Confeccionado por: Equipo de elaboración
Roger Riverón Rivas. Holguín
Daniel Jesús Sánchez Guerra. Banes, Holguín
Ericel Martínez Matos. Habana
José D. Yaques Alonso. Manzanillo, Granma
Miguel Guerrero Vidal. Manzanillo, Granma
Yandy García Álvarez. Cienfuegos
Frank Pérez Ríos. Ciego de Ávila

Pregunta 1: Lea detenidamente:

1.1. Clasifique las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas, escribiendo V o F, respectivamente, en la línea dada. De las que considere falsas, justifique por qué lo son.

a) _F_ La correspondencia definida de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que a cada número natural par le hace corresponder su 25 % es una función.

Justificación por demostración indirecta formal: Supongamos que es verdadera. Entonces, por definición de función, si tomamos cualquier elemento x que pertenezca al dominio de la función, su elemento correspondiente y, tiene que pertenecer al conjunto de llegada definido. Tomemos $x_1 = 2$. Según la regla de correspondencia, entonces y_1, que sería el correspondiente de x_1 en el conjunto de llegada, es el 25 % de 2, o sea: $y_1 = \frac{25}{100} \cdot 2 = 0{,}5$, y aquí llegamos a una contradicción con la definición de función, porque $y_1 \notin \mathbb{N}$, o lo que es lo mismo, que uno de los elementos del dominio no tiene imagen en el conjunto de llegada, incumpliéndose las condiciones que exige la definición de función. O sea, que la suposición que habíamos hecho sobre la proposición nos llevó a una contradicción, por lo que la proposición es falsa.

Justificación más «corta»: Falso porque existen elementos del conjunto de partida a los que no les corresponden elementos en el conjunto de llegada. Como contraejemplo se acepta cualquier valor del conjunto $\{x \in \mathbb{N}: x = 4n + 2; n \in \mathbb{N}\}$, que pertenece al conjunto de partida y al dominio de definición de la función, pues su correspondiente tiene la forma $y = \frac{4n+2}{4} = n + \frac{1}{2}; n \in \mathbb{N}$, que no pertenece al conjunto de de llegada.

b) _F_ El conjunto imagen de la función f, definida en $\{x \in \mathbb{R}: x > -1\}$ por la ecuación $f(x) = \frac{1}{x+1} - 2$ es $\{y \in \mathbb{R}: y \neq -2\}$.

Justificación por demostración indirecta formal: Supongamos que la proposición es verdadera. Entonces, por definición de conjunto imagen, todos los elementos del conjunto $\{y \in \mathbb{R}: y \neq -2\}$ tienen que ser imágenes de los argumentos que pertenecen al dominio de definición de la función. Tomemos $y_1 = -3$, que pertenece al conjunto imagen dado, entonces el argumento al que le corresponde esa imagen tiene que satisfacer la ecuación:

$$\frac{1}{x_1 + 1} - 2 = -3$$
$$\frac{1}{x_1 + 1} = -3 + 2 = -1$$

Como el dominio de definición de la función excluye al valor $x = -1$, podemos multiplicar la ecuación por $(x + 1)$:

$$1 = -1(x_1 + 1)$$
$$1 = -x_1 - 1$$
$$x_1 = -1 - 1 = -2$$

Lo cual entra en contradicción con la definición de conjunto imagen, pues $y_1 = -3$ resultaría ser imagen de $x_1 = -2$, un elemento que no pertenece al dominio de definición de la función. O sea, que la suposición que habíamos hecho sobre la proposición nos llevó a una contradicción, por lo que la proposición es falsa.

Justificación menos «formal» (vía analítica): Partamos del dominio de definición para determinar la imagen:

$$x > -1$$

Adicionando 1 a ambos miembros:

$$x+1>0$$

La relación $x+1>0$ significa que $(x+1)$ toma valor positivo para todos los valores de la variable x, lo que a su vez implica que el recíproco de dicho binomio también tomará valor positivo para todos los valores de la variable x que pertenezcan al dominio definido. También se puede argumentar a través de la implicación $x+1>0 \Rightarrow (x+1)^{-1}>0$, pues toda potencia de base real positiva está definida y es positiva:

$$\frac{1}{x+1}>0$$

Adicionamos –2 a ambos miembros:

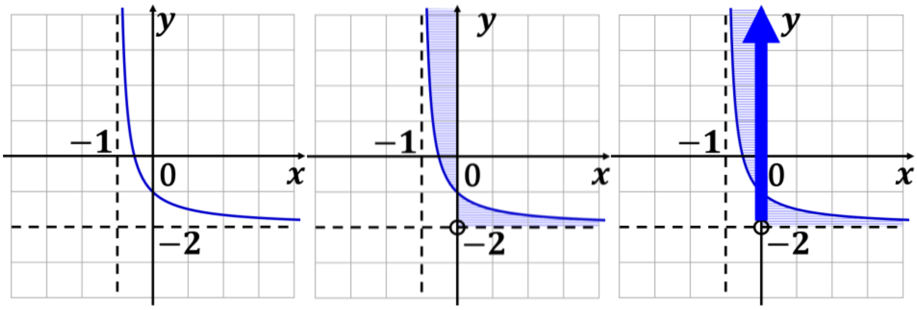
$$\frac{1}{x+1}-2>-2$$

Y hemos llegado a la expresión de la función f:

