Resumen sobre semejanza de triángulos para 12mo grado

Para satisfacer los pedidos de nuestros estudiantes de 12mo grado y contribuir con tu preparación, nuestra empresa CINESOFT ha elaborado este resumen.

Este material te servirá como un complemento a las clases televisivas, junto a tu libro de texto.

Este resumen está dedicado a recordar algunos contenidos de geometría plana que se aplican en demostraciones y cálculo en figuras planas simples y compuestas.

Contenidos que trataremos:

1. Criterios de semejanza de triángulos
2. Razón de semejanza
3. Cálculo en figuras semejantes

Rogamos nos disculpes cualquier imprecisión y la hagas llegar a nosotros para hacer la corrección inmediatamente.

Esperamos que te sea útil para lograr una mejor preparación.

Autores: MSc. Jesús Cantón Arenas

MSc. Mirta Capote Jaume

Resumen sobre Semejanza de Triángulos

Para demostrar la **semejanza de dos triángulos**, es importante conocer **no solo** los **teoremas** necesarios para ello, sino también las **propiedades** de las **figuras planas** que te permiten **justificar** los **elementos** respectivamente iguales o proporcionales.

Es por eso, que debes estudiar primero el **resumen** sobre **Geometría Plana** que elaboramos para ti y que aparece en nuestra página del Portal Educativo.

En este resumen también te ofrecemos, a partir de ejemplos resueltos, **ideas** sobre las acciones que debes acometer para escribir la demostración.

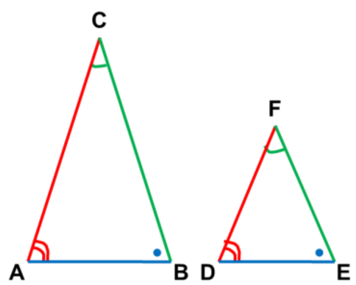
Agregamos además, incisos de **cálculo** para que compruebes cómo aparece este objetivo en los libros de texto y en las distintas evaluaciones a las que te enfrentarás.

Definición: Dos triángulos son **semejantes** si tienen sus **ángulos** respectivamente **iguales** y los **lados opuestos** a estos ángulos respectivamente **proporcionales**.

Para plantear la **semejanza** entre dos triángulos se utiliza el **símbolo** $\sim$.

Por ejemplo:

Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ entonces se cumple que:



$\overline{AB} = k \cdot \overline{DE}$ $\angle A = \angle D$

$\overline{AC} = k \cdot \overline{DF}$ $\angle B = \angle E$

$\overline{CB} = k \cdot \overline{FE}$ $\angle C = \angle F$

- **k** es el **coeficiente de proporcionalidad** y su valor es la **razón de semejanza**.

- El valor de **k** se calcula, hallando la **razón** entre las **longitudes** de cualquiera de los **lados homólogos**:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{FE}} = k$$

o también se puede escribir:

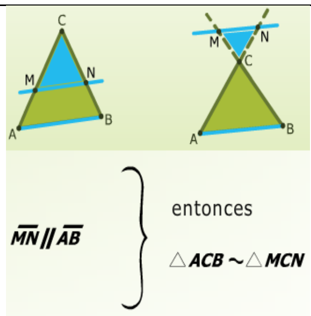
$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{CB}} = k$$

y significa **cuántas veces** es **mayor** (**menor**) la **longitud** de los **lados** de un triángulo respecto a sus **homólogos** en el otro.

Nota: En la práctica para probar que dos triángulos son **semejantes** no es necesario utilizar los **seis elementos** (3 lados y 3 ángulos), sino que como en la **igualdad** de triángulos, existen **teoremas** que te simplifican el trabajo.

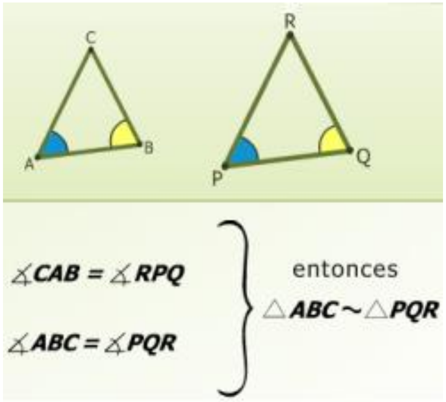
I. Teoremas de semejanza de triángulos:

Teorema fundamental de semejanza: Si una recta es paralela a uno de los lados de un triángulo y corta a los otros lados de este o sus prolongaciones, entonces se forma un triángulo semejante al original.



O sea, al trazar la paralela a cualquiera de los lados, los triángulos que se forman serán siempre semejantes y los argumentas simplemente escribiendo **“por el teorema fundamental de semejanza”**.

Teorema: Dos triángulos son **semejantes** si tienen **dos ángulos** respectivamente **iguales**. (**aa**).



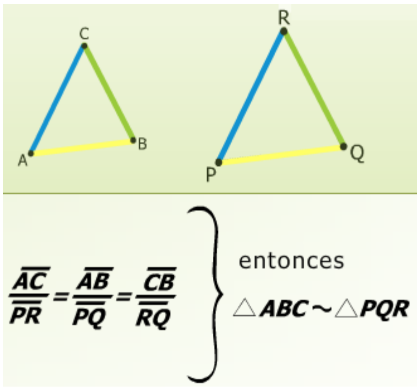
Puedes escribir también:

$\measuredangle \boldsymbol{A} = \measuredangle \boldsymbol{P}$

$\measuredangle \boldsymbol{B} = \measuredangle \boldsymbol{Q}$

Nota: Como en todo triángulo la **suma** de los **ángulos** interiores es igual a **180º**, el **∠A** = **∠E**, por lo que solo basta encontrar **dos ángulos** cualesquiera respectivamente iguales para concluir la demostración.

Teorema: Dos triángulos son **semejantes** si tienen sus **tres lados** respectivamente **proporcionales**. (**ppp**)



Puedes escribir también:

$\overline{\boldsymbol{CB}} = \mathbf{k}\cdot\overline{\boldsymbol{RQ}}$

$\overline{\boldsymbol{AC}} = \mathbf{k}\cdot\overline{\boldsymbol{PR}}$

$\overline{\boldsymbol{AB}} = \mathbf{k}\cdot\overline{\boldsymbol{PQ}}$

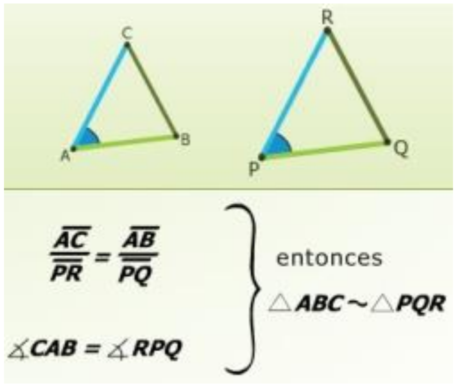
Teorema: Dos triángulos son **semejantes** si tienen **dos lados** respectivamente **proporcionales** y e **igual** el **ángulo comprendido**. (**pap**)

Puedes escribir también:

$\overline{AC} = k \cdot \overline{PR}$

$\overline{AB} = k \cdot \overline{PQ}$

$\measuredangle A = \measuredangle P$



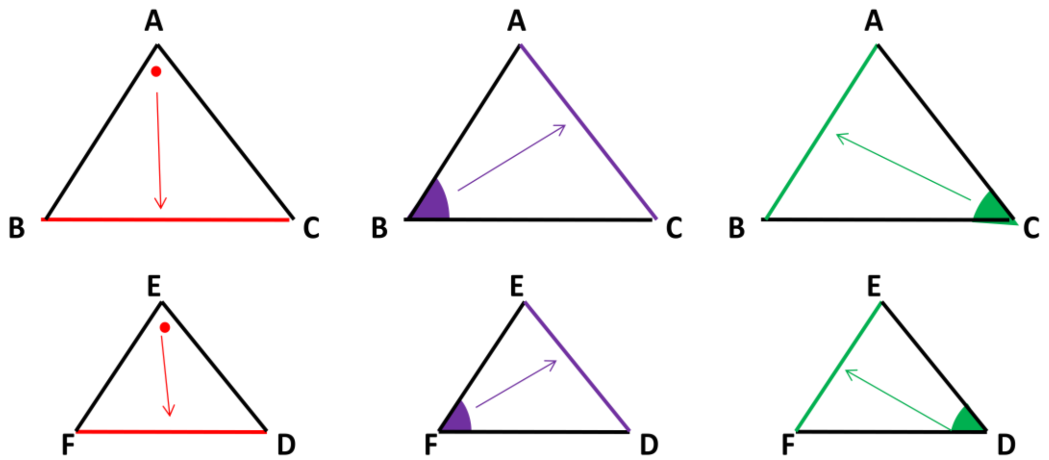
Observación:

1. Como puedes apreciar, para **demostrar** que dos triángulos son **semejantes**, puedes utilizar el **teorema fundamental** o cualquiera de los otros **tres teoremas**, según las condiciones de cada ejercicio.

2. Si en la **igualdad de triángulos** se habla de **igualdad** de **lados** y **ángulos**, en la **semejanza** se mantiene la **igualdad** para los **ángulos**, pero los **lados** son **proporcionales**.

En algunos ejercicios cuando demuestras la **semejanza** de dos triángulos, resulta necesario escribir la **proporcionalidad** entre sus **lados homólogos**. Ten en cuenta para escribirla:

1. formar las **razones** teniendo en cuenta los **lados homólogos** que se oponen a cada uno de los **ángulos** respectivamente **iguales**.



$$\frac{\overline{FD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{BA}} = k \text{ o también } \frac{\overline{BC}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{FE}} = k$$

2. Los **lados** de un mismo **triángulo** deben ir en los **numeradores** y los del otro, en los **denominadores**.

3. Si colocas en los **numeradores** los **lados** del **triángulo mayor**, el valor de **K** será un número **mayor** que **1**, si lo haces al revés, el valor de **K** estará entre **0** y **1**.

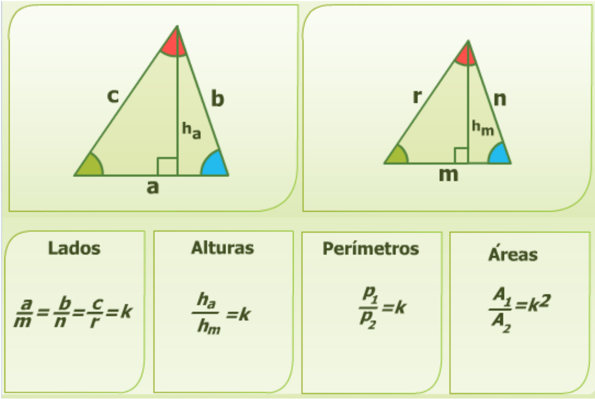
Esta **proporcionalidad** se utiliza para:

- probar **relaciones** entre **lados**,
- para **calcular** la **longitud** de algún segmento.
- para **calcular** el valor de **k**.

