Resumen sobre geometría del espacio y cálculo de cuerpos para 12mo grado

Para satisfacer los pedidos de nuestros estudiantes y contribuir con una mayor preparación en nuestra asignatura, nuestra empresa CINESOFT ha elaborado este resumen.

Este material te servirá como un complemento a las clases televisivas, junto a tu libro de texto.

Para resolver ejercicios sobre este tema, debes saber:

1. **las propiedades de las figuras planas y sus fórmulas para el cálculo de áreas y perímetros.**
2. **los elementos de los cuerpos geométricos y las fórmulas utilizadas en el cálculo de áreas y volúmenes.**
3. **las distintas relaciones que se establecen entre rectas y planos.**
4. **resolver ejercicios de demostración utilizando el teorema de las tres perpendiculares y su recíproco.**
5. **resolver ejercicios de cálculo de cuerpos, simples y compuestos.**

Rogamos nos disculpes cualquier imprecisión y la hagas llegar a nosotros para hacer la corrección inmediatamente.

Esperamos que te sea útil para lograr una mejor preparación.

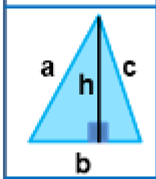
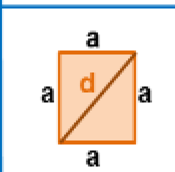
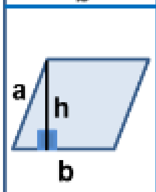
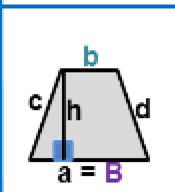
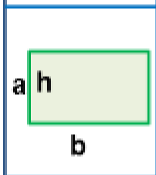
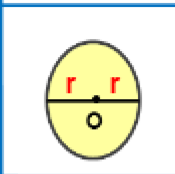
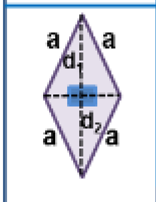
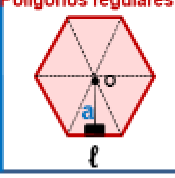
Autores: MSc. Jesús Cantón Arenas

MSc. Mirta Capote Jaume

Resumen de Geometría del Espacio

Para resolver ejercicios sobre el tema es imprescindible los conocimiento adquiridos por ti sobre **Geometría plana**.

Ya en **nuestra página** aparece un **resumen** sobre las **figuras planas** y sus **propiedades**, por eso solo te proponemos las **fórmulas** imprescindibles para el cálculo.

Figura	Área	Perímetro	Figura	Área	Perímetro
	$A = \frac{b \cdot h}{2}$ $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \operatorname{sen}\alpha$	P = a + b + c		$A = a^2$ $A = \frac{d^2}{2}$	P = 4a
	A = b·h	P = 2(a+b)		$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$ B:base mayor b:base menor	P=a+b+c+d
	A = b·h = a·b	P = 2(a+b)		$A = \pi \cdot r^2$	$P = 2 \cdot \pi \cdot r$ $= \pi \cdot d$
	$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$	P = 4a	Polígonos regulares 	A = p·a p:semiperímetro a:apotema	P = n·ℓ n:cantidad de lados

Comentarios:

1. Al calcular el **área** de un triángulo:

♦ si conoces un lado y su altura relativa, utilizas la fórmula

A= $\frac{b.h}{2}$,

♦ si conoces dos lados y el ángulo comprendido, entonces utilizas **A** = $\frac{1}{2}$a·b·senα, donde α es el ángulo comprendido entre los lados del triángulo que tomes.

♦ Si el triángulo es **equilátero**, su **área** se puede calcular por la fórmula **A**= $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\ell^2$, donde ℓ: lado del triángulo.

Nota: Esta fórmula para el equilátero y la de **A**= $\frac{b.h}{2}$ se obtienen a partir de **A** = $\frac{1}{2}$a·b·senα, de la forma siguiente:

♦ En un triángulo **rectángulo** los catetos son **perpendiculares**, o sea, forman un ángulo de 90º entre sí, sustituyendo en la fórmula se obtiene:

A = $\frac{1}{2}$a·b·senα = $\frac{1}{2}$b·h·sen90º = $\frac{b.h}{2}$, ya que **sen 90º = 1**.

♦ En un triángulo **equilátero** los lados son **iguales** y los **ángulos** interiores miden **60º**, sustituyendo en la fórmula se obtiene:

A = $\frac{1}{2}$a·b·senα = $\frac{1}{2}\cdot\ell\cdot\ell\cdot$sen60º = $\frac{1}{2}\cdot\ell^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\ell^2$.

♦ Si conoces los **tres lados** su área se puede calcular por la fórmula de Herón:

A = $\sqrt{\mathbf{p}(p-a)(\mathbf{p}-b)(\mathbf{p}-c)}$, donde **p**: semiperímetro.

2. El **perímetro** de un triángulo **equilátero** se puede calcular también por la fórmula **P** = 3a, mientras que el del **isósceles**, por la fórmula **P** = 2a + b. Estas fórmulas son muy útiles cuando es necesario despejar un lado.

3. Como el **cuadrado** es un **rombo**, su **área** también se puede calcular por la fórmula del rombo, teniendo en cuenta que las diagonales del cuadrado son **iguales**, o sea, $d_1 = d_2$.

$$\mathbf{A} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{\mathbf{d}^2}{2}.$$

Luego, si conoces el **lado** del cuadrado, utilizas a^2 y si conoces la **diagonal**, utilizas $\frac{\mathbf{d}^2}{\mathbf{2}}$.

4. El **área** de cualquier **polígono regular** se calcula por la fórmula que aparece en la tabla, aunque te mostramos el **hexágono regular** por su importancia dentro de estos polígonos. Solo ten en cuenta que **p** minúscula es el **semiperímetro**, no el perímetro. Si utilizas el perímetro (**P**), puedes escribirla entonces de esta manera:

$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{P}}{2} \cdot \mathbf{a}$, donde **a** es la **apotema**, o sea, el segmento de perpendicular trazado del centro **O** de cada polígono a cada lado.

5. También es importante conocer que en un **polígono regular** al trazar sus diagonales queda dividido en **triángulos isósceles iguales**. Luego, el **área** de un polígono regular también se puede calcular **multiplicando** el área de uno de ellos por la cantidad de triángulos formados.

En particular, en el **hexágono regular**, como se muestra en la tabla, estos triángulos son **6** y además **equiláteros**, por lo que se puede calcular de esta manera:

A(hexág. reg.) = 6·**A(**$\triangle$**equilátero**) = $6\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\ell^2\right)$.

Si simplificas la expresión, queda $\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\ell^2$.

6. En el caso del **perímetro** de un **polígono regular** como todos sus lados son **iguales**, se multiplica la longitud de un lado por la cantidad de los mismos. Para el **hexágono regular**, sería **6·ℓ**.

7. Si una figura geométrica está dividida en otras figuras conocidas, recuerda puedes utilizar la **adición** o **sustracción** de áreas, según la que se quiera calcular.

Cuerpos Geométricos

Llamamos **cuerpo geométrico** a la región limitada por **superficies planas** o **curvas** o la **combinación** de ambas **superficies**.

Los **cuerpos geométricos** estudiados por ti son:

1. Prisma

2. Pirámide

3. Cilindro

4. Cono

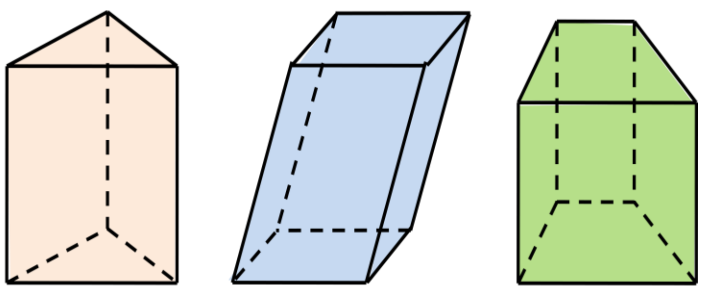
5. Esfera

De ellos debes conocer su **definición**, sus **elementos** y las **fórmulas** para calcular su **volumen** y su **área**.

1. Prisma. Cuerpo geométrico limitado por:

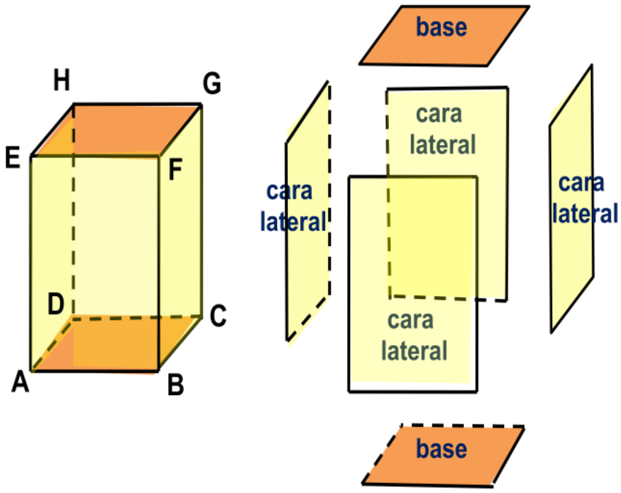
- dos **polígonos iguales** de **n** lados situados en planos **paralelos**, llamados **bases**
- y por **n paralelogramos**, llamados **caras laterales**.

Ejemplos de prismas:



Elementos:

♦ **Bases:**

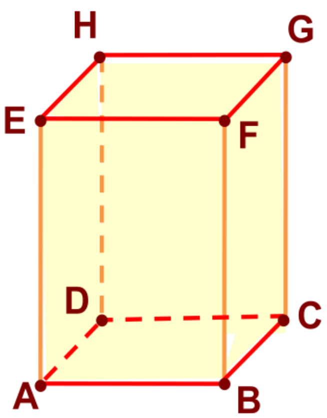


ABCD y EFGH

♦ **Caras laterales:**

ABFE ; DCGH ; BCGF y ADEH

♦ **Aristas de la base:**



$\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$; $\overline{AD}$;

$\overline{EF}$; $\overline{FG}$; $\overline{GH}$; $\overline{EH}$

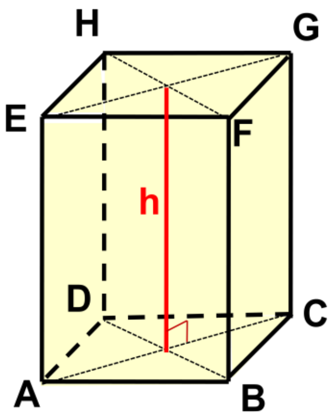
♦ **Aristas laterales:**

$\overline{AE}$; $\overline{BF}$; $\overline{CG}$; $\overline{DH}$

♦ **Vértices:**

A, B, C, D, E, F, G y H

Particular interés para el **cálculo** reviste la **altura** de un **prisma**.



♦ **Altura:** Segmento de **perpendicular** comprendido entre las **bases**.

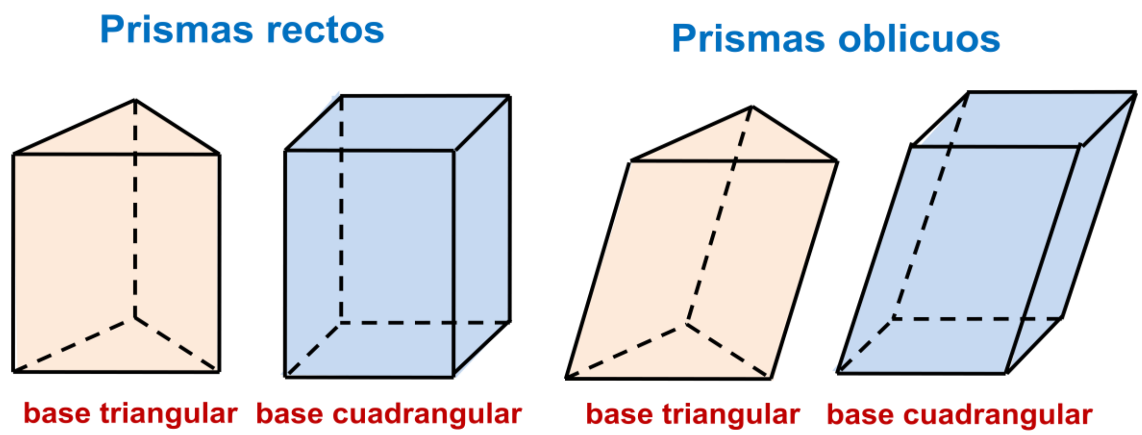
Tipos de prisma:

♦ **Prisma recto:** Las **aristas laterales** son **perpendiculares** a las bases.

Sus **caras** son **rectángulos**

♦ **Prisma oblicuo**: Las **aristas laterales** **no** son **perpendiculares** a las bases.

Sus **caras** son **paralelogramos**



Nota: En los **prismas rectos**, las **aristas laterales** se pueden tomar como **alturas**. En los **prismas oblicuos**, la **altura** hay que trazarla desde un **vértice** superior al **plano base**.

♦ **Prisma regular**: Es un **prisma recto**, cuyas **bases** son **polígonos regulares** (triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, etc).

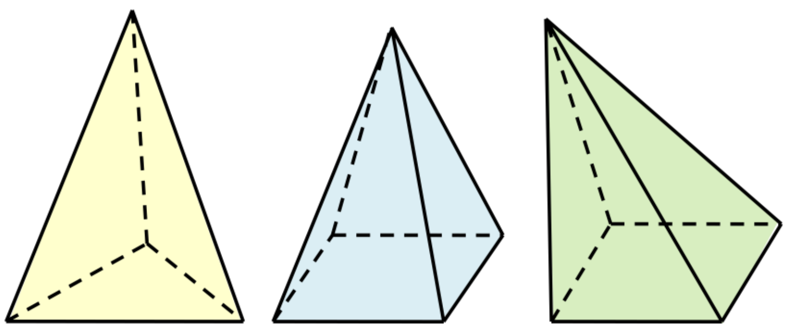
Nota: El **cubo** y el **ortoedro** son **prismas** y en el caso del **cubo**, es un **prisma regular**.

