** puede tener **dos ceros**, **uno** o **ninguno**.

♦ Para escribir la **monotonía** se toma como referencia la **"x"** del **vértice** y se **incluye** en ambos intervalos.

♦ Para escribir los intervalos de los **signos** se toman los **ceros** como referencia y **nunca** se incluyen en los intervalos.

♦ Esta función **no es monótona**, pues cambia de monotonía y **no es inyectiva**, a no ser que se restrinja su dominio.

♦ Es **par** si el vértice es un punto del eje "y", o sea, si la ecuación tiene la forma $y = ax^2 + c$, en caso contrario **no es par ni impar**.

♦La **parábola** es **simétrica** respecto a la recta $x = x_v$, que es su **eje de simetría**. Por ello, los **ceros** deben estar a la misma distancia de la **abscisa** del vértice.

¿Cómo esbozar el gráfico de una función cuadrática?

Ejemplo:

a) $y = x^2 + 6x - 7$

Extraes los parámetros: $a = 1$; $b = 6$; $c = -7$

Para representar una **parábola**, se necesitan al menos el **vértice** y los **ceros**.

- Hallas las **coordenadas** del **vértice**:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\cdot 1} = -3$$

Sustituyes en la ecuación y efectúas las operaciones:

$$y_v = (-3)^2 + 6(-3) - 7 = 9 - 18 - 7 = -16$$

Coordenadas del vértice: $V(-3\,;\,-16)$

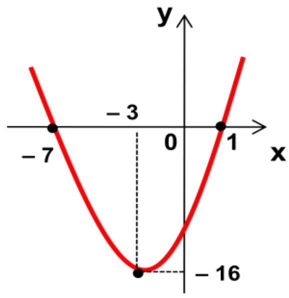
- Hallas los **ceros**:

$x^2 + 6x - 7 = 0$ (sustituyes **y** = 0)

$(x + 7)(x - 1) = 0$ (factorizas)

$x = -7$ o $x = 1$ (obtienes las x)

● Ubicas los ceros, el vértice y trazas la parábola:



Propiedades:

♦ **Dominio**: {x∈ℝ}

♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦ **Imagen**: {y∈ ℝ; y ≥ – 16}

♦ **Inyectiva**: no

♦ **Ceros**: $x_1 = -\ 7 \quad x_2 = 1$

♦ **Intercepto con "y"**: $y = -\ 7$

♦ **Monotonía**:

creciente: x ≥ – 3

decreciente: x ≤ – 3

♦ **valor mínimo**: $y = -\ 16$

♦ **eje de simetría**: $x = -\ 3$

♦ **Signos**: La función es positiva para $x < -\ 7$ o $x > 1$ y negativa para $-\ 7 < x < 1$.

b) $y = -\ x^2 + 2x$

Extraes los parámetros: $a = -\ 1\ ;\ b = 2\ ;\ c = 0$

● Hallas las **coordenadas** del **vértice**:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2.(-1)} = \mathbf{1}$$

Sustituyes en la ecuación y efectúas las operaciones:

$$y_V = -\,\mathbf{1}^2 + 2.\mathbf{1} = -\,1 + 2 = \mathbf{1}$$

Coordenadas del vértice: $\boldsymbol{V}(1\,;\,1)$

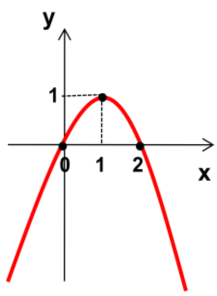
● Hallas los **ceros**:

$-\,x^2 + 2x = 0$ (sustituyes ***y*** por cero)

$x(-\,x + 2) = 0$ (factorizas)

$x = 0$ o $x = 2$ (hallas las x)

● Ubicas los ceros, el vértice y trazas la parábola:



Propiedades:

♦ **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}\}$

♦ **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R};\ y \le 1\}$

♦ **Ceros**: $x_1 = 0;\quad x_2 = 2$

♦ **Monotonía**:

creciente: $x \le 1$

decreciente: $x \ge 1$

♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦ **Inyectiva**: no

♦ **Intercepto con "y"**: $y = 0$

♦ **valor máximo**: $y = 1$

♦ **eje de simetría**: $x = 1$

♦ **Signos**: La función es negativa $x < 0$ o $x > 2$ y positiva para $0 < x < 2$

c) $y = x^2 + 2x + 5$

Extraes los parámetros: $a = 1$; $b = 2$ y $c = 5$

● Hallas las **coordenadas** del **vértice**:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\cdot 1} = -\mathbf{1}$$

Sustituyes en la ecuación y efectúas las operaciones:

$$y_V = (-\mathbf{1})^2 + 2(-\mathbf{1}) + 5 = 1 - 2 + 5 = \mathbf{4}$$

Coordenadas del vértice: $V(-\mathbf{1}\,;\,4)$

● Hallas los **ceros**:

$x^2 + 2x + 5 = 0$ (sustituyes y por cero)

No se ve **factorización** a simple vista, hay que confirmarlo hallando el **discriminante**.

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = 4 - 20 = -\mathbf{16} < \mathbf{0}$$

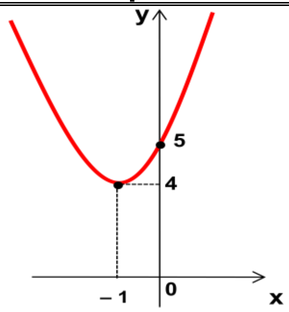
No tiene ceros

● Para mayor precisión en la gráfica, hallas el **intercepto** con el eje "***y***":

Cuando la ecuación tiene esta forma, el **intercepto** es el valor de **c**.

$$y = \mathbf{5}$$

● Ubicas el vértice, el intercepto con el eje "y" y trazas la parábola:



Propiedades:

♦**Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}\}$

♦**Paridad**: no es par ni impar

♦**Imagen**: $\{y \in \mathbb{R};\ y \geq 4\}$

♦ **Inyectiva**: no

♦**Ceros**: no tiene

♦ **Intercepto con "y"**: $y = 5$

♦**Monotonía**:

creciente: $x \geq -1$

decreciente: $x \leq -1$

♦ **valor mínimo**: $y = 4$

♦ **eje de simetría**: $x = -1$

♦ **Signos**: La función es positiva en todo su dominio, es decir $\{x \in \mathbb{R}\}$

d) $y = -2x^2 + 8$

Extraes los parámetros: $a = -2$; $b = 0$ y $c = 8$

● Hallas las **coordenadas** del **vértice**:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2.(-2)} = \frac{0}{-4} = \mathbf{0}$$

Sustituyes en la ecuación y efectúas las operaciones:

$$y_V = -2(\mathbf{0})^2 + 8 = 0 + 8 = \mathbf{8}$$

Coordenadas del vértice: $V(0\ ;\ 8)$

● Hallas los **ceros**:

$-2x^2 + 8 = 0$ (sustituyes y por cero)

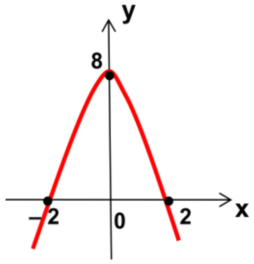
$-2(x^2 - 4) = 0$ (extraes factor común)

$x^2 - 4 = 0$ (divides por – 2)

$(x - 2)(x + 2) = 0$ (factorizas la diferencia)

$x = 2$ o $x = -2$ (hallas las x)

● Ubicas los ceros, el vértice y trazas la parábola:



Propiedades:

♦ **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}\}$

♦ **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R};\ y \leq 8\}$

♦ **Ceros**: $x_1 = -2;\quad x_2 = 2$

♦ **Monotonía**:

creciente: $x \leq 0$

decreciente: $x \geq 0$

♦ **Paridad**: es par

♦ **Inyectiva**: no

♦ **Intercepto con "y"**: $y = 8$

♦ **valor máximo**: $y = 8$

♦ **eje de simetría**: $x = 0$

♦ **Signos**: La función es negativa para $x < -2$ o $x > 2$ y positiva para $-2 < x < 2$.

e) $y = (x - 1)^2 - 4$

Extraes los parámetros: $d = -1$ y $e = -4$

● Hallas las **coordenadas** del **vértice**:

$$\boldsymbol{V}(1\,;\,-4)$$

Nota: Si la ecuación tiene la forma $\boldsymbol{y = (x + d)^2 + e}$, el vértice se halla teniendo en cuenta que: $\boldsymbol{V}(-d\,;\,e)$.

● Hallas los **ceros**:

Cuando la ecuación está en esta forma, hay **dos posibilidades** para hallar los **ceros**.

Primera vía:

$(x - 1)^2 - 4 = 0$ (igualas a cero la $\boldsymbol{y}$)

$x^2 - 2x + 1 - 4 = 0$ (efectúas la potencia)

$x^2 - 2x - 3 = 0$ (reduces términos semejantes)

$(x + 1)(x - 3) = 0$ (factorizas)

$x = -1$ o $x = 3$ (hallas las x)

Segunda vía:

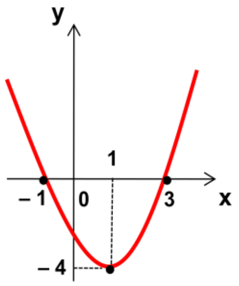
$(x - 1)^2 - 4 = 0$ (igualas a cero la ***y***)

$(x - 1 - 2)(x - 1 + 2) = 0$ (factorizas la diferencia de cuadrados)

$(x - 3)(x + 1) = 0$ (reduces términos semejantes)

$x = 3$ o $x = -1$ (hallas las x)

● Ubicas los ceros, el vértice y trazas la parábola.



Propiedades:

♦ **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}\}$

♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦ **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R};\ y \geq -4\}$

♦ **Inyectiva**: no

♦ **Ceros**: $x_1 = -1 \quad x_2 = 3$

♦ **Intercepto con "y"**: $y = -3$

♦ **Monotonía**:

creciente: $x \geq 1$

decreciente: $x \leq 1$

♦ **valor mínimo**: $y = -4$

♦ **eje de simetría**: $x = 1$

♦ **Signos**: La función es positiva para $x < -1$ o $x > 3$ y es negativa para $-1 < x < 3$.

f) $y = (x + 3)^2 - 9$

Extraes los parámetros: $d = 3$ y $e = -9$

- Hallas las **coordenadas** del **vértice**:

$$V(-3\,;\,-9)$$

Nota: Si la ecuación tiene la forma $\boldsymbol{y = (x + d)^2 + e}$ el vértice se halla teniendo en cuenta que: $\boldsymbol{V}(-d\,;\,e)$.

- Hallas los **ceros**:

Cuando la ecuación está en esta forma, hay **dos posibilidades** para hallar los **ceros**.

Primera vía:

$(x + 3)^2 - 9 = 0$ (igualas a cero la ***y***)

$x^2 + 6x + 9 - 9 = 0$ (efectúas la potencia)

$x^2 + 6x = 0$ (reduces términos semejantes)

$x(x + 6) = 0$ (factorizas)

$x = 0$ o $x = -6$ (hallas las x)

Segunda vía:

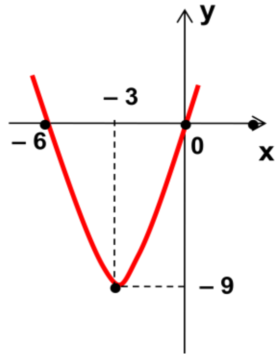
$(x + 3)^2 - 9 = 0$ (igualas a cero la ***y***)

$(x + 3 - 3)(x + 3 + 3) = 0$ (factorizas la diferencia de cuadrados)

$x(x + 6) = 0$ (reduces términos semejantes)

$x = 0$ o $x = -6$ (hallas las x)

● Ubicas los ceros, el vértice y trazas la parábola.



Propiedades:

♦ **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}\}$

♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦ **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R};\ y \geq -9\}$

♦ **Inyectiva**: no

♦ **Ceros**: $x_1 = -6;\ \ x_2 = 0$

♦ **Intercepto con "y"**: $y = 0$

♦ **Monotonía**:

creciente: $x \geq -3$

decreciente: $x \leq -3$

♦ **valor mínimo**: $y = -9$

♦ **eje de simetría**: $x = -3$

♦ **Signos**: La función es positiva para $x < -6$ o $x > 0$ y negativa para $-6 < x < 0$

¿Cómo escribir la ecuación de una función cuadrática?

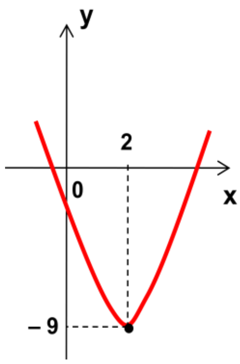
Para escribir la ecuación de una función cuadrática, debes tener en cuenta qué información te brinda el ejercicio. A continuación, te proponemos algunas ideas.

Ejemplos:

A continuación aparecen las gráficas de varias funciones cuadráticas. Escribe en cada caso su ecuación, en las formas indicadas.

a) $y = x^2 + bx + c$

$y = (x + d)^2 + e$



Solución:

I. Cuando se conoce las **coordenadas** del **vértice**, es muy sencillo escribir la **ecuación** de la función en la forma $\boldsymbol{y = (x + d)^2 + e}$.

- Extraes de la gráfica las **coordenadas** del **vértice**:

$$\boldsymbol{V(2\,;\,-\,9)}$$

- Escribes la **ecuación**: $\boldsymbol{y = (x - 2)^2 - 9}$

Nota: Recuerda que el vértice es $\boldsymbol{V(-\,d\,;\,e)}$ para la forma $\boldsymbol{y = (x + d)^2 + e}$. También como la **parábola** está desplazada 2u hacia la **derecha**, el valor de $\boldsymbol{d}$ es **– 2**.

II. Para escribir la ecuación en la forma $y = x^2 + bx + c$, si solo conoces las **coordenadas** del **vértice**, te debes auxiliar de la forma anterior y efectúas las operaciones indicadas:

- $\boldsymbol{y = (x - 2)^2 - 9}$

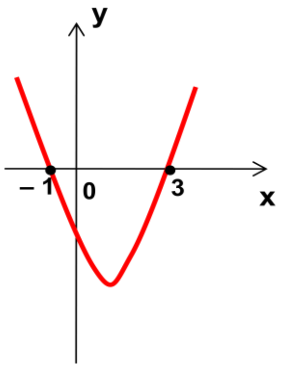
$y = x^2 - 4x + 4 - 9$ (desarrollas el binomio)

$\boldsymbol{y = x^2 - 4x - 5}$ (reduces términos semejantes)

R/ $\boldsymbol{y = (x - 2)^2 - 9}$ y $\boldsymbol{y = x^2 - 4x - 5}$

b) $y = x^2 + bx + c$

$y = (x + d)^2 + e$



Solución:

I. Cuando conoces los **ceros** de la función y el **parámetro** $\boldsymbol{a}$, que acompaña a la variable cuadrática de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, $\boldsymbol{a = 1}$, es más rápido obtener la ecuación en la forma $\boldsymbol{y = x^2 + bx + c}$.

En este caso, hay **dos vías** para escribir la ecuación.

- **Primera vía:**

De la gráfica obtienes los ceros $x = -1$ y $x = 3$ y como $a = 1$, realizas el procedimiento a la **inversa** que realizas para calcular los **ceros** a partir de la **ecuación**:

- Partes de la ecuación siguiente:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Sustituyes los **ceros** y el valor de a:

$$y = 1(x + 1)(x - 3)$$

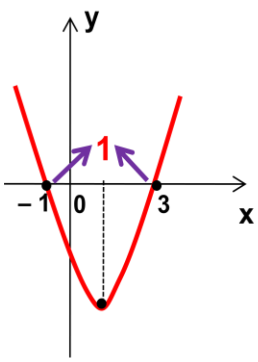
- Efectúas el producto indicado:

$$y = x^2 - 3x + x - 3$$

- Reduces términos semejantes: $y = x^2 - 2x - 3$

- **Segunda vía:**

Como la **parábola** es **simétrica** con respecto al **eje de simetría**, la **abscisa** del vértice tiene que estar a **igual distancia** de los **ceros**, o sea, x_v es el **punto medio** entre los **ceros**.



Entre **– 1** y **3** el valor que está en el **medio** es el **1**.

Luego, si $x_v = 1$ y de la forma de la ecuación se observa que $a = 1$, utilizas la **fórmula** $x_v = -\frac{b}{2a}$ para hallar el valor de b:

- Planteas la **fórmula**: $x_v = -\frac{b}{2a}$
- Sustituyes el valor de x_v y de a: $1 = -\frac{b}{2 \cdot 1}$
- Efectúas el **producto** en el denominador: $1 = -\frac{b}{2}$
- Despejas b: $b = -2$

La ecuación toma la forma: $y = x^2 - 2x + c$

Para hallar el valor de c, sustituyes las **coordenadas** de un **punto** de la gráfica en la ecuación:

- Tomamos el par $(3\,;\,0)$ y sustituyes:

$$0 = 3^2 - 2 \cdot 3 + c$$

- Efectúas y despejas:

$$0 = 9 - 6 + c$$

$$c + 3 = 0$$

$$c = -3$$

- Escribes la ecuación: $y = x^2 - 2x - 3$

II. Para escribir la ecuación en la otra forma

$y = (x + d)^2 + e$ tienes, a partir de la ya escrita, **dos vías**:

Primera vía: (**completamiento cuadrático**)

$$y = x^2 - 2x - 3$$

- Tomas el **coeficiente** del término cuya parte literal es x:

$$-2$$

- **Divides** por 2 el resultado: $\frac{-2}{2} = -1$

- **Elevas** al **cuadrado** el resultado: $(-1)^2 = 1$

- **Adicionas** y **sustraes 1** después del **término** con **x**:

$$y = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3$$

- **Agrupas** los tres primeros términos (que forman un trinomio cuadrado perfecto) y **reduces** los dos últimos:

$$y = (x^2 - 2x + 1) - 4$$

- Factorizas el **trinomio cuadrado perfecto**:

$$y = (x - 1)^2 - 4$$

Segunda vía: (Calcular x_v y y_v)

$$y = x^2 - 2x - 3 \quad (a = 1 \; ; \; b = -2)$$

- Planteas la **fórmula**: $x_v = -\frac{b}{2a}$

- Sustituyes: $x_v = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$

- Sustituyes x_v en la ecuación:

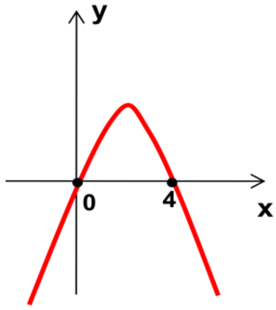
$$y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

- Obtienes las coordenadas del vértice: $V(1\,;\,-4)$ **y escribes la ecuación** $y = (x - 1)^2 - 4$

R/ $y = (x - 1)^2 - 4$ y $y = x^2 - 2x - 3$

c) $y = -x^2 + bx + c$

$y = -(x + d)^2 + e$



Solución:

Como la **parábola** abre hacia **abajo**, ambas ecuaciones tienen un **signo menos** delante.

I. Cuando conoces los **ceros** de la función y el **parámetro** a, obtenido de la forma de la ecuación, $a = -1$, es más rápido obtener la ecuación en la forma $y = -x^2 + bx + c$.

En este caso, hay **dos vías** para escribir la ecuación.

Primera vía:

De la gráfica obtienes los ceros $x = 0$ y $x = 4$ y como $a = -1$, realizas el procedimiento a la **inversa** que realizas para calcular los **ceros** a partir de la **ecuación**:

- Partes de la ecuación general:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Sustituyes los **ceros** y el valor de **a**:

$$y = -1(x + 0)(x - 4)$$

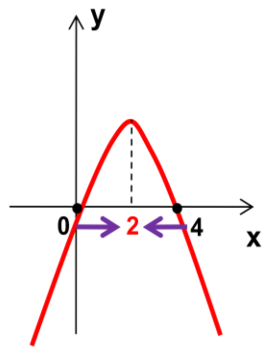
$$y = -x(x - 4)$$

- Efectúas el producto indicado:

$$y = -x^2 + 4x$$

Segunda vía:

Como la **parábola** es **simétrica** con respecto al **eje de simetría**, la **abscisa** del vértice tiene que estar a **igual distancia** de los **ceros**, o sea, la x_v es el **punto medio** entre los **ceros**.



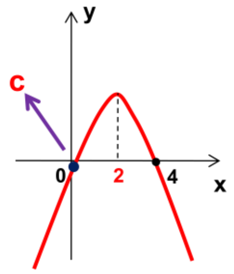
Entre **0** y **4** el valor que está en el **medio** es el **2**.

Luego, si $x_v = 2$ y de la forma de la ecuación se observa que $a = -1$, utilizas la **fórmula** $x_v = -\frac{b}{2a}$ para hallar el valor de b:

- Planteas la **fórmula**: $x_v = -\frac{b}{2a}$
- Sustituyes el valor de x_v y de **a**: $2 = -\frac{b}{2(-1)}$
- Efectúas el **producto** en el denominador: $2 = -\frac{b}{-2}$
- Despejas b: $b = 4$

La ecuación toma la forma: $y = -x^2 + 4x + c$

Para hallar el valor de **c**, debes recordar que es el **intercepto** de la **parábola** con el eje **"y"**. Luego, de la gráfica se obtiene que $c = 0$.



- Escribes la ecuación: $y = -x^2 + 4x$

II. Para escribir la ecuación en la otra forma $y = -(x + d)^2 + e$ tienes **dos vías**:

Primera vía: (Calcular x_v y y_v)

$$y = -x^2 + 4x \qquad (a = -1\ ;\ b = 4)$$

- Planteas la **fórmula**: $x_v = -\frac{b}{2a}$

- Sustituyes: $x_v = -\frac{4}{2.(-1)} = 2$

- Sustituyes x_v en la ecuación para hallar y_v:

$$y_v = -2^2 + 4 \cdot 2 = -4 + 8 = 4$$

- Obtienes las coordenadas del vértice: $V(2 ; 4)$

- Escribes la ecuación: $y = -(x-2)^2 + 4$

Segunda vía: (**completamiento cuadrático**)

De la ecuación obtenida $y = -x^2 + 4x$, aplicas el siguiente procedimiento:

- Tomas el **coeficiente** del término cuya parte literal es x:

$$4$$

- **Divides** por 2 ese coeficiente: $\frac{4}{2} = 2$

- **Elevas** al **cuadrado** el resultado: $2^2 = 4$

- **Sustraes** y **adicionas 4** después del **término** con **x**:

$$y = -x^2 + 4x - 4 + 4$$

- **Agrupas** los tres primeros términos (que forman un trinomio cuadrado perfecto) y extraes factor común -1, para que el **coeficiente** de x^2 quede **positivo**:

$$y = (-x^2 + 4x - 4) + 4$$

$$y = -(x^2 - 4x + 4) + 4$$

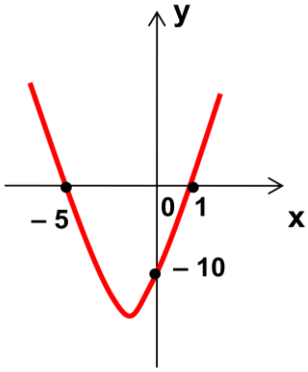
- Factorizas el **trinomio cuadrado perfecto**:

$$\boldsymbol{y = -(x - 2)^2 + 4}$$

Nota: En este caso como el **coeficiente** de **x^2** es **negativo** en la ecuación general, se **sustrae** primero y se **adiciona** después el **4**, a diferencia del inciso **b)**.

¿Y cómo proceder en el caso de que $a \neq 1$?

d) $y = ax^2 + bx + c$



Solución:

Cuando conoces los **ceros** de la función, es más rápido obtener la ecuación en la forma $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$.

De la gráfica obtienes los ceros $\boldsymbol{x = -5}$ y $\boldsymbol{x = 1}$ y realizas el procedimiento a la **inversa** que realizas para calcular los **ceros** a partir de la **ecuación**:

- Partes de la ecuación general:

$$y = \boldsymbol{a}(x - \boldsymbol{x_1})(x - \boldsymbol{x_2})$$

- Sustituyes los **ceros**:

$$y = \boldsymbol{a}(x + \mathbf{5})(x - \mathbf{1})$$

- Efectúas el producto indicado:

$$y = \boldsymbol{a}(x^2 - x + 5x - 5)$$

$$y = \boldsymbol{a}(x^2 + 4x - 5)$$

- Determinas el valor de $\boldsymbol{a}$:

De la gráfica obtienes el par $(\mathbf{0}\, ;\, -\mathbf{10})$, el cual utilizas para hallar $\boldsymbol{a}$.

$$-\mathbf{10} = \boldsymbol{a}(\mathbf{0}^2 + 4 \cdot \mathbf{0} - 5)$$

$$-\mathbf{10} = \boldsymbol{a}(\mathbf{0} + \mathbf{0} - 5)$$

$$-\mathbf{10} = \boldsymbol{a}(-5)$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{-10}{-5} = \mathbf{2}$$

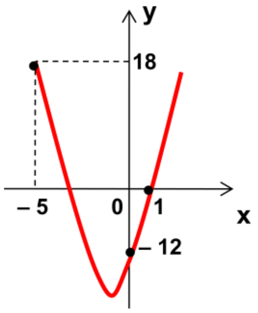
- Sustituyes $\boldsymbol{a}$ y efectúas el producto:

$$y = \mathbf{2}(x^2 + 4x - 5)$$

$$y = \mathbf{2}x^2 + 8x - 10$$

- Escribes la ecuación: $\boldsymbol{y = 2x^2 + 8x - 10}$

e) $y = ax^2 + bx + c$



Solución:

De la gráfica puedes obtener un **cero** de la función $x = 1$, el valor de c por ser el intercepto con el eje "y" ($c = -12$) y las coordenadas de otro punto $(-5 ; 18)$.

La gráfica toma la forma: $y = ax^2 + bx - 12$

¿Cómo proceder para hallar a y b?

En este caso debes **sustituir** las coordenadas de dos puntos en la **ecuación** y resolver el **sistema** formado por ellas.

- Sustituyes las coordenadas del cero $(1 ; 0)$ y del otro punto $(-5 ; 18)$ en la ecuación $y = ax^2 + bx - 12$:

$0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 12$	$18 = a \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) - 12$
$0 = a + b - 12$	$18 = 25a - 5b - 12$
$a + b = 12 \quad \text{(I)}$	$25a - 5b = 30 \quad \text{(II)}$

- Resuelves el sistema planteado:

$$\begin{aligned} a + b &= 12 \quad /.5 \\ 25a - 5b &= 30 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5a + \cancel{5b} &= 60 \\ 25a - \cancel{5b} &= 30 \\ 30a = 90 &\rightarrow a = 3 \end{aligned}$$

Hallas el valor de b: $3 + b = 12 \rightarrow b = 9$

- Escribes la ecuación: $y = 3x^2 + 9x - 12$

Resumiendo:

Para escribir la **ecuación** de una **función cuadrática**:

1. Si conoces las **coordenadas** del **vértice**, puedes escribirla rápidamente en la forma $y = (x + d)^2 + e$. Si te la piden en la otra forma, efectúas las **operaciones indicadas**.

2. Si conoces los **ceros** u **otros puntos** de la gráfica, la escribes en la forma $y = ax^2 + bx + c$. Si te la piden en la otra forma, hallas a partir de la anterior, las **coordenadas del vértice** o realizas el **completamiento cuadrático**.

3. Si conoces el **intercepto** con el eje **"y"** de la parábola y **dos puntos** de ella, puedes obtener el valor de c rápidamente y con los otros dos puntos **plantear** y **resolver** un **sistema** de dos ecuaciones con dos variables, para hallar a y b.

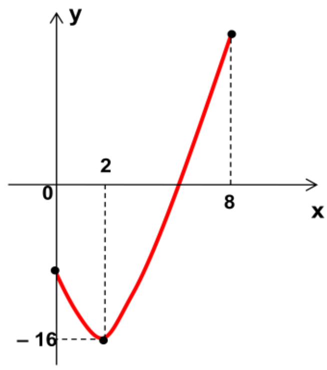
Funciones cuadráticas con dominio restringido

En ocasiones encontrarás ejercicios sobre las funciones cuadráticas con **dominio restringido**.

¿Qué implicaciones tiene esta situación al resolverlos?

En estos casos, se hace la **representación gráfica** de solo una **parte** de la **parábola** y algunas **propiedades** cambian respecto a las de la función con su dominio sin restricciones.

Ejemplo 1: En la gráfica aparece representada una función cuadrática $\boldsymbol{g}$ cuya ecuación tiene la forma $\boldsymbol{g}(x) = (x + d)^2 + e$, en un subconjunto de $\mathbb{R}$.



1.1. Marca con una X la respuesta correcta:

a) La ecuación de $\boldsymbol{g}$ es:

___ $\boldsymbol{g}(x) = (x + 2)^2 - 16$ ___ $\boldsymbol{g}(x) = (x - 2)^2 - 16$

___ $\boldsymbol{g}(x) = (x + 2)^2 + 16$ ___ $\boldsymbol{g}(x) = (x - 2)^2 + 16$

Solución:

Como la gráfica está desplazada **2u** hacia la **derecha**, entonces $\boldsymbol{a} = -\ \mathbf{2}$ y desplazada **16u** hacia **abajo**, luego $\boldsymbol{b} = -\ \mathbf{16}$.

R/ $g(x) = (x - 2)^2 - 16$.

