ÍNDICE

Introducción

El presente libro está confeccionado teniendo en cuenta las materias curriculares de la Educación Media General respecto a la Geometría Plana y del Espacio, no obstante a esto, no responde a un programa determinado.

Está estructurado en dos Capítulos, uno sobre la Geometría del Plano y otro sobre la Geometría del Espacio o Estereometría. En cada uno de ellos se relacionan algunos de los conceptos, propiedades y teoremas de esta rama de la Matemática y una colección de ejercicios propuestos.

El objetivo que se persigue con este libro es que el estudiante de la Educación Media Superior, una vez conocidos los conceptos, relaciones y teoremas de la Geometría, los aplique como un todo en la resolución de ejercicios de demostración y cálculo geométrico, es decir, que se utilicen integralmente estos conocimientos en la resolución de ejercicios que no tienen carácter algorítmico.

Los ejercicios que se proponen responden a esta intención, o sea, para la resolución de estos se deben conocer los conceptos, propiedades y teoremas de la Geometría, y las estrategias de trabajo de estos tipos de ejercicios y ante la propuesta de cada uno de ellos analizar estos conocimientos de forma integral, es por eso que no se separan por materias específicas.

Nuestro Apóstol dijo: “El pueblo más feliz es el que tenga mejor educados a sus hijos, en la instrucción del pensamiento, y en la dirección de los sentimientos”.

Me sentiría muy feliz si con este modesto libro contribuyo a tu desarrollo en el trabajo con la Geometría.

El Autor.

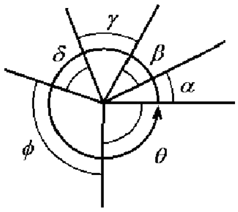
Capítulo 1. Geometría plana

1. Propiedades de las figuras planas.

En los subepígrafes siguientes veremos algunas de las propiedades y relaciones métricas de la geometría Plana más utilizadas en la resolución de ejercicio.

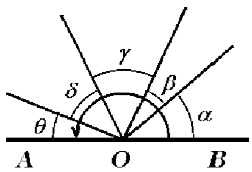
1.1 Ángulos.

- Los ángulos alrededor de un punto suman 360º. (figura 1.1)
- Los ángulos alrededor de un punto y a un mismo lado de una recta suman 180º. (figura 1.2).
- Los ángulos adyacentes son aquellos que tiene un lado común y el otro lado son semirrectas opuestas y suman 180º. (figura 1.3)



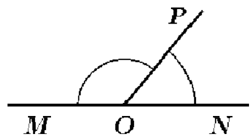
$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \phi + \theta = 360°$

Fig. 1.1



$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \theta = 180°$

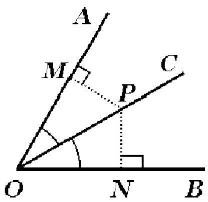
Fig. 1.2



$\angle MOP + \angle NOP = 180°$

Fig. 1.3

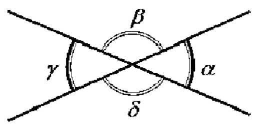
- La bisectriz de un ángulo divide a este en dos ángulos iguales y cumple la propiedad de que todo punto P de la bisectriz equidista de los lados del ángulo (figura 1.4).
- Las bisectrices de los ángulos adyacentes son perpendiculares.
- Al cortarse dos rectas se forman ángulos adyacentes y opuestos por el vértice. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales. (figura 1.5)



OC: bisectriz del $\angle AOB$

$\angle AOC = \angle BOC \qquad \overline{MP} = \overline{NP}$

Fig. 1.4



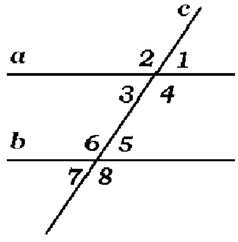
opuestos por el vértice

$\alpha = \gamma$ y $\beta = \delta$

Fig. 1.5

- Si dos ángulos agudos u obtusos tienen sus lados respectivamente paralelos entonces son iguales. Si uno es agudo y el otro es obtuso suman 180º.
- Si dos ángulos agudos u obtusos tienen sus lados respectivamente perpendiculares entonces son iguales. Si uno es agudo y el otro es obtuso suman 180º.

• Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante se forman ángulos alternos iguales, correspondientes iguales y conjugados que suman 180º. (figura 1.6)
Alternos: ∠1 y ∠7, ∠2 y ∠8, ∠3 y ∠5, ∠4 y ∠6.
Correspondientes: ∠1 y ∠5, ∠2 y ∠6, ∠3 y ∠7, ∠4 y ∠8.
Conjugados: ∠1 y ∠8, ∠2 y ∠7, ∠3 y ∠6, ∠4 y ∠5.
• Si dos rectas a y b son cortadas por una secante c y se forman ángulos alterno iguales o correspondientes iguales o conjugados que suman 180º las rectas a y b son paralelas. (Teorema recíproco del teorema de ángulos entre paralelas).



a||b , c: secante
Fig. 1.6

1.2 Triángulos.
• Para que exista un triángulo se he de cumplir la desigualdad triangular que plantea: En todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos lados y mayor que su diferencia.
• La suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180º. **($\alpha + \beta + \gamma = 180º$)**. (figura 1.7)
• Un ángulo exterior de un triángulo (δ) (figura 1.7) está formado por un lado del triángulo y la prolongación del otro lado y es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él **($\delta = \alpha + \gamma$)**. En todo triángulo existen 6 ángulos exteriores iguales dos a dos y suman 360º.

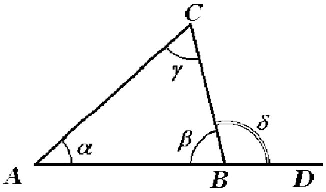
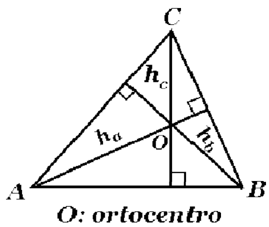


Fig. 1.7

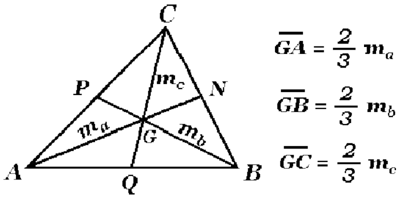
• Los triángulos se clasifican:
- <u>según sus lados en</u>: **escaleno** (todos los lados desiguales), **isósceles** (dos lados iguales) o **equilátero** (sus tres lados iguales).
- <u>según sus ángulos en</u>: **acutángulo** (todos sus ángulos son agudos), **rectángulo** (tiene un ángulo recto) u **obtusángulo** (tiene un ángulo obtuso).

• Las rectas notables del triángulo son la altura, mediana, mediatriz y la bisectriz.
<u>Altura de un triángulo</u>: es el segmento de perpendicular trazado desde un vértice hasta el lado opuesto. Se denota por una h minúscula con un subíndice que indica el lado al cual es trazada. En todo triángulo existen tres alturas que se intersecan en un punto llamado Ortocentro. (figura 1.8).



O: ortocentro
Fig. 1.8

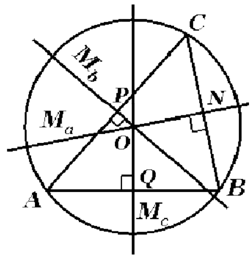
<u>Mediana de un triángulo</u>: es el segmento trazado desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto. Se denota por una m minúscula con un subíndice que indica el lado al cual es trazada. En todo triángulo existen tres medianas que se intersecan en un punto llamado Baricentro (figura 1.9) y cumple las propiedades de ser el centro de gravedad del triángulo y su distancia



G: baricentro
Fig. 1.9

los vértices es dos tercios de la longitud de la mediana correspondiente.

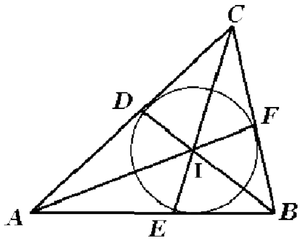
<u>Mediatriz en el triángulo</u>: es la recta perpendicular en el punto medio de cada lado del triángulo. Se denota por una M mayúscula con un subíndice que indica el lado al cual es trazada. En todo triángulo existen tres mediatrices que se intersecan en un punto llamado Circuncentro (figura 1.10) y cumple la propiedad de ser el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



O: circuncentro

Fig. 1.10

<u>Bisectriz en el triángulo</u>: se llama bisectriz de un ángulo interior de un triángulo al segmento de bisectriz de dicho ángulo trazado desde el vértice hasta el punto en que corta al lado opuesto. En todo triángulo existen tres bisectrices que se intersecan en un punto llamado Incentro (figura 1.11) y cumple la propiedad de ser el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo. (circunferencia tangente a los lados del triángulo).



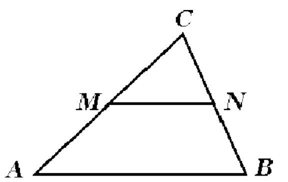
I: incentro

Fig. 1.11

• En todo triángulo isósceles los ángulos adyacentes a la base (lado desigual) son iguales y la altura respecto a la base coincide con la mediana y mediatriz relativas a ese lado y la bisectriz del ángulo que se le opone (ángulo principal). Los puntos notables quedan alineados sobre la altura.

