

Resumen sobre geometría plana para 12mo grado



Para satisfacer los pedidos de nuestros estudiantes de 12mo grado y contribuir con tu preparación, nuestra empresa CINESOFT ha elaborado este resumen.

Este material te servirá como un complemento a las clases televisivas, junto a tu libro de texto.

Este resumen está dedicado a recordar algunos contenidos de **geometría plana** que se aplican en **demostraciones** y **cálculo** en figuras planas simples y compuestas.

Contenidos que trataremos:

1. **Elementos** fundamentales de la geometría plana.
2. **Polígonos**. Elementos, clasificación y propiedades.
3. **Circunferencia** y **círculo**. Elementos y propiedades.
4. **Igualdad** y **semejanza** de triángulos.

Rogamos nos disculpes cualquier imprecisión y la hagas llegar a nosotros para hacer la corrección inmediatamente.

Esperamos que te sea útil para lograr una mejor preparación.

Autores: MSc. Jesús Cantón Arenas

MSc. Mirta Capote Jaume

Resumen de Geometría

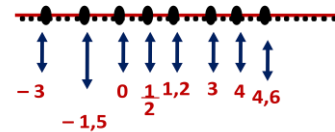
Figuras planas fundamentales

Puntos, rectas, semirrectas y segmentos.

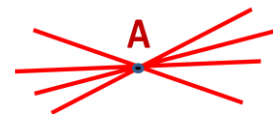
I. Un punto no existe definición para este elemento, es en sí una idea intuitiva, por ejemplo, la perforación de una aguja sobre un papel. Un punto se denota siempre con una letra **mayúscula** (**A, B, C**)

II. La **recta** es un conjunto ilimitado de **puntos** alineados del plano con las propiedades siguientes:

- Entre dos puntos de una recta siempre podemos encontrar otro punto (**densidad de la recta**), por lo que el **conjunto de puntos** de una **recta** se puede poner en correspondencia **biunívoca** con el **conjunto de los números reales**, de manera que se conserva el orden.



- Por **un punto** del plano pasan **infinitas rectas**.



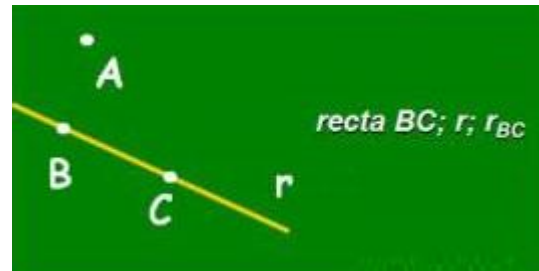
- Por **dos puntos** de un plano pasa una **única recta**.



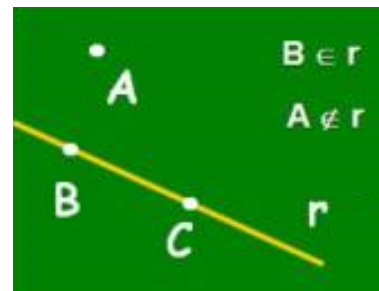
- Si dos rectas tienen **dos puntos** en común son **coincidentes**.



* Una **recta** se nombra con **dos letras mayúsculas** (**BC**), correspondientes a dos puntos que pertenecen a ella o por **una letra minúscula** (**r**).

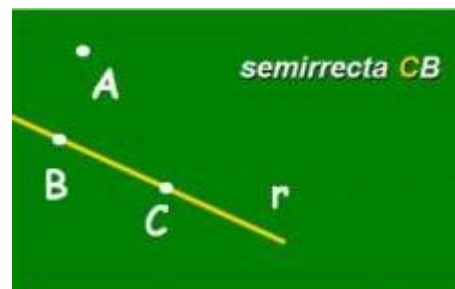


* Si un **punto** está ubicado sobre una **recta** decimos que **pertenece** a ella ($B \in r$), mientras que los que no cumplan esta condición son **exteriores** a la recta y decimos que no pertenecen a esta ($A \notin r$).



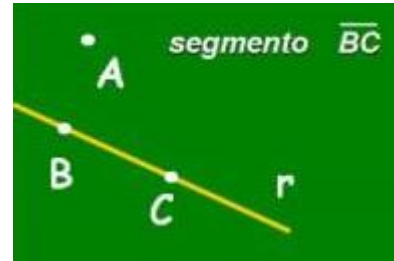
III. Semirrecta: Un **punto** cualquiera sobre una **recta**, la divide en **dos** conjuntos de puntos, uno a cada lado de ese **punto**. Cada uno de esos conjuntos se llama **semirrecta** o **rayo** de origen en ese **punto**.

* En el caso de referirnos a una **semirrecta** se hará con **dos letras mayúsculas**, cuidando que la primera sea el origen de la semirrecta y la segunda la letra que corresponda a un punto sobre la semirrecta nombrada (**semirrecta CB**).



IV. Segmento: Es el conjunto de **puntos** de una recta, que están situados entre **dos** de sus puntos, considerando en el segmento a estos dos puntos.

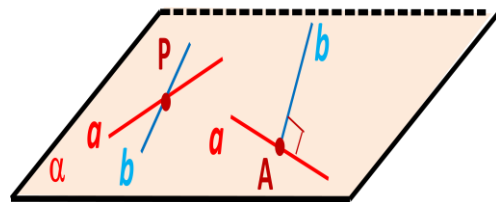
* Para referirnos a un **segmento** de recta escribimos las letras **mayúsculas** que indican sus extremos y ubicamos una barra encima de estas (\overline{BC}).



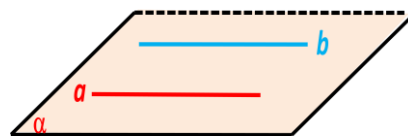
Posición relativa de rectas en el plano

Si a y b son dos rectas pertenecientes a un plano, entonces se dice que:

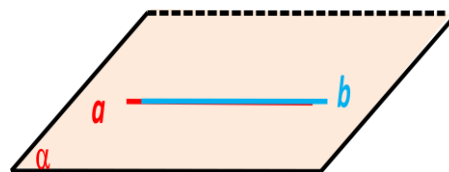
- Las rectas a y b se **cortan** si tienen un **único punto** en común. Si en particular, las rectas se cortan formando un ángulo de 90° , se dice que son **perpendiculares**.



- Las rectas a y b son **paralelas** si **no** tienen ningún punto en común.



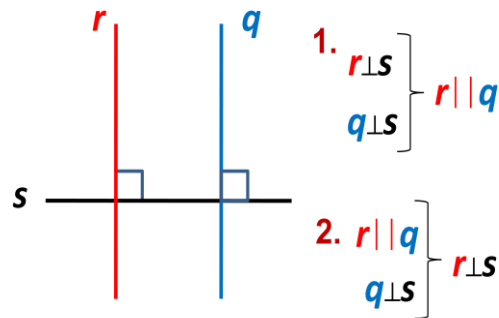
- Las rectas a y b son **paralelas coincidentes** o simplemente **coincidentes** si tienen **infinitos puntos comunes**.



Teoremas importantes:

1. Si dos rectas son **perpendiculares** a una tercera, entonces son **paralelas** entre sí.

2. Si una de dos rectas **paralelas** es **perpendicular** a una tercera, entonces la otra también lo es.

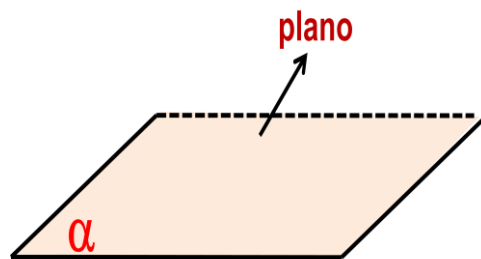


Planos y semiplanos

Al pensar en un **plano** imagina una hoja de papel que se extiende ilimitadamente por cada uno de sus lados.

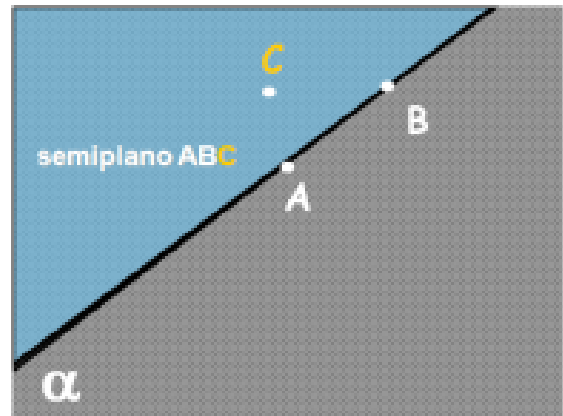
Plano: Subconjunto del espacio formado por **infinitos puntos** e **infinitas rectas**, caracterizado por las propiedades siguientes:

- Tres puntos **no alineados** determinan un **único plano**.
- Si **dos planos** tienen **un punto común**, entonces tienen una **recta** en común que contiene a ese punto (**recta de intersección**).
- Si **una recta** tiene **dos puntos** en un plano, entonces está **contenida** en dicho plano.



* Es usual identificar el plano por una **letra griega**, aunque puede también hacerse con tres letras mayúsculas (**plano α** , **plano ABC**).

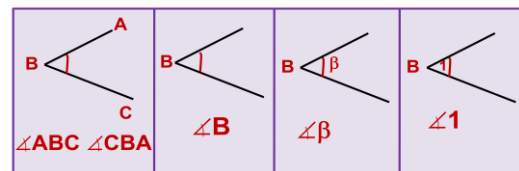
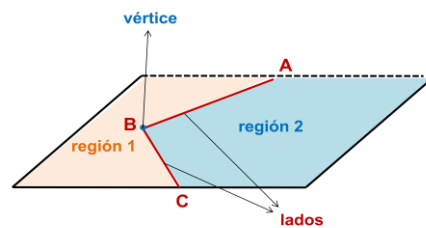
* Si trazamos una **recta** en el plano, este quedará dividido en **dos semiplanos** que nombraremos con **tres letras mayúsculas**, las dos primeras correspondientes a dos puntos de la recta y la tercera a un punto del semiplano que estamos identificando (*semiplano ABC*).



