Resumen sobre trigonometría para 12mo grado

Para satisfacer los pedidos de nuestros estudiantes de 12mo grado y contribuir con una mayor preparación con vistas al examen de ingreso a la Educación Superior, nuestra empresa CINESOFT ha elaborado este resumen de trigonometría.

Este material te servirá como un complemento a las clases televisivas, junto a tu libro de texto y otros materiales.

En él se incluye la tabla que como ya conoces se te da en la prueba, por lo que no es necesario que la memorices, sin embargo, pensamos te ayudará a consultarla para resolver los ejercicios de los materiales que utilizas.

Además, te ofrecemos algunos consejos y recomendaciones que no aparecen generalmente en los textos.

Rogamos nos disculpes cualquier imprecisión y la hagas llegar a nosotros para hacer la corrección inmediatamente.

Esperamos que te sea útil para enfrentar cualquier ejercicio de trigonometría y en cualquier formato de pregunta.

Autores: MSc . Jesús Cantón Arenas

MSc. Mirta Capote Jaume

Trigonometría

Para resolver ejercicios sobre **trigonometría** es necesario el dominio de varios aspectos esenciales como:

1. Tabla trigonométrica.

2. Fórmulas de reducción de los cuadrantes.

3. Los signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante.

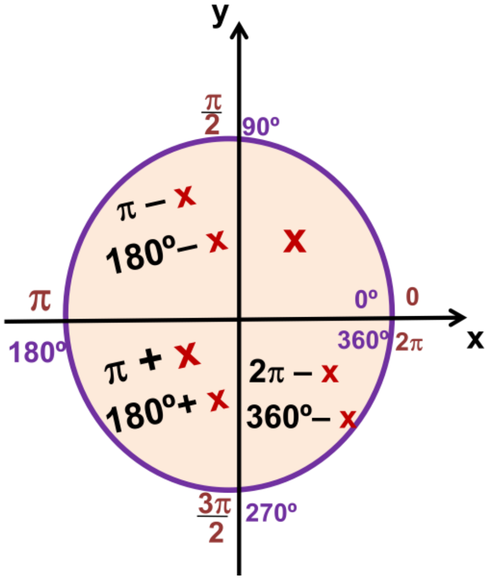
4. Las identidades trigonométricas.

Tabla trigonométrica

	0^0 0	30^o $\frac{\pi}{6}$	45^o $\frac{\pi}{4}$	60^o $\frac{\pi}{3}$	90^0 $\frac{\pi}{2}$	180^0 π	270^0 $\frac{3\pi}{2}$	360^0 2π
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
cot x	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Nota: La tabla aparece en la Prueba de Ingreso.

Fórmulas de reducción



Nota: **El ángulo x en cada fórmula de reducción es un ángulo del primer cuadrante.**

Signos de las razones trigonométricas

	I C	II C	III C	IV C
seno	+	+	–	–
coseno	+	–	–	+
tangente	+	–	+	–
cotangente	+	–	+	–

Nota: Ten en cuenta que las razones trigonométricas son positivas en dos cuadrantes y negativas en otros dos. También la tabla te ayuda a recordar los signos de las funciones trigonométricas en el intervalo principal y viceversa.

Fórmulas de reducción

Si ***x*** es un ángulo **agudo**, se cumple que:

I **Cuadrante**	II **Cuadrante**	III **Cuadrante**	IV **Cuadrante**
$\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$	$\mathrm{sen}(\pi - x) = \mathrm{sen}\, x$	$\mathrm{sen}(\pi + x) = -\mathrm{sen}\, x$	$\mathrm{sen}(2\pi - x) = -\mathrm{sen}\, x$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \mathrm{sen}\, x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\cos(2\pi - x) = \cos x$
$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$	$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$	$\tan(2\pi - x) = -\tan x$
$\cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$	$\cot(\pi - x) = -\cot x$	$\cot(\pi + x) = \cot x$	$\cot(2\pi - x) = -\cot x$

Nota:

Para aprenderte la tabla ten en cuenta que:

1. Cuando el **argumento** de las razones trigonométricas es $\frac{\pi}{2} - x$, en el resultado se cambia la razón trigonométrica y todas son **positivas**.

2. Cuando en el **argumento** aparece la **fórmula de reducción** de los cuadrantes II, III o IV, como en las columnas 2, 3 y 4, se **mantiene** la misma razón trigonométrica, a diferencia de la columna 1, pero se analiza el **signo** de dicha razón en ese cuadrante.