Nota: Si $k = 1$ entonces **los triángulos son iguales**.

IMPORTANTE PARA EL CÁLCULO

Si se conoce que ***k*** es la **razón de proporcionalidad** de dos triángulos **semejantes** entonces:



- La **razón** entre las **alturas** relativas a sus **lados homólogos** es igual a k.
- La **razón** entre sus **perímetros** es igual a k.
- La **razón** entre sus **áreas** es igual a k^2.

Nota: Debes tener en cuenta en cada relación anterior, que en el **numerador** de cada razón se colocan **elementos** de un **mismo triángulo** y los **elementos** del otro, van en el **denominador**.

II. Para resolver un ejercicio de **semejanza** de **triángulos**, debes:

1. Leer la información que te brindan en los datos.

2. Interpretar cuáles de esas informaciones te permiten marcar **lados proporcionales** o **ángulos iguales** sobre la figura.

Para ello, es necesario dominar los **teoremas** y **propiedades** estudiados sobre las **figuras planas**.

3. Marcar en la figura los **elementos** que son **iguales** o **proporcionales**.

4. Verificar si los **elementos marcados** conforman uno de los **teoremas** de **semejanza**, o hay que buscar algún otro.

5. Escribir la **relación** de los **elementos** que sean necesarios para completar un teorema.

6. Concluir la demostración de la semejanza, escribiendo **literalmente** el **teorema** utilizado.

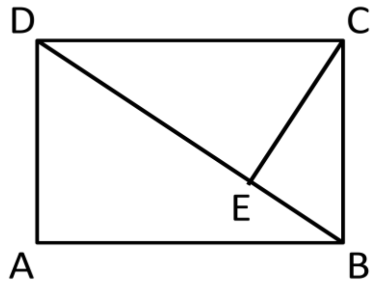
Si el ejercicio pide **demostrar** una **relación** de **elementos** debes realizar un último paso.

7. Plantear la **proporcionalidad** de los **lados homólogos** y realizar las **transformaciones** necesarias para lograr lo que se pide.

III. Ejemplos donde se pide la demostración de la semejanza de dos triángulos directamente.

Es bueno que conozcas que la mayoría de los ejercicios de demostración de **semejanza** de triángulos a los que te enfrentarás, se pueden resolver por el teorema **(a ; a)**, por eso te recomendamos buscar primero ángulos respectivamente iguales en la figura.

Ejemplo 1



En la figura:

● ABCD rectángulo.

● $\overline{DB}$ una de sus diagonales.

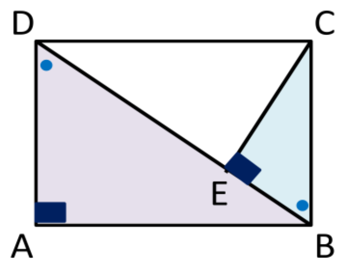
● $\overline{CE}$ es la altura relativa a $\overline{BD}$ en el $\triangle$DBC.

a) Prueba que $\triangle$DAB ~ $\triangle$BEC.

b) Establece la proporcionalidad entre los lados homólogos.

c) Si $\overline{DB}$ = 12 cm y $\overline{BC}$ = 4,0 cm y el área de ABCD es igual a 36 cm^2, calcula el área del $\triangle$BEC.

Solución a):



En los triángulos **DAB** y **BEC**:

∠A = 90º por ser ángulo interior de un rectángulo.

∠BEC = 90º por ser $\overline{CE}$ altura relativa a $\overline{BD}$ en el $\triangle$DBC.

♦ **∠A = ∠BEC** por ser rectos (o por tener la misma amplitud).

♦ **∠ADB = ∠CBE** por ser alternos entre las paralelas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ con secante $\overline{DB}$.

$\triangle$DAB ~ **$\triangle$BEC**, por tener dos ángulos respectivamente iguales (a ; a).

Nota: Como puedes apreciar en este ejercicio:

1. es **fundamental** conocer las **propiedades** de los **rectángulos** y los **ángulos** entre **paralelas**.

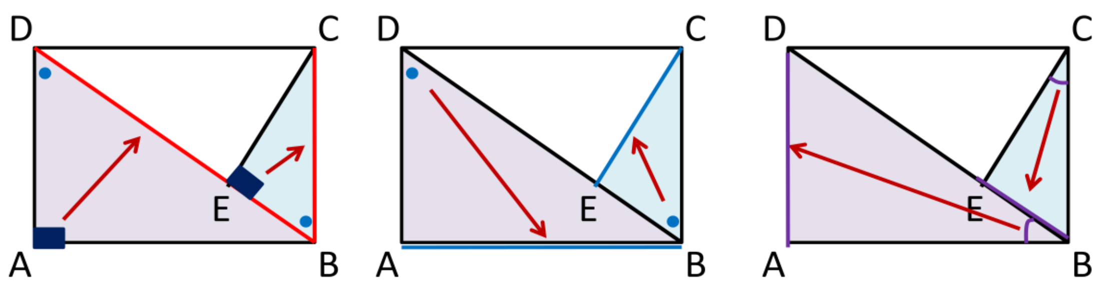
2. En el caso de los **ángulos** entre **paralelas**, se deben mencionar tanto las **paralelas** como la **secante**.

3. se escribe primero la **igualdad** de los **elementos** y a su lado la **justificación** correspondiente.

4. al final se plantea la **semejanza** demostrada y se **argumenta** con el **teorema** utilizado, escrito literalmente.

Solución b):

● Identificas en ambos triángulos los lados que se oponen a ángulos respectivamente iguales.



$$\frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{EC}} \qquad \frac{\overline{AD}}{\overline{EB}}$$

- Planteas la igualdad entre cada razón.

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{EB}}$$

- Igualas a **k** y justificas.

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{EB}} = \mathbf{k}$$ por lados homólogos en triángulos semejantes.

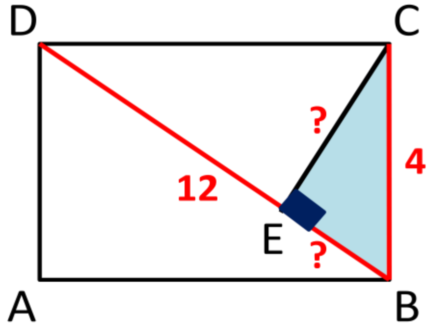
Nota:

1. En los ejercicios la **proporcionalidad** se escribe **directamente**, aquí lo hemos dividido en **tres partes** para tu mayor comprensión.

2. Recuerda que la **tercera pareja** de **ángulos** son **iguales**, aunque no se haya escrito en la demostración.

Solución c):

- Marcas sobre la figura los datos numéricos.



- Escribes la **fórmula** para calcular el **área** del $\triangle$**CEB**.

$$A_{(\triangle CEB)} = \frac{b.h}{2} = \frac{\overline{EB}.\overline{CE}}{2}$$

Como **base** se puede tomar el lado $\overline{BE}$ y la **altura** relativa sería $\overline{CE}$.

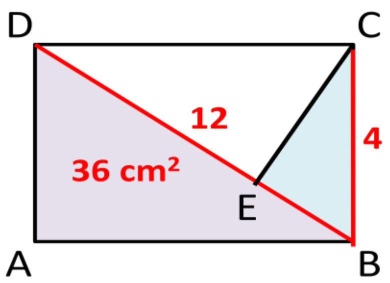
Como puedes apreciar, **no** conoces la **base** ni la **altura** del **triángulo** y con los datos que te brinda el texto y los conocimientos que tienes hasta ahora, **no es posible** hallarlos.

Es por ello, que al realizar cálculos en ejercicios de **semejanza**, es **importante** tener en cuenta siempre la **relación entre** sus **áreas** o **perímetros** descrita anteriormente.

Ten en cuenta que el **área** pedida, es la de uno de los triángulos **semejantes**.

♦Planteas la **razón** entre las **áreas** de los triángulos **semejantes**:

$$\frac{A(\Delta DAB)}{A(\Delta BEC)} = k^2$$



Como ves, para hallar el **área** del ΔBEC debes conocer el **área** del ΔDAB y el valor de **K**.

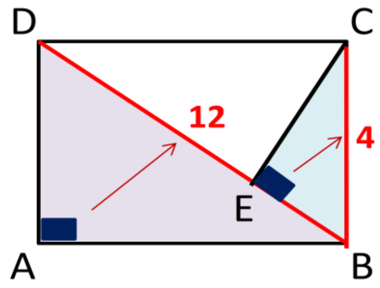
♦Hallas el **área** del **ΔDAB**:

$$A_{(\Delta DAB)} = \frac{A(ABCD)}{2} = \frac{36\ cm^2}{2} = 18\ cm^2$$

Nota: Al trazar la **diagonal** a un **rectángulo**, queda **dividido** en **dos triángulos** de **igual área**.

♦Hallas el valor de **K**:

● Para hallar el valor de **K**, es necesario conocer la **longitud** de dos **lados homólogos** en dichos triángulos.



● Conoces la **longitud** de los **lados homólogos** que se oponen a los *ángulos rectos*.

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} = k$$ (planteas la razón)

$$\frac{12\ cm}{4\ cm} = k$$ (sustituyes)

$$k = 3$$ (simplificas)

Nota: Observa que el valor de **K** **no** tiene unidad de medida, ya que se **simplifican** y significa **cuántas veces** la **longitud** de un lado es **mayor** (**menor**) que la otra.

♦Hallas el **área** del **∆BEC**:

$$\frac{A(\Delta DAB)}{A(\Delta BEC)} = k^2$$ (planteas la relación)

$$\frac{18\ cm^2}{A(\Delta BEC)} = 3^2$$ (sustituyes)

$$\frac{18\ cm^2}{A(\Delta BEC)} = 9$$ (calculas el cuadrado)

$\frac{18\ cm^2}{9}$ = A$_{(\triangle BEC)}$ (despejas)

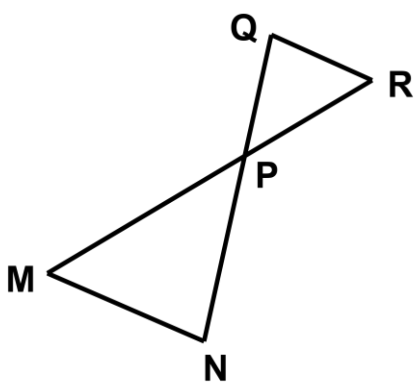
A$_{(\triangle BEC)}$ = **2 cm²** (hallas el cociente)

R/ El área del ▵BEC es igual a **2,0 cm²**.

