Resumen sobre geometría analítica para 12mo grado

Nuestra empresa CINESOFT para colaborar con tu aprendizaje sobre el tema, ha elaborado este resumen de Geometría Analítica.

Es un complemento a las clases televisivas y a tu libro de texto, el cual debes consultar y realizar los ejercicios del capítulo correspondientes al tema.

Esperamos que te sea útil para lograr una mejor preparación.

Autores: MSc. Jesús Cantón Arenas

MSc. Mirta Capote Jaume

Geometría analítica

∗ **Coordenadas del punto medio:** $P_m\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

∗ **Distancia entre dos puntos:** $d(A\,;B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

∗ **Distancia de un punto P a una recta *r*:**

$$d(P\,;r)=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

∗ **Ecuación cartesiana de la recta:**

Ax + By + C = 0 **(Ecuación general)**

se obtiene a partir de:

$m=\frac{y-y_0}{x-x_0}$ o $y = mx + n$ (forma **explícita**)

Para escribir la ecuación de una recta se necesita:

1. un punto y la **pendiente**

2. las coordenadas de dos puntos.

∗ **Fórmulas para hallar la pendiente:**

$m=-\frac{A}{B}$ (se utiliza cuando conoces la ecuación de la recta en la forma **Ax + By + C = 0**)

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (se utiliza cuando conoces **dos** puntos de la recta)

$m=\tan\alpha$ (se utiliza si conoces el **ángulo** de inclinación de la recta respecto al semieje positivo "x")

Importante:

Para demostrar en este tema **paralelismo** o **perpendicularidad** entre rectas o segmentos, es de mucha utilidad el teorema siguiente:

Sean las rectas r_1 y r_2 de pendientes m_1 y m_2 respectivamente, se cumple que:

♦ **Si $r_1 \parallel r_2$, entonces: $m_1 = m_2$.**

♦ **Si $r_1 \perp r_2$, entonces:** $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

¿Qué debo saber?

1. Representar puntos en un sistema de coordenadas y dados los puntos representados, escribir sus coordenadas.

2. Calcular las coordenadas del **punto medio** de un segmento.

3. Calcular la **distancia** entre **dos puntos**.

4. Determinar la **distancia** de un **punto** a una **recta**.

5. Escribir la **ecuación cartesiana** de una recta.

6. Realizar **demostraciones** de **paralelismo** y **perpendicularidad** utilizando las **pendientes**.

Para vencer estos objetivos, es necesario también, un conocimiento de las **figuras planas**, sus propiedades y **fórmulas** de área y perímetro, ya que los ejercicios aparecen combinados con ellas.

Punto medio

Ejemplo 1: Determina las coordenadas del punto medio de los segmentos cuyos extremos son:

a) A(2 ; – 3) y B(8 ; 5).

Solución:

P_{medio}: $\left(\frac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

P_{medio}: $\left(\frac{2+8}{2}\ ;\ \frac{-3+5}{2}\right)$

P_{medio}: $\left(\frac{10}{2}\ ;\ \frac{2}{2}\right)$

P_{medio} : **(5 ; 1)**

b) M(0 ; 2) y N(– 2 ; 4).

Solución:

P_{medio}: $\left(\frac{x_M+x_N}{2}\ ;\ \frac{y_M+y_N}{2}\right)$

P_{medio}: $\left(\frac{0-2}{2}\ ;\ \frac{2+4}{2}\right)$

P_{medio}: $\left(\frac{-2}{2}\ ;\ \frac{6}{2}\right)$

P_{medio} : **(– 1 ; 3)**

c) P(1 ; – 1) y Q(7 ; – 1).

Solución:

P_{medio}: $\left(\frac{x_P+x_Q}{2}\ ;\ \frac{y_P+y_Q}{2}\right)$

P_{medio}: $\left(\frac{1+7}{2}\ ;\ \frac{-1-1}{2}\right)$

P_{medio}: $\left(\frac{8}{2}\ ;\ \frac{-2}{2}\right)$

P_{medio} : **(4 ; – 1)**

Nota: Hemos colocado en la fórmula, en los subíndices, las **letras** de los puntos para sustituir con mayor precisión, aunque puedes también utilizar el 1 y el 2 como aparece en la fórmula original.

Distancia entre dos puntos

Ejemplo 2: Calcula la longitud de los segmentos cuyos extremos son:

a) A(2 ; – 3) y B(8 ; 5).

Solución:

d(A ; B) = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

d(A ; B) = $\sqrt{(8 - 2)^2 + (5 + 3)^2}$

d(A ; B) = $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100}$

d(A ; B) = **10u.**

b) M(0 ; 2) y N(– 2 ; 4).

Solución:

d(M ; N) = $\sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$

d(M ; N) = $\sqrt{(-2 - 0)^2 + (4 - 2)^2}$

d(M ; N) = $\sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = \sqrt{4.2}$

d(M ; N) = $2\sqrt{2}$ u.

c) P(1 ; – 1) y Q(7 ; – 1).

d(P ; Q) = $\sqrt{\left(x_Q - x_P\right)^2 + \left(y_Q - y_P\right)^2}$

d(P ; Q) = $\sqrt{(7 - 1)^2 + (-1 + 1)^2}$

d(P ; Q) = $\sqrt{6^2 + 0^2} = \sqrt{36}$

d(P ; Q) = 6 u.

Nota: Al trabajar con esta fórmula debes tener en cuenta, que si la segunda coordenada a sustituir en cada paréntesis es negativa, cambia el signo en la fórmula. Además en la respuesta final debes colocar (**u**) **unidades**.

Ecuación cartesiana de una recta

Para escribir la ecuación cartesiana de una recta se necesitan:

♦ un punto y la pendiente, entonces:

1. Sustituyes en la fórmula **m** = $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ la pendiente y el punto.

2. Multiplicas cruzado.

3. Igualas a cero y reduces los términos semejantes, si existen.

♦ **las coordenadas de dos puntos**

1. Calculas la pendiente por la fórmula **m** = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

2. Sustituyes en la fórmula **m** = $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ la pendiente y uno de los puntos conocidos.

3. Multiplicas cruzado.

4. Igualas a cero y reduces los términos semejantes.

Ejemplo 3: Escribe la ecuación cartesiana de una recta ***r***, si:

a) tiene pendiente $\frac{2}{3}$ y pasa por el punto **R**(4 ; – 1).