• En todo triángulo equilátero sus ángulos interiores miden 60º y las alturas, medianas, mediatrices relativas a cada lado y las bisectrices de sus ángulos coinciden al igual que los puntos notables ortocentro, baricentro, circuncentro e incentro.

• Se llama paralela media de un triángulo al segmento de paralela trazado a un lado del triángulo por los puntos medios de los otros dos lados y su longitud es igual a la mitad del lado al que está trazado (figura 1.12).



$\overline{MN}$*: paralela media al lado* $\overline{AB}$

$\overline{MN} = \frac{1}{2}\ \overline{AB}$

Fig. 1.12

• Igualdad de triángulos.

Dos triángulos son iguales si tiene respectivamente iguales sus tres lados y sus tres ángulos.

<u>Criterios de igualdad de triángulos</u>

- En <u>todo triángulo</u> se cumple:

  Dos triángulos cualesquiera son iguales si tienen respectivamente iguales:
  sus tres lados, o
  dos lados y el ángulo comprendido, o
  un lado y los ángulos adyacentes a ese lado.

- En todo <u>triángulo rectángulo</u> se cumple:

  Dos triángulos rectángulos son iguales si tienen respectivamente iguales:

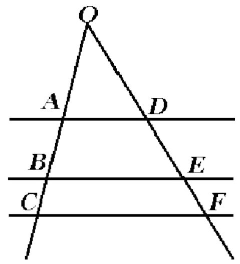
los dos catetos, o
un cateto y la hipotenusa, o
un cateto y un ángulo agudo, o
la hipotenusa y un ángulo agudo.

- Segmentos proporcionales. Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ son proporcionales si la razón (cociente) entre sus longitudes son iguales. Simbólicamente: Si $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$ entonces los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ son proporcionales.

- Teorema de las transversales.

Si un haz de semirrectas de origen común son cortadas por varias rectas paralelas se cumple que la razón entre dos segmentos de una de ellas es igual a la razón entre los dos correspondientes en la otra. (figura 1.13).

Nota: Este teorema también se cumple entre un segmento de la transversal y su correspondiente segmento de paralela, o sea, $\frac{\overline{OA}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BE}}$.



$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OE}} \quad ; \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

y otros más

Fig. 1.13

- Recíproco del Teorema de las transversales.

Si un haz de semirrectas de origen común son cortadas por varias rectas de forma tal que la razón entre los segmentos de una de ellas es igual a la razón entre los segmentos correspondiente en la otra, entonces las rectas son paralelas.

- En todo triángulo la bisectriz de un ángulo interior divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados del triángulo. En la figura 1.11 respecto a la bisectriz $\overline{CE}$ esta propiedad se expresaría simbólicamente:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

- Semejanza de triángulos.

Dos triángulos son semejantes si tienen respectivamente proporcionales sus tres lados y sus tres ángulos iguales.

<u>Teorema fundamental de la semejanza de triángulos</u>. Toda recta paralela a un lado de un triángulo, forma con los otros dos lados (o sus prolongaciones) otro triángulo que es semejante al triángulo dado.

En la figura 1.13 para el ΔOBE, AD || $\overline{BE}$ luego $\Delta OBE \sim \Delta OAD$.

<u>Criterios de semejanza de triángulos</u>

- En <u>todo triángulo</u> se cumple:
  - Dos triángulos cualesquiera son semejantes si tienen respectivamente:
    iguales dos ángulos, o
    proporcionales dos lados e igual el ángulo comprendido entre esos lados, o
    proporcionales sus tres lados.
  - En todo <u>triángulo rectángulo</u> se cumple:
    Dos triángulos rectángulos son semejantes si tiene respectivamente:

iguales un ángulo agudo, o
proporcionales sus catetos, o
proporcionales la hipotenusa y un cateto.

- Relaciones métricas en los triángulos.

- En todo triángulo rectángulo se cumple:

Teorema de Pitágoras: El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos **($c^2 = a^2 + b^2$)** (figura1.14).

Teorema de la altura: El cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de los segmentos que esta determina sobre la hipotenusa **($h^2 = p \cdot q$)** (figura 1.14)

Teorema de los catetos: El cuadrado de cada cateto es igual al producto de la hipotenusa por su proyección sobre la hipotenusa **($a^2 = c \cdot p$; $b^2 = c \cdot q$)** (figura 1.14).

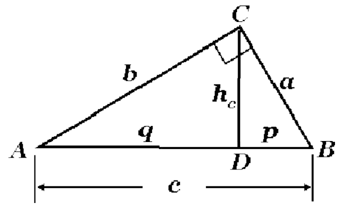


Fig. 1.14

Las razones trigonométricas (figura 1.15):

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c} ; \left(\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \right) ;$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} ; \left(\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \right)$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} ; \left(\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \right)$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} ; \left(\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} \right)$$

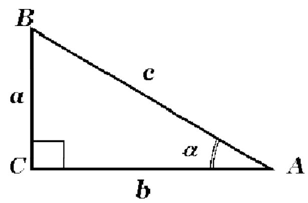
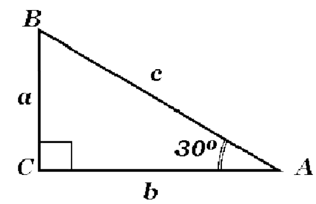


Fig. 1.15

Si en un triángulo rectángulo existe un ángulo de 30º se cumple que la longitud de la hipotenusa es el doble del cateto opuesto a ese ángulo y el cateto adyacente al ángulo de 30º es $\sqrt{3}$ por el cateto opuesto (figura 1.16).



$c = 2a$; $b = \sqrt{3}a$

Fig. 1.16

- En todo triángulo se cumple:

La Ley de los senos: En todo triángulo la razón entre la longitud de un lado y el seno del ángulo opuesto a ese lado es constante e igual al diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

$$\left(\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma} = 2r \right) \text{ (figura 1.17).}$$

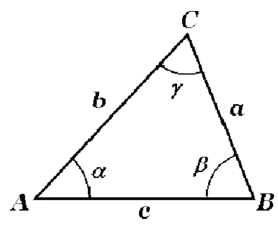


Fig. 1.17

La ley de los cosenos: En todo triángulo el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el duplo del producto de esos lados por el coseno del ángulo comprendido. **($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$)**(figura 1.17)

- Área de un triángulo cualquiera: A = $\frac{1}{2}$b·h ; A = $\frac{1}{2}$ab sen γ.
- Área del triángulo equilátero: A = $\frac{\sqrt{3}}{4}\, l^2$ (l: lado del triángulo).
- Área del triángulo rectángulo: A = $\frac{1}{2}$a·b (a y b catetos)
- Perímetro del triángulo: P = a + b + c

1.3 Cuadriláteros

• La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es de 360º.

• Los cuadriláteros se clasifican en cuadriláteros convexos o cóncavos (no convexo).

• Los cuadriláteros convexo se clasifican según el paralelismo de sus lados en: **paralelogramo** (los dos pares de lados opuestos paralelos), **trapecio** (un par de lados opuestos paralelos) y **trapezoide** (ningún par de lados opuestos paralelos).

• Los paralelogramos se clasifican en:
Paralelogramo oblicuángulo (o simplemente paralelogramo), rectángulo, rombo o cuadrado.(figura 1.18).

• Propiedades de los paralelogramos
- Los lados opuestos son paralelos e iguales. ($\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$).
- Las diagonales se cortan en su punto medio. (O: punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$).
- Los ángulos opuestos son iguales. ($\angle$A = $\angle$C; $\angle$B = $\angle$D)

<u>Rectángulo</u>: paralelogramo con sus 4 ángulos rectos ($\angle$A=$\angle$C=$\angle$B=$\angle$D= 90º). Cumple además, que sus diagonales son iguales. ($\overline{AC} = \overline{BD}$).

<u>Rombo</u>: paralelogramo con sus 4 lados iguales. ($\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{AD} = \overline{BC}$). Cumple además, que sus diagonales son perpendiculares y bisectrices de los ángulos opuestos que tienen su vértices en sus extremos. ($\overline{AC} \perp \overline{BD}$; $\overline{AC}$ bisectriz de los ángulos $\angle$A y $\angle$C; $\overline{BD}$ bisectriz de los ángulos $\angle$B y $\angle$D).

<u>Cuadrado</u>: paralelogramo que es rectángulo y rombo a la vez.

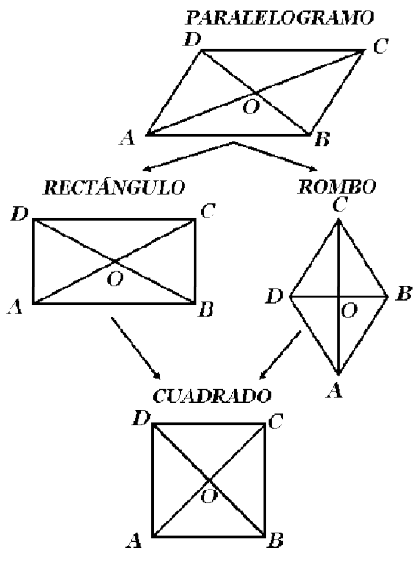


Fig 1.18

• Un cuadrilátero convexo es un paralelogramo si:
- sus lados opuestos son paralelos, o
- sus lados opuestos son iguales, o
- un para de lados opuestos son paralelos e iguales, o
- las diagonales se cortan en su punto medio, o

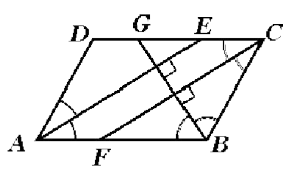


Fig. 1.19

- los ángulos opuestos son iguales.