Nota: Ten en cuenta que la respuesta se da con **dos cifras**, ya que los **datos** tienen también **dos**.

Ejemplo 2

En la figura:



- $\overline{MR}$ y $\overline{NQ}$ se cortan en el punto P.
- ∠Q = 90º y el ▵MNP es rectángulo en N.

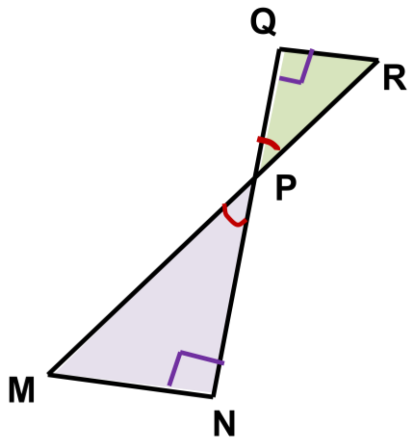
a) Prueba que ▵MNP ~ ▵PQR.

b) Si $\overline{MN}$ = 6,0 dm, $\overline{QR}$ = 3,0 dm y $\overline{NP}$ = 8,0 dm, calcula la longitud de $\overline{PQ}$.

c) Halla el perímetro del ▵MNP.

Solución a):

En los triángulos **MNP** y **PQR**:



♦ **∠MPN** = **∠QPR** por ser opuestos por el vértice.

♦**∠MNP** = 90º, por ser ∆MNP rectángulo en N.

∠PQR = 90º por dato.

♦**∠MNP** = **∠QPR** por ser rectos.

♦**∠M** = **∠R** por terceros ángulos.

∆MNP ~ **∆PQR**, por tener dos ángulos respectivamente iguales (a ; a).

Nota:

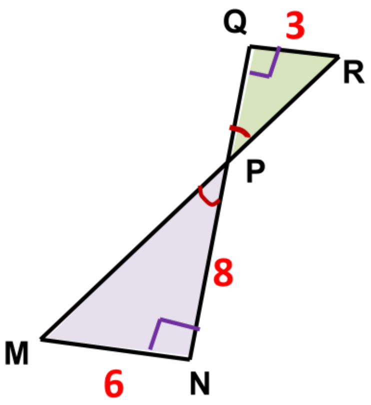
1. Como puedes apreciar para resolver este inciso, debes saber reconocer los **ángulos opuestos por el vértice** y la propiedad de los **triángulos rectángulos**.

Además, debes tener en cuenta que:

2. Cuando justificas que **dos ángulos** son **iguales** a una determinada amplitud por **causas diferentes**, hay que

3. Los ángulos **M** y **R** también son **iguales** por **alternos**, ya que si **dos rectas** ($\overline{RQ}$ **y** $\overline{MN}$) son **perpendiculares** a una

tercera ($\overline{QN}$), entonces son **paralelas** entre sí. Como no está **explícito** el **paralelismo** en los datos, puedes que no te des cuenta, pero es importante dominar también ese teorema.



Solución b):

- Colocas los datos sobre la figura.
- Conoces la longitud de **dos lados homólogos** y se quiere hallar el **homólogo** del otro lado conocido.

Para ello, utilizamos la **proporcionalidad**:

♦Planteas las razones:

$\frac{\overline{MP}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{NP}}{\overline{PQ}} = \mathbf{k}$ por lados homólogos de triángulos semejantes.

♦Seleccionas las dos a utilizar:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{NP}}{\overline{PQ}}$$

♦Sustituyes:

$$\frac{6\ cm}{3\ cm} = \frac{8\ cm}{\overline{PQ}}$$

♦Despejas $\overline{PQ}$ aplicando los productos cruzados:

$$\overline{PQ} = \frac{3\ cm.\ 8\ cm}{6\ cm}$$

♦Efectúas: $\overline{PQ} = \frac{24\ cm}{6\ cm}$ = **4 cm**

R/ La longitud $\overline{PQ}$ de es de 4,0 cm.

Nota:

1. Para seleccionar las **dos razones** a utilizar debes tener en cuenta, a la que tiene la **incógnita** y la que esté completa.

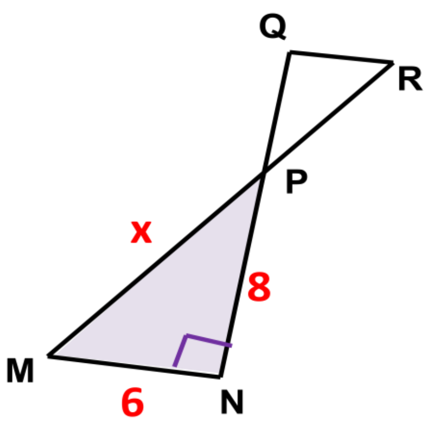
2. No es escribir la **K** en este caso, pues no se utilizará.

3. La **respuesta** se da con la **menor** cantidad de cifras que tienen los datos, o sea, dos.

Solución c)

• Para hallar el **perímetro**, necesitas hallar la **longitud** de $\overline{MP}$, o sea, la **hipotenusa** del **∆MNP**.

♦Hallas $\overline{MP}$:



En el **∆MNP** rectángulo en **N**:

$\overline{\mathrm{MP}}^2 = \overline{\mathrm{MN}}^2 + \overline{\mathrm{NP}}^2$ por el **teorema de Pitágoras**.

$\overline{\mathrm{MP}}^2 = (6\ \mathrm{cm})^2 + (8\ \mathrm{cm})^2$ (sustituyes)

$\overline{\mathrm{MP}}^2 = 36\ \mathrm{cm}^2 + 64\ \mathrm{cm}^2$ (calculas los cuadrados)

$\overline{\mathrm{MP}}^2 = 100\ \mathrm{cm}^2$ (adicionas)

$\overline{\mathrm{MP}} = \sqrt{\mathbf{100\ cm^2}}$ (extraes la raíz cuadrada)

$\overline{\mathrm{MP}}$ = **10 cm**

♦Hallas el **perímetro** del **△MNP**:

P$_{(\triangle MNP)} = \overline{MP} + \overline{NP} + \overline{MN}$ (escribes la fórmula)

P$_{(\triangle MNP)}$ = 10 cm + 8 cm + 6 cm (sustituyes)

A$_{(\triangle MNP)}$ = **24 cm** (calculas)

R/ El perímetro del **△MNP** es igual a **24 cm**.

Nota: Ten en cuenta que, para resolver ejercicios sobre **cálculo** de **áreas** o **perímetros,**

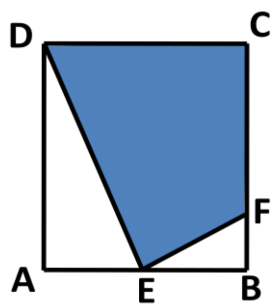
1. No es necesario utilizar el **coma cero** de los datos en los **cálculos** que realizas.

2. La **respuesta** se da con la **menor** cantidad de cifras que tienen los datos.

Ejemplo 3

En la figura:

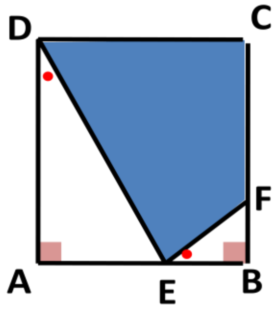
- ABCD cuadrado.



● E y F puntos de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, tales que $\overline{DE} \perp \overline{EF}$.

a) Prueba que $\triangle$DAE ~ $\triangle$EBF.

b) Si $\overline{AD}$ = 10 dm y $\overline{BE}$ = 4,0 dm, calcula el área de la región sombreada.



Solución a):

En los triángulos **DAE** y **EBF**:

♦ **∠A** = **∠B** por ser ángulos interiores de un cuadrado.

$\overline{AD} \perp \overline{BA}$ por lados consecutivos de un cuadrado.

$\overline{DE} \perp \overline{EF}$ por dato.

Luego, ♦ **∠ADE** = **∠FEB** por ser ángulos agudos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares.

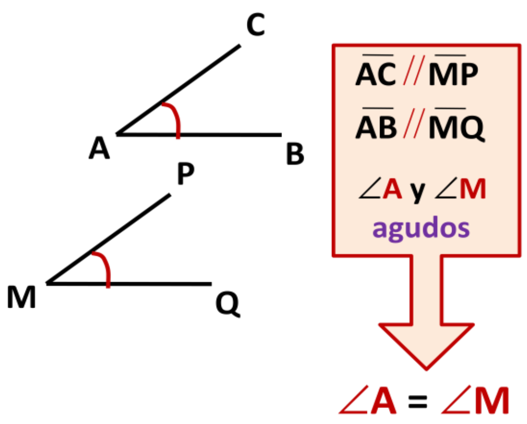
$\triangle$**DAE** ~ $\triangle$**EBF**, por tener dos ángulos respectivamente iguales (a ; a).

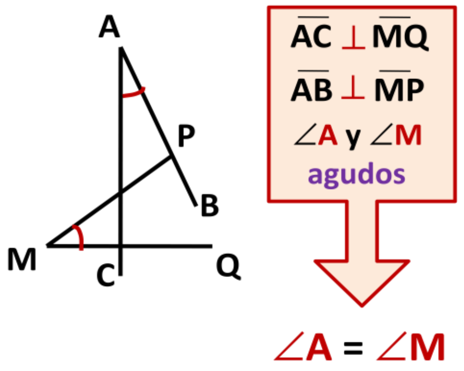
Nota:

En este ejercicio es necesario dominar las **propiedades** de un **cuadrado** y aparece además, como un elemento a utilizar para lograr la **semejanza**, la **igualdad** de **ángulos** cuyos **lados** que los forman son **perpendiculares** entre sí.

Aunque en el resumen de Geometría Plana aparece este teorema, te lo ilustramos aquí.

Teorema: Si dos **ángulos agudos** (**obtusos**) tienen sus **lados** respectivamente **paralelos** o respectivamente **perpendiculares**, tiene la **misma amplitud**.

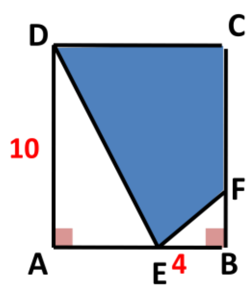




Nota: Te ilustramos el teorema **solo** para **ángulos agudos**, pero como dice el texto, se cumple también cuando ambos **ángulos** sean **obtusos**.

Solución b)

- Colocas los datos sobre la figura.