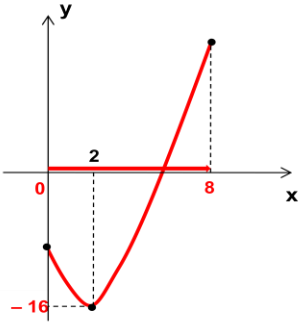
b) El dominio de g es:

__ $\{x \in \mathbb{R};\ 0 \leq x \leq 8\}$ __ $\{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 8\}$

__ $\{x \in \mathbb{R};\ -16 \leq x \leq 8\}$ __ $\{x \in \mathbb{R};\ -8 \leq x \leq 8\}$

Solución:

El **dominio** está **restringido** desde **0** y hasta **8**. Ambos valores se **incluyen**, ya que en ambos extremos aparecen **puntos sombreados**.



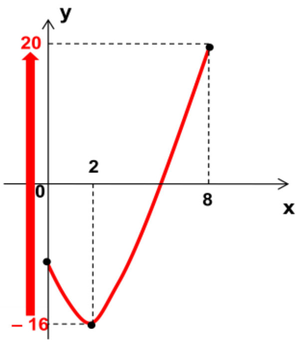
R/ $\{x \in \mathbb{R};\ 0 \leq x \leq 8\}$.

c) El conjunto imagen de g es:

__ $\{y \in \mathbb{R};\ y \geq -16\}$ __ $\{y \in \mathbb{R};\ y > -16\}$

__ $\{y \in \mathbb{R};\ -16 \leq y \leq 16\}$ __ $\{y \in \mathbb{R};\ -16 \leq y \leq 20\}$

Solución:



La **imagen** está también **restringida** desde **– 16** que es la **ordenada** del vértice y hasta la **ordenada** cuya **abscisa** es **8**.

$$g(\mathbf{8}) = (\mathbf{8} - 2)^2 - 16 = 6^2 - 16 = 36 - 16 = \mathbf{20}$$

Ambos valores se **incluyen** en el intervalo, ya que en el **dominio** ambos extremos **se incluyen**.

R/ y$\in\mathbb{R}$; $-16 \leq y \leq 20\}$

d) La gráfica corta al eje de las abscisas en:

__ – 2 y 6 __ – 2 __ – 12 y 6 __ 6

Solución:

$(x - 2)^2 - 16 = 0$ (sustituyes la y por cero)

$(x - 2 - 4)(x - 2 + 4) = 0$ (factorizas la diferencia)

$(x - 6)(x + 2) = 0$ (reduces los términos semejantes)

$\boldsymbol{x_1 = 6}$ o $\boldsymbol{x_2 = -2}$ (obtienes los ceros)

R/ En **x** = **6**.

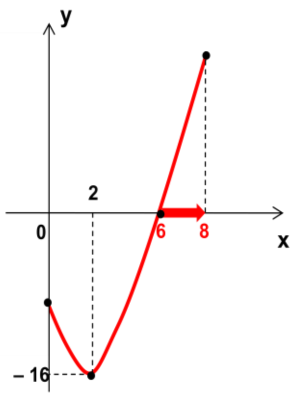
Nota: x_2 = – 2 no es un **cero**, ya que está **fuera** del **dominio de esta función**.

e) Es positiva para:

__ $x > 6$ __ $x \geq 6$ __ $6 < x \leq 8$ __ $6 \leq x \leq 8$

Solución:

El **6 no** se incluye por ser el **cero** de la función y el **8 sí**, ya que para ese valor la **gráfica** está por **encima** del eje **"x".**



R/ $6 < x \leq 8$.

1.2. Escribe verdadero o falso. Argumenta en las falsas, el por qué lo son.

a) __ es impar.

R/ Falso. Su gráfica **no** es **simétrica** respecto al **origen de coordenadas** o no cumple que $g(-x) = -g(x)$.

b) __ tiene valor máximo $y = 20$.

R/ Verdadero. Su **valor máximo** se alcanza cuando **x** = **8**:

$$g(\mathbf{8}) = (\mathbf{8} - 2)^2 - 16 = 6^2 - 16 = 36 - 16 = \mathbf{20}$$

c) __ es negativa para x∈[0 ; 6].

R/ Falso. Es **negativa** para x∈[0 ; 6), el **cero** de la función, o sea **6**, **no** se incluye en este intervalo para el cual la función resulta negativa. La **abscisa 0** sí se incluye, porque para ese valor la **gráfica** está por **debajo** del eje “x”.

d) __ es creciente para x∈[2 ; 20].

R/ Falso. Para escribir los **intervalos** de monotonía se toman las **abscisas** y **20** es la **ordenada** de **8**. Lo correcto es x∈[2 ; 8].

e) __ tiene eje de simetría x = 2.

R/ Falso. Al **no** ser la **gráfica simétrica**, **no** tiene eje de simetría.

f) __ su valor mínimo es y = – 16.

R/ Verdadero. La **ordenada** del vértice es la **menor** de todas.

g) __ el intercepto de la gráfica con el eje “y” es $y = -12$.

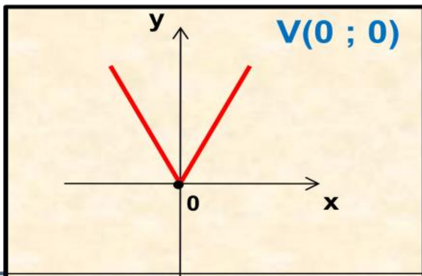
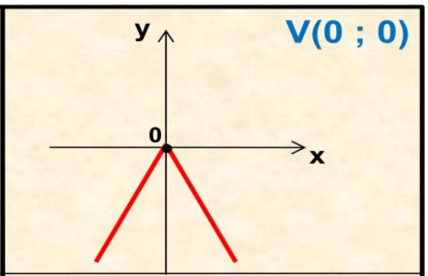
R/ Verdadero. El **intercepto** de la gráfica con el eje **“y”** se obtiene dando valor **0** a la **x** en la ecuación:

$$\boldsymbol{g}(\mathbf{0}) = (\mathbf{0} - 2)^2 - 16 = (-2)^2 - 16 = 4 - 16 = \mathbf{-12}$$

Función modular

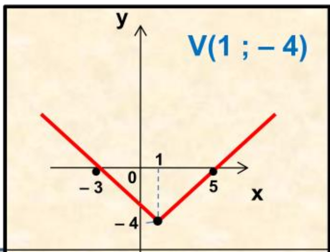
Analicemos la función **modular**, (sin desplazamiento), su **gráfico** y **propiedades.**

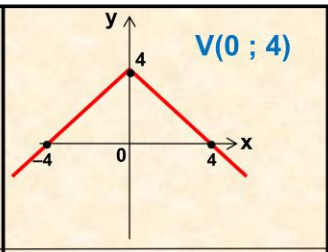
$a \neq 0$

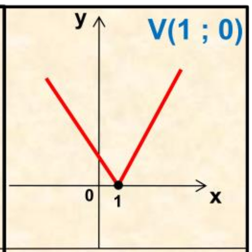
Función modular	$y = a\lvert x\rvert$	$y = -a\lvert x\rvert$
	 V(0 ; 0)	 V(0 ; 0)
Dominio	$x \in \Re$	$x \in \Re$
Imagen	$\{y \in \Re: y \geq 0\}$	$\{y \in \Re: y \leq 0\}$
Cero	$x = 0$	$x = 0$
Monotonía	Creciente: $x \geq 0$ Decreciente: $x \leq 0$	Creciente: $x \leq 0$ Decreciente: $x \geq 0$
Signos	positiva: $\{x \in \Re: x \neq 0\}$	negativa: $\{x \in \Re: x \neq 0\}$
Paridad	par	par
Inyectiva	No	No
Intercepto con "y"	$y = 0$	$y = 0$
Valor	mínimo: $y = 0$	máximo: $y = 0$
Eje de simetría	$x = 0$	$x = 0$

Analicemos la función **modular**, (con desplazamiento), su **gráfico** y **propiedades.**

Función modular







Función modular	$y = \lvert x - 1\rvert - 4$	$y = -\lvert x\rvert + 4$	$y = \lvert 2x - 2\rvert$
Dominio	$x \in \Re$	$x \in \Re$	$x \in \Re$
Imagen	$\{y \in \Re : y \geq -4\}$	$\{y \in \Re : y \leq 4\}$	$\{y \in \Re : y \geq 0\}$
Ceros	$x_1 = -3$ o $x_2 = 5$	$x_1 = -4$ o $x_2 = 4$	$x = 1$
Monotonía	Creciente: $x \geq 1$ Decreciente: $x \leq 1$	Creciente: $x \leq 0$ Decreciente: $x \geq 0$	Creciente: $x \geq 1$ Decreciente: $x \leq 1$
Signos	positiva: $x < -3$ o $x > 5$ negativa: $-3 < x < 5$	positiva: $-4 < x < 4$ negativa: $x < -4$ o $x > 4$	positiva $\{x \in \Re : x \neq 1\}$
Paridad	No es par ni impar	par	No es par ni impar
Inyectiva	No	No	No
Intercepto con "y"	$y = -3$	$y = 4$	$y = 2$
Valor	mínimo: $y = -4$	máximo: $y = 4$	mínimo: $y = 0$
Eje de simetría	$x = 1$	$x = 0$	$x = 1$

Comentario:

♦ La función modular $y = |x + d| + e$, nos muestra el **desplazamiento** de la parábola en ambos ejes. En esta forma las coordenadas del vértice son $V(-d\,;\,e)$.

♦ Para escribir la **imagen** de esta función se toma como referencia la **"y"** del vértice (valor de e) y siempre se incluye. Luego,

- $y \geq e$ si la gráfica abre hacia **arriba**
- $y \leq e$, si la gráfica abre hacia **abajo**.

♦ Para calcular los **ceros** debes resolver una **ecuación modular**, para ello:

- **transpones** al otro miembro el término que está fuera del módulo ($\boldsymbol{e}$), $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}| = \boldsymbol{e}$

- y **eliminas** el **módulo** formando **dos ecuaciones**:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{e} \text{ o } \boldsymbol{x} + \boldsymbol{d} = -\boldsymbol{e}$$

● Si el **signo** delante del módulo **coincide** con el del término que está fuera, la función **no tiene ceros**.

Ejemplo: $y = |x + 2| + 1$, ya que conduce a la ecuación $|x + 2| = -1$ y el **módulo** de una cantidad **nunca** dará como resultado un número **negativo**.

♦Esta función **no es monótona**, pues cambia de monotonía y **no es inyectiva**, a no ser que se le **restrinja** su **dominio**.

♦Para escribir los **signos** se toma como referencia a los **ceros**, que **no** se incluyen en los intervalos.

♦Es **par** si el **vértice** es un punto del eje **"y"**, o sea, si la ecuación es de la forma $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}|\boldsymbol{x}| + \boldsymbol{e}$, en caso contrario **no es par ni impar**.

¿Cómo esbozar el gráfico de una función modular?

Ejemplos:

a) $y = |x - 4| - 1$

Para representar una función **modular**, se necesitan al menos el **vértice** y los **ceros**.

● Hallas las **coordenadas** del **vértice**:

$$\boldsymbol{V(4\,;\,-1)}$$

● Hallas los **ceros**:

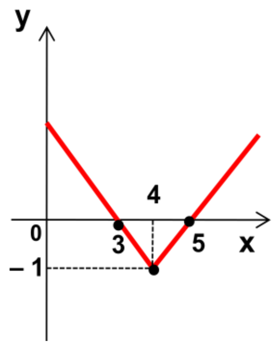
$|x - 4| - 1 = 0$ (sustituyes ***y*** por cero)

$|x - 4| = 1$ (aíslas el módulo)

$x - 4 = \mathbf{1}$ o $x - 4 = \mathbf{-1}$ (eliminas el módulo)

$\boldsymbol{x = 5}$ **o** $\boldsymbol{x = 3}$ (resuelves ambas ecuaciones)

● Ubicas los ceros, el vértice y trazas la gráfica:



Propiedades:

♦**Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}\}$

♦**Paridad**: no es par ni impar

♦ **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R};\ y \geq -1\}$

♦ **Inyectiva**: no

♦ **Ceros**: $x_1 = 3$; $x_2 = 5$

♦ **Intercepto con "y"**: $y = 3$

♦ **Monotonía**:

creciente: $x \geq 4$

decreciente: $x \leq 4$

♦ **valor mínimo**: $y = -1$

♦ **eje de simetría**: $x = 4$

♦ **Signos**: La función es positiva para $x < 3$ o $x > 5$ y negativa para $3 < x < 5$.

b) $y = -|x + 2| + 3$

Para representar una función **modular**, se necesitan al menos el **vértice** y los **ceros**.

● Hallas las **coordenadas** del **vértice**:

$$\boldsymbol{V(-2\,;\,3)}$$

● Hallas los **ceros**:

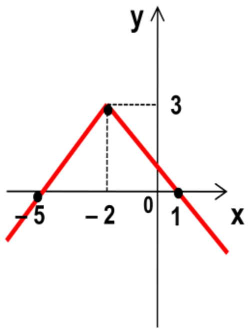
$-|x + 2| + 3 = 0$ (sustituyes ***y*** por cero)

$|x + 2| = 3$ (aíslas el módulo)

$x + 2 = 3$ o $x + 2 = -3$ (eliminas el módulo)

$\boldsymbol{x = 1}$ **o** $\boldsymbol{x = -5}$ (resuelves ambas ecuaciones)

● Ubicas los ceros, el vértice y trazas la gráfica:



Propiedades:

♦ **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}\}$

♦ **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R};\ y \leq 3\}$

♦ **Ceros**: $x_1 = -5$; $x_2 = 1$

♦ **Monotonía**:

creciente: $x \leq -2$

decreciente: $x \geq -2$

♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦ **Inyectiva**: no

♦ **Intercepto con "y"**: $y = 3$

♦ **valor máximo**: $y = 3$

♦ **eje de simetría**: $x = -2$

♦ **Signos**: La función es positiva para $-5 < x < 1$ y negativa para $x < -5$ o $x > 1$.

c) $y = |x| + 5$

Para representar una función **modular**, se necesitan al menos el **vértice** y los **ceros**.

● Hallas las **coordenadas** del **vértice**:

$$\boldsymbol{V(0\ ;\ 5)}$$

● Hallas los **ceros**:

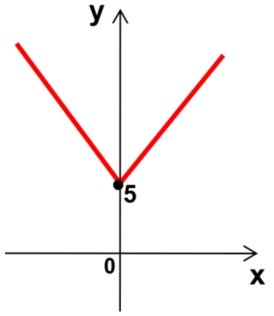
$|x| + 5 = 0$ (sustituyes ***y*** por cero)

$|x| = -5$ (aíslas el radical)

No tiene ceros

Nota: El **módulo** de cualquier número real siempre es **no negativo**.

● Ubicas el vértice y trazas la gráfica que abre hacia arriba pues el módulo está precedido de signo "+".



Propiedades:

♦ **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}\}$

♦ **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R};\ y \geq 5\}$

♦ **Ceros**: no tiene

♦ **Monotonía**:

creciente: $x \geq 0$

decreciente: $x \leq 0$

♦ **Paridad**: par

♦ **Inyectiva**: no

♦ **Intercepto con "y"**: $y = 5$

♦ **valor mínimo**: $y = 5$

♦ **eje de simetría**: $x = 0$

♦ **Signos**: La función es positiva para todos los reales.

d) $y = |x - 4|$

Para representar una función **modular**, se necesitan al menos el **vértice** y los **ceros**.

- Hallas las **coordenadas** del **vértice**:

$$\boldsymbol{V(4\,;\,0)}$$

- Hallas los **ceros**:

$|x - 4| = 0$ (sustituyes ***y*** por cero)

$x - 4 = \mathbf{0}$ (eliminas el módulo)

$\boldsymbol{x = 4}$ (despejas la ***x***)

Como el **cero** coincide con la **abscisa** del **vértice**, para dar mayor precisión a la gráfica se puede calcular la **intersección** con el eje **"y"**.

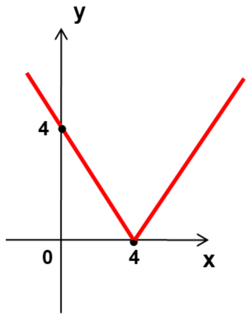
- Hallas el **intercepto** con el eje ***"y"***:

$y = |0 - 4|$ (sustituyes ***x*** por cero)

$y = |-4|$ (efectúas la sustracción)

$\boldsymbol{y = 4}$ (hallas el módulo)

- Ubicas el vértice, el intercepto con el eje "y" y trazas la gráfica



Propiedades:

♦ **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}\}$

♦ **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R};\ y \geq 0\}$

♦ **Ceros**: $x_1 = 4$

♦ **Monotonía**:

creciente: x ≥ 4

decreciente: x ≤ 4

♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦ **Inyectiva**: no

♦ **Intercepto con "y"**: $y = 4$

♦ **valor mínimo**: $y = 0$

♦ **eje de simetría**: $x = 4$

♦ **Signos**: La función es positiva para $x \in \mathbb{R}$: $x \neq 4$.

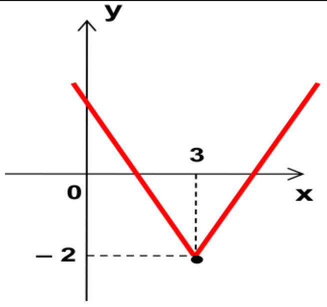
¿Cómo escribir la ecuación de una función modular?

Para escribir la ecuación de una función modular, debes tener en cuenta qué información te brinda el ejercicio. A continuación, te proponemos algunas ideas.

Ejemplos:

A continuación aparecen las gráficas de varias funciones modulares. Escribe en cada caso su ecuación, en la forma $y = \pm|x + d| + e$, según corresponda.

a)



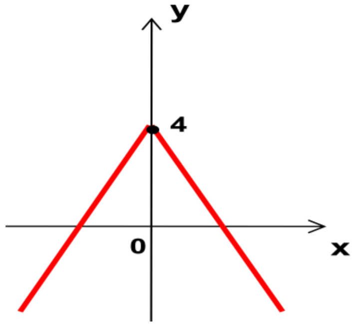
Solución:

Cuando se conoce las **coordenadas** del **vértice**, es muy sencillo escribir la **ecuación** de la función en esa forma.

- Extraes las **coordenadas** del **vértice**: $\boldsymbol{V(3\,;\,-\,2)}$
- Escribes la **ecuación** teniendo en cuenta que **es de la forma** $y = |x + d| + e$ **porque abre hacia arriba**:

$$y = |x - 3| - 2$$

b)



Solución:

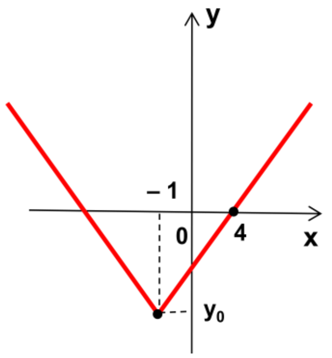
Cuando se conoce las **coordenadas** del **vértice**, es muy sencillo escribir la **ecuación** de la función en esa forma.

- Extraes las **coordenadas** del **vértice**: $V(0\ ;\ 4)$

- Escribes la **ecuación** teniendo en cuenta que **es de la forma** $y = -|x + d| + e$ **porque abre hacia abajo**:

$$y = -|x| + 4$$

c)



Solución:

En este caso solo conoces la **abscisa** del **vértice** y un **punto** de la gráfica, hay que hallar la **ordenada** del **vértice**.

- Extraes las **coordenadas** del **vértice**: $V(-\ 1\ ;\ y_0)$

La ecuación toma la forma $y = |x + 1| + e$

- Hallas e sustituyendo las coordenadas del punto dado en la gráfica $(4\ ;\ 0)$:

$0 = |4 + 1| + e$ (sustituyes las coordenadas)

$0 = |5| + e$ (efectúas la adición)

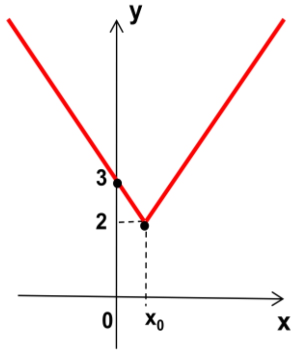
$0 = 5 + e$ (hallas el módulo)

$e = -5$ (despejas **b**)

- Escribes la **ecuación** teniendo en cuenta que **es de la forma** $y = |x + d| + e$ **porque abre hacia arriba**:

$y = |x + 1| - 5$

d)



Solución:

En este caso solo conoces la **ordenada** del **vértice** y un **punto** de la gráfica, hay que hallar la **abscisa** del **vértice**.

- Extraes las **coordenadas** del **vértice**: $V(x_0;\ 2)$

La ecuación toma la forma $y = |x + d| + 2$

- Hallas d sustituyendo las coordenadas del punto dado en la gráfica (**0** ; **3**):

$3 = |0 + d| + 2$ (sustituyes las coordenadas)

$3 - 2 = |d|$ (efectúas la adición y transpones el 2)

$|\,d\,| = 1$ (efectúas la sustracción)

$d = \pm 1$ (eliminas el módulo)

$d = -1$ **(obtienes d)**

Nota: De las **dos** posibilidades se toma el valor de d **negativo**, ya que la gráfica está **desplazada** hacia la **derecha**.

- Escribes la **ecuación** teniendo en cuenta que **es de la forma** $y = |x + d| + e$ **porque abre hacia arriba**:

$y = |x - 1| + 2$

Resumiendo:

Para escribir la **ecuación** de una **función modular**:

1. Si conoces las **coordenadas** del **vértice**, puedes escribirla rápidamente sustituyendo en la ecuación los valores de d y e.

2. Si conoces solo uno de los dos **parámetros**, se necesita al menos las **coordenadas** de uno de los puntos de la gráfica. **Sustituyes** el valor del **parámetro** conocido y dichas **coordenadas**, para obtener el **otro parámetro**.

Funciones modulares con dominio restringido

En ocasiones encontrarás ejercicios sobre las funciones modulares con **dominio restringido**.

¿Qué implicaciones tiene esta situación al resolverlos?

En estos casos, se hace la **representación gráfica** de solo una **parte** de la **gráfica** y algunas **propiedades** cambian respecto a las de la función con su dominio sin restricciones.

Ejemplo 1: Sea la función $\boldsymbol{h}$, definida en $x \in [-3\ ;\ 3)$, por la ecuación $\boldsymbol{h}(x) = -2|x| + 6$.

1.1. Representa gráficamente la función en el dominio dado.

- Hallas las coordenadas del **vértice**:

$$\boldsymbol{V}(0\ ;\ 6)$$

- Hallas los **ceros**:

$-2|x| + 6 = 0$ (sustituyes y por cero)

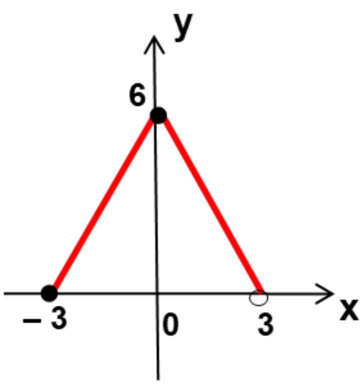
$2|x| = 6$ (aíslas el módulo)

$|x| = 3$ (transpones el 2 y efectúas el cociente)

$\boldsymbol{x = \pm 3}$ (resuelves la ecuación)

Nota: $x = 3$, **no** es un **cero**, ya que está **fuera** del dominio.

• Ubicas los **puntos** y trazas la gráfica.



Nota: La **gráfica** abre hacia **abajo**, ya que el **coeficiente** delante del módulo es **negativo**.

1.2. Completa los espacios en blanco:

a) El conjunto imagen de h es ________.

R/ x∈[0 ; – 6].

b) La función es positiva para ____.

R/ $-3 < x < 3$

Nota: Los **ceros no** se incluyen en los **intervalos** de los **signos**.

c) La función es creciente para ____.

R/ $-3 \leq x \leq 0$

Nota: En la **monotonía** se incluyen ambos extremos en los **intervalos**. En este caso **– 3** forma parte del dominio.

1.3. Marca con una X la respuesta correcta:

De la función se puede afirmar que:

__ es par.

__ alcanza su valor máximo en $y = 6$.

__ no tiene eje de simetría.

__ es inyectiva.

Solución: Es **par**. Su gráfica es **simétrica** respecto al eje **"y"**.

Las otras no son, ya que:

- Su valor máximo es $\boldsymbol{y = 6}$, pero lo **alcanza** en $\boldsymbol{x = 0}$.

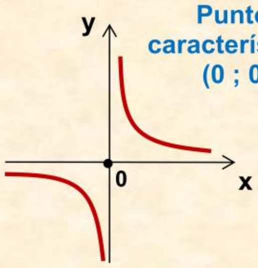
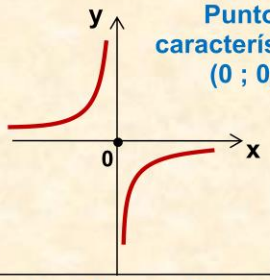
No te piden el **máximo**, sino en qué valor de la **abscisa** se obtiene.

- Tiene **eje de simetría** $\boldsymbol{x = 0}$, ya que esa gráfica es **simétrica**.

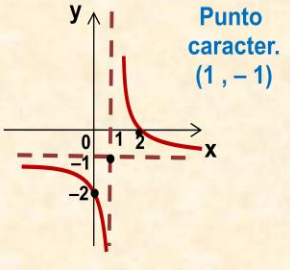
- **No** es **inyectiva**, ya que al trazar **rectas paralelas** al eje "x", varas de ellas cortan a la gráfica en **dos puntos**.

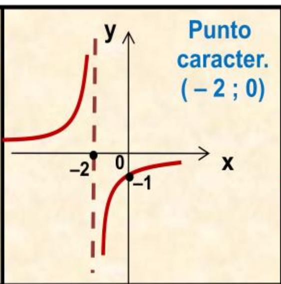
Función de proporcionalidad inversa

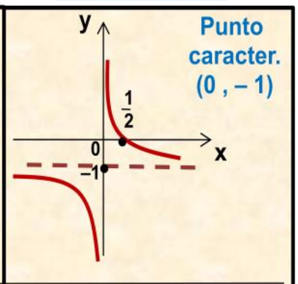
Analicemos la función **proporcionalidad inversa**, (sin desplazamiento), su **gráfico** y **propiedades.**

	$y = \frac{1}{x}$	$y = -\frac{1}{x}$
Función de proporcionalidad inversa	 Punto característico: (0 ; 0)	 Punto característico: (0 ; 0)
Dominio	$\{x \in \Re : x \neq 0\}$	$\{x \in \Re : x \neq 0\}$
Imagen	$\{y \in \Re : y \neq 0\}$	$\{y \in \Re : y \neq 0\}$
Cero	No tiene	No tiene
Monotonía	Decreciente a la izquierda y derecha de $x = 0$	Creciente a la izquierda y derecha de $x = 0$
Signos	positiva: $x > 0$ negativa: $x < 0$	positiva: $x < 0$ negativa: $x > 0$
Paridad	impar	impar
Inyectiva	Sí	Sí
Intercepto con "y"	No tiene	No tiene
Asíntotas	A.H.: $y = 0$ A.V.: $x = 0$	A.H.: $y = 0$ A.V.: $x = 0$

Analicemos la función **proporcionalidad inversa**, (con desplazamiento), su **gráfico** y **propiedades.**







Función de proporcionalidad inversa	$y=\frac{1}{x-1}-1$	$y=-\frac{2}{x+2}$	$y=\frac{1}{2x}-1$
Dominio	$\{x\in\Re: x\neq 1\}$	$\{x\in\Re: x\neq -2\}$	$\{x\in\Re: x\neq 0\}$
Imagen	$\{y\in\Re: y\neq -1\}$	$\{y\in\Re: y\neq 0\}$	$\{y\in\Re: y\neq -1\}$
Cero	$x = 2$	No tiene	$x = 0,5$
Monotonía	Decreciente a la izquierda y derecha de $x = 1$	Creciente a la izquierda y derecha de $x = -2$	Decreciente a la izquierda y derecha de $x = 0$
Signos	(+): $1 < x < 2$ (–): $x < 1$ o $x > 2$	(+): $x < -2$ (–): $x > -2$	(+): $0 < x < 0,5$ (–): $x < -1$ o $x > 0,5$
Paridad	No es par ni impar	No es par ni impar	No es par ni impar
Inyectiva	Sí	Sí	Sí
Intercepto con "y"	$y = -2$	$y = -1$	No tiene
Asíntotas	A.H.: $y = -1$ A.V.: $x = 1$	A.H.: $y = 0$ A.V.: $x = -2$	A.H.: $y = -1$ A.V.: $x = 0$

Comentario:

♦ En las funciones $y = \frac{n}{x+d} + e$ o $y = -\frac{n}{x+d} + e$, con $n \neq o$, el punto característico es $(-d;\ e)$.

NOTA: Para obtener el valor de d **cuando en el denominador la variable *x* tiene coeficiente distinto de 1**, hay dividir el término independiente de esa cantidad por el coeficiente de la variable.

$$y = \frac{1}{2x+6} + 1 \qquad d = \frac{6}{2} = 3$$

Coeficiente

Término independiente

♦ Esta función tiene **dos asíntotas** (que coinciden con las coordenadas del punto característico), una **vertical** (dada por la ecuación $x = -\boldsymbol{d}$) y otra **horizontal** (dada por la ecuación $y = e$), por lo que en el **dominio** y la **imagen** se **excluyen** siempre estos dos valores.

♦ Si la **gráfica** de la función original se **desplaza** solo en el sentido del eje **"x"**, **no tiene cero**.