• En todo paralelogramo las bisectrices de los ángulos opuestos son paralelas y la de los consecutivos son perpendiculares (figura 1.19).

• Todo segmento que tiene sus extremos en los lados opuestos de un paralelogramo y pasa por el centro, este lo biseca.

• Los trapecios se clasifican en: trapecio general (simplemente trapecio), trapecio isósceles y trapecio rectángulo. (figura 1.20)

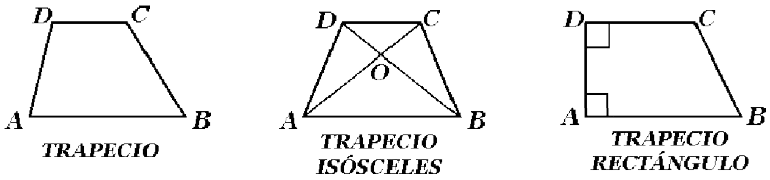


FIG. 1.20

• En todo trapecio isósceles son iguales (figura 1.20): los lados no paralelos ($\overline{AD} = \overline{BC}$), las diagonales ($\overline{AC} = \overline{BD}$) y los ángulos adyacentes a cada base ($\angle A = \angle B$ y $\angle C = \angle D$).

• En todo trapecio rectángulo un lado no paralelo es perpendicular a las base.

• Diagonal del cuadrado: d = $\sqrt{2}\, \boldsymbol{l}$ ($\boldsymbol{l}$: lado del cuadrado).

• Área de los cuadriláteros:

- paralelogramo: A = bh ; A = ab senα (0º< α<180º; a, b: lados consecutivos).
- rectángulo: A = ab
- rombo: A = $\dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$ (d: diagonales del rombo) ; A = a^2senα (0º< α<180º).
- cuadrado: A = a^2
- trapecio: A = $\dfrac{B+b}{2} \cdot h$ (B, b: bases del trapecio, h: altura).
- cuadrilátero no convexo: A = $A_1 + \ldots + A_n$ ($A_1;\ldots;A_n$: áreas de los triángulos en que descompone el cuadrilátero)

• Perímetros:

- paralelogramo y rectángulo: P = 2(a + b)
- rombo y cuadrado: P = 4a.
- trapecio y cuadrilátero no convexo: P = a + b + c + d.

1.4. Circunferencia

• Circunferencia: Conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo del plano llamado centro. La distancia de cualquier punto de la circunferencia al centro se llama radio (r).

• Elementos de la circunferencia.

Cuerda: segmento que tiene sus extremos en puntos de la circunferencia. En la figura 1.21 a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas. Longitud: $\boldsymbol{l}$ = d sen $\dfrac{\alpha}{2}$ (d: diámetro, α: amplitud ángulo central que determina la cuerda

Diámetro: la mayor de todas las cuerdas, contiene al centro de la circunferencia y su longitud es 2r. En la figura 1.21a, $\overline{CD}$ es un diámetro.

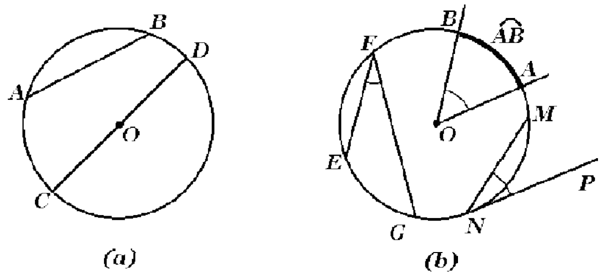


Fig. 1.21

Ángulo central: ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia. En la figura 1.21b el ∠AOB.

Arco: es la intersección de un ángulo central con la circunferencia. Se denota por un pequeño arco sobre las letras de sus extremos (figura 1.21b) y su medida es igual a la del ángulo central que lo determina.

• Angulo inscrito: ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son cuerdas. En la figura 1.21b el ∠EFG es un ángulo inscrito.

• Ángulo semiinscrito: ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia, un lado es una cuerda y el otro lado es tangente a la circunferencia en el vértice. En la figura 1.21b el ∠MNP es un ángulo semiinscrito.

• Círculo: Conjunto de puntos del plano limitado por una circunferencia. El radio del círculo es el radio de la circunferencia.

• Sector circular: porción del círculo determinado por un ángulo central (figura 1.22a).

• Segmento circular: porción del plano comprendido entre una cuerda y el arco que esta determina.(figura 1.22b).

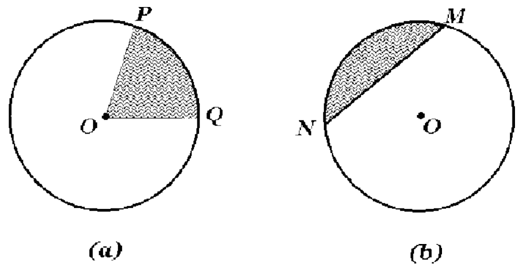


Fig. 1.22

• Corona o anillo: conjunto de puntos del plano limitada por dos circunferencias concéntricas. (figura 1.23a).

• Trapecio circular: Es la parte de corona o anillo limitada por dos radios. (figura 1.23b)

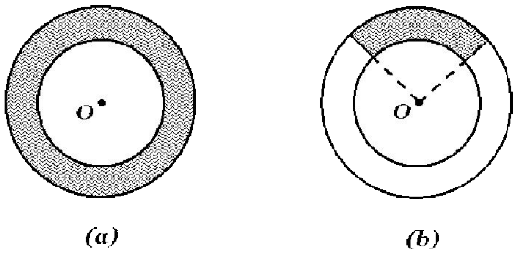
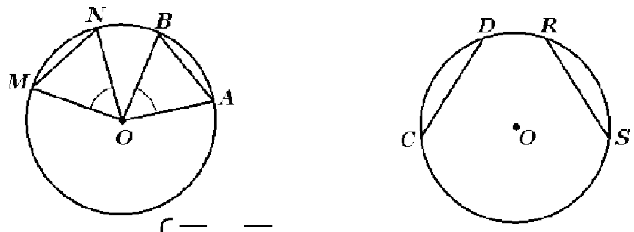


Fig. 1.23

• En una circunferencia o en circunferencias iguales a ángulos centrales iguales corresponden arcos iguales y cuerdas iguales y viceversa (figura 1. 24a).

• En una circunferencia o en circunferencias iguales a cuerdas iguales corresponden arcos iguales y viceversa. (figura 1.24b).



$\angle MON = \angle AOB \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{MN} = \overline{AB} \\ \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{AB} \end{cases}$

$\overline{CD} = \overline{RS} \Leftrightarrow \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{RS}$

(a) (b)

Fig. 1.24

• En una circunferencia, o en circunferencias iguales, las cuerdas iguales equidistan del centro y viceversa. En la figura 1.25 las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son iguales entonces sus distancias al centro de la circunferencia $\overline{OC}$ y $\overline{OC'}$ también lo son.

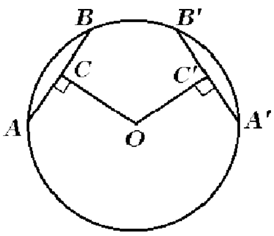


Fig. 1.25

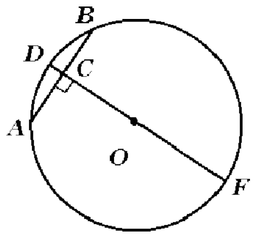


Fig. 1.26

• El diámetro o radio perpendicular a una cuerda biseca a la cuerda y al arco que esta determina. En la figura 1.26 el diámetro $\overline{DF} \perp \overline{AB}$ por tanto C es el punto medio de la cuerda $\overline{AB}$ y el punto D es el punto medio del arco AB.

• El diámetro o radio en el punto medio de una cuerda o del arco que esta determina es perpendicular a la cuerda.

• El diámetro o radio en el punto de tangencia es perpendicular a la tangente (figura 1.27).

• La amplitud de todo ángulo inscrito o semiinscrito es igual a la mitad del arco que determina (figura 1.28).

• Todos los ángulos inscritos cuyos lados abarcan el mismo arco son iguales (figura 1.28).