El **área sombreada** se calcula utilizando la **fórmula**:

$$A_{(sombreada)} = A_{(ABCD)} - (A_{\triangle DAE} + A_{\triangle EBF})$$

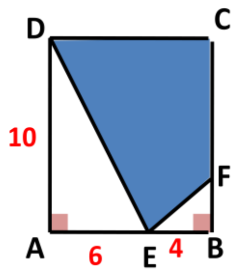
• Hallas el **área** del **cuadrado**:

A(ABCD) = $a^2 = \overline{AD}^2$ = (10 dm)^2 = **100 dm^2**

• Hallas el **área** del **ΔDAE**:

$\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB}$ por diferencia de segmentos

$\overline{AE}$ = 10 dm – 4 dm = **6 dm**



$$A_{\Delta DAE} = \frac{b.h}{2} = \frac{\overline{AE}\,.\overline{DA}}{2}$$

$$A_{\Delta DAE} = \frac{6\ dm.10\ dm}{2} = \mathbf{30\ dm^2}$$

• Hallas el **área** del **ΔEBF**:

Como $\overline{AD}$ y $\overline{EB}$ son **lados homólogos** de **triángulos semejantes**, hallas el valor de **K**:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{EB}} = K \rightarrow \frac{10\ dm}{4\ dm} = K \rightarrow K = 2{,}5$$

Como **ΔDAE y ΔEBF** son **semejantes**, entonces:

$$\frac{A(\Delta DAE)}{A(\Delta EBF)} = k^2$$ (planteas la relación)

$$\frac{30\ dm^2}{A(\Delta EBF)} = 2{,}5^2 \qquad \text{(sustituyes)}$$

$$\frac{30\ dm^2}{A(\Delta EBF)} = 6{,}25 \qquad \text{(calculas el cuadrado)}$$

$$\frac{30\ dm^2}{6{,}25} = A_{(\Delta EBF)} \qquad \text{(despejas)}$$

$$A_{(\Delta EBF)} = 4{,}8\ dm^2 \qquad \text{(hallas el cociente)}$$

♦ Hallas el **área sombreada**:

$A_{(sombreada)} = A_{(ABCD)} - (A_{\Delta DAE} + A_{\Delta EBF})$

$A_{(sombreada)} = 100\ dm^2 - (30\ dm^2 + 4{,}8\ dm^2)$

$A_{(sombreada)} = 100\ dm^2 - 34{,}8\ dm^2$

$A_{(sombreada)} = \mathbf{65{,}2\ dm^2}$

R/ El área sombreada es igual a **65 dm²** aproximadamente.

Nota:

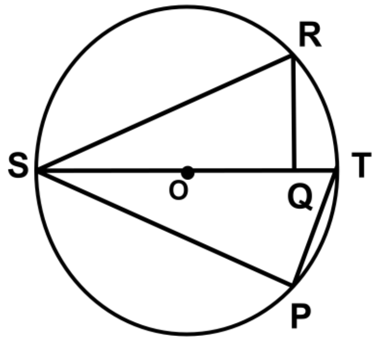
1. La **respuesta** se da con las **dos cifras**, porque los datos tienen **dos**.

2. El valor de **K** se pudo haber dejado expresado como **fracción**, o sea, $\frac{5}{2}$ (simplificada) y calcular el **área** del triángulo con dicho valor. Debes valorar en un ejercicio qué puede ser **más conveniente**.

3. Si el valor de **K** es una **fracción** que **no** da exacta al expresarla en **decimal**, **debes trabajar con la fracción**.

Ejemplo 4

En la figura:



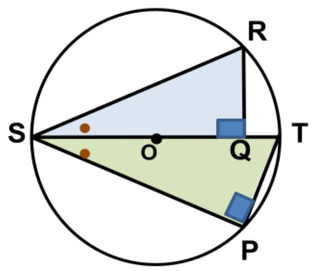
- $\overline{ST}$ es un diámetro de la circunferencia de centro O.
- R y P puntos de la circunferencia.
- $\overline{ST}$ es bisectriz del ∠RSP.
- $\overline{RQ}$ es perpendicular a $\overline{ST}$ en el puto Q.

a) Prueba que ▵SRQ ~ ▵SPT.

b) Calcula el área del círculo, si se conoce que

sen ∠TSP = 0,5 y $\overline{PT}$ = 2,0 cm.

Solución a):



En los triángulos **SRQ** y **SPT**:

♦**∠P** = 90º por estar inscritos sobre el diámetro $\overline{\mathbf{ST}}$.

♦**∠SRQ** = 90º por ser $\overline{RQ}$ perpendicular a $\overline{ST}$.

♦ ∠P = ∠SRQ por tener la misma amplitud.

♦ ∠RST = ∠PST por ser bisectriz del ∠RSP.

△SRQ ~ △SPT, por tener dos ángulos respectivamente iguales (a ; a).

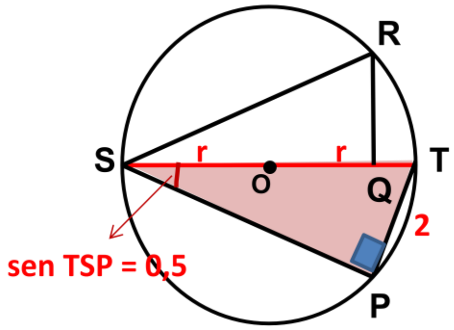
Nota:

1. En este ejercicio aparece la **circunferencia**, por lo que es importante dominar sus **elementos** y **propiedades**. Específicamente utilizamos aquí el **teorema de Tales**. Además, la propiedad de la **bisectriz** de un ángulo.

2. Recuerda que cuando **justificas** elementos por separado, luego hay que plantear la **igualdad** entre ellos.

Solución b)

• Colocas los datos sobre la figura.



• El **área** del **círculo** se calcula mediante la **fórmula:**

$$A_{círculo} = \pi \cdot r^2$$

Necesitas determinar la longitud del **radio**.

♦ Hallas el **radio** del **círculo**:

Como $\overline{ST}$ es un **diámetro** y a la vez **hipotenusa** del triángulo **rectángulo** SPT, debes utilizar recursos matemáticos relacionados con este tipo de triángulo, en este caso las **razones trigonométricas** y específicamente el **seno**.

En el $\triangle$**SPT** rectángulo en **P**:

sen∠TSP = $\frac{cat.op.}{hip.} = \frac{\overline{PT}}{\overline{ST}}$ (planteas la razón seno)

$0,5 = \frac{2}{\overline{ST}}$ (sustituyes)

$\overline{ST} = \frac{2}{0,5}$ (despejas)

$\overline{ST}$ = **4 cm** (calculas)

Luego **r** = $\overline{ST}$: 2 = **4 cm** : 2 = **2 cm**

♦ Hallas el **área** del **círculo**:

$A_{(círculo)} = \pi \cdot r^2$

$A_{(círculo)} \approx 3,14 \cdot (4\text{ cm})^2$

$A_{(círculo)} \approx 3,14 \cdot 16\text{ cm}^2$

$A_{(círculo)} \approx \mathbf{50,24\text{ cm}^2}$

R/ El área del círculo es aproximadamente **50 cm²**.

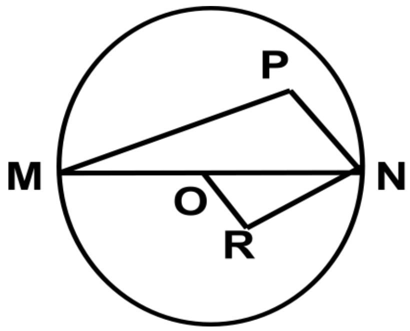
Nota: La **respuesta** se da con **dos cifras**, porque los datos tienen **dos**. Como un número de **tres cifras** no se puede redondear a **dos**, es necesario **cambiar** de unidad de medida.

Aunque la mayoría de los ejercicios que resolverás sobre **semejanza** de **triángulos** se obtienen utilizando el teorema (**a** ; **a**), te mostramos algunos ejemplos de los otros dos teoremas.

Ejemplo 5

En la figura:

- $\overline{MN}$ es un diámetro de la circunferencia de centro O.
- R y P puntos interiores de la circunferencia.
- $\overline{NP}$ es paralelo a $\overline{OR}$.
- $\overline{NP}$ = 4,0 dm y $\overline{OR}$ = 20 cm.

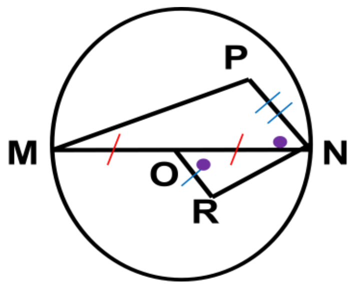


a) Prueba que △MPN ~ △ORN.

b) Si el perímetro del △ORN es igual a 10 dm, calcula el perímetro del △MPN.

Solución a):

En los triángulos **MPN** y **ORN**:



♦**∠PNM** = **∠NOR** por alternos entre las paralelas $\overline{NP}$ y $\overline{OR}$ con secante $\overline{MN}$.

♦Como $\overline{\mathrm{MN}}$ es un diámetro y $\overline{\mathrm{ON}}$ un radio, entonces

$\overline{\mathbf{MN}} = \mathbf{2}\overline{\boldsymbol{ON}}$.

♦Como $\overline{\mathrm{NP}}$ = 4 dm y $\overline{\mathrm{OR}}$ = 20 cm = 2 dm, entonces

$\overline{\mathbf{NP}} = \mathbf{2}\overline{\boldsymbol{OR}}$.

△MNP ~ **△ORN**, por tener dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido (p ; a ; p).

Nota: Como puedes apreciar en este caso:

1. hay **solo un par** de **ángulos** que puedes justificar que son respectivamente **iguales**,

2. sin embargo, hay **dos lados** de un triángulo que representan el **doble** de **dos lados** del otro, por lo que existe entre ellos un coeficiente de **proporcionalidad** igual **2**.

3. La justificación de los **lados proporcionales** también se puede expresar así:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{NP}}{\overline{OR}} = \mathbf{2}$$

Solución b):

• Hallas el **perímetro** del **△MPN**:

Como **△MPN y △ORN** son **semejantes**, entonces:

$\frac{P(\Delta MPN)}{P(\Delta ORN)} = k$ (planteas la relación)

$\frac{P(\Delta MPN)}{10\ dm} = 2$ (sustituyes)

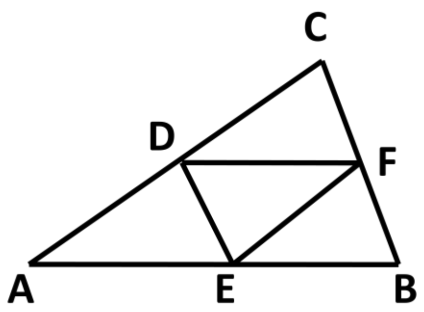
$P_{(\Delta MPN)} = 2.10\ dm$ (despejas)

$P_{(\Delta MPN)} = 20\ dm$ (hallas el producto)

R/ El perímetro del ΔMPN es igual a 10 dm.