2. Pirámide. Cuerpo geométrico limitado por:

• un **polígono** de **n** lados contenido en un plano α, llamado **base**

• y por **n triángulos**, los cuales concurren en un **vértice común** que no pertenece al plano α, llamados **caras laterales**.

Ejemplos de pirámides:



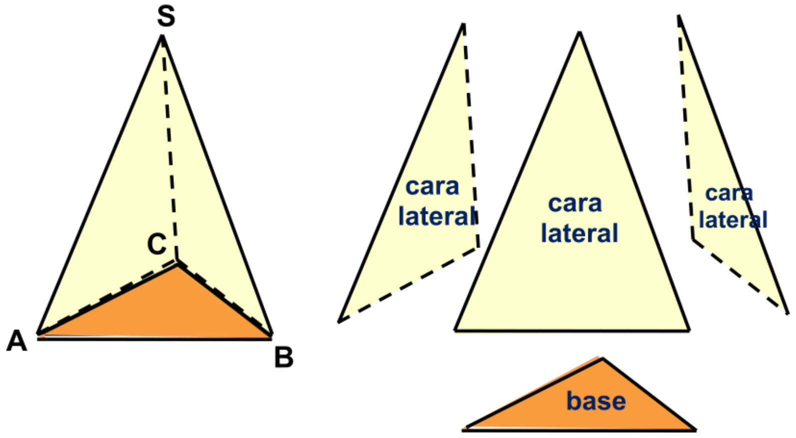
Elementos:

♦ **Base:**

ABC

♦ **Caras laterales:**

SAB ; SAC y SBC



♦ **Aristas de la base:**

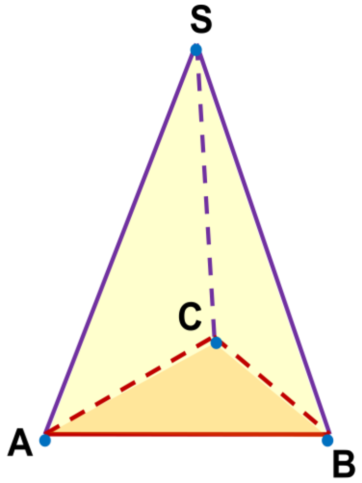
$\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{AC}$

♦ **Aristas laterales:**

$\overline{SA}$; $\overline{SB}$; $\overline{SC}$

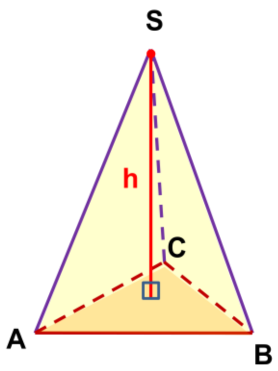
♦ **Vértices:**

A, B, C, **S**(vértice principal)



Particular interés para el **cálculo** reviste la **altura** de una **pirámide**.

♦ **Altura:** Segmento de **perpendicular** trazado del **vértice** a la **base**.

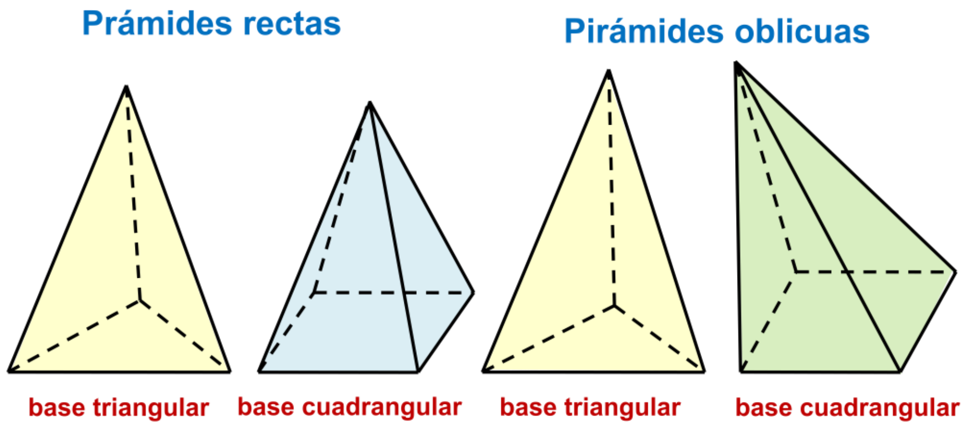


Tipos de pirámides:

♦ **Pirámide recta:** Las **altura** cae sobre el **centro** de la **base**.

♦ **Pirámide oblicua**: Las **altura no** cae sobre el **centro** de la **base**.

♦



Pirámide regular: Es una **pirámide recta**, cuyas **bases** son **polígonos regulares** (**triángulo equilátero**, **cuadrado**, **pentágono regular**, etc).

Nota:

1. Las **caras** de una **pirámide regular** son **triángulos isósceles iguales**. La **altura** de dichos triángulos, recibe el nombre de **apotema**.

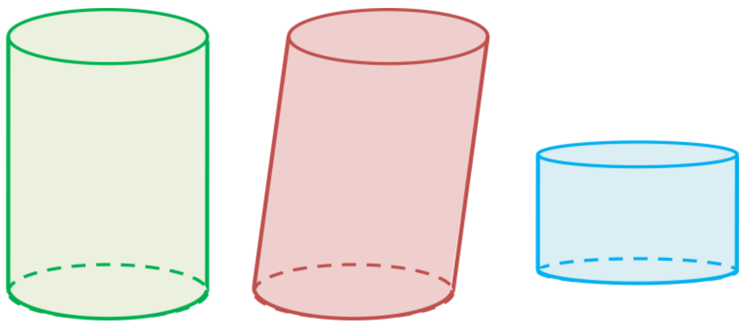
2. La **pirámide** formada por **cuatro triángulos** recibe el nombre de **tetraedro** (**tetra**: **cuatro**).

3. Cilindro. Cuerpo geométrico limitado por:

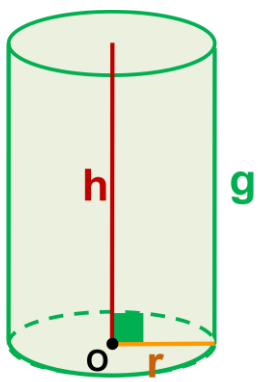
● dos **círculos iguales** situados en planos **paralelos**, llamados **bases**

● y por **la superficie curva**, que une las bases opuestas.

Ejemplos de cilindros:



Elementos:



Está limitado por:

♦ dos **círculos**, llamados **bases**

♦ y una **superficie curva**, llamada **superficie lateral**.

♦ **centro: o** (uno en cada base)

♦ **radio: r** (radio de sus bases, son infinitos)

♦ **altura: h** (distancia entre sus bases)

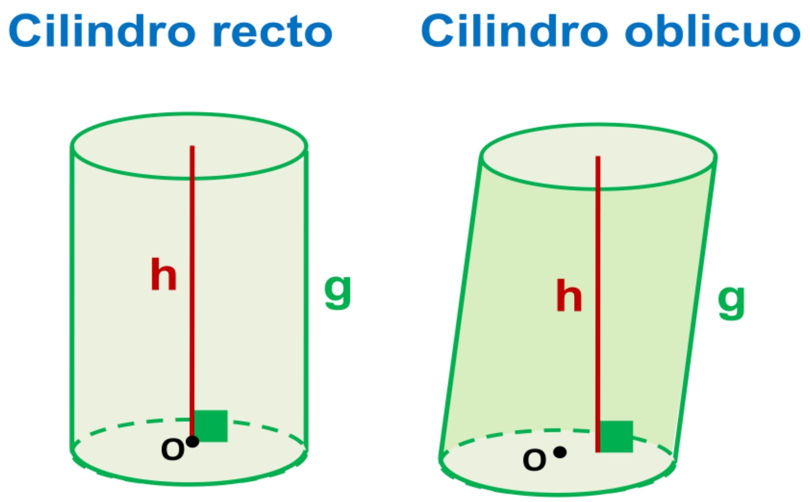
♦ **generatriz:** **g** (segmento perpendicular a las bases y sus extremos son puntos de las circunferencias que la limitan, son infinitas)

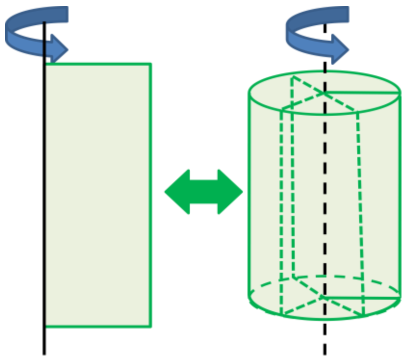
Nota: La longitud de la **altura** es **igual** a la de las **generatrices**.

Tipos de cilindros:

♦ **cilindros rectos:** La **altura** cae en el **centro** de la **base**. Las **generatrices** son **perpendiculares** a las **bases**.

♦ **cilindros oblicuos**: La **altura** **no** cae en el **centro** de la **base**. Las **generatrices** **no** son **perpendiculares** a las **bases**.



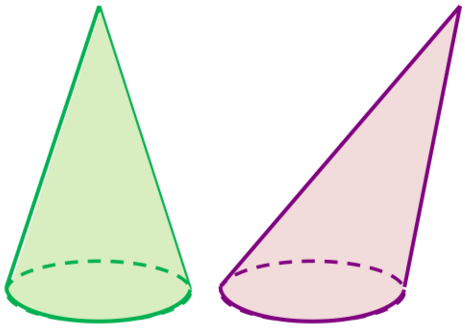


Nota: **En el caso del cilindro circular recto,** podemos decir también que es un cuerpo geométrico que se obtiene por la **rotación** de un **rectángulo** alrededor de uno de sus lados.

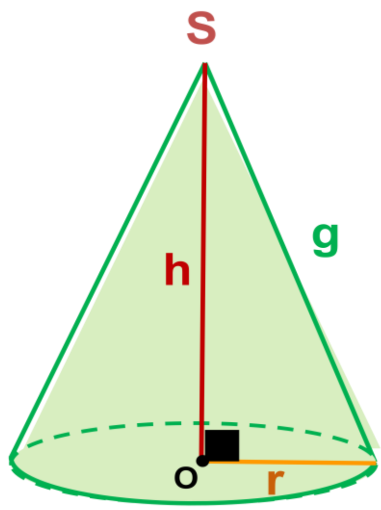
4. Cono.
Cuerpo geométrico limitado por:

- un **círculo** situado en un plano, llamado **base**
- y por **la superficie curva** que une la circunferencia que limita la base con un punto que no pertenece a ella.

Ejemplos de conos:



Elementos:



Está limitado por:

♦ un **círculo**, llamado **base**

♦ y una **superficie curva**, llamada **superficie lateral**.

♦ **centro: O** (en la base)

♦ **radio: r** (radio de su base, son infinitos)

♦ **altura: h** (distancia del vértice a la base)

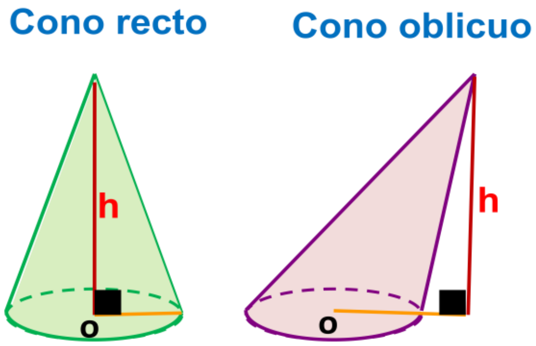
♦ **generatriz: g** (segmento que tiene como **extremos** el **vértice** y un **punto** de la circunferencia que limita la base, son infinitas)

♦ **vértice: S** (punto donde concurren las generatrices)

Tipos de conos:

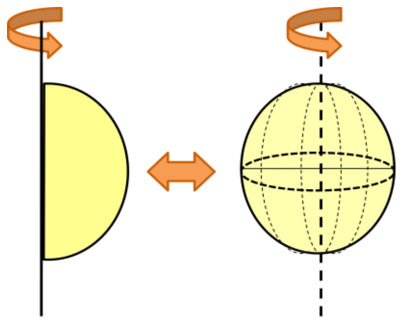
♦ **conos rectos**: La **altura** cae en el **centro** de la **base**. Las **generatrices** tienen **igual** inclinación respecto a la **base**.

♦ **conos oblicuos**: La **altura no** cae en el **centro** de la **base**. Las **generatrices no** tienen **igual** inclinación respecto a la **base**.



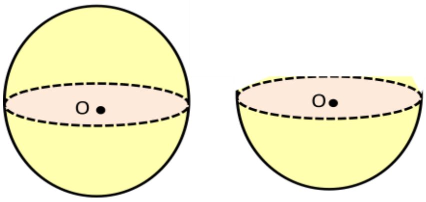
Nota: **En el caso del cono circular recto** podemos decir también que es un cuerpo geométrico que se obtiene por la **rotación** de un **triángulo rectángulo** alrededor de uno de sus **catetos**.

5. Esfera: Cuerpo geométrico que se obtiene por la **rotación** de un **semicírculo** alrededor de su diámetro.



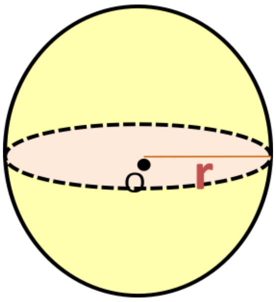
La **mitad** de una **esfera** se llama **semiesfera**.

Ejemplos:



Elementos:

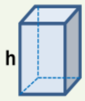
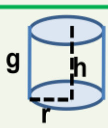
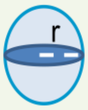
♦ Está limitado por una **superficie curva**.