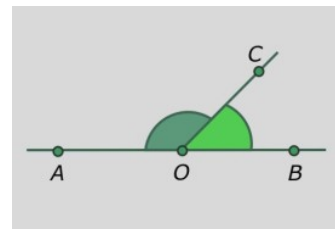
Ángulos. Notación y clasificación

Ángulo: región del plano limitada por **dos semirrectas** de origen común. Las semirrectas son los **lados** del ángulo y el punto de origen es su **vértice** del ángulo.

* **Un ángulo** puede ser nombrado por un **número**, una **letra griega**, una **mayúscula** o **tres** de estas teniendo en cuenta que la letra que se ubique en el centro será su vértice.



NOTA: En caso de que en una ilustración varios ángulos tengan **vértice común** no será posible nombrarlo por la letra correspondiente a este. Por ejemplo ninguno de los ángulos marcados en la figura puede ser denotado por **∠O**.



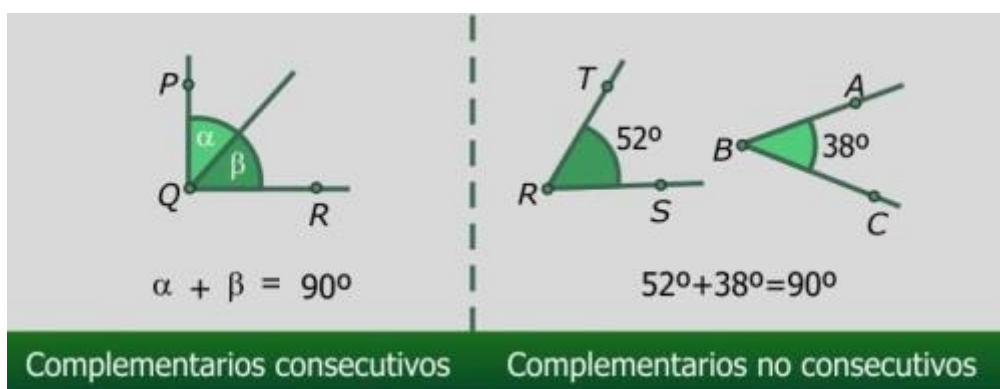
Clasificación de ángulos según su amplitud

nulo	$\angle \beta = 0^\circ$
agudo	$0^\circ < \angle \beta < 90^\circ$
recto	$\angle \beta = 90^\circ$
obtuso	$90^\circ < \angle \beta < 180^\circ$
llano	$\angle \beta = 180^\circ$
sobreobtuso	$180^\circ < \angle \beta < 360^\circ$
completo	$\angle \beta = 360^\circ$

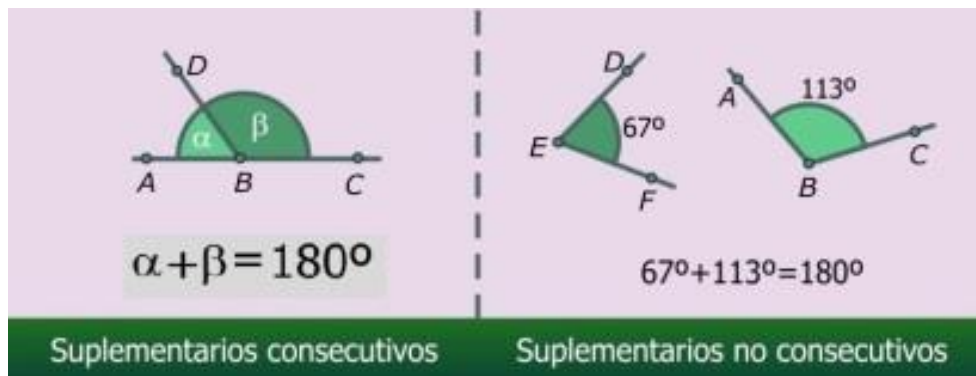
Parejas de ángulos. Clasificación y propiedades.

Clasificación de parejas de ángulos de acuerdo a la suma de sus amplitudes

♦ **Ángulos complementarios:** Pareja de ángulos que la suma de sus amplitudes es 90° .



♦ **Ángulos suplementarios:** Pareja de ángulos que la suma de sus amplitudes es 180° .



Clasificación de parejas de ángulos de acuerdo a la posición entre ellos

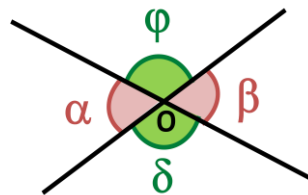
Ángulos entre dos rectas que se cortan

♦ **Opuestos por el vértice:** Dos ángulos con el mismo vértice y lados sobre semirrectas opuestas.

Ejemplos: α y β φ y δ

Sus amplitudes son **iguales**:

$$\alpha = \beta \quad \delta = \varphi$$



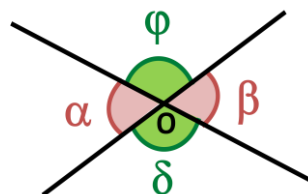
♦ **Adyacentes:** Dos ángulos con un lado común y los otros lados sobre semirrectas opuestas.

Ejemplos: α y φ β y φ

α y δ β y δ

Sus amplitudes suman **180°**:

$$\alpha + \varphi = 180^\circ \quad \alpha + \delta = 180^\circ$$



$$\beta + \varphi = 180^\circ \quad \beta + \delta = 180^\circ$$

Ángulos entre dos rectas cortadas por una secante

♦ **Correspondientes:** Dos ángulos situados al mismo lado de la secante (transversal) y en regiones de diferente tipo.

Ejemplos: $\angle 1$ y $\angle 8$ o $\angle 4$ y $\angle 7$

♦ **Alternos:** Dos ángulos situados a diferentes lados de la secante (transversal) y en regiones del mismo tipo.

Ejemplos: $\angle 3$ y $\angle 8$ o $\angle 1$ y $\angle 6$

♦ **Conjugados:** Dos ángulos situados al mismo lado de la secante (transversal) y en regiones del mismo tipo.

Ejemplos: $\angle 4$ y $\angle 8$ o $\angle 1$ y $\angle 7$

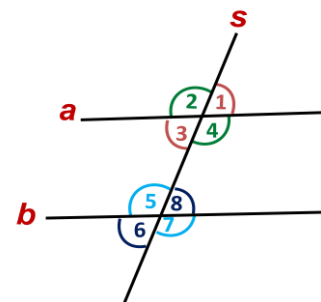
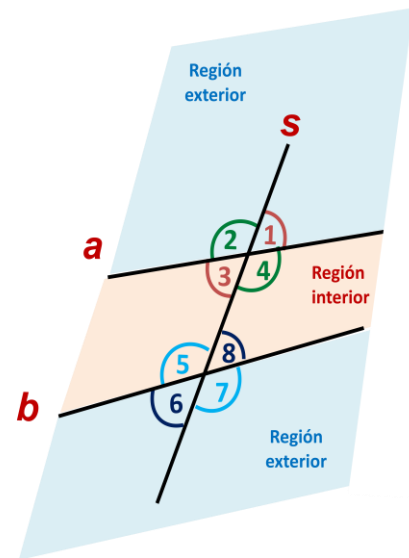
Nota: Si $a \parallel b$, entonces las parejas de ángulos **correspondientes** y **alternos**, son **iguales** y los **conjugados** son **suplementarios**.

Ejemplos:

$$\angle 1 = \angle 8 \quad \text{o} \quad \angle 4 = \angle 7 \quad (\text{correspondientes})$$

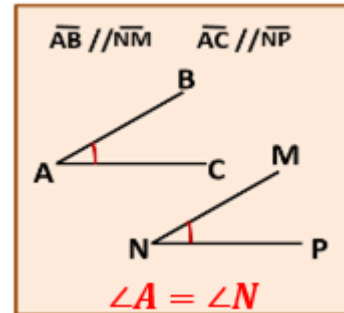
$$\angle 3 = \angle 8 \quad \text{o} \quad \angle 1 = \angle 6 \quad (\text{alternos})$$

$$\angle 4 + \angle 8 = 180^\circ \quad \text{o} \quad \angle 1 + \angle 7 = 180^\circ \quad (\text{conjugados})$$

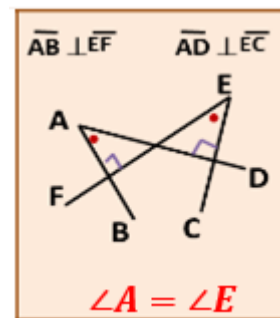


Teoremas importantes:

- ♦ Si dos ángulos **agudos** (**obtusos**) tienen sus **lados** respectivamente **paralelos**, tienen **igual amplitud**.



- ♦ Si dos ángulos **agudos** (**obtusos**) tienen sus **lados** respectivamente **perpendiculares**, tienen **igual amplitud**.

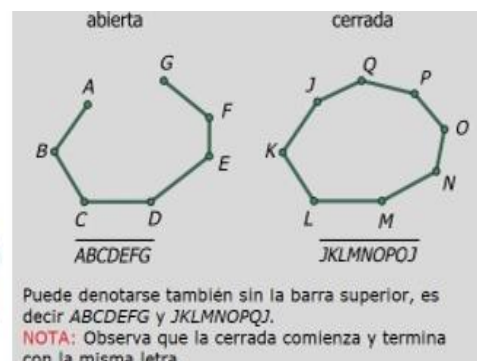


Nota: En las figuras se muestra solo para los ángulos **agudos**.

Línea poligonal. Clasificación y notación

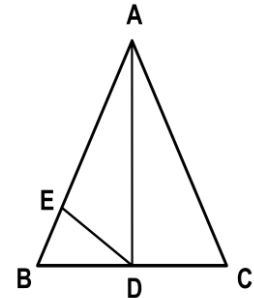
Si se consideran $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$, puntos diferentes del plano, entonces el conjunto unión:
 $\overline{A_1 A_2 A_3 \dots A_n} = \overline{A_1 A_2} \cup \overline{A_2 A_3} \cup \dots \cup \overline{A_{n-1} A_n}$
 se llama **línea poligonal** o una poligonal.

En el caso $A_1 \neq A_n$, estos puntos son los extremos de la **poligonal abierta**. Para el caso en que $A_1 = A_n$, la línea poligonal se llama **poligonal cerrada**.