Ejemplo 6

En la figura:



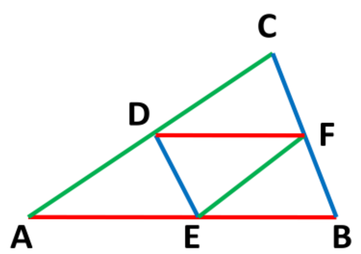
● D, E y F puntos medios de los lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente del ΔABC.

a) Prueba que ΔABC ~ ΔDEF.

b) Si el área del ΔORN es igual a 10 dm, calcula el perímetro del ΔMPN.

Solución a):

En los triángulos **ABC** y **DEF**:



♦Como D y F son **puntos medios** de $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ respectivamente, entonces $\overline{DF}$ es la **paralela media** al lado $\overline{AB}$ y por propiedad

$\overline{\mathbf{AB}} = \mathbf{2}\overline{\boldsymbol{DF}}$.

♦Como D y E son **puntos medios** de $\overline{\mathrm{AC}}$ y $\overline{\mathrm{AB}}$ respectivamente, entonces $\overline{\mathbf{DE}}$ es la **paralela media** al lado $\overline{\mathrm{CB}}$ y por propiedad $\overline{\mathbf{CB}} = \mathbf{2}\overline{\boldsymbol{DE}}$.

♦Como F y E son **puntos medios** de $\overline{\mathrm{CB}}$ y $\overline{\mathrm{AB}}$ respectivamente, entonces $\overline{\mathbf{FE}}$ es la **paralela media** al lado $\overline{\mathrm{AC}}$ y por propiedad $\overline{\mathbf{AC}} = \mathbf{2}\overline{\boldsymbol{EF}}$.

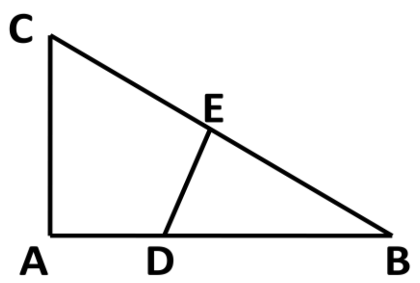
△ABC ~ **△DEF**, por tener sus tres lados proporcionales (p ; p ; p).

IV. Ejemplos de aplicación de la semejanza de dos triángulos.

La **semejanza de triángulos** es muy útil para la demostración de relaciones entre **lados** en **triángulos semejantes**.

Ejemplo 1

En la figura:



- D y E puntos de $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ respectivamente.
- △CAB rectángulo en A.
- $\overline{DE} \perp \overline{CB}$.

a) Prueba que $\frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{DE}}$.

b) Si $\overline{CB}$ = 10 dm, $\overline{DE}$ = 3,0 dm y $\overline{EB}$ = 40 cm, determina la razón de semejanza.

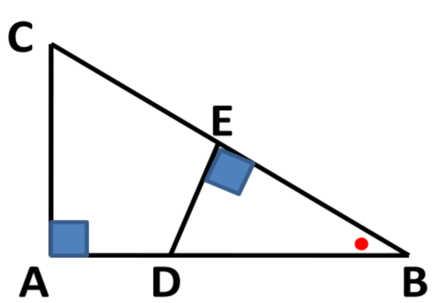
c) Calcula el perímetro del $\triangle$**ABC**.

Solución a):

• Como lo pedido es una relación entre **lados**, es necesario probar la **semejanza** de dos triángulos que contengan a dichos lados, por lo que debes seleccionar los triángulos **ABC** y **DBE**.

Observa que el $\triangle$**ABC** contiene a los **lados** que están situados en el **numerador** y el $\triangle$**DEB** contiene a los **lados** que están situados en el **denominador**.

I. Demuestra la semejanza de los triángulos seleccionados:



En los triángulos **ABC** y **BDE**:

♦ $\angle$**A** = 90º, por ser $\triangle$CAB rectángulo en A.

$\angle$**DEB** = 90º por ser $\overline{DE} \perp \overline{CB}$.

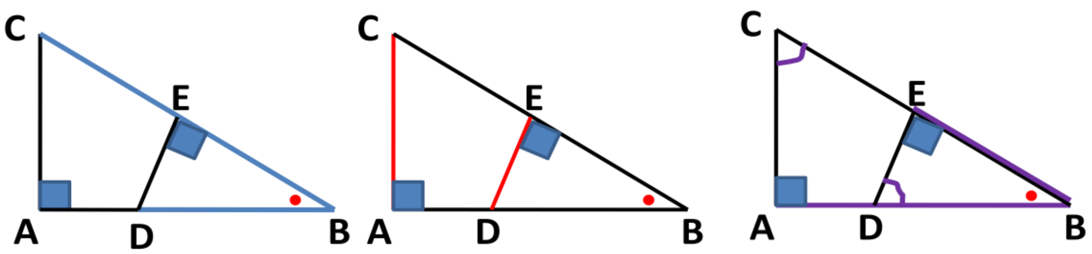
♦ $\angle$**A** = $\angle$**DEB** por tener igual amplitud o ser rectos.

♦ $\angle$**B** común para ambos triángulos.

$\triangle$**ABC** ~ $\triangle$**DBE**, por tener dos ángulos respectivamente iguales (a ; a).

II. Estableces la proporcionalidad:

• Analizas los **lados** que se **oponen** a **ángulos iguales** y planteas la **igualdad** de sus **razones**.



$\frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EB}}$ = **K** por lados homólogos de triángulos semejantes

• Seleccionas la igualdad de razones necesarias para terminar la demostración.

$\frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{DE}}$, queda demostrado.

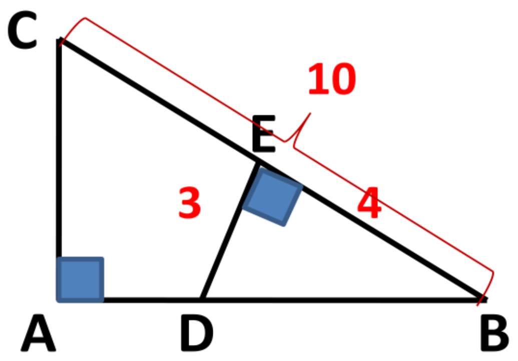
Nota:

1. En este ejemplo, nos apoyamos en la **semejanza de triángulos** para demostrar la relación entre **segmentos**.

2. Colocamos los lados del **△ABC** en el **numerador** y los del **△DEB** en el **denominador**, porque la relación a demostrar está de esa manera.

Solución b):

• Marcas los datos sobre la figura.



Para determinar la **razón de semejanza**, debes tener el valor de una de las tres **razones**.

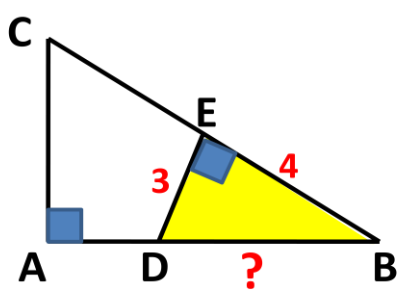
• Como del **△ABC** solo conoces la **longitud** del lado $\overline{CB}$, debes hallar la **longitud** de su **homólogo**, o sea, $\overline{DB}$.

• Como el **△BDE** es **rectángulo** en **E**, para calcular te apoyas en el **teorema de Pitágoras**.

$\overline{EB}$ = 40 cm = 4 dm (conviertes a decímetros)

En el **△BDE** rectángulo en **E**:

$\overline{\mathrm{DB}}^2 = \overline{\mathrm{DE}}^2 + \overline{\mathrm{EB}}^2$ por el **teorema de Pitágoras**.



$\overline{DB}^2 = (3\ \mathrm{dm})^2 + (4\ \mathrm{dm})^2$

$\overline{DB}^2 = 9\ \mathrm{dm}^2 + 16\ \mathrm{dm}^2$

$\overline{DB}^2 = 25\ \mathrm{dm}^2$

$\overline{DB} = \sqrt{\mathbf{25\ dm^2}}$

$\overline{DB}$ = **5 dm**

• Planteas la razón conocida y hallas **k**:

$\frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} = \mathbf{K} \rightarrow \frac{10\ \mathrm{dm}}{5\ \mathrm{dm}} = \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K} = \mathbf{2}$

R/ La razón de semejanza es igual a **2**.

Nota:

1. Para hallar la **razón** tienes que conocer la **longitud** de, al menos, una **pareja** de **lados homólogos**.

2. Si colocas los **lados homólogos** al revés, la **razón** que se obtiene es $\frac{1}{2}$ y no **2**, pero es válida también la respuesta, ya que en el enunciado **no se especifica** el orden de los triángulos.

3. Recuerda que la **razón no** tiene **unidad de medida** y significa **cuántas veces** un **lado** de un triángulo es **mayor** o **menor** que su **homólogo** en el otro.

Solución c)

Existen **dos vías** para hallar el **perímetro** pedido:

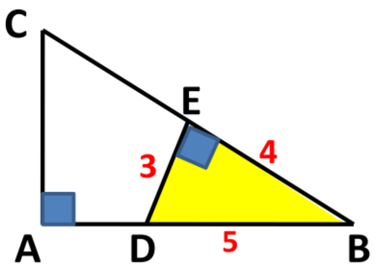
1. Determinar la **longitud** de los **lados** $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ del **△ABC** utilizando la proporcionalidad.

2. Utilizar la relación entre los **perímetros** en **triángulos semejantes**.

Utilizamos la segunda vía:

$$\frac{P(\Delta ABC)}{P(\Delta DEB)} = K$$

• Hallas el **perímetro** del **△DBE**:



P(△DBE) = a + b + c

P(△DBE) = $\overline{DB} + \overline{DE} + \overline{EB}$

P(△DBE) = 5 dm + 3 dm + 4 dm

P(△DBE) = **12 dm**

• Hallas el **perímetro** del **△ABC**:

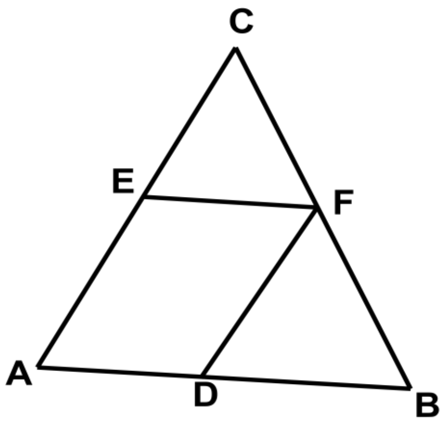
$$\frac{P(\Delta ABC)}{P(\Delta DEB)} = K \qquad \text{(planteas la relación)}$$

$$\frac{P(\Delta ABC)}{12\ dm} = 2 \qquad \text{(sustituyes)}$$

P(△ABC) = **2**·**12 dm** = **24 dm**   (despejas y calculas)

R/ El perímetro del **△ABC)** es igual a **24 dm**.