$$f(x)>-2$$

Por lo que la imagen de la función, definida en $\{x\in\mathbb{R}: x>-1\}$, es $\{y\in\mathbb{R}: y>-2\}$. Entonces la proposición resulta falsa, y como contraejemplo se puede demostrar que cualquier imagen y que pertenezca al conjunto $\{y\in\mathbb{R}: y<-2\}$, el cual es un subconjunto del conjunto $\{y\in\mathbb{R}: y\neq-2\}$ dado, corresponde a un elemento que no pertenece al dominio.

Justificación menos «formal» (vía gráfica): Representemos la función y determinamos la imagen a partir de la representación, como se observa a continuación:



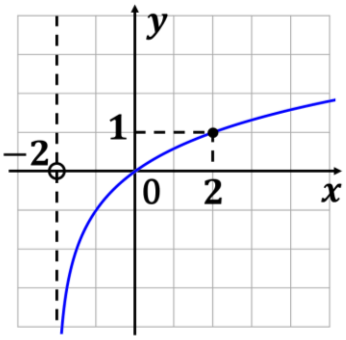
Por lo que la imagen de la función, definida en $\{x\in\mathbb{R}: x>-1\}$, es $\{y\in\mathbb{R}: y>-2\}$. Entonces la proposición resulta falsa, y como contraejemplo se puede demostrar que cualquier imagen y que pertenezca al conjunto $\{y\in\mathbb{R}: y<-2\}$, el cual es un subconjunto del conjunto $\{y\in\mathbb{R}: y\neq-2\}$ dado, corresponde a un elemento que no pertenece al dominio.

c) _V_ Si A y B son dos conjuntos tales que $(A\cap B)=C$, entonces $C\subset A$ y $C\subset B$.

Comentario: La proposición es verdadera de acuerdo con la definición de intersección de conjuntos y de la relación de inclusión entre conjuntos, pues la operación $A\cap B \overset{\text{def}}{=} \{x: x\in A \wedge x\in B\}$, y en la premisa nos plantean que $(A\cap B)=C$, lo cual implica que todos los elementos del conjunto C son elementos del conjunto A y también del conjunto B, cumpliéndose entonces la definición de la relación de inclusión del conjunto C respecto a los conjuntos A y B.

1.2. Selecciona la respuesta correcta marcando con una X en la línea dada.

1.2.1. El modelo de la figura muestra el esbozo de una parte del gráfico de una función h, definida en $\{x\in\mathbb{R}: x>-2\}$ por una ecuación de la forma $h(x)=\log_a(x+2)-1$, con $a\in\mathbb{R}$, $a>0$ y $a\neq1$. Los puntos $(0;0)$ y $(2;1)$ pertenecen al gráfico de la función h. De esta función se puede afirmar que:



a) ___ Su gráfico es simétrico respecto al origen de coordenadas.

b) _X_ El valor del parámetro «a» es 2.

c) ___ Es monótona decreciente para los valores del dominio tales que $-2<x<0$.

d) ___ La ecuación de la asíntota del gráfico es $x-2=0$.

Comentario: Se trata de una función logarítmica en la cual, a partir de la ecuación que nos brindan, podemos determinar que los parámetros de dilatación-contracción en las dos direcciones axiales tienen valor 1, que los parámetros de traslación en las dos direcciones axiales también nos los dan como datos (2 unidades en el sentido negativo del eje de las abscisas y 1 unidad en el sentido negativo del eje de las ordenadas), y solo tenemos como incógnita el valor de la base del logaritmo. Podemos calcular primero el valor de dicha base, pues tenemos dos puntos que pertenecen al gráfico, sustituyendo las coordenadas de cualquiera de los puntos en la ecuación y despejando el valor de a. Para el punto $(0;0)$ quedaría así:

$$0 = \log_a(0+2) - 1$$
$$0 = \log_a 2 - 1$$
$$1 = \log_a 2$$
$$a^1 = a^{\log_a 2}$$
$$a = 2$$

Luego concluimos que la base del logaritmo en la ecuación de la función es $a = 2$, lo cual coincide con lo planteado por la segunda proposición, pero trataremos de argumentar también por qué las restantes no son correctas. La primera proposición plantea que el gráfico es simétrico con respecto al origen de coordenadas. Para comprobar el valor de verdad de esta proposición podemos determinar si el par $(-2;-1)$, que es el simétrico del par $(2;1)$ respecto al origen de coordenadas, pertenece a la función, pues en la orden del ejercicio nos dan como dato que $(2;1)$ es un punto del gráfico de la función. Evidentemente y sin realizar cálculos podemos decir que el par $(-2;-1)$ no pertenece a la función, pues la abscisa de ese par no es un argumento del dominio. De esta forma aseguramos que la proposición es falsa, pues existe al menos un punto de la gráfica de la función cuyo simétrico respecto al origen de coordenadas no pertenece a dicho gráfico. Otra vía más trabajosa es sustituir la abscisa y la ordenada, simultáneamente, por sus opuestos en la ecuación de la función, y si resulta en la misma ecuación original por medio de transformaciones equivalentes, entonces la proposición es verdadera. Veamos:

$$-y = \log_2(-x+2) - 1$$
$$-y = \log_2(2-x) - 1 \quad |\cdot(-1)$$
$$y = -\log_2(2-x) + 1$$