3. Estas fórmulas se cumplen también cuando el segundo término en el **argumento** es otro ángulo. Por ejemplo:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \mathbf{2x}\right) = \cos \mathbf{2x}$$

4. Los argumentos de las razones trigonométricas pueden aparecer en **grados** o **radianes**.

Identidades trigonométricas

Las **identidades trigonométricas** son igualdades que se cumplen para todos los valores admisibles y se utilizan, entre otras cosas, para realizar **demostraciones** y resolver **ecuaciones trigonométricas**.

Identidad fundamental trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \qquad \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Identidades del ángulo duplo:

$$\text{sen}2x = 2\text{sen}x\cdot\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$
$$= 1 - 2\text{sen}^2 x$$

Identidades para ángulos negativos

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}\ x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\cot(-x) = -\cot x$$

Fórmulas de adición

$$\text{sen}(x \pm y) = \text{sen}\ x\cdot\cos y \pm \cos x\cdot\text{sen}\ y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x\cdot\cos y \mp \text{sen}\ x\cdot\text{sen}\ y$$

Comentarios:

1. La identidad $\operatorname{sen}^2x + \cos^2x = 1$ se cumple siempre que el argumento en ambas razones sea el **mismo**.

Ejemplo: $\operatorname{sen}^2 90^o + \cos^2 90^o = 1$

$\operatorname{sen}^2 12^o + \cos^2 12^o = 1$

$\operatorname{sen}^2(3y) + \cos^2(3y) = 1$

$\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$

2. Las identidades **tan x** y **cot x** si aparecen elevadas a una **potencia** se elevan a esa potencia tanto el numerador como el denominador de la fracción.

Ejemplo: $\tan^2x = \frac{\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x}$

3. Las identidades $\mathbf{1 + \tan^2x}$ y $\mathbf{1 + \cot^2x}$ si se te olvidan se pueden deducir de esta manera:

$$1 + \tan^2x = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x} = \frac{\cos^2x + \operatorname{sen}^2x}{\cos^2x} = \frac{1}{\cos^2x}$$

$$1 + \cot^2x = 1 + \frac{\cos^2x}{\operatorname{sen}^2x} = \frac{\operatorname{sen}^2x + \cos^2x}{\operatorname{sen}^2x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2x}$$

4. Como la identidad para el **sen2x** es igual a un producto de tres factores, en los ejercicios aparece frecuentemente acompañada de multiplicaciones o divisiones con la **tangente**, la **cotangente** y **otras** expresiones, con el objetivo de simplificar y reducir el ejercicio.

Ejemplo:

- $\frac{1}{2}\text{sen}2x\cdot\tan x = \frac{1}{2}\cdot 2\,\text{sen}x\cdot\cos x\cdot\frac{sen\,x}{\cos x} = \textbf{sen}^2\textbf{x}$
- $\frac{sen2x}{2\cot x} = \frac{2senx\cdot cosx}{2\frac{\cos x}{sen\,x}} = \text{sen x}\cdot\textbf{cos x}\cdot\frac{sen\,x}{\cos x} = \textbf{sen}^2\textbf{x}$

5. De la identidad **$\cos 2x = \cos^2x$ – sen^2x** se obtienen las otras dos, a partir de los despejes realizados en la **identidad fundamental**.

Ejemplos:

$\cos 2x = \cos^2x - \text{sen}^2x$	$\cos 2x = \cos^2x - \text{sen}^2x$
$= \cos^2x - (1 - \cos^2x)$	$= 1 - \text{sen}^2x - \text{sen}^2x$
$= \cos^2x - 1 + \cos^2x$	$= 1 - 2\text{sen}^2x$
$= 2\cos^2x - 1$	

♦Ten en cuenta al sustituir **cos2x** por **$\cos^2x - \text{sen}^2x$** que estás en presencia de una **diferencia de cuadrados**, luego si en el ejercicio aparecen **fracciones**, debes tener presente la posibilidad de **factorización** para simplificar.

Ejemplo: $\frac{\cos 2x}{\cos x + \text{sen}\,x} = \frac{cos^2x - sen^2x}{\cos x + \text{sen}\,x} =$

$= \frac{(\cos x + sen\,x)(\cos x - sen\,x)}{\cos x + \text{sen}\,x} = \cos x - \text{sen } x$

6. Las identidades para **sen2x** y **cos2x** las debes reconocer en cualquier contexto, ya que te pueden aparecer también en ejercicios de formato diverso.