Nota: Para calcular la **longitud** de una **línea poligonal** cerrada o abierta, debes **adicionar** todos los segmentos que la forman, por ejemplo, en la figura siguiente:

♦ la **longitud** de la **línea poligonal DCAE**, se calcula $\overline{DC} + \overline{CA} + \overline{AE}$, ya que es **abierta** al **no coincidir** la última letra con la primera.



♦ la **longitud** de la **línea poligonal DCAED**, se calcula

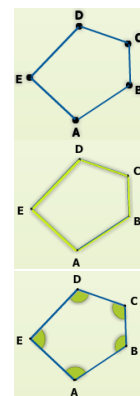
$\overline{DC} + \overline{CA} + \overline{AE} + \overline{ED}$, ya que es **cerrada** al **coincidir** la última letra con la primera.

Polígonos. Elementos y clasificación.

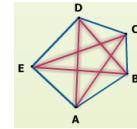
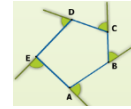
Un **polígono** es la región del plano limitada por una **línea poligonal cerrada** que incluye a esta.

Elementos de un polígono

- **Vértices:** Son los puntos comunes entre dos lados consecutivos.
- **Lados:** segmento cuyos extremos son vértices consecutivos del polígono.
- **Ángulos interiores:** Son los que se forman entre dos lados consecutivos hacia el interior del polígono.









- **Ángulos exteriores:** Son los que se forman entre un lado del polígono y la prolongación de su lado consecutivo.
- **Diagonales:** segmento cuyos extremos son vértices no consecutivos del polígono.



Clasificación de polígonos

- **Clasificación según su forma**

Convexos	Cóncavos
<p>Todo segmento determinado por dos puntos del polígono es interior a éste.</p> 	<p>El segmento determinado por dos puntos del polígono no siempre es interior a éste.</p> 
<p>El polígono queda al mismo lado de la recta que contiene a cualquiera de sus lados.</p> 	<p>El polígono no queda al mismo lado de la recta, que contiene algunos de sus lados.</p> 
<p>Todos los ángulos interiores del polígono son menores o iguales que 180°.</p>  <p>$0 < \beta \leq 180^\circ$</p>	<p>Al menos uno de los ángulos interiores del polígono es entrante.</p>  <p>$180^\circ < \beta < 360^\circ$</p>

Nota: Un **polígono cóncavo** también se conoce como **polígono no convexo**.

- **Clasificación según la medida de sus lados y de sus ángulos**

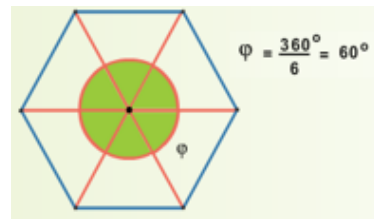
Polígono regular: Es aquél polígono que todos sus **lados** tienen **igual longitud** y sus **ángulos interiores** **igual amplitud**.

Nota: Se dice que son **equiláteros** y **equiángulos** (el prefijo **equi** significa igual).

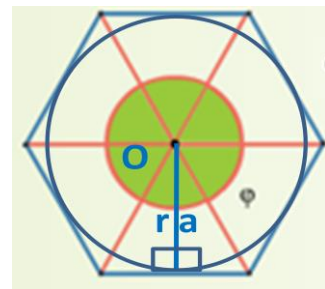
Polígono irregular: Es aquél polígono en que al menos un par de **lados** tengan **diferente longitud** o un par de sus **ángulos** interiores **diferente amplitud**.

Otros elementos en los polígonos regulares

- **Ángulo central:** ángulo cuyo vértice es el centro del polígono y sus lados cortan al polígono en dos vértices consecutivos. Su amplitud se determina $\theta = \frac{360^\circ}{n}$, donde n es el número de lados.



- **Apotema:** Se llama **apotema** de un **polígono regular**, al **segmento perpendicular** que une el **centro** del polígono con cualquiera de sus **lados**. Su **longitud** coincide con la longitud del **radio** de la **circunferencia inscrita** al polígono regular.

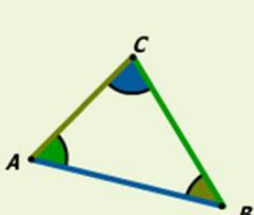


Nota: La **suma** de los **ángulos interiores** de un polígono es igual a $(n - 2)180^\circ$, donde **n**: cantidad de lados.

Triángulos

Polígono convexo de tres lados.

Elementos




$\triangle ABC$	Vértices	Lados	Ángulos Interiores
	• A	\overline{AB}	$\angle CAB$
	• B	\overline{BC}	$\angle ABC$
	• C	\overline{CA}	$\angle BCA$

Clasificación

- ♦ De acuerdo a la **amplitud** de sus **ángulos**:

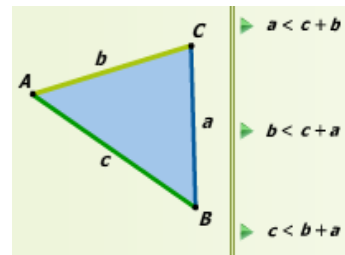
acutángulos	rectángulos	obtusángulos
<p>Los tres ángulos agudos</p> 	<p>Un ángulo recto</p> 	<p>Un ángulo obtuso</p> 

- ♦ De acuerdo a la **longitud** de sus **lados**:

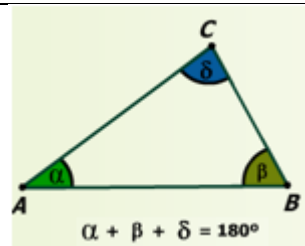
equilátero	isósceles	escaleno
<p>Los tres lados con igual longitud</p> 	<p>Dos lados con igual longitud</p> 	<p>Los tres lados con diferente longitud</p> 

Propiedades y relaciones métricas en los triángulos

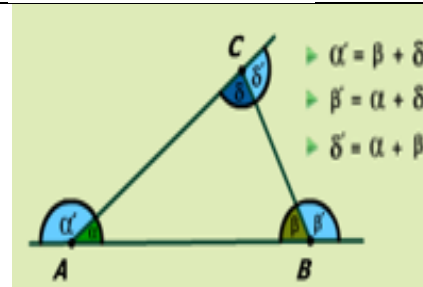
- **Desigualdad triangular:** En todo triángulo se cumple que la **suma** de las longitudes de **dos lados** siempre es **mayor** que la longitud del **tercer lado**.



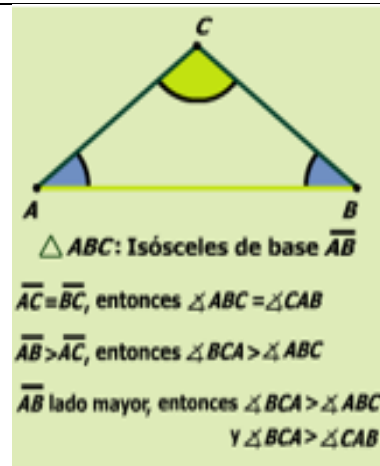
- **Suma de ángulos interiores en un triángulo:** En todo triángulo se cumple que la suma de las amplitudes de sus ángulos interiores es **180°** .



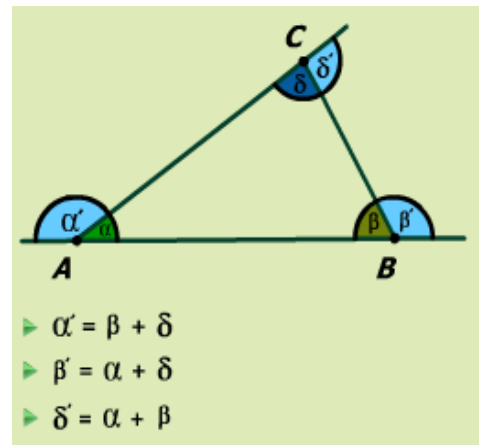
- **Suma de ángulos exteriores en un triángulo:** En todo triángulo se cumple que la suma de las amplitudes de sus ángulos exteriores es **360°** .



- **Relación lado-ángulo:** En todo triángulo se cumple que:
 - A **lados iguales** se oponen **ángulos iguales** y viceversa.
 - A **lados diferentes** se oponen **ángulos diferentes** y viceversa.
 - Al **mayor lado** se opone el **mayor ángulo** y viceversa.



- **Relación entre los ángulos exteriores y los interiores:** En todo triángulo se cumple que la amplitud de un **ángulo exterior** es igual a la **suma** de las amplitudes de los **ángulos interiores** no adyacentes a él.



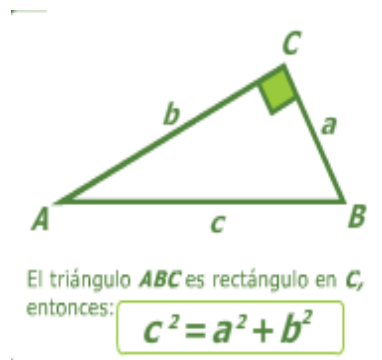
Resolución de triángulos rectángulos y generales

Resolver triángulos significa determinar la **longitud** de sus lados y la **amplitud** de sus ángulos conocidos algunos de estos elementos, para ellos debes conocer las **relaciones métricas** tanto en los triángulos rectángulos como en los que no lo son.

Relaciones entre los lados en triángulos rectángulos

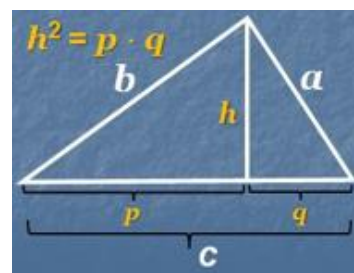
Grupo de teoremas de Pitágoras

- **Teorema de Pitágoras:** En todo triángulo rectángulo se cumple que el **cuadrado** de la longitud de la **hipotenusa** es igual a la suma de los **cuadrados** de las longitudes de los **catetos**.



Nota: Se utiliza para calcular la longitud de uno de sus **lados** conocidos los **otros dos**.