Evidentemente, esta función y la original no son iguales.
Para el caso de la tercera proposición podemos tomar dos valores como argumentos, que sean diferentes y que estén dentro del intervalo propuesto. Luego calculamos las imágenes respectivas para dichos argumentos y determinamos si se cumple la definición de monotonía decreciente. Sean $x_1 = -\frac{3}{2}$ y $x_2 = -1$ los argumentos, entonces tenemos:

$$y_1 = \log_2\left(-\frac{3}{2}+2\right) - 1 \qquad y_2 = \log_2(-1+2) - 1$$
$$y_1 = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 \qquad y_2 = \log_2 1 - 1$$
$$y_1 = -1 - 1 \qquad y_2 = 0 - 1$$
$$y_1 = -2 \qquad y_2 = -1$$

Podemos ver que $x_1 < x_2$ y que de aquí se obtuvo que $y_1 < y_2$, lo cual es contrario a lo que plantea la definición de monotonía decreciente, así que la proposición es falsa.
Para la cuarta proposición debemos analizar que todos los puntos de la recta dada tienen abscisa 2, pero en el enunciado del ejercicio plantean que el punto $(2;1)$ pertenece al gráfico de la función, lo cual contradice la definición de asíntota y, por ende, hace falsa a la proposición. También podemos basarnos en la representación gráfica de la función (porque demostrarlo por la vía analítica incluiría calcular límites, lo cual escapa del análisis que se puede hacer en este grado), para darnos cuenta de que la recta que constituye la asíntota de la función es $x = -2$ o lo que es lo mismo, $x + 2 = 0$.

1.2.2. El balón reglamentario de fútbol tiene un diámetro (d) de aproximadamente $22{,}30\ cm$. Para llenarlo se usó una bomba de aire con la cual la relación entre el diámetro del balón y el tiempo transcurrido t, medido en segundos desde que se comenzó a llenar, viene dada por la ecuación $d = 1 + 3t$. Bajo estas condiciones, un balón completamente vacío demora en llenarse aproximadamente:

a) ___ 5 segundos b) _X_ 7 segundos c) ___ 8 segundos d) ___ 6 segundos

Comentario: Se trata de un ejercicio sobre valores funcionales. Si el balón estaba completamente vacío, entonces el tiempo en que se comienza a llenar es $t_0 = 0$ en la ecuación que representa la relación, y el diámetro del balón es $d_0 = 0$. Cuando el balón se llena, tiene un diámetro $d = 22{,}30$, y podemos calcular el tiempo t en que eso ocurre utilizando la ecuación:

$$22{,}30 = 1 + 3t$$
$$21{,}30 = 3t$$
$$7{,}1 = t$$
$$t \approx 7$$

1.3. Complete los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera para cada caso.

Para el segmento $\overline{AB}$, con $A\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ y $B\left(-3;\frac{1}{2}\right)$, se cumple que:

1.3.1. Las coordenadas de su punto medio (M) son _ $\left(-2;\frac{1}{2}\right)$ _.

1.3.2. El valor numérico de la pendiente (m) de toda recta paralela a la recta AB es $m =$ _ 0 _.

1.3.3. El valor de y_1, para que el punto $R(-2;y_1)$ pertenezca a $\overline{AB}$ es $y_1 =$ _ $\frac{1}{2}$ _.

Comentarios: Este ejercicio repasa propiedades y relaciones de la geometría analítica. En el primer inciso tenemos que determinar las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{AB}$, lo cual se puede llevar a cabo sin dificultad, pues conocemos las coordenadas de sus extremos:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1 - 3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Luego las coordenadas de M son $\left(-2;\frac{1}{2}\right)$.

Para el segundo inciso tenemos que determinar el valor numérico de la pendiente de cualquier recta paralela a la recta AB. Como tenemos las coordenadas de dos puntos de la recta AB, podemos calcular la pendiente de esta:

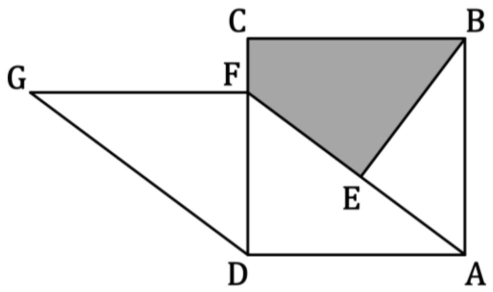
$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{-1 + 3} = \frac{0}{2} = 0$$

Luego, como las pendientes de dos rectas paralelas tienen igual valor numérico, podemos afirmar que toda recta paralela a la recta AB tiene una pendiente de valor numérico 0.