♦ **centro: O** (centro de todos los **círculos** y **circunferencias máximas**. La **mayor** circunferencia de la esfera es aquella cuyo **plano** pasa por su **centro**)

♦ **radio: r** (segmento que une el **centro** con cualquier **punto** de la **superficie** de la **esfera**)

Fórmulas para calcular el volumen y el área de cuerpos geométricos

Cuerpos	Volumen	Área Total	Área Lateral
Prisma 	$V = A_B.h$	$A_T = 2A_B + A_L$	$A_L = P_B \cdot h$
Pirámide 	$V = \frac{A_B.h}{3}$	$A_T = A_B + A_L$	$A_L = A_{\Delta_1} + A_{\Delta_2} + \ldots$
Cilindro 	$V = A_B.h$	$A_T = 2A_B + A_L$	$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
Cono 	$V = \frac{A_B.h}{3}$	$A_T = A_B + A_L$	$A_L = \pi \cdot r \cdot g$
Esfera 	$V = \frac{4}{3}\pi.r^3$	$A = 4\pi r^2$	

Comentarios:

1. La fórmula para calcular al **área de la base** de los **prismas** y las **pirámides**, está en dependencia de la figura que aparezca en ella.

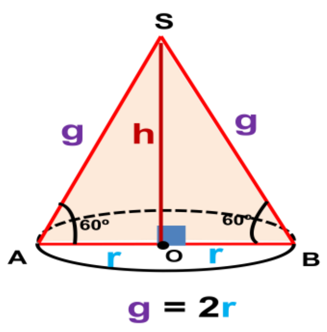
2. La fórmula para calcular al **área de la base** del **cilindro** y **cono** es $\pi . r^2$, ya que su base es siempre un círculo.

3. El **área lateral** de las **pirámides** se calcula adicionando las áreas de todos los triángulos que forman su superficie lateral.

4. La fórmula para calcular al **área lateral** del **cilindro** es $P_B \cdot h$ al igual que el prisma, pero como el perímetro de la base es la longitud de la circunferencia, entonces el $A_L = 2.\pi.r.h$.

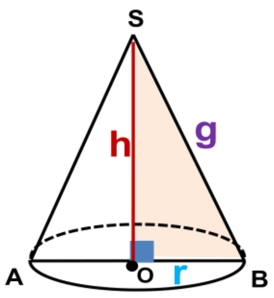
5. La fórmula para calcular al **área lateral** del **cono** es $\pi.r.g$, donde **g** es una de las generatrices del cono, o sea, una de sus lados inclinados.

6. Si un cono circular es **recto**, todas sus **generatrices** son **iguales** y si su inclinación es de 60º respecto a la base, entonces dos generatrices opuestas forman con el diámetro correspondiente un **triángulo equilátero**. En la figura, ΔSAB **equilátero**.

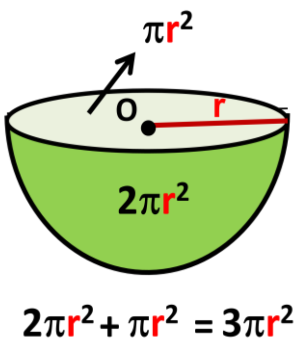


MSc. Jesús Cantón Arenas
MSc. Mirta Capote Jaume

7. En un cono circular recto, entre la **generatriz**, el **radio** y la **altura** se forma un **triángulo rectángulo**. Esto permite hallar cualquiera de esos elementos con los conocimientos que tienes sobre este tipo de triángulo.

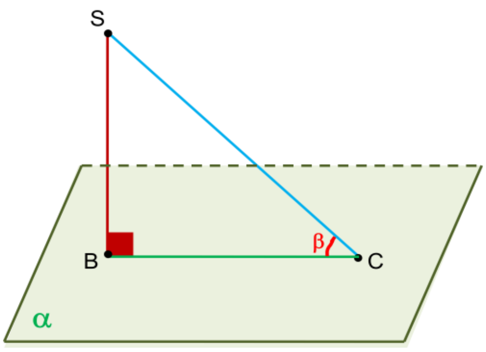


8. El **volumen** de una **semiesfera** es $V_{SE} = \frac{2}{3}\pi r^3$ y su **área** es $A_{SE} = 3\pi r^2$, ya que se **adicionan** la **mitad de la superficie de la esfera** y el **área** del **círculo máximo**.



Definiciones importantes:

1. Llamamos **distancia de un punto a un plano** a la longitud del segmento de perpendicular $\overline{SB}$ comprendido entre el punto y el plano.



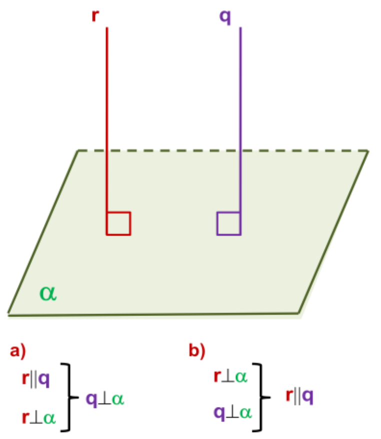
2. Llamamos **proyección de una oblicua** $\overline{SC}$ **sobre un plano** α**,** al segmento $\overline{BC}$ que une el pie de la oblicua con el pie de la perpendicular bajada desde el mismo punto **A** al plano α.

3. Llamamos **ángulo** entre una oblicua $\overline{SC}$ y un plano α**,** al ángulo β, formado por la oblicua y su proyección.

Teoremas:

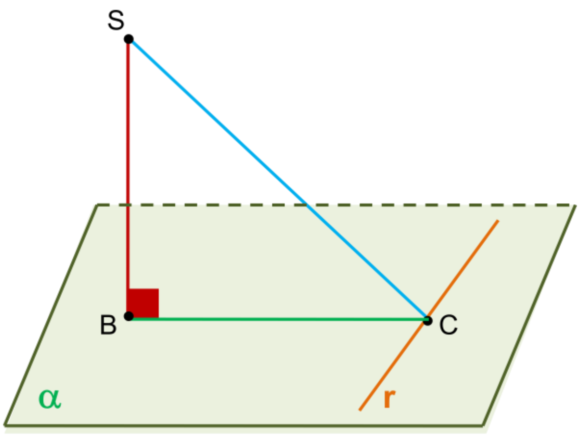
a) Si una de dos rectas paralelas es perpendicular a un plano, la otra también lo es.

b) Dos rectas perpendiculares a un mismo plano, son paralelas entre sí.



Para realizar ejercicios sobre demostración utilizando el **teorema de las tres perpendiculares**, es necesario reconocer en la figura de análisis de un ejercicio, el **triángulo** adjunto y los **elementos** siguientes:

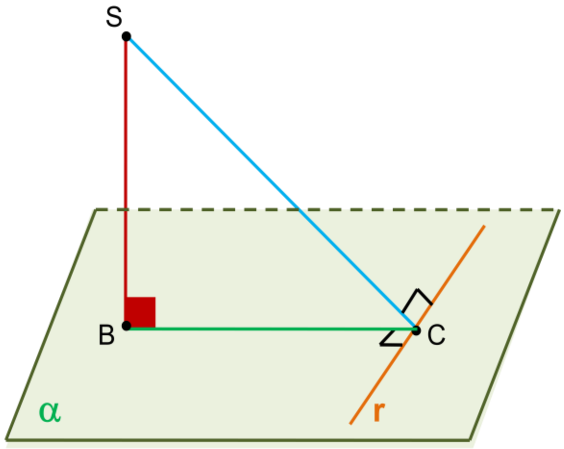
- $\overline{SB} \perp \alpha$
- $\overline{SC}$ oblicua al plano α
- $\overline{BC}$ proyección de la oblicua sobre el plano α
- r: recta contenida en α y



pasa por el pie de la oblicua.

Teorema de las tres perpendiculares

Si una **recta** de un plano que pasa por el pie de la **oblicua** al plano es **perpendicular a la proyección de la oblicua**, entonces es **perpendicular a la oblicua**.



En símbolos:

Si $r \perp \overline{BC}$ **, entonces** $r \perp \overline{SC}$

Recíproco del Teorema de las tres perpendiculares

Si una **recta** de un plano que pasa por el pie de la **oblicua** al plano es **perpendicular a la oblicua**, entonces es **perpendicular a su proyección**.

En símbolos:

Si $r \perp \overline{SC}$**, entonces** $r \perp \overline{BC}$

Para escribir una **demostración** utilizando el **teorema de las tres perpendiculares** o su **recíproco**, debes:

I) Identificar y **escribir** primero los **cuatro elementos** siguientes:

1. La **perpendicular** al plano y justificarla.

2. La **oblicua** al plano

3. La **proyección** de la oblicua.

4. La **recta** contenida en el plano y que pase por el pie de la oblicua.

II) Escribir los **dos pasos** de la demostración:

♦ Si es el **teorema directo** se escribe:

5. La **proyección** es perpendicular a la recta, por …. (un conocimiento relacionado con las propiedades de las figuras planas)

6. La **oblicua** es perpendicular a la recta, por el **teorema** de las **tres perpendiculares**.

♦ Si es el **recíproco** del teorema, se escribe:

5. La **oblicua** es perpendicular a la recta, por …. (un conocimiento relacionado con las propiedades de las figuras planas)

6. La **proyección** es perpendicular a la recta, por el **recíproco** del **teorema** de las **tres perpendiculares**.

Para realizar ejercicios de **cálculo de cuerpos**, debes tener en cuenta algunas ideas para organizar tu trabajo.

Consejos generales:

1. Coloca los **datos numéricos** conocidos sobre la figura.

2. Escribe la **fórmula** que utilizarás para resolver el ejercicio según lo pedido.

3. Generalmente para calcular lo pedido, faltará un **elemento** o **varios**, por lo que debes utilizar algunos conocimientos de **Geometría** para hallarlos. Puedes apoyarte en las ideas siguientes:

- Al colocar los datos sobre la figura, generalmente obtienes en qué **triángulo** u otra **figura** debes trabajar para hallar lo que te falta.

- Si vas a utilizar un **triángulo rectángulo** y conoces **lados** y **ángulos**, debes utilizar **razones trigonométricas**. Pero, si conoces solo **lados**, debes utilizar uno de los **teoremas de Pitágoras**.

- Si en los datos te brindan **áreas**, **perímetros**, **volúmenes**, etc, generalmente se utilizan para **despejar** algún elemento de dichas fórmulas.

4. Ni en la figura, ni en los cálculos es necesario colocar los datos numéricos con el **coma cero** al final. Eso solo es para los **datos** y la **respuesta final**, si los necesita.

5. Los cálculos intermedios se deben trabajar con **una cifra más** de la que vas a dar como respuesta. Si es muy engorroso el cálculo, se acepta trabajar con la **misma** cantidad de **cifras**.

6. Siempre que vayas a utilizar el **teorema de Pitágoras** o **razones trigonométricas**, debes declarar que el triángulo es **rectángulo**.

7. La respuesta se da con la **menor cantidad** de cifras que tengan los datos.

Otros elementos importantes

Para resolver ejercicios sobre **formato diverso** o **justificar igualdades** en los ejercicios de Geometría son necesarios conocimientos como los siguientes:

Relación de posición de rectas en el espacio:

♦ Las rectas están **contenidas en un plano** y entonces:

a) se **cortan** o,

b) son **paralelas**.

♦ Las rectas **no están**

Criterios de determinación de un plano:

♦ Tres puntos no alineados.

♦ Dos rectas que se cortan.

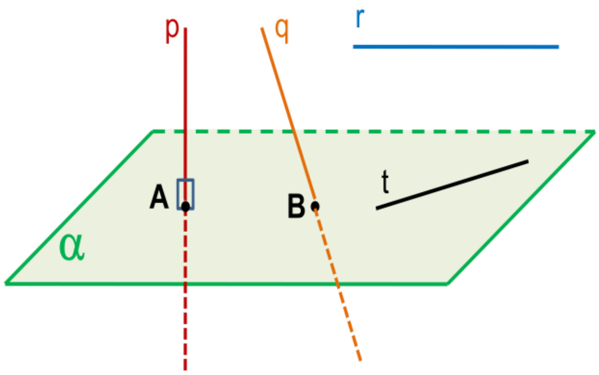
♦ Dos rectas paralelas.

♦ Una recta y un punto exterior a ella.

contenidas en un plano y entonces **no se cortan**. Se dice que se **cruzan** o que son **alabeadas**.

Rectas y planos:

Una **recta** y un **plano** pueden:



♦ **no tener puntos comunes**, entonces son **paralelo**, **r**||α.

♦ **Tener puntos comunes**, entonces

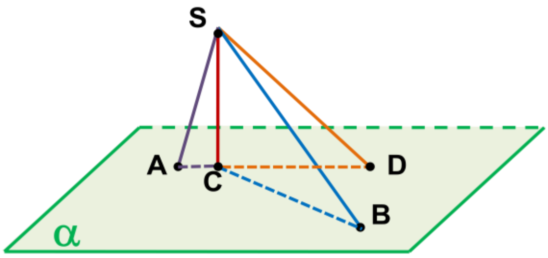
a) todos los puntos de la recta pertenecen al plano, la recta está **contenida** en el plano, t⊂α.

b) Tienen un solo punto común, entonces se **intersecan** y diferenciamos dos casos:

• la recta es **perpendicular** a todas las rectas del plano que pasan por su punto de intersección **A** (pie de la perpendicular), entonces la recta es **perpendicular** al plano, **p**⊥α.

• La recta **no** es **perpendicular** al menos a una de las rectas que pasan por su punto de intersección **B** (pie de la oblicua), entonces la recta es **oblicua** al plano, **q** oblicua a α.

c) Si desde un punto se trazan una perpendicular y varias oblicuas a un plano:



♦ el segmento de perpendicular tiene **menor** longitud que los segmentos oblicuos, $\overline{SC} < \overline{SD}$; $\overline{SC} < \overline{SB}$; $\overline{SC} < \overline{SA}$

♦ a **mayor oblicua** le corresponde **mayor proyección** y viceversa.

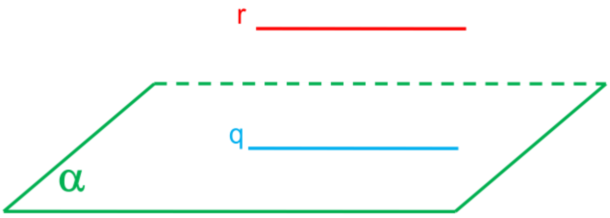
Oblicua mayor: $\overline{SB}$ **proyección mayor**: $\overline{CB}$

Oblicua menor: $\overline{SA}$ **proyección menor**: $\overline{CA}$

♦ a **oblicuas iguales** le corresponden **proyecciones iguales**.