Ejemplo 2



En la figura:

- ∠ADF = ∠AEF.
- E , F y D puntos de $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.
- $\overline{EF}$ // $\overline{AB}$

a) Prueba que $\overline{DF} \cdot \overline{CF} = \overline{EC} \cdot \overline{BF}$.

b) Si el área del △ABC es igual a 30 dm^2; el área del △DFB es igual a 12 dm^2 y el área del cuadrilátero ADEF es igual a 15 dm^2, calcula la razón de semejanza de los triángulos DFB y CEF y di qué significa.

Solución a):

- Como lo pedido es una relación entre **lados**, es necesario probar la **semejanza** de dos triángulos que contengan a dichos lados, por lo que debes seleccionar los triángulos **CEF** y **FDB**.

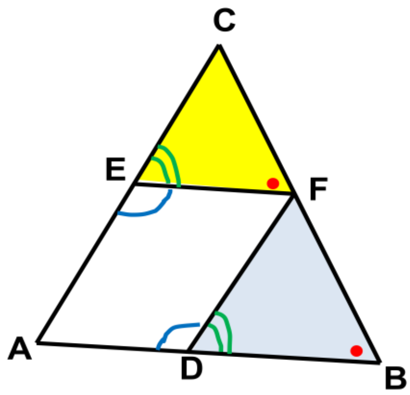
Observa que el △**CEF** contiene a los **lados** $\overline{CF}$ y $\overline{EC}$ y el △**FDB** contiene a los **lados** $\overline{DF}$ y $\overline{BF}$.

I. Tomamos los **triángulos** que contengan a dichos lados y probamos que son **semejantes**.

En los triángulos **CEF** y **FDB**:

♦∠**CFE** = ∠**B** por ser correspondientes entre las paralelas $\overline{EF}$ y $\overline{AB}$ con secante $\overline{CB}$.

∠**AEF** = ∠**ADF** por dato.

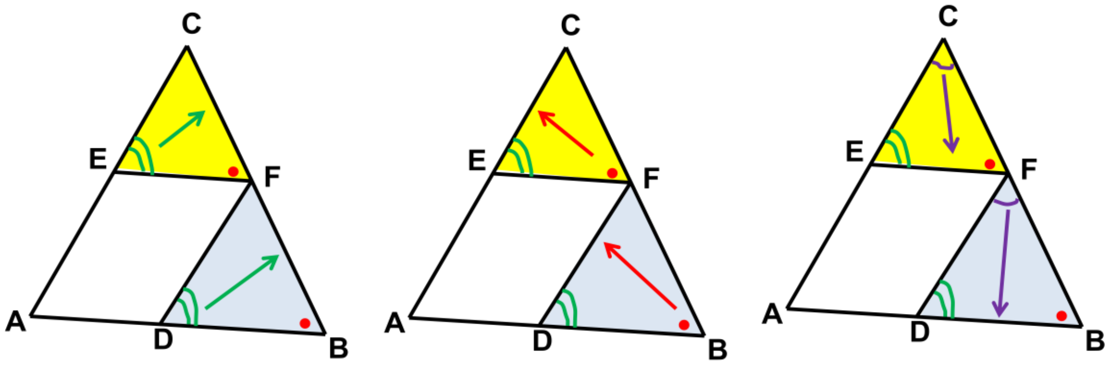


♦∠**CEF** = ∠**FDB** por ser adyacentes a ángulos iguales.

△**CEF** ~ △**FDB**, por tener dos ángulos respectivamente iguales (a ; a).

II. Estableces la proporcionalidad:

• Analizas los **lados** que se **oponen** a **ángulos iguales** y planteas la **igualdad** de sus **razones**.



$\frac{\overline{CF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{DB}}$ = **K** por lados homólogos de triángulos semejantes

• Seleccionas la **igualdad** de **razones** que involucra los segmentos necesarios para terminar la demostración y efectúas el **producto cruzado**:

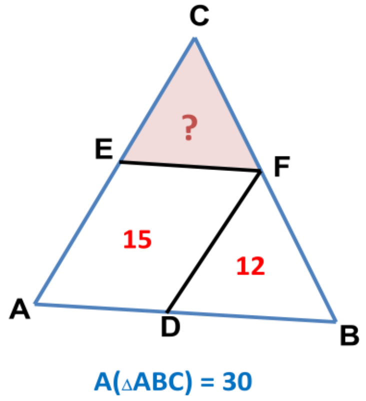
$\frac{\overline{CF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{DF}} \rightarrow \overline{DF} \cdot \overline{CF} = \overline{EC} \cdot \overline{BF}$ se cumple.

Nota:

1. En este ejemplo, nos apoyamos en la **semejanza de triángulos** para demostrar la relación entre **segmentos**.

2. Para establecer la **proporcionalidad** entre **lados homólogos**, colocas los lados de cada triángulo según tu gusto, ya que luego se **multiplicarán**.

Solución b)



- Colocas los datos sobre la figura.

- Como conoces el **área** del **triángulo mayor** y la de **dos figuras** que lo componen, es posible determinar el **área** del **△CEF**.

♦ Hallas el **área** del **△CEF**:

$A_{(\triangle ABC)} = A_{(\triangle CEF)} + A_{(\triangle DFB)} + A_{(ADEF)}$ por suma de áreas

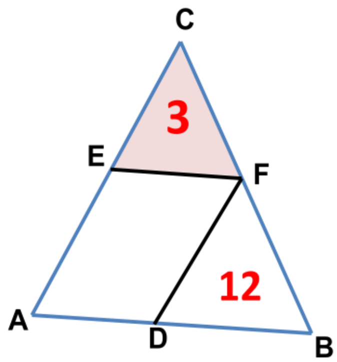
$30\ dm^2 = A_{(\triangle CEF)} + 12\ dm^2 + 15\ dm^2$

$30\ dm^2 = A_{(\triangle CEF)} + 27\ dm^2$

$A_{(\triangle CEF)} = 30\ dm^2 - 27\ dm^2$

$A_{(\triangle CEF)} = 3\ dm^2$

♦ Hallas la **razón** de **semejanza**:



$\frac{A(\Delta DFB)}{A(\Delta CEF)} = K^2$ (planteas la relación)

$\frac{12\ dm^2}{3\ dm^2} = K^2$ (sustituyes)

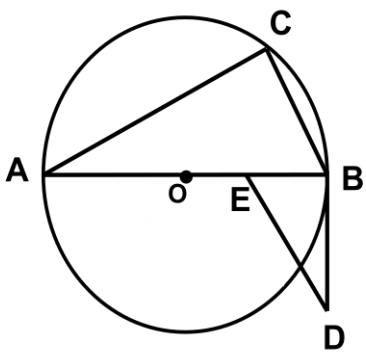
$K^2 = 4$ (simplificas)

$K = 2$

R/ La **razón** de semejanza es igual a **2** y significa que los lados del $\triangle$**DFB** son **dos veces mayores** que sus homólogos en el $\triangle$**CEF**.

Ejemplo 3

En la figura:



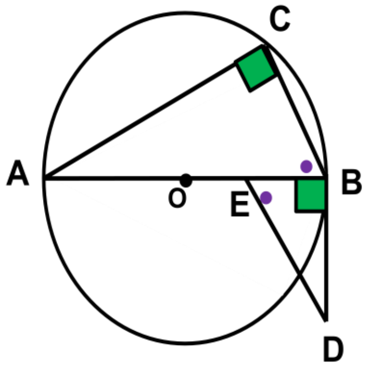
- C es un punto de la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$.
- $\overline{DB}$ es tangente a la circunferencia en B.
- E punto de $\overline{AB}$.
- $\overline{CB}$ // $\overline{ED}$

a) Prueba que **r** = $\frac{\overline{AC}\,.\overline{ED}}{2\overline{BD}}$, donde **r** es un radio de la circunferencia.

b) Si el cos∠A = 0,80 y $\overline{AC}$ = 4,0 cm, calcula la longitud de la circunferencia.

Solución a):

I. Tomamos los **triángulos** que contengan a dichos lados y probamos que son **semejantes**.



En los triángulos **ACB** y **EBD**:

♦**∠ACB** = 90º por inscrito sobre el diámetro $\overline{AB}$.

♦**∠OBD** = 90º por ser $\overline{DB}$ tangente a la circunferencia en B.

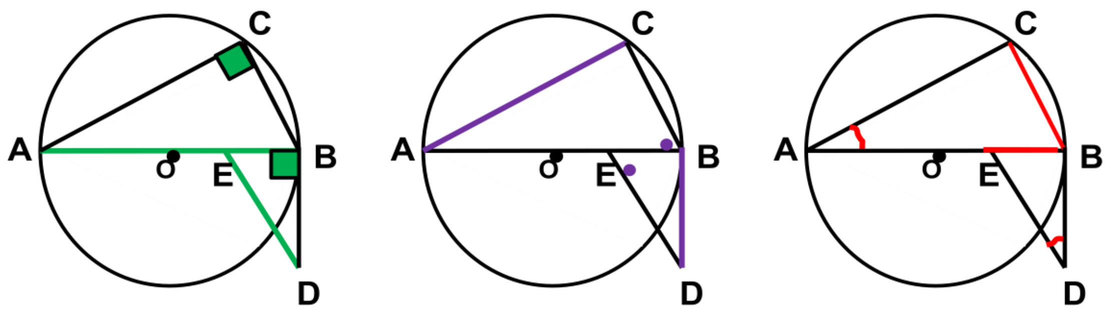
♦**∠ACB = ∠OBD** por ser rectos o por tener la misma amplitud.

♦**∠CBA** = **∠BOD** por alternos entre las paralelas $\overline{CB}$ y $\overline{OD}$ con secante $\overline{OB}$.

△ACB ~ **△EBD**, por tener dos ángulos respectivamente iguales (a ; a).

II. Estableces la proporcionalidad:

● Analizas los **lados** que se **oponen** a **ángulos iguales** y planteas la **igualdad** de sus **razones**.



$\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{EB}}$ = **K** por lados homólogos de triángulos semejantes

• Seleccionas la igualdad de razones necesarias para terminar la demostración.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{BD}}$$

• Despejas $\overline{AB}$ que es un **diámetro** de la circunferencia.

$$\overline{AB} = \frac{\overline{CA}\,.\overline{ED}}{\overline{BD}}$$

• Como $\overline{AB}$ = 2**r**, sustituyes en la expresión:

$$2r = \frac{\overline{CA}\,.\overline{ED}}{\overline{BD}}$$

• Despejas el radio: $r = \frac{\overline{CA}\,.\overline{ED}}{2.\overline{BD}}$, queda demostrado.