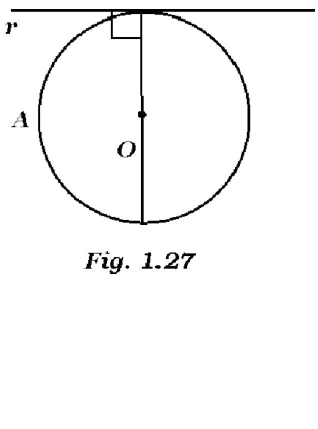
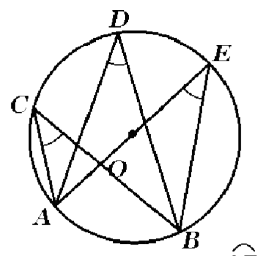


Fig. 1.27



$\angle C = \angle D = \angle E = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

Fig. 1.28

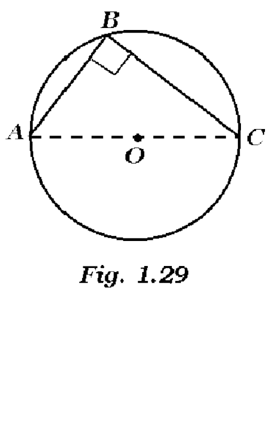


Fig. 1.29

• Teor

ema de Tales: Todo ángulo inscrito sobre un diámetro es de 90º. En la figura 1.29 el $\angle$ ABC = 90º por estar inscrito en el diámetro $\overline{AC}$.

- Todo triángulo equilátero de lado l inscrito en una circunferencia de radio r cumple que: $l = \sqrt{3}$ r.
- Todo cuadrado de lado l inscrito en una circunferencia de radio r cumple que: $l = \sqrt{2}$ r.
- Áreas en el círculo.

- Círculo: $A = \pi r^2$ - Área del sector circular: $A = \frac{\pi r^2 \alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{r^2 \alpha_{rad}}{2}$

- Área del segmento circular: $A = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ} - \text{sen}\alpha^\circ\right) = \frac{r^2}{2}\left(\alpha_{rad} - \text{sen}\alpha_{rad}\right)$

- longitud de la circunferencia: $L = 2\pi r$

1.5 Polígonos regulares

- Polígono: porción del plano limitada por una línea poligonal cerrada de n lados ($n \geq 3$). Los polígonos reciben nombre según la cantidad de lados.

3 lados, triángulo 4 lados, cuadrilátero 5 lados, pentágono
6 lados, exágono 7 lados, heptágono 8 lados, octógono
9 lados, eneágono 10 lados, decágono , etc.

Los polígonos se clasifican en convexo o no convexo. Un polígono es convexo si sus ángulos interiores son menores de 180º y no convexo si tienen al menos un ángulo interior mayor de 180º (sobre obtuso) (figura 1.30)

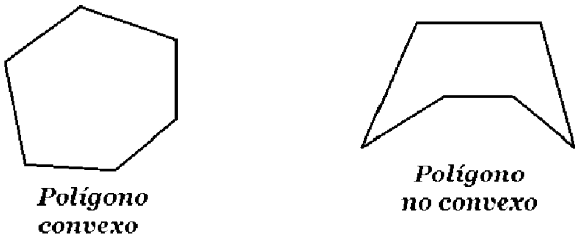


Fig. 1.30

- Polígono regular: Es todo polígono convexo que tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales.
- La suma de los ángulos interiores de un polígono es de:

$S_n = 180^\circ(n - 2)$ n: número de lados

- La amplitud de un ángulo interior de un polígono regular es $\alpha = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$

(n número de lados).

- Diagonal de un polígono: Es el segmento cuyos extremos son vértices no consecutivos del polígono. La cantidad de diagonales de un polígono se determina por la expresión: $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ (n: número de lados)

• Todo polígono regular tiene sus vértices en una circunferencia (circunferencia circunscrita). El centro de la circunferencia circunscrita es el centro del polígono (figura 1.31).

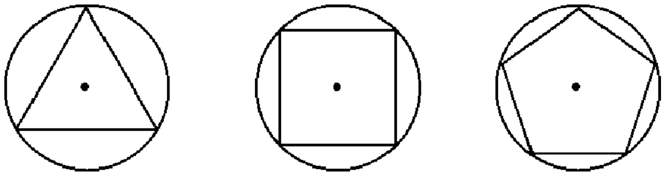


Fig. 1.31

• Apotema de un polígono regular: Es la perpendicular trazada desde el centro del polígono a cualquiera de sus lados, se denota por una letra minúscula “a” y es el radio de la circunferencia inscrita en el polígono.(figura 1.32)

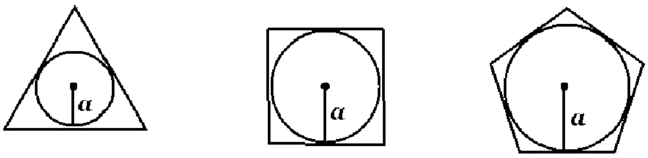


Fig. 1.32

• Todo polígono regular de n lados se puede descomponer en n triángulos isósceles iguales, donde los lados iguales son los radios de la circunferencia circunscrita y la altura es la apotema del polígono (figura 1.33). La amplitud del ángulo principal de estos triángulos isósceles se obtiene a través de la relación $\frac{360^\circ}{n}$. En el caso del exágono este se descompone en 6 triángulos equiláteros.

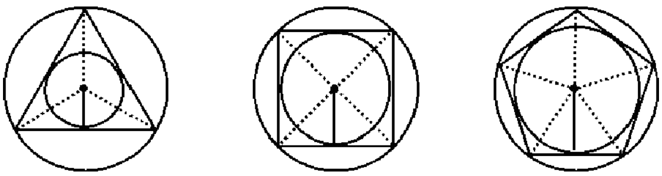


Fig. 1.33

• En todo polígono regular de n lados se cumple que la longitud del lado en función del radio de la circunferencia circunscrita se obtiene por la fórmula:

$$\boldsymbol{l} = r \cdot \sqrt{2\left(1 - \cos\frac{360^\circ}{n}\right)}$$

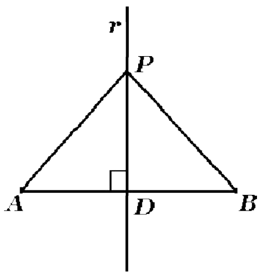
2. Ejercicios

2.1 ¿Cómo resolver ejercicios de demostración o cálculo geométrico?

La resolución de ejercicios geométricos conlleva dos aspectos importantes como son: el dominio de los conceptos, propiedades y teoremas de la Geometría Plana y el dominio de las técnicas de trabajo para la resolución de estos ejercicios que no tienen carácter algorítmico.

En cuanto al dominio de los conceptos, propiedades y Teoremas de la Geometría Plana nos referimos por ejemplo si hablamos de la mediatriz de un segmento, no sólo se debe conocer su definición, recta perpendicular en el punto medio de un segmento, sino también, la propiedad que cumplen los puntos de esta recta, es decir, que todo punto que pertenece a la mediatriz equidista (están a igual distancia) de los extremos del segmento.

También es importante en cuanto a esto el análisis de las propiedades como un sistema, como un todo. Siguiendo el ejemplo de la mediatriz de un segmento se puede ver que el triángulo formado por los extremos del segmento y un punto de la mediatriz es un triángulo isósceles (fig. 1.34) donde $\overline{AB}$ es la base, $\overline{AP} = \overline{PB}$ distancia de un punto P de la mediatriz a los extremos del segmento $\overline{AB}$, que $\overline{PD}$ es una altura del ΔAPB por partir de un vértice y ser perpendicular al lado opuesto, es mediana por partir de un vértice hasta el punto medio del lado opuesto y bisectriz del $\angle APB$, $\overline{AD} = \overline{DB}$ por ser D el punto medio de $\overline{AB}$ y $\angle A = \angle B$ por ser ángulos base del triángulo isósceles.



r: mediatriz de $\overline{AB}$
D: punto medio de $\overline{AB}$
$\overline{AP} = \overline{PB}$ $\quad r \perp \overline{AB}$

Fig. 1.34

En el estudio de los teoremas es necesario precisar cuál es su premisa y su tesis, pues un análisis minucioso de estas partes del teorema nos ayuda a buscar las relaciones que debemos ir estableciendo con los datos que nos brinda el ejercicio.

Unido al análisis minucioso de los conceptos, propiedades y teoremas relacionados con el ejercicio, las técnicas de trabajo para la resolución de ejercicios no algorítmicos nos llevan a encontrar la vía de solución de estos, tanto de ejercicios de demostración como de cálculo geométrico.

Una posible orientación para este trabajo pudiera ser la siguiente:
1. Analizar toda la información que me brindan los datos que me dan.
2. Analizar que relaciones puedo establecer con la información que me brindan los datos.
3. Analizar las premisas de los teoremas que están relacionados con lo que me piden demostrar.
4. Analizar las relaciones que se pueden formar con los datos dados para conformar las condiciones que plantea la premisa de algunos de los teoremas que están relacionados con lo que me piden demostrar.

Veamos como realizar todo a través de un ejemplo.
En la figura 1.35 tenemos:
ΔABC: isósceles de base $\overline{AB}$,
$\overline{CD}$: mediana relativa al lado $\overline{AB}$,

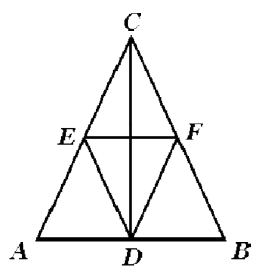


Fig. 1.35

$\overline{EF}$: paralela media relativa al lado $\overline{AB}$.
Probar que: ΔADE = ΔDBF = ΔCEF.

Después de realizar una lectura inteligente del ejercicio un análisis minucioso de los datos sería:

El primer dato nos plantea que el ΔABC: isósceles de base $\overline{AB}$ de aquí podemos concluir:

- $\overline{AC} = \overline{BC}$, ∠A = ∠B y
- la altura relativa a la base es altura y mediatriz respecto a ese lado y bisectriz del ángulo principal del triángulo (∠C).