Criterios de paralelismo y perpendicularidad entre recta y plano:

♦ Una recta es **paralela a un plano** si es **paralela** a **una** recta contenida en dicho plano.



$r \parallel q,\ q \subset \alpha \rightarrow r \parallel \alpha$

Si **r**$\parallel\alpha$, entonces **r** es paralela a infinitas rectas contenidas en α (todas las que se encuentran en su misma posición). Con respecto a las otras rectas del plano, se cruza o es alabeada.

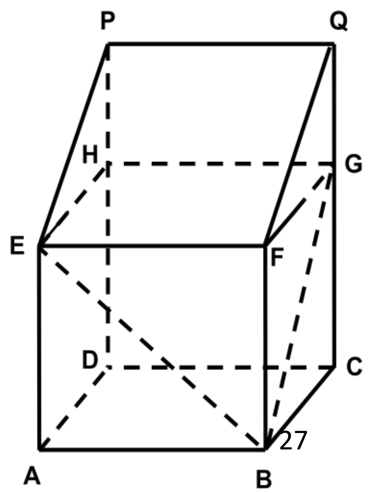
♦ Si una recta es **perpendicular** a **dos rectas** de un plano que se cortan en su pie, entonces es **perpendicular** al plano.

Si **r**$\perp\alpha$, entonces **r** es perpendicular a infinitas rectas contenidas en α (todas las que pasen por su pie).

Con respecto a las otras rectas del plano, se cruza o es alabeada.

A continuación te mostramos algunos ejemplos resueltos sobre el tema, los que debes complementar con los ejercicios de las **teleclases**, el **libro de texto** y los **temarios** y **consolidaciones** disponibles en nuestra página del **Portal Educativo**.

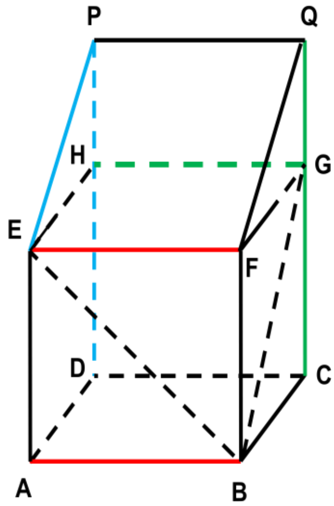
Ejemplo 1: En la figura se muestra un prisma recto **ABCDEFGH**, en cuya base superior está situado otro cuerpo **FGQEHP**. **P** y **Q** están situados sobre las



prolongaciones de $\overline{DH}$ y $\overline{CG}$, tal que $\overline{PH} = \overline{GQ}$.

$\overline{EB}$ y $\overline{GB}$ son diagonales de las caras **ABFE** y **BCGF** respectivamente.

1.1. Identifica en la figura:



a) dos rectas paralelas.

R/ EF y **AB**.

b) dos rectas que se corten no perpendicularmente.

R/ EP y **DP**.

c) dos rectas perpendiculares.

R/ HG y **CQ**.

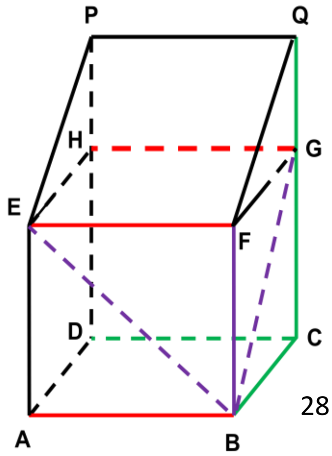
d) dos rectas alabeadas.

R/ QF y **EB**.

e) tres rectas paralelas dos a dos.

R/ EF ; **AB** y **HG**.

f) tres rectas perpendiculares dos a dos.

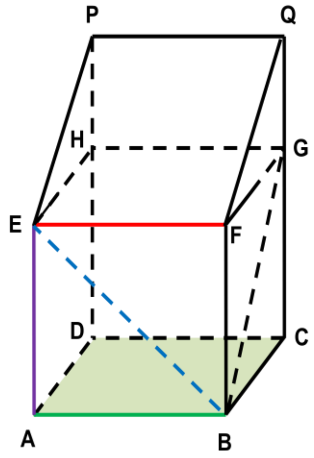


R/ **DC** ; **BC** y **QC**.

g) tres rectas que se corten en un punto y no estén simultáneamente en un mismo plano.

R/ **EB** ; **GB** y **FB**.

h) un segmento de recta paralela al plano **ABC**. **R/** $\overline{EF}$.



i) un segmento de recta perpendicular al plano **ABC**. **R/** $\overline{EA}$.

j) un segmento de recta oblicuo al plano **ABC**. **R/** $\overline{EB}$.

k) la proyección de la oblicua seleccionada.

R/ $\overline{AB}$.

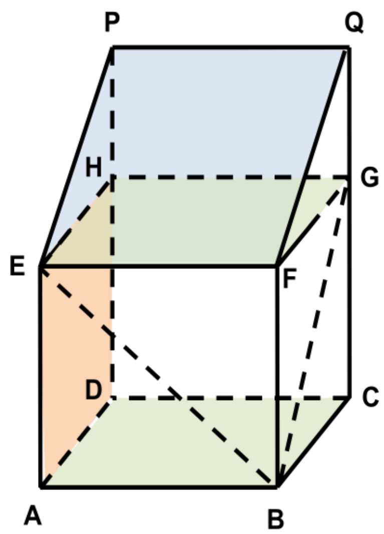
l) dos planos paralelos.

R/ **ABC** y **EFG**.

m) dos planos perpendiculares.

R/ **ABC** y **EAD**.

n) dos planos que se intersecan y no sean perpendiculares.



R/ **EFG** y **EFQ**.

Nota:

1. Si el enunciado pide identificar **rectas**, **no** se pone la **raya** sobre las letras.

2. Si el enunciado pide identificar **segmentos** de **rectas**, se pone la **raya** sobre las letras.

3. Los **planos** se denotan con **tres letras** cualesquiera contenidas sobre él.

4. En cada inciso puede haber **varias posibilidades** de respuesta, solo te mostramos **una** como modelo.

1.2. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Argumenta las que sean falsas, por qué lo son.

a) __ El cuerpo **FGQEHP** es una pirámide.

R/ **Falso**. Las **caras triangulares** son **paralelas** entre sí, por lo que serían **dos bases** y la pirámide solo tiene **una base**. El cuerpo es también un **prisma**, lo que está colocado horizontal.

b) __ $\overline{EB}$ es una arista del prisma **ABCDEFGH**.

R/ Falso. Ya que es la **diagonal** de una cara, **no** un **lado** de la **cara lateral**.

c) __ El cuerpo **ABCDEFGH** tiene 8 vértices.

R/ Verdadero. Son **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** y **H.**

d) __ $\overline{FQ}$ es oblicuo al plano **HGQ**.

R/ Verdadero. Cae **inclinado** sobre ese plano.

e) __ $\overline{FQ}$ y $\overline{BC}$ se cruzan.

R/ Falso. Ya que están en el mismo plano **BCQ**. (Las rectas que se **cruzan no** pueden estar en un **mismo plano)**.

f) __ Los puntos **E**, **B** y **G** determinan un único plano.

R/ Verdadero. **Tres** puntos **no alineados** determinan un **único** plano.

g) __ Los rectas **PQ**, **EF** y **AB** determinan tres planos.

R/ Verdadero. **Dos** rectas **paralelas** determinan **un** plano, luego:

- **PQ** // **EF**, determinan un plano.
- **PQ** // **AB**, determinan un segundo plano.
- **AB** // **EF**, determinan un tercer plano.

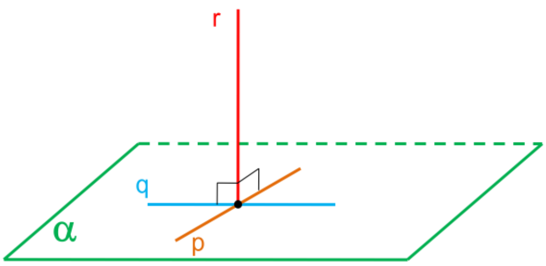
Ejemplo 2: Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Argumenta en las que sean falsas, el por qué lo son.

a) __ Si una recta ***r*** es perpendicular a un plano α, entonces ***r*** es perpendicular a todas las rectas contenidas en dicho plano.

R/ Falso. Es **perpendicular** solo a las **infinitas** rectas del plano que pasan por su pie, con las otras se cruza.

b) __ Por un punto **A** exterior a un plano α se pueden trazar infinitas rectas paralelas a dicho plano.

R/ Verdadero.



$r \perp q$, $r \perp p$ y $q, p \subset \alpha \rightarrow r \perp \alpha$

c) __ Si ***r*** y ***q*** son dos rectas paralelas y **P** es un punto exterior a ellas y no situados sobre el mismo plano, entonces el punto **P** y las rectas ***r*** y ***q*** determinan tres planos.

R/ Verdadero.

● Como una **recta** y un **punto exterior** determinan un plano, entonces cada recta con el punto **P** determinan un plano cada una, o sea, ya tenemos **dos planos**.

● Como dos **rectas paralelas** determinan un **único plano**, entonces ***r*** y ***q*** determina el **tercer plano**.

d) __ Si dos rectas ***r*** y ***q*** no tienen puntos comunes, entonces son paralelas.

R/ Falso. Pueden ser **alabeadas**. En el enunciado no dice que las rectas estén en un mismo plano.

e) __ Si desde un punto **R** exterior a un plano α se trazan dos oblicuas $\overline{RQ}$ y $\overline{RP}$, tal que $\overline{RQ} > \overline{RP}$, entonces la proyección de $\overline{RQ}$ es mayor que la de $\overline{RP}$.

R/ Verdadero. A **mayor oblicua** le corresponde **mayor proyección** y viceversa.

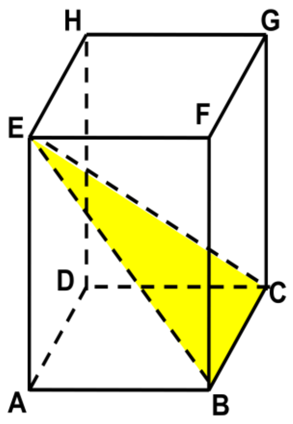
f) __ El ángulo de inclinación de una oblicua respecto a un plano α siempre es un ángulo agudo.

R/ Verdadero. Entre la **oblicua**, su **proyección** y el segmento de **perpendicular** a un plano se forma un **triángulo rectángulo** y el ángulo de inclinación es uno de sus dos ángulos **agudos**.

g) __ Si una recta ***r*** es paralela a un plano α, entonces ***r*** es paralela a todas las rectas contenidas en dicho plano.

R/ Falso. Es **paralela** solo a las **infinitas** rectas del plano que estén en su misma posición. Con las otras infinitas rectas del plano es **alabeada**.

Ejemplo 3: En la figura, **ABCDEFGH** prisma recto cuyas bases **ABCD** y **EFGH** son cuadradas.



$\overline{EB}$ diagonal de la cara **ABFE**.

$\overline{AB}$ = 4,00 cm y el ∠EBA = 60º.

a) Nombra el ángulo de inclinación de la oblicua $\overline{EC}$ con el plano **ABC**.

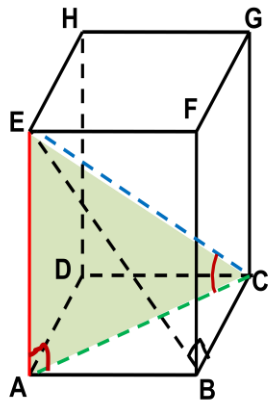
b) Prueba que el ∆**EBC** es rectángulo en **B**.

c) Calcula el volumen del prisma.

d) Determina el área total del prisma.

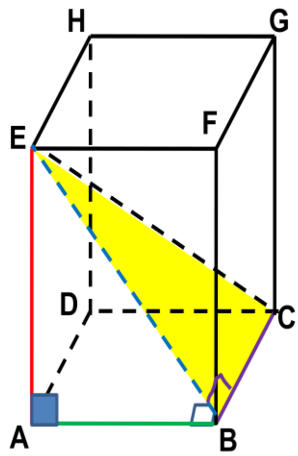
e) Halla el área de la región sombreada.

Solución a):



Es el ∠ECA, que se forma entre la **oblicua** $\overline{EC}$ y su **proyección** $\overline{AC}$. ($\overline{AC}$ es el segmento que une el **pie** de la **perpendicular** y el de la **oblicua**).

Solución b):



● Identificas los **4 elementos**:

$\overline{EA}$ **perpendicular** al plano **ABC**, por ser **arista lateral** de un prisma recto.

$\overline{EB}$ **oblicua** al plano **ABC** y $\overline{AB}$ su **proyección**.

$\overline{BC}$ **segmento de recta** contenido en el plano **ABC** y pasa por el pie de la oblicua.

● Escribes los **2 pasos** del teorema:

$\overline{AB} \perp \overline{BC}$, por ser **lados consecutivos** de un **cuadrado**.

$\overline{EB} \perp \overline{BC}$, por el teorema de las **tres perpendiculares**.

● Escribes la conclusión:

Como $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, el **∠EBC = 90º** y el **△EBC** es rectángulo en **B**.

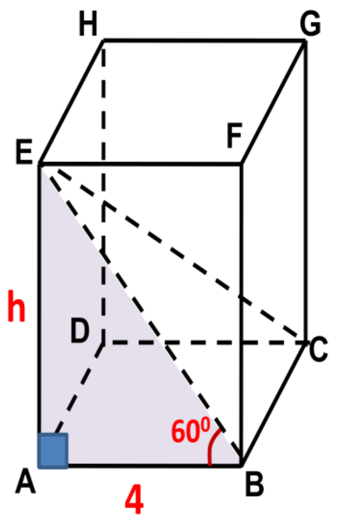
Solución c):

Escribes la fórmula de volumen: **$V_{(ABCDEFGH)}$** = **$A_B \cdot h$**

Para hallar el **volumen**, necesitas la **altura** del prisma.