♦ Si la **gráfica** de la función original se **desplaza** solo en el sentido del eje **"y"**, **no** tiene **intercepto** con el eje de las **ordenadas**.

♦ Esta función es:

- ✓ **decreciente** a ambos lados de su **asíntota vertical**, si la fracción es **positiva**
- ✓ **creciente** a ambos lados de su **asíntota vertical,** si la fracción es **negativa**.

♦ Para escribir los **signos**, se toma como referencia el **cero** y la **asíntota vertical** y en ningún caso admite el signo **igual**.

♦ La función **sin desplazamiento** es **impar**, cuando se desplaza **no es par ni impar**.

♦ La función **inversa** de esta función también es una función de **proporcionalidad inversa**.

¿Cómo esbozar el gráfico de una función de proporcionalidad inversa?

Ejemplo:

a) $y = \frac{1}{x-3} - 1$

Para esbozar dicho gráfico necesitas:

1. Las coordenadas del **punto característico:**

$$(\mathbf{3} ; - \mathbf{1})$$

2. Las **asíntotas**:

Asíntota vertical: $\boldsymbol{x = 3}$

Asíntota horizontal: $\boldsymbol{y = -1}$

3. El **cero:**

$\frac{1}{x-3} - 1 = 0$ (sustituyes ***y*** por cero)

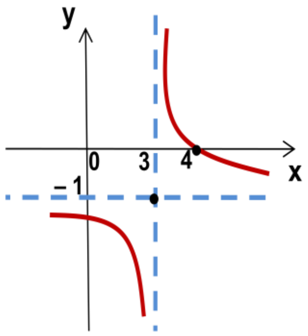
$\frac{1}{x-3} = 1$ (transpones el -1)

$x - 3 = 1$ (transpones el $x - 3$)

$\boldsymbol{x = 4}$ (transpones el 3 y reduces)

4. Ubicas los puntos,

las asíntotas y trazas la gráfica**:**



Propiedades:

♦**Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}: x \neq 3\}$

♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦**Imagen**: $\{y \in \mathbb{R}; y \neq -1\}$

♦ **Inyectiva**: sí

♦**Ceros**: $x = 4$

♦ **Intercepto con "y"**: $y = -\frac{4}{3}$

♦**Monotonía**:

Decreciente para:

$x < 3$ y $x > 3$

♦ **Asíntotas**:

A.H.: $y = -1$ o $y + 1 = 0$

A.V.: $x = 3$ o $x - 3 = 0$

♦ **Signos**: (**+**) $3 < x < 4$

(**–**) $x < 3$ o $x > 4$

b) $y = \frac{4}{x+1}$

1. Las coordenadas del **punto característico:**

$$(-\mathbf{1}\,;\ \mathbf{0})$$

2. Las **asíntotas**:

Asíntota vertical: $\boldsymbol{x} = -\ \mathbf{1}$

Asíntota horizontal: $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$

3. El **cero:**

$\frac{4}{x+1} = 0$ (sustituyes ***y*** por cero)

$4 = 0(x + 1)$ (transpones el $x + 1$)

$4 \neq 0$ (efectúas el producto)

No tiene cero

4. Hallas el **intercepto** con "y"**:**

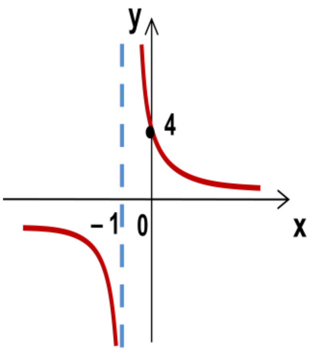
$y = \frac{4}{0+1}$ (sustituyes $\boldsymbol{x}$ por cero)

$y = 4$

Nota: Esto se hace para dar mayor precisión al gráfico.

5. Ubicas los puntos,

las asíntotas y trazas la gráfica**:**



Propiedades:

♦ **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\}$ ♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦ **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R}; y \neq -1\}$ ♦ **Inyectiva**: sí

♦**Ceros**: No tiene ♦ **Intercepto con "y"**: $y = 4$

♦**Monotonía**: ♦ **Ecuación de las asíntotas**:

Decreciente para: **A.H.:** $y = 0$

$x < -1$ y $x > -1$ **A.V.:** $x = -1$ o $x + 1 = 0$

♦ **Signos**: (**+**) $x > -1$

(**–**) $x < -1$

c) $y = -\frac{1}{3x+3} + 1$

1. Las coordenadas del **punto característico:**

Aquí el valor de $\boldsymbol{d}$ **no** es 3. Como en el denominador de la fracción ($3x + 3$), la variable tiene coeficiente diferente de 1, debes dividir el término independiente del denominador por el coeficiente de la variable.

$$\boldsymbol{d = \frac{3}{3} = 1}$$

Entonces el punto característico $(-d; e)$ es $(-1; 1)$.

Otra vía para **determinar la abscisa del punto característico es** buscar el **valor de la asíntota vertical**

$3x + 3 = 0$ (igualas a cero el denominador)

$3x = -3$ (transpones el 3)

$\boldsymbol{x = -1}$ (despejas la ***x*** y divides)

Luego el punto característico es $(-\mathbf{1} ; \mathbf{1})$

2. Las **asíntotas**:

Asíntota vertical: $\boldsymbol{x = -1}$

Asíntota horizontal: $\boldsymbol{y = 1}$

3. El **cero:**

$0 = -\frac{1}{3x+3} + 1$ (igualas a cero la ***y***)

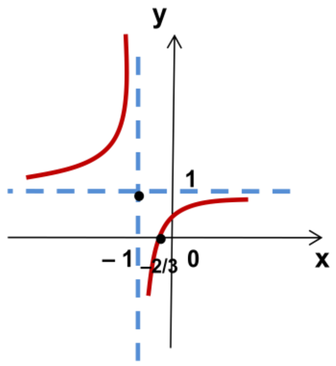
$\frac{1}{3x+3} = 1$ (transpones la fracción)

$3x + 3 = 1$ (transpones el binomio)

$x = -\frac{2}{3}$ (despejas **x**)

4. Ubicas los puntos,

las asíntotas y trazas la gráfica**:**



Propiedades:

♦ **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}: x \neq -1\}$ ♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦ **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R};\ y \neq 1\}$ ♦ **Inyectiva**: sí

♦ **Ceros**: $x = -\frac{2}{3}$ ♦ **Intercepto con "y"**: $y = \frac{2}{3}$

♦ **Monotonía**: ♦ **Ecuación de las asíntotas**:

Creciente para:

$x < -1$ y $x > -1$

A.H.: $y = 1$ o $y - 1 = 0$

A.V.: $x = -1$ o $x + 1 = 0$

♦ **Signos**: (**+**) $x < -1$ o $x > -\frac{2}{3}$

(**–**) $-1 < x < -\frac{2}{3}$

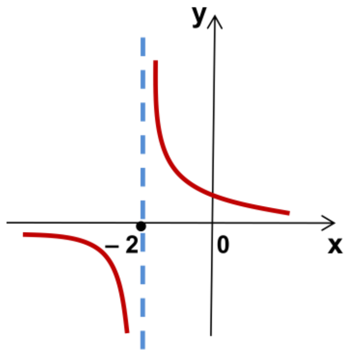
¿Cómo escribir la ecuación de una función de proporcionalidad inversa?

Para escribir la ecuación de una función de proporcionalidad inversa, debes tener en cuenta qué información te brinda el ejercicio. A continuación, te proponemos algunas ideas.

Ejemplos:

A continuación aparecen las gráficas de varias funciones de proporcionalidad inversa. Escribe en cada caso su ecuación, en la forma $y = \pm \frac{1}{x+d} + e$, según corresponda.

a)



Solución:

Cuando se conoce las **coordenadas** del **punto característico**, es muy sencillo escribir la **ecuación** de la función en esa forma.

- Extraes las **coordenadas** del **punto característico**:

$$(-\ \mathbf{2}\ ;\ \mathbf{0})$$

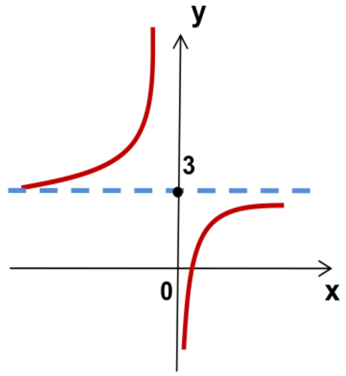
Nota: Como la **asíntota horizontal** queda sobre el eje "x", **no** hay **desplazamiento** en el sentido de dicho eje, luego

$\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$.

- La gráfica **la función es decreciente a ambos lados de la asíntota vertical,** por tanto la fracción está precedida de signo "+" y la ecuación es de la forma $y = \frac{1}{x+d} + e$.

Escribes la **ecuación**: $\boldsymbol{y = \frac{1}{x+2}}$.

b)



Solución:

Cuando se conoce las **coordenadas** del **punto característico**, es muy sencillo escribir la **ecuación** de la función en esa forma.

- Extraes las **coordenadas** del **punto característico**:

$(\mathbf{0}\ ;\ \mathbf{3})$

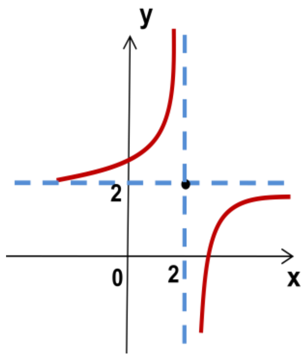
Nota: Como la **asíntota vertical** queda sobre el eje "y", **no** hay **desplazamiento** en el sentido de dicho eje, luego

$\boldsymbol{d\ =\ 0}$.

- La gráfica **la función es creciente a ambos lados de la asíntota vertical,** por tanto la fracción está precedida de signo "–" y la ecuación es de la forma $y\ =\ -\frac{1}{x+d}\ +\ e$.

Escribes la **ecuación**: $\boldsymbol{y\ = -\ \frac{1}{x}\ +\ 3}$.

c)



Solución:

Cuando se conoce las **coordenadas** del **punto característico**, es muy sencillo escribir la **ecuación** de la función en esa forma.

- Extraes las **coordenadas** del **punto característico**:

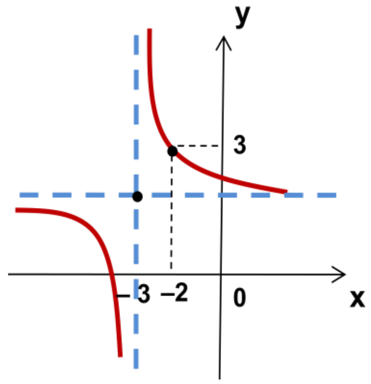
$(-\ \mathbf{2}\ ;\ \mathbf{2})$

Nota: Recuerda que el **desplazamiento** en el sentido del eje **“x”** se toma con **signo opuesto**.

- La gráfica **la función es creciente a ambos lados de la asíntota vertical,** por tanto la fracción está precedida de signo “–” y la ecuación es de la forma $y = -\frac{1}{x+d} + e$.

Escribes la **ecuación**: $\boldsymbol{y = -\frac{1}{x-2} + 2}$.

d)



Solución:

En este caso, conoces la **asíntota vertical** $x = -3$ que coincide con la abscisa del **punto característico** (valor de $\boldsymbol{-d}$), es necesario hallar la **ordenada** del **punto característico** (valor de $\boldsymbol{e}$).

- Extraes las **coordenadas** del **punto característico** $(\boldsymbol{-d};\ \boldsymbol{e})$:

$$(-\ \mathbf{3}\ ;\ \boldsymbol{y_0})$$

Como $\boldsymbol{-d = -3}$, entonces $\boldsymbol{d = 3}$

- Como la gráfica de **la función es decreciente a ambos lados de la asíntota vertical,** la fracción está precedida de signo "+" y la ecuación es de la forma $y = \frac{1}{x+d} + e$.

- Para determinar la ordenada del punto característico (valor de e), sustituyes en la **ecuación** $d = 3$ y las **coordenadas** de otro punto que pertenezca al gráfico: $(-2\,;\,3)$

$$3 = \frac{1}{-2+3} + e$$

$3 = \frac{1}{1} + e$ (efectúas en el denominador)

$3 = 1 + e$ (efectúas el cociente)

$3 - 1 = e$ (despejas e)

$e = 2$ (efectúas la sustracción)

- Escribes la **ecuación**: $y = \frac{1}{x+3} + 2$.

Resumiendo:

Para escribir la **ecuación** de una **función de proporcionalidad inversa**:

1. Si conoces las **coordenadas** del **punto característico**, y la monotonía de la función, puedes escribirla rápidamente sustituyendo en la ecuación los valores de d y e.

2. Si conoces solo uno de los dos **parámetros**, se necesita al menos las **coordenadas** de uno de los puntos de la gráfica. **Sustituyes** en la ecuación el valor del **parámetro** conocido y dichas **coordenadas**, para obtener el **otro parámetro**.

Funciones de proporcionalidad inversa con dominio restringido

En ocasiones encontrarás ejercicios sobre las funciones de proporcionalidad inversa con **dominio restringido**.

¿Qué implicaciones tiene esta situación al resolverlos?

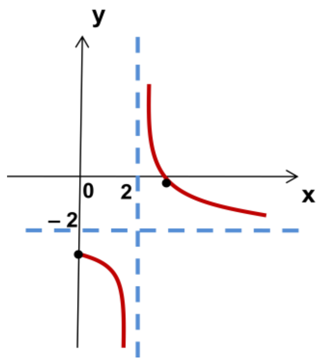
En estos casos, se hace la **representación gráfica** de solo una **parte** de la **curva** y algunas **propiedades** cambian respecto a las de la función con su dominio sin restricciones.

Ejemplo 1: En la gráfica aparece representada una función $\boldsymbol{f}$, definida en x∈[0 ; +∞), por la ecuación $\boldsymbol{f}(x) = \frac{1}{x+a} + b$.

Completa los espacios en blanco:

a) La ecuación de la función es

___________.



R/ $f(x) = \frac{1}{x-2} - 2.$

Nota: Por la posición que ocupa a en la ecuación, $a = -2$ pues **su valor es el opuesto del que toma la asíntota vertical**, mientras que $b = -2$ pues **coincide con el de la asíntota horizontal**.

b) El conjunto imagen de f es __________.

R/ y∈R.

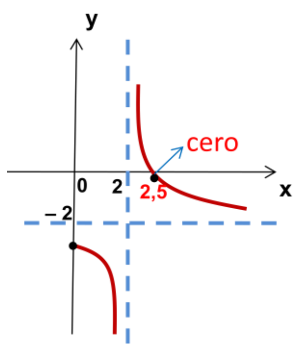
Nota: La **gráfica** es **ilimitada** hacia **arriba** y hacia **abajo**.

c) Para $x > 2$ la función f es monótona __________.

R/ Decreciente.

d) La gráfica corta al eje de las abscisas en ___.

R/ $x = 2{,}5.$



Nota: Te piden el **cero** de la función:

$\frac{1}{x-2} - 2 = 0$ (sustituyes y por cero)

$\frac{1}{x-2} = 2$ (transpones el – 2)

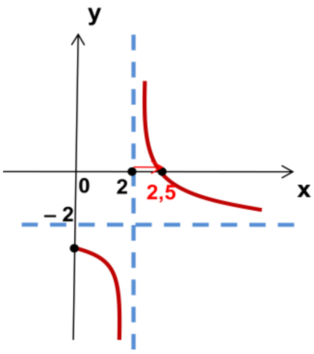
$\frac{1}{2} = x - 2$ (intercambias términos)

$x = 2 + \frac{1}{2} = \mathbf{2,5}$ (transpones el 2 y calculas)

e) La función ***f*** es positiva para __________.

R/ $2 \leq x < 2{,}5.$

Nota: La **gráfica** está por **encima** del eje **"x"** a partir de **2** y hasta el **cero**, o sea, **2,5**. **Ninguno** de los extremos **se incluye** en el intervalo.



f) El dominio más restringido que pertenece el resultado de calcular ***f***(1,5) es __.

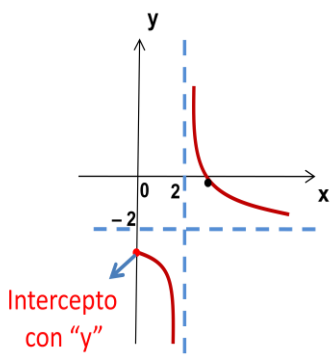
R/ $\mathbb{Z}$.

$$\boldsymbol{f}(1{,}5) = \frac{1}{1{,}5 - 2} - 2 = \frac{1}{-0{,}5} - 2 = -2 - 2 = \mathbf{-4}$$

e) La gráfica corta al eje de las ordenadas en ___.

R/ $y = -2{,}5.$

Nota: Te piden el **intercepto** de la gráfica con el eje **"y"**. Se obtiene dando valor **cero** a la ***x*** en la ecuación:



$y = \dfrac{1}{0-2} - 2$ (sustituyes x por cero)

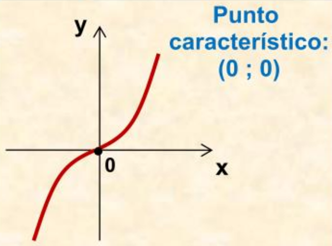
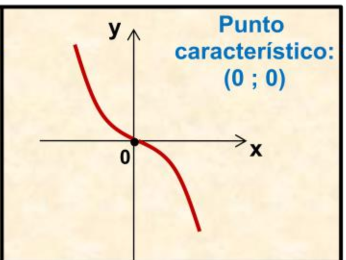
$y = \dfrac{1}{-2} - 2$ (efectúas la sustracción)

$y = \mathbf{-2,5}$ (calculas)

Función cúbica

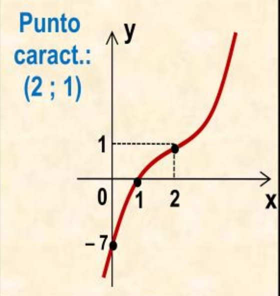
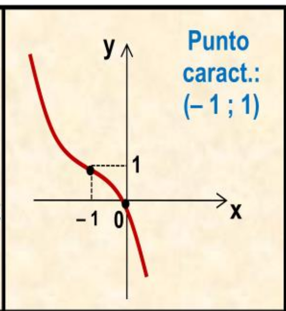
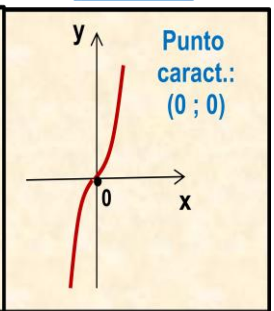
Analicemos la función **cúbica**, (sin desplazamiento), su **gráfico** y **propiedades.**

$a \neq 0$

Función cúbica	$y = ax^3$	$y = -ax^3$
		
Dominio	$\{x \in \Re\}$	$\{x \in \Re\}$
Imagen	$\{y \in \Re\}$	$\{y \in \Re\}$
Cero	$x = 0$	$x = 0$
Monotonía	creciente	decreciente
Signos	positiva: $x > 0$ negativa: $x < 0$	positiva: $x < 0$ negativa: $x > 0$
Paridad	impar	impar
Inyectiva	Sí	Sí
Intercepto con "y"	$y = 0$	$y = 0$

Analicemos la función **cúbica**, (con desplazamiento), su **gráfico** y **propiedades.**

Función cúbica

	$y = (x-2)^3 + 1$	$y = -(x+1)^3 + 1$	$y = 8x^3$
			
Dominio	$\{x \in \Re\}$	$\{x \in \Re\}$	$\{x \in \Re\}$
Imagen	$\{y \in \Re\}$	$\{y \in \Re\}$	$\{y \in \Re\}$
Cero	$x = 1$	$x = 0$	$x = 0$
Monotonía	creciente	decreciente	creciente
Signos	positiva: $x > 1$ negativa: $x < 1$	positiva: $x < 0$ negativa: $x > 0$	positiva: $x > 0$ negativa: $x < 0$
Paridad	No es par ni impar	No es par ni impar	impar
Inyectiva	Sí	Sí	Sí
Intercepto con "y"	$y = -7$	$y = 0$	$y = 0$

Comentarios:

♦ En las funciones $y = (x + \boldsymbol{d})^3 + \boldsymbol{e}$ o $y = (x + \boldsymbol{d})^3 + \boldsymbol{e}$, el punto característico es $(-\boldsymbol{d};\ \boldsymbol{e})$.

Nota: Para obtener el valor de $\boldsymbol{d}$ **cuando en la base de la potencia cúbica la variable *x* tiene coeficiente distinto de 1**, hay dividir el término independiente de esa cantidad por el coeficiente de la variable. Por ejemplo:

$$y = (2x + 6)^3 + \mathbf{25} \qquad \boldsymbol{d} = \frac{6}{2} = 3$$

Coeficiente

Término independiente

♦ Su **dominio** e **imagen** son los **reales**.

♦ Esta función **siempre** tiene **cero** y **siempre** corta al eje **"y"**.

♦Para los **signos** se toma como referencia su **cero.**

♦ Las funciones **sin desplazamiento**, o sea, las originales, son **impares**, las **desplazadas no** son pares ni impares.

♦ La **inversa** de una **función cúbica** es una función **raíz cúbica**.

♦ Es **creciente** si el **coeficiente** del término al cubo es **positivo** y **decreciente**, si es **negativo**. En la **monotonía**, se **especifica** que es a la **izquierda** y a la **derecha** de la **asíntota vertical**, ya que la gráfica está **dividida** en dos partes.

¿Cómo esbozar el gráfico de una función cúbica?

Ejemplos:

a) y = $(x+3)^3+\ 1$

Para esbozar dicho gráfico necesitas:

1. Las **coordenadas** del **punto característico**.

$$(-\ 3\ ;\ 1)$$

Nota: Recuerda que **del punto característico la abscisa es el valor opuesto de d** y **la ordenada el valor de e**.

2. El **cero**:

$(x+3)^3 + 1 = 0$ (sustituyes ***y*** por cero)

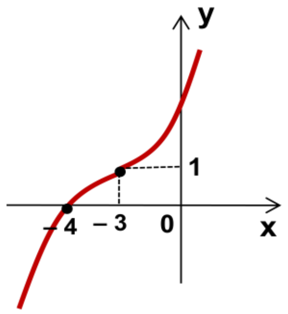
$(x+3)^3 = -1$ (transpones el 1)

$x + 3 = \sqrt[3]{-1}$ (extraes la raíz cúbica)

$x + 3 = -1$ (transpones el 3)

$x = -4$ (obtienes el valor de ***x***)

3. Ubicas el **cero** y el **punto característico** y trazas la curva:



Propiedades:

♦ **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}\}$

♦ **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R}\}$

♦ **Ceros**: $x = -4$

♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦ **Inyectiva**: sí

♦ **Intercepto con "y"**: $y = 28$

♦**Monotonía**: creciente

♦ **Signos**: (**+**) $x > -4$

(**–**) $x < -4$

b) $y = -8x^3 + 1$

1. Las **coordenadas** del **punto característico**.

$(\mathbf{0}\ ;\ \mathbf{1})$

2. El **cero**:

$-8x^3 + 1 = 0$ (sustituyes ***y*** por cero)

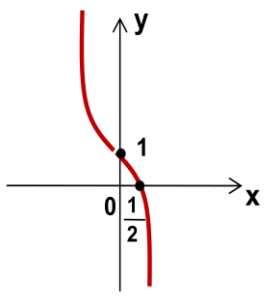
$8x^3 = 1$ (transpones el 1)

$x^3 = \frac{1}{8}$ (transpones el 8)

$x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ (extraes la raíz cúbica)

$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$ (obtienes el valor de x)

3. Ubicas el **cero** y el **punto característico** y trazas la curva:



Propiedades:

♦**Dominio**: $\{ x \in \mathbb{R} \}$

♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦ **Imagen**: $\{ y \in \mathbb{R} \}$

♦ **Inyectiva**: sí

♦ **Ceros**: $x = \frac{1}{2}$

♦ **Intercepto con "y"**: $y = 1$

♦ **Monotonía**: decreciente

♦ **Signos**: (**+**) $x < \frac{1}{2}$

(**–**) $x > \frac{1}{2}$

c) $y = 2x^3$

Para esbozar dicho gráfico necesitas:

1. Las **coordenadas** del **punto característico**.

$$(\mathbf{0}\ ;\ \mathbf{0})$$

2. El **cero**:

$2x^3 = 0$ (sustituyes ***y*** por cero)

$x^3 = 0$ (transpones el 2)

$x = \sqrt[3]{0}$ (extraes la raíz cúbica)

$\boldsymbol{x = 0}$ (obtienes el valor de ***x***)

Nota: Como el **punto** donde la gráfica corta al eje de las **abscisas coincide** con el **punto característico**, para dar mayor precisión a la gráfica, buscas **dos puntos** más de la gráfica.

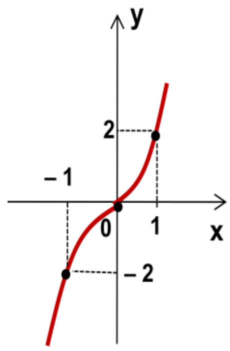
3. Hallas las **coordenadas** de **dos puntos** de la gráfica (preferiblemente uno a la izquierda y otro a la derecha del punto característico):

Para $x = 1$: $y = 2 \cdot (1)^3 = 2 \cdot 1 = 2$

Para $x = -1$: $y = 2 \cdot (-1)^3 = 2 \cdot (-1) = -2$

Obtienes los pares $(1\,;\,2)$ y $(-1\,;\,-2)$

4. Ubicas el **cero**; el **punto característico** y los puntos hallados para trazar la curva:



Propiedades:

♦ **Dominio**: $\{\, x \in \mathbb{R} \,\}$

♦ **Paridad**: impar

♦ **Imagen**: $\{\, y \in \mathbb{R} \,\}$

♦ **Inyectiva**: sí

♦ **Ceros**: $x = 0$

♦ **Intercepto con "y"**: $y = 0$

♦ **Monotonía**: creciente

♦ **Signos**: (+) $x > 0$

(–) $x < 0$

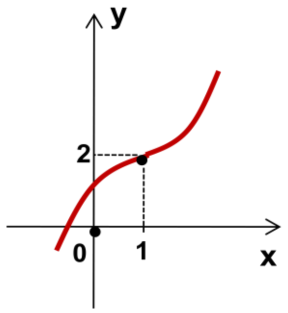
¿Cómo escribir la ecuación de una función cúbica?

Para escribir la ecuación de una función de cúbica, debes tener en cuenta qué información te brinda el ejercicio. A continuación, te proponemos algunas ideas.

Ejemplos:

A continuación aparecen las gráficas de varias funciones cúbica. Escribe en cada caso su ecuación, en la forma $y = \pm(x + d)^3 + e$, según corresponda.

a)



Solución:

1. Como la gráfica se inclina hacia **arriba** de **izquierda** a **derecha**, la ecuación es de la forma $y = (x + d)^3 + e$

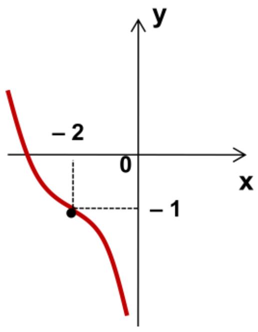
2. Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{e}$.

De la **gráfica** se pueden extraer estos valores, ya que conoces el punto característico $(1; 2)$.

- ✓ $d = -1$, pues d toma **el valor opuesto de la abscisa del punto característico**. También podías haber argumentado porque **la gráfica está desplazada una unidad hacia la derecha**.
- ✓ $e = 2$, pues e toma **el mismo valor que la ordenada del punto característico** o también porque **la gráfica está desplazada 2 unidades hacia arriba**.

3. Escribes la ecuación: $y = (x - 1)^3 + 2$

b)



Solución:

1. Como la gráfica se inclina hacia **abajo** de **izquierda** a **derecha**, la ecuación es de la forma $y = -(x + d)^3 + e$

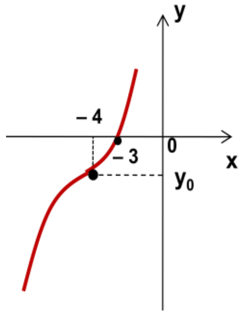
2. Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros d y e.

De la **gráfica** se pueden extraer estos valores, ya que conoces el punto característico $(-2; -1)$.

- ✓ $\boldsymbol{d} = \mathbf{2}$, pues $\boldsymbol{d}$ toma **el valor opuesto de la abscisa del punto característico**. También podías haber argumentado porque **la gráfica está desplazada dos unidades hacia la izquierda**.
- ✓ $\boldsymbol{e} = -\mathbf{1}$, pues $\boldsymbol{e}$ toma **el mismo valor que la ordenada del punto característico** o también porque **la gráfica está desplazada 1 unidad hacia abajo**.

3. Escribes la ecuación: $y = -\,(x + \mathbf{2})^3 - \mathbf{1}$.

c)



Solución:

1. Como la gráfica se inclina hacia **arriba** de **izquierda** a **derecha**, la ecuación es de la forma $y = (x + d)^3 + e$.

2. Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{e}$.

De la **gráfica** se puede extraer solo el valor de $\boldsymbol{d}$, ya que del punto característico solo conoces su abscisa $(-4;\ y_0)$:

- ✓ $\boldsymbol{d} = \mathbf{4}$, pues $\boldsymbol{d}$ toma **el valor opuesto de la abscisa del punto característico** o también porque la **gráfica** está **desplazada 4** unidades hacia la **izquierda**.
- ✓ Para hallar el valor de $\boldsymbol{e}$, debes utilizar al menos un **punto** de la gráfica. En este caso, te ofrecen el punto de coordenadas $(-3\ ;\ 0)$.