Ejemplos: Verifica si son ciertas las siguientes igualdades:

♦ **2sen15º·cos15º** = $\frac{1}{2}$.

Esta igualdad es cierta, ya que el miembro izquierdo representa la identidad del **seno** del **ángulo duplo**, solo que aquí el argumento es **15º**.

Luego si sen2**x** = 2sen**x**·cos**x**, entonces

2sen15º·cos15º = sen(2·**15º**) = sen **30º** = $\frac{1}{2}$

♦ **2sen $\frac{x}{2}$·cos $\frac{x}{2}$ = sen x**

En este ejemplo el miembro izquierdo también representa la identidad del **seno** del **ángulo duplo**, solo que aquí el argumento es $\frac{x}{2}$.

2sen $\frac{x}{2}$·cos $\frac{x}{2}$ = sen (2·$\frac{x}{2}$) = **sen x**

♦ **1 – 2sen²15º** = $\frac{1}{2}$.

Esta igualdad **no es cierta**, ya que el miembro izquierdo representa una de las identidades del **coseno** del **ángulo duplo**, solo que aquí el argumento es **15º**.

Luego si cos2**x** = **1 – 2sen²x** , entonces

1 – 2sen²15º = **cos**(2·**15º**) = **cos 30º** = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

♦ **cos²3x – sen²3x = cos 6x**

Esta igualdad **es cierta**, ya que el miembro izquierdo representa la identidad principal del **coseno** del **ángulo duplo**, solo que aquí el argumento es **3x**.

Luego si $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, entonces

$$\cos^2 3x - \text{sen}^2 3x = \cos 2(3x) = \cos 6x$$

7. Las identidades para los **ángulos negativos** las puedes asociar con la **paridad** de las funciones trigonométricas. Recuerda que el **coseno** es **par** y las otras tres son **impares**.

8. Las fórmulas de **adición** son útiles para obtener las identidades de la tabla mostrada más arriba sobre las **fórmulas de reducción** de los cuadrantes.

Ejemplos:

♦ En esa tabla aparece en la primera columna que

$$\text{sen}(90^\circ - x) = \cos x.$$

Si no la recuerdas aplicas la fórmula de **adición** de esta manera:

$$\text{sen}(90^\circ - x) = \text{sen}\,90^\circ \cdot \cos x - \cos 90^\circ . \text{sen}\, x$$

como $\text{sen}\,90^\circ = 1$ y $\cos 90^\circ = 0$, entonces:

$$\text{sen}(90^\circ - x) = 1 \cdot \cos x - 0 . \text{sen}\, x$$

$$\text{sen}(90^\circ - x) = \cos x$$

♦ En esa tabla aparece en la cuarta columna que

$$\cos(2\pi - x) = \cos x.$$

Si no la recuerdas aplicas la fórmula de **adición** de esta manera:

$\cos(2\pi - x) = \cos 2\pi \cdot \cos x - \text{sen } 2\pi . \text{sen } x$

como **$\text{sen } 2\pi = 0$** y **$\cos 2\pi = 1$**, entonces:

$\cos(2\pi - x) = 1 \cdot \cos x - 0 . \text{sen } x$

$\cos(2\pi - x) = \cos x$.

(Coincidirás con nosotros, que es preferible aprenderse la tabla)

También estas fórmulas son útiles para el **cálculo**:

♦ Comprueba que:

$$\cos 100^\circ \cdot \cos 10^\circ + \text{sen} 100^\circ \cdot \text{sen} 10^\circ = 0$$

Esta igualdad es cierta, ya que en el miembro izquierdo se puede aplicar la fórmula **$\cos(x - y)$**, ya que es una adición.

Como **$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \text{sen} x \cdot \text{sen} y$**

Luego, $\cos 100^\circ \cdot \cos 10^\circ + \text{sen} 100^\circ \cdot \text{sen} 10^\circ$

$$= \cos(100^\circ - 10^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$

♦ Calcula sen **75º**

$\text{sen } 75^\circ = \text{sen}(30^\circ + 45^\circ)$

$= \textbf{sen}30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot \text{sen} 45^\circ$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \approx 0{,}35 + 0{,}61 \approx 0{,}96$$

Cálculo trigonométrico

Consejos útiles:

Para realizar **cálculos trigonométricos**, debes tener en cuenta **tres casos**:

1. Si el ángulo al que se le hallará la razón trigonométrica es **axial** o **notable**, se busca directamente en la **tabla**.