1. Escribes la fórmula: **m** = $\frac{y - y_0}{x - x_0}$

2. Sustituyes: $\frac{2}{3} = \frac{y+1}{x-4}$ (ten en cuenta el cambio de signo)

3. Multiplicas cruzado: 2x – 8 = 3y + 3

4. Igualas a cero: 2x – 3y – 8 – 3 = 0

5. Reduces: 2x – 3y – 11 = 0

R/ 2x – 3y – 11 = 0.

b) tiene pendiente $-\frac{1}{2}$ y pasa por el punto **S**(0 ; – 4).

1. Escribes la fórmula: **m** = $\frac{y - y_0}{x - x_0}$

2. Sustituyes: $-\frac{1}{2} = \frac{y+4}{x-0}$ (ten en cuenta el cambio de signo)

3. Multiplicas cruzado: x = – 2y – 8

(el signo **menos** se le pone a cualquiera de los dos números de la fracción)

4. Igualas a cero: x + 2y + 8 = 0

R/ x + 2y + 8 = 0.

c) pasa por los puntos **M**(3 ; – 3) y **N**(0 ; 1).

Ahora tienes **dos puntos** y nos falta la pendiente:

1. Calculas la pendiente por la fórmula **m** = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$:

$$m = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{1+3}{0-3} = -\frac{4}{3}$$

2. Sustituyes en la fórmula **m** = $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ la pendiente y uno de los puntos: $-\frac{4}{3} = \frac{y-1}{x-0}$

3. Multiplicas cruzado: 4x = – 3y + 3

4. Igualas a cero y reduces los términos semejantes.

4x + 3y – 3 = 0

R/ 4x + 3y – 3 = 0

d) pasa por los puntos **C**(1 ; – 1) y **D**(6 ; – 2).

Tienes **dos puntos** y nos falta la pendiente:

1. Calculas la pendiente por la fórmula **m** = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$:

$$m = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{-2+1}{6-1} = -\frac{1}{5}$$

2. Sustituyes en la fórmula **m** = $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ la pendiente y uno de los

puntos: $-\frac{1}{5} = \frac{y+1}{x-1}$

3. Multiplicas cruzado: x – 1 = – 5y – 5

4. Igualas a cero y reduces los términos semejantes.

x + 5y + 4 = 0

R/ x + 5y + 4 = 0

Nota: En las ecuaciones se puede transponer hacia cualquiera de los miembros, por lo que el coeficiente de la variable x, puede quedar **negativo**.

Observa ahora dos casos particulares muy importantes:

e) pasa por los puntos **A**(1 ; 5) y **B**(3 ; 5).

1. Calculas la pendiente por la fórmula **m** = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-5}{3-1} = \frac{0}{2} = 0$$

2. Sustituyes en la fórmula **m** = $\frac{y-y_0}{x-x_0}$ la pendiente y uno de los

puntos: **0** = $\frac{y-5}{x-1}$

3. Multiplicas cruzado: 0 = y – 5

R/ y – 5 = 0

Nota: Cuando la **pendiente** es igual a **cero**, la recta es **paralela** al eje "x", luego en su ecuación faltará la variable **x**.

En este caso, puedes escribir la ecuación rápidamente, **y = 5**, que es la **ordenada** de los dos puntos o también **y – 5 = 0**.

f) pasa por los puntos **T**(1 ; 2) y **K**(1 ; 5).

1. Calculas la pendiente por la fórmula **m** = $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$:

$$m = \frac{y_K-y_T}{x_K-x_T} = \frac{5-2}{1-1} = \frac{3}{0} \rightarrow \text{indefinido}$$

En este caso, la recta es **paralela** al eje "y", luego en su ecuación faltará la variable **y**. Puedes escribir la ecuación rápidamente, **x = 1**, que es la **abscisa** de los dos puntos o también **x – 1 = 0**.

Veamos ahora otros ejemplos que relacionan las otras fórmulas de **pendiente**, así como el **paralelismo** y **perpendicularidad**, con la determinación de la ecuación cartesiana de la recta.

Ejemplo 4: Sea ***r*** una recta cuya ecuación es: 2x – y + 1 = 0.

Escribe la ecuación de una recta ***q***, que:

a) pasa por el punto **P**(3 ; – 1) y es paralela a la recta ***r***.

Solución:

Como ya sabes del resumen inicial, si **$r_1 \| r_2$, entonces $m_1 = m_2$**.

Por lo que, si ***q***//***r***, entonces $m_r = m_q$, o sea, tienen que tener la misma pendiente.

1. Hallas la pendiente de ***r***:

Conoces la ecuación de ***r***, su pendiente se halla por la fórmula:

$m = -\frac{A}{B}$

En la ecuación: 2x – y + 1 = 0, A = 2 y B = – 1,

luego $m_r = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-1} = 2$

Entonces $m_q = \mathbf{2}$ y tomas el punto dado **P**(3 ; – 1).

2. Escribes la ecuación:

$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$

$2 = \frac{y + 1}{x - 3}$

2x – 6 = y + 1

2x – y – 6 – 1 = 0

2x – y – 7 = 0

R/ La ecuación de ***q*** es **2x – y – 7 = 0** o **– 2x + y + 7 = 0**

b) pasa por el punto **R**(2 ; – 2) y es perpendicular a la recta ***r***.

Solución:

Como ya sabes del resumen inicial, si **$r_1 \perp r_2$**, entonces: $m_1 = -\frac{1}{m_2}$,

o sea, las pendientes tienen que ser opuestas y recíprocas.

Por lo que, si ***q***⊥***r***, entonces m_r y m_q tienen que ser opuestas y recíprocas.

Si $\mathbf{m}_r = \mathbf{2}$, entonces $\mathbf{m}_q = -\frac{1}{2}$ y tomas el punto **R**(2 ; – 2) para escribir la ecuación pedida.

2. Escribes la ecuación:

$\mathbf{m} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$

$-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \frac{y+2}{x-2}$

x – 2 = – 2y – 4

x + 2y – 2 + 4 = 0

x + 2y + 2 = 0

R/ La ecuación de ***q*** es x + 2y + 2 = 0.

Como sabes, las rectas en un plano pueden tener las posiciones siguientes:

1. paralelas.