Para el tercer inciso tenemos que calcular la ordenada de un punto R que está sobre el segmento $\overline{AB}$ y conocemos que la abscisa es -2. Si razonamos con lógica, podemos ver que las coordenadas de ese punto ya las hemos calculado, pues el punto medio del segmento que determinamos en el primer inciso tiene precisamente como abscisa a -2. Entonces la ordenada tiene que ser $\frac{1}{2}$. Aun así, demostrémoslo mediante el cálculo. Todo punto que esté sobre el segmento $\overline{AB}$ va a pertenecer a la recta AB y, por ende, en la ecuación de la pendiente tendremos, para el punto R y el punto A:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_R}{x_A - x_R}$$
$$0 = \frac{\frac{1}{2} - y_R}{-1 + 2} = \frac{\frac{1}{2} - y_R}{1} = \frac{1}{2} - y_R$$
$$y_R = \frac{1}{2}$$

Pregunta 2: La figura representada muestra el cuadrado $ABCD$.
De la misma se conoce que:



- **$AFGD$ es un paralelogramo**
- **$E \in \overline{AF}$ y $F \in \overline{DC}$ tal que $\overline{EB} \perp \overline{AF}$**

a) Demuestre que $\overline{GF}^2 = \overline{DG} \cdot \overline{EB}$.

b) Si $\overline{EB} = 6,4\ cm$ y $\overline{AE} = 48\ mm$, determine el área sombreada

Resolución: a) $\measuredangle AEB = 90°$ (por ser $\overline{EB} \perp \overline{AF}$)

$\overline{AD} \parallel \overline{GF}$ (por ser lados opuestos del paralelogramo $AFGD$)

$\measuredangle ADC = 90°$ (por ser ángulo interior del cuadrado $ABCD$)

$\measuredangle DFG = \measuredangle ADC = 90°$ (por ser alternos internos entre $\overline{AD} \parallel \overline{GF}$ y $\overline{CD}$ secante)

$\therefore \measuredangle AEB = \measuredangle DFG$ (por tener la misma amplitud) **(1)**

$\overline{GD} \parallel \overline{FA}$ (por ser lados opuestos del paralelogramo $AFGD$)

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (por ser lados opuestos del cuadrado $ABCD$)

$\measuredangle GDF = \measuredangle DFA$ (por ser alternos internos entre $\overline{GD} \parallel \overline{FA}$ y $\overline{CD}$ secante)

$\measuredangle DFA = \measuredangle FAB$ (por ser alternos internos entre $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AF}$ secante)

$\therefore \measuredangle GDF = \measuredangle FAB$ (por transitividad de la igualdad de ángulos) **(2)**

De **(1)** y **(2)** se tiene que:

$\Delta DFG \sim \Delta AEB$ (por tener dos ángulos respectivamente iguales)

Estableciendo la proporcionalidad entre los lados homólogos, tenemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{FD}} = k$$

Trabajando con la proporción entre la primera razón y la segunda:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{GF}}$$

Aplicando la propiedad fundamental de las proporciones:

$\overline{AB} \cdot \overline{GF} = \overline{DG} \cdot \overline{BE}$ **(3)**

Ahora bien, como consecuencia de las propiedades de las figuras planas, tenemos:

$\overline{AB} = \overline{AD}$ (por ser lados del cuadrado $ABCD$)

$\overline{AD} = \overline{GF}$ (por ser lados opuestos del paralelogramo $AFGD$)

$\therefore \overline{AB} = \overline{GF}$ (por transitividad de la igualdad de segmentos)

Sustituyendo esa igualdad en **(3)**:

$\overline{AB} \cdot \overline{AB} = \overline{DG} \cdot \overline{BE}$

$\overline{AB}^2 = \overline{DG} \cdot \overline{BE}$ ■

b) ΔAEB es rectángulo en E (por ser $\measuredangle AEB = 90°$, ya demostrado)

$\overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 = \overline{AB}^2$ (por teorema de Pitágoras en ΔAEB es rectángulo en E)

$\overline{AB}^2 = 4{,}8^2 + 6{,}4^2 = 23{,}04 + 40{,}96 = 64$

$\overline{AB} = \sqrt{64} = 8{,}0\ cm$

$\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{GF} = 8{,}0\ cm$ (ya demostrado)

Utilizando la proporcionalidad entre lados homólogos del inciso anterior:

$$\frac{8}{\overline{DG}} = \frac{6{,}4}{8} = \frac{4{,}8}{\overline{FD}} = 0{,}8$$