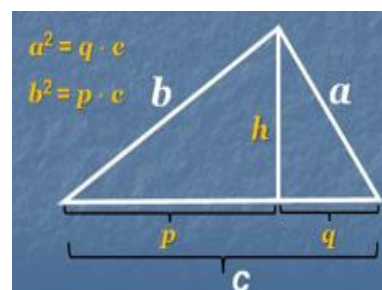
- **Teorema de la altura:** En todo triángulo rectángulo se cumple que el **cuadrado** de la longitud de la **altura** relativa a la hipotenusa es igual al **producto** de las longitudes de las **proyecciones** de los catetos sobre la hipotenusa.



Nota: Se utiliza para calcular:

- ♦ la longitud de la **altura** conocidas las **proyecciones** de los **catetos**,
- ♦ o la longitud de una **proyección** conocidas la **otra** y la **altura** relativa a la **hipotenusa**.

- **Teorema de los catetos:** En todo triángulo rectángulo se cumple que el **cuadrado** de la longitud de un **cateto** es igual al **producto** de la longitud de la **proyección** de este cateto sobre la hipotenusa y de la longitud de la **hipotenusa**.



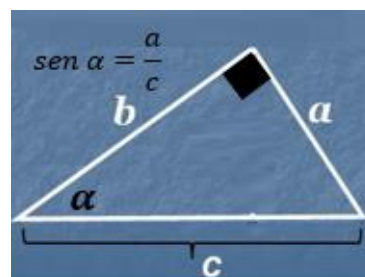
Nota: Se utiliza para calcular:

- ♦ la longitud de un **cateto** conocidas su **proyección** y la longitud de la **hipotenusa**,
- ♦ o la longitud de una **proyección** conocidas la longitud del **cateto** y la **hipotenusa**.

Relaciones entre los lados y los ángulos agudos en el triángulo rectángulo.

En todo triángulo rectángulo se cumple que:

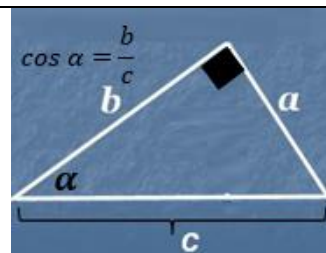
- El **seno** de uno de sus ángulos agudos es igual al **cociente** de la longitud del **cateto** que se le **opone** sobre la longitud de la **hipotenusa**.



Nota: Se utiliza para calcular:

- ♦ la **amplitud** del **ángulo agudo** conocidas las longitudes de la hipotenusa y el cateto opuesto,
- ♦ o la **longitud** de la **hipotenusa** o el **cateto** conocidas la amplitud del ángulo y una de esas dos longitudes.

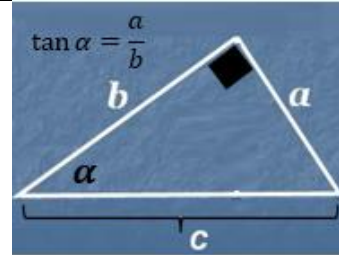
- El **coseno** de uno de sus ángulos agudos es igual al **cociente** de la longitud del **cateto adyacente** a este, sobre la longitud de la **hipotenusa**.



Nota: Se utiliza para calcular:

- ♦ la **amplitud** del **ángulo agudo** conocidas las longitudes de la hipotenusa y el cateto adyacente,
- ♦ o la **longitud** de la **hipotenusa** o el **cateto** conocidas la amplitud del ángulo y una de esas dos longitudes.

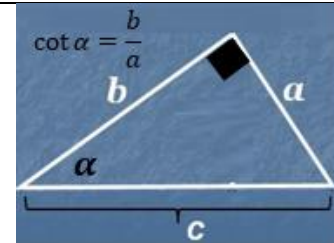
- La **tangente** de uno de sus ángulos agudos es igual al **cociente** de la longitud del **cateto opuesto** a este, sobre la longitud del **cateto adyacente**.



Nota: Se utiliza para calcular:

- ♦ la **amplitud** del **ángulo agudo** conocidas las longitudes de los catetos,
- ♦ o la **longitud** de un **cateto** conocidas la amplitud del ángulo y una de los catetos.

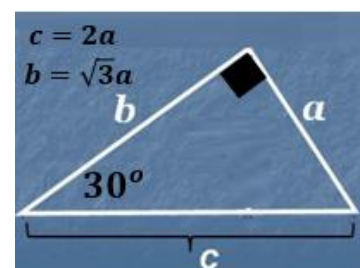
- La **cotangente** de uno de sus ángulos agudos es igual al **cociente** de la longitud del **cateto adyacente** a este, sobre la longitud del **cateto opuesto**.



Nota: Se utiliza para calcular:

- ♦ la **amplitud** del **ángulo agudo** conocidas las longitudes de los catetos,
- ♦ o la **longitud** de un **cateto** conocidas la amplitud del ángulo y una de los catetos.

- **Teorema del ángulo de 30°:** Si en un **triángulo rectángulo** la amplitud de uno de los ángulos agudos es de **30°**, entonces:



- la longitud del **cateto opuesto** a ese ángulo es la mitad de la longitud de la **hipotenusa**.

En la figura: $a = \frac{c}{2}$

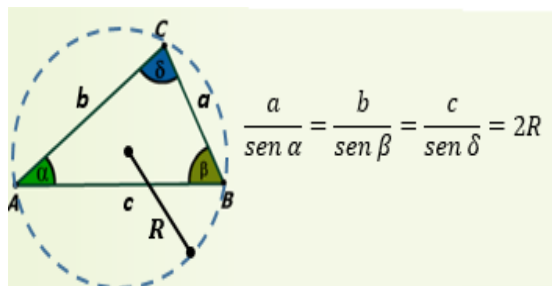
- la longitud del **cateto adyacente** a él es equivalente al **producto** de $\sqrt{3}$ por la longitud del **cateto opuesto** o lo que es lo mismo, al **producto** de $\sqrt{3}$ por la mitad de la **hipotenusa**.

En la figura: $b = \sqrt{3}a = \sqrt{3} \cdot \frac{c}{2}$

Relaciones entre lados y ángulos en triángulos cualesquiera

En todo triángulo se cumple:

- **Ley de los senos:** En todo triángulo se cumple que la **razón** entre la longitud de cada **lado** y el **seno** del **ángulo** que se le opone es igual al **doble del radio** de la circunferencia circunscrita al triángulo.



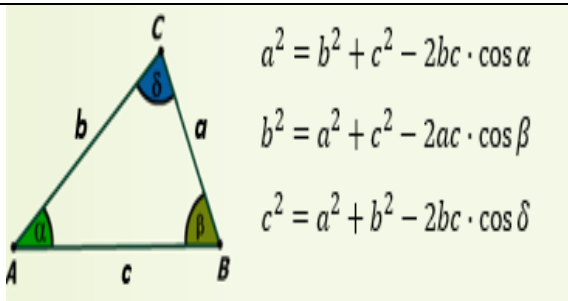
Nota: Se utiliza cuando conoces:

1. **Dos lados** y el **ángulo opuesto** a uno de ellos, para hallar el otro ángulo opuesto.
2. **Un lado** y **dos ángulos** cualesquiera, para hallar el lado

opuesto a uno de ellos.

3. El **lado** y **ángulo** de una misma razón para hallar el **radio** de la circunferencia circunscrita.

- **Ley de los cosenos:** En todo triángulo se cumple que el **cuadrado** de la longitud de un **lado** es igual a la **suma** de los **cuadrados** de las longitudes de los otros **lados menos** el **duplo** del producto de estos por el **coseno** del ángulo comprendido.



Nota: Se utiliza cuando conoces:

1. **Dos lados** y el **ángulo comprendido**, para hallar el tercer lado.

2. Los **tres lados**, para hallar un ángulo.

Recíproco del teorema de Pitágoras: Si en un triángulo cualquiera, el **cuadrado** de la longitud del **lado mayor** es igual a la **suma** de los **cuadrados** de las longitudes de los otros **dos lados**, entonces el triángulo es rectángulo.



Nota: Un **trío pitagórico** es una terna de números **a**, **b** y **c** que cumplen la relación $c^2 = a^2 + b^2$.

Para todo **trío pitagórico** que cumple con esta relación existe un **triángulo rectángulo** de hipotenusa **c** y catetos **a** y **b**. Este

triángulo será **semejante** con cualquier triángulo cuyas longitudes de sus lados sean ka , kb y kc (con k real positivo).

Por ejemplo:

El **trío pitagórico** más pequeño es de lados **3**, **4** y **5**.

♦ Al multiplicar este trío por **2**, obtienes **6**, **8** y **10**.

♦ Al multiplicar este trío por **3**, obtienes **9**, **12** y **15**.

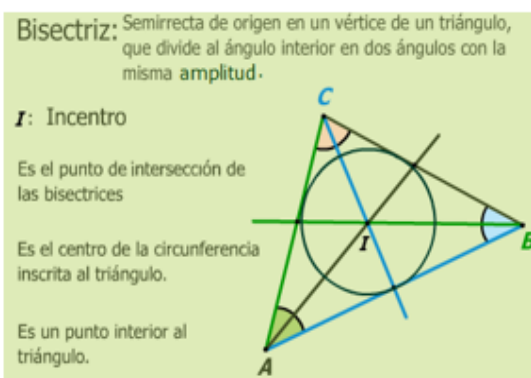
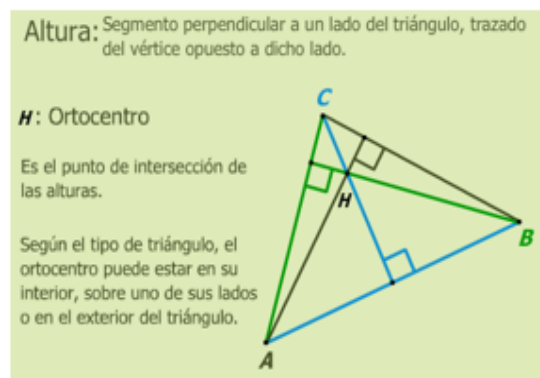
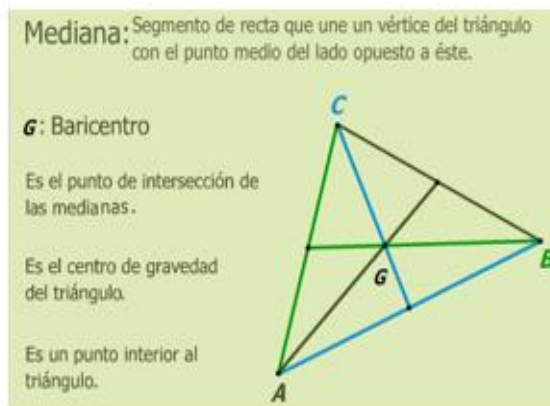
Y así sucesivamente.