Como puedes apreciar, cuando colocas los datos sobre la figura, ya puedes determinar en qué **triángulo** puedes trabajar.

● Hallas la **altura**:



Cuando en un **triángulo rectángulo**, conoces un **lado** y un **ángulo agudo**, debes utilizar **razones trigonométricas** para hallar el otro lado.

Como tienes que hallar un **cateto** y conoces la longitud del otro **cateto**, entonces la **razón** que relaciona ambos catetos es la **tangente**.

♦ En el **△EAB** rectángulo en **A**:

$$\tan\angle EBA = \frac{cat.op.}{cat.ady.} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$$

$\tan 60^{o} = \frac{\overline{AE}}{4}$ (sustituyes)

$\sqrt{3} = \frac{\overline{AE}}{4}$ (Buscas en la tabla)

$\overline{AE} = 4\sqrt{3}$ cm (despejas)

Luego, $\overline{AE}$ = **h** = **$4\sqrt{3}$ cm**

● Hallas el **volumen**:

♦ Determinas el **área** de la **base**:

Como es **cuadrada**: $A_{(ABCD)} = a^2 = 4^2 =$ **16 cm²**

♦ Determinas el **volumen**:

$V_{(ABCDEFGH)} = A_B \cdot h = 16\ cm^2 \cdot 4\sqrt{3}\ cm$

$= 16\ cm^2 \cdot 4 \cdot 1{,}73\ cm \approx$ **110,72 cm³**

R/ El volumen del prisma es de aproximadamente **110 cm³**.

Nota: Como el dato de la longitud del lado tiene **tres cifras** significativas, la respuesta hay que darla con **tres cifras**.

Solución d):

Escribes la fórmula de área total: $A_T = 2A_B + A_L$

Como puedes observar para calcular el **área total** es necesario tener el **área** de la **base** y el **área lateral** del prisma.

♦ A_B = **16 cm²**, ya está calculada en el inciso anterior.

♦ Determinas el A_L: $A_L = P_B \cdot h$

$$A_L = 4a \cdot h = 4 \cdot 4\text{ cm} \cdot 4\sqrt{3}\text{ cm} \approx 64 \cdot 1{,}73 \approx 110{,}72\text{ cm}^2$$

● Hallas el A_T:

$$A_T = 2A_B + A_L$$

$$A_T = 2 \cdot 16\text{ cm}^2 + 110{,}72\text{ cm}^2 \qquad \text{(sustituyes)}$$

$$A_T \approx 142{,}72\text{ cm}^2 \qquad \text{(efectúas las operaciones)}$$

R/ El área total del prisma es de aproximadamente **143 cm²**.

Nota: Como el dato de la longitud del lado tiene **tres cifras** significativas, la respuesta hay que darla con **tres cifras**.

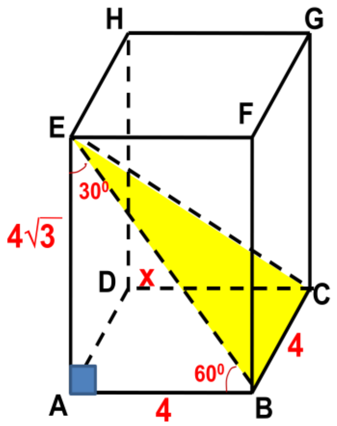
Solución e):

La región sombreada es el **△EBC** rectángulo en **B**, luego sus catetos son $\overline{BC}$ y $\overline{EB}$.

$$A(\triangle EBC) = \frac{\overline{BC}.\overline{EB}}{2}$$

Conoces el valor de $\overline{BC}$ y debes hallar el valor de $\overline{EB}$.

$\overline{EB}$ es la **hipotenusa** del ▵EAB rectángulo en **A**, del cual conoces todos sus elementos. Para hallar $\overline{EB}$, puedes utilizar el **teorema de Pitágoras**, las **razones trigonométricas** o mucho más rápido el **teorema del ángulo de 30º**.



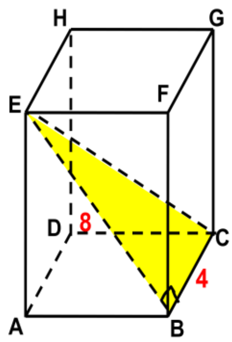
● Hallas la longitud de $\overline{EB}$.

En el **▵EAB** rectángulo en **A**:

∠EBA = **60º** por **dato**

∠BEA = **30º** por **suma** de **ángulos agudos**

Como $\overline{AB}$ = **4 cm**, entonces $\overline{EB}$ = **8 cm**, por el **teorema del ángulo de 30º**



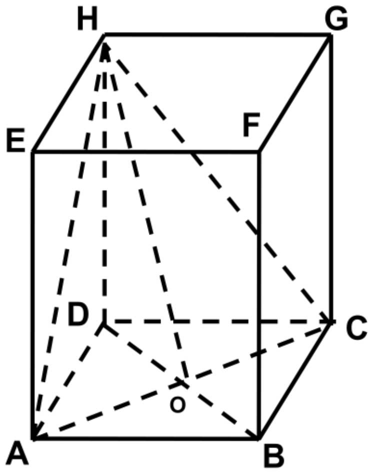
● Hallas el área del **▵EBC**.

A(▵EBC) = $\frac{\overline{BC}\cdot\overline{EB}}{2} = \frac{4\cdot 8}{2}$ = **16 cm²**

R/ El área de la región sombreada es igual a **16,0 cm²**.

Nota: Como la respuesta hay que darla con **tres cifras** significativas, hay que agregar un **cero** a la respuesta.

Ejemplo 4: En la figura, **ABCDEFGH** prisma recto cuyas bases **ABCD** y **EFGH** son paralelogramos.



$\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ diagonales de la base **ABCD**.

$\overline{HO}$ altura del $\triangle$**AHC** relativa al lado $\overline{AC}$.

$\overline{DB}$ = 6,0 dm, $\overline{HO}$ = 5,0 dm y

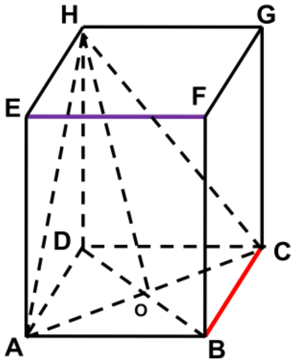
A($\triangle$HAC) = 20 dm^2.

a) Identifica en la figura dos segmentos de recta que sean alabeados.

b) Prueba que el paralelogramo **ABCD** es un rombo.

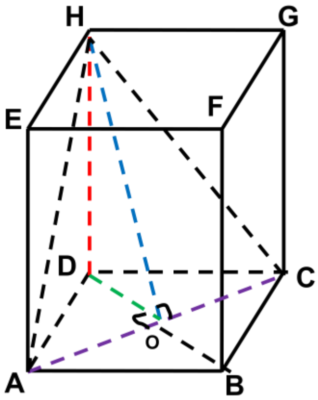
c) Calcula el volumen de la pirámide **HDAC**.

Solución a):



Una pareja puede ser $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$.

Solución b):



- Identificas los **4 elementos**:

$\overline{HD}$ **perpendicular** al plano **ABC**, por ser **arista lateral** de un prisma recto.

$\overline{HO}$ **oblicua** al plano **ABC** y $\overline{DO}$ su **proyección**.

$\overline{AC}$ **segmento de recta** contenido en el plano **ABC** y pasa por el pie de la oblicua.

- Escribes los **2 pasos** del teorema:

$\overline{HO} \perp \overline{AC}$, por ser **altura** del **△AHC** relativa al lado $\overline{AC}$.

$\overline{DO} \perp \overline{AC}$, por el **recíproco** del teorema de las **tres perpendiculares**.

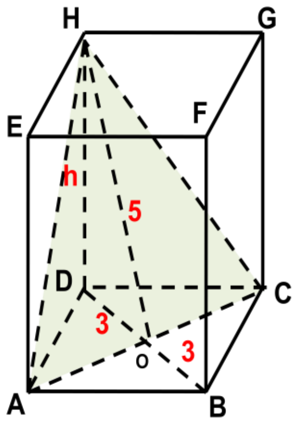
- Escribes la conclusión:

Como $\overline{DO} \perp \overline{AC}$ y $\overline{DO}$ está contenido $\overline{AC}$, entonces $\overline{DB} \perp \overline{AC}$ en **O** y un **paralelogramo** con sus diagonales **perpendiculares** es un **rombo**.

Solución c):

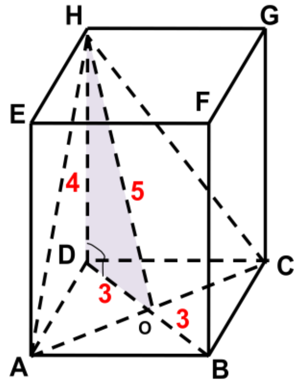
- Hallas la **altura** de la pirámide:

Cuando en un **triángulo rectángulo**, conoces dos **lados** y debes hallar el tercero, debes utilizar el **teorema de Pitágoras**.



En el **△HDO** rectángulo en **D**:

$\overline{HO}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{HD}^2$ por el **teorema de Pitágoras**



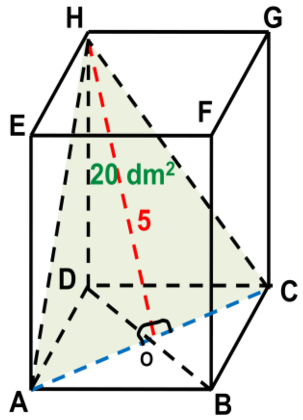
$5^2 = 3^2 + \overline{HD}^2$ (sustituyes)

$25 = 9 + \overline{HD}^2$ (hallas los cuadrados)

$\overline{HD}^2 = 25 - 9 = 16$ (despejas)

$\overline{HD} = \sqrt{16} =$ **4 dm** (hallas la raíz cuadrada)

- Hallas la otra **diagonal** del rombo:



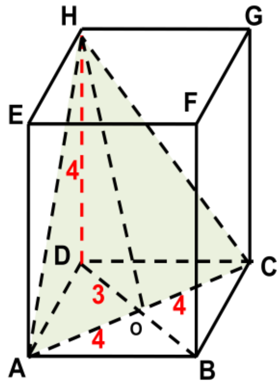
Conoces el área del **△HAC** y su altura, debes **despejar** la **base**, que coincide con la **diagonal** del rombo.

$$\textbf{A(}\triangle\textbf{HAC)} = \frac{\overline{AC}.\overline{HO}}{2}$$

$$\textbf{20 dm}^2 = \frac{\overline{AC}\,.\ 5\text{dm}}{2} \quad \text{(sustituyes)}$$

$$\overline{AC} = \frac{\mathbf{20\ dm^2\ .\ 2}}{\mathbf{5\ dm}} = \textbf{8 dm} \quad \text{(despejas y calculas)}$$

- Hallas el **volumen** de la pirámide **HDAC**:



$$A_B = A_{(\triangle DAC)} = \frac{\overline{AC}.\overline{DO}}{2} = \frac{8\text{ dm}\ .\ 3\text{ dm}}{2}$$

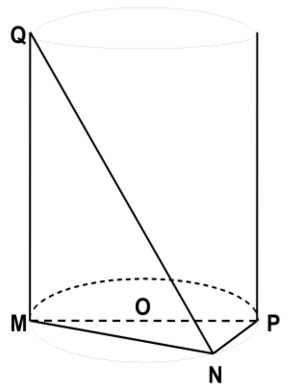
A$_{(\Delta DAC)}$ = **12 dm²**

$$V_{(HDAC)} = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{12\,dm^2 \cdot 4\,dm}{3} = 16\ dm^3$$

R/ El volumen de la pirámide es igual a **16 dm³**.

Nota: El **área** de la **base** de la **pirámide** también se puede calcular, hallando el **área** del **rombo** y **dividirla** por **2**.

Ejemplo 5 : En la figura se muestra un cilindro circular recto. $\overline{MP}$ es un diámetro de la circunferencia base de centro **O**.



N es un punto de la circunferencia.

M es la proyección del punto **Q** sobre el plano de la base.

a) Prueba que el triángulo **QNP** es rectángulo en **N**.

b) Si la tan∠QPM = 3, $\overline{MP}$ = 10,0 cm y $\overline{NP}$ = 6,00 cm, calcula el volumen de la pirámide **QMNP**.

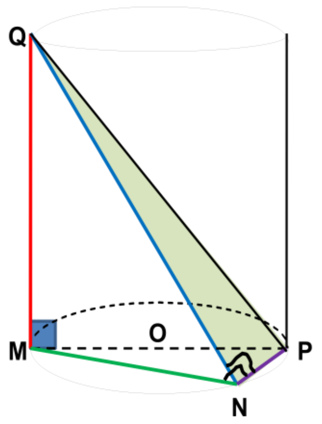
c) Calcula el volumen del cilindro.

d) Determina el área lateral del cilindro.

Solución a):

Trazas la oblicua $\overline{QP}$ y formas el **△QNP**.

- Identificas los **4 elementos**:



$\overline{QM}$ **perpendicular** al plano **MNP**, por ser **M** la proyección del punto **Q** sobre el plano de la base.

$\overline{QN}$ **oblicua** al plano **MNP** y $\overline{MN}$ su **proyección**.

$\overline{NP}$ **segmento de recta** contenido en el plano **MNP** y pasa por el pie de la oblicua.

- Escribes los **2 pasos** del teorema:

$\overline{MN} \perp \overline{NP}$, por ser **∠N inscrito** sobre una **semicircunferencia** o **diámetro** (Teorema de Tales).

$\overline{QN} \perp \overline{NP}$, por el teorema de las **tres perpendiculares**.

- Escribes la conclusión:

Como $\overline{QN} \perp \overline{NP}$, entonces el **∠QNP = 90º** y el **△QNP** es rectángulo en **N**.