Nota:

1. Aquí hemos utilizado importantes **propiedades** de los **ángulos** en la **circunferencia**, como el **teorema de Tales** y el de la **tangente**.

2. También se utilizaron los ángulos entre **paralelas**.

3. En la conclusión se utiliza la **transitividad**, que muestra la igualdad entre **tres elementos**, sean lados, ángulos, triángulos, áreas, etc, o sea:

♦ Si un elemento **1** es igual a un elemento **2** y a su vez, el elemento **1** es igual a un elemento **3**, entonces se cumplirá que el elemento **2** es igual al elemento **3**.

Solución b):

♦Planteas la fórmula:

$$L_{(circunferencia)} = 2 \cdot \pi \cdot r$$

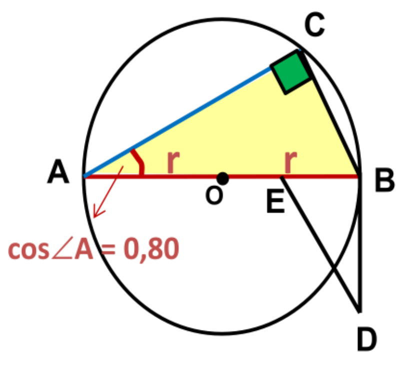
• Para hallar la **longitud** de la circunferencia, hay que calcular su **radio**.

• Para calcular el **radio**, te apoyas en los **datos numéricos** y que el **△ACB** es **rectángulo**.

Si conoces una **razón trigonométrica** del **triángulo rectángulo**, te están sugiriendo qué vía utilizar y en este caso también, cuál **razón** utilizar.

♦Hallas la **longitud** del **diámetro**:

En el **△ACB** rectángulo en **C**:



$\cos\angle A = \dfrac{cat.ady.}{hip.} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ (escribes la razón)

$0{,}8 = \dfrac{4\ cm}{\overline{AB}}$ (sustituyes)

$\overline{AB} = \frac{4\ cm}{0,8}$ = **5 cm** (despejas y calculas)

Si $\overline{AB}$ = **5 cm**, entonces **r** = **2,5 cm**.

♦Hallas la **longitud** de la **circunferencia**:

$L_{(circunferencia)} = 2 \cdot \pi \cdot r \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 2,5\ cm$

$L_{(circunferencia)} \approx 15,7\ cm$

R/ La longitud de la circunferencia es de aproximadamente **16 cm**.

Nota:

1. Como los datos tienen **dos** cifras, la respuesta se **redondea** a **dos**.

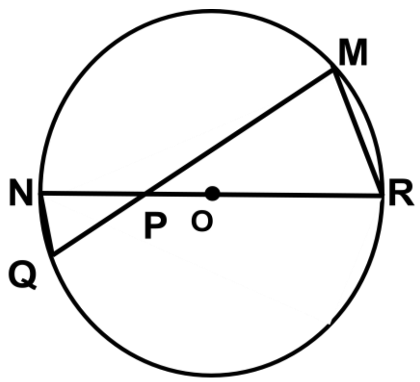
2. La **longitud** de la **circunferencia** también se puede hallar utilizando la fórmula **L = π·d**.

Ejemplo 4

En la figura:

- O centro de la circunferencia y $\overline{NR}$ un diámetro.

- P punto de intersección de $\overline{MQ}$ y $\overline{NR}$.



• M y Q son puntos de la circunferencia.

a) Prueba que $\frac{\overline{MR}}{\overline{NQ}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{NP}}$.

b) Si $\overline{NP}$ = 4,0 cm, $\overline{QP}$ = 3,0 cm y $\overline{PM}$ = 8,0 cm, calcula el área del círculo.

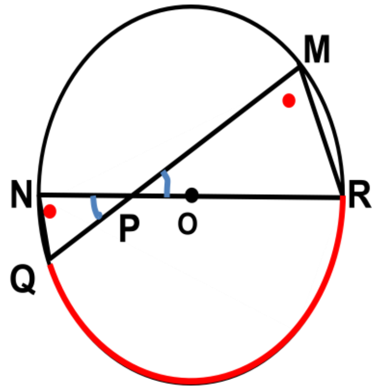
Solución a):

I. Tomamos los **triángulos** que contengan a dichos lados y probamos que son **semejantes**.

En los triángulos **NPQ** y **MPR**:

♦ **∠NPQ** = **∠MPR** por opuestos por el vértice.

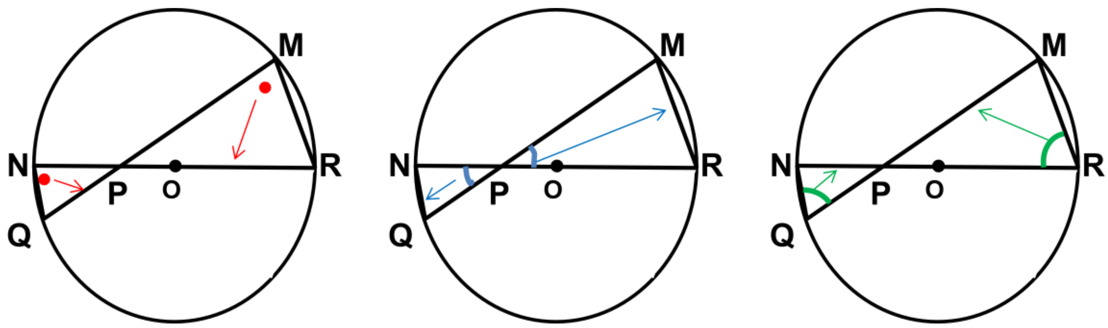
♦ **∠N** = **∠M** por estar inscritos sobre el mismo arco **QR**.



∆NPQ ~ **∆MPR**, por tener dos ángulos respectivamente iguales (a ; a).

II. Estableces la proporcionalidad:

• Analizas los **lados** que se **oponen** a **ángulos iguales** y planteas la **igualdad** de sus **razones**.



$\frac{\overline{PR}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{MR}}{\overline{NQ}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{NP}}$ = **K** por lados homólogos de triángulos semejantes

• Seleccionas la igualdad de razones necesarias para terminar la demostración.

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{MR}}{\overline{NQ}}$$ se cumple.

Nota:

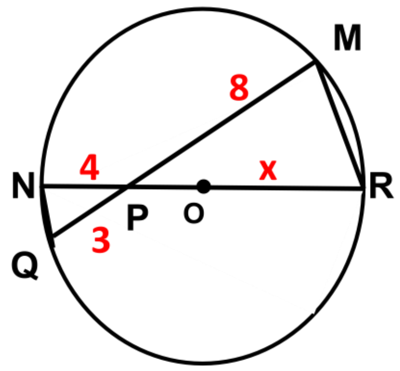
1. En este ejercicio se utiliza el teorema:

• En una **circunferencia** los **ángulos inscritos** sobre un **mismo arco** tienen **igual amplitud**.

2. Los ángulos **Q** y **R** también son **iguales** por el mismo teorema.

3. Además, nos apoyamos en los **ángulos opuestos por el vértice**, ya analizados anteriormente.

Solución b):



• Colocas los datos sobre la figura.

• Hay que hallar el **radio** del círculo, por lo que debemos calcular $\overline{PR}$, para adicionarlo a $\overline{NP}$.

• Como en los datos te brindan las **longitudes** de varios segmentos de los triángulos **semejantes**, te sugieren utilizar la **proporcionalidad** de los **lados homólogos**.

♦Calculas $\overline{PR}$:

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{NP}}$$ (seleccionas la proporción necesaria)

$$\frac{\overline{PR}}{3} = \frac{8}{4}$$ (sustituyes)

$$\overline{PR} = \frac{8.3}{4}$$ (despejas)

$\overline{PR}$ = **6 cm** (calculas)

♦Determinas el **radio** del círculo:

$\overline{NR}$ es un diámetro, luego

$\overline{NR} = \overline{NP} + \overline{PR}$ por suma de segmentos

$\overline{NR}$ = **4 cm** + **6 cm** = **10 cm**

r = $\frac{\overline{NR}}{2} = \frac{10\ cm}{2}$ = **5 cm**

♦Calculas el **área** del círculo:

$A_{círculo} = \pi \cdot r^2$

$A_{círculo} = 3{,}14 \cdot (5\ cm)^2 = 3{,}14\ .\ 25\ cm^2$

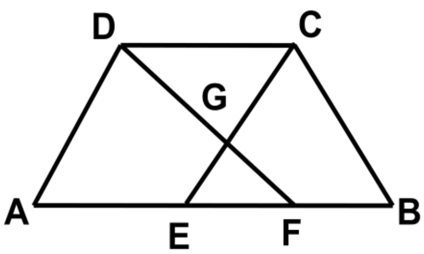
$A_{círculo} \approx 78{,}5\ cm^2$

R/ El área del círculo es de aproximadamente 79 cm^2.

Nota: Como los datos tiene **dos cifras**, la respuesta se redondea a **dos**.

Ejemplo 5

En la figura:



- ABCD es un trapecio de bases $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$.
- G punto de intersección de $\overline{DF}$ = $\overline{EC}$.
- E y F puntos de $\overline{AB}$.
- $\overline{DG}$ = 4,0 cm y $\overline{GF}$ = 20 mm.

a) Prueba que $\frac{\overline{DC}}{\overline{EF}}$ = 2.

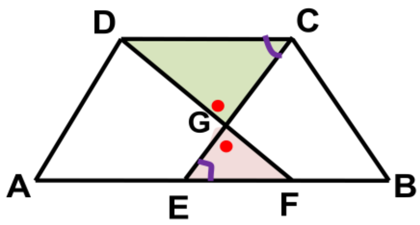
b) Si el área del $\triangle$DGC = 12 cm^2, calcula el área del $\triangle$EGF.

Solución a):

I. Tomamos los **triángulos** que contengan a dichos lados y probamos que son **semejantes**.

En los triángulos **DGC** y **EGF**:

♦ **∠DGC** = **∠EGF** por opuestos por el vértice.

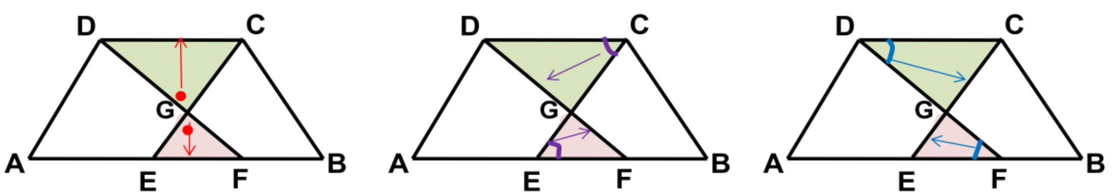


♦ **∠GFE** = **∠GEF** por ser alternos entre las paralelas $\overline{DC}$ y $\overline{AB}$ (por ser bases de un trapecio) y secante $\overline{CE}$.