♦ Hallas $\boldsymbol{e}$:

• Sustituyes en la ecuación $y = (x + d)^3 + e$ el valor de $\boldsymbol{d} = \mathbf{4}$, las **coordenadas** del **punto** $(-3\ ;\ 0)$ y resuelves la ecuación obtenida:

$$y = (x + 4)^3 + e$$

$$0 = (-3 + 4)^3 + e$$

$$0 = 1^3 + \boldsymbol{e}$$ (efectuas la sustracción)

$$0 = 1 + \boldsymbol{e}$$ (calculas la potencia)

$$\boldsymbol{e} = -1$$ (despejas $\boldsymbol{e}$)

3. Escribes la ecuación: $y = (x + \mathbf{4})^3 - \mathbf{1}$.

Resumiendo:

Para escribir la **ecuación** de una **función cúbica**:

1. Si conoces las **coordenadas** del **punto característico** $(-\boldsymbol{d}; \boldsymbol{e})$, puedes escribirla rápidamente sustituyendo en la ecuación $y = \pm(x + d)^3 + e$ los valores de $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{e}$. Recuerda **el signo que precede a la potencia cúbica es "+"si la gráfica asciende de izquierda a derecha** y **"–"si la gráfica desciende de izquierda a derecha**

2. Si conoces solo uno de los dos **parámetros**, se necesita al menos, las **coordenadas** de uno de los puntos de la gráfica. **Sustituyes** el valor del **parámetro** conocido y dichas **coordenadas**, para obtener el **otro parámetro**.

Funciones cúbicas con dominio restringido

En ocasiones encontrarás ejercicios sobre las funciones cúbicas con **dominio restringido**.

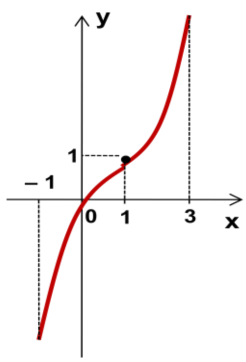
¿Qué implicaciones tiene esta situación al resolverlos?

En estos casos, se hace la **representación gráfica** de solo una **parte** de la **curva** y algunas **propiedades** cambian respecto a las de la función con su dominio sin restricciones.

Ejemplo: En la gráfica aparece representada una función ***f***, definida en $x \in (-1\ ;\ 3]$, por la ecuación

$y = (x + a)^3 + b$.

Escribe verdadero o falso. Argumenta las falsas por qué lo son.



a) La ecuación de la función es $y = (x + 1)^3 + 1$.

R/ Falso. Debe ser $y = (x - 1)^3 + 1$, el **desplazamiento** en "x" se toma con **signo opuesto**.

b) El conjunto imagen de la función es $y \in \mathbb{R}$.

R/ Falso. El conjunto imagen es $y \in (-7 ; 9]$.

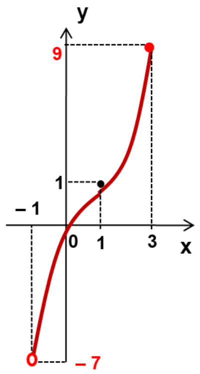
Primero hay que hallar las **ordenadas** correspondientes a las **abscisas – 1** y **3**:

Para $x = -1$:

$y = (-1 - 1)^3 + 1 = (-2)^3 + 1 = -8 + 1 = -7$

Para $x = 3$:

$y = (3 - 1)^3 + 1 = 23 + 1 = 8 + 1 = 9$



Como el **dominio** está **restringido** $x \in (-1 ; 3]$, la **imagen** también lo estará. El **extremo 9** es un elemento de la **imagen**, ya que **3** es un elemento del **dominio**, no así el **-7**, porque **– 1 no** forma parte del **dominio**

c) El cero de la función es x = 0.

R/ Verdadero.

$(x - 1)^3 + 1 = 0$

$(x - 1)^3 = -1$

$x - 1 = \sqrt[3]{-1}$

$x - 1 = -1$

$x = -1 + 1$

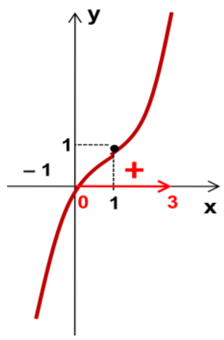
$x = 0$

d) La función es monótona creciente.

R/ Verdadero. La **gráfica** de **izquierda** a **derecha** **asciende**.

e) La función es positiva para $x \in [0\ ;\ 3]$.

R/ Falso. El **0 no** se incluye en el intervalo. Lo correcto es $x \in (0\ ;\ 3]$.



f) La gráfica corta al eje de las ordenadas en el punto de coordenadas (0 ; 0).

R/ Verdadero. Si das valor **cero** a la ***x***, obtienes:

$$y = (\mathbf{0} - 1)^3 + 1 = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = \mathbf{0}$$

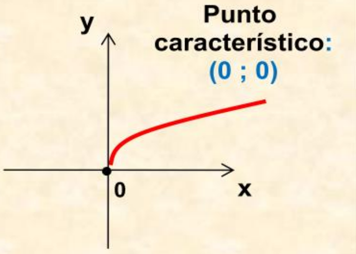
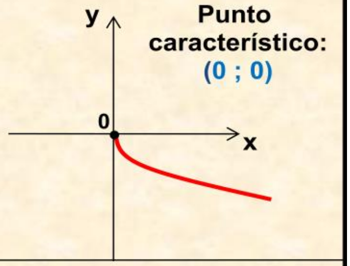
g) La función es impar.

R/ Falso. A pesar de que pasa por **cero**, **no es simétrica** respecto al **origen de coordenadas**.

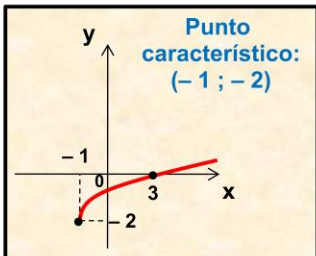
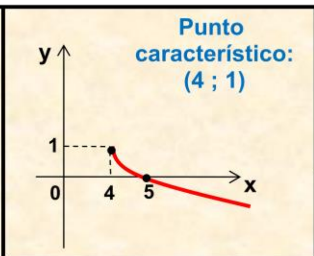
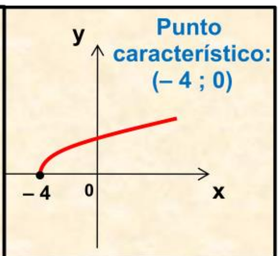
Función raíz cuadrada

Analicemos la función **raíz cuadrada**, (sin desplazamiento), su **gráfico** y **propiedades.**

$a \neq 0$

Función raíz cuadrada	$y = a\sqrt{x}$	$y = -a\sqrt{x}$
		
Dominio	$\{x \in \Re: x \geq 0\}$	$\{x \in \Re: x \geq 0\}$
Imagen	$\{y \in \Re: y \geq 0\}$	$\{y \in \Re: y \leq 0\}$
Cero	$x = 0$	$x = 0$
Monotonía	creciente	decreciente
Signos	positiva: $x > 0$	negativa: $x > 0$
Paridad	No es par ni impar	No es par ni impar
Inyectiva	Sí	Sí
Intercepto con "y"	$y = 0$	$y = 0$
Valor	mínimo: $y = 0$	máximo: $y = 0$

Observa algunos ejemplos de la función **raíz cuadrada**, (con desplazamiento), su **gráfico** y **propiedades.**

Función raíz cuadrada	$y = \sqrt{x+1} - 2$	$y = -\sqrt{x-4} + 1$	$y = \sqrt{x+4}$
			
Dominio	$\{x \in \Re : x \geq -1\}$	$\{x \in \Re : x \geq 4\}$	$\{x \in \Re : x \geq -4\}$
Imagen	$\{y \in \Re : y \geq -2\}$	$\{y \in \Re : y \leq 1\}$	$\{y \in \Re : y \geq 0\}$
Cero	$x = 3$	$x = 5$	$x = -4$
Monotonía	creciente	decreciente	creciente
Signos	positiva: $x > 3$ negativa: $-1 \leq x < 3$	positiva: $4 \leq x < 5$ negativa: $x > 5$	positiva: $x > -4$
Paridad	No es par ni impar	No es par ni impar	No es par ni impar
Inyectiva	Sí	Sí	Sí
Intercepto con "y"	$y = -1$	No tiene	$y = 2$
Valor	mínimo: $y = -2$	máximo: $y = 1$	mínimo: $y = 0$

Comentarios:

♦ En las funciones $y = \sqrt{x + d} + e$ o $y = -\sqrt{x + d} + e$, el punto característico es $(-d;\ e)$.

NOTA: Para obtener el valor de d **cuando en la cantidad subradical la variable x tiene coeficiente distinto de 1**, hay dividir el término independiente de esa cantidad por el coeficiente de la variable.

$$y = \sqrt{2x + 6} + 1$$

Coeficiente

Término independiente

$$d = \frac{6}{2} = 3$$

♦ Para hallar el **dominio** de una función **raíz cuadrada** planteas una **inecuación lineal** con la cantidad **subradical mayor o igual que cero** y la resuelves.

♦ Para escribir la **imagen** se toma como referencia el término que está **fuera** del **radical** (valor de $\boldsymbol{e}$), y se escribe **mayor o igual** o **menor o igual** **que este** según hacia donde **abra** la gráfica ($\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{e}$ si abre hacia arriba o $\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{e}$ si abre hacia abajo).

♦ Esta función tiene **cero** y es **único**, cuando el **signo** delante del radical es **diferente** al signo del término que se encuentra fuera de él. Si ambos signos son iguales, **no tiene cero**.

♦ La función raíz cuadrada es **inyectiva** y **no es par ni impar**.

♦ La **monotonía** de esta función depende del **signo** delante del radical:

- ✓ Si es **“+”** (y = $\sqrt{x+\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{e}$) **la función es creciente** y su gráfica **se inclina hacia arriba** de izquierda a derecha.

✓ Si es "–" ($y = -\sqrt{x + \boldsymbol{d}} + \boldsymbol{e}$) **la función es decreciente** y su gráfica **se inclina hacia abajo** de izquierda a derecha.

♦ En los **signos** de la función se toman como referencia el **cero** (que nunca se incluye en el intervalo) y la **abscisa del punto característico**, la cual se **incluye siempre que no coincida con el cero**.

♦ La función **inversa** de esta función es una **función cuadrática**, cuyo dominio **no** son los reales, sino **está limitado**, (imagen de la función raíz cuadrada).

¿Cómo esbozar el gráfico de una función raíz cuadrada?

Ejemplos:

a) $y = \sqrt{x+1} - 1$

Para esbozar dicho gráfico necesitas:

1. Buscar las coordenadas del **punto característico:**

$(-\mathbf{1}\ ;\ -\mathbf{1})$

Nota: Recuerda que **del punto característico la abscisa es el valor opuesto de $\boldsymbol{d}$** y **la ordenada el valor de $\boldsymbol{e}$**.

2. Calcular el **cero.**

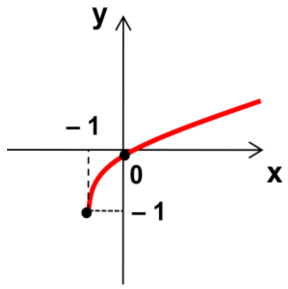
$\sqrt{x+1} - 1 = 0$ (sustituyes *y* por 0)

$(\sqrt{x+1})^2 = 1^2$ (aíslas el radical y elevas al cuadrado)

$x + 1 = 1$ (calculas)

$x = 0$ (despejas *x*)

3. Ubicar los **puntos** en el sistema de coordenadas y **trazar** la gráfica.



Propiedades:

♦ **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}: x \geq -1\}$

♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦ **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R}: y \geq -1\}$

♦ **Inyectiva**: sí

♦ **Cero**: $x = 0$

♦ **Valor mínimo**: $y = -1$

♦ **Monotonía**: creciente

♦ **Intercepto con "y"**: $y = 0$

♦ **Signos**: La función es positiva para $x > 0$ y negativa para $-1 \leq x < 0$

b) $y = -\sqrt{x-8}$

1. Buscas las coordenadas del **punto característico**:

$(8\ ;\ 0)$

Nota: Recuerda que **del punto característico la abscisa es el valor opuesto de *d*** y **la ordenada el valor de *e***.

Como no hay ningún número fuera del radical, se puede decir que $e = 0$.

2. Calculas el **cero**.

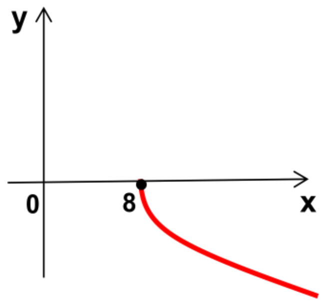
$0 = -\sqrt{x-8}$ (sustituyes ***y*** por **0**)

$(\sqrt{x-8}\,)^2 = 0^2$ (aíslas el radical y elevas al cuadrado)

$x - 8 = 0$ (calculas)

$x = 8$ (despejas **x**)

3. Ubicas el cero y **trazas** la gráfica teniendo en cuenta que se inclina de izquierda a derecha **hacia abajo** porque la raíz está precedida de signo " – ".



Nota: En este caso, para dar mayor precisión a la gráfica, se puede **calcular las coordenadas de otro punto** que se encuentre a la derecha del punto característico.

Propiedades:

- **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}: x \geq 8\}$
- **Paridad**: no es par ni impar
- **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R}: y \leq 0\}$
- **Inyectiva**: sí
- **Cero**: $x = 8$
- **Valor máximo**: $y = 0$
- **Monotonía**: decreciente
- **Intercepto con "y"**: No tiene
- **Signos**: La función es negativa para $x > 8$

c) $y = \sqrt{2x+6} + 1$

1. Buscas las coordenadas del **punto característico**:

$(-3;1)$

Atención: En este caso $e = 1$ **pero el valor de** d **no es 6.** Para obtener el valor de d **cuando en la cantidad subradical la variable** x **tiene coeficiente distinto de 1**, hay dividir el término independiente de esa cantidad por el coeficiente de la variable.

$$y = \sqrt{2x+6} + 1$$

Coeficiente

Término independiente

$$d = \frac{6}{2} = 3$$

Por eso la abscisa del punto característico es -3**, ya que se toma el opuesto de** d**.**

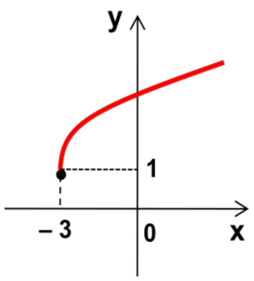
2. Calculas el **cero**.

$\sqrt{2x+6} + 1 = 0$ (sustituyes la **y** por **cero**)

$\sqrt{2x+6} = -1$ (aíslas el radical)

Imposible **No tiene cero**

3. Ubicas el punto característico y **trazas** la gráfica teniendo en cuenta que se inclina de izquierda a derecha **hacia**



arriba porque la raíz está precedida de signo " + " .

Nota: En este caso, que la función **no tiene cero**, para dar mayor precisión a la gráfica, se puede calcular el **intercepto** con "**y**" o las coordenadas de otro punto que se encuentre a la derecha del punto característico.

Propiedades:

- **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}: x \geq -3\}$
- **Paridad**: no es par ni impar
- **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R}: y \geq 1\}$
- **Inyectiva**: sí
- **Cero**: No tiene
- **Valor mínimo**: $y = -3$
- **Monotonía**: creciente
- **Intercepto con "y"**: $y \approx 3{,}4$
- **Signos**: La función es positiva para $x > -3$

Nota: Al calcular el intercepto con "**y**", se obtiene

$$y = \sqrt{2 \cdot 0 + 6} + 1 = \sqrt{6} + 1 \approx 2{,}4 + 1 \approx 3{,}4$$

d) $y = 2\sqrt{x} - 4$

1. Buscas las coordenadas del **punto característico**:

$(\mathbf{0}\ ;\ -\ \mathbf{4})$

Nota: Como en la cantidad subradical no aparece ningún número sumando o restando a la variable, entonces $\boldsymbol{d} = 0$.

4. Calculas el **cero**.

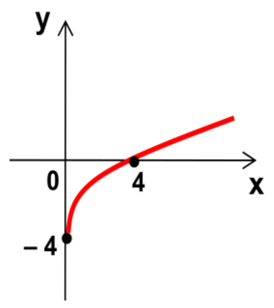
$2\sqrt{x} - 4 = 0$ (sustituyes ***y*** por **0**)

$(2\sqrt{x})^2 = 4^2$ (aíslas el radical y elevas al cuadrado)

$4x = 16$ (calculas)

$x = 4$ (despejas ***x***)

3. Ubicas los **puntos** en el sistema de coordenadas y **trazas** la gráfica.



Propiedades:

- **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$
- **Paridad**: no es par ni impar
- **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R}: y \geq -4\}$
- **Inyectiva**: sí
- **Cero**: $x = 4$
- **Valor mínimo**: $y = -4$
- **Monotonía**: creciente
- **Intercepto con "y"**: $y = -4$
- **Signos**: La función es positiva para $x > 4$ y negativa para $0 \leq x < 4$.

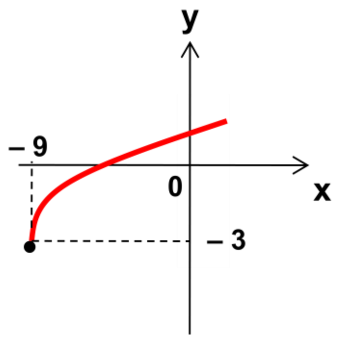
¿Cómo escribir la ecuación de una función raíz cuadrada?

Para escribir la ecuación de una función raíz cuadrada, debes tener en cuenta qué información te brinda el ejercicio. A continuación, te proponemos algunas ideas.

Ejemplos:

A continuación aparecen las gráficas de varias funciones de la forma y = $\sqrt{x+d} + e$ o y = $-\sqrt{x+d} + e$. Escribe en cada caso su ecuación.

a)



Solución:

1. Como la gráfica se inclina hacia **arriba** de izquierda a derecha, la ecuación es de la forma y = $\sqrt{x+d} + e$.

2. Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{e}$.

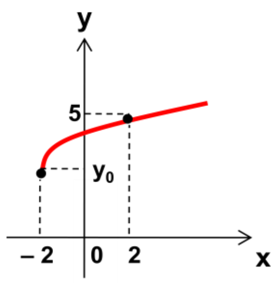
De la **gráfica** se pueden extraer estos valores, ya que conoces el punto característico $(-9;\ -3)$

- $\boldsymbol{d = 9}$, pues $\boldsymbol{d}$ toma **el valor opuesto de la abscisa del punto característico**. También podías haber argumentado porque la **gráfica** está **desplazada 9** unidades a la **izquierda**.

- $e = -3$ pues **b** toma **el mismo valor que la ordenada del punto característico** o también porque la **gráfica** está **desplazada 3** unidades hacia **abajo**.

5. Escribes la ecuación: y = $\sqrt{x+9}$ **– 3**.

b)



Solución:

1. Como la gráfica se inclina hacia **arriba** de izquierda a derecha, la ecuación es de la forma y = $\sqrt{x+d}+e$.

2. Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros d y e.

De la **gráfica** se puede extraer solo el valor de d, ya que del punto característico solo conoces su abscisa $(-2;\ y_0)$:

- $d = 2$, pues d toma **el valor opuesto de la abscisa del punto característico** o también porque la **gráfica** está **desplazada 2** unidades a la **izquierda**.

- Para hallar el valor de e, debes utilizar al menos un **punto** de la gráfica. En este caso, te ofrecen el punto de coordenadas $(2\,;\,5)$.

♦ Hallas e:

- Sustituyes en la ecuación el valor de d:

$$y = \sqrt{x + 2} + e.$$

- Sustituyes en la ecuación las **coordenadas** del **punto** $(\mathbf{2}\,;\,\mathbf{5})$:

$$5 = \sqrt{2 + 2} + e$$

- Efectúas las operaciones indicadas:

$5 = \sqrt{4} + e$ (adicionas)

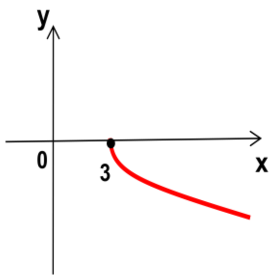
$5 = 2 + e$ (extraes la raíz cuadrada)

$e = 5 - 2$ (despejas e)

$e = \mathbf{3}$ (efectúas la sustracción)

3. Escribes la ecuación: $y = \sqrt{x + 2} + 3$.

c)



Solución:

1. Como la gráfica se inclina hacia **abajo** de izquierda a derecha, la ecuación es de la forma $y = -\sqrt{x + d} + e$.

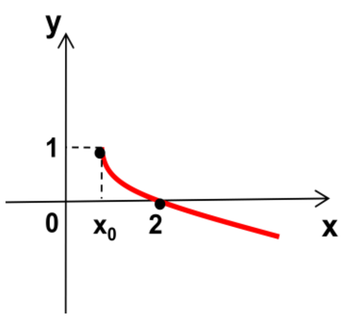
2. Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{e}$.

De la **gráfica** se pueden extraer estos valores, ya que conoces el punto característico $(3;\ 0)$:

- $\boldsymbol{d = -3}$, pues $\boldsymbol{d}$ toma **el valor opuesto de la abscisa del punto característico**. También porque que la **gráfica** está **desplazada 3** unidades a la **derecha**.
- $\boldsymbol{e = 0}$, pues $\boldsymbol{e}$ toma **el mismo valor que la ordenada del punto característico** o también porque la **gráfica no** está **desplazada** en "**y**".

3. Escribes la ecuación: y = – $\sqrt{x - 3}$.

d)



Solución:

1. Como la gráfica se inclina hacia **abajo** de izquierda a derecha, la ecuación es de la forma $y = -\sqrt{x+d} + e$.

2. Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{e}$.

De la **gráfica** se puede extraer solo el valor de **b**, ya que del punto característico solo conoces su ordenada (x_0; 1).

- $\boldsymbol{e} = \mathbf{1}$, ya que toma el mismo valor de la ordenada del punto característico o también porque la **gráfica** está **desplazada 1** unidad hacia **arriba**.
- Para hallar el valor de $\boldsymbol{d}$, debes utilizar al menos un **punto** de la gráfica. En este caso, te ofrecen el punto de coordenadas $(2\,;\ 0)$.

♦ Hallas $\boldsymbol{d}$:

• Sustituyes en la ecuación el valor de $\boldsymbol{e}$:

$$y = -\sqrt{x+\boldsymbol{d}} + \mathbf{1}$$

• Sustituyes en la ecuación las **coordenadas** del **punto** $(\mathbf{2}\,;\ \mathbf{0})$:

$$0 = -\sqrt{2+\boldsymbol{d}} + \mathbf{1}$$

• Resuelves la ecuación obtenida:

$\sqrt{2+\boldsymbol{d}} = \mathbf{1}$ (aíslas el radical)

$(\sqrt{2+d})^2 = 1^2$ (elevas al cuadrado ambos miembros)

$2 + d = 1$ (Efectúas)

$d = -1$ (despejas y reduces)

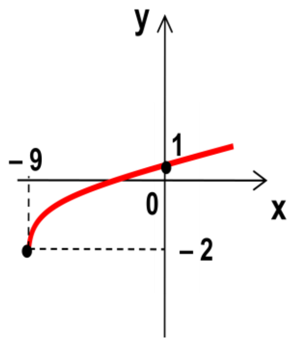
Nota: Esto indica que la función está desplazada una unidad a la derecha.

3. Escribes la ecuación: $y = -\sqrt{x-1} + 1$

Otro tipo de ejercicio muy común que necesitas saber resolver es el siguiente:

Ejemplo: En la figura aparece representada una función f cuya ecuación tiene la forma

$$f(x) = \sqrt{x+d} + e.$$



Marca con una X la respuesta correcta:

a) La ecuación de f es:

___ $f(x) = \sqrt{x+9} + 2$ ___ $f(x) = \sqrt{x+9} - 2$

___ $f(x) = \sqrt{x-9} - 2$ ___ $f(x) = \sqrt{x-9} + 2$

b) De la función f se puede afirmar que:

___ tiene cero $x_0 = -2$

__ su dominio es $\{x \in \mathbb{R}\colon x > -9\}$

__ la gráfica corta al eje "y" en $(1\,;\ 0)$

__ no es par ni impar

c) De los pares siguientes el que pertenece a la función $\boldsymbol{f}$ es:

__ $(-1\,;\ 2)$ __ $(27\,;\ 4)$ __ $(-10\,;\ -3)$ __ $(7\,;\ 0)$

Solución:

a) $\boldsymbol{f}(x) = \sqrt{x+9} - 2$

Como el punto característico según el gráfico es $(-9;\ 2)$, el valor de $\boldsymbol{d}$ **se sustituye por el opuesto del valor de la abscisa** y el de $\boldsymbol{e}$, **por el valor de la ordenada**.

Luego, $\boldsymbol{d} = \mathbf{9}$ y $\boldsymbol{e} = -\mathbf{2}$.

b) no es par ni impar.

Las otras no son, ya que:

- El cero es $x_0 = -\mathbf{5}$.
- Su dominio es $\{x \in \mathbb{R}\colon x \geq -9\}$
- La gráfica corta al eje "y" en $(\mathbf{0}\,;\ \mathbf{1})$

c) $(27\,;\ 4)$.

Para verificar si el par pertenece a la función:

1. se sustituye la $\boldsymbol{x}$ de cada par en la ecuación:

$$y = \sqrt{27+9} - 2$$

2. se calcula el valor de $\boldsymbol{y}$:

$$y = \sqrt{36} - 2 = 6 - 2 = \mathbf{4}$$

3. se compara el valor de **y** obtenido con el del **par** seleccionado: **4** = **4**

Si las ordenadas son **iguales**, el par **pertenece**, en caso contrario, **no pertenece**.

Resumiendo:

Para escribir la **ecuación** de una **función raíz cuadrada**:

1. Si conoces las **coordenadas** del **punto característico** $(-\boldsymbol{d}; \boldsymbol{e})$, puedes escribirla rápidamente sustituyendo en la ecuación y = $\sqrt{x+d} + e$ o y = $-\sqrt{x+d} + e$ los valores de $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{e}$.

2. Si conoces solo uno de los dos **parámetros**, se necesita al menos las **coordenadas** de uno de los puntos de la gráfica. **Sustituyes** el valor del **parámetro** conocido y dichas **coordenadas**, para obtener el **otro parámetro**.

Función raíz cuadrada con dominio restringido

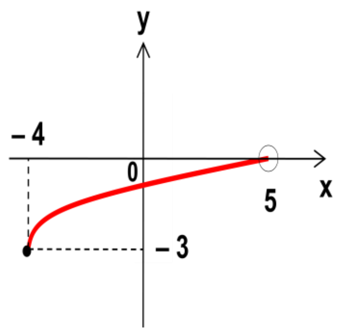
En ocasiones encontrarás ejercicios sobre las funciones raíz cuadrada con **dominio restringido**.

¿Qué implicaciones tiene esta situación al resolverlos?

En estos casos, se hace la **representación gráfica** de solo una **parte** de la **curva** y algunas **propiedades** cambian respecto a las de la función con su dominio sin restricciones.

Ejemplo: En la gráfica aparece representada una función ***f*** cuya ecuación tiene la forma $f(x) = \sqrt{x+d} + e$, en un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Completa los espacios en blanco:



a) La ecuación de ***f*** es __________.

R/ $f(x) = \sqrt{x+4} - 3$.

Nota: El punto característico según la gráfica es $(-4;-3)$, por tanto $d = 4$ (opuesto del valor de la abscisa) y $e = -3$ (valor de la ordenada).

b) El dominio de ***f*** es __________.

R/ $\{x \in \mathbb{R}: -\ 4 \leq x\ <\ 5\}$.

Nota: El **5** no es un **elemento** del **dominio**, porque tiene un círculo **sin** sombrear.

c) El conjunto imagen de ***f*** es _________.

R/ $\{y \in \mathbb{R}: -\ 3 \leq y\ <\ 0\}$.

Nota: El **0** no es un **elemento** del conjunto **imagen**, porque es la **ordenada** que se obtiene cuando **x = 5**, que **no** pertenece al **dominio**.

d) La función es negativa para _________.

R/ $\{x \in \mathbb{R}: -4 \leq x\ <\ 5\}$.

Nota: Cuando se analizan los **signos no** se incluye en el **intervalo** el **cero** de la función. El **– 4** se incluye, porque para ese valor la gráfica está por **debajo** del eje **"x"**.

e) La gráfica corta al eje de las ordenadas en ___.

R/ $y\ = -\ 1$.

Nota: El **intercepto** con **"y"** se obtiene sustituyendo por **0** la ***x*** en la ecuación:

$$f(\mathbf{0}) = \sqrt{\mathbf{0} + 4} - 3 = \sqrt{4} - 3 = 2 - 3 = \mathbf{-\ 1}$$

f) La función tiene valor mínimo _____.

R/ $y = -\ 3$.

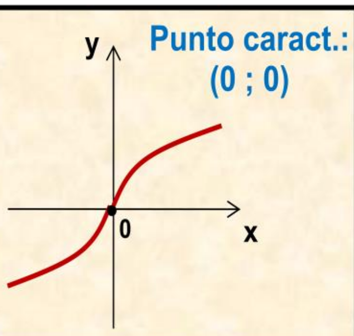
Nota: El **valor mínimo** es la **ordenada** del **punto característico**.