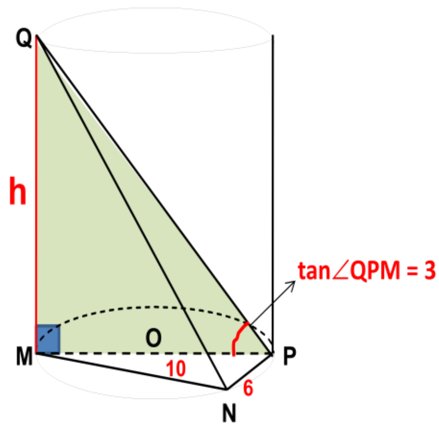
Solución b):

● Hallas la **altura** del cilindro:

En el $\triangle$**QMP** es rectángulo en **M**:

tan∠QPM = $\frac{cat.op.}{cat.ady.}$

3 = $\frac{h}{10}$ $\rightarrow$ **h = 30 cm**



● Hallas la longitud de $\overline{MN}$:

En el $\triangle$**MNP** es rectángulo en **N**:

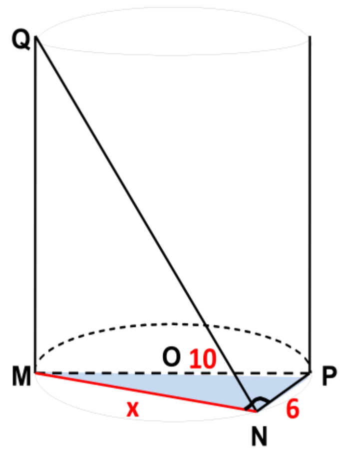
$\overline{MP}^2$ = $\overline{PN}^2$ + $\overline{MN}^2$ por el **teorema de Pitágoras**

10^2 = 6^2 + $\overline{MN}^2$ (sustituyes)

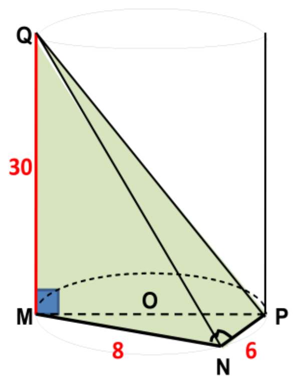
100 = 36 + $\overline{MN}^2$ (hallas los cuadrados)

$\overline{MN}^2$ = 100 – 36 = 64 (despejas)

$\overline{MN}$ = $\sqrt{64}$ = **8 cm** (hallas la raíz cuadrada)



● Hallas el **volumen** de la pirámide **QMNP**:



$$A_B = A_{(MNP)} = \frac{\overline{MN}.\overline{NP}}{2} = \frac{8\ \mathrm{dm}\ .\ 6\ \mathrm{dm}}{2}$$

$$A_B = A_{(MNP)} = 24\ \mathrm{cm}^2$$

$$V_{(QMNP)} = \frac{A_B\ .\ h}{3} = \frac{24\ cm^2\ .\ 30\ cm}{3} = 240\ \mathrm{cm}^3$$

R/ El volumen de la pirámide es igual a **240 cm³**.

Solución c):

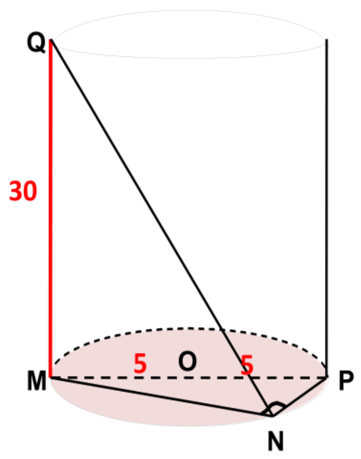
- Hallas el **volumen** del cilindro:

Como **d** = **10 dm**, entonces **r** = **5 cm**.

$$V_{cilindro} = A_B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 30$$

$$V_{cilindro} \approx 3{,}14 \cdot 25 \cdot 30 \approx 2\ 355\ \mathrm{cm}^3$$

$$V_{cilindro} \approx 2{,}36\ \mathrm{dm}^3$$



R/ El volumen del cilindro es aproximadamente **2,36 dm³**.

Nota:

1. El **área** de la **base** se puede calcular en la misma fórmula, ya que siempre será el **área** de un **círculo**.

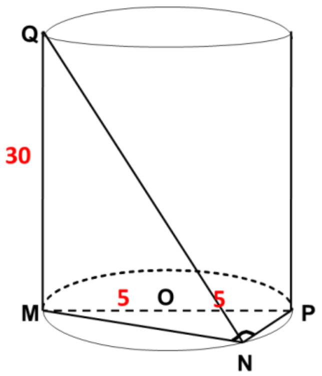
2. Como los datos tiene **tres cifras** significativas y la respuesta tiene **cuatro** cifras enteras, hay que **cambiar** de **unidad de medida**, dividiendo por **mil**. (no es posible redondear)

Solución d):

● Hallas el **área lateral** del cilindro:

$A_{L(cilindro)} = P_B \cdot h = (2\pi \cdot r) \cdot h =$

$2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 30 \approx$ **942 cm²**



R/ El área lateral del cilindro es aproximadamente **942 cm²**.

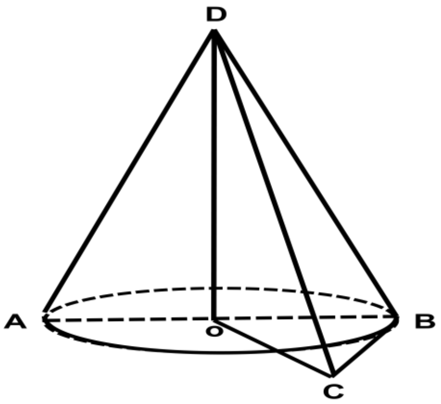
Nota:

1. El **perímetro** de la **base** se puede calcular en la misma fórmula, ya que siempre será el de un **círculo**.

2. El perímetro de la circunferencia es su longitud, o sea, $2\pi r$.

3. Como los datos tiene **tres cifras** significativas, la respuesta se da con **tres**.

Ejemplo 6 : En la figura se muestra un cono circular recto. $\overline{DO}$ su altura y **O** centro de la base de diámetro $\overline{AB}$.



$\overline{BC}$ es tangente a la circunferencia en el punto **B** y **C** punto exterior a la circunferencia situado sobre su mismo plano.

a) Prueba que el **△DBC** es rectángulo.

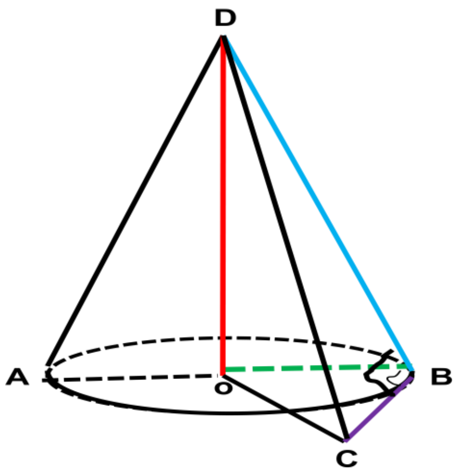
b) Si el **P**(**△DBC**) = 12 cm y el ángulo de inclinación de la generatriz $\overline{DB}$ sobre el plano de la base es igual a 60º, halla el volumen del cono.

c) Calcula el área total del cono.

Solución a):

● Identificas los **4 elementos**:

$\overline{DO}$ **perpendicular** al plano **ABC**, por ser **altura** del cono.



$\overline{DB}$ **oblicua** al plano **ABC** y $\overline{OB}$ su **proyección**.

$\overline{BC}$ **segmento de recta** contenido en el plano **ABC** y pasa por el pie de la oblicua.

● Escribes los **2 pasos** del teorema:

$\overline{OB} \perp \overline{BC}$, por ser $\overline{BC}$ tangente a la circunferencia en **B**.

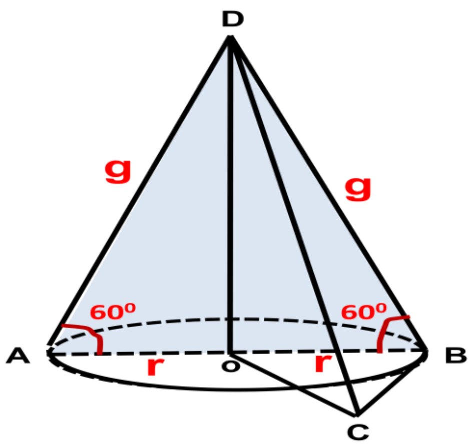
$\overline{DB} \perp \overline{BC}$, por el teorema de las **tres perpendiculares**.

● Escribes la conclusión:

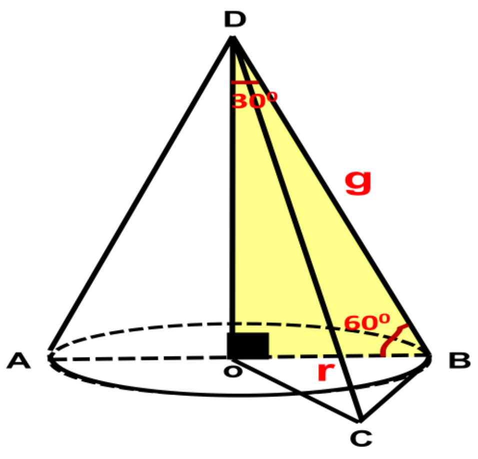
Como $\overline{DB} \perp \overline{BC}$, entonces el **∠DBC = 90º** y el **△DBC** es **rectángulo** en **B**.

Solución b):

En un cono recto, todas las generatrices tienen **igual** inclinación respecto al plano base. Luego, el **△DAB** es **isósceles** de base $\overline{AB}$ y un triángulo **isósceles** con un ángulo de **60º** es **equilátero**.



Por lo tanto, **g** = **d** = 2**r**.



II vía para llegar a esa conclusión: En el **△DOB** rectángulo en **O**, si **∠B = 60º**, entonces el **∠BDO = 30º**, por **suma** de **ángulos agudos**. En un triángulo rectángulo, el **cateto** que se opone al **ángulo** de **30º** mide la **mitad** de su **hipotenusa**.

Por lo tanto, **r** = $\frac{g}{2} \rightarrow$ **g** = 2**r** = **d**.

- Hallas el lado del **triángulo equilátero**:

P(**△ABD**) = 3a

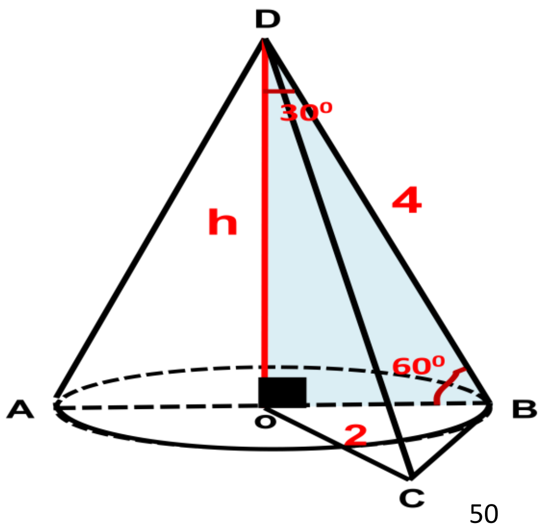
12 cm = 3a

a = 4 cm

$\overline{DB}$ = **g** = **4 cm**

$\overline{OB}$ = **r** = **2 cm**

- Hallas la **altura** del cono:



En el **△DOB** es rectángulo en **O**:

$\overline{DB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{DO}^2$ por el **teorema de Pitágoras**

$4^2 = 2^2 + \overline{DO}^2$ (sustituyes)

$16 = 4 + \overline{DO}^2$ (hallas los cuadrados)

$\overline{DO}^2 = 16 - 4 = 12$ (despejas)

$\overline{DO} = \sqrt{12} = \mathbf{2\sqrt{3}\ cm}$ (hallas la raíz cuadrada)

Nota: Recuerda que en un triángulo rectángulo, el **cateto adyacente** al **ángulo** de **30º** mide **también** la **mitad** de su **hipotenusa**, pero multiplicado por $\sqrt{3}$. Este conocimiento te permite hallar **directamente** la longitud de ese cateto.

● Hallas el **volumen** del cono:

$$\textbf{V(cono)} = \frac{A_B\,.h}{3} = \frac{\pi\cdot r^2.h}{3} = \frac{3{,}14\cdot 2^2.2\sqrt{3}}{3} \approx \mathbf{14\ cm^3}$$

R/ El volumen del cono es aproximadamente **14 cm³**.

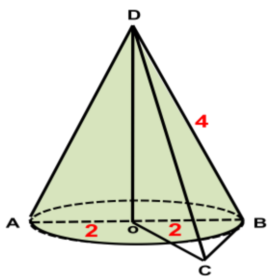
Nota:

1. Como la **base** del **cono** es siempre un **círculo**, el **área** de la **base** se puede calcular en la misma fórmula.

2. Como los datos tiene **dos cifras** significativas, la respuesta se da con **dos.**

Solución c):

$A_T = A_B + A_L$



● Hallas el **área de la base** del cono:

A_B = $\pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot 2^2 \approx 3{,}14.4 \approx$ **$12{,}56\ cm^2$**

● Hallas el **área lateral** del cono:

A_L = $\pi \cdot r \cdot g = 3{,}14 \cdot 2 \cdot 4 \approx 3{,}14.8 \approx$ **$25{,}12\ cm^2$**

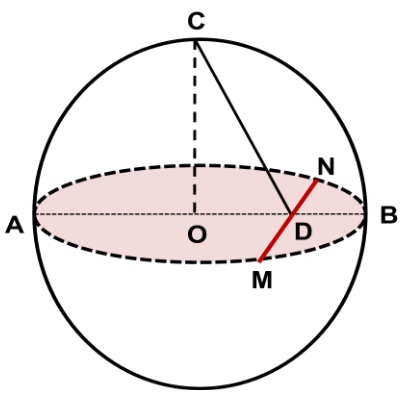
● Hallas el **área total** del cono:

A_T = **A_B** + **A_L** = **$12{,}56\ cm^2$** + **$25{,}12\ cm^2$**

A_T $\approx 37{,}68\ cm^2 \approx$ **$38\ cm^2$**

R/ El área total del cono es aproximadamente **$38\ cm^2$**.