♦ Al multiplicar el trío **6**, **8** y **10** por **2**, obtienes **12**, **16** y **20**.

Y así sucesivamente.

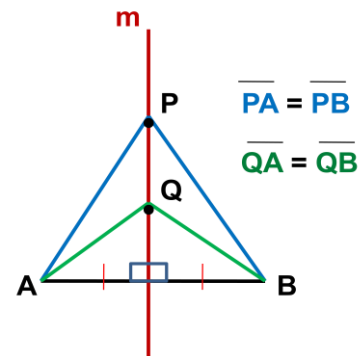
Luego, existen **infinitos** tríos de números **pitagóricos**.

Rectas y puntos notables en un triángulo

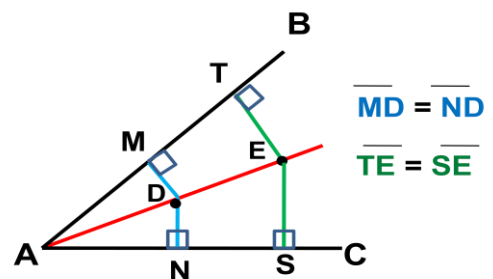


Recuerda que:

- Todo punto que pertenece a la **mediatriz** de un segmento, **equidista** de los extremos del segmento.



- Todo punto que pertenece a la **bisectriz** de un ángulo, **equidista** de los lados del ángulo.

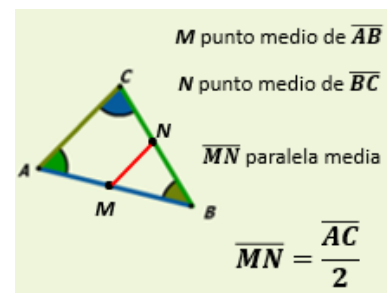


OTRO ELEMENTO IMPORTANTE EN LOS TRIÁNGULOS

Elemento de gran utilidad en ejercicios de demostración y de cálculo es la **paralela media del triángulo**.

Paralela media de un triángulo:

Segmento que une los **puntos medios** de dos de sus lados, es **paralelo** al tercer lado y mide la **mitad** de la longitud de este.

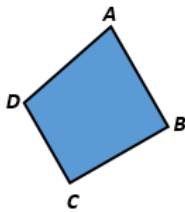


Cuadriláteros

Polígono de cuatro lados.

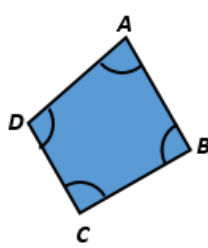
Elementos

Cuadrilátero $ABCD$

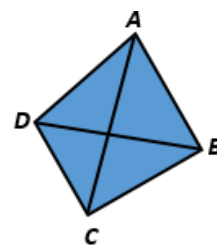


Vértices: A, B, C y D

Lados: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ y \overline{DA}



Ángulos interiores:
 $\angle DAB, \angle ABC, \angle BCD$
y $\angle CDA$



Diagonales: \overline{AC} y \overline{BD}

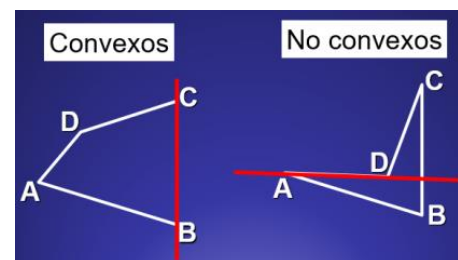
Relaciones métricas en el cuadrilátero

- **Suma de ángulos interiores en un cuadrilátero:** En todo cuadrilátero se cumple que la suma de las amplitudes de sus ángulos interiores es 360° .
- **Suma de ángulos exteriores en un cuadrilátero:** En todo cuadrilátero se cumple que la suma de las amplitudes de sus ángulos exteriores es 360° .

Clasificación

Los cuadriláteros pueden ser **convexos** y **no convexos**.

Los cuadriláteros convexos se clasifican atendiendo al **paralelismo** de sus lados en **trapezoides**, **trapecios** y **paralelogramos**.

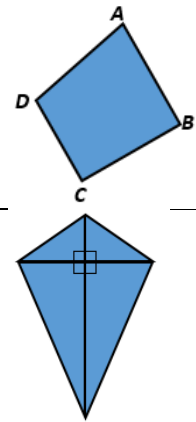


Trapezoide

Trapezoide: Cuadrilátero convexo que **no** tiene lados paralelos.

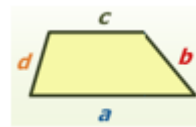
Existe un caso particular de este cuadrilátero llamado **trapezoide simétrico** que tiene como propiedades:

- Sus diagonales se cortan **perpendicularmente**.
- Una de sus diagonales es **bisectriz** de los ángulos de los vértices opuestos.



Trapecio

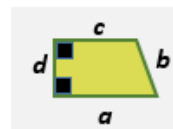
Trapecio: Cuadrilátero convexo que tiene un par de lados **paralelos**.



$a \parallel c$
 a y c bases del trapecio

Existen **dos** casos especiales de **trapecios**

Trapecio rectángulo: Trapecio que tiene un lado **perpendicular** a las bases.



$d \perp a$ y $d \perp c$
 a y c bases del trapecio

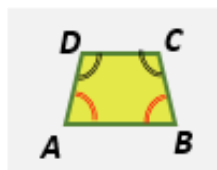
Trapecio isósceles: Trapecio que sus lados no base tienen **igual longitud**.



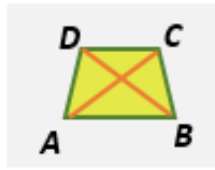
$b = d$
 a y c bases del trapecio

Este **trapecio** cumple las siguientes propiedades:

- Los **ángulos adyacentes** a una misma base son **iguales**.
- Sus **diagonales** son **iguales**.



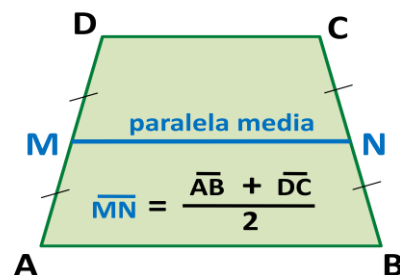
$$\angle A = \angle B$$
$$\angle C = \angle D$$



$$\overline{AC} = \overline{BD}$$

OTRO ELEMENTO IMPORTANTE EN LOS TRAPECIOS

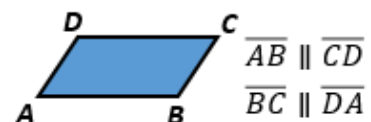
En cualquier trapecio existe un elemento que se emplea en ejercicios de demostración y cálculo **la paralela media del trapecio**:



Segmento que une los **puntos medios** de los **lados no base**, es **paralelo** a ellas y su longitud es igual a la **semisuma** de las longitudes de las bases.

Paralelogramos

Paralelogramo: Cuadrilátero convexo que tiene sus **lados opuestos paralelos**.



Todo **paralelogramo** cumple las siguientes propiedades:

- Sus **lados opuestos** son **iguales**.
- Sus **ángulos opuestos** son **iguales**.
- Sus **ángulos consecutivos** son **suplementarios** (suman 180°)
- Sus **diagonales** se cortan en su **punto medio**.

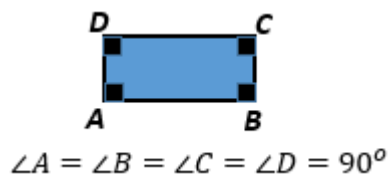
Otras definiciones de paralelogramo te serán de utilidad a la hora de demostrar que un cuadrilátero es paralelogramo.

- Cuadrilátero convexo con un par de lados paralelos e iguales.

- Cuadrilátero convexo con lados opuestos iguales.
- Cuadrilátero convexo con ángulos opuestos iguales.
- Cuadrilátero convexo cuyas diagonales se cortan en su punto medio.

Existen tres casos de **paralelogramos especiales**:

Rectángulo: Paralelogramo con todos sus ángulos interiores **iguales**.



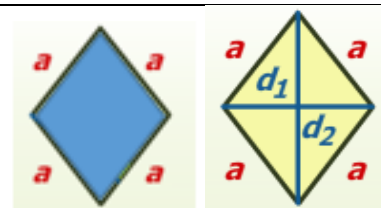
En todo **rectángulo** se cumple que:

- Sus diagonales son **iguales**.
- Sus ángulos miden **90°**.

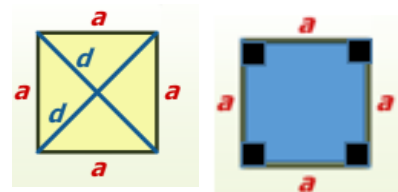
Rombo: Paralelogramo con todos sus lados **iguales**.

En todo **rombo** se cumple que:

- Sus diagonales se cortan **perpendicularmente**.
- Sus diagonales son **bisectrices** de los ángulos opuestos.



Cuadrado: Paralelogramo con todos sus lados **iguales** y sus ángulos interiores con **igual amplitud**.



Nota: El **cuadrado** es **rectángulo** y **rombo** a la vez, por lo que cumple con las propiedades de estas figuras.

- Sus diagonales son **iguales**.
- Sus diagonales se cortan **perpendicularmente**.

- Sus diagonales son **bisectrices** de los ángulos opuestos.

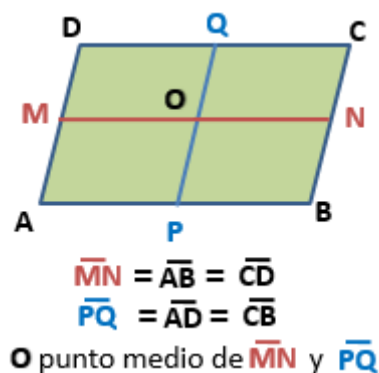
OTRO ELEMENTO IMPORTANTE EN LOS PARALELOGRAMOS

Otro elemento de interés para ejercicios de cálculo y demostración resulta **la paralela media de los paralelogramos**:

Paralela media de un paralelogramo: Segmento que une los **puntos medios** de dos **lados opuestos** y es **paralelo** a los otros dos lados.