Del dato $\overline{CD}$: mediana relativa al lado $\overline{AB}$, puedo concluir que:

- D: punto medio de $\overline{AB}$ por lo que $\overline{AD} = \overline{BD}$,
- $\overline{CD}$ es altura relativa al lado $\overline{AB}$

Entre la información que me brinda el primer dato y el segundo todavía no puedo establecer relaciones, el tercer dato plantea:

$\overline{EF}$: paralela media relativa al lado $\overline{AB}$, según su definición, es la paralela a un lado de un triángulo por los puntos medios de los otros dos lados y cuya longitud es la mitad del lado al que es trazada, luego de aquí tenemos:

E y F son los puntos medios de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, luego, $\overline{AE} = \overline{EC}$ y $\overline{BF} = \overline{FC}$.

- $\overline{EF} \,||\, \overline{AB}$, entonces podemos obtener la igualdad de ángulos al determinarse ángulos alternos o correspondientes por lo que: ∠CEF = ∠A y ∠CFE = ∠B.
- $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ luego, $\overline{EF} = \overline{AD} = \overline{BD}$.

Al analizar este tercer dato puedo establecer relaciones con los anteriores teniendo que como:

- $\overline{AC} = \overline{BC}$ entonces $\overline{AE} = \overline{EC} = \overline{BF} = \overline{FC}$.
- ∠A = ∠B entonces ∠CEF = ∠A = ∠CFE = ∠B.

Una vez analizados los datos minuciosamente se analizan los teoremas relacionados con lo que me piden demostrar, en este caso, se pide probar que tres triángulos son iguales; las premisas de los teoremas que tienen como tesis que dos triángulos son iguales son los Criterios de Igualdad de Triángulos las cuales plantean que para que dos triángulos sean iguales se debe cumplir que:

- tienen respectivamente iguales tres lados, o
- tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales, o
- tiene un lado y los ángulos adyacentes a ese lado respectivamente iguales.

Al analizar estas premisas y las relaciones establecidas con los datos se puede aplicar el criterio que plantea que dos triángulos son iguales si tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente igual.

Una vez determinados las relaciones establecidas con los datos y elegido el teorema que se aplicaría para demostrar lo pedido se realiza la demostración formal justificando cada relación establecida, la cual quedaría así:

D: punto medio de $\overline{AB}$	por ser $\overline{CD}$ la mediana relativa al lado $\overline{AB}$ en el ΔABC
luego $\overline{AD} = \overline{BD}$	
$\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{AB}$	por ser $\overline{EF}$ paralela la media del ΔABC relativa al lado $\overline{AB}$.
entonces $\overline{EF} = \overline{AD} = \overline{BD}$	
$\overline{AC} = \overline{BC}$	por ser el ΔABC isósceles de base $\overline{AB}$
E y F puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$	por ser $\overline{EF}$ paralela la media del ΔABC
$\overline{AE} = \overline{EC}$	por ser E puntos medios de $\overline{AC}$
$\overline{BF} = \overline{FC}$	por ser F puntos medios de $\overline{BC}$
por lo que $\overline{AE} = \overline{EC} = \overline{BF} = \overline{FC}$	por ser mitades de segmentos iguales
$\angle CEF = \angle A$	por ser alternos entre $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{AC}$ secante
$\angle B = \angle A$	por ser el ΔABC isósceles de base $\overline{AB}$
$\angle CEF = \angle B$	por carácter transitivo
$\therefore \Delta ADE = \Delta DBF = \Delta CEF$	por tener respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido.

Este análisis se realizó partiendo de los datos hasta llegar a analizar los teoremas relacionados con lo que se pide demostrar, pero este análisis puede también realizarse recorriendo el camino contrario.

2.2 Ejercicios propuestos.

1. Di si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. Fundamenta las proposiciones que sean falsas.

a) En todo triángulo isósceles los ángulos bases son desiguales.
b) En todo triángulo equilátero es obtusángulo.
c) La altura de un triángulo es el segmento trazado desde un vértice al punto medio del lado opuesto a ese vértice.
d) La mediana de un triángulo es el segmento de perpendicular trazado desde un vértice hasta el lado opuesto.
e) En todo triángulo isósceles las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices de sus ángulos coinciden.
f) En toda circunferencia o en circunferencias iguales a arcos iguales corresponden cuerdas iguales y viceversa.
g) En toda circunferencia o en circunferencias iguales algunos de los ángulos inscritos en un mismo arco son desiguales.
h) Todo radio o diámetro perpendicular a una cuerda biseca a esta y el arco correspondiente.

i) Todo cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos es un paralelogramo.
j) Todo rombo es un cuadrado.
k) Todo cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos e iguales es un paralelogramo.
l) En todo triángulo rectángulo la altura (h) relativa a la hipotenusa cumple:

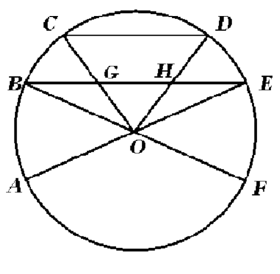
$$h = \frac{a \cdot b}{c}$$

m) Desde un punto exterior a la circunferencia se pueden trazar infinitas tangentes a la circunferencia.
n) n) El segmento que une un punto exterior a una circunferencia con el centro de la circunferencia es bisectriz del ángulo formado por las tangentes trazadas desde ese punto a la circunferencia.

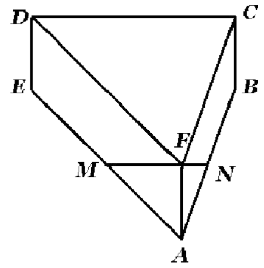
2. Selecciona la respuesta correcta en cada caso.

a) Si un ángulo interior de un rombo de lado a mide 120º entonces sus diagonales miden: a y $\sqrt{3}$ a ; $\frac{a}{2}$ y $\sqrt{3}$ a ó a y $\frac{a}{2}$.
b) La diagonal de un cuadrado mide $5\sqrt{2}$ cm luego los lados miden: $2,5\sqrt{2}$ cm ; 5,0 cm ó $\sqrt{2}$ cm.
c) En un triángulo equilátero ABC la altura relativa al lado $\overline{AB}$ mide 6,0 cm luego el ortocentro está del vértice a: 2,0 cm ; 5,0 cm ó 4,0 cm.
d) En un triángulo rectángulo isósceles la hipotenusa mide 8,0 cm luego los catetos miden: 5,64 cm ; 5,6 cm ó $4\sqrt{2}$ cm.
e) Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3,0 cm y 4,0 cm luego la altura relativa a la hipotenusa mide: 2,0 cm ; 2,4 cm ó 3,0 cm.
f) En un triángulo equilátero de lado $\boldsymbol{l}$ la diferencia entre el radio de la circunferencia circunscrita y la inscrita es: $\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{l}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{l}$ ó $\frac{\sqrt{3}}{6}\boldsymbol{l}$

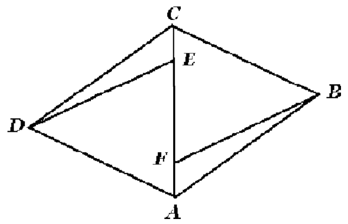
3. En la C(O, $\overline{OA}$), B, C, D, E y F son puntos de la circunferencia, $\angle$BOD = $\angle$COE. $\overline{BF}$ y $\overline{AE}$ diámetros
Prueba que:
a) ΔGOH es isósceles.
b) CDHG es un trapecio isósceles.
c) ΔGOH ~ ΔCOD.



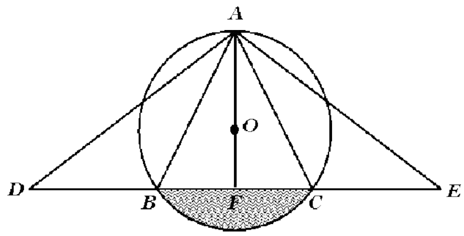
4. En la figura ABCF y AFDE paralelogramos, M y N puntos medios de $\overline{AE}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.
a) Prueba que: ΔMAN ~ ΔCDF.
b) Si $A_{\Delta MAN}$= 7,5 cm^2 , calcula el área del Δ DFC



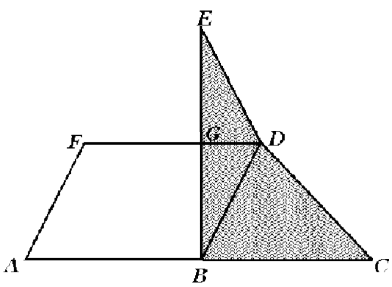
5. En la figura $\Delta BCF = \Delta AED$ e isósceles de bases $\overline{CF}$ y $\overline{AE}$ respectivamente.
Prueba que:
a) $\Delta CDE = \Delta ABF$
b) ABCD es un paralelogramo.



6. En la C(O; $\overline{OA}$), $\overline{AF} \perp \overline{DE}$, $\overline{DF} = \overline{EF}$, los arcos AB y AC son iguales y los puntos D, B, F, C y E alineados.
Prueba que:
a) $\Delta ABD = \Delta ACE$
b) Calcula el área sombreada si $\angle BAC = 50º$ y $\overline{OA} = 6,0$ cm.