Función raíz cúbica

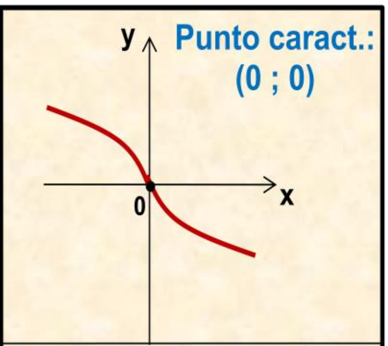
Analicemos la función **raíz cúbica**, (sin desplazamiento), su **gráfico** y **propiedades.**

Función raíz cúbica

$y = \sqrt[3]{x}$

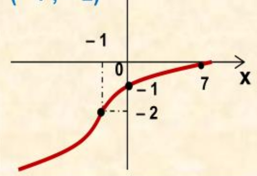
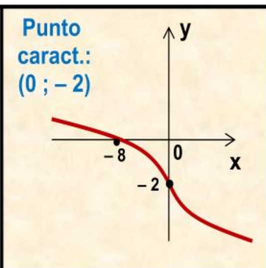
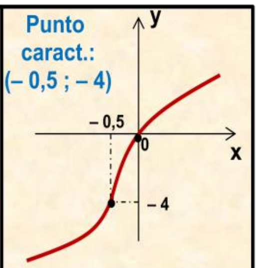


$y = -\sqrt[3]{x}$



Función raíz cúbica	$y = \sqrt[3]{x}$	$y = -\sqrt[3]{x}$
Dominio	$\{x \in \Re\}$	$\{x \in \Re\}$
Imagen	$\{y \in \Re\}$	$\{y \in \Re\}$
Cero	$x = 0$	$x = 0$
Monotonía	creciente	decreciente
Signos	positiva: $x > 0$ negativa: $x < 0$	positiva: $x < 0$ negativa: $x > 0$
Paridad	impar	impar
Inyectiva	Sí	Sí
Intercepto con "y"	$y = 0$	$y = 0$

Observa algunos ejemplos de la función **raíz cúbica**, (con desplazamiento), su **gráfico** y **propiedades.**

Función raíz cúbica	$y = \sqrt[3]{x+1} - 2$	$y = -\sqrt[3]{x} - 2$	$y = 4\sqrt[3]{2x+1} - 4$
	Punto caract.: $(-1; -2)$ 	Punto caract.: $(0; -2)$ 	Punto caract.: $(-0{,}5; -4)$ 
Dominio	$\{x \in \Re\}$	$\{x \in \Re\}$	$\{x \in \Re\}$
Imagen	$\{y \in \Re\}$	$\{y \in \Re\}$	$\{y \in \Re\}$
Cero	$x = 7$	$x = -8$	$x = 0$
Monotonía	creciente	decreciente	creciente
Signos	positiva: $x > 7$ negativa: $x < 7$	positiva: $x < -8$ negativa: $x > -8$	positiva: $x > 0$ negativa: $x < 0$
Paridad	No es par ni impar	No es par ni impar	No es par ni impar
Inyectiva	Sí	Sí	Sí
Intercepto con "y"	$y = -1$	$y = -2$	$y = 0$

Comentarios:

♦ En las funciones $y = \sqrt[3]{x + \boldsymbol{d}} + \boldsymbol{e}$ o $y = -\sqrt[3]{x + \boldsymbol{d}} + \boldsymbol{e}$, el punto característico es $(-\boldsymbol{d};\ \boldsymbol{e})$.

Nota: Para obtener el valor de $\boldsymbol{d}$ **cuando en la cantidad subradical la variable *x* tiene coeficiente distinto de 1**, hay dividir el término independiente de esa cantidad por el coeficiente de la variable. Por ejemplo:

$$y = \sqrt[3]{2x + 6} + \mathbf{25}$$

Coeficiente

Término independiente

$$\boldsymbol{d} = \frac{6}{2} = 3$$

♦ Su **dominio** e **imagen** son los **reales**.

♦ Esta función siempre tiene **cero** y **siempre** corta al eje "**y**".

♦ Para los **signos** se toma como referencia su **cero.**

♦ Las funciones **sin desplazamiento**, o sea, las originales, son **impares**, las desplazadas **no son** pares ni impares.

♦ La **inversa** de una función **raíz cúbica**, es una **cúbica**.

♦ La monotonía depende del signo delante de la raíz:

- ✓ Si es **"+"** (y = $\sqrt[3]{x + \boldsymbol{d}} + \boldsymbol{e}$) **la función es creciente** y su gráfica **se inclina hacia arriba** de izquierda a derecha.
- ✓ Si es **"– +"** (y = $-\sqrt[3]{x + \boldsymbol{d}} + \boldsymbol{e}$) **la función es decreciente** y su gráfica **se inclina hacia abajo** de izquierda a derecha.

¿Cómo esbozar el gráfico de una función raíz cúbica?

Ejemplos:

a) $y = \sqrt[3]{x + 8} - 1$

Para esbozar dicho gráfico necesitas:

1. Buscar las coordenadas del **punto característico**:

$(-\ \mathbf{8}\ ;\ -\ \mathbf{1})$

Nota: Recuerda que **del punto característico la abscisa es el valor opuesto de d** y **la ordenada el valor de e**.

2. Calcular el **cero**:

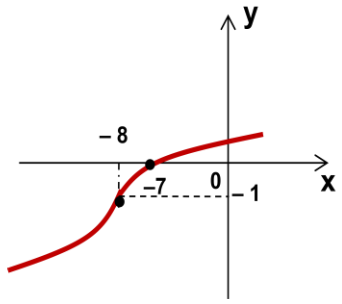
$\sqrt[3]{x+8} - 1 = 0$ (sustituyes por **cero** la **y**)

$\sqrt[3]{x+8} = 1^3$ (aíslas el radical y elevas al cubo)

$x + 8 = 1$ (despejas x)

$\boldsymbol{x = -7}$

3. Ubicar los **puntos** en el sistema de coordenadas y **trazar** la gráfica.



Propiedades:

♦ **Dominio**: {x∈ℝ}

♦ **Imagen**: {y∈ℝ}

♦ **Cero**: x = – 7

♦ **Monotonía**: creciente

♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦ **Inyectiva**: sí

♦ **Intercepto con "y"**: y = 1

♦ **Signos**: La función es positiva para $x > -7$ y negativa para $x < -7$.

b) $y = \sqrt[3]{x-1}$

1. Buscas las coordenadas del **punto característico**:

$(\mathbf{1}\ ;\ \mathbf{0})$

Nota: Recuerda que **del punto característico la abscisa es el valor opuesto de d** y **la ordenada el valor de e**.

Como no hay ningún número fuera del radical, se puede decir que $e = 0$.

2. Calculas el **cero**:

$\sqrt[3]{x-1} = 0$ (sustituyes por **cero** la **y**)

$(\sqrt[3]{x-1})^3 = 0^3$ (elevas al cubo)

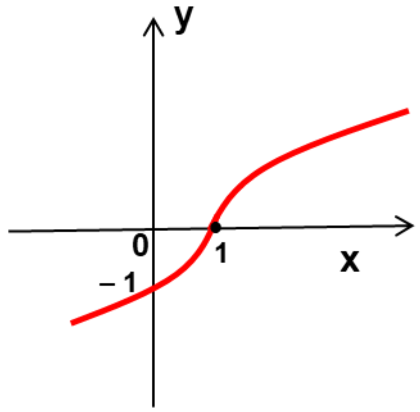
$x - 1 = 0$ (despejas x)

$\boldsymbol{x = 1}$

3. Como el punto característico y el cero coinciden debes **calcular el intercepto con el eje "y"**.

$\sqrt[3]{0-1} = \sqrt[3]{-1} = -1$

4. Ubicas los puntos en el sistema de coordenadas y trazas la gráfica.



Propiedades:

♦ **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}\}$

♦ **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R}\}$

♦ **Cero**: $x = 1$

♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦ **Inyectiva**: sí

♦ **Intercepto con "y"**: $y = -1$

♦ **Monotonía**: creciente

♦ **Signos**: La función es positiva para $x > 1$ y negativa para $x < 1$.

c) $y = -\, 2\sqrt[3]{x+1} + 2$

1. Hallas las coordenadas del **punto característico**:

$(-\,\mathbf{1}\,;\,\mathbf{2})$

Nota: Recuerda que **del punto característico la abscisa es el valor opuesto de d** y **la ordenada el valor de e**.

2. Calculas el **cero**:

$-\,2\sqrt[3]{x+1} + 2 = 0$ (sustituyes por **cero** la **y**)

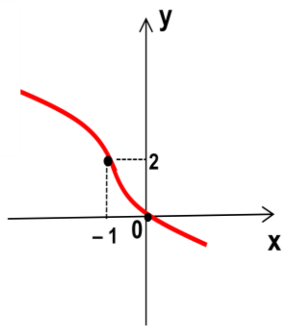
$2\sqrt[3]{x+1} = 2$ (aíslas el radical)

$(\sqrt[3]{x+1}\,)^3 = 1^3$ (elevas al cubo ambos miembros)

$x + 1 = 1$ (despejas x)

$\boldsymbol{x = 0}$

3. Ubicas el punto característico y el cero en el sistema de coordenadas y **trazas** la gráfica.



Propiedades:

♦ **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}\}$

♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦ **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R}\}$

♦ **Inyectiva**: sí

♦ **Cero**: $x = 0$

♦ **Intercepto con "y"**: $y = 0$

♦ **Monotonía**: decreciente

♦ **Signos**: La función es positiva para $x < 0$ y negativa para $x > 0$.

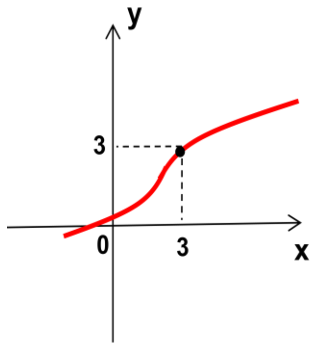
¿Cómo escribir la ecuación de una función raíz cúbica?

Para escribir la ecuación de una función raíz cúbica, debes tener en cuenta qué información te brinda el ejercicio. A continuación, te proponemos algunas ideas.

Ejemplos:

A continuación aparecen las gráficas de varias funciones de la forma $y = \sqrt[3]{x + d} + e$ o $y = -\sqrt[3]{x + d} + e$. Escribe en cada caso su ecuación.

a)



Solución:

1. Como la gráfica se inclina hacia **arriba** de **izquierda** a **derecha**, la ecuación es de la forma $y = \sqrt[3]{x + d} + e$.

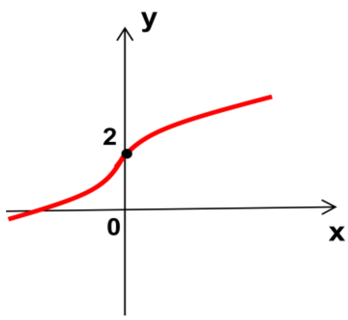
2. Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{e}$.

De la **gráfica** se pueden extraer estos valores, ya que conoces el punto característico $(3; 3)$

- ✓ $\boldsymbol{d} = -\ \mathbf{3}$, pues $\boldsymbol{d}$ toma **el valor opuesto de la abscisa del punto característico.** También podías haber argumentado porque la **gráfica** está **desplazada 3** unidades a la **derecha**.
- ✓ $\boldsymbol{e} = \mathbf{3}$, pues $\boldsymbol{e}$ toma **el mismo valor que la ordenada del punto característico** o también porque la **gráfica** está **desplazada 3** unidades hacia **arriba**.

3. Escribes la ecuación: $y = \sqrt[3]{x - \mathbf{3}} + \mathbf{3}$.

b)



Solución:

1. Como la gráfica se inclina hacia **arriba** de **izquierda** a **derecha**, la ecuación es de la forma $y = \sqrt[3]{x + d} + e$.

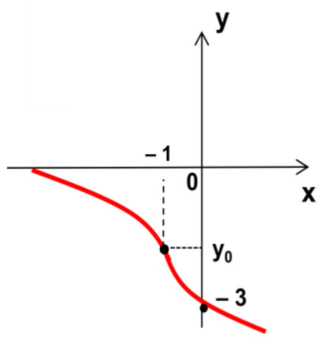
2. Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{e}$.

De la **gráfica** se pueden extraer estos valores, ya que conoces el punto característico $(0; 2)$.

- ✓ $\boldsymbol{d = 0}$, pues $\boldsymbol{d}$ toma **el valor opuesto de la abscisa del punto característico**. También podías haber argumentado porque la **gráfica no** está **desplazada** en el sentido del eje "**x**".
- ✓ $\boldsymbol{e = 2}$, pues $\boldsymbol{e}$ toma **el mismo valor que la ordenada del punto característico** o también porque la **gráfica** está **desplazada 2** unidades hacia **arriba**.

3. Escribes la ecuación: y = $\sqrt[3]{x}$ + **2**.

c)



Solución:

1. Como la gráfica se inclina hacia **abajo** de **izquierda** a **derecha**, la ecuación es de la forma $y = -\sqrt[3]{x+d} + e$.

2. Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{e}$.

De la **gráfica** se puede extraer solo el valor de $\boldsymbol{d}$, ya que del punto característico solo conoces su abscisa $(-1;\ y_0)$:

- ✓ $\boldsymbol{d} = \mathbf{1}$, pues $\boldsymbol{d}$ toma **el valor opuesto de la abscisa del punto característico** o también porque la **gráfica** está **desplazada 1** unidad hacia la **izquierda**.
- ✓ Para hallar el valor de $\boldsymbol{e}$, debes utilizar al menos un **punto** de la gráfica. En este caso, te ofrecen el punto de coordenadas $(0\ ;\ -\ 3)$.

♦ Hallas $\boldsymbol{e}$:

- Sustituyes en la ecuación el valor de $\boldsymbol{d}$:

$$y = -\sqrt[3]{x + \mathbf{1}} + \boldsymbol{e}$$

- Sustituyes en la ecuación las **coordenadas** del **punto** $(\mathbf{0}\ ;\ -\ \mathbf{3})$:

$$-\ 3 = -\sqrt[3]{0 + \mathbf{1}} + \boldsymbol{e}$$

- Resuelves la ecuación obtenida:

$-\ 3 = -\sqrt[3]{1} + \boldsymbol{e}$ (calculas en el radicando)

$-\ 3 = -\ 1 + \boldsymbol{e}$ (despejas $\boldsymbol{e}$)

$\boldsymbol{e} = -\ 3 + 1$ (efectúas la sustracción)

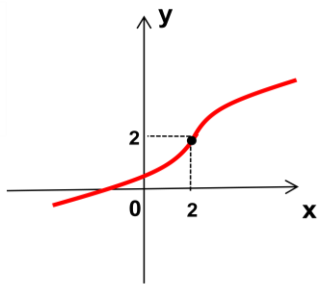
$e = -2$ (despejas y reduces)

3. Escribes la ecuación: $y = -\sqrt[3]{x+1} - 2$.

Otro tipo de ejercicio muy común que necesitas saber resolver es el siguiente:

Ejemplo: En la figura aparece representada una función g cuya ecuación tiene la forma $g(x) = \sqrt[3]{x+d} + e$.

Marca con una X la respuesta correcta:



a) Para d y e se cumple que:

__ $d > e$ __ $d < e$

__ $d = e$ __ no se puede determinar

b) De la función g se puede afirmar que:

__ no es inyectiva

__ es positiva para $x > -6$

__ tiene dominio $\{x \in \mathbb{R}: x \geq 2\}$

__ es impar

c) El dominio más restringido al que pertenece el resultado de calcular $1 - g(-25)$ es:

___ $\mathbb{N}$ ___ $\mathbb{Z}$ ___ $\mathbb{Q}_+$ ___ $\mathbb{Q}$ ___ $\mathbb{R}$

Solución:

a) $d < e$. $d = -2$ y $e = 2$.

b) es positiva para $x > -6$.

Las otras no son, ya que:

- es inyectiva, porque al trazar rectas **paralelas** al eje "**x**", estas cortan a la gráfica en un **único punto**.
- tiene dominio **{x∈ℝ}**, la raíz cúbica siempre está definida en $\mathbb{R}$.
- no es impar, ya que **no** es **simétrica** respecto al **origen de coordenadas**.

c) $\mathbb{N}$.

$$g(-25) = \sqrt[3]{-25-2} + 2 = \sqrt[3]{-27} + 2 = -3 + 2 = -1$$

Luego, $1 - (-1) = 1 + 1 = \mathbf{2}$

Resumiendo:

Para escribir la **ecuación** de una **función raíz cúbica**:

1. Si conoces las **coordenadas** del **punto característico** $(-d; e)$, puedes escribirla rápidamente sustituyendo en la ecuación $y = \sqrt[3]{x + d} + e$ o $y = -\sqrt[3]{x + d} + e$ los valores de $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{e}$.

2. Si conoces solo uno de los dos **parámetros**, se necesita al menos las **coordenadas** de uno de los puntos de la gráfica. **Sustituyes** el valor del **parámetro** conocido y dichas **coordenadas**, para obtener el **otro parámetro**.

Función raíz cúbica con dominio restringido

En ocasiones encontrarás ejercicios sobre las funciones raíz cúbica con **dominio restringido.**

¿Qué implicaciones tiene esta situación al resolverlos?

En estos casos, se hace la **representación gráfica** de solo una **parte** de la **curva** y algunas **propiedades** cambian respecto a las de la función con su dominio sin restricciones.

Ejemplo: Sea una función $\boldsymbol{g}$ cuya ecuación tiene la forma $\boldsymbol{g}(x) = \sqrt[3]{x - 8}$, definida para $x \in [0\ ;\ 9]$.

I. Represéntala gráficamente.

- Hallas las coordenadas **del punto característico**: $(\mathbf{8}\ ;\ \mathbf{0})$.

- Hallas el **cero**:

$\boldsymbol{g}(x) = \sqrt[3]{x - 8}$ (escribes la ecuación)

$0 = \sqrt[3]{x-8}$ (sustituyes y por cero)

$0 = x - 8$ (eliminas la raíz cúbica)

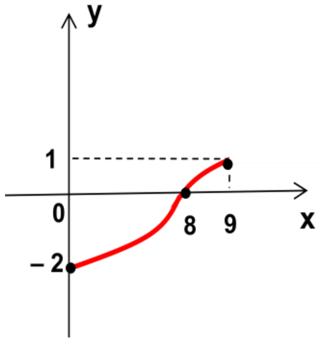
$x = 8$ (despejas x)

● Hallas la **imagen** para cada **elemento** extremo del **dominio**:

$\boldsymbol{g}(0) = \sqrt[3]{0-8} = \sqrt[3]{-8} = \mathbf{-\ 2}$

$\boldsymbol{g}(9) = \sqrt[3]{9-8} = \sqrt[3]{1} = \mathbf{1}$

● Ubicas los **puntos** y trazas la **gráfica.**



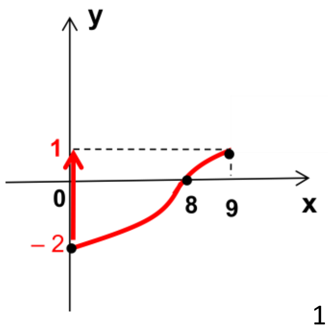
Nota: Recuerda que en el punto característico es donde cambia la forma de la curva.

II. Escribe verdadero o falso. En el caso de las falsas, argumenta por qué lo son.

a) __ $d > e$.

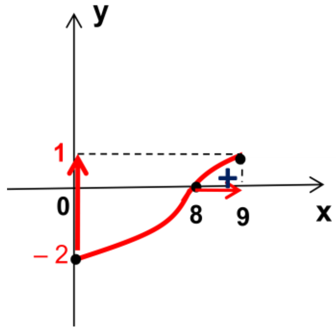
R/ Falso. En la función $\boldsymbol{g}(x) = \sqrt[3]{x-8}$, $\boldsymbol{d} = \mathbf{-\ 8}$ y $\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$.

b) __ El conjunto imagen de $\boldsymbol{g}$ es $\{y \in \mathbb{R}: -\ 2 \leq y \leq 1\}$.



R/ Verdadero. El **menor** valor de **imagen** es **– 2** y el **mayor**, es **1**.

c) __ La función es positiva para $8 \leq x \leq 9$.



R/ Falso. El **8 no** se incluye, por ser el **cero** de la función. Lo correcto es $8 < x \leq 9$.

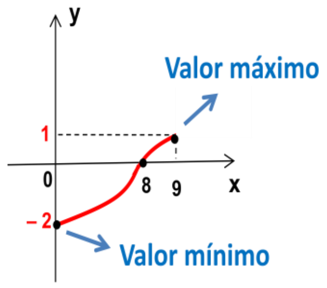
d) __ La función es creciente para $0 \leq x \leq 9$.

R/ Verdadero. Como ambos extremos son **elementos** del **dominio**, se **incluyen** en el intervalo.

e) __ La función no es par ni impar.

R/ Verdadero. La **gráfica no** es **simétrica**.

f) __ La función tiene **valor mínimo** $y = -2$ y **valor máximo** $y = 1$.

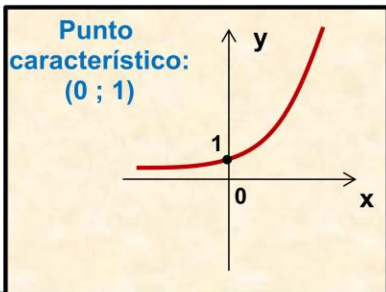
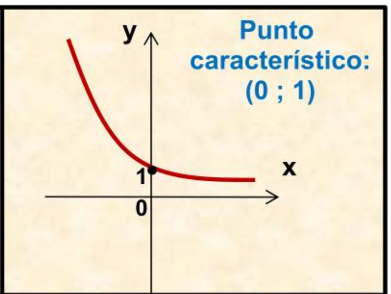


R/ Verdadero. Como está **restringido** el **dominio** y los **extremos** son **elementos** del mismo, esta función tiene ambos valores.

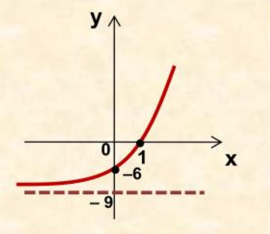
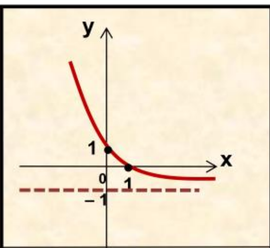
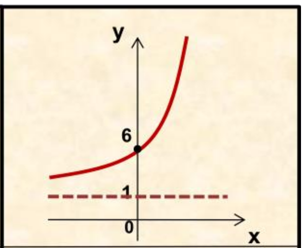
Nota: El **valor máximo** se obtiene sustituyendo en la ecuación la ***x*** por **9**.

Función exponencial

Analicemos la función **exponencial**, (sin desplazamiento), su **gráfico** y **propiedades.**

Función exponencial	$y = a^x$; $a > 1$	$y = a^x$; $0 < a < 1$
		
Dominio	$\{x \in \Re\}$	$\{x \in \Re\}$
Imagen	$\{y \in \Re: y > 0\}$	$\{y \in \Re: y > 0\}$
Cero	No tiene	No tiene
Monotonía	creciente	decreciente
Signos	positiva	positiva
Paridad	No es par ni impar	No es par ni impar
Inyectiva	Sí	Sí
Intercepto con "y"	$y = 1$	$y = 1$
Asíntotas	A.H.: $y = 0$	A.H.: $y = 0$

Observa algunos ejemplos de la función **exponencial**, (con desplazamiento), su **gráfico** y **propiedades.**

Función exponencial	$y = 3^{x+1} - 9$	$y = 0{,}5^{x-1} - 1$	$y = 5^{x+1} + 1$
			
Dominio	$\{x \in \Re\}$	$\{x \in \Re\}$	$\{x \in \Re\}$
Imagen	$\{y \in \Re: y > -9\}$	$\{y \in \Re: y > -1\}$	$\{y \in \Re: y > 1\}$
Cero	$x = 1$	$x = 1$	No tiene
Monotonía	creciente	decreciente	creciente
Signos	positiva: $x > 1$ negativa: $x < 1$	positiva: $x < 1$ negativa: $x > 1$	positiva
Paridad	No es par ni impar	No es par ni impar	No es par ni impar
Inyectiva	Sí	Sí	Sí
Intercepto con "y"	$y = -6$	$y = 1$	$y = 6$
Asíntotas	A.H.: $y = -9$	A.H.: $y = -1$	A.H.: $y = 1$

Comentarios:

♦ En las funciones exponenciales $y = a^{x+d} + e$ el punto característico es $(-d;\ e)$.

Nota: Para obtener el valor de d **cuando en el exponente de la potencia, la variable *x* tiene coeficiente distinto de 1**, hay dividir el término independiente del exponente de por el coeficiente de la variable. Por ejemplo:

Coeficiente

$$y = 2^{2x + 6} + 25 \qquad d = \frac{6}{2} = 3$$

Término independiente

♦ Las funciones exponenciales tienen una **asíntota horizontal** dada por la ecuación $y = \boldsymbol{e}$, luego la **imagen** está **limitada** y se escribe **mayor** que el valor de dicha asíntota, o sea, $\boldsymbol{y} > \boldsymbol{e}$.

♦ La función es **creciente** si la **base de la potencia** es **mayor** que **uno** ($a > 1$) y **decreciente** si está entre **cero y uno** ($0 < a < 1$).

♦ Si la **asíntota** está por **debajo** del eje "**x**"; la función tiene **un cero**, en caso contrario **no tiene cero**.

♦ La función **no es par ni impar**, es **inyectiva** y su **inversa** es una función **logarítmica**.

♦ Para escribir los **signos** se toma como referencia el **cero** de la función, cuando **no tiene cero** es **positiva** en todo su dominio.

¿Cómo esbozar el gráfico de una función exponencial?

Ejemplo:

a) $y = 2^x - 16$

Para esbozar dicho gráfico necesitas:

1. Determinar la **asíntota horizontal**: $\boldsymbol{y = -16}$**.**

Nota: Recuerda que la asíntota horizontal viene dada por la recta $y = e$ y e es el **valor del término independiente que acompaña a la potencia**.

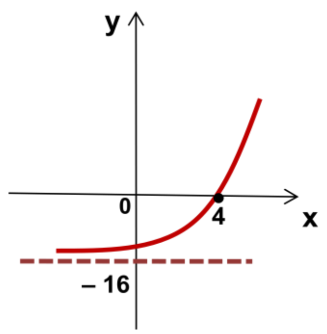
2. Calcular el **cero**:

$2^x - 16 = 0$

$2^x = 2^4$

$\boldsymbol{x = 4}$

3.Ubicar la **asíntota horizontal** y el **cero** en el sistema de coordenadas y **trazas** la gráfica, teniendo en cuenta que **asciende** de izquierda a derecha **porque la base de la potencia es mayor que 1**.



Para mayor precisión puedes hallar el intercepto con **"y".**

Propiedades:

♦ **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}\}$

♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦ **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R}: y > -16\}$

♦ **Inyectiva**: sí

♦ **Cero**: $x = 4$

♦ **Intercepto con "y"**: $y = -15$

♦ **Monotonía**: creciente

♦ **Signos**: La función es positiva para $x > 4$ y negativa para $x < 4$.

b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 1$

1. Buscas la **asíntota horizontal**: $\boldsymbol{y = 1}$**.**

Nota: Recuerda que la asíntota horizontal viene dada por la recta $y = e$ y e es el **valor del término independiente que acompaña a la potencia**.

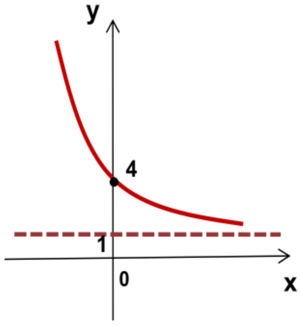
2. Calculas el **cero**:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 1 = 0$$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = -1$ (**imposible**) **No tiene cero**

Para mayor precisión puedes hallar el intercepto con **"y":**

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{0-1} + 1 = 3 + 1 = 4$$



3. Ubicas la **asíntota horizontal** y el **intercepto con el eje "y"** en el sistema de coordenadas y **trazas** la gráfica, teniendo en cuenta que **desciende** de izquierda a derecha **porque la base de la potencia está entre 0 y 1**.

Propiedades:

♦ **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}\}$

♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦ **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R}: y > 1\}$

♦ **Inyectiva**: sí

♦ **Cero**: no tiene

♦ **Intercepto con "y"**: $y = 4$

♦ **Monotonía**: decreciente

♦ **Signos**: La función es positiva para $x \in \mathbb{R}$.

c) $y = 3^{x+2}$

1. Determinas la **asíntota horizontal**: $\boldsymbol{y = 0}$.

Nota: **Recuerda que la asíntota horizontal viene dada por la recta $y = e$ y e** es el **valor del término independiente que acompaña a la potencia**.

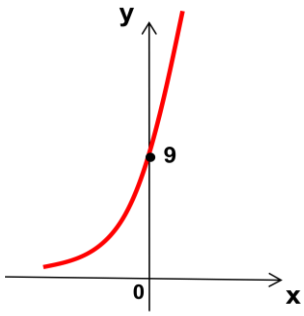
2. Calculas el **cero**:

$3^{x+2} = 0$ **No tiene**, una **potencia** de base **positiva**, nunca es igual a **cero**.