2. se cortan en un punto. (Un caso particular es que se corten perpendicularmente).

3. coincidentes.

La relación de las pendientes nos ayuda a resolver ejercicios como este:

Ejemplo 5: Determina la relación de posición de las rectas ***r*** y ***p*** si conoces que:

a) ***r***: 3x – 6y + 1 = 0 y ***p*** : y = – 2x + 5.

Solución:

Para realizar el ejercicio necesitas comparar sus pendientes.

Como la recta ***r*** viene dada por la ecuación Ax + By + C = 0, para calcular la pendiente se utiliza la fórmula, $m_r = -\frac{A}{B}$.

A = 3 y B = – 6

$m_r = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{-6} = \frac{1}{2}$

Como la recta ***p*** viene dada por la ecuación y = **m**x + n, la pendiente es el coeficiente de la variable **x**.

$m_p = -2$

R/ Como las pendientes son opuestas y recíprocas, las rectas son **perpendiculares**.

b) ***r***: x = y – 3 y ***p*** : tiene un ángulo de inclinación de 45º con el semieje positivo “x”.

Solución:

Para realizar el ejercicio necesitas comparar sus pendientes.

Como la recta ***r*** viene dada por la ecuación Ax + By + C = 0, para calcular la pendiente se utiliza la fórmula, $m_r = -\frac{A}{B}$.

r: x = y – 3 → x – y + 3 = 0 (igualas a cero para organizarla)

A = 1 y B = – 1

$m_r = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{-1} = 1$

Como de la recta ***p*** conoces su ángulo de inclinación, la pendiente se halla por la fórmula, **m** = tan α.

$m_p = \tan 45^\circ = 1$

R/ Como las pendientes son iguales, las rectas son **paralelas**.

c) ***r***: pasa por los puntos A(2 ; 3) y B(– 3 ; 0) y ***p*** : y = – x + 2.

Solución:

Para realizar el ejercicio necesitas comparar sus pendientes.

Como de la recta ***r*** conoces dos de sus puntos, para calcular la pendiente se utiliza la fórmula, $m_r = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

$$m_r = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-3}{-3-2} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}.$$

Como la recta ***p*** viene dada por la ecuación y = **m**x + n, la pendiente es el coeficiente de la variable **x**.

$m_p = -1$

R/ Las pendientes son diferentes, pero **no** son opuestas y recíprocas, luego las rectas se cortan, pero no **perpendicularmente**.

Distancia de un punto a una recta

Ejemplo 6: Calcula la distancia del punto **P** a la recta ***r***, si:

a) ***r***: 3x + 4y + 10 = 0 y **P**(1 ; – 2).

Solución:

Para calcular la distancia pedida se utiliza la fórmula:

$$d(P\,;\,r) = \frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Sustituyes en la fórmula la **ecuación** y las **coordenadas** del punto.

De la ecuación se obtiene que: **A** = 3 y **B** = 4.

$$d(P\,;\,r) = \frac{|3x+4y+10|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|3.1+4(-2)+10|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|3-8+10|}{\sqrt{9+16}}$$

$$d(P\,;\,r) = \frac{|5|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1u.$$

R/ d(P ; *r*) = 1u.

b) ***r***: 2x – y + 1 = 0 y **P**(8 ; – 3).

Solución:

Para calcular la distancia pedida se utiliza la fórmula:

$$\mathbf{d(P\ ;\ r)} = \frac{|\mathbf{Ax+By+C}|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Sustituyes en la fórmula la **ecuación** y las **coordenadas** del punto.

De la ecuación se obtiene que: **A** = 2 y **B** = – 1.

$$\mathbf{d(P\ ;\ r)} = \frac{|\mathbf{2x-y+1}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|\mathbf{2.8-(-3)+1}|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|\mathbf{16+3+1}|}{\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{d(P\ ;\ r)} = \frac{|\mathbf{20}|}{\sqrt{5}} = \frac{\mathbf{20}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\mathbf{20}\sqrt{5}}{\mathbf{5}} = \mathbf{4\sqrt{5}\ u.}$$

R/ d(P ; *r*) = $4\sqrt{5}$ u.

c) ***r***: y = 3x y **P**(1 ; – 7).

Solución:

Hay que igualar a cero la ecuación dada: 3x – y = 0.

Sustituyes en la fórmula la **ecuación** y las **coordenadas** del punto.

De la ecuación se obtiene que: **A** = 3 y **B** = – 1.

$$\mathbf{d(P\ ;\ r)} = \frac{|\mathbf{3x-y}|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|\mathbf{3.1-(-7)}|}{\sqrt{9+1}} = \frac{|\mathbf{3+7}|}{\sqrt{10}}$$

$$\mathbf{d(P\ ;\ r)} = \frac{|\mathbf{10}|}{\sqrt{10}} = \frac{\mathbf{10}}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\mathbf{10}\sqrt{10}}{\mathbf{10}} = \mathbf{\sqrt{10}\ u.}$$

R/ d(P ; *r*) = $\sqrt{10}$ u.

Nota: Como estás calculando una **longitud**, al final en la respuesta se coloca la **u** (unidades).

Los ejemplos que acabamos de mostrar tenían la intención de que fijaras las distintas **fórmulas** de este tema y tuvieras en cuenta los detalles donde debes prestar atención al utilizarlas.

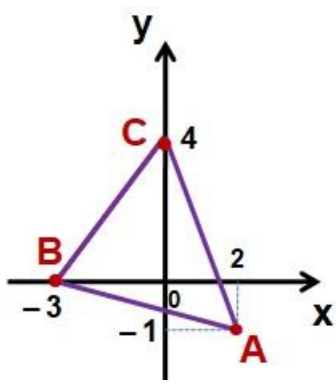
Los ejemplos que aparecerán a continuación, ya están creados con las ideas que aparecen en las pruebas finales, pero tienen más incisos que los habituales para poder aprovecharlos mejor.

Ejemplo 1: Sean los puntos **A**(2 ; – 1) ; **B**(– 3 ; 0) y **C**(0 ; 4).

a) Representa el $\triangle$ABC en un sistema de coordenadas.

Solución:

Observa que si los puntos tienen al menos una de sus dos coordenadas igual a cero, se sitúan encima de los ejes.



b) Si $\overline{BD}$ es la mediana relativa al lado $\overline{AC}$, halla las coordenadas del punto **D**.