Ejemplo: sen 30º = $\frac{1}{2}$ o $\tan \frac{\pi}{4} = 1$

2. Si el ángulo al que se le hallará la razón trigonométrica está en los cuadrantes II ; III o IV, se realizan **tres** acciones:

- Se ubica el cuadrante del ángulo.
- Se aplica la **fórmula de reducción** de ese cuadrante, para buscar su equivalente en la tabla.
- Se analiza el **signo** de la razón trigonométrica en ese cuadrante.

Ejemplos:

♦ $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

- $\frac{5\pi}{3} \in \mathrm{IV}$ cuadrante.
- **Fórmula de reducción:** $2\pi - x = \frac{5\pi}{3} \rightarrow x = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$
- **seno negativo**

♦ tan 210º = **tan 30º** = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

• **210º**$\in$III cuadrante.

• **Fórmula de reducción: 180º + x** = 210º → **x** = 210º –180º = 30º

• **tangente positiva**

3. Si el ángulo al que se le hallará la razón trigonométrica

es **mayor que 360º**, se realizan **dos** acciones:

Si está en grados:

• Se **divide** el ángulo por 360º y se toma el **resto**.

• Depende del resto obtenido se aplica el procedimiento **1** o el **2**.

Ejemplos:

♦ cos **450º** = cos **90º** = **0**

$$\begin{array}{r|l} 450^\circ & 360^\circ \\ \cline{2-2} 360^\circ & \;1 \\ \hline 90^\circ & \end{array}$$

♦ tan **855º** = tan **135º** = **–** tan **45º** = **– 1**

$$\begin{array}{r|l} 855^\circ & 360^\circ \\ \cline{2-2} 720^\circ & \;2 \\ \hline 135^\circ & \end{array}$$

• **135º**$\in$II cuadrante.

• **Fórmula de reducción: 180º** – **x** = 135º → **x** = 180º **– 135º** = 45º

• **tangente negativa**

Si está en radianes:

● Se **sustrae** 2π o un múltiplo de 2π hasta que que se obtenga un ángulo de la primera vuelta.

● Depende del resultado obtenido se aplica el procedimiento **1** o el **2**.

♦ sen 5π = sen π = 0 $\quad\quad$ $5\pi - 4\pi = \pi$

♦ $\cos \frac{8\pi}{3} = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{8\pi}{3} > 2\pi$, luego $\frac{8\pi}{3} - 2\pi = \frac{2\pi}{3}$

● $\frac{2\pi}{3} \in \mathrm{II}$ cuadrante.

● **Fórmula de reducción:** $\pi - x = \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

● **seno positivo**

Resolución de ecuaciones

Para resolver **ecuaciones trigonométricas**, estas deben estar en función de **una sola** razón trigonométrica y con un **mismo** argumento. En caso contrario, debes llevarla a esa condición aplicando las **identidades trigonométricas** estudiadas.

Sin embargo, hay algunas ecuaciones que se pueden resolver con más de una razón trigonométrica, si estas se pueden **separar**, por ejemplo:

sen x·**cos x** + 2**cos x** = 0, en la que se puede extraer factor común

cos x(**sen x** + 2) = 0 y quedan las ecuaciones

cos x = 0 y **sen x** = – 2, que pueden resolverse perfectamente.

¿Y cómo resolver estas ecuaciones obtenidas?

1. Al resolver ecuaciones del tipo **sen x = a** y **cos x = a**,

♦ si **a** = **– 1; 0; 1**, las soluciones se buscan en la **tabla**.

Ejemplos:

sen x = **0** cos x = **– 1** sen x = **1**

x = 0, π, 2π x = π $x = \frac{\pi}{2}$

♦ si **a** es una fracción, tal que **– 1< a < 1**, la ecuación tiene **dos soluciones principales**, que se obtienen buscando los **dos cuadrantes** donde esa razón es **positiva** o **negativa**.