Ejemplo 7: En la figura se muestra una esfera cuyo círculo máximo tiene centro **O** y diámetro $\overline{AB}$.



C es un punto de la esfera, tal que $\overline{CO}$ es perpendicular a $\overline{AB}$. **D** es punto medio de $\overline{OB}$ y de la cuerda $\overline{MN}$.

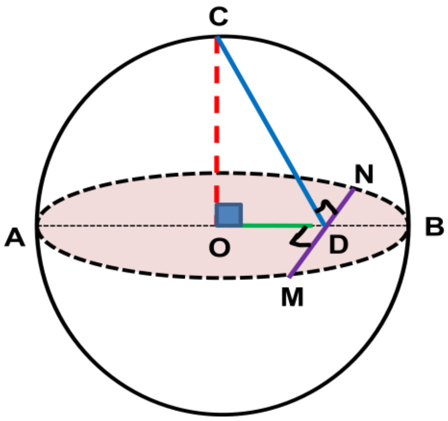
a) Prueba que $\overline{CD}$ es perpendicular a la cuerda $\overline{MN}$.

b) Calcula el volumen de la esfera, si $\overline{CD} = 2\sqrt{5}$ dm.

c) Determina el área de la esfera.

Solución a):

• Identificas los **4 elementos**:



$\overline{CO}$ **perpendicular** al plano **ABM**, por dato.

$\overline{CD}$ **oblicua** al plano **ABM** y $\overline{OD}$ su **proyección**.

$\overline{MN}$ **segmento de recta** contenido en el plano **ABM** y pasa por el pie de la oblicua.

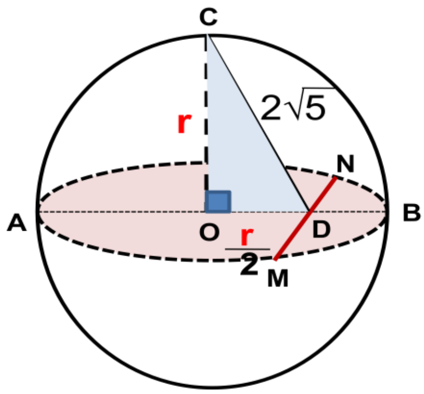
• Escribes los **2 pasos** del teorema:

$\overline{OD} \perp \overline{MN}$, por ser **D punto medio** de $\overline{MN}$ y $\overline{OD}$ estar contenido sobre el **radio** $\overline{OB}$, ya que si un **radio** (**diámetro**) corta a una **cuerda** en su **punto medio**, lo hace **perpendicularmente**.

$\overline{CD} \perp \overline{MN}$, por el teorema de las **tres perpendiculares**.

Solución b):

• Hallas el **radio** de la esfera:



Como **C** es un punto de la esfera y **O** su centro, el segmento $\overline{CO}$ es un **radio** de la misma.

Como **D** es punto medio del radio $\overline{OB}$, entonces $\overline{OD} = \frac{r}{2}$.

Como $\overline{CO}$ es **perpendicular** a $\overline{AB}$, entonces **∠COD = 90º**.

En el **△COD** es rectángulo en **O**:

$\overline{CD}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OC}^2$ por el **teorema de Pitágoras**

$(2\sqrt{5})^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2$ (sustituyes)

$20 = \frac{r^2}{4} + r^2$ (hallas los cuadrados)

$20 = \frac{r^2}{4} + r^2$ **/.4** (eliminas el denominador)

$80 = r^2 + 4r^2$

$5r^2 = 80 \rightarrow r^2 = 16 \rightarrow r =$ **4 cm**

- Hallas el **volumen** de la esfera:

$V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 4^3 \approx \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 64 \approx \mathbf{268\ cm^3}$

R/ El volumen de la esfera es aproximadamente **268 cm³**.

Nota: Como el dato está en función de una raíz cuadrada, tiene **tres cifras** significativas, la respuesta se da con **tres.**

Solución c):

- Hallas el **área** de la esfera:

$A_{esfera} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 \approx 4 \cdot 3{,}14 \cdot 16 \approx$ **201 cm²**

R/ El área de la esfera es aproximadamente **201 cm²**

Nota: Como el dato está en función de una raíz cuadrada, tiene **tres cifras** significativas, la respuesta se da con **tres.**

Importante

Existen ejercicios sobre el cálculo de cuerpos, donde es necesario **adicionar** o **sustraer** volúmenes o áreas.

Es importante que reconozcas cuando un **cuerpo** se **perfora** o se **rebaja**, cómo responder a preguntas de este tipo:

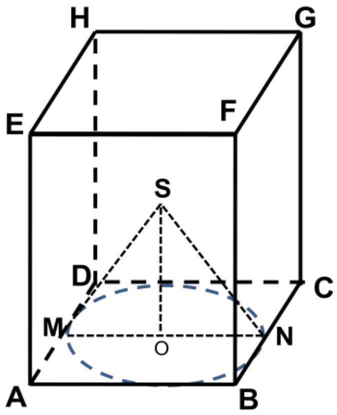
¿Qué cantidad de **material** se **desperdicia**?

¿Cuál es el **volumen** de la pieza **resultante**?

¿Cuál es la **superficie** del cuerpo **resultante**?

La respuesta a estas preguntas está en **dependencia** si el cuerpo se **perforó** o se **rebajó**. Es por eso que te mostramos algunos ejemplos sobre el tema, para que los analices con atención.

Ejemplo 1: La figura muestra un prisma recto de madera, con bases cuadradas, al que se le ha realizado una perforación con forma de cono circular recto, hasta la mitad de su altura. $\overline{SO}$ altura del cono.



$\overline{MN}$ es un diámetro de la circunferencia base del cono, de centro **O** que está inscrita en la base **ABCD** del prisma.

$V_{prisma} = 288\ dm^3$ y $\overline{AB} = 60{,}0$ cm.

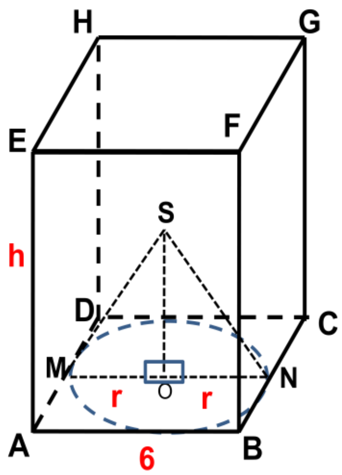
a) Calcula el volumen de la pieza resultante.

b) Determina la cantidad de material que se desperdicia.

c) Si se desea pintar toda la superficie de la pieza resultante, ¿qué cantidad de superficie hay que pintar?

Solución a):

Como el **prisma** recibió una **perfración**, se le **extrajo** material y



queda una **pieza** con un **hueco** en forma de **cono**.

Luego, el **volumen** de la pieza resultante, es igual a la **diferencia** de los **volúmenes** del **prisma** y el **cono**.

Colocas los datos sobre la figura.

● Hallas la **altura** del prisma:

Conoces el **volumen** del **prisma** y la **longitud** del **lado** de la **base cuadrada**,

hay que **despejar** la altura.

$\overline{AB}$ = 60 cm = 6 dm

$V_{prisma} = A_B \cdot h$ $\qquad$ $288\ dm^3 = 36\ dm^2 \cdot h$

$288\ dm^3 = a^2 \cdot h$ $\qquad$ $h = 288\ dm^3 : 36\ dm^2$

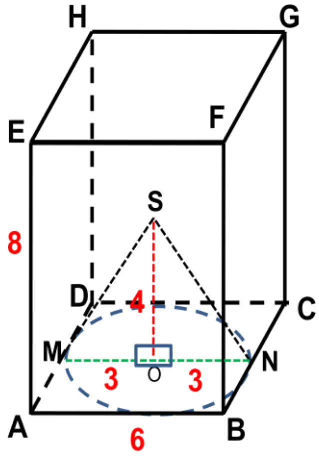
$288\ dm^3 = 6^2 \cdot h$ $\qquad$ $h_{cil.} = 8\ dm$

● Hallas la **altura** del cono:

Como la perforación es hasta la mitad de la altura del prisma, entonces la altura del cono es: $h_{cono} = 4\ dm$

● Hallas el **radio** del cono:

Como la **circunferencia** está **inscrita** en el **cuadrado**, El **diámetro** $\overline{MN}$ tiene **igual**



longitud que el **lado** $\overline{AB}$ del **cuadrado**. Luego, $\overline{AB} = \overline{MN} = 6$ **dm** y el radio del cono es igual a **3 dm**.

- Calculas el **volumen** del **cono**:

V(cono) = $\frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 4}{3}$

$\approx$ **37,68 dm³**

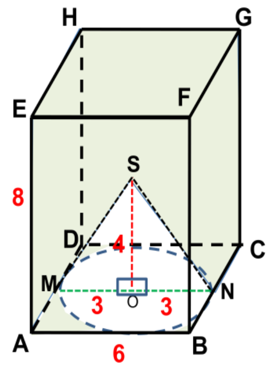
- Calculas el **volumen** de la **pieza resultante**:

V(pieza res.) = V(prisma) – V(cono)

V(pieza res.) = 288 dm³ – 37,68 dm³

V(pieza res.) $\approx$ **250,32 dm³**

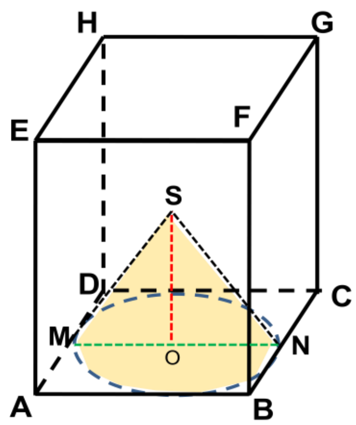
R/ El volumen de la pieza resultante es aproximadamente **250 dm³**.



Solución b):

La cantidad de material que se **desperdicia** coincide con el **volumen** del **cono**.

R/ La cantidad de material que se **desperdicia** es aproximadamente de **37,7 dm³**.



Solución c):

En este caso, que hay que pintar una **superficie**, por lo que se están refiriendo al **área** del cuerpo resultante.

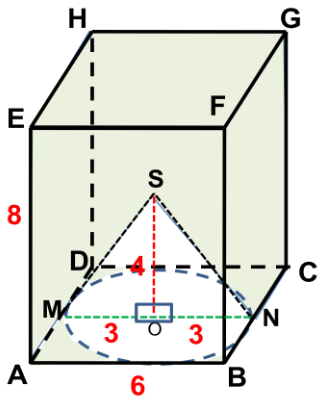
Los ejercicios sobre **área** son más complejos, porque no se pueden **adicionar** y **sustraer** como los **volúmenes**.

Debes imaginar que tienes la pieza delante y analiza qué **superficie** de ella puedes **tocar** con tu mano. Esa superficie será la que debes hallar.

Generalmente hay **diferentes vías** para plantear una **fórmula** que responda el ejercicio, debes busca la **más racional**, aunque lo más importante es resolverlo.

El **área** de este cuerpo se puede hallar, por ejemplo, de estas dos maneras:

- **Superficie a pintar**:



1. $A_{T(prisma)} - A_{(círculo)} + A_{L(cono)}$

2. $A_{L(prisma)} + A_{EFGH} + (A_{ABCD} - A_{(círculo)}) + A_{L(cono)}$

Como ves la primera opción es más racional.

En los ejercicios de las pruebas, generalmente se pide **volumen** o **área**, no ambas cosas, es por eso que para calcular el área ya tienes casi todos los **elementos** hallados de los incisos anteriores.

● **Hallas el área total del prisma**:

$A_{T(prisma)} = 2A_B + A_L$

♦ $A_B = 6^2 = 36\ dm^2$

♦ Determinas el A_L: $A_L = P_B \cdot h$

$A_L = 4a \cdot h = 4 \cdot 6\ dm \cdot 8\ dm = 192\ dm^2$

● Hallas el A_T:

$A_T = 2A_B + A_L$

$A_T = 2 \cdot 36\ dm^2 + 192\ dm^2$ (sustituyes)

$A_T = 264\ dm^2$ (efectúas las operaciones)

● **Hallas el área del círculo**:

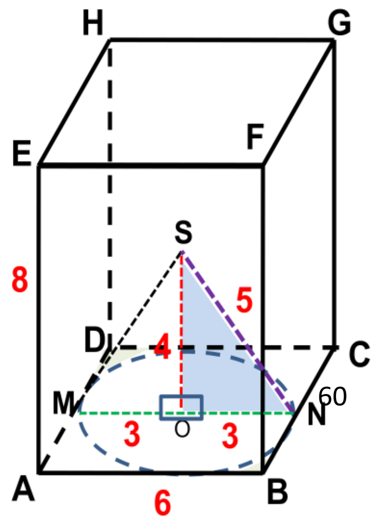
$A_{(círculo)} = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot 3^2 \approx 3{,}14 \cdot 9 \approx 28{,}26\ dm^2$

● **Hallas el área lateral del cono**:

Para hallar el **área lateral** del cono, hay que hallar la **generatriz**.

● Hallas la **generatriz** del cono:

En el $\triangle SON$ es rectángulo en O:



$\overline{SN}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{ON}^2$ por el **teorema de Pitágoras**

$\overline{SN}^2 = 4^2 + 3^2$ (sustituyes)

$\overline{SN}^2 = 16 + 9$ (hallas los cuadrados)

$\overline{SN}^2 = 25$ (adicionas)

$\overline{SN} = \sqrt{25} = \mathbf{5\ dm}$ (hallas la raíz cuadrada)

$A_L = \pi \cdot r \cdot g = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 5 \approx 3{,}14.15 \approx \mathbf{47{,}1\ dm^2}$

● **Hallas la superficie a pintar**:

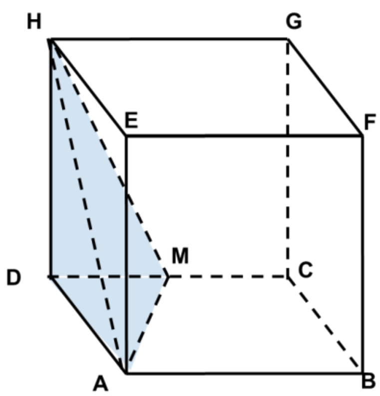
$A_{T(prisma)} - A_{(círculo)} + A_{L(cono)}$

$\approx \mathbf{264\ dm^2} - \mathbf{28{,}26\ dm^2} + \mathbf{47{,}1\ dm^2}$

$\approx \mathbf{282{,}84\ dm^2}$

R/ La cantidad de superficie que se debe pintar es de aproximadamente **283 dm²**.