…calculamos $\overline{FD}$:

$$\overline{FD} = \frac{4{,}8 \cdot 8}{6{,}4} = 6{,}0\ cm$$

ΔADF es rectángulo en D (por ser $\measuredangle ADC = 90°$ y $F \in \overline{DC}$)

$$A_{sombreada} = A_{ABCD} - A_{\Delta ADF} - A_{\Delta AEB}$$

$$A_{sombreada} = \overline{AB}^2 - \frac{\overline{AD} \cdot \overline{FD}}{2} - \frac{\overline{AE} \cdot \overline{EB}}{2}$$

$$A_{sombreada} = 8^2 - \frac{8 \cdot 6}{2} - \frac{4{,}8 \cdot 6{,}4}{2}$$

$$A_{sombreada} = 64 - 24 - 15{,}36 = 24{,}64\ cm^2$$

$$A_{sombreada} \approx 25\ cm^2$$

Pregunta 3: Sean las expresiones $A(x) = \log_2(x^2 + x - 20)$, $B(x) = \log_2 \sqrt{x^2 + 10x + 25}$ y $C(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2\cos^2 x} + \frac{\cos 2x}{2\cos^2 x}$.

a) Demuestre que, para todos los valores admisibles de la variable x, se cumple que $C(x) = \frac{1}{2}$.

b) Determine el conjunto solución de la ecuación $3^{C(x)\cdot A(x)} = 3^{\log_2\sqrt{5}} \cdot 3^{B(x)}$.

Resolución: a) $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2\cos^2 x} + \frac{\cos 2x}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}$

$$MI: \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2\cos^2 x} + \frac{\cos 2x}{2\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x}{2\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{2\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2} = MD \quad \blacksquare$$

b) Podemos utilizar la identidad demostrada en el inciso anterior para sustituir el valor de $C(x)$ en la ecuación, siempre que $\cos x \neq 0$, lo cual se cumple en el conjunto $\left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$:

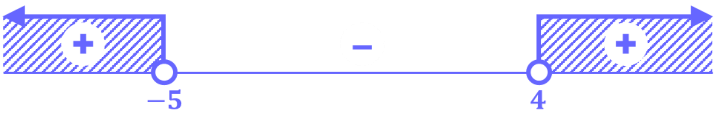
$$3^{\frac{1}{2}\cdot\log_2(x^2+x-20)} = 3^{\log_2\sqrt{5}} \cdot 3^{\log_2\sqrt{x^2+10x+25}}$$

Antes de resolver la ecuación, podemos determinar su dominio. La variable aparece como argumento de un logaritmo y como radicando de un radical que es argumento de otro logaritmo, siendo ambos logaritmos parte de los exponentes de dos potencias. Respecto a los exponentes de las potencias, sabemos que pueden tomar cualquier valor numérico real mientras la base sea positiva, lo cual se cumple $(3 > 0)$. Determinemos entonces el dominio de definición del primer logaritmo:

$x^2 + x - 20 > 0$

$(x+5)(x-4) > 0$

$ceros: x_1 = -5; x_2 = 4$



$\{x \in \mathbb{R}: x < -5 \quad o \quad x > 4\}$

Procedamos a determinar el dominio de definición del segundo logaritmo:

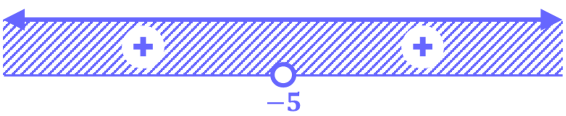
$\sqrt{x^2 + 10x + 25} > 0$

Sabemos que el valor de la raíz cuadrada principal de todo número real no negativo es otro número real no negativo, y que su valor es cero si y solo si el radicando tiene valor numérico cero, por lo que podemos concluir que toma valores positivos cuando el radicando también es positivo, así que la inecuación anterior tiene la misma solución que la siguiente:

$x^2 + 10x + 25 > 0$

$(x+5)^2 > 0$

$cero: x_1 = -5 \quad (doble)$



$\{x \in \mathbb{R}: x \neq -5\}$

Determinando la intersección entre estos dos intervalos que definen a los logaritmos y el dominio de definición de la expresión trigonométrica, obtenemos el dominio de definición de toda la ecuación:

$$Dom: \left\{x \in \mathbb{R}: x < -5 \quad o \quad x > 4; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Ahora procedemos a resolver la ecuación:

$$3^{\frac{1}{2}\cdot\log_2(x^2+x-20)} = 3^{\log_2\sqrt{5}} \cdot 3^{\log_2\sqrt{x^2+10x+25}}$$

Aplicamos la identidad $\boldsymbol{n \cdot \log_a b = \log_a b^n}$ en el exponente de la potencia del miembro izquierdo, y la propiedad $\boldsymbol{a^r \cdot a^s = a^{r+s}}$ en el miembro derecho:

$$3^{\log_2(x^2+x-20)^{\frac{1}{2}}} = 3^{\left(\log_2\sqrt{5} + \log_2\sqrt{x^2+10x+25}\right)}$$

Aplicamos la identidad $\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$ en el argumento del logaritmo del miembro izquierdo, y la identidad $\boldsymbol{\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)}$ en el exponente del miembro derecho:

$$3^{\log_2\sqrt{x^2+x-20}} = 3^{\log_2\left(\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2+10x+25}\right)}$$