Para dar mayor precisión a la gráfica, calculas el **intercepto** con "**y**":

$$y = 3^{0+2} = 3^2 = \mathbf{9}$$

3. Ubicas el **intercepto con el eje "y"** en el sistema de coordenadas y **trazas** la gráfica, teniendo en cuenta que la asíntota horizontal coincide con el eje "***x***" y que la gráfica **asciende** de izquierda a derecha **porque la base de la potencia es mayor que 1**.



Propiedades:

♦ **Dominio**: $\{x \in \mathbb{R}\}$

♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦ **Imagen**: $\{y \in \mathbb{R}: y > 0\}$

♦ **Inyectiva**: sí

♦ **Cero**: no tiene

♦ **Intercepto con "y"**: $y = 0$

♦ **Monotonía**: creciente

♦ **Signos**: (**+**) x$\in \mathbb{R}$ o positiva en todo su dominio

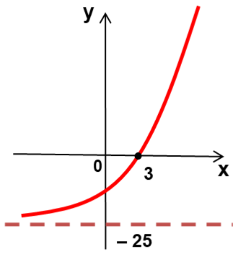
¿Cómo escribir la ecuación de una función exponencial?

Para escribir la ecuación de una función exponencial, debes tener en cuenta qué información te brinda el ejercicio. A continuación, te proponemos algunas ideas.

Ejemplos:

A continuación aparecen las gráficas de varias funciones exponenciales. Escribe en cada caso su ecuación.

a) $y = 5^{x+d} + e$



Solución:

1. Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros d y e.

- ✓ De la **gráfica** se puede obtener directamente solo el valor de **b**, que es por donde pasa la **asíntota horizontal** $e = -25$
- ✓ Para hallar el valor de d, debes utilizar al menos un **punto** de la gráfica. En este caso, te ofrecen el punto de coordenadas $(3\,;\ 0)$.

♦ Hallas d:

- Sustituyes en la ecuación el valor de e:

$$y = 5^{x+d} - 25$$

- Sustituyes en la ecuación las **coordenadas** del **punto** $(\mathbf{3}\,;\ \mathbf{0})$:

$$0 = 5^{3+d} - 25$$

- Resuelves la ecuación obtenida:

$5^{3+d} = 25$ (transpones – 25)

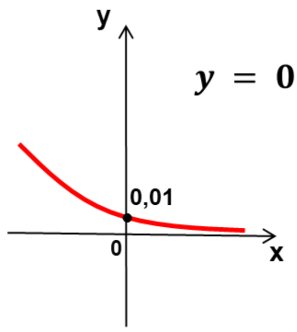
$5^{3+d} = 5^2$ (expresas 25 como potencia de base 5)

$3 + d = 2$ (igualas los exponentes)

$d = -1$ (despejas y reduces)

3. Escribes la ecuación: $y = 5^{x-1} - 25$.

b)



Solución:

1. Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros d y e.

✓ De la **gráfica** se puede obtener directamente solo el valor de e, que es por donde pasa la **asíntota horizontal**.
Como la gráfica **no** corta al eje "**x**", la **asíntota horizontal** está sobre dicho eje.

$$e = 0$$

✓ Para hallar el valor de d, debes utilizar al menos un **punto** de la gráfica. En este caso, te ofrecen el punto de coordenadas $(0\,;\ 0{,}01)$.

♦ Hallas d:

- Sustituyes en la ecuación el valor de e:

$$y = 0{,}1^{x+d}$$

- Sustituyes en la ecuación las **coordenadas** del **punto** (**0** ; **0,01**):

$$0{,}01 = 0{,}1^{0+d}$$

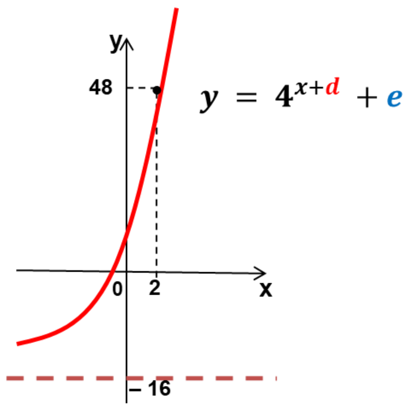
- Resuelves la ecuación obtenida:

$0{,}1^{d} = 0{,}1^{2}$ (expresas 0,01 como potencia de base 0,1)

$d = 2$ (igualas los exponentes)

2. Escribes la ecuación: $y = 0{,}1^{x+2}$.

c)



Solución:

1. Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{e}$.

- ✓ De la **gráfica** se puede obtener directamente solo el valor de $\boldsymbol{e}$, que es por donde pasa la **asíntota horizontal**.

$$\boldsymbol{e} = -\ \mathbf{16}$$

- ✓ Para hallar el valor de $\boldsymbol{a}$, debes utilizar al menos un **punto** de la gráfica. En este caso, te ofrecen el punto de coordenadas $(2\ ;\ 48)$.

  - ♦ Hallas $\boldsymbol{d}$:

    - Sustituyes en la ecuación el valor de $\boldsymbol{e}$:

$$y = 4^{x+\boldsymbol{d}} - \mathbf{16}$$

    - Sustituyes en la ecuación las **coordenadas** del **punto** $(\mathbf{2}\ ;\ \mathbf{48})$:

$$48 = 4^{2+\boldsymbol{d}} - \mathbf{16}$$

    - Resuelves la ecuación obtenida:

$4^{2+\boldsymbol{d}} = \mathbf{16} + 48$ (transpones **– 16**)

$4^{\,2+\boldsymbol{d}} = 64$ (adicionas)

$4^{2+d} = 4^3$ (expresas 64 como potencia de base 4)

$2 + d = 3$ (igualas los exponentes)

$d = 1$ (despejas y reduces)

3. Escribes la ecuación: $y = 4^{x+1} - 16$

Otro tipo de ejercicio importante que debes saber resolver es el siguiente:

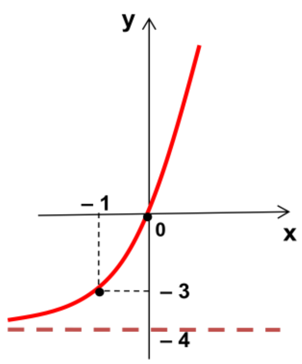
Ejemplo: En el sistema de coordenadas aparece representada una función ***h*** de la forma $h(x) = 4^{x+d} + e$.

Marca con una X la respuesta correcta:

a) La ecuación de ***h*** es:

__ $h(x) = 4^{x+1} + 4$ __ $h(x) = 4^{x+1} - 4$

__ $h(x) = 4^{x-1} + 4$ __ $h(x) = 4^{x-1} - 4$



b) De la función ***h*** se puede afirmar que:

__ es impar

__ tiene imagen $\{y \in \mathbb{R}: y \geq -4\}$

__ en el intervalo $-1 \leq x < 0$ es negativa

__ es monótona decreciente

c) Para que el par $(1\,;\, y_0)$ pertenezca a la función h, el valor de y_0 tiene que ser:

__ 4 __ 12 __ 14 __ – 3

Solución:

a) $h(x) = 4^{x+1} - 4$.

De la gráfica se obtiene que $e = -\,4$, que es el valor de la asíntota horizontal.

La ecuación toma la forma: $y = 4^{x+d} - 4$

Para hallar el valor de d, debes **sustituir** el par $(-\,1\,;\,-\,3)$ en la ecuación:

$-\,\mathbf{3} = 4^{-1+d} - 4$ (sustituyes el par)

$4^{-1+d} = 4 - 3$ (transpones el – 4)

$4^{-1+d} = 1$ (reduces términos semejantes)

$4^{-1+d} = 4^0$ (expresas 1 en base 4)

$-\,1 + d = 0$ (igualas los exponentes)

$d = 1$ (despejas d)

Nota: Otra forma de marcar la ecuación correcta es el siguiente:

Tomas el **par** $(-1\,;-3)$ de la gráfica y **verificas** a cuál de las ecuaciones **satisface**.

Por ejemplo:

Compruebas en la ecuación:

$h(x) = 4^{x+1} + 4$

$h(-1) = 4^{-1+1} + 4 = 4^{0} + 4 = 1 + 4 = 5$ → no da **– 3**.

$h(x) = 4^{x+1} - 4$

$h(-1) = 4^{-1+1} - 4 = 4^{0} - 4 = 1 - 4 = -3$ → da **– 3**.

Y así, con las otras dos.

Si te sabes que el valor de b es **– 4**, solo realizas este procedimiento en las ecuaciones con **– 4** detrás.

b) En el intervalo $-1 \leq x < 0$ es **negativa**.

A pesar de que no es el **intervalo completo**, la proposición es cierta, ya que te preguntan en ese intervalo más pequeño, no de manera general.

Las otras no son, ya que:

- La gráfica **no** es **simétrica** respecto al **origen de coordenadas.**
- La imagen es $\{y \in \mathbb{R}: y > -4\}$

- es monótona **creciente**.

c) 12.

Calculas $\boldsymbol{h}(1)$: $\boldsymbol{h}(1) = 4^{1+1} - 4 = 4^2 - 4 = 16 - 4 = \mathbf{12}$

Resumiendo:

Para escribir la **ecuación** de una **función exponencial**:

1. Si conoces el valor de la base, la **asíntota horizontal**, o sea $\boldsymbol{e}$, y un **punto** de la **gráfica**, puedes escribirla sustituyendo en la ecuación para despejar el parámetro $\boldsymbol{d}$.

2. Si conoces **dos puntos** de la **gráfica** y la **base**, sustituyes en la ecuación las **coordenadas** de ambos puntos y **resuelves** el sistema planteado.

3. Si conoces el valor del parámetro $\boldsymbol{d}$, la **asíntota horizontal**, o sea $\boldsymbol{e}$ y un **punto** de la **gráfica**, puedes hallar la base, sustituyendo en la ecuación y resolviendo la ecuación formada.

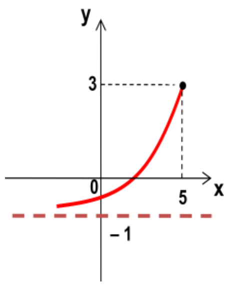
Funciones exponenciales con dominio restringido

En ocasiones encontrarás ejercicios sobre las funciones exponenciales con **dominio restringido**.

¿Qué implicaciones tiene esta situación al resolverlos?

En estos casos, se hace la **representación gráfica** de solo una **parte** de la **curva** y algunas **propiedades** cambian respecto a las de la función con su dominio sin restricciones.

Ejemplo: En la gráfica aparece representada una función $\boldsymbol{p}$ cuya ecuación tiene la forma $\boldsymbol{p}(x) = 2^{x+d} + e$, definida para $x \in (-\infty\,;\,5]$.



1.1. Completa los espacios en blanco:

a) La ecuación de $\boldsymbol{p}$ es ________.

Solución:

● Hallas el valor de $\boldsymbol{e}$:

Asíntota horizontal: $\boldsymbol{y} = -\,\mathbf{1}$

Luego, $\boldsymbol{e} = -\,\mathbf{1}$

● Hallas el valor de $\boldsymbol{d}$:

$\boldsymbol{e} = -\,\mathbf{1}$ y el punto $(\mathbf{5}\,;\,\mathbf{3})$

$y = 2^{x+d} - 1$ (sustituyes $\boldsymbol{e}$)

$3 = 2^{5+d} - 1$ (sustituyes las coordenadas del punto)

$4 = 2^{5+d}$ (transpones el – 1 y adicionas)

$2^2 = 2^{5+d}$ (expresas 4 en base 2)

$2 = 5 + d$ (igualas los exponentes)

$\boldsymbol{d = -3}$ (transpones el 5 y sustraer)

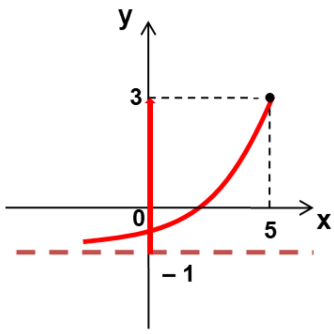
- Escribes la ecuación:

R/ $p(x) = 2^{x-3} - 1$.

b) El conjunto imagen de ***p*** es

________.

R/ $\{y \in \mathbb{R}: -1 < y \leq 3\}$



Nota: El **3** se **incluye**, porque se obtiene para $x = 5$ que es un **elemento** del **dominio**, el **– 1** **no**, porque es el valor de la **asíntota horizontal**.

c) El cero de ***p*** es ________.

R/ x = 3.

$0 = 2^{x-3} - 1$ (sustituyes y por cero)

$2^{x-3} = 1$ (transpones el – 1)

$2^{x-3} = 2^0$ (expresas 1 como potencia de base 2)

$x - 3 = 0$ (igualas los exponentes)

$x = 3$ (obtienes la x)

1.2. Marca con una X la respuesta correcta:

a) ___ La función ***p*** es positiva para $0 < x \leq 3$.

b) ___ La función ***p*** es impar.

c) ___ La gráfica corta al eje de las ordenadas en $y = -\frac{7}{8}$.

d) ___ La función no tiene valor máximo.

R/ La gráfica corta al eje de las ordenadas en $y = -\frac{7}{8}$.

El **intercepto** con **"y"** se obtiene dando valor **0** a la **x** en la ecuación.

$y = 2^{0-3} - 1$ (sustituyes x por cero)

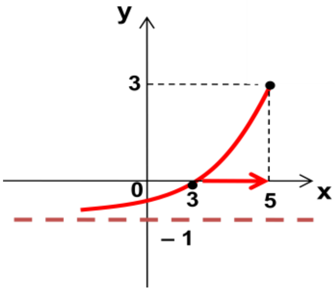
$y = 2^{-3} - 1$ (efectúas la sustracción)

$y = \frac{1}{8} - 1$ (efectúas la potencia)

$\boldsymbol{y = -\frac{7}{8}}$ (efectúas la sustracción)

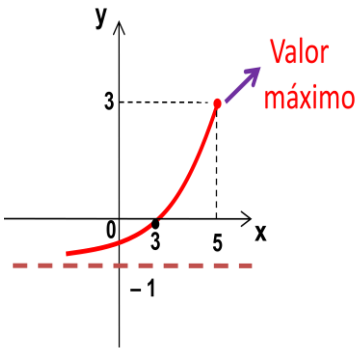
Las demás opciones no son, ya que:

- La función ***p*** es positiva para **3** < x ≤ **5**, porque los **intervalos** se toman por las **abscisas**.



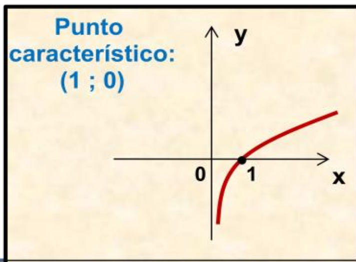
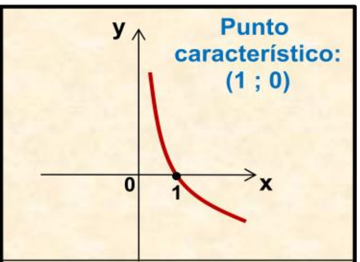
- La función ***p*** **no** es impar, ya que **no** es **simétrica** respecto al **origen** de coordenadas.

- La función tiene **valor máximo** y = **3**, ya que al tener **dominio restringido** y ser **x = 5** un **elemento** del dominio, la **gráfica** está **limitada** por la **derecha**.

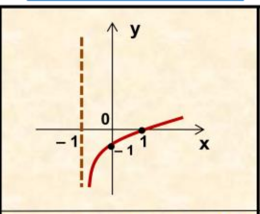
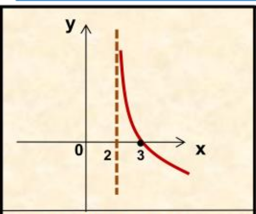
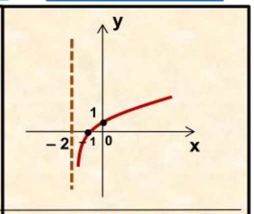


Función logarítmica

Analicemos la función **logarítmica**, (sin desplazamiento), su **gráfico** y **propiedades.**

Función logarítmica	$y = \log_a x$; $a > 1$	$y = \log_a x$; $0 < a < 1$
		
Dominio	$\{x \in \Re : x > 0\}$	$\{x \in \Re : x > 0\}$
Imagen	$\{y \in \Re\}$	$\{y \in \Re\}$
Cero	$x = 1$	$x = 1$
Monotonía	creciente	decreciente
Signos	positiva: $x > 1$ negativa: $0 < x < 1$	positiva: $0 < x < 1$ negativa: $x > 1$
Paridad	No es par ni impar	No es par ni impar
Inyectiva	Sí	Sí
Intercepto con "y"	No tiene	No tiene
Asíntotas	A.V.: $x = 0$	A.V.: $x = 0$

Observa algunos ejemplos de la función **logarítmica**, (con desplazamiento), su **gráfico** y **propiedades.**

Función logarítmica	$y = \log_2(x+1) - 1$	$y = \log_{0,5}(2x-4) + 1$	$y = \log_2(x+2)$
			
Dominio	$\{x \in \Re: x > -1\}$	$\{x \in \Re: x > 2\}$	$\{x \in \Re: x > -2\}$
Imagen	$\{y \in \Re\}$	$\{y \in \Re\}$	$\{y \in \Re\}$
Cero	$x = 1$	$x = 3$	$x = -1$
Monotonía	creciente	decreciente	creciente
Signos	positiva: $x > 1$ negativa: $-1 < x < 1$	positiva: $2 < x < 3$ negativa: $x > 3$	positiva: $x > -1$ negativa: $-2 < x < -1$
Paridad	No es par ni impar	No es par ni impar	No es par ni impar
Inyectiva	Sí	Sí	Sí
Intercepto con "y"	$y = -1$	No tiene	$y = 1$
Asíntotas	A.V.: $x = -1$	A.V.: $x = 2$	A.V.: $x = -2$

Comentarios:

♦ En las funciones logarítmicas $y = \log_a(x + \boldsymbol{d}) + \boldsymbol{e}$ el punto característico es $(-\boldsymbol{d};\ \boldsymbol{e})$.

Nota: Para obtener el valor de $\boldsymbol{d}$ **cuando en el argumento del logaritmo, la variable *x* tiene coeficiente distinto de 1**, hay dividir el término independiente del argumento por el coeficiente de la variable. Por ejemplo:

$$y = \log_a(2x + 6) + 25 \qquad \boldsymbol{d} = \frac{6}{2} = 3$$

Coeficiente (2) — Término independiente (6)

♦ Las funciones logarítmicas tienen una **asíntota vertical** que es **el valor de la variable para el cual se anula el argumento del logaritmo**, luego:

- ✓ La asíntota vertical pasa por el opuesto de $\boldsymbol{d}$ y está dada por la ecuación $x = -\boldsymbol{d}$
- ✓ El **dominio** está **limitado** y se escribe **mayor** que el valor de la asíntota, o sea, $\boldsymbol{x} > -\boldsymbol{d}$.
- ✓ Si la **asíntota** está a la **izquierda** del eje "**y**", la gráfica corta en un punto a dicho eje, en caso contrario **no tiene intercepto** con él.

♦ La función es **creciente** si la **base de la potencia** es **mayor** que **uno** $(a > 1)$ y **decreciente** si está entre **cero y uno** $(0 < a < 1)$.

♦ La función **no es par ni impar**, es **inyectiva** y su **inversa** es una función **exponencial**.

♦ Para escribir los **signos** se toma como referencia el **cero** de la función y el valor de la **asíntota vertical**, que **no** se incluyen.

¿Cómo esbozar el gráfico de una función logarítmica?

Ejemplos:

a) $y = log_2(x + 4) - 1$

Para esbozar dicho gráfico necesitas:

1. La **asíntota vertical**: $\boldsymbol{x = -4}$**.** (se toma el valor opuesto de d)

2. Calculas el **cero**:

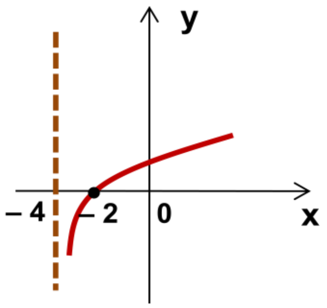
$log_2(x + 4) - 1 = 0$ (sustituyes la ***y*** por cero)

$log_2(x + 4) = 1$ (aíslas el radical)

$x + 4 = 2$ (aplicas la definición)

$\boldsymbol{x = -2}$ (despejas x)

3. Ubicas la asíntota vertical y el cero de la función en el sistema de coordenadas y **trazas** la gráfica teniendo en cuenta que como la base del logaritmo es mayor que 1 asciende de izquierda a derecha.



Propiedades:

♦ **Dominio**: {x∈ℝ: x > – 4}

♦ **Imagen**: {y∈ ℝ }

♦ **Cero**: $x = -2$

♦ **Monotonía**: creciente

♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦ **Inyectiva**: sí

♦ **Intercepto con “y”**: $y = 1$

♦ **Signos**: La función es positiva para $x > -2$ y negativa para $-4 < x < -2$.

b) $y = log_7(2x)$

1. La **asíntota vertical**: $\boldsymbol{x = 0}$. (recuerda que la asíntota vertical es el valor de la variable que anula al argumento del logaritmo)

2. Calculas el **cero**:

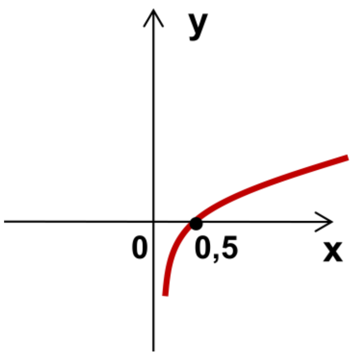
$log_7(2x) = 0$ (sustituyes la ***y*** por cero)

$2x = 7^0$ (aplicas la definición)

$2x = 1$

$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$ (despejas ***x***)

3. Ubicas el cero de la función en el sistema de coordenadas, **trazas** la gráfica teniendo en cuenta que la asíntota vertical coincide con el eje "y" y que la base del logaritmo es mayor que 1 por tanto, asciende de izquierda a derecha.



Propiedades:

♦ **Dominio**: {x∈ ℝ: x > 0,5} ♦ **Paridad**: no es par ni impar

♦**Imagen**: {y∈ ℝ }

♦ **Inyectiva**: sí

♦**Cero**: $x = 0,5$

♦**Intercepto con "y"**: No tiene

♦**Monotonía**: creciente

♦ **Signos**: la función es positiva para $x > 0,5$ y negativa para $0 < x < 0,5$.

c) $y = log_{0,3}(x - 1)$

1. La **asíntota vertical**: $\boldsymbol{x = 1}$ (se toma el opuesto de d)

2. Calculas el **cero**:

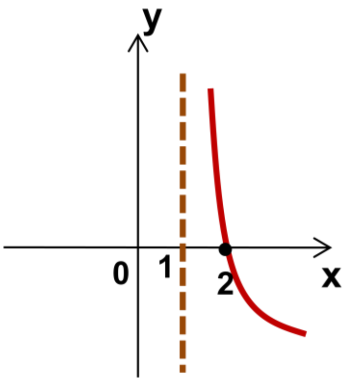
$log_{0,3}(x - 1) = 0$ (sustituyes la ***y*** por cero)

$x - 1 = 0,3^0$ (aplicas la definición)

$x - 1 = 1$

$\boldsymbol{x = 2}$ (despejas ***x***)

3. Ubicas la asíntota vertical y el cero en el sistema de coordenadas y **trazas** la gráfica, teniendo en cuenta que como la base del logaritmo está entre 0 y 1 la gráfica desciende de izquierda a derecha.



Propiedades:

- **Dominio**: $\{x \in R: x > 1\}$
- **Paridad**: no es par ni impar
- **Imagen**: $\{y \in R\}$
- **Inyectiva**: sí
- **Cero**: x = 2
- **Intercepto con "y"**: No tiene
- **Monotonía**: decreciente
- **Signos**: (+) $1 < x < 2$; (–) $x > 2$

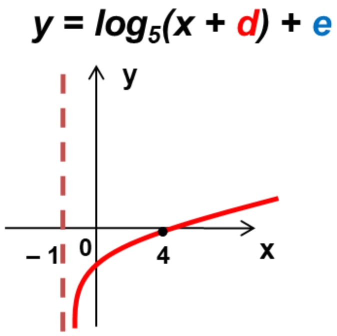
¿Cómo escribir la ecuación de una función logarítmica?

Para escribir la ecuación de una función logarítmica, debes tener en cuenta qué información te brinda el ejercicio. A continuación, te proponemos algunas ideas.

Ejemplos:

A continuación aparecen las gráficas de varias funciones logarítmicas. Escribe en cada caso su ecuación.

a)



Solución:

Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros d y e.

1. Determinas los valores de d y e.

✓ De la **gráfica** se puede obtener directamente solo el valor de d, que es el opuesto del valor por donde pasa la **asíntota vertical**.

$$d = 1$$

✓ Para hallar el valor de e, debes utilizar al menos un **punto** de la gráfica. En este caso, te ofrecen el punto de **coordenadas** $(4\,;\,0)$.

♦ Hallas e:

• Sustituyes en la ecuación el valor de d:

$$y = log_5(x + \mathbf{1}) + \boldsymbol{e}$$

- Sustituyes en la ecuación las **coordenadas** del **punto** $(\mathbf{4}\,;\,\mathbf{0})$:

$$0 = log_5(4 + \mathbf{1}) + \boldsymbol{e}$$

- Calculas:

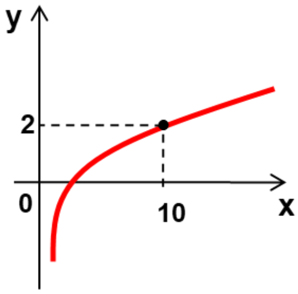
$0 = log_5 5 + \boldsymbol{e}$ (adicionas en el argumento)

$0 = 1 + \boldsymbol{e}$ (calculas el logaritmo)

$\boldsymbol{e} = -1$ (despejas $\boldsymbol{e}$)

3. Escribes la ecuación: $y = log_5(x + \mathbf{1}) - \mathbf{1}$**.**

b) **y = log (x + d) + e**



Solución:

Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{e}$.

1. Determinas los valores de $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{e}$.

✓ De la **gráfica** se puede obtener directamente solo el valor de $\boldsymbol{d}$, que es el opuesto del valor por donde pasa la **asíntota vertical**. Como la gráfica **no** corta al eje "**y**", la **asíntota vertical** está sobre dicho eje y por tanto:

$$\boldsymbol{d} = \mathbf{0}$$

✓ Para hallar el valor de $\boldsymbol{b}$, debes utilizar al menos un **punto** de la gráfica. En este caso, te ofrecen el punto de coordenadas $(10\,;\,2)$.

♦ Hallas $\boldsymbol{e}$:

- Sustituyes en la ecuación el valor de $\boldsymbol{a}$:

$$y = \log(x + \mathbf{0}) + \boldsymbol{e}$$

- Sustituyes en la ecuación las **coordenadas** del **punto** $(\mathbf{10}\,;\,\mathbf{2})$:

$$2 = log10 + \boldsymbol{e}$$

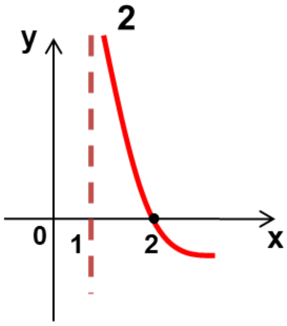
- Calculas:

$2 = 1 + \boldsymbol{e}$ (calculas el logaritmo)

$\boldsymbol{e} = 1$ (despejas $\boldsymbol{e}$)

3. Escribes la ecuación: $y = \log x + \mathbf{1}$.

c) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + d) + e$



Solución:

Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros d y e.

1. Determinas los valores de d y e:

De la **gráfica** se puede obtener directamente solo el valor de **d**, que es el opuesto del valor por donde pasa la **asíntota vertical**.

$$d = -1$$

Para hallar el valor de e, debes utilizar al menos un **punto** de la gráfica. En este caso, te ofrecen el punto de coordenadas $(2\ ;\ 0)$.

♦ Hallas e:

• Sustituyes en la ecuación el valor de d:

$$y = log_{\frac{1}{2}}(x - \mathbf{1}) + \boldsymbol{e}$$

• Sustituyes en la ecuación las **coordenadas** del **punto** (**2** ; **0**):

$$0 = log_{\frac{1}{2}}(2 - \mathbf{1}) + \boldsymbol{e}$$

• Calculas:

$0 = log_{\frac{1}{2}}1 + \boldsymbol{e}$ (sustraes en el argumento)

$0 = 0 + \boldsymbol{e}$ (calculas el logaritmo)

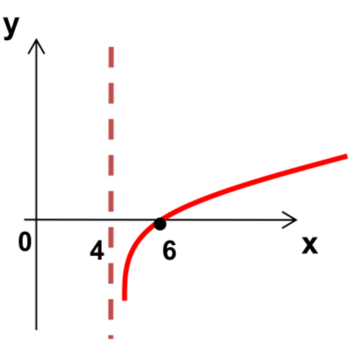
$\boldsymbol{e} = 0$ (obtienes $\boldsymbol{e}$)

3. Escribes la ecuación: $y = log_{\frac{1}{2}}(x - \mathbf{1})$.

Otros tipos de ejercicios importantes que debes saber resolver son los siguientes:

Ejemplo 1: En el sistema de coordenadas aparece representada una función $\boldsymbol{f}$ de la forma

$\boldsymbol{f}(x) = log_2(x + d) + e.$



Marca con una X la respuesta correcta:

a) La ecuación de $\boldsymbol{f}$ es:

___ $\boldsymbol{f}(x) = log_2(x + 4) + 6$

___ $\boldsymbol{f}(x) = log_2(x - 4) + 6$

__ $f(x) = log_2(x - 4) - 1$

__ $f(x) = log_2(x - 6) - 4$

b) De la función f se puede afirmar que:

__ El dominio de f es $\{x \in \mathbb{R}: x \geq 4\}$.

__ La función f es negativa para $4 \leq x \leq 6$.

__ La función f es impar.

__ La gráfica no corta al eje de las ordenadas.

Solución:

a) $f(x) = log_2(x - 4) - 1$

De la **gráfica** se obtiene el valor de a, que te lo da el valor por donde pasa la **asíntota vertical**, con signo **opuesto**. Luego, $d = -4$.