Ejemplo 2: La figura muestra una pieza maciza de cristal con forma de prisma recto, **ABCDEFGH**, cuyas bases son paralelogramos. La pieza se rebajará hasta obtener la pirámide oblicua **HADM**.



M es punto medio de $\overline{DC}$, tal que $\overline{DM} = \overline{DA}$.

$\angle ADC = 60^o$; **P(ABCD)** = 18,0 cm y

$\overline{HD}$ = 6,00 cm.

a) Calcula el volumen de la pieza resultante.

b) Determina la cantidad de cristal que se desperdicia.

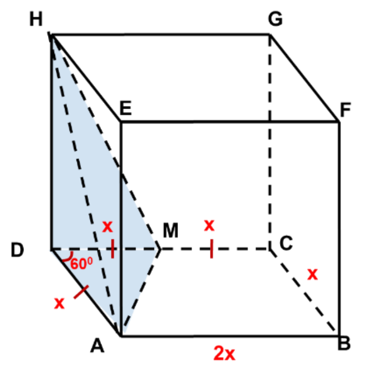
Solución a):

Como el **prisma** se **rebajará** para obtener una **pirámide**, el **volumen** de la pieza resultante es el volumen de la **pirámide**.

Colocas los datos sobre la figura:

- Hallas los **lados** de la base del **paralelogramo**:

Conoces que $P_{(ABCD)}$ = 18 cm, que **M** es punto medio $\overline{DC}$ y $\overline{DM} = \overline{DA}$.



Si declaramos $\overline{DA}$ = **x**, entonces

$\overline{AB} = 2x$.

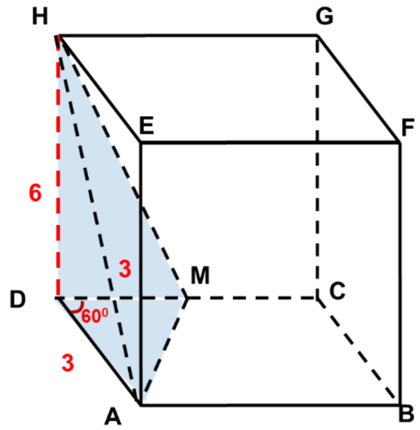
$P_{(ABCD)} = 2(x + 2x)$

$18 = 2 \cdot 3x$

$18 = 6x \rightarrow x = 3$ **cm**

Luego, $\overline{DA} = \overline{DM}$ = **3 cm** y $\overline{DC}$ = **6 cm**.

• Hallas el **área** de la base de la **pirámide**:



Como $\overline{DA} = \overline{DM}$, el $\triangle$**ADM** es **isósceles** de base $\overline{AM}$. Pero, un **triángulo isósceles** con un ángulo de **60º** es **equilátero**.

A(equilátero) = $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^2$

A(equilátero) = $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 9 \approx$ **3,89 cm²**

• Hallas el **volumen** de la **pirámide**:

V(pirámide) = $\frac{A_B . h}{3} \approx \frac{3{,}89.6}{3} \approx 3{,}89 \cdot 2 \approx$ **7,78 cm³**

R/ El volumen de la pieza resultante es aproximadamente **7,78 cm³**.

Nota:

1. La respuesta hay que darla con **tres cifras**.

2. El **área** de la **base** de la **pirámide** también se puede calcular utilizando la fórmula: **A =** $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sen\alpha$.

Solución b):

La cantidad de material que se desperdicia, será la **diferencia** de los **volúmenes**: **V(prisma) – V(pirámide)**

Ya conoces el **volumen** de la **pirámide** y hay que calcular el **volumen** del **prisma**:

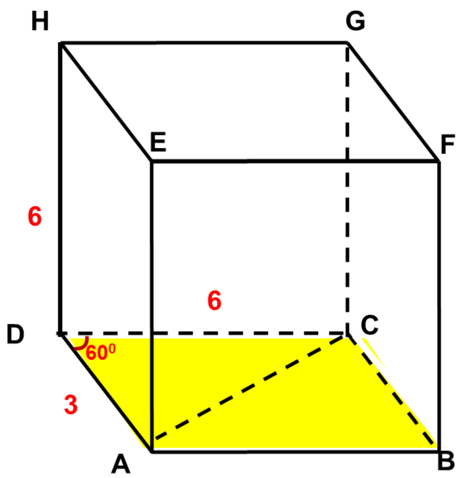
● Hallas el **área** de la base del **prisma**:

La **base** del **prisma** es el **paralelogramo ABCD**, que al trazarle la **diagonal** queda **dividido** en **dos triángulos** de **igual área**. Luego, para calcular el área del paralelogramo te puedes auxiliar de la fórmula: $\mathbf{A_{(ABCD)}} = \mathbf{2A_{\Delta ADC}}$.

♦ Calculas el área del $\mathbf{A_{\Delta ADC}}$:

$$\mathbf{A_{\Delta ADC}} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot sen\alpha =$$

$$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\cdot sen60º = 9\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \approx \mathbf{14{,}13\ cm^2}$$



♦ Calculas el área del **ABCD**:

$$\mathbf{A_{(ABCD)}} = \mathbf{2A_{\Delta ADC}} = 2\cdot\mathbf{14{,}13\ cm^2}$$

$$\approx \mathbf{28{,}26\ cm^2}$$

● Hallas el **volumen** del **prisma**:

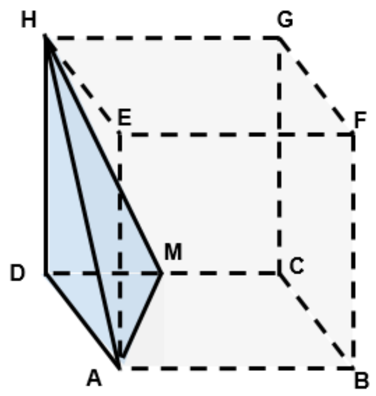
$$\mathbf{V_{prisma}} = \mathbf{A_B}\cdot\mathbf{h} = \mathbf{28{,}26\ cm^2 \cdot 6\ cm} \approx \mathbf{169{,}56\ cm^3}$$

- Cantidad de material que se **desperdicia**:

V(prisma) – V(pirámide)

$\approx$ **169,56 cm³ – 7,78 cm³**

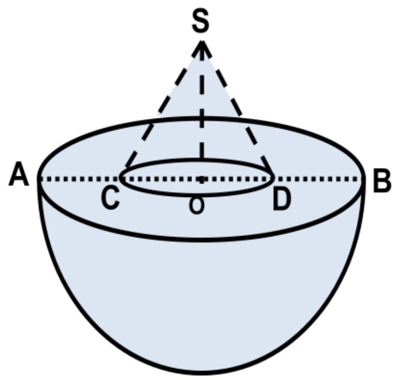
$\approx$ **161,78 cm³**



R/ La cantidad de material que se **desperdicia** es de aproximadamente **162 cm³** .

Ejemplo 3: A una esfera, cuyo círculo máximo tiene centro **O** y un diámetro es $\overline{AB}$ se rebaja por su parte superior, hasta obtener la pieza que se muestra.

Se sabe además que:



S era un punto de la esfera.

$\overline{SO}$ es altura del cono, cuya base también tiene centro es **O** y uno de sus diámetros es $\overline{CD}$.

Los puntos **C** y **D** están situados sobre $\overline{AB}$.

$A_{L(cono)} = 15\pi\ dm^2$ y $\overline{SD} = 5{,}00$ dm.

a) Calcula el volumen del cuerpo resultante.

b) Halla la cantidad de material que se desperdició.

c) Determina cuál es la superficie visible aproximada del cuerpo resultante.

Solución a):

El **volumen** del cuerpo resultante es la **suma** de los **volúmenes** de la **semiesfera** y el **cono**.

$$V_{\text{cuerpo res.}} = V_{\text{cono}} + V_{\text{semiesfera}}$$

Conocidos el **área lateral** del **cono** y su **generatriz**, se puede hallar su **radio**.

- Hallas el **radio** del **cono**:

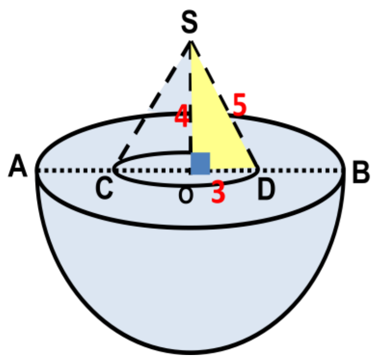
$A_{L(\text{cono})} = \pi \cdot r \cdot g$

$15\cancel{\pi}\ dm^2 = \cancel{\pi} \cdot r \cdot 5\ dm$ (sustituyes y simplificas π)

$r = 15\ dm^2 : 5\ dm$ (despejas **r**)

r = **3 dm** (divides)

- Hallas la **altura** del **cono**:



Como el $\triangle$**SOD** es **rectángulo** en **O**, la **hipotenusa** $\overline{SD}$ = 5 dm y el **cateto** $\overline{OD}$= 3 dm, entonces el otro **cateto** $\overline{SO}$ = 4 dm por **trío pitagórico**.

- Calculas el **volumen** del **cono**:

V(cono) = $\frac{A_B .h}{3} = \frac{\pi \cdot r^2 .h}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 3^2 .4}{3}$ **≈ 12π dm³**

- Hallas el **radio** de la **semiesfera**:

Como **S** era un punto de la **esfera** y va hasta el centro **O** de la misma, entonces $\overline{SO}$ era un **radio** de ella y también lo es de la **semiesfera**, por lo que $\overline{SO} = \overline{OB} =$ **4 dm**.

- Calculas el **volumen** de la **semiesfera**:

$$V_{semiesfera} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{2}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 4^3 \approx \frac{2}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 64 \approx 43\pi \text{ dm}^3$$

- Calculas el **volumen** del **cuerpo resultante**:

$$V_{cuerpo\ res.} = V_{cono} + V_{semiesfera}$$

$$V_{cuerpo\ res.} \approx 12\pi \text{ dm}^3 + 43\pi \text{ dm}^3$$

$$V_{cuerpo\ res.} \approx 55\pi \text{ dm}^3 \approx 55 \cdot 3{,}14\pi \text{ dm}^3$$

$$V_{cuerpo\ res.} \approx 173 \text{ dm}^3$$

R/ El **volumen** del **cuerpo resultante** es aproximadamente **173 dm³**.

Nota: En ejemplos anteriores utilizamos el **teorema de Pitágoras** para determinar la **longitud** de un **lado** del

triángulo rectángulo. En este caso, utilizamos el **trío pitagórico** por ser números pequeños y muy trabajados.

Cuando vayas a utilizar este recurso, debes **justificar** como lo hemos mostrado.

Además, utilizar el **teorema** es **muy importante**, porque no siempre encuentras en los datos **números sencillos**.

Solución b:

La cantidad de material que se **desperdicia** es la **diferencia** de los **volúmenes** de la **esfera** (cuerpo original) y el **cuerpo resultante**.

- Hallas el **volumen** de la **esfera**:

$V_{esfera} = 2\ V_{semiesfera}$

$V_{esfera} = 2 \cdot 134\ dm^3 \approx 268\ dm^3$

- cantidad de material que se **desperdicia:**

$V_{esfera} - V_{cuerpo\ res.}$

$\approx 268\ dm^3 - 173\ dm^3$

$\approx 95\ dm^3$

R/ Se desperdicia aproximadamente **95 dm³** de material.

Nota: El **volumen** de la **semiesfera** también lo puedes calcular, hallando el de la **esfera** y **dividiendo** por **dos** el resultado.

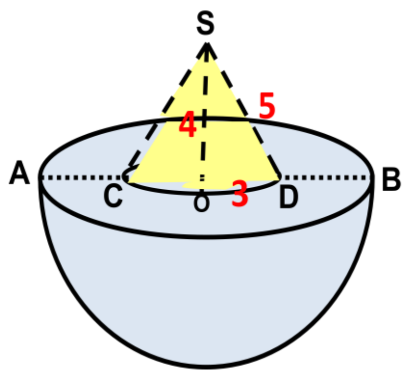
Solución c):

La **superficie visible** la pieza resultante se puede calcular por la fórmula:

$A_{semiesfera} + A_{Lcono} - A_{Bcono}$

- Hallas el **área** de la **semiesfera**:

$A_{semiesfera} = 3 \cdot \pi \cdot r^2 \approx 3 \cdot \pi \cdot 4^2 \approx \mathbf{48\pi\ dm^2}$



- Hallas el **área lateral** del **cono**:

$A_{Lcono} = \pi \cdot r \cdot g \approx \pi \cdot 3 \cdot 5 \approx \mathbf{15\pi\ dm^2}$

- Hallas el **área de la base** del **cono**:

$A_{Bcono} = \pi \cdot r^2 \approx \pi \cdot 3^2 \approx \mathbf{9\pi\ dm^2}$

Superficie visible:

$A_{semiesfera} + A_{Lcono} - A_{Bcono}$

$= \mathbf{48\pi\ dm^2} + \mathbf{15\pi\ dm^2} - \mathbf{9\pi\ dm^2}$

$\approx \mathbf{54\pi\ dm^2} \approx \mathbf{54 \cdot 3{,}14\ dm^2} \approx \mathbf{169{,}56\ dm^2}$

R/ La superficie visible aproximada del cuerpo resultante es de **170 dm^2**.

Nota:

1. Cuando **todos** los **cálculos intermedios** están en función de π, es más conveniente no sustituir por **3,14** y cambiarlo solo al final, para multiplicar **una sola vez** por un número decimal.

2. La **respuesta** se da con **tres cifras** porque los datos tiene igual cantidad.