Aplicamos la doble implicación $\boldsymbol{a^x = a^y \Leftrightarrow x = y}$:

$$\log_2 \sqrt{x^2 + x - 20} = \log_2 \left(\sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2 + 10x + 25}\right)$$

Aplicamos la doble implicación $\boldsymbol{\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c}$:

$$\sqrt{x^2 + x - 20} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2 + 10x + 25}$$

Podemos multiplicar los radicales del miembro derecho (pues tienen el mismo índice), o bien elevar al cuadrado directamente ambos miembros, pues se puede aplicar la identidad $\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$ en el miembro derecho:

$$\left(\sqrt{x^2 + x - 20}\right)^2 = \left(\sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2 + 10x + 25}\right)^2$$

$$x^2 + x - 20 = 5(x^2 + 10x + 25)$$

$$x^2 + x - 20 = 5x^2 + 50x + 125$$

$$5x^2 - x^2 + 50x - x + 125 + 20 = 0$$

$$4x^2 + 49x + 145 = 0$$

$$(4x + 29)(x + 5) = 0$$

$$x_1 = -\frac{29}{4} \quad o \quad x_2 = -5$$

Hemos obtenido un valor de x que no pertenece al dominio de la ecuación, así que lo descartamos y solo debemos comprobar para $x_1 = -\frac{29}{4}$:

$$MI: 3^{\frac{1}{2} \cdot \log_2\left(\left(-\frac{29}{4}\right)^2 - \frac{29}{4} - 20\right)} = 3^{\log_2 \sqrt{\frac{841}{16} - \frac{29}{4} - 20}} = 3^{\log_2 \sqrt{\frac{405}{16}}} = 3^{\log_2\left(\frac{9\sqrt{5}}{4}\right)}$$

$$MD: 3^{\log_2 \sqrt{5}} \cdot 3^{\log_2 \sqrt{\left(-\frac{29}{4}\right)^2 + 10\left(-\frac{29}{4}\right) + 25}} = 3^{\left(\log_2 \sqrt{5} + \log_2 \sqrt{\frac{841}{16} - \frac{145}{2} + 25}\right)} = 3^{\log_2\left(\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{81}{16}}\right)} = 3^{\log_2\left(\frac{9\sqrt{5}}{4}\right)}$$

$$MI = MD$$

Expresamos el conjunto solución:

$$S = \left\{-\frac{29}{4}\right\}$$

Pregunta 4: En un IPU se realizó una encuesta a los estudiantes acerca de la conexión por datos móviles en las redes 2G, 3G y 4G. Al transcurrir una semana se pudo determinar, por la encuesta realizada, que el $98\ \%$ de la matrícula del centro tenía teléfono celular. De ellos, la tercera parte se conectaba por la red 4G, mientras que las $\frac{5}{6}$ partes del resto utilizaban 3G y los 49 estudiantes restantes se conectaban por la red 2G.

a) ¿Cuántos estudiantes del centro tienen teléfono celular?

b) ¿Cuál es la matrícula del centro?

Resolución: Declaración de la variable:

x: cantidad de estudiantes que tienen teléfono celular

$\frac{x}{3}$: cantidad de estudiantes que se conectan usando la red 4G

$\frac{5}{6}\cdot\left(x-\frac{x}{3}\right)=\frac{5}{6}\cdot\frac{2x}{3}=\frac{5x}{9}$: cantidad de estudiantes que se conectan usando la red 3G

$$\frac{x}{3}+\frac{5x}{9}+49=x \qquad |\cdot 9$$
$$3x+5x+441=9x$$
$$9x-3x-5x=441$$
$$x=441$$

Comprobación en las condiciones del problema:

Cantidad de estudiantes que se conectan usando la red 4G: $\frac{441}{3}=147$

Cantidad de estudiantes que se conectan usando la red 3G: $\frac{5}{6}\cdot(441-147)=\frac{5}{6}\cdot 294=245$

Cantidad de estudiantes que se conectan usando la red 2G: 49

Total (cantidad de estudiantes que tienen teléfono celular): $147+245+49=441$ ✓

Respuesta: En el centro, 441 estudiantes tienen teléfono celular.

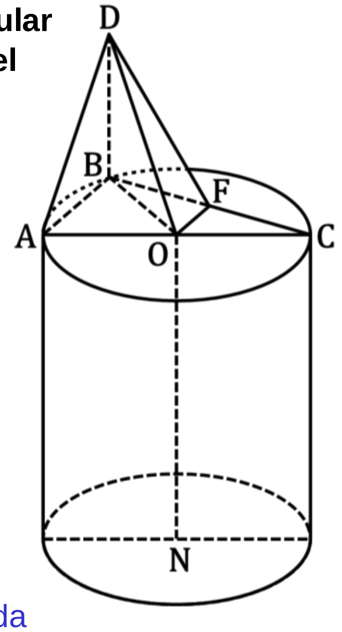
b) Sabemos que los 441 estudiantes que tienen teléfono celular representan el $98\ \%$ de la matrícula del centro, luego para determinar dicha matrícula debemos resolver un caso del tercer problema típico de tanto por ciento:

$$441:\frac{98}{100}=441\cdot\frac{100}{98}=450$$

Respuesta: La matrícula del centro es de 450 estudiantes.