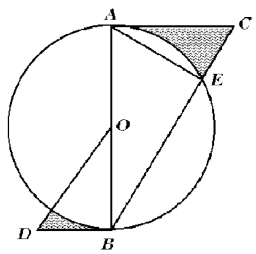


7. En la figura ABDF es un paralelogramo, B: punto medio de $\overline{AC}$, ΔBDE isósceles de base $\overline{BE}$, $\overline{FD} \perp \overline{BE}$.
a) Prueba que: $\overline{FE} = \overline{DC}$
b) ¿Es $\overline{AE} = \overline{CE}$? Fundamenta.
c) Si $\overline{FD} = \overline{BE} = 6,0$ cm y $\angle DBC = 2 \cdot \angle E$, calcula el área sombreada.

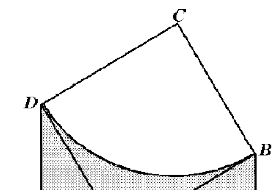


8. En la circunferencia C(O; $\overline{OE}$), $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ tangentes a la circunferencia en A y B respectivamente, $\overline{OD} \parallel \overline{BC}$ y $\angle ACB = 60º$, $\overline{AB}$ diámetro.
a) Prueba que:
- $\Delta DBO \sim \Delta ABC$
- $\Delta DBO = \Delta AEC$

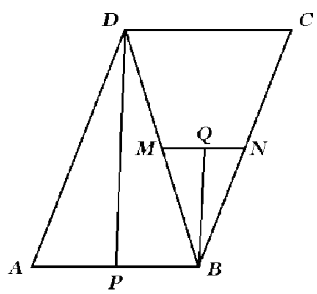
b) Si $\overline{AE} = 8,0$ cm, calcula el área sombreada



9. En la figura ABCD es un cuadrado, $\overline{DN}$ y $\overline{BM}$ las distancias de los vértices D y B a la recta AM. Si $\overline{DN} = 8,0$ cm y $\overline{BM} = 6,0$ cm, calcula el área sombreada al trazar el arco BD con centro en C.

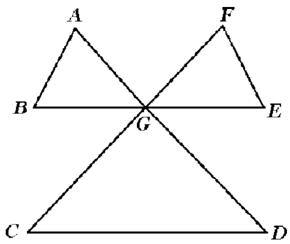


10. En la figura ABCD es un paralelogramo,
$\overline{MN}$: paralela media del ΔBCD,
$\overline{DP}$: mediana del ΔABD,
$\overline{BQ}$: mediana del ΔMBN.

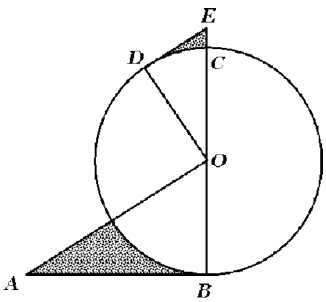


Demuestra que:
a) $\Delta APD \sim \Delta BNQ$. b) $\overline{DP} \parallel \overline{BQ}$.

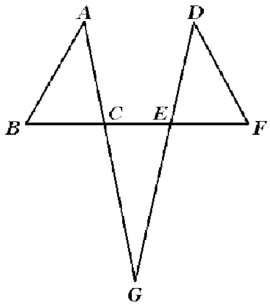
11. En la figura ΔCDG: isósceles de base $\overline{CD}$,
G: punto medio del $\overline{BE}$, $\overline{AD} = \overline{CF}$,
$\angle BGD = \angle CGE$.
Demuestra que:
a) $\Delta ABG = \Delta FGE$.
b) $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$.



12. En la C(O; $\overline{OC}$), $\overline{BC}$: diámetro, $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ tangentes a la circunferencia en B y D respectivamente, $\overline{OD} \perp \overline{OA}$.
a) Prueba que: $\Delta OAB \sim \Delta OED$.
b) Si $\angle DEO = 60^{o}$ y $\overline{OC}$ = 4,8 cm ; calcula el área sombreada.

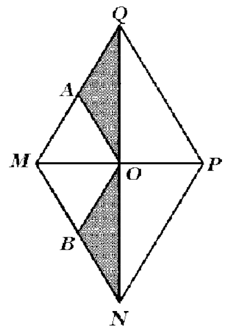


13.



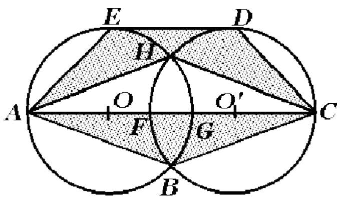
En la figura B, C, E y F puntos alineados, $\overline{DF} \parallel \overline{AG}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DG}$, $\overline{BE} = \overline{CF}$. Prueba que:
a) $\Delta ABC = \Delta DEF$.
b) $\Delta DEF \sim \Delta CGE$.
c) ABFD: trapecio.

14. En el rombo MNPQ, A es punto medio del $\overline{MQ}$,
$\overline{OM}$: bisectriz del $\angle AOB$
a) Prueba que: $\Delta OAM \sim \Delta MPQ$
b) Prueba que: $\Delta OAM = \Delta OBM$
c) Demuestra que AMBO es un rombo.
d) Calcula el área sombreada si $\angle OQP = 22{,}5^{o}$ y $\overline{AM}$ = 3,6 cm



15. Demuestra que el área de un rombo se calcula por la expresión **$A = a^2 \operatorname{sen}\alpha$** con: $0 < \alpha < 180^{o}$ y a: lado del rombo.

16. Calcula el área sombreada sabiendo que:
F: punto medio del $\overline{OG}$, $\overline{EO} \parallel \overline{O'D}$
C(O; $\overline{OG}$) $\cap$ C'(O'; $\overline{OF'}$)= $\{H, B\}$
$\overline{OG} = \overline{O'F}$ = 6,0 cm , $\overline{EO} \perp \overline{AC}$, $\overline{ED} \parallel \overline{AC}$



17. En la circunferencia C(O; $\overline{OB}$), $\overline{FD}$: mediatriz del $\overline{OB}$, $\overline{AB}$: diámetro, los arcos BC y AD son iguales y C: punto medio del $\overline{AE}$.

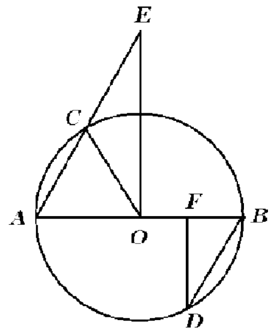
Demuestra que:

a) $\Delta FDB \sim \Delta AOE$

b) ΔAOE rectángulo.

c) ΔAOC equilátero

d) Calcula el área del ΔOEC si $\overline{OB}$ = 6,0 cm



18. En ACEF trapecio rectángulo en A,

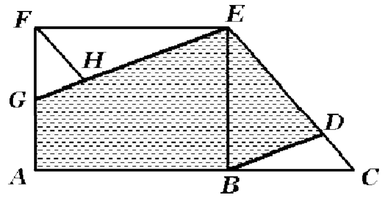
$\overline{EB} \perp \overline{AC}$; $\overline{FH} \parallel \overline{EC}$; $\overline{EG} \parallel \overline{BD}$;

G: punto medio de $\overline{AF}$.

a) Prueba que: $\Delta EFH \sim \Delta BCD$ y
$\Delta FGH \sim \Delta EBD$.

b) Calcula el área sombreada sabiendo que:
$\overline{EF}$ = 4,0 cm; $\overline{AC}$ = 7,0 cm y $\overline{AF}$ = 3,0 cm

c) Demuestra que: $\overline{FH}$ es bisectriz del $\angle F$.

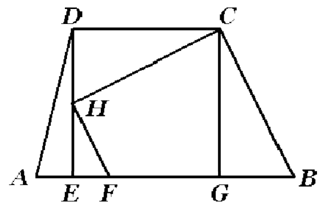


19. En el cuadrado CDEG, $\overline{DE}$: mediatriz del $\overline{AF}$, $\overline{DH} = \overline{AF} = \overline{GB}$, H: punto medio de $\overline{DE}$.

a) Demuestra que: $\Delta EFH \sim \Delta BCG$ y BCHF es un trapecio rectángulo.

b) ¿Son los triángulos DHC y BCG iguales? Fundamenta.

c) Si $\overline{CD}$ = 12 cm, halla el área de BCHF.

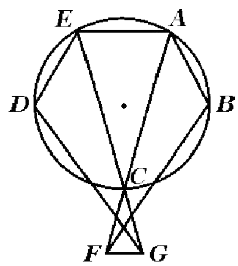


20. En la C(O; $\overline{OC}$) los arcos DE y AB ;DC y BC son iguales; $\overline{CF} = \overline{CG}$; $\overline{EG} \cap \overline{AF}$ = {C}.