Solución:

En este inciso es necesario conocimientos sobre la Geometría plana, como te alertamos al inicio del material.

Mediana: Segmento trazado del vértice de un triángulo al **punto medio** del lado puesto.

Por tanto, **D** es el punto medio del lado $\overline{AC}$ y debemos utilizar la fórmula de punto medio.

Tomamos los puntos **A**(2 ; – 1) y **C**(0 ; 4).

D $\left(\frac{x_A + x_C}{2} \; ; \; \frac{y_A + y_C}{2}\right)$

D $\left(\frac{2 + 0}{2} \; ; \; \frac{-1 + 4}{2}\right)$

D $\left(\frac{2}{2} \; ; \; \frac{3}{2}\right)$

D (1 ; 1,5)

R/ Las coordenadas de **D** son **D (1 ; 1,5)**.

c) Calcula la longitud del lado $\overline{AB}$.

Solución:

Para hallar la longitud de ese lado es necesario calcular la **distancia** entre los puntos **A** y **B**. Para ello utilizas la fórmula de distancia entre dos puntos.

A(2 ; – 1) ; **B**(– 3 ; 0)

d(A ; B) = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

d(A ; B) = $\sqrt{(-3 - 2)^2 + (0 + 1)^2}$

d(A ; B) = $\sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26} \approx 5{,}1$

d(A ; B) ≈ 5,1u.

R/ La distancia entre los puntos **A** y **B** es aproximadamente 5,1u.

d) Escribe la ecuación cartesiana de la recta que contiene al lado $\overline{AB}$.

Solución:

Tenemos las coordenadas de **dos puntos**, hay que hallar la pendiente, por la fórmula **m** = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$:

A(2 ; – 1) ; **B**(– 3 ; 0)

$$\mathbf{m} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0+1}{-3-2} = -\frac{1}{5}$$

2. Sustituyes en la fórmula $\mathbf{m} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ la pendiente y uno de los puntos, utilizando **A**: $-\frac{1}{5} = \frac{y+1}{x-2}$

3. Multiplicas cruzado: x – 2 = – 5y – 5

4. Igualas a cero y reduces: x + 5y + 3 = 0.

R/ La ecuación cartesiana de la recta que contiene al lado $\overline{AB}$ es **x + 5y + 3 = 0.**

e) Calcula la distancia de un punto **P**(– 1 ; 10) al lado $\overline{AB}$.

Solución:

Para calcular la distancia de un punto a una recta utilizas la fórmula

d(P ; *r*) = $\frac{|\mathbf{Ax+By+C}|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, pero necesitas conocer la ecuación de la recta, que ya tenemos del inciso anterior.

x + 5y + 3 = 0 y **P**(– 1 ; 10)

Sustituyes en la fórmula la **ecuación** y las **coordenadas** del punto.

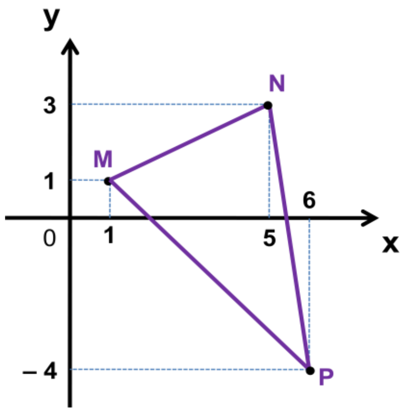
De la ecuación se obtiene que: **A** = 1 y **B** = 5.

$$\mathbf{d(P ; \overline{AB})} = \frac{|x+5y+3|}{\sqrt{1^2+5^2}} = \frac{|-1+5.10+3|}{\sqrt{1^2+5^2}} = \frac{|-1+50+3|}{\sqrt{1+25}}$$

$$\mathbf{d(P ; \overline{AB})} = \frac{|52|}{\sqrt{26}} = \frac{52}{\sqrt{26}} \cdot \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{26}} = \frac{52\sqrt{26}}{26} = 2\sqrt{26}\ \text{u} \approx 10\text{u}.$$

R/ La distancia de **P** a la recta $\overline{AB}$ es aproximadamente 10u.

Ejemplo 2: En el sistema de coordenadas aparece representado un triángulo ABC.



a) Escribe las coordenadas de cada vértice.

Solución:

M(1 ; 1) ; **N** (5 ; 3) y **P**(6 ; – 4)

b) Si d(**M** ; **P**) = $5\sqrt{2}$ u, prueba que el ▵MNP es isósceles de base $\overline{MN}$.

Solución:

Un triángulo es isósceles, si tiene dos lados iguales. Como la base es $\overline{MN}$, los lados iguales tiene que ser $\overline{PN}$ y $\overline{PM}$.

Hallas la distancia de **P** a **N**.

N (5 ; 3) **P**(6 ; – 4)

d(**N** ; **P**) = $\sqrt{(x_P - x_N)^2 + (y_P - y_N)^2}$

d(**N** ; **P**) = $\sqrt{(6-5)^2 + (-4-3)^2}$

d(**N** ; **P**) = $\sqrt{1^2 + (-7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} \approx \sqrt{25.2}$

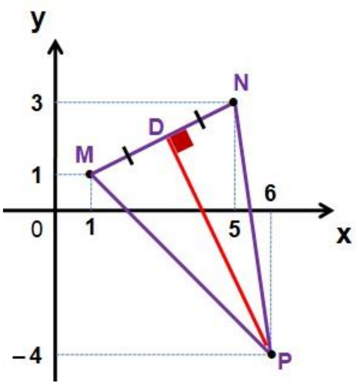
d(**N** ; **P**) = $5\sqrt{2}$ u.

R/ Como d(**M** ; **P**) = **d**(**N** ; **P**) = $5\sqrt{2}$ u, el ▵MNP es isósceles de base $\overline{MN}$.

c) Si $\overline{PD}$ es la altura relativa a $\overline{MN}$, halla las coordenadas de **D**.

Solución:

En un triángulo isósceles sobre la base, todas las rectas notables coinciden, luego si $\overline{PD}$ es altura, también será mediana y **D** es el punto medio de $\overline{MN}$.