Pregunta 5: En la figura se muestra una pieza compuesta por un cilindro circular recto y una pirámide oblicua superpuesta en una parte de la base superior del cilindro. De esta pieza se conoce que:

- N **y** O **son los centros de las bases inferior y superior del cilindro, respectivamente, y** $\overline{AC}$ **es diámetro de la base superior;**
- $\overline{OB}$ **es radio de la base superior y** $F \in \overline{BC}$**;**
- **El arco** BC **mide** $120°$ **y el área del triángulo** AOB **es de** $9\sqrt{3}\ cm^2$**;**
- $\overline{DB}$ **es altura de la pirámide y la base de la misma es el trapecio** $AOFB$ **de bases** $\overline{AB}$ **y** $\overline{OF}$**.**



a) $\overline{DB}$ **es la proyección de la oblicua** $\overline{FD}$ **sobre el plano** ABD**. Pruebe que la afirmación anterior es verdadera.**

b) Demuestre que $\overline{DO}$ **es la hipotenusa del triángulo** DOF**.**

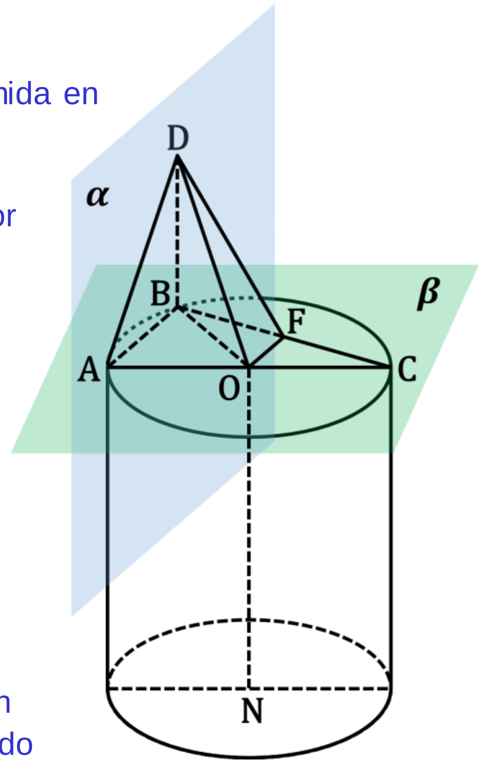
c) Determine el volumen de la pieza si $\overline{DB} = \frac{1}{3} \cdot \overline{ON}$ **y** $\tan \measuredangle DOB = 2$**.**

Resolución: a) Sea α el plano ABD y β el plano ABC

$\measuredangle ABC = 90°$ (por ser un ángulo inscrito en la base superior del cilindro y cuya cuerda correspondiente es el diámetro $\overline{AC}$ de dicha base)

$\overline{FB} \perp \overline{AB}$ en B (por ser $\measuredangle ABC = 90°$ y $F \in \overline{BC}$)

$\overline{DB} \perp \beta$ en B (por ser altura de la pirámide $AOFBD$ cuya base está contenida en el plano β de la base superior del cilindro)



$\overline{DB} \perp \overline{BF}$ (porque si una recta es perpendicular a un plano, también es perpendicular a todas las rectas contenidas en dicho plano que pasen por su pie)

$\therefore\ \overline{FB} \perp \alpha$ en B (porque una recta que corta a un plano y que es perpendicular a dos rectas contenidas en el plano que pasen por su pie, es perpendicular al plano, y ya se demostró que $\overline{FB} \perp \overline{AB}$ y que $\overline{FB} \perp \overline{DB}$)

$\overline{FD}$ es oblicua al plano α en D [porque desde un punto exterior (F) a un plano (α) solo se puede trazar una recta perpendicular (que es FB), siendo oblicuas las demás]

$\therefore\ \overline{BD} = \text{proy}_{\alpha}\overline{FD}$ (por unir al pie de la oblicua con el pie de la perpendicular trazada desde la oblicua al plano) ■

b) $\overline{DF}$ es oblicua al plano β en F [porque desde un punto exterior (D) a un plano (β) solo se puede trazar una recta perpendicular (que es DB), siendo oblicuas las demás]

$\overline{BF} = \text{proy}_{\beta}\overline{DF}$ (por unir al pie de la oblicua con el pie de la perpendicular trazada desde la oblicua al plano)

$\overline{OF}$ es un segmento de recta contenido en el plano β y que pasa por el pie de la oblicua $\overline{DF}$

$\overline{OF} \parallel \overline{AB}$ (por ser las bases del trapecio $AOFB$)