La ecuación toma la forma: $y = log_2(x - \mathbf{4}) + e$

Para hallar el valor de e, debes **sustituir** el par $(6\,;\ 0)$ en la ecuación:

$0 = log_2(6 - \mathbf{4}) + e$ (sustituyes el par)

$0 = log_2 2 + e$ (efectúas el argumento)

$0 = 1 + e$ (calculas el logaritmo)

$e = -1$ (despejas e)

Nota: Otras formas de marcar la ecuación correcta son las siguientes:

1. Calcular el **cero** de cada función y **verificar** dónde da $\mathbf{6}$.

2. Verificar a cuál de las funciones **pertenece** el par $(\mathbf{6}\,;\,\mathbf{0})$.

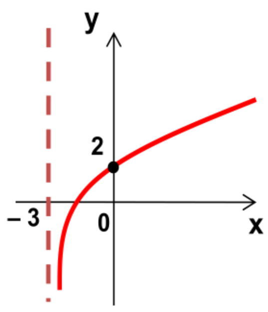
b) La gráfica no corta al eje de las ordenadas.

Las otras no son, ya que:

- El dominio de $\boldsymbol{f}$ es $\{x \in \mathbb{R}: x > 4\}$, **no** admite el **igual**.
- La función $\boldsymbol{f}$ es negativa para $4 < x < 6$, **no** se incluye el **cero** ni la **asíntota**.
- La función $\boldsymbol{f}$ **no** es impar, porque su **gráfica no es simétrica** respecto al **origen de coordenadas**.

Ejemplo 2: En el sistema de coordenadas aparece representada una función $\boldsymbol{g}$ de la forma

$\boldsymbol{g}(x) = log_3(x + d) + e$.



Marca con una X la respuesta correcta:

a) Los valores de $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{e}$, son:

___ $\boldsymbol{d} = -3$ y $\boldsymbol{e} = 1$ ___ $\boldsymbol{d} = 3$ y $\boldsymbol{e} = 1$

__ $\boldsymbol{d} = -3$ y $\boldsymbol{e} = 2$ __ $\boldsymbol{d} = 3$ y $\boldsymbol{e} = 2$

b) De la función $\boldsymbol{g}$ se puede afirmar que:

__ El cero de $\boldsymbol{g}$ es un número entero.

__ La función $\boldsymbol{g}$ es negativa para $-3 < x < 0$.

__ La función $\boldsymbol{g}$ no es impar.

__ Su conjunto imagen es $\{y \in \mathbb{R}: y > -3\}$.

Solución:

a) $\boldsymbol{d} = 3$ y $\boldsymbol{e} = 1$

De la **gráfica** se obtiene el valor de $\boldsymbol{a}$, que te lo da la **asíntota vertical**, con signo **opuesto**. Luego, $\boldsymbol{d} = 3$.

La ecuación toma la forma: $y = log_3(x + \mathbf{3}) + \boldsymbol{e}$

Para hallar el valor de $\boldsymbol{e}$, debes **sustituir** el par $(0\,;\,2)$ en la ecuación:

$2 = log_3(0 + \mathbf{3}) + \boldsymbol{e}$ (sustituyes el par)

$2 = log_3(3) + \boldsymbol{e}$ (efectúas el argumento)

$2 = 1 + \boldsymbol{e}$ (calculas el logaritmo)

$\boldsymbol{e} = 1$ (despejas $\boldsymbol{e}$)

b) La función g no es impar.

Las otras no son, ya que:

- El cero de ***g*** ***no*** es un número entero.

$$0 = log_3(x + \mathbf{3}) + \mathbf{1}$$

$$-1 = log_3(x + \mathbf{3})$$

$$3^{-1} = x + 3$$

$$\frac{1}{3} = x + 3$$

$$x = \frac{1}{3} - 3 = \frac{1-9}{3} = -\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}} \notin \mathbb{Z}$$

- La función ***g*** es negativa para **– 3** < **x** < $-\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}$.

Desde la **asíntota** al **cero**, **sin incluir** ambos extremos.

- Su conjunto imagen es $\{y \in \mathbb{R}\}$.

La **gráfica** barre todo el eje "**y**" hacia arriba y hacia abajo.

Resumiendo:

Para escribir la **ecuación** de una **función logarítmica**:

1. Si conoces el valor de la **base**, la **asíntota vertical**, o sea el opuesto de ***d*****,** y un **punto** de la **gráfica**, puedes escribirla sustituyendo en la ecuación para despejar el parámetro ***e***.

2. Si conoces **dos puntos** de la **gráfica** y la **base**, sustituyes en la ecuación y **resuelves** el sistema planteado.

3. Si conoces el valor del parámetro $\boldsymbol{e}$, la **asíntota vertical**, o sea el opuesto de $\boldsymbol{d}$ y un **punto** de la **gráfica**, puedes hallar la base, sustituyendo en la ecuación y resolviendo la ecuación formada.

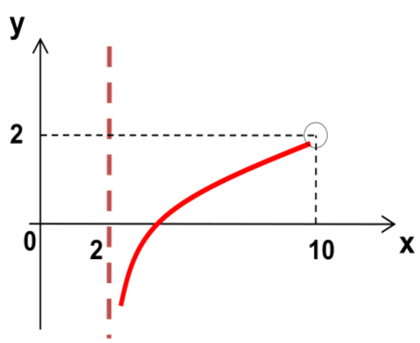
Funciones logarítmicas con dominio restringido

En ocasiones encontrarás ejercicios sobre las funciones logarítmicas con **dominio restringido**.

¿Qué implicaciones tiene esta situación al resolverlos?

En estos casos, se hace la **representación gráfica** de solo una **parte** de la **curva** y algunas **propiedades** cambian respecto a las de la función con su dominio sin restricciones.

Ejemplo: En la figura aparece representada una función $\boldsymbol{h}$ cuya ecuación tiene la forma $\boldsymbol{h}(x) = log_2(x + d) + e$, definida en un subconjunto de los números reales.



Marca con una X la respuesta correcta:

a) Los valores de $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{e}$ son:

__ $\boldsymbol{d} = 2$ y $\boldsymbol{e} = -1$

__ $d = -2$ y $e = -1$

__ $d = -2$ y $e = 2$

__ $d = 2$ y $e = 2$

R/ $d = -2$ y $e = -1$.

● El valor de d lo da la **asíntota vertical** con **signo opuesto**, luego $d = -2$.

● El valor de e se obtiene por **sustitución**:

$y = log_2(x - 2) + e$ (sustituyes el valor de **a**)

$2 = log_2(10 - 2) + e$ (sustituyes el par (**10** ; **2**))

$2 = log_2 8 + e$ (sustraes en el argumento)

$2 = 3 + e$ (calculas el logaritmo)

$e = -1$ (obtienes e)

b) El dominio de la función es:

__ $\{x \in \mathbb{R}: 2 < x < 10\}$

__ $\{x \in \mathbb{R}: 2 < x \leq 10\}$

__ $\{x \in \mathbb{R}: 2 \leq x \leq 10\}$

__ $\{x \in \mathbb{R}: 2 \leq x < 10\}$

R/ $\{x \in \mathbb{R}: 2 < x < 10\}$

Nota: De la gráfica se observa que los extremos del **intervalo** son los números **2** y **10**. El **2** no se incluye, porque es una **asíntota** y el **10** tampoco, por tener un **círculo sin sombrear** en la gráfica.

c) De la función se puede afirmar que:

__ tiene imagen $y \in (-\infty\,; 2]$.

__ tiene cero $x = 4$.

__ es positiva para $4 \leq x \leq 10$.

__ tiene valor máximo $y = 2$.

R/ Tiene cero $x = 4$.

Las otras no son, porque:

- La imagen es $y \in (-\infty\,; 2)$. El **2** no se incluye porque es la imagen de $\boldsymbol{x = 10}$ que **no pertenece** al **dominio**.
- Es positiva para $4 < x < 10$.

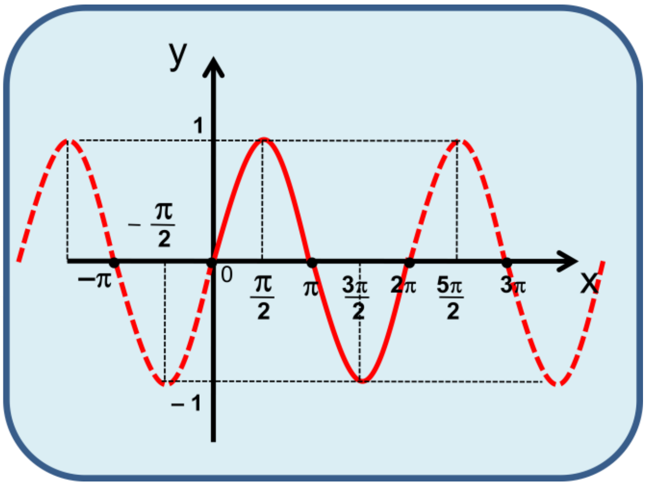
El **4** no se incluye porque es un cero y el **10** tampoco porque **no pertenece** al **dominio**.

- **No** tiene valor máximo, ya que el **2 no** es un **elemento** de la **imagen**, por no ser **10** un **elemento** del **dominio**.

Funciones trigonométricas

Función seno

y = sen x



Propiedades:

♦ **Dominio:** $x \in \mathbb{R}$

♦ **Imagen:** $\{y \in \mathbb{R}: -1 \leq y \leq 1\}$ o $y \in [-1\ ;\ 1]$

♦ **Ceros:** $x = k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

♦ **Monotonía:**

creciente: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

decreciente: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

♦ **Signos: (+)**: $2k\pi < x < \pi + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

(–): $\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

♦ **Paridad:** Impar $\rightarrow$ $sen(-x) = sen\, x$

♦ **Inyectiva:** no

♦ **Valor máximo:** $y = 1$

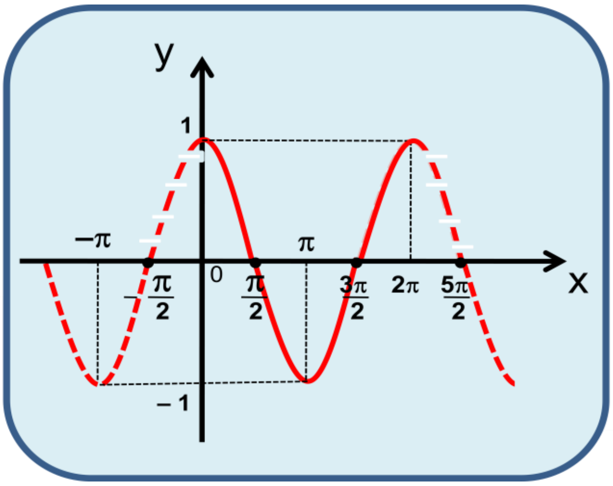
♦ **Puntos de máximo:** $\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ k \in Z$

♦ **Valor máximo:** $y = -1$

♦ **Puntos de mínimo:** $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ k \in Z$

♦ **Período: es periódica de período 2π**

Función coseno



y = cos x

Propiedades:

♦ **Dominio:** $x \in \mathbb{R}$

♦ **Imagen:** $\{y \in \mathbb{R}: -1 \leq y \leq 1\}$ o $y \in [-1\ ;\ 1]$

♦ **Ceros:** $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $k \in Z$

♦ **Monotonía:**

creciente: $-\pi + 2k\pi < x < 2k\pi$; $k \in Z$

decreciente: $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$; $k \in Z$

♦ **Signos: (+)**: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in Z$

(–): $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in Z$

♦ **Paridad:** par $\rightarrow$ $\cos(-x) = \cos x$

♦ **Inyectiva:** no

♦ **Valor máximo:** $y = 1$

♦ **Puntos de máximo:** $2k\pi$; $k \in Z$

♦ **Valor máximo:** $y = -1$

♦ **Puntos de mínimo:** $(2k + 1)\pi$; $k \in Z$

♦ **Período:** **es periódica de período 2π**

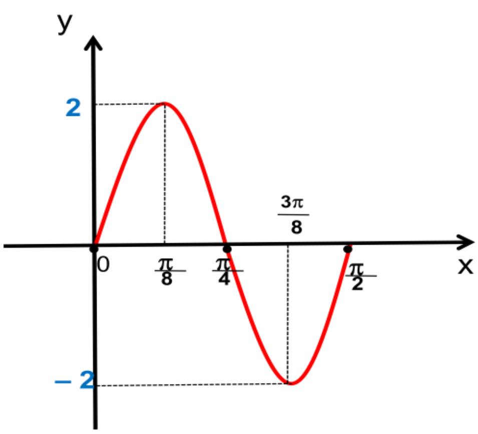
Nota: Para las funciones $y = a sen\ bx$ y $y = a cos\ bx$ se cumple que:

1. El parámetro a influye en la **imagen** $-a \leq y \leq a$ y en los valores **máximo** y **mínimo** de estas funciones.

2. El parámetro b influye en los **ceros** y en el **período principal** que se calcula por la fórmula:

$$P.P = \frac{2\pi}{b}$$

Ejemplo 1: Escribir la ecuación y decir las propiedades de la función de la forma $y = a sen\ bx$, representada en el intervalo $x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.



Solución:

Para escribir la ecuación es necesario determinar los valores de a y b:

1. El valor de a se obtiene de la **gráfica**.

$a = 2$, ya que la gráfica va desde **– 2** hasta **2** en el eje "y".

2. El valor de b, se halla por la fórmula del **período principal**.

De la gráfica se observa que el **período principal** de la función representada es $\frac{\pi}{2}$, ya que muestra una gráfica completa de la función **seno**.

P.P $= \frac{2\pi}{b}$ (planteas la fórmula)

$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{b}$ (sustituyes el **período principal**)

$b = \frac{2.2\pi}{\pi}$ (despejas **b**)

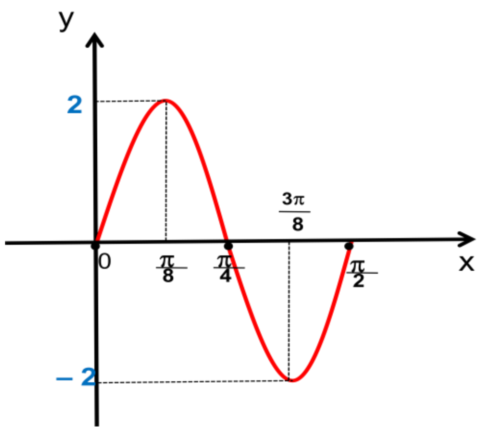
$b = 4$ (simplificas)

3. Escribes la ecuación: $y = 2sen\,4x$

Propiedades:

♦ **Dominio:** $\{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$

Los **extremos** se **incluyen**, por lo que se admiten en el intervalo.



♦**Imagen:** $\{y \in \mathbb{R}: -2 \leq y \leq 2\}$

La gráfica va de – **2** a **2** en el eje "**y**"

♦**Ceros:** $x = 0 \; ; \frac{\pi}{4} \; ; \frac{\pi}{2}$

La gráfica corta al eje "**x**" en esos **tres** valores.

♦**Monotonía:**

creciente: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{8}$ y $\frac{3\pi}{8} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

decreciente: $\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{3\pi}{8}$

Los **extremos** de cada intervalo siempre **se incluyen**.

♦**Signos: (+)**: $0 < x < \frac{\pi}{4}$

(–): $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

Los **extremos** de cada intervalo **no se incluyen**, ya que son **ceros** de la función y en esos valores la función es **neutra**.

♦**Paridad:** no es par ni impar

En este caso, la gráfica representada **no** es **simétrica** respecto al eje "**y**", ni al **origen** de coordenadas.

♦**Inyectiva:** no

Al trazar rectas **paralelas** al eje "**x**", varias cortan a la gráfica en **dos puntos**.

♦**Valor máximo: y** = **2**

Mayor valor que toma la **imagen (y)**.

♦**Valor máximo: y** = – **2**

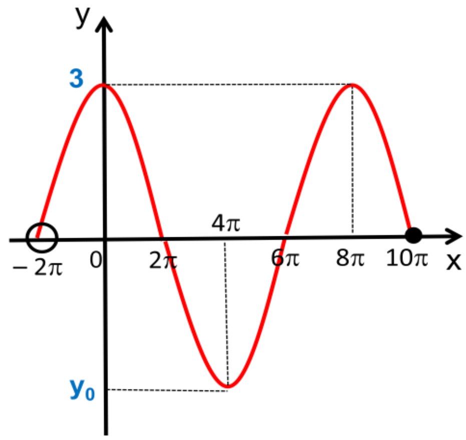
Menor valor que toma la **imagen (y)**.

♦ **Período principal:** $\frac{\pi}{2}$

Una gráfica **completa** de esta función comienza en **0** y termina en $\frac{\pi}{2}$.

Ejemplo 2: Escribir la ecuación y decir las propiedades de la función de la forma $y = a\cos bx$, representada en un subconjunto de los números reales.

Solución:



Para escribir la ecuación es necesario determinar los valores de a y b:

1. El valor de a se obtiene de la **gráfica**.

$a = 3$, ya que la **mayor ordenada** es **3**.

2. El valor de b, se halla por la fórmula del **período principal**.

De la gráfica se observa que el **período principal** de la función representada es **8π**, ya que muestra una gráfica completa de la función **coseno**.

$\text{P.P} = \dfrac{2\pi}{b}$ (planteas la fórmula)

$8\pi = \dfrac{2\pi}{b}$ (sustituyes el **período principal**)

$b = \dfrac{2\pi}{8\pi}$ (despejas **b**)

$b = \dfrac{1}{4}$ (simplificas)

3. Escribes la ecuación: $y = 3cos\,\frac{1}{4}x$

Propiedades:

♦ **Dominio:** $\{x \in R: -2\pi < x \leq 10\pi\}$

-2π no se **incluyen**, porque tiene un círculo **sin sombrear**, mientras **10π** se **incluye**, porque está **sombreado**.

♦**Imagen:** $\{y \in \mathbb{R}: -3 \leq y \leq 3\}$

$y_0 = -3$, porque los extremos tienen que tener igual **valor absoluto**.

La gráfica va de – **3** a **3** en el eje “**y**”

♦**Ceros:** 2π ; 6π y 10π

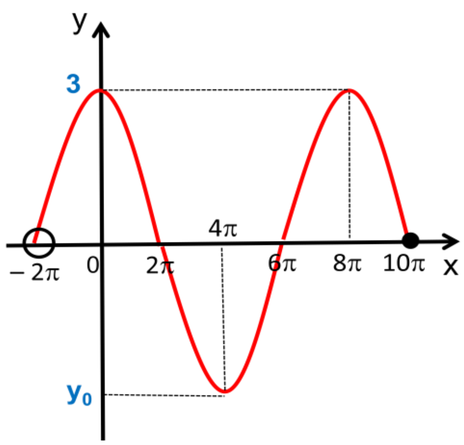
La gráfica corta al eje “**x**” en esos **tres** valores, que están dentro del **dominio**. -2π **no** es un **cero**, por no estar **sombreado** y no forma parte del **dominio**.

♦**Monotonía:**

creciente: $-2\pi < x \leq 0$ y $4\pi \leq x \leq 8\pi$

decreciente: $0 \leq x \leq 4\pi$ y $8\pi \leq x \leq 10\pi$

Los **extremos** de cada intervalo



siempre **se incluyen** (siempre que pertenezcan al dominio).

♦**Signos: (+)**: $-2\pi < x < 2\pi$ y $6\pi < x < 10\pi$

(–): $2\pi < x < 6\pi$

Los **extremos** de cada intervalo **no se incluyen**, ya que son **ceros** de la función y en esos valores la función es **neutra**.

♦**Paridad:** no es par ni impar

En este caso, la gráfica representada **no** es **simétrica** respecto al eje "**y**", ni al **origen** de coordenadas.

♦**Inyectiva:** no

Al trazar rectas **paralelas** al eje "**x**", varias cortan a la gráfica en **dos puntos**.

♦**Valor máximo:** $y = 3$

Mayor valor que toma la **imagen (y)**.

♦**Valor mínimo:** $y = -3$

Menor valor que toma la **imagen (y)**.

♦ **Período principal: 8π**

Una gráfica **completa** de esta función comienza en **0** y termina en **8π**.

Ejemplo 3: Representa gráficamente la función de ecuación $f(x) = 5sen\ 2x$, en el intervalo $x \in [0 ; \pi]$.

Solución:

Para representar la función, hay que determinar el **período principal** y el **valor máximo** y **mínimo**.

♦ $a = 5$, porque es el **coeficiente** del **seno**.

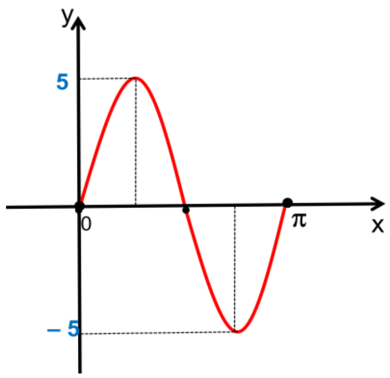
♦ Para hallar el **período principal**.

P.P = $\frac{2\pi}{\mathbf{b}}$ (planteas la fórmula)

P.P = $\frac{2\pi}{\mathbf{2}}$ (sustituyes **b**)

P.P = π (simplificas)

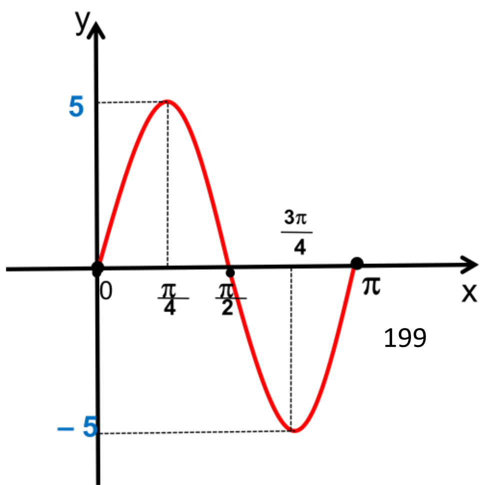
♦ Ubicas los valores hallados y trazas la gráfica.



♦ Ubicas los restantes valores.

Primera vía:

● La mitad entre 0 y π es $\frac{\pi}{2}$.



- La mitad entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ es $\frac{\pi}{4}$.

- La mitad entre $\frac{\pi}{2}$ y π es $\frac{3\pi}{4}$.

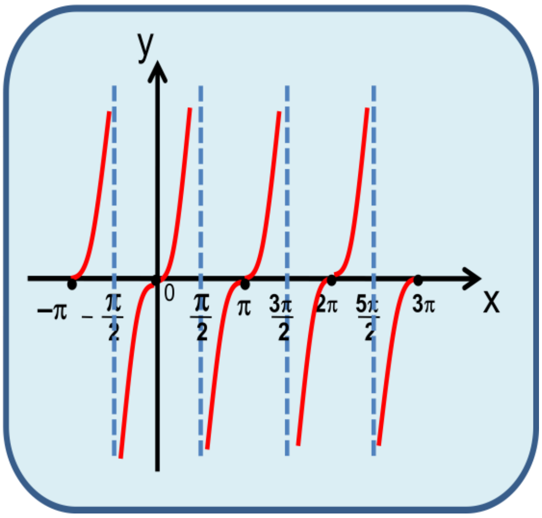
Segunda vía:

Como para hallar el **período principal** de la función se **dividió** por **2** a **2π**, cada **ángulo axial** de la función original se **divide** también por **2**.

- Para el ángulo **0**: $\frac{0}{2} = 0$
- Para el ángulo $\frac{\pi}{2}$: $\frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$
- Para el ángulo π: $\frac{\pi}{2}$
- Para el ángulo $\frac{3\pi}{2}$: $\frac{\frac{3\pi}{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}$

Función tangente

y = tan x



Propiedades:

♦ **Dominio:**

$\{x \in \mathbb{R}: x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$

♦ **Imagen:** $\{y \in \mathbb{R}\}$

♦ **Ceros:** $x = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

♦ **Monotonía: No** es **monótona**, en cada intervalo que no contiene puntos de **indefinición** es **creciente**.

♦ **Signos: (+)**: $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

(–): $\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

♦ **Paridad:** impar $\rightarrow$ $\tan(-x) = -\tan x$

♦ **Inyectiva:** no

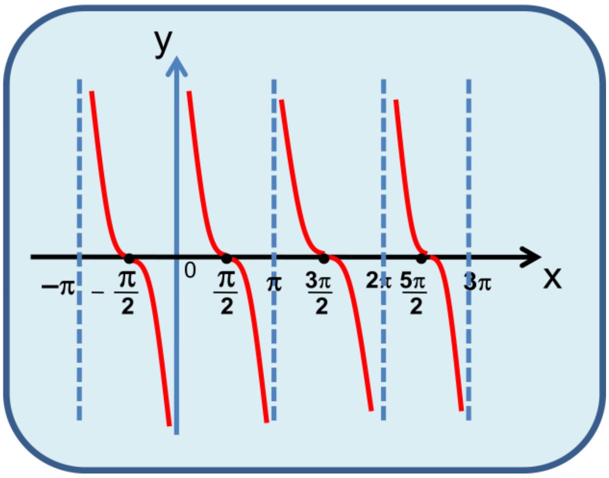
♦ **Valor máximo: no tiene**

♦ **Valor máximo: no tiene**

♦ **Período: es periódica de período π**

Función cotangente

y = cot x



Propiedades:

♦ **Dominio:**

$\{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}\}$

♦ **Imagen:** $\{y \in \mathbb{R}\}$

♦ **Ceros:**

$x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \; ; k \in \mathbb{Z}$

♦ **Monotonía: No** es **monótona**, en cada intervalo que no contiene puntos de **indefinición** es **decreciente**.

♦ **Signos: (+)**: $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \; ; k \in Z$

(–): $\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi \; ; k \in Z$

♦ **Paridad:** impar $\rightarrow$ $\cot(-x) = -\cot x$

♦ **Inyectiva:** no

♦ **Valor máximo: no tiene**

♦ **Valor máximo: no tiene**

♦ **Período: es periódica de período π**

Nota: Para las funciones $y = a\tan bx$ y $y = a\cot bx$ **no** se aplica lo analizado para el **seno** y el **coseno**.

De particular interés resultan todas estas funciones que aquí se han resumido pues tienen gran aplicación en la vida cotidiana.

Ejemplo 1: Una compañía de teléfonos celulares tiene inicialmente 7 000 usuarios, y el número de éstos crece alrededor de 4 000 al año. Sabiendo que:

t: representa los años de creada la empresa.

C: cantidad de usuarios, en miles, al cabo de los años

Marca la respuesta correcta:

a) La ecuación de la función lineal que describe este proceso es:

__ $C = 7t + 4$ __ $C = 4t + 7$

__ $C = t + 7$ __ $C = 4t + 7\,000$

Solución:

- Como la compañía comenzó con **7 000** usuarios, el valor de n sería igual a **7 000**, pero como **C** está en **miles**, entonces $n = 7$.
- Como la cantidad de usuarios crece en **4 000** al año, ese valor representa la **pendiente**, o sea, $m = 4$.

R/ $C = 4t + 7$.

b) De continuar con igual ritmo, la compañía alcanzará los 35 000 usuarios al cabo de:

__ 2 años __ 5 años __ 7 años __ 10 años

Solución:

• Conoces la cantidad de usuarios C y debes determinar el tiempo t. Luego, sustituyes en la ecuación y despejas t.

$35 = 4t + 7$ (sustituyes **C**)

$35 - 7 = 4t$ (transpones el 7)

$28 = 4t$ (sustraes)

$t = 7$ (despejas y hallas el cociente)

R/ Al cabo de **7 años**.

Ejemplo 2: Un niño construye figuras geométricas usando palitos de madera de igual tamaño. Para cada lado utiliza un palito. Las figuras que construye las coloca en fila, como se observa en la figura:

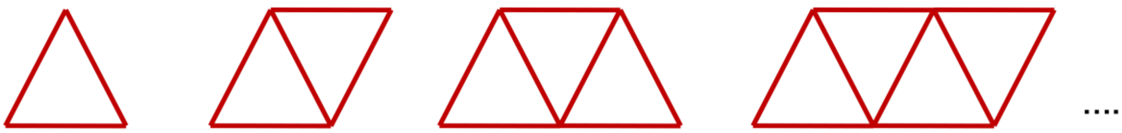


Fig. 1 **Fig. 2** **Fig. 3** **Fig. 4**

Marca la respuesta correcta:

a) Si x representa el lugar de la figura en la fila, entonces la ecuación que relaciona la cantidad de palitos utilizadas por cada figura es:

__ $y = 2x + 1$ __ $y = x + 3$ __ $y = 3x + 2$ __ $y = x + 2$

Solución:

Primera vía

Figura	Número de palitos	Relación
1	3	$2 \cdot 1 + 1$
2	5	$2 \cdot 2 + 1$
3	7	$2 \cdot 3 + 1$

Como puedes observar, la **cantidad** de **palitos** se obtiene **multiplicando** el lugar que ocupa cada figura por **2** y **adicionándole** **1** al producto. Luego, la ecuación que relaciona la cantidad de palitos utilizadas por cada figura es $y = 2x + 1$.