Todos los **paralelogramos** tienen **dos paralelas medias** que cumplen con las siguientes propiedades:

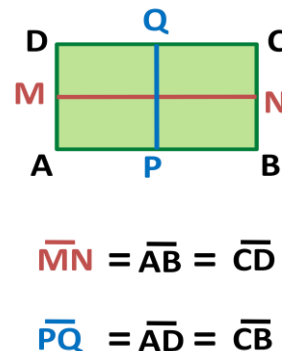
- tienen la misma longitud que los lados paralelos a ella.
- se cortan en su punto medio.



En el caso de los **paralelogramos especiales** sus **paralelas medias** cumplen además con las siguientes características:

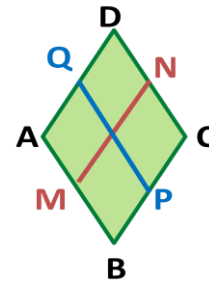
♦ **En el rectángulo sus paralelas medias**:

1. son **perpendiculares**, pero **no iguales**.
2. son segmentos sobre los **ejes de simetría** de la figura.



♦ En el rombo sus paralelas medias:

1. son **iguales**, pero **no** perpendiculares.
2. **no** están situadas sobre sus **ejes de simetría**.

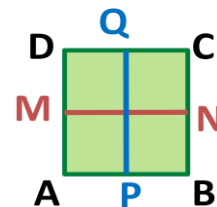


$$\overline{MN} = \overline{PQ} = a$$

a: lado del rombo

♦ En el cuadrado sus paralelas medias:

1. son **perpendiculares e iguales**.
2. son segmentos sobre dos de sus cuatro **ejes de simetría**.



$$\overline{MN} = \overline{PQ} = a$$

a: lado del cuadrado

Circunferencia y círculo.

Circunferencia. Elementos y propiedades

Circunferencia: Es el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo de este.

Círculo: Es la región del plano limitada por una circunferencia que incluye a esta.



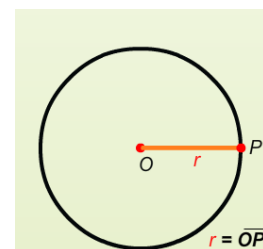
El punto fijo del plano es el **centro de la circunferencia** y la distancia del centro a

cualquiera de los puntos de la circunferencia se llama **radio de la circunferencia**. Con estos elementos se denota la circunferencia de la siguiente forma $C(O;r)$ y se lee: circunferencia de centro O y radio r .

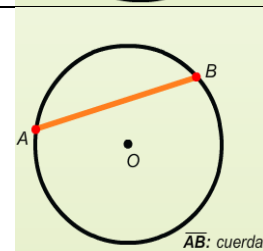
Nota: También se puede de denotar escribiendo la medida de la longitud del radio. **Ejemplo:** $C(O; 4,0cm)$

Elementos de la circunferencia

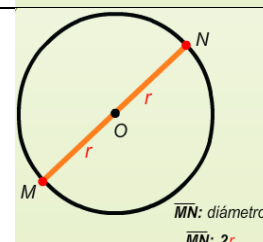
Un **radio** es el segmento con un extremo en el centro de la circunferencia y el otro en un punto cualesquiera de esta.



Una **cuerda** es el segmento con sus extremos dos puntos cualesquiera de la circunferencia.

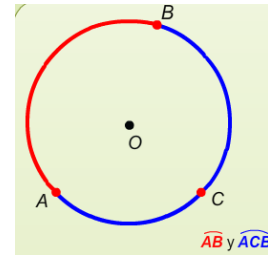


Un **diámetro** es una cuerda que contiene al centro de la circunferencia, por esta razón es la mayor entre todas las cuerdas.



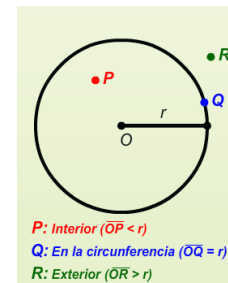
Un **arco** es la porción de circunferencia limitada por dos puntos cualesquiera de esta.

Nota: Dos puntos de la circunferencia determinan dos arcos.

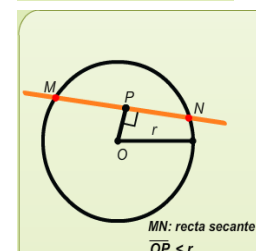


Relaciones de posición de puntos y rectas respecto a una circunferencia.

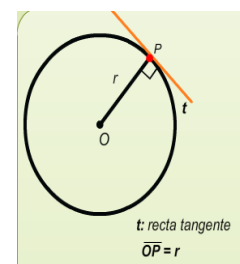
♦ **Puntos:** En la circunferencia se pueden encontrar puntos **interiores**, **en la circunferencia** y **exteriores**.



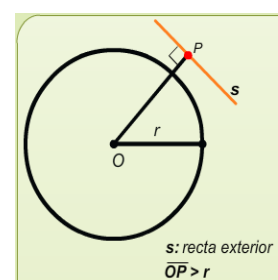
♦ **Secante:** recta que corta a la circunferencia en **dos puntos**. Su **distancia** al **centro** de la circunferencia es **menor** que la longitud del **radio**.



♦ **Tangente:** recta que corta a la circunferencia en un **único punto**. Su **distancia** al **centro** de la circunferencia es **igual** que la longitud del **radio**.



♦ **Exterior:** recta que **no** tiene **puntos comunes** con la circunferencia. Su **distancia**



al **centro** de la circunferencia es **mayor** que la longitud del **radio**.

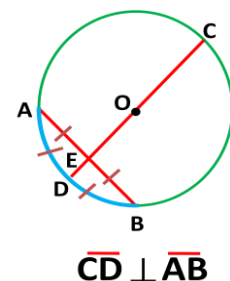
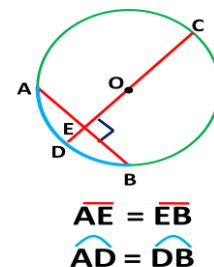
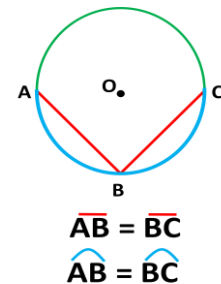
Propiedades de la circunferencia

- Una circunferencia está determinada de manera única por el **centro** y su **radio**.
- La circunferencia es **axialmente simétrica respecto a cualquiera de sus diámetros**.
- La circunferencia es **centralmente simétrica respecto a su centro**.

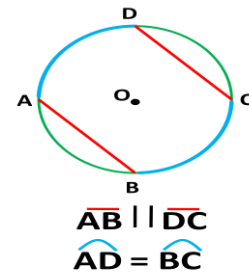
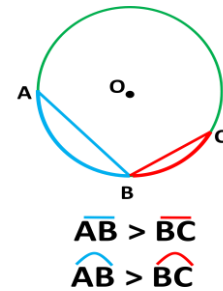
Relaciones entre los elementos de una circunferencia

En una **circunferencia** se cumple que:

- A **cuerdas iguales** corresponden **arcos iguales** y **viceversa**.
- Todo **radio** o **diámetro perpendicular** a una **cuerda**, divide a la **cuerda** y a su **arco** correspondiente en **partes iguales**.



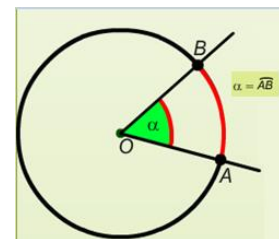
- Todo **radio** o **diámetro** que divide a una **cuerda** o a su **arco** correspondiente en **partes iguales** es **perpendicular** a la cuerda.
- Si un **arco** es **mayor** que otro, entonces las **cuerdas** correspondientes están en esa **misma relación**.
- Los **arcos** comprendidos entre **cuerdas paralelas** son **iguales**.



Ángulos en la circunferencia

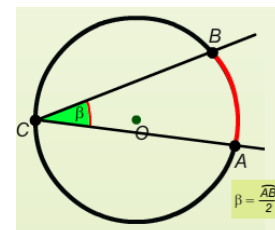
Ángulo central: Tiene su **vértice** en el centro de la circunferencia y sus lados la cortan.

- Su **amplitud** es **igual** a la del **arco** correspondiente.



Ángulo inscrito: Tiene su **vértice** en un punto de la circunferencia y sus lados la cortan.

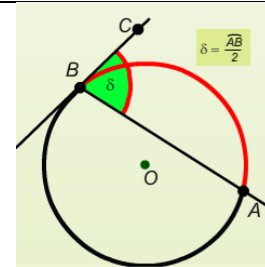
- Su **amplitud** es igual a la **mitad** de su



arco correspondiente.

Ángulo seminscrito: Tiene su **vértice** en un punto de la circunferencia, uno de sus lados corta a la circunferencia y el otro es tangente a ella.

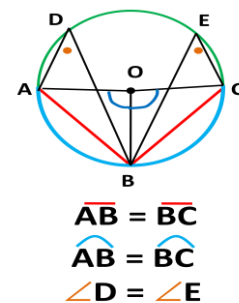
- Su **amplitud** es igual a la **mitad** de su **arco** correspondiente.



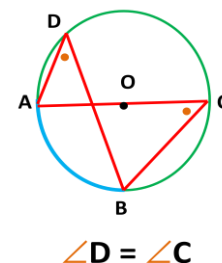
Relaciones entre los ángulos en una circunferencia

En una circunferencia se cumple que:

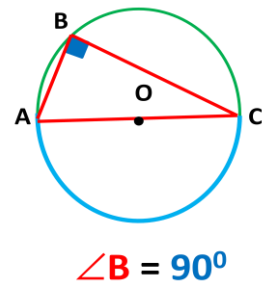
- A **ángulos centrales iguales**, le corresponden **arcos** (**ángulos inscritos, cuerdas**) **iguales** y viceversa.



- Dos **ángulos inscritos** sobre el **mismo arco** son **iguales**.