Demuestra que:

a) $\Delta AFB = \Delta EDG$

b) $\Delta AEC \sim \Delta FGC$



21. En el ΔAFH, B: punto medio del $\overline{AC}$,

C: punto medio del $\overline{BE}$,

E: punto medio del $\overline{CF}$,

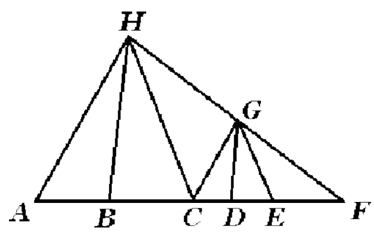
$\overline{CG}$: paralela media del ΔAFH y B, C, D y E puntos de $\overline{AF}$

Demuestra que:

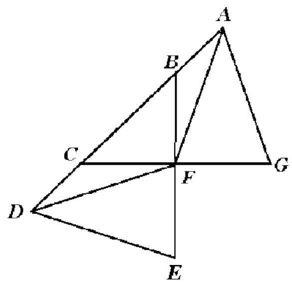
a) $\Delta ACH \sim \Delta CEG$

b) $\Delta HCF \sim \Delta GEF$

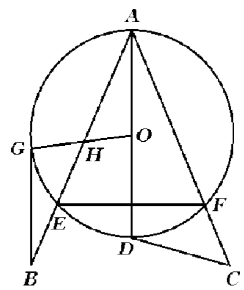
c) $\overline{GE}$: paralela media del ΔHCF



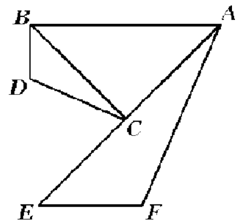
22. En la figura, ΔBCF: isósceles de base $\overline{BC}$
F: punto medio de $\overline{BE}$ y $\overline{CG}$, $\overline{DC} = \overline{AB}$.
a) Prueba que: $\Delta ACG = \Delta BDE$
b) Demuestra que el ΔADF es isósceles.
c) Demuestra que ADEG es un trapecio isósceles.
d) ¿Qué otros triángulos son iguales? Fundamenta.
e) Si existe alguna recta notable en la figura identifícala y fundamenta tu respuesta.
f) Halla el área de la figura si $\angle DBE = 45º$, $\overline{BF} = 4{,}0$ cm y $\overline{AB} = \sqrt{2}\ cm.$



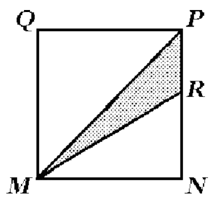
23. En la C(O; $\overline{OA}$), G, E, D y F son puntos de la circunferencia, $\overline{AD}$: diámetro, $\overline{AD} \perp \overline{EF}$, $\overline{BG} \mid\mid \overline{AD}$, $\overline{OA} = \overline{BG}$, $\angle GOA = \angle ADC$,
H: punto medio del $\overline{OG}$
a) Demuestra que: $\Delta BHG \sim \Delta ADC$.
b) Si $A_{\Delta AOH} = 5{,}0\ dm^2$, calcula el área del ΔADC.
c) Prueba que: $\overline{CD} = \overline{GB}$.



24. En la figura el ΔABC es rectángulo e isósceles de base $\overline{AB}$, C: punto medio del $\overline{AE}$, $\overline{BD} \perp \overline{EF}$ y $\overline{EF} = 2 \cdot \overline{BD}$
a) Prueba que: $\Delta CBD \sim \Delta AEF$.
b) Calcula el área del ΔABC si, $\angle A = 67{,}3º$; $\overline{AF} = 4{,}8$ dm y $\overline{EF} = 24$ cm.

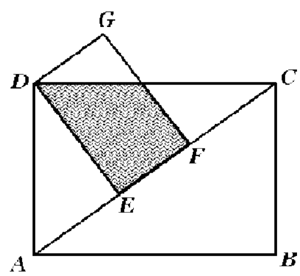


25.



El cuadrado MNPQ tiene 60 mm de lado y $\angle RMN = 2 \cdot \angle PMR$.
Calcula el área sombreada.

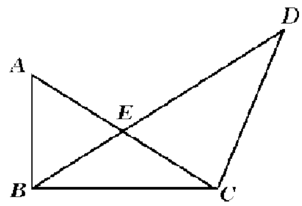
26. En la figura ABCD y DEFG son rectángulos, $\overline{AB} = 4{,}0$ cm ; $\overline{BC} = 3{,}0$ cm ; $\overline{AE} = \overline{FC} = 1{,}8$ cm ;
$E \in \overline{AC}$; $F \in \overline{AC}$.
Calcula el área sombreada.



27. Sea E el cicuncentro del ΔABC; $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{BC} = \overline{CD}$.

a) Prueba que: $\Delta BCE \sim \Delta BCD$.

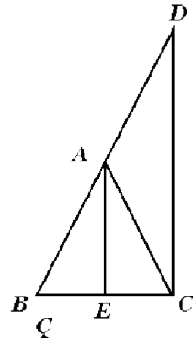
b) Si $\angle A = 50º$, calcula la amplitud del $\angle BCD$



28. Sea el ΔABC isósceles de base $\overline{BC}$, $\overline{AE}$: mediana, $\angle EAC = \angle CDA$

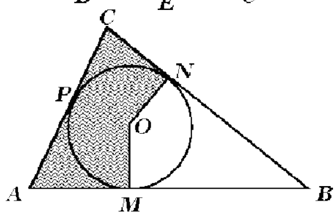
a) Prueba que: ΔACD isósceles, AECD: trapecio, y A circuncentro del ΔBCD.

b) Si $\angle BAC = 45º$ y $\overline{AC} = 3{,}0$ cm, calcula la longitud del $\overline{CD}$.

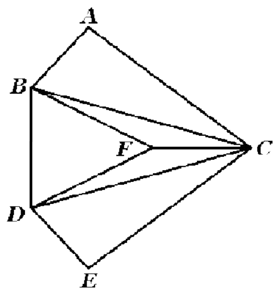


29. En el triángulo ABC, O es el incentro. Calcula el área sombreada si, $\overline{BC} = 8{,}1$ cm; $\overline{AC} = 7{,}2$ cm; $\overline{AM} = 5{,}4$ cm y $\angle B = 53{,}1º$

a) Calcula la longitud de la circunferencia inscrita.



30.



En la figura, ΔBDF isósceles de base $\overline{BD}$, $\overline{FC}$ bisectriz del $\angle ACE$, $\angle BFC = \angle DFC$ y $\overline{AC} = \overline{CE}$.

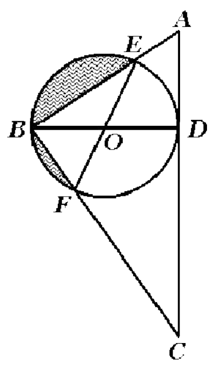
a) Prueba que: $\overline{AB} = \overline{DE}$.

b) ΔBCD isósceles.

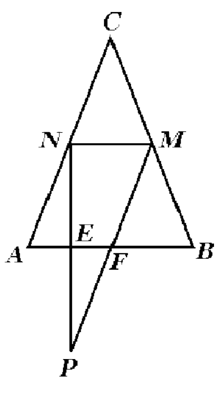
31. En la figura, $\overline{EF}$ y $\overline{BD}$ son diámetros de la circunferencia de centro O. $\overline{AC}$ es tangente en D, los puntos B, F y C están alineados, al igual que B, E y A .

a) Demuestra que: $\Delta BCD \sim \Delta ABD$

b) Calcula el área sombreada si: $\overline{AD} = 2\sqrt{3}$ cm y $\angle ACB = 30º$.



32.



En el Δ ABC isósceles de base $\overline{AB}$, $\overline{MN}$ es una paralela media. F punto medio de $\overline{AB}$, $\overline{NP}$ mediatriz de $\overline{AF}$ y M, F y P puntos alineados.

a) Prueba que: $\Delta MNP \sim \Delta AEN$ y $\Delta MCN = \Delta BMF$.

b) Halla el área del ΔAEN, conociendo que $\angle P = 30º$ y $\overline{AB} = 8{,}0$ cm.

33. Demuestra que todo segmento que pasa por el centro de un paralelogramo y tiene sus extremos en los lados opuestos, el centro del paralelogramo es su punto medio.

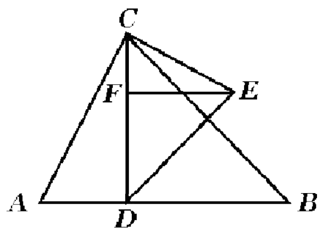
34. En el ΔABC, $\overline{CD}$ altura. ΔCDB isósceles de base $\overline{BC}$, $\overline{EF}$: altura del ΔCDE e igual a $\overline{FD}$, $\overline{CE} \perp \overline{AC}$.

a) Prueba que: $\Delta ABC \sim \Delta CDE$.

b) Demuestra que: $\overline{FE} \cdot \overline{DB} = \overline{CD} \cdot \overline{FD}$.

c) ¿Es $\overline{ED} \perp \overline{BC}$? Fundamenta.

d) ¿Son los triángulos CFE y ADC semejantes? Fundamenta.



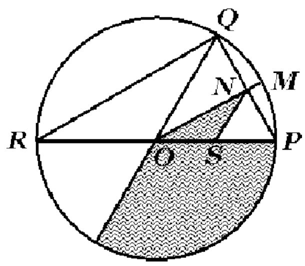
35. En un cuadrado ABCD de lado “a”, E es el punto medio del lado $\overline{AB}$ y F el punto medio del lado $\overline{BC}$. Calcula el área del ΔDEF.