Segunda vía:

De la tabla anterior obtienes **pares ordenados**:

$(1 \,;\, 3)\,;\,(2 \,;\, 5)\,;\,(3 \,;\, 7)$, etc.

Escribes la ecuación de la **función lineal** utilizando dos de ellos: $(1 \,;\, 3)\,;\,(2 \,;\, 5)$

- Hallas la **pendiente**: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$m = \frac{5-3}{2-1} = 2$$

- Determinas el valor de **n** en la ecuación $y = mx + n$

$y = 2x + n$ (sustituyes el valor de **m**)

$3 = 2 \cdot 1 + n$ (sustituyes las coordenadas de un punto)

$3 = 2 + n$ (efectúas el producto)

$n = 1$ (transpones y reduces)

- Escribes la ecuación $y = 2x + 1$

Tercera vía:

Compruebas a cuál de las ecuaciones propuestas **satisfacen** al menos **dos** de los **pares ordenados**:

Para $(\mathbf{1}\,;\,\mathbf{3})$: $y = 2 \cdot \mathbf{1} + 1 = \mathbf{3}$

Para $(\mathbf{2}\,;\,\mathbf{5})$: $y = 2 \cdot \mathbf{2} + 1 = \mathbf{5}$

Para $(\mathbf{3}\,;\,\mathbf{7})$: $y = 2 \cdot \mathbf{3} + 1 = \mathbf{7}$

En cada caso, el **par** satisface la primera ecuación, ya que se obtiene la **ordenada** del par seleccionado.

b) La cantidad de palitos que se utilizarán para construir la figura 100 es:

__ 103 __ 201 __302 __ 102

Solución:

Te piden la **cantidad** de **palitos** y conoces el **lugar** de la **figura**, por lo que sustituyes en la ecuación y calculas:

$$y = 2 \cdot \mathbf{100} + 1 = \mathbf{201}$$

R/ 201.

c) La figura que se construirá con 151 palitos ocupará en la fila el lugar:

__ 50 __ 149 __ 148 __ 75

Solución:

Te piden el **lugar** de la figura y conoces la **cantidad** de **palitos** que la forman, por lo que sustituyes en la ecuación y despejas:

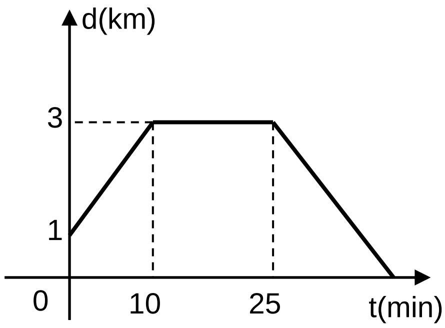
$\mathbf{151} = 2x + 1$ (sustituyes la cantidad de palitos)

$\mathbf{150} = 2x$ (transpones el 1)

$x = \mathbf{75}$ (transpones el 2 y efectúas el cociente)

R/ 75.

Ejemplo 3: Luis salió de la escuela a las 4:30 p.m. y antes de regresar a su casa quiso pasar a ver a un amigo del aula que está enfermo, estuvo un rato con él y luego regresó a su casa en la bicicleta. La gráfica muestra un aproximado del recorrido realizado.

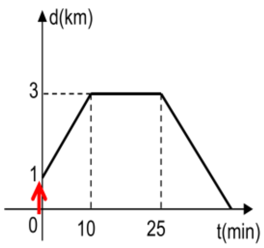


3.1. Completa los espacios en blanco:

a) Luis vive a ___ km de la escuela.

Solución:

Nota: Se toma como referencia para ubicar la casa de Luis el **origen de coordenadas** y como el **primer tramo** sale de **1** en el eje vertical, la distancia de su casa la escuela es de **1 km**.

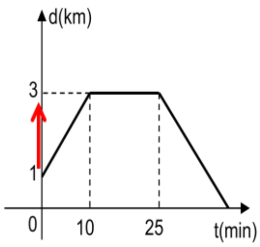


R/ 1 km.

b) La escuela se encuentra a ___ km de la casa del amigo.

Solución:

Nota: El **primer tramo** de recorrido va desde **1 km** hasta **3 km**. La **distancia** entre ambos puntos es igual a **2 km**.



R/ 2 km.

3.2. Completa los espacios en blanco:

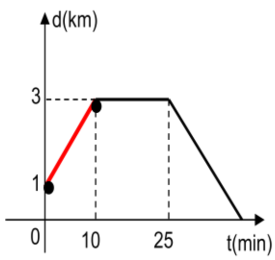
a) La ecuación que describe el recorrido hacia la casa del amigo es:

___ $d = 3t + 1$ ___ $d = 0{,}2t + 1$

___ $d = 0{,}2t + 3$ ___ $d = -\ 0{,}2t + 1$

Solución:

Nota: El recorrido a casa del amigo es el correspondiente al **primer tramo**. Para escribir la ecuación de una **función lineal**, necesitas los valores de $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$.



Conoces las coordenadas de **dos puntos** de la gráfica en ese tramo:

$(\mathbf{0}\ ;\ \mathbf{1})$ y $(\mathbf{10}\ ;\ \mathbf{3})$.

- Como el primer tramo parte de **1** en el **eje vertical**, entonces $\boldsymbol{n} = \mathbf{1}$.

● Para hallar la **pendiente**, puedes utilizar dos procedimientos:

I. La **fórmula**: $\boldsymbol{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\boldsymbol{m} = \frac{3-1}{10-0} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = \mathbf{0,2}$$

II. La **sustitución**:

$d = \boldsymbol{m} \cdot t + \mathbf{1}$ (sustituyes **n**)

$3 = \boldsymbol{m} \cdot 10 + 1$ (sustituyes el par (**10** ; **3**))

$3 - 1 = \boldsymbol{m} \cdot 10$ (transpones el 1)

$2 = \boldsymbol{m} \cdot 10$ (efectúas la sustracción)

$\boldsymbol{m} = \frac{2}{10} = \mathbf{0,2}$ (transpones el 10 y efectúas)

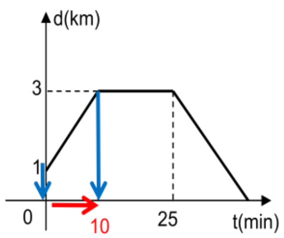
R/ $\boldsymbol{d} = \mathbf{0,2}\boldsymbol{t} + \mathbf{1}$.

b) Para ir de la escuela a la casa del amigo Luis demoró:

__ 60 seg __ 25 min __ 600 seg __ 2 min

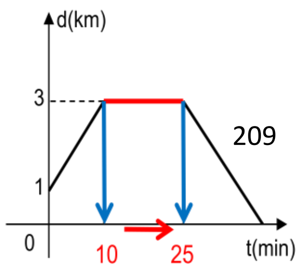
Solución:

Nota: Como piden **tiempo** hay que analizar el **eje horizontal**. El recorrido de la escuela a la casa del amigo, va de **0 min** y hasta los **10 min**.



Como esa opción no está entre las propuestas, conviertes a segundos: **10 min** = **600 segundos**.

R/ 600 seg.



c) Luis estuvo con su amigo durante:

__ 10 min __ 15 min __ 25 min

Solución:

Nota: Como piden **tiempo** hay que analizar el **eje horizontal**. El **tiempo** en casa del amigo lo da el tramo **paralelo** al **eje horizontal**, ya que **no** hay **desplazamiento.** Este tramo va desde los **10 min** y hasta los **25 min**, o sea, estuvo con él **15 min**.

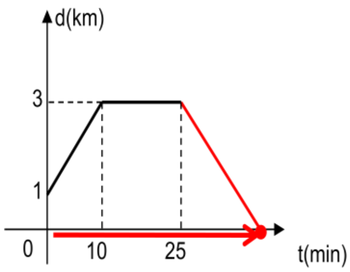
R/ 15 min.

d) Si el trayecto de regreso a su casa se describe a través de la ecuación $d = -\frac{1}{5}t + 8$, entonces Luis llegó a su casa a las:

__ 5:40 pm __ 4:40 pm __ 4:45 pm __ 5:10 pm

Solución:

Nota: El lugar donde se observa cuándo Luis llega a su casa es el **final** del **tercer tramo**, donde toca al eje **horizontal**. Como ya conoces, este valor coincide con el **cero** de la función.



• Hallas el **cero**:

$0 = -\frac{1}{5}\boldsymbol{t} + 8$ (igualas a cero la ecuación)

$\frac{1}{5}t = 8$ (transpones el $-\frac{1}{5}t$)

$t = 40$ (despejas t)

Como te piden la **hora** y **no** la cantidad de **minutos**, debes **adicionar** los **40 minutos** a la hora de inicio.

A las 4:30 pm se le adicionan 40 minutos y obtienes 5:10 pm.

R/ 5:10 pm.

Ejemplo 4: Un delfín toma impulso y salta por encima de la superficie de un estanque siguiendo una trayectoria parabólica que responde a una función cuya ecuación es $h = -t^2 + 8t - 12$, donde h es la altura que alcanza en cada momento el delfín con respecto a la superficie del agua, en metros, y t el tiempo empleado, en segundos.

Completa los espacios en blanco:

a) La altura máxima que alcanzó el delfín fuera del agua fue de _____m.

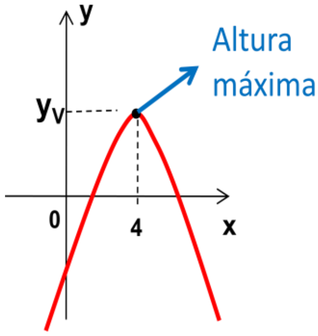
Solución:

La **altura máxima** que alcanza es el **valor máximo** de la función, o sea, la **ordenada** del **vértice**.

Para hallar la **ordenada** del vértice, hay que calcular primero su **abscisa**:

$$\boldsymbol{h} = -\boldsymbol{t}^2 + 8\boldsymbol{t} - 12$$

$$\boldsymbol{a} = -1\,;\ \boldsymbol{b} = 8\ y\ \boldsymbol{c} = -12$$



1. Hallas la **abscisa** del vértice:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2.(-1)} = -\frac{8}{-2} = \mathbf{4}$$

2. Hallas la **ordenada** del vértice:

$$y_V = -\mathbf{4}^2 + 8.\mathbf{4} - 12 = -16 + 32 - 12 = \mathbf{4}$$

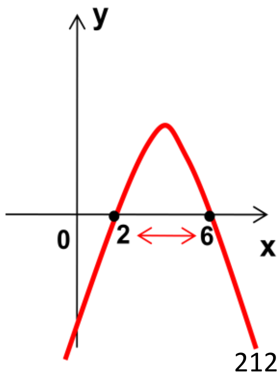
R/ 4 metros.

Nota: El **coeficiente** de x^2 es **negativo**, pero el valor de **x** es **4**, por lo que el primer resultado es igual al **opuesto** de **4²**.

b) Desde que el delfín salió fuera del agua hasta que ingresó de nuevo en ella, transcurrieron ____segundos.

Solución:

Los valores por donde el delfín **sale** y **entra** al agua, son los **ceros** de la función.



$-t^2+8t-12=0$ (sustituyes h por cero)

$t^2-8t+12=0$ (multiplicas por – 1 la ecuación)

$(t-6)(t-2)=0$ (factorizas el trinomio)

$t=6$ o $t=2$ (obtienes los valores de t)

Desde **2** hasta **6** transcurren 4 segundos.

R/ 4 segundos.

Ejemplo 5: La velocidad que alcanza un atleta en una carrera de 200m planos se puede expresar mediante la ecuación $V(d)=-0{,}00055d(d-300)$.

V: velocidad que alcanza en metros por segundo.

d: distancia recorrida, en metros.

5.1. Marca con una X la respuesta correcta:

a) El atleta fue aumentando su velocidad en el intervalo:

__ $0\,m < d \leq 100\,m$

__ $0\,m < d \leq 150\,m$

__ $150\,m \leq d \leq 300\,m$

__ *no se puede determinar*

Solución:

Te piden el **intervalo** donde el atleta va **aumentando** su **velocidad**, o sea, donde **la función es creciente**.

Como ya sabes la **función cuadrática** cambia de **monotonía** a partir de la **abscisa** del vértice.

Como la **parábola** abre hacia **abajo**, la función es **creciente** a la **izquierda** de la **abscisa** del vértice, o sea, en el intervalo desde el **cero** hasta x_V.

Como la expresión está **factorizada**, se pueden hallar los **ceros**:

$$-0{,}00055d(d-300)=0$$

$$-0{,}00055d=0 \quad \text{o} \quad d-300=0$$

$$d=0 \quad \text{o} \quad d=300$$

Para hallarla la **abscisa** del vértice, puedes proceder de **dos formas**:

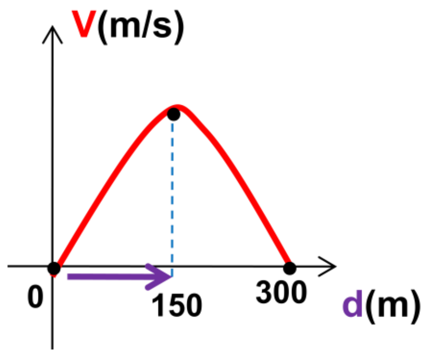
1. auxiliarte de la fórmula:

$$V(d)=-0{,}00055d(d-300)=-0{,}00055d^2+0{,}165d$$

$$a=-0{,}00055 \quad \text{y} \quad b=0{,}165$$

$$x_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{0{,}165}{2.(-0{,}00055)}=\frac{0{,}165}{0{,}0011}=\mathbf{150}$$

2. Hallando el **punto medio** entre ambos **ceros**:



Entre **0** y **300**, el punto medio es **150**.

R/ El atleta aumenta su velocidad en el intervalo:

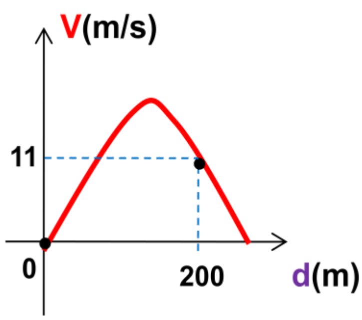
$0\,m < \boldsymbol{d} \leq 150\,m.$

5.2. Completa el espacio en blanco:

a) Al llegar a la meta, el atleta llevaba una velocidad de ____ **m/s.**

Solución:

El atleta llega a la meta cuando ha corrido **200m**, luego sustituyes en la ecuación **d** por **200** y calculas la **velocidad**:



$$\boldsymbol{V}(\mathbf{200}) = -\ 0{,}00055 \cdot \mathbf{200}(\mathbf{200} -\ 300)$$

$$\boldsymbol{V}(\mathbf{200}) = -\ 0{,}11 \cdot (-\ 100)$$

$$\boldsymbol{V}(\mathbf{200}) = \mathbf{11}\boldsymbol{m/s}$$

R/ 11m/s.

c) La velocidad máxima alcanzada por el atleta en su carrera fue de ___ **m/s.**

Solución:

La **velocidad máxima** es la **ordenada** del vértice, que se obtiene sustituyendo en la ecuación la **abscisa** del vértice:

$$V(150) = -\ 0{,}00055 \cdot 150(150 - 300)$$

$$V(150) = -\ 0{,}0825 \cdot (-\ 150)$$

$$V(150) = 12{,}375\ m/s$$

R/ 12,375 m/s.

Ejemplo 6: La dependencia funcional de la intensidad de la corriente eléctrica **I** (en **A**), en un conductor en función de la resistencia **R** (en **Ω**), con tensión constante de 200v, viene dada por la expresión **I** = $\frac{200}{R}$.

6.1. Completa el espacio en blanco:

a) Si la resistencia tiene un valor de 0,5 **Ω**, entonces la intensidad será de ___.

Solución:

Conoces el valor de **R** y debes calcular **I**:

$\mathbf{I} = \frac{200}{R} = \frac{200}{0{,}5} = 400$ **A**

R/ 400 A.

b) Si la intensidad tiene un valor de 100 **A**, entonces la resistencia será de ___.

Solución:

Conoces el valor de **I** y debes calcular **R**:

$\mathbf{I} = \frac{200}{R} \rightarrow 100 = \frac{200}{R} \rightarrow \mathbf{R} = \frac{200}{\mathbf{100}} = 2\ \Omega$

R/ 2 Ω.

c) Cuando la dependencia funcional de la intensidad de la corriente eléctrica **I** (en **A**), en un conductor en función de la resistencia **R** (en Ω), tenga una tensión constante de 120v, entonces la ecuación que describe esa dependencia será _____.

Solución:

R/ $\mathbf{I} = \frac{120}{R}$

Ejemplo 7: Los estudiantes de un grupo alquilan un ómnibus por un valor de $500, para una excursión. La relación que se establece entre la cantidad de estudiantes que participará y el dinero que debe pagar cada uno, se expresa mediante la ecuación:

$$D = \frac{500}{x - a}, \text{ donde:}$$

D: cantidad de dinero a pagar por participante

x: matrícula del grupo

a: cantidad de estudiantes que no asistieron

Si el día de la excursión faltaron 5 estudiantes y los asistentes pagaron $25 cada uno, entonces a la excursión asistieron ___ estudiantes.

Solución:

Sustituyes en la fórmula los valores conocidos y resuelves la ecuación obtenida:

$$D = 25 \ \text{ y } \ a = 5$$

$$25 = \frac{500}{x - 5}$$

$$x - 5 = \frac{500}{25}$$

$$x - 5 = 20$$

$$x = 25$$

Pero **25** es la **matrícula** del grupo, los que asistieron fueron **5 menos**, entonces la respuesta es **20**.

R/ 20.

Ejemplo 8: La energía eólica tiene un rol fundamental al ser fuente renovable que utiliza la fuerza del viento para generar electricidad. La potencia **P**, medida en kWatt, que produce un aerogenerador depende de la velocidad **V**, medida en km/h.

La relación potencia del aerogenerador y la velocidad del viento se puede expresar a través de la función de ecuación $P(V) = 0{,}61V^3$.

Marca con una X la respuesta correcta:

a) Cuando la velocidad del viento es de 10km/h, el aerogenerador tendrá una potencia de:

__ 0,61 kWatt __ 610 kWatt __ 6,1 kWatt

Solución:

Conoces la velocidad (**V**) y debes determinar la potencia (**P**), sustituyes en la fórmula y calculas:

$$P(10) = 0{,}61 \cdot 10^3 = 0{,}61.1000 = \mathbf{610\ kWatt}$$

R/ 610 kWatt

b) Cuando la potencia del aerogenerador sea de 16 470 kWatt, entonces la velocidad del viento será de:

__ 3 km/h __ 300 km/h __ 30 km/h __ 27 000 km/h

Solución:

Conoces la potencia (**P**) y debes determinar la velocidad (**V**), sustituyes en la fórmula y despejas:

$$16\,470 = 0{,}61V^3$$

$$V^3 = \frac{16\,470}{0{,}61} = 27\,000$$

$$V = \sqrt[3]{27000}$$

$$V = 30 \text{ km/h}$$

R/ 30 km/h

Ejemplo 9: Para construir una Montaña Rusa para un parque de diversiones, el diseñador se apoyó en un modelo a partir de una función cúbica de ecuación:

$$h(d) = 0{,}001d^3 - 0{,}12d^2 + 3{,}6d + 10.$$

$h(d)$: altura, en metros, a la que se encuentra cada carrito en cada momento del trayecto.

d: distancia recorrida, en metros.

a) Cuando va a empezar el recorrido, el primer carrito se encontrará a una altura de ___ m.

Solución:

La altura al iniciar el recorrido se alcanza cuando la Montaña no se ha puesto en movimiento, o sea, cuando

x = 0. Luego, sustituyes en la fórmula y despejas:

$h(0) = 0{,}001 \cdot 0^3 - 0{,}12 \cdot 0^2 + 3{,}6 \cdot 0 + 10$

$h(0) = \mathbf{0} - 0 + \mathbf{0} + 10$

$h(0) = \mathbf{10\ m}$

R/ 10 m.

b) Si la altura máxima de un carrito se alcanza cuando se ha recorrido 20 m, entonces dicha altura es de ___ m.

Solución:

Como la **altura máxima** de un carrito se alcanza para **x = 20**, sustituyes en la fórmula y despejas:

$h(20) = 0{,}001 \cdot 20^3 - 0{,}12 \cdot 20^2 + 3{,}6 \cdot 20 + 10$

$h(20) = 0{,}001 \cdot 8000 - 0{,}12 \cdot 400 + 3{,}6 \cdot 20 + 10$

$h(20) = \mathbf{8 - 48 + 72 + 10}$

$h(20) = \mathbf{42\ m}$

R/ 42 m.

Ejemplo 10: Para calcular el tiempo que demora un objeto en caer al suelo se utiliza la expresión **T** = $\sqrt{\frac{2\mathbf{h}}{g}}$, donde $g = 9{,}8\ m/s^2$, h: altura a la que se lanza el objeto y **T** el tiempo que demora en caer. Si un objeto es soltado en caída libre desde 1 960 m de altura, entonces el tiempo que tarda en llegar al suelo será de:

__ 20 min   __ 20 seg   __ 200 seg   __ 200 min

Solución:

Conoces la altura (h) a la que se lanza el objeto y debes calcular el tiempo (T) que demora en caer.

Sustituyes y calculas:

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2.1\,960\text{ m}}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}}} = \sqrt{\frac{3\,920\text{ m}}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}}} = \sqrt{400\ s^2} = 20\text{ s}$$

R/ 20 seg.

Ejemplo 11: La velocidad de la propagación de las ondas en aguas poco profundas de un **tsunami**, se puede calcular a través de la función **V** de ecuación

$$V = \sqrt{g\,.\,h}$$

g: aceleración de la gravedad 9,81m/s^2

h: profundidad, en metros, del fondo marino.

Completa el espacio en blanco:

La velocidad de las ondas cuando la profundidad de las aguas es de 1 020 metros será de ___ m/s.

Solución:

$$V = \sqrt{g \cdot h} = \sqrt{9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 1020\,m} \approx \sqrt{10\,000\,\frac{m^2}{s^2}} \approx \mathbf{100\ m/s}$$

Ejemplo 12: El porcentaje de riesgo **R** de tener un accidente cuando se está conduciendo un automóvil, en función de la concentración de alcohol ***x*** en sangre, en gramos por litro, se puede medir a través de la ecuación **R**(***x***) = $6(1{,}013)^x$.

Completa el espacio en blanco.

Si la concentración de alcohol en sangre de un conductor es igual a 2 gramos por litro, entonces el riesgo de tener un accidente es aproximadamente de un __%.

Solución: Conoces la concentración de alcohol ***x***, debes calcular el tanto por ciento de riesgo **R**.

Sustituyes en la ecuación y efectúas las operaciones indicadas.

Para **x** = **2**: **R**(***2***) = $6(1{,}013)^2$ (sustituyes)

R(***2***) ≈ 6·1,03 (calculas la potencia)

R(***2***) ≈ **6,18** (efectúas el producto)

R/ **6,18%**.

Ejemplo 13: Para determinar la cantidad de luz que penetra a distintas profundidades del océano, se utiliza la Ley de Beer Lambert, que describe la energía lumínica **E** que llega a una profundidad de **x** metros. Para un océano determinado, la función que representa la situación es:

$$E(x) = 10.0{,}4^{x}$$

E: energía lumínica equivalente en $\frac{cal}{cm^2 .s}$

x: profundidad en metros

Marca con una X la respuesta correcta:

a) A dos metros de profundidad se tendrá una energía lumínica equivalente de:

__ 0,8 $\frac{cal}{cm^2 .s}$ __ 1,6 $\frac{cal}{cm^2 .s}$ __ 16 $\frac{cal}{cm^2 .s}$ __ 0,16 $\frac{cal}{cm^2 .s}$

Solución:

Conoces la profundidad **x** = **2m** que alcanza, debes calcular la energía **E**.

Sustituyes en la ecuación y calculas.

$E(2) = 10.0{,}4^{2}$ (sustituyes)

$E(2) = 10.0{,}16$ (calculas la potencia)

$E(2) = 1{,}6 \frac{cal}{cm^2 .s}$ (efectúas el producto)

R/ _X_ 1,6 $\frac{cal}{cm^2 .s}$.

b) Cuando la energía lumínica equivalente sea de

0,256 $\frac{cal}{cm^2 .s}$, entonces la profundidad alcanzada será de:

__ 4 m   __ 3 m   __ 6 m   __ 8 m

Solución:

Conoces la energía **E**, debes calcular la profundidad a la que llega **x**.

Sustituyes en la ecuación y resuelves la ecuación exponencial.

$E(x) = 10.0{,}4^x$

$0{,}256 = 10.0{,}4^x$ (sustituyes **E**)

$\frac{0{,}256}{10} = 0{,}4^x$ (transpones el 10)

$0{,}0256 = 0{,}4^x$ (efectúas el cociente)

$0{,}4^4 = 0{,}4^x$ (expresas 0,0256 como potencia de 0,4)

$4 = x$ (igualas los exponentes)

R/ _X_ 4 m.

Ejemplo 14: El **pH** es una medida para determinar si una solución es ácida, básica o neutra, indica la concentración de iones o cationes hidrógeno $[H^+]$ presentes en la sustancia. Para calcularlo se utiliza la expresión

$$pH = -\log [H^+]$$

si una sustancia es:

- **ácida**, su **pH** es menor a 7
- **neutra**, su **pH** es igual a 7
- **básica**, su **pH** es mayor a 7

Marca con una X la respuesta correcta:

Si la concentración de iones de hidrógeno que corresponde a una sustancia es igual a 0,00001 M, entonces dicha sustancia es:

__ ácida   __ básica   __ neutra   __ no se puede determinar

Solución:

Conoces la **concentración de iones** y debes determinar el **pH**:

- **concentración de iones**: 0,00001 M
- **pH**: ?

$$pH = -\log [H+]$$

$pH = -\log [0{,}00001]$ (sustituyes)

$pH = -\log 10^{-5}$ (expresas como potencia de 10)

$pH = -(-5)\cdot\log 10$ (aplicas la propiedad $\log_a b^x = x\log_a b$)

pH = 5.1 (calculas el logaritmo)

pH = **5** (efectúas el producto)

R/ ácida.

Ejemplo 15: La magnitud de un terremoto se relaciona con cuánta energía libera. Los sismógrafos son los instrumentos que detectan el movimiento de la tierra.

A_0 es la amplitud de onda más pequeña detectada.

A es la medida de la amplitud de onda del terremoto.

De ahí que, la medida en la escala de Richter de la magnitud de un terremoto **R**, se calcula usando la fórmula:

$$R = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

Completa el espacio en blanco:

Si un terremoto se midió con una amplitud **A** 100 000 veces más grande que A_0, entonces la magnitud **R** del terremoto en la escala Richter fue de ___________.

Solución:

Como **A** tiene una amplitud **100 000** veces superior a A_0, entonces $A = 100\,000A_0$.

Luego, $R = \log\left(\frac{100\,000A_0}{A_0}\right) = \log 100\,000 = 5$

R/ 5.

Ejemplo 16: (Movimiento armónico simple)

Si un cuerpo está vibrando verticalmente, la función ***f*(t)** que mide, en cm, la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central , que consideramos el origen, después de **t** segundos, siempre que el sentido positivo sea considerado hacia arriba es:

$$f(t) = 8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

Completa los espacios en blanco:

a) La amplitud del movimiento es de ____ cm.

b) Para observar una vibración completa del cuerpo se necesita que transcurran ___ segundos.

Solución:

a) La ecuación es de la forma y = **a**cos**b**x, luego:

a representa la **amplitud** del movimiento.

R/ La amplitud del movimiento es de _8_ cm.

b) Para determinar el **tiempo** de una vibración **completa**, hay que hallar el **período principal** de la función.

$$\textbf{P.P.} = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$$

R/ Para observar una vibración completa del cuerpo se necesita que transcurran _6_ segundos.

Ejemplo 17: Las temperaturas registradas en una ciudad de México durante varias horas de un día, a partir de las 12:00 am, viene dada por la función cuya ecuación es

$$T = -10\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 15.$$

t: cantidad de horas transcurridas.

T: Temperaturas en grados Celsius.

Marca con una X la respuesta correcta:

a) La temperatura que había en la ciudad al comenzar la medición era de:

__ 0ºC   __ – 10ºC   __ 5ºC   __ 15ºC

Solución:

La **temperatura inicial** medida se obtiene cuando **t** = **0**, luego sustituyes en la ecuación y realizas las operaciones indicadas.

$$T = -10\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}.0\right) + 15$$

$$T = -10\text{sen } 0 + 15$$

$$T = -10.0 + 15$$

$$T = 15$$

R/ 15ºC.

b) A las 6:00 pm la temperatura en la ciudad era de:

__ 25ºC   __ – 10ºC   __ 5ºC   __ 15ºC

Solución:

A las 6:00 pm han transcurrido 18 horas desde las 12 am, luego la **temperatura** pedida se obtiene cuando **t** = **18**, por lo que sustituyes en la ecuación y realizas las operaciones indicadas.

T $= -10\text{sen}\left(\frac{\pi}{\cancel{12}} . \cancel{18}\right) + 15$

T $= -10\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} + 15$

T $= -10.(-1) + 15$

T $= 10 + 15$

T = 25ºC

R/ 25ºC.