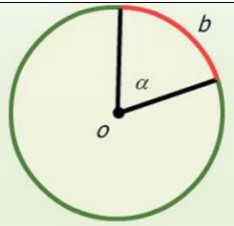
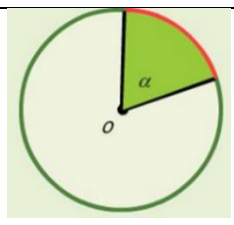
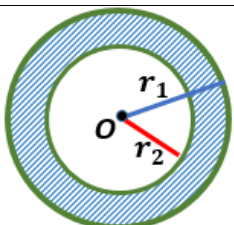
- **Teorema de Tales:** Un ángulo **inscrito** cuyo arco correspondiente sea una **semicircunferencia** (cuya cuerda correspondiente sea un diámetro) mide **90°**.



Cálculo en figuras planas

Figura	Área	Perímetro	Figura	Área	Perímetro
	$A = \frac{b \cdot h}{2}$ $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$	$P = a + b + c$		$A = a^2$ $A = \frac{d^2}{2}$	$P = 4a$
	$A = b \cdot h$	$P = 2(a+b)$		$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$ B : base mayor b : base menor	$P = a+b+c+d$
	$A = b \cdot h$ $= a \cdot b$	$P = 2(a+b)$		$A = \pi \cdot r^2$	$P = 2 \cdot \pi \cdot r$ $= \pi \cdot d$
	$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$	$P = 4a$	Polígonos regulares 	$A = p \cdot a$ p : semiperímetro a : apotema	$P = n \cdot \ell$ n : cantidad de lados

Otras fórmulas importantes:

Longitud de un arco de circunferencia	
	$\frac{b}{L} = \frac{\alpha}{360^\circ}$ <p> b: longitud del arco L: Longitud de la circunferencia α: amplitud del ángulo central correspondiente al arco </p>
Área del sector circular	
	$\frac{A_\alpha}{A_c} = \frac{\alpha}{360^\circ}$ <p> A_α: área del sector A_c: área del círculo α: amplitud del ángulo central correspondiente al sector circular </p>
Área del anillo circular (Corona)	
	$A_{ac} = A_{c_1} - A_{c_2}$ $A_{ac} = \pi (r_1^2 - r_2^2)$ <p> r_1: radio del círculo mayor r_2: radio del círculo menor </p>

Comentarios:

1. Al calcular el **área** de un triángulo:

♦ si conoces un **lado** y su **altura** relativa, utilizas la fórmula

$$A = \frac{b \cdot h}{2},$$

♦ si conoces **dos lados** y el **ángulo comprendido**, entonces utilizas $A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha$, donde α es el ángulo comprendido entre los lados del triángulo que tomes.

♦ Si el triángulo es **equilátero**, su **área** se puede calcular

por la fórmula $A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \ell^2$, donde ℓ : lado del triángulo.

Nota: Esta fórmula para el equilátero y la de $A = \frac{b \cdot h}{2}$ se obtienen a partir de $A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha$, de la forma siguiente:

♦ En un triángulo **rectángulo** los catetos son **perpendiculares**, o sea, forman un ángulo de 90° entre sí, sustituyendo en la fórmula se obtiene:

$$A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} b \cdot h \cdot \sin 90^\circ = \frac{b \cdot h}{2}, \text{ ya que } \sin 90^\circ = 1.$$

♦ En un triángulo **equilátero** los lados son **iguales** y los **ángulos** interiores miden 60° , sustituyendo en la fórmula se obtiene:

$$A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \ell \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \ell^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \ell^2.$$

♦ Si conoces los **tres lados** su área se puede calcular por la **fórmula de Herón**:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ donde } p: \text{ semiperímetro.}$$

2. El **perímetro** de un triángulo **equilátero** se puede calcular también por la fórmula $P = 3a$, mientras que el del **isósceles**, por la fórmula $P = 2a + b$. Estas fórmulas son muy útiles cuando es necesario despejar un lado.

3. Como el **cuadrado** es un **rombo**, su **área** también se puede calcular por la fórmula del rombo, teniendo en cuenta que las diagonales del cuadrado son **iguales**, sea, $d_1 = d_2$.

$$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{d^2}{2}.$$

Luego, si conoces el **lado** del cuadrado, utilizas a^2 y si conoces la **diagonal**, utilizas $\frac{d^2}{2}$.

4. El **área** de cualquier **polígono regular** se calcula por la fórmula que aparece en la tabla $A = p \cdot a$, aunque te mostramos el **hexágono regular** por su importancia dentro de estos polígonos. Solo ten en cuenta que **p** minúscula es el **semiperímetro**, no el perímetro. Si utilizas el perímetro (**P**), puedes escribirla entonces de esta manera:

$A = \frac{P}{2} \cdot a$, donde **a** es la **apotema**, o sea, el segmento de **perpendicular** trazado del centro **O** de cada polígono a cada lado.

5. También es importante conocer que en un **polígono regular** al trazar sus diagonales queda dividido en **triángulos isósceles iguales**. Luego, el **área** de un

polígono regular también se puede calcular **multiplicando** el área de uno de ellos por la cantidad de triángulos formados.

En particular, en el **hexágono regular**, como se muestra en la tabla, estos triángulos son **6** y además **equiláteros**, por lo que se puede calcular de esta manera:

$$A(\text{hexág. reg.}) = 6 \cdot A(\Delta \text{equilátero}) = 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^2\right).$$

Si simplificas la expresión, queda $\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot l^2$.

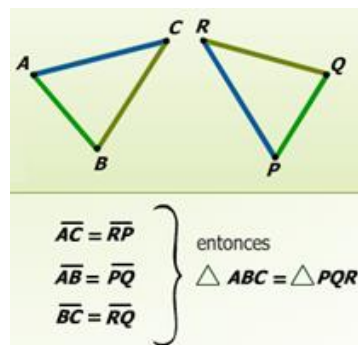
6. En el caso del **perímetro** de un **polígono regular** como todos sus lados son **iguales**, se multiplica la longitud de un lado por la cantidad de los mismos. Para el **hexágono regular**, sería **$6 \cdot l$** .

7. Si una figura geométrica está dividida en otras figuras conocidas, recuerda puedes utilizar la **adición** o **sustracción** de áreas, según la que se quiera calcular.

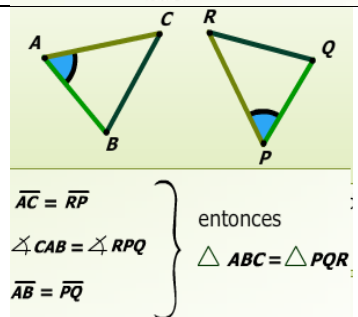
Igualdad de triángulos

Criterios de igualdad de triángulos

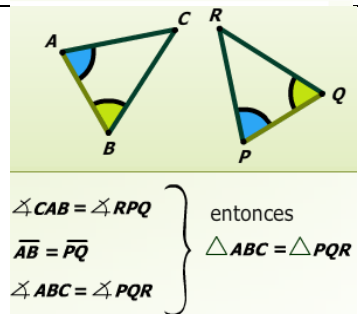
Dos triángulos son **iguales** si tienen sus tres lados respectivamente iguales. (**LLL**)



Dos triángulos son **iguales** si tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales. (**LAL**)



Dos triángulos son **iguales** si tienen un lado y los ángulos adyacentes a él respectivamente iguales. (**ALA**).



IMPORTANTE PARA EL CÁLCULO

♦ Si **dos triángulos** son **iguales** sus **áreas** son **iguales** y sus **perímetros** también.

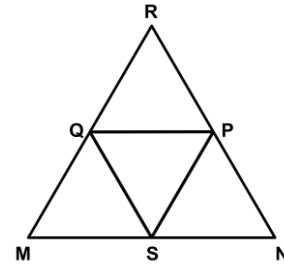
NOTA: Recuerda que al indicar la igualdad de parejas de segmentos o de ángulos, debes argumentar utilizando las relaciones o propiedades de las figuras que te permitan sustentar tu afirmación.

Ejemplo:

En la figura, **Q**, **P** y **S** puntos de los lados del $\triangle MNR$,

- **RQSP** rombo, $\overline{QP} \parallel \overline{MN}$.

a) Prueba que el trapecio **MNPQ** es isósceles de bases \overline{MN} y \overline{QP} .



b) Si $A(\mathbf{RQSP}) = 24 \text{ dm}^2$, $\overline{QP} = \overline{MS} = 6,0 \text{ dm}$, calcula el área del trapecio.

Solución

a) En los $\triangle MQS$ y $\triangle SPN$:

• $\overline{QS} = \overline{PS}$, por ser **lados** del rombo.

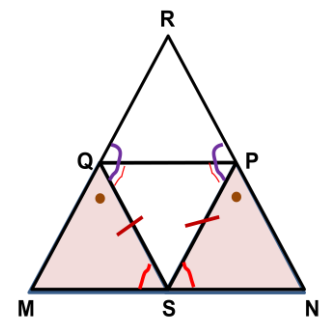
$\angle RQS = \angle RPS$, por **ángulos opuestos** del rombo.

• $\angle MQS = \angle NPS$, por **adyacentes** a ángulos iguales.

$\angle PQS = \angle QPS$, porque las **diagonales** del rombo son **bisectrices** de sus ángulos opuestos.

• $\angle QSM = \angle PSN$, por ser **alternos** a ángulos iguales, ya que $\overline{QP} \parallel \overline{MN}$ por ser bases del trapecio y secantes \overline{QS} y \overline{PS} respectivamente.

Luego, $\triangle MQS = \triangle SPN$, por tener un lado y los ángulos adyacentes a él respectivamente iguales (**a ; l ; a**).



• $\overline{MQ} = \overline{NP}$, por **elementos homólogos** de triángulos iguales.

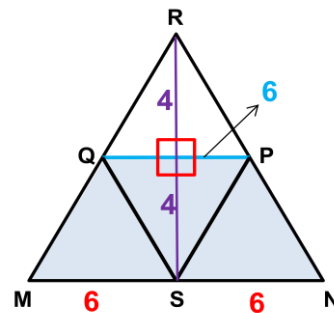
MNPQ es un **trapecio isósceles** por tener sus lados no base iguales.