Ejemplos:

$\text{sen } x = \frac{1}{2}$

seno positivo en IC y IIC

IC: $x = \frac{\pi}{6}$

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

coseno negativo en IIC y IIIC

IIC: $\pi - x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

IIC: $\pi - x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

IIIC: $\pi + x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

♦ si **a > 1** o **a < – 1** la ecuación **no tiene solución**.

sen x = **3**	cos x = **– 6**
Imposible	**Imposible**
– 1 ≤ sen x ≤ 1	**– 1 ≤ cos x ≤ 1**

2. Al resolver las ecuaciones del tipo **tan x = a** y **cot x = a**, las soluciones principales **siempre** se buscan en los **dos cuadrantes** donde estas razones son **positivas** o **negativas** según la ecuación.

Ejemplos:

tan x = **1**	cot x = **–** $\sqrt{3}$
tangente (**+**) en **IC** y **IIIC**	**cotangente** (**–**) en **IIC** y **IVC**
IC: **x** = $\frac{\pi}{4}$	**IIC**: $\pi - x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$
IIC: $\pi - x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$	**IVC**: $2\pi - x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

3. Al escribir la respuesta en las ecuaciones:

♦ si tienen intervalo de restricción para los ángulos en el enunciado, **no se suma** a las soluciones halladas los ángulos **coterminales**.

♦ en caso contrario, a las ecuaciones con **seno** y **coseno** se adiciona a cada solución:

360ºk; k∈Z o **2kπ; k∈Z**,

y para la **tangente** y **cotangente**, se adiciona:

180ºk, k∈Z o **kπ; k∈Z**.

4. Existen ecuaciones cuyas **soluciones** se pueden **agrupar**, por ejemplo:

♦ **sen x = 0**, para x = **0** ; x= π ; x=**2**π en el intervalo principal. Luego, de manera general el **seno** es igual a cero para los **múltiplos** de π, lo que puede escribirse agrupado de esta manera: **k**π; **k**∈Z.

♦ **cos x = 1**, para x = **0** ; x=**2**π en el intervalo principal. Luego, de manera general el **coseno** es igual a uno para los **múltiplos** de 2π, lo que puede escribirse agrupado de esta manera: **2k**π; **k**∈Z.

♦ **cos x = 0**, para x = $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$ en el intervalo principal. Luego, de manera general el **coseno** es igual a cero para los **múltiplos impares** de $\frac{\pi}{2}$, lo que puede escribirse agrupado de esta manera: (**2k+1**) $\frac{\pi}{2}$; **k**∈Z.

Nota: Esto solo se hace cuando no hay intervalo para la ecuación que resuelves, si hay restricción solo se analiza si cada solución está dentro del intervalo.

Demostración de identidades

Para realizar demostraciones, no existe un algoritmo general, pero te damos algunos consejos.

1. Comienza a trabajar en el miembro que **más posibilidades** tenga para desarrollar. En algunas ocasiones es necesario trabajar en **ambos miembros**.

2. No se puede arrastrar la **igualdad** en cada paso, trabajas en cada miembro por separado y al final los comparas.

3. Si en la demostración hay **operaciones indicadas**, como paréntesis, operaciones con fracciones, etc, valora la posibilidad de realizarlas primero y sustituir identidades después o si es conveniente primero sustituir las identidades y reducir la expresión después.

4. Si en la demostración hay **fracciones**, ten en cuenta la posibilidad de simplificarlas, previa factorización o aplicar las **operaciones** estudiadas.

Consejos Generales

♦En la **resolución de ecuaciones** y en las **demostraciones** es necesario el dominio por ti, en otros aspectos de:

1. Las identidades trigonométricas.

2. Las operaciones con expresiones algebraicas.

3. Los productos notables.

4. La descomposición factorial.

5. La simplificación de fracciones.

♦En la **resolución de ecuaciones** y en las **demostraciones** valora las ideas siguientes:

1. Sustituye primero, si existen, las identidades relacionadas con **sen2x**, **cos2x**, **tan x** y **cot x** y reduces la expresión. Luego analizas qué hacer si quedan términos con **sen^{2}x** o **cos^{2}x**.

2. Si tienes una identidad **repetida** dos veces, valora la posibilidad de extraer factor común para cambiarla una sola vez.

Ejemplo: $\tan^2 x - \tan^2 x \cdot \text{sen}^2 x$

$= \tan^2 x(1 - \text{sen}^2 x)$

$= \frac{sen^2 x}{cos^2 x} \cdot \cos^2 x$

$= \text{sen}^2 x$