M(1 ; 1) ; N (5 ; 3)

$$D\left(\frac{x_M + x_N}{2} ; \frac{y_M + y_N}{2}\right)$$

$$D\left(\frac{1+5}{2} ; \frac{1+3}{2}\right)$$

R/ D tiene coordenadas (3 ; 2).

$$D\left(\frac{6}{2} ; \frac{4}{2}\right) = (3 ; 2)$$

Nota: Puedes verificar gráficamente que el resultado obtenido es lógico, para evitar errores.

d) Escribe la ecuación cartesiana de la recta que contiene a la altura $\overline{PD}$ del triángulo.

Solución:

Para escribir la ecuación necesitas la **pendiente** y un **punto**. Tienes el punto, porque la altura sale de **P**, pero debes hallar la **pendiente**. Como la altura cae perpendicular sobre $\overline{MN}$, sus pendientes son opuestas y recíprocas.

M(1 ; 1) ; N (5 ; 3)

$$m_{\overline{MN}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} .$$

$m_{\overline{PD}}$ = **– 2**

Escribes la ecuación con **P**(6 ; – 4) y $m_{\overline{PD}}$ = **– 2.**

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \qquad -2 = \frac{y+4}{x-6}$$

– 2x + 12 = y + 4

2x + y – 8 = 0

R/ La ecuación es **2x + y – 8 = 0.**

Nota: Como **D** es el **punto medio** de $\overline{MN}$, también puedes hallar la pendiente de $\overline{PD}$ y tomar cualquiera de los dos puntos para escribir la ecuación. Esta vía es más larga, pero válida.

Ejemplo 3: Sean **A**(2 ; – 3) ; **B**(5 ; – 2) y **C**(4 ; 1) los vértices de un △ABC.

a) Prueba que el △ABC es rectángulo en **B**.

Solución:

Para probar que un triángulo es rectángulo, basta que tenga un **ángulo recto**, en este caso el ∠B.

Luego, $\overline{AB}$ tiene que ser perpendicular a $\overline{BC}$ y en esta geometría la perpendicularidad se relaciona con las pendientes.

Si $\mathbf{r_1} \perp \mathbf{r_2}$, entonces: $m_1 = -\frac{1}{m_2}$,

Calculas las pendientes de esos lados:

A(2 ; – 3) ; **B**(5 ; – 2)

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2+3}{5-2} = \frac{1}{3}.$$

B(5 ; – 2) y **C**(4 ; 1)

$$m_{\overline{BC}} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{-2-1}{5-4} = -3$$

R/ Como las pendientes de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son opuestas y recíprocas, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ y el △ABC es rectángulo en **B**.

b) Determina las coordenadas del centro de la circunferencia circunscrita al △ABC.

Solución:

Si la circunferencia está circunscrita al triángulo, todos los vértices son puntos de la misma. Luego, el ∠B será inscrito y como mide

90º, la hipotenusa $\overline{AC}$ será un diámetro de la circunferencia (**recíproco del teorema de Tales**) y su punto medio, el centro de la circunferencia.

Hallas el punto medio de $\overline{AC}$: **A**(2 ; – 3) y **C**(4 ; 1)

O$\left(\frac{x_A + x_C}{2} \; ; \; \frac{y_A + y_C}{2}\right)$

O$\left(\frac{2+4}{2} \; ; \; \frac{-3+1}{2}\right)$ **R/ O tiene coordenadas (3 ; – 1).**

O$\left(\frac{6}{2} \; ; \; \frac{-2}{2}\right)$ **= (3 ; – 1)**

c) Calcula la longitud de la circunferencia.

Solución:

La longitud de la circunferencia es L = 2πr o L = πd, por lo que necesitas el radio o el diámetro. Para hallarlo utilizas la distancia entre dos puntos, en este caso **A** y **C**.

A(2 ; – 3) y **C**(4 ; 1)

d(**A** ; **C**) = $\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$

d(**A** ; **C**) = $\sqrt{(4-2)^2 + (1+3)^2}$

d(**A** ; **C**) = $\sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \approx \sqrt{4.5}$

d(**A** ; **C**) = 2$\sqrt{5}$ u.

Como $\overline{AC}$ es el diámetro:

L = π·d = 3,14·2$\sqrt{5}$ u ≈ 6,28·2,2 ≈ 13,8u

R/ La circunferencia tiene una longitud de 13,8u aproximadamente.

d) Escribe la ecuación cartesiana de la recta que contiene al cateto $\overline{AB}$ del triángulo.

Solución:

A(2 ; – 3) ; B(5 ; – 2)

Conoces ya la pendiente, $m_{\overline{AB}} = \frac{1}{3}$ y puedes tomar cualquiera de los puntos. Con $m_{\overline{AB}} = \frac{1}{3}$ y A(2 ; – 3) se obtiene:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \qquad \frac{1}{3} = \frac{y+3}{x-2}$$

x – 2 = 3y + 9

x – 3y – 11 = 0

R/ La ecuación es **x – 3y – 11 = 0**.

Ejemplo 4: Sean **A**(– 1 ; – 2) ; **B**(3 ; 1) ; **C**(7 ; – 2) y **D**(3 ; – 5) los vértices de un cuadrilátero **ABCD**.

a) Prueba que **ABCD** es un paralelogramo.

Solución:

Para probar que **ABCD** es un paralelogramo, una de las vías es que sus diagonales se corten en el mismo punto medio.

Tomamos los puntos de las diagonales:

A(– 1 ; – 2) y C(7 ; – 2)

$$O_1\left(\frac{x_A + x_C}{2} \; ; \; \frac{y_A + y_C}{2}\right)$$

$$O_1\left(\frac{-1+7}{2} \; ; \; \frac{-2-2}{2}\right)$$

$$O_1\left(\frac{6}{2} \; ; \; \frac{-4}{2}\right)$$

$$O_1(3 \; ; -2)$$

B(3 ; 1) y D(3 ; – 5)

$$O_2\left(\frac{x_B + x_D}{2} \; ; \; \frac{y_B + y_D}{2}\right)$$

$$O_2\left(\frac{3+3}{2} \; ; \; \frac{1-5}{2}\right)$$

$$O_2\left(\frac{6}{2} \; ; \; \frac{-4}{2}\right)$$

$$O_2(3 \; ; -2)$$

$$O_1 = O_2$$

R/ El cuadrilátero **ABCD** es un paralelogramo, porque sus diagonales se cortan en el mismo punto medio.

b) Demuestra que **ABCD** es un rombo.