△DGC ~ **△EGF**, por tener dos ángulos respectivamente iguales (a ; a).

II. Estableces la proporcionalidad:

• Analizas los **lados** que se **oponen** a **ángulos iguales** y planteas la **igualdad** de sus **razones**.



$\frac{\overline{DC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GE}}$ = **K** por lados homólogos de triángulos semejantes

• Seleccionas la igualdad de razones necesarias para terminar la demostración.

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{GF}}$$

20 mm = **2 cm**

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{EF}} = \frac{4\ cm}{2\ cm} = 2$$ se cumple.

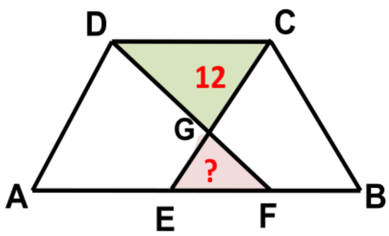
Nota:

1. Para la demostración nos apoyamos en los **ángulos opuestos por el vértice** y **alternos**.

2. Los ángulos **DCG** y **GFE** también son **alternos**, pero recuerda que con dos pares basta.

Solución b):

• Como los triángulos son semejantes, se cumple que:



• Conoces el **área** del **△DGC** y la **razón K**, ya que $\overline{DC}$ y $\overline{EF}$ son **lados homólogos** y su **razón** es **2**.

$$\frac{A(\Delta DGC)}{A(\Delta EGF)} = K^2$$

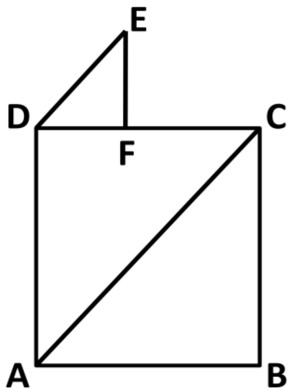
$$\frac{12\ cm^2}{A(\Delta EGF)} = 2^2 \rightarrow \frac{12\ cm^2}{A(\Delta EGF)} = 4$$

$$A_{\Delta}EGF = \frac{12\ cm^2}{4} = 3\ cm^2$$

R/ El área del **ΔEGF** es igual a **3,0 cm²**.

Ejemplo 6

En la figura:



- ABCD es un cuadrado y $\overline{AC}$ una diagonal.
- $\overline{AC}$ // $\overline{DE}$; $\overline{EF} \perp \overline{DC}$.
- F punto de $\overline{DC}$.

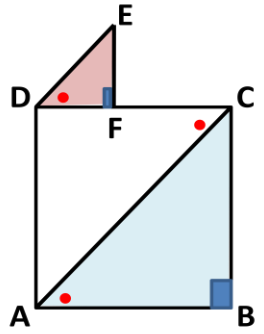
a) Prueba que $\frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{EF}}$.

b) Si $\overline{AB}$ = 6,0 dm y la razón de semejanza de los triángulos ABC y DEF es igual a 3, calcula el área de la figura.

Solución a):

I. Seleccionas los triángulos a utilizar, según los segmentos que están presentes en la relación a demostrar:

En los triángulos **ABC** y **DFE**:



∠**CAB** = ∠**ACD** por alternos entre las paralelas $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{DC}}$ con secante $\overline{AC}$.

∠**EDF** = ∠**ACD** por alternos entre las paralelas $\overline{\mathbf{DE}}$ y $\overline{\mathbf{AC}}$ con secante $\overline{DC}$.

♦Luego ∠**CAB** = ∠**EDF** por transitividad.

∠**B** = 90º por ángulo interior de un cuadrado.

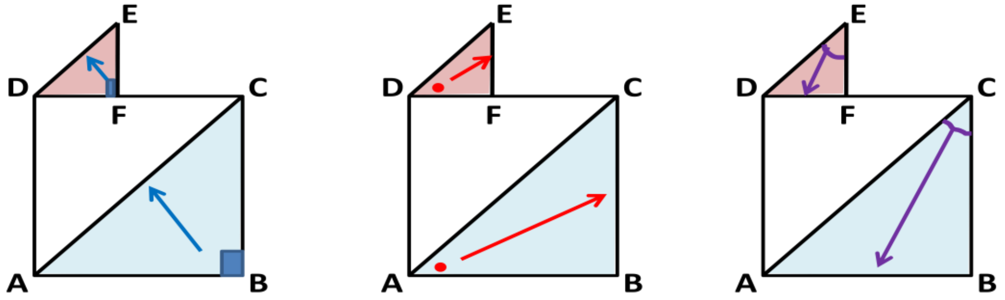
∠**EFD** = 90º por ser $\overline{EF} \perp \overline{DC}$.

∠**B** = ∠**EFD** por tener igual amplitud.

▵**ABC** ~ ▵**DFE**, por tener dos ángulos respectivamente iguales (a ; a).

II. Estableces la proporcionalidad:

• Analizas los **lados** que se **oponen** a **ángulos iguales** y planteas la **igualdad** de sus **razones**.



$\frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DF}}$ = **K** por lados homólogos de triángulos semejantes

• Seleccionas la igualdad de razones necesarias para terminar la demostración.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$ se cumple.

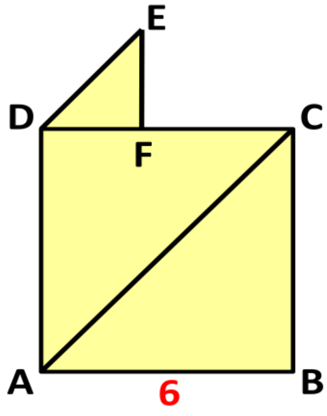
Nota:

1. Para realizar la demostración utilizamos como un elemento la **transitividad**, o sea, si un **ángulo** es **igual** a otros **dos ángulos**, estos serán **iguales** entre sí.

2. En lugar de la **transitividad**, también se puede utilizar el **teorema** de los **ángulos agudos de lados respectivamente paralelos**, descrito en el resumen de **Geometría Plana**, ya que $\overline{DE} // \overline{AC}$ por dato y $\overline{AB} // \overline{DC}$ por lados opuestos del cuadrado.

Solución b):

• La figura está compuesta por el **cuadrado ABCD** y el **△DFE** o por los **triángulos ABC**, **ADC** y **DFE**. Debes calcular sus **áreas** y **adicionarlas**.



• Planteas la fórmula de **área** de cada figura:

$A_{(ABCD)} = a^2$ y $A_{(\Delta DFE)} = \frac{\overline{DF}\,.\overline{FE}}{2}$

♦ Calculas el **área** del **cuadrado**:

$A_{(ABCD)} = a^2 = (6\ dm)^2 = 36\ dm^2$

♦ Calculas el **área** del **ΔDFE**:

No conoces las **longitudes** de $\overline{DF}$ y $\overline{FE}$, pero conoces la **razón de semejanza** y un lado de uno de los triángulos semejantes.

♦ Como $\overline{AB}$ = 6,0 dm y $\frac{\overline{AB}}{\overline{DF}}$ = 3, hallamos $\overline{DF}$ y $\overline{FE}$:

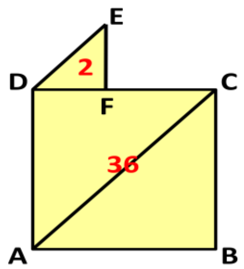
$\frac{\overline{AB}}{\overline{DF}} = 3 \rightarrow \frac{6\ dm}{\overline{DF}} = 3 \rightarrow \frac{6\ dm}{3} = \overline{DF} \rightarrow \overline{DF} = 2\ dm$

♦ Como el **ΔABC** es **isósceles** de base $\overline{AC}$, el **ΔDFE** semejante a él, también es **isósceles** de base $\overline{DE}$, luego $\overline{FE}$ = **2 dm**.

$A_{(\Delta DFE)} = \frac{\overline{DF}\,.\overline{FE}}{2} = \frac{2\ dm\ .\ 2\ dm}{2} = 2\ dm^2$

♦ Calculas el **área** de la **figura**:

$A_{(Figura)} = A_{(ABCD)} + A_{(\Delta DFE)}$



$A_{(Figura)} = 36\ dm^2 + 2\ dm^2$

$A_{(Figura)} = 38\ dm^2$

R/ El área de la figura es igual a **38 dm²**.

Nota: El **área** del **△DFE** también se puede hallar por la **razón** entre las **áreas** de **triángulos semejantes**, ya que conoces la **razón de semejanza** y el **área** del **△ABC** es la **mitad** del **área** del **cuadrado**.

Conclusión:

Como ves, existen infinidad de ejercicios sobre **semejanza de triángulos** y en cada uno se utilizan diversas **justificaciones** para la **relación** entre **elementos**, por lo que **no es posible** aprendérselos de memoria.

Es necesario, como ya explicamos, **reconocer** los **teoremas** y **dominar** las **propiedades** de las figuras planas.

Ten en cuenta en cada ejercicio algunas de las siguientes ideas:

1. Si hay en los datos **cuadrados**, **rectángulos**, **triángulos**, **rombos**, etc, pensar en las **propiedades** de dichas figuras.

2. Si hay en los datos una **circunferencia,** pensar en las **propiedades** relativas a **ángulos**, **cuerdas**, **arcos**, etc.

3. Si hay en los datos rectas **paralelas**, pensar en los **ángulos** entre **paralelas**, específicamente los **alternos** y los **correspondientes**.

4. Si te piden la **relación** entre **segmentos**, primero **identifica** los triángulos a seleccionar y luego realizas la **demostración** de la semejanza, **escribes** la **proporcionalidad** y **analizas** cómo llegar a lo que se pide. Ten en cuenta que en ocasiones hay realizar un **cambio de segmentos** como en **ejemplo 3**.

5. En los ejercicios de **cálculo** de **áreas** y **perímetros**, ten en cuenta las **relaciones** que se establecen para **triángulos semejantes**.

6. Recuerda que la **proporcionalidad** no solo se utiliza para **demostrar relaciones**, sino también para realizar **cálculos de segmentos** y la **razón de semejanza**.

Existen otras muchas ideas, pero es imposible abarcarlas todas, por lo que el mayor consejo para aprender a **demostrar** la **semejanza** de dos triángulos es **resolver** la mayor cantidad de **ejercicios** y apoyarte en los **medios** que tienes a tu disposición como el **libro de texto**, los **resúmenes** y los **ejercicios** aplicados en evaluaciones anteriores.