$\overline{OF} \perp \overline{BF}$ (porque si una de dos rectas paralelas es perpendicular a una tercer recta, la otra también lo es, y ya demostramos $\overline{FB} \perp \overline{AB}$ en el inciso anterior)

$\therefore\ \overline{DF} \perp \overline{OF}$ en F [porque si la proyección de una oblicua sobre un plano es perpendicular a una recta contenida en el plano que pasa por el pie de la oblicua, entonces la oblicua también es perpendicular a la recta del plano (teorema de las tres perpendiculares)]

$\measuredangle DFO = 90°$ (por ser $\overline{DF} \perp \overline{OF}$ en F)

ΔDFO es rectángulo en F (por ser $\measuredangle DFO = 90°$)

$\therefore\ \overline{DO}$ es la hipotenusa del ΔDFO rectángulo en F (por ser el lado que se opone a $\measuredangle DFO = 90°$) ■

c) $\overline{OA} = \overline{OB}$ (por ser radios de la base superior del cilindro)

ΔAOB es isósceles de base $\overline{AB}$ (por ser $\overline{OA} = \overline{OB}$)

$\measuredangle BAC = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$ (por ser un ángulo inscrito en la base superior del cilindro y ser BC su arco correspondiente)

$\therefore \Delta AOB$ es equilátero (por ser un triángulo isósceles que tiene un ángulo interior de $60°$)

$A_{\Delta AOB} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \overline{OB}^2 = 9\sqrt{3}$

$\overline{OB}^2 = 9\sqrt{3} \cdot \dfrac{4}{\sqrt{3}} = 36$

$\overline{OB} = 6{,}0\ cm$

$\overline{AB} = \overline{OB} = \overline{OA} = 6{,}0\ cm$ (por ser lados del ΔAOB equilátero)

$\overline{DB} \perp \overline{BO}$ en B (por ser $\overline{DB} \perp \beta$ en B y BO una recta contenida en el plano β que pasa por el pie de $\overline{DB}$)

$\measuredangle DBO = 90°$ (por ser $\overline{DB} \perp \overline{BO}$ en B)

ΔDBO es rectángulo en B (por ser $\measuredangle DBO = 90°$)

$\measuredangle DOB$ es agudo (por ser ángulo interior del ΔDBO es rectángulo en B y no ser su ángulo recto)

$\tan \measuredangle DOB = \frac{\overline{DB}}{\overline{BO}} = 2$ (por definición de tangente de un ángulo agudo en ΔDBO rectángulo en B)

$\overline{DB} = 2 \cdot \overline{BO} = 2 \cdot 6 = 12\ cm$

$\overline{DB} = \frac{1}{3} \cdot \overline{ON}$ (por dato)

$\overline{ON} = 3 \cdot \overline{DB} = 3 \cdot 12 = 36\ cm$

ΔABC es rectángulo en B (por ser $\measuredangle ABC = 90°$ ya demostrado en el inciso anterior)

$\tan \measuredangle BAC = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ (por ser $\measuredangle BAC = 60°$ un ángulo agudo y por definición de tangente de un ángulo agudo en ΔABC rectángulo en B)

$\overline{BC} = \overline{AB} \cdot \tan \measuredangle BAC = 6 \cdot \tan 60° = 6\sqrt{3}\ cm$

O es punto medio de $\overline{AC}$ (por ser $\overline{AC}$ diámetro de la base superior del cilindro y O su centro)

$\therefore \overline{OF}$ es paralela media relativa a $\overline{AB}$ en el ΔABC (porque si un segmento es paralelo a un lado de un triángulo y pasa por el punto medio de otro lado, entonces pasa por el punto medio del tercer lado y es paralela media del triángulo)

$\overline{OF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3{,}0\ cm$ (porque la longitud de la paralela media de un triángulo es la mitad de la longitud del lado al que es paralela)

F es punto medio de $\overline{BC}$ (por ser $\overline{OF}$ paralela media relativa a $\overline{AB}$ en el ΔABC)

$\overline{BF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}\ cm$ (por ser F punto medio de $\overline{BC}$)

$AOFB$ es un trapecio rectángulo en B y F (por ser $\overline{AB} \perp \overline{BF}$ y $\overline{OF} \perp \overline{BF}$ ya demostradas en los incisos anteriores)

Con todos estos elementos podemos calcular el volumen de toda la pieza:

$V_{pieza} = V_{cilindro} + V_{pirámide}$

$V_{pieza} = \pi r^2 h_{cil} + \dfrac{1}{3} A_B \cdot h_{pir}$

$V_{pieza} = \pi \cdot \overline{OB}^2 \cdot \overline{ON} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{(\overline{AB} + \overline{OF}) \cdot \overline{BF}}{2} \cdot \overline{DB}$

$V_{pieza} = \pi \cdot 6^2 \cdot 36 + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{(3 + 6) \cdot 3\sqrt{3}}{2} \cdot 12$

$V_{pieza} = 1\ 296\pi + 54\sqrt{3}$

$V_{pieza} \approx 4\ 162{,}86\ cm^3 \approx 4{,}2\ dm^3$