Solución:

Para probar que es un rombo, puedes proceder de dos formas:

1. Probar que sus **diagonales** son **perpendiculares**, esto se haría hallando las pendientes.

2. Probar que tiene **dos lados consecutivos iguales**, esto se haría hallando la distancia entre dos puntos.

Como puedes apreciar, es más racional, hallar las pendientes.

A(– 1 ; – 2) y **C**(7 ; – 2)

$$m_{\overline{AC}} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-2+2}{7+1}$$

$$m_{\overline{AC}} = -\frac{0}{8} = 0.$$

B(3 ; 1) y **D**(3 ; – 5)

$$m_{\overline{BC}} = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{-5-1}{3-3}$$

$$m_{\overline{BC}} = -\frac{6}{0}$$ indefinida

Como $m_{\overline{AC}}$ = **0**, la diagonal $\overline{AC}$ es paralela al eje "x" y como $m_{\overline{BC}}$ está indefinida, la diagonal $\overline{BD}$ es perpendicular al eje "x" .

Por tanto, las diagonales se cortan perpendicularmente y **ABCD** es un rombo.

Nota:

1. En los inicios del tema, cuando resumimos la ecuación cartesiana, vimos los incisos d y e, que tratan estos dos casos particulares.

2. Quizás piensas que la figura puede ser un cuadrado, pero si lo fuese, el cuadrado es un rombo.

c) Calcula el perímetro de **ABCD**.

Solución:

Como ABCD es un rombo, todos los lados son iguales y su fórmula es: **P**$_{(ABCD)}$ = 4a. Tienes que hallar la longitud de uno de sus lados.

A(– 1 ; – 2) ; **B**(3 ; 1)

d(**A** ; **B**) = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

d(**A** ; **B**) = $\sqrt{(3+1)^2 + (1+2)^2}$

d(**A** ; **B**) = $\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$

d(**A** ; **B**) = 5u.

R/ El rombo tiene 20u de perímetro.

P$_{(ABCD)}$ = 4a

P$_{(ABCD)}$ = $4\overline{AB}$

P$_{(ABCD)}$ = 4·5u

P$_{(ABCD)}$ = 20u

d) Escribe la ecuación cartesiana de la recta que contiene a la diagonal $\overline{AC}$.

Solución:

Como $\mathbf{m}_{\overline{AC}}$ = **0**, la diagonal $\overline{AC}$ es paralela al eje “x”. En la ecuación faltará la variable x, como ya sabes del inicio del tema.

La ecuación será **y = – 2** o **y + 2 = 0**.

También puedes escribir la ecuación a partir de y = mx + n.

Como **m** = 0 y **n** = – 2, ya que la recta corta al eje “y” en – 2.

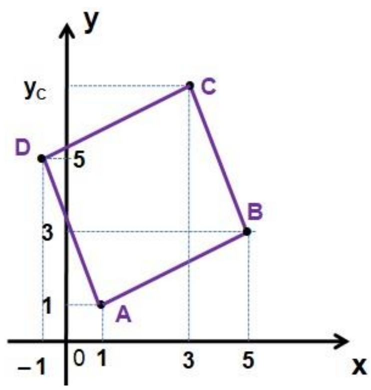
Entonces: y = 0.x – 2, de donde **y = – 2**.

Ejemplo 5: En el sistema de coordenadas aparece representado un paralelogramo **ABCD**.

Se conoce además que:

$r_{\overline{BC}}$: 2x + y – 13 = 0

d(A;D) = $2\sqrt{5}$u y $m_{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$.



a) Halla la ordenada del vértice **C**.

Como el vértice **C**(3 ; y) pertenece a la recta cuya ecuación es 2x + y – 13 = 0, sustituyes su abscisa y despejas la ordenada:

2.3 + y – 13 = 0

6 + y – 13 = 0

y = 13 – 6

y = 7

R/ La ordenada del vértice **C** es 7.

b) Prueba que **ABCD** es un cuadrado.

Solución:

Extraes las coordenadas de los vértices:

A(1 ; 1) ; **B**(5 ; 3) ; **C**(3 ; 7) y **D**(– 1 ; 5)

Para probar que **ABCD** es un cuadrado, puedes trabajar con las diagonales (pendiente y distancia) o con sus lados (pendiente y distancia).

Los datos del ejercicio te sugieren hacerlo con los lados.

1. Calculas la pendiente de $\overline{AD}$, lado consecutivo de $\overline{AB}$.

A(1 ; 1) ; **D**(– 1 ; 5)

$\mathbf{m}_{\overline{AD}} = \dfrac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \dfrac{5-1}{-1-1} = \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{-2}} = -2.$

$m_{\overline{AB}} = \frac{1}{2}.$

Como las pendientes de los lados consecutivos $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ son opuestas y recíprocas, entonces $\overline{AB} \perp \overline{AD}$.

Luego, **ABCD** es un rectángulo, por ser un paralelogramo con un par de lados consecutivos perpendiculares.

2. Calculas la longitud del $\overline{AB}$, lado consecutivo de $\overline{AD}$.

A(1 ; 1) ; **B**(5 ; 3)

d(**A** ; **B**) = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

d(**A** ; **B**) = $\sqrt{(5-1)^2 + (3-1)^2}$

d(**A** ; **B**) = $\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \sqrt{4.5}$

d(A ; B) = $2\sqrt{5}$ u.

Las longitudes de los lados consecutivos $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ son iguales

R/ El paralelogramo **ABCD** es un cuadrado, por ser un rectángulo con dos lados consecutivos iguales.

c) Calcula el área de **ABCD**:

Solución:

$A_{(ABCD)} = a^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 20u^2$.

d) Escribe la ecuación cartesiana de la recta que contiene al lado $\overline{BC}$.

Solución:

Tomamos el punto **B**(5 ; 3) y la pendiente opuesta y recíproca de $\overline{AB}$, porque ambos lados son perpendiculares. Como $m_{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$, entonces $m_{\overline{BC}} = -2$.

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \qquad -2 = \frac{y-3}{x-5}$$

$-2x + 10 = y - 3$

$2x + y - 13 = 0$

R/ La ecuación es **2x + y – 13 = 0**.