Nota: Como dice en el enunciado que **MNPQ** es un **trapecio**, solo debes demostrar que es **isósceles**. Si dijese **cuadrilátero**, entonces hay que demostrar **ambas cosas**, que es un **trapecio** y que es **isósceles**.

$$b) A(RQSP) = \frac{\overline{RS} \cdot \overline{QP}}{2}$$

$$24 = \frac{\overline{RS} \cdot 6}{2}$$

$$\overline{RS} = 8 \text{ dm}$$



Como las **diagonales** se cortan **perpendicularmente** y en su **punto medio**, la altura del trapecio es la mitad de la diagonal \overline{RS} .

$\overline{MS} = \overline{SN} = 6 \text{ dm}$, por elementos homólogos de triángulos iguales.

$\overline{MN} = 12 \text{ dm}$, por suma de segmentos.

Calculas el área del trapecio:

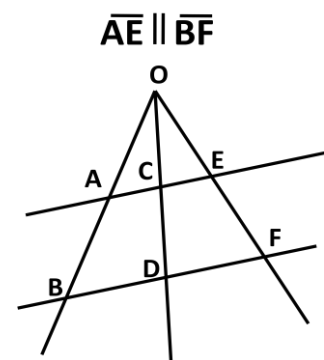
$$A(MNPQ) = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(12+6) \cdot 4}{2}$$

$$A(MNPQ) = 36 \text{ dm}^2.$$

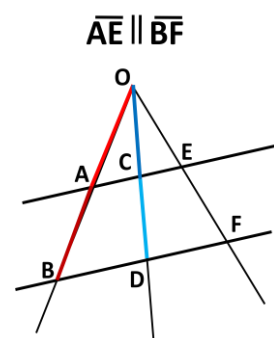
Semejanza de triángulos

Al igual que en la demostración de la igualdad de triángulos, en la comparación de elementos para la demostración de la semejanza de triángulos, debes argumentar utilizando las relaciones o propiedades de las figuras que te permitan sustentar tu afirmación. De particular importancia resulta que sepas plantear y argumentar las **proporciones** entre **segmentos**, ya sea utilizando las relaciones o datos ofrecidos en la figura o aplicando el **teorema de las transversales**.

Teorema de las transversales: Si dos o más semirrectas de origen común son cortadas por varias rectas paralelas entonces se cumple que:



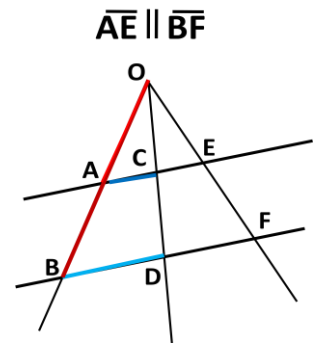
- La **razón** entre dos **segmentos** en una de las **semirrectas** es igual a la **razón** entre los segmentos correspondientes en otra de las **semirrectas**.



Por ejemplo: $\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CD}}$.

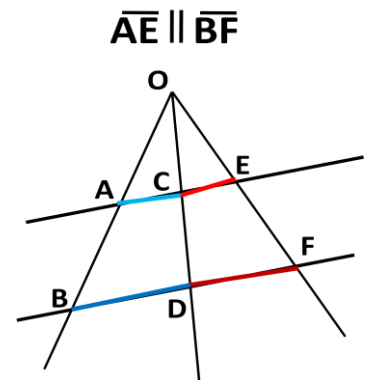
- La **razón** entre dos **segmentos** de una **semirrecta** (tomados desde el origen) es igual a la **razón** entre los **segmentos de paralelas** correspondientes.

Por ejemplo: $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$.



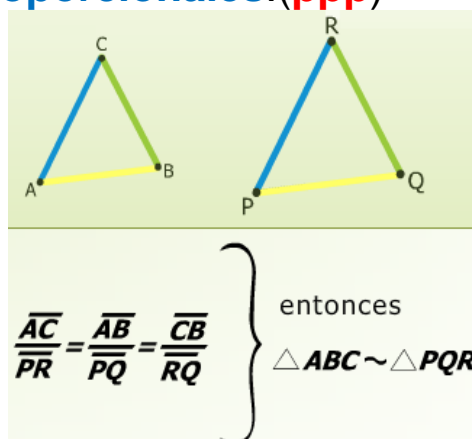
- La **razón** entre dos **segmentos en** una de las **paralelas** es igual a la **razón** entre los **segmentos** correspondientes en otra de las **paralelas**.

Por ejemplo: $\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$.

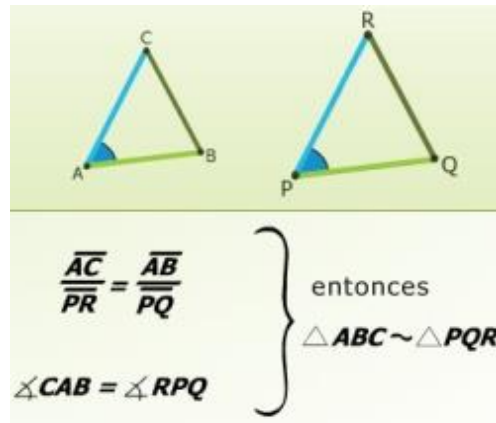


Criterios de semejanza de triángulos

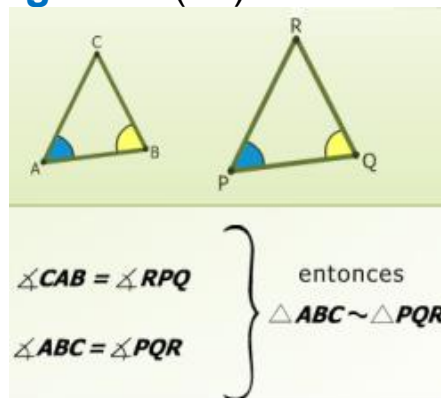
Dos triángulos son **semejantes** si tienen sus **tres** respectivamente **proporcionales**.(ppp)



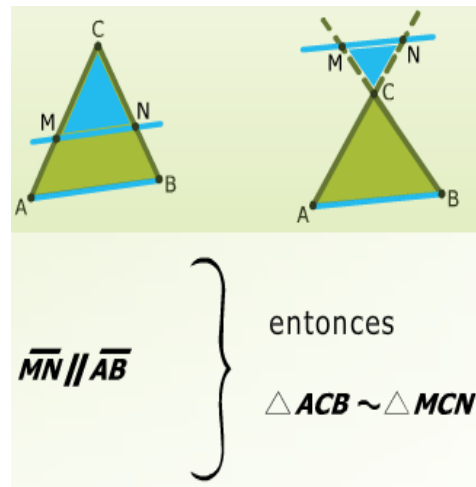
Dos triángulos son **semejantes** si tienen **dos lados** respectivamente **proporcionales** y **igual** el **ángulo comprendido**.(pap)



Dos triángulos son **semejantes** si tienen **dos ángulos** respectivamente **iguales**.(aa).



Teorema fundamental de semejanza: Si una recta es paralela a uno de los lados de un triángulo y corta a los otros lados de este o sus prolongaciones, entonces se forma un triángulo semejante al original.



Razón de proporcionalidad

Si dos triángulos son semejantes entonces la **razón de proporcionalidad** k es la razón entre sus lados homólogos.

Nota: Si $k = 1$ entonces los triángulos son iguales.

IMPORTANTE PARA EL CÁLCULO

Si se conoce que k es la **razón de proporcionalidad** de dos triángulos semejantes entonces:

- La **razón** entre las **alturas** relativas a sus **lados homólogos** es igual a k .
- La **razón** entre sus **perímetros** es igual a k .
- La **razón** entre sus **áreas** es igual a k^2 .

Lados	Alturas	Perímetros	Áreas
$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{r} = k$	$\frac{h_a}{h_m} = k$	$\frac{P_1}{P_2} = k$	$\frac{A_1}{A_2} = k^2$

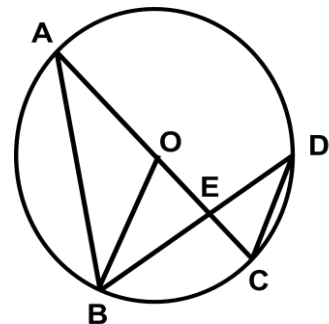
Nota: Debes tener en cuenta en cada relación anterior,

que en el **numerador** de cada razón se colocan **elementos** de un **mismo triángulo** y los **elementos** del otro, van en el **denominador**.

Ejemplo:

En la figura:

- **B** y **D** puntos de la circunferencia de centro **O** y diámetro \overline{AC} ,
- **E** punto de intersección de \overline{BD} y \overline{AC} .



a) Prueba que $\overline{AB} \cdot \overline{EC} = \overline{DC} \cdot \overline{BE}$.

b) Si $A(\triangle ABE) = 36 \text{ cm}^2$, $\overline{AB} = 3\overline{DC}$, calcula el área del $\triangle DEC$.

Solución:

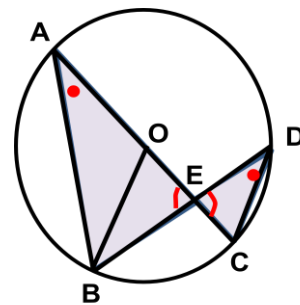
a) En los $\triangle ABE$ y $\triangle EDC$:

• $\angle A = \angle D$, por estar **inscritos** sobre el mismo arco BC.

• $\angle AEB = \angle DEC$, por ser **opuestos por el vértice**.

• $\triangle ABE \sim \triangle EDC$, por tener dos ángulos respectivamente iguales, (a ; a).

Luego, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$



$$\overline{AB} \cdot \overline{EC} = \overline{CD} \cdot \overline{BE}, \text{ se cumple.}$$

b) Como $\overline{AB} = 3\overline{DC}$, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 3$, entonces $k = 3$.

Como $\triangle ABE \sim \triangle EDC$, entonces $\frac{A(\triangle ABE)}{A(\triangle EDC)} = k^2$,

$$\frac{36\text{cm}^2}{A(\triangle EDC)} = 3^2$$

$$\frac{36\text{cm}^2}{A(\triangle EDC)} = 9$$

$$A(\triangle DEC) = \frac{36\text{cm}^2}{9} = 4\text{ cm}^2.$$

R/ El área del $\triangle DEC$ es igual a $4,0\text{ cm}^2$.