Nota: Para escribir la ecuación también podías haber utilizado la misma pendiente de $\overline{AD}$ que es paralelo a $\overline{BC}$, además del vértice **C** en ambos casos.

e) Hallas las coordenadas del punto de intersección de las diagonales de **ABCD**.

Solución:

Como ABCD es un cuadrado, sus diagonales se cortan en el punto medio.

Puedes tomar **A**(1 ; 1) y **C**(3 ; 7) o **B**(5 ; 3) y **D**(– 1 ; 5)

O$\left(\dfrac{x_A + x_C}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_C}{2}\right)$

O$\left(\dfrac{1+3}{2}\ ;\ \dfrac{1+7}{2}\right)$

O$\left(\dfrac{4}{2}\ ;\ \dfrac{8}{2}\right)$

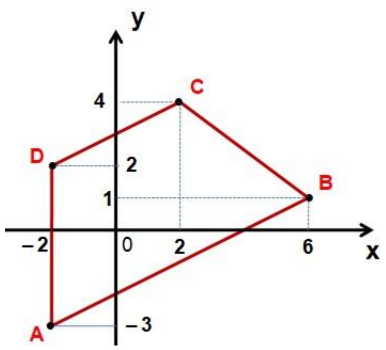
O$(2\ ;4)$

R/ Las diagonales se cortan en el punto de coordenadas **(2 ; 4)**.

Ejemplo 6: Sean **A**(– 2 ; – 3) ; **B**(6 ; 1) ; **C**(2 ; 4) y **D**(– 2 ; 2) los vértices de un cuadrilátero **ABCD**.

a) Represéntalo en un sistema de coordenadas.

Solución:



b) Prueba que **ABCD** es un trapecio.

Solución:

Para probar que es un trapecio, basta que tenga **un par** de lados opuestos **paralelos**. Parece ser por la figura, que son $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, lo que debes justificar con los cálculos.

Para demostrar **paralelismo** en este tema utilizamos las **pendientes**.

A(– 2 ; – 3) ; **B**(6 ; 1) ;

$m_{\overline{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1+3}{6+2}$

$m_{\overline{AB}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{8}} = \frac{1}{2}$.

C(2 ; 4) y **D**(– 2 ; 2)

$m_{\overline{CD}} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{2-4}{-2-2}$

$m_{\overline{CD}} = \frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{-4}} = \frac{1}{2}$.

R/ Como las **pendientes** son **iguales**, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son **paralelos** y el cuadrilátero es un trapecio.

c) Calcula la longitud de la diagonal $\overline{AC}$.

Solución:

A(– 2 ; – 3) ; **C**(2 ; 4)

d(**A** ; **C**) = $\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$

d(**A** ; **C**) = $\sqrt{(2+2)^2 + (4+3)^2}$

d(**A** ; **C**) = $\sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$

d(**A** ; **C**) ≈ 8 u.

R/ La longitud de la diagonal $\overline{AC}$ es aproximadamente 8u.

d) Escribe la ecuación cartesiana de la recta que contiene a la base $\overline{AB}$.

Solución:

A(– 2 ; – 3) ; **B**(6 ; 1)

$m_{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$ y tomas **A** o **B**.

m = $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ $\qquad \frac{1}{2} = \frac{y-1}{x-6}$

x – 6 = 2y – 2

x – 2y – 4 = 0

R/ La ecuación es **x – 2y – 4 = 0**.

e) Halla las coordenadas del punto **H**, donde la paralela media del trapecio, interseca al lado $\overline{AD}$.

Solución:

La **paralela media** es el segmento que une los puntos medios de los lados no bases del trapecio. Luego, lo que nos piden es el punto medio de $\overline{AD}$.

A(– 2 ; – 3) y **D**(– 2 ; 2)

H$\left(\frac{x_A + x_D}{2} ; \frac{y_A + y_D}{2}\right)$ H$\left(\frac{-2-2}{2} ; \frac{-3+2}{2}\right)$

H$\left(\frac{-4}{2} ; \frac{-1}{2}\right)$ H$(-2 ; -0,5)$

R/ El punto **H** tiene coordenadas **(– 2 ; – 0,5)**.

También hay otros ejercicios de Geometría Analítica que puedes encontrar en el llamado formato diverso. A continuación te mostramos algunos de ellos.

Ejemplo 1: Escribe verdadero o falso según corresponda. Argumenta las que sean falsas.

a) ___ Sean las rectas ***r*** y ***q*** cuyas ecuaciones son ***r***: x – 7y + 3 = 0 y ***q***: y = 7x – 2, entonces ***r*** y ***q*** son perpendiculares.

b) ___ Si una recta ***p*** tiene un ángulo de inclinación de135º respecto al semieje positivo "x", entonces su pendiente es igual a – 1.

c) ___ La recta **t** de ecuación $2x - 4y + 1 = 0$ corta al eje de las ordenadas en $\frac{1}{4}$.

d) ___ El área de la región comprendida entre la recta ***s*** de ecuación $y = -3x + 6$ y los ejes de coordenadas es igual a $12u^2$.

e) ___ El punto **M**(4 ; 1) está situado en el medio del segmento $\overline{PQ}$. Si **P**(3 ; 6), entonces **Q** tiene coordenadas (5 ; – 4).

Soluciones:

a) Falso. $m_r = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{-7} = \frac{1}{7}$; $m_q = 7$, son opuestas, pero no recíprocas.

b) Verdadero. $m = \tan 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1$.

c) Verdadero. El eje de las ordenadas es "y", luego hay que dar valor cero a la ***x*** en la ecuación.

$2.0 - 4y + 1 = 0 \rightarrow -4y + 1 = 0 \rightarrow 4y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{4}$.

d) Falso. Representas la recta y corta al eje "y" en 6 (valor de n) y al eje "x" en 2 (cero).

Entonces $A = \frac{b.h}{2} = \frac{2.6}{2} = 6u^2$.

e) Verdadero. Hallas el punto medio entre **P** y **Q** y compruebas.

Ejemplo 2: Marca con una X la respuesta correcta.

a) La ecuación de la recta que pasa por los puntos **A**(3 ; 5) y **B**(4 ; 8) es:

__ y + 3x = 2   __ y – 3x = – 4   __ y – 3x = 1   __ 3y – x = 2

b) En la función lineal de ecuación 3y = – 6x + 1, el valor de la pendiente es:

__ – 6   ___ – 2   ___ $\frac{1}{2}$ ___ 1   ___ 2

c) La ecuación de la recta ***r*** que pasa por el punto (1 ; – 4) y es paralela con la recta x + 5y – 3 = 0 es:

___ – x + y + 5 = 0   ___ x + 5y +19 = 0

___ x +y +3 = 0   ___ – 5x+ y + 9

d) Para que el punto (4 ; – 3) pertenezca a la recta kx – y + 2 = 0, el valor de k tiene que ser:

__ $-\frac{5}{4}$ __ $-\frac{2}{3}$ __ $-\frac{2}{7}$ __ $\frac{1}{4}$ __ 4

e) La recta determinada por los puntos (5 ; 10) y (1 ; 2) se interseca con el eje de las abscisas en el punto:

__ (– 5 ; 0)   __ (0 ; – 5)   __ (0 ; 0)   __ (0 ; $\frac{5}{3}$)   __ ($\frac{5}{3}$; 0)

f) La distancia del punto **A**(6 ; – 8) al origen de coordenadas es:

__ 6u   ___ 8u   ___ 10u   ___ 14 u   ___ 20u

g) Sean **A**(1 ; 1) ; **B**(4 ; 2) y **C**(2 ; ***y***) los vértices de un **△ABC** rectángulo en **B**, entonces el valor de ***y*** es igual a:

___ – 8   ___ 2   ___ 4   ___8

Soluciones:

a) y – 3x = – 4   **A**(3 ; 5) y **B**(4 ; 8)

m = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-5}{4-3}$ = 3.

m = $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ 3 = $\frac{y-5}{x-3}$

3x – 9 = y – 5

3x – y – 4 = 0 → y – 3x = – 4

b) – 2.

3y = – 6x + 1

Igualas a cero: 6x + 3y – 1 = 0

Hallas la pendiente: m = $-\frac{A}{B} = -\frac{6}{3}$ = – 2.

c) x + 5y + 19 = 0.

m = $-\frac{A}{B} = -\frac{1}{5}$

m = $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ $-\frac{1}{5} = \frac{y+4}{x-1}$

x – 1 = – 5y – 20

x + 5y + 19 = 0

d) – $\frac{5}{4}$.

Como el punto pertenece a la recta, sustituyes los valores de ***x*** e ***y*** en la ecuación y despejas k.

4**k** + 3 + 2 = 0 → 4**k** + 5 = 0 → **k** = $-\frac{5}{4}$.

e) (0 ; 0).

Escribes la ecuación: **m** = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-10}{1-5} = \frac{-8}{-4}$ = 2

m = $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ 2 = $\frac{y-2}{x-1}$

2x – 2 = y – 2

2x – y = 0

Si corta al eje de las abscisas (eje "x"), entonces **y = 0**.

2x – 0 = 0 → 2x = 0 → **x = 0**

f) 10u.

A(6 ; – 8) y **O**(0 , 0)

d(**A** ; **O**) = $\sqrt{(x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2}$

d(**A** ; **O**) = $\sqrt{(0-6)^2 + (0+8)^2}$

d(**A** ; **O**) = $\sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100}$ = 10

g) 8.

Si el triángulo es rectángulo en **B**, las pendientes de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ tienen que ser **opuestas** y **recíprocas**.

$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}$, entonces $m_{\overline{BC}}$ = – 3

– 3 = $\frac{y-2}{2-4}$ → – 3 = $\frac{y-2}{-2}$ → 6 = y – 2 → y = 8

Ejemplo 3: Completa los espacios en blanco.

a) De un cuadrado **ABCD** se conoce que **A**(1 ; – 2) y la ecuación de la recta que contiene al lado $\overline{CD}$ es 3x – 4y + 4 = 0. El cuadrado **ABCD** tiene un área iguala ___ u^2.

b) Para que el punto **P**(x ; 2) pertenezca a la recta de ecuación – x – 2y + 5 = 0, el valor de x tiene que ser ___.

c) Sean las rectas ***r*** y ***q*** de ecuaciones:

r: x – 3y + 1 = 0 y ***q***: (**a** + 1)x – y = 0, para que ***r*** y ***q*** sean perpendiculares, el valor de a tiene que ser igual a ____.

d) Una ecuación cartesiana de la recta que pasa por los puntos **M**(2 ; 3) y **N**(2 ; 7) es _____.

e) De un △MNP se conoce que **M**(2 ; 4) y **P**(– 2 ; – 4) y **N**(– 1; 6), $\overline{QS}$ es la paralela media al lado $\overline{MN}$,Q punto de $\overline{MP}$ y S de $\overline{PN}$. Las coordenadas del punto Q son ____.

Soluciones:

a) 9u².

La longitud del lado del cuadrado, sería la distancia de **A** al lado $\overline{CD}$.

$$d(A\ ;\ \overline{CD}) = \frac{|3x - 4y + 4|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3.1 - 4(-2) + 4|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|3 + 8 + 4|}{\sqrt{25}}$$

$$d(A\ ;\ \overline{CD}) = \frac{|15|}{5} = \frac{15}{5} = 3u.$$

$A_{(ABCD)} = a^2 = 3^2 = 9u^2$.

b) x = 1.

Como el punto **P** pertenece a la recta, sustituyes *y* = 2 y despejas **x**.

– x – 2.2 + 5 = 0 → – x – 4 + 5 = 0 → – x + 1 = 0 → x = 1.

c) – 4.

$m_r = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$ $m_q = -\frac{A}{B} = -\frac{(a+1)}{-1} = a + 1$

Para que sean perpendiculares sus pendientes tiene que ser opuestas y recíprocas. Por lo tanto formas la ecuación:

a + 1 = – 3 , de donde **a** = – 4.

d) x = 2 o x – 2 = 0.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-3}{2-2} = \frac{4}{0}$ indefinido.

Como recordarás en este caso la recta es perpendicular al eje "x", luego su ecuación es, x igual a la abscisa de los puntos.

e) Q(0 ; 0).

Q es el punto medio de $\overline{MP}$, por ser $\overline{QS}$ la paralela media y **Q** punto de $\overline{MP}$.