36. Un vértice de un triángulo equilátero de lado a es el centro de una circunferencia tangente al lado opuesto. ¿Qué porciento representa el área del sector circular así determinado del área del triángulo dado?

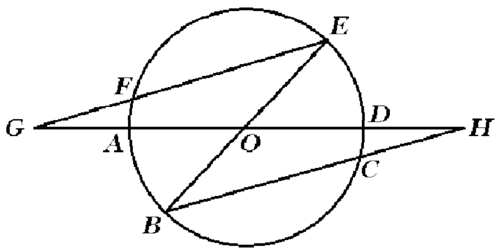
37. En la C(O; $\overline{OM}$), P, Q y R son puntos de la circunferencia, $\overline{PR}$: diámetro, $\overline{OM} \perp \overline{PQ}$ y $\overline{NS}$: mediana del ΔNOP.

a) Demuestra que: $\Delta OQR \sim \Delta OSN$ y $\Delta OPQ \sim \Delta NSP$

b) Si $\overline{OR} = \overline{PQ}$ = 5,0 cm; calcula el área sombreada.



38. En la C(O; $\overline{OA}$), B, C, D, E y F son puntos de la circunferencia: $\overline{EB}$ diámetro los arcos BF y EC son iguales. Demuestra que:



a) $\Delta GOE = \Delta BHO$

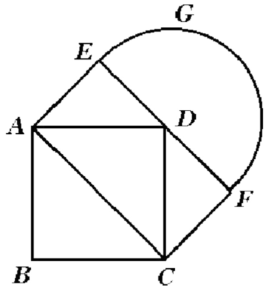
b) $\overline{GE} \,||\, \overline{BH}$

c) $\overline{GF} = \overline{CH}$

d) los arcos AF y DC son iguales

e) ¿Podemos decir que el cuadrilátero GBHE es un paralelogramo? Fundamenta.

39. Calcula el área de la figura sabiendo que: ABCD es un cuadrado, $\overline{AE} \,||\, \overline{CF}$, $\overline{AE} = \overline{CF}$, $\overline{AE} \perp \overline{AC}$, EGF semicircunferencia de centro D y $\overline{BC}$ = $4\sqrt{2}$ cm.

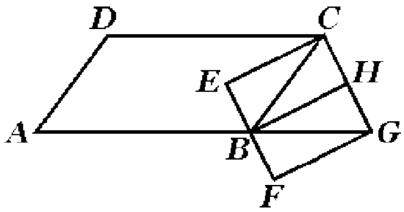


a) Prueba que: $\frac{A_{\Delta ADE}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2}$

40. Demuestra que en todo paralelogramo las bisectrices de dos ángulos consecutivos son perpendiculares.

41. En la figura ABCD es un paralelogramo, ΔCBG isósceles de base $\overline{CG}$, $\overline{BH} \,||\, \overline{FG}$, B $\in \overline{EF}$, $\overline{BH} = h_{\overline{CG}}$,

$\overline{BE}$: bisectriz del $\angle$BCD, A, B y G alineados

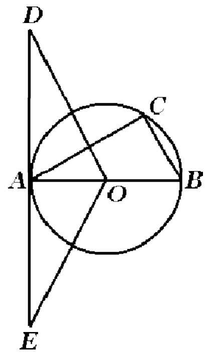


a) Prueba que CEFG es un rectángulo y que B es el punto medio de $\overline{EF}$

b) Si $\overline{BH}$ = 4,0 cm, $\overline{AB}$ = 8,0 cm y $\angle$BCD = 73,8º ; calcula las diagonales del paralelogramo ABCD.

42. La base de un triángulo mide 27,3 unidades, los ángulos en la base miden 30º y 45º respectivamente. Con centro en el vértice opuesto a la base del triángulo y con radio igual a la altura trazada desde dicho vértice se construye un círculo. Halla el área de la parte del triángulo fuera del círculo.

43. En la C(O; $\overline{OA}$) se tiene: $\overline{AB}$ diámetro, $\overline{DE}$ tangente a la circunferencia en A, $\overline{OD} \perp \overline{AC}$, $\overline{BC} = \overline{OA}$, A punto medio de $\overline{DE}$.

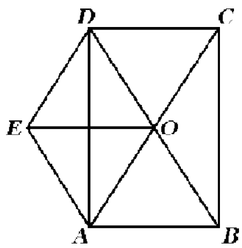


a) Demuestra que: ΔAOE = ΔABC.

b) Prueba que el ΔDOE es isósceles.

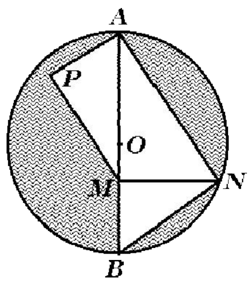
c) Si $\overline{OA}$ = 3,0cm , calcula el área del ΔDEO.

44.



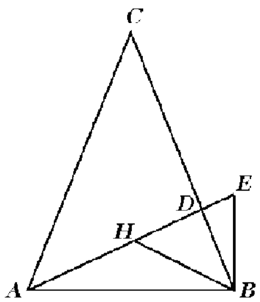
En la figura ABCD es un rectángulo y AODE un rombo. Demuestra que el área del rectángulo ABCD es el doble de la del rombo AODE.

45. En la C(O; $\overline{OA}$) se tiene: $\overline{AB}$ diámetro, APMN trapecio rectángulo en P y A de bases $\overline{MP}$ y $\overline{AN}$. Si $\angle$PMA = 30º, $\overline{AP}$ = 3.0 dm y $\overline{MB}$ = 2,0 dm ;



a) prueba que: $\frac{\overline{AP}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$, b) calcula el área sombreada.

46. En el ΔABC isósceles de base $\overline{AB}$, $\overline{AD} = h_{\overline{BC}}$,

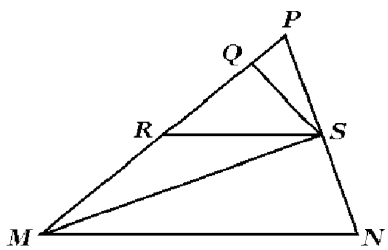


por el vértice B se ha trazado una perpendicular a $\overline{AB}$ que corta en E a la prolongación de $\overline{AD}$ y $\overline{BH}$ es la mediana correspondiente al lado $\overline{AE}$ del ΔABE.

a) Demuestra que: $\Delta ABC \sim \Delta BEH$.

b) Si $A_{\Delta ABE}$= 24 cm^2 y $\overline{EB}$ = 60 mm, calcula el perímetro del ΔABC.

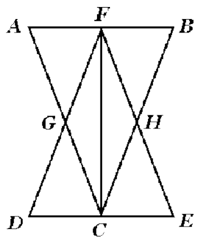
47. En la figura $\overline{MS}$ es la mediana correspondiente al lado $\overline{NP}$ del ΔMNP, R es el punto medio del lado $\overline{MP}$. El ΔMRS es isósceles de base $\overline{MS}$ y $\overline{QS} \perp \overline{MP}$.



a) Probar que: $\overline{PS} \cdot \overline{MS} = \overline{MP} \cdot \overline{QS}$

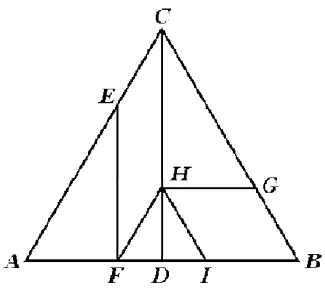
b) Si el $\angle MNP$ = 75º y $\overline{MR}$ = 12 dm, calcula el área del ΔSPR.

48.



La figura muestra los triángulos ABC y DEF isósceles de bases iguales $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ respectivamente de altura común $\overline{FC}$. Prueba que FGCH es un rombo.

49.



Sea el ΔABC equilátero, EFHC y BGHI paralelogramos, $\overline{CD}$ altura del ΔABC.

a) Demuestra que: $\Delta AFE \sim \Delta FDH \sim \Delta CHG$.

b) Prueba que: $\Delta FDH = \Delta IHD$.

c) ¿Es el ΔFIH equilátero? Fundamenta.

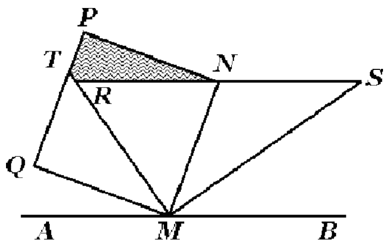
d) Si $\overline{AB}$ = 6,0 cm y $\overline{AF}$ = 2,0 cm. Calcula el área de los triángulos formados y de los paralelogramos.

50. En una circunferencia de centro O y 15 cm de diámetro se tienen dos Cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de forma tal que la cuerda $\overline{BC}$ es perpendicular al diámetro de extremo A y dista 4,5 cm del centro O, halla las longitudes de las cuerdas.

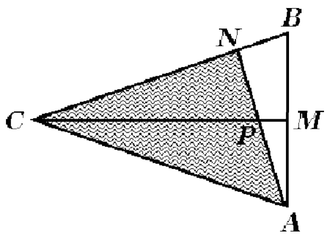
51. En una circunferencia de 25 cm de radio se han trazado dos cuerdas paralelas de 14 y 4,0 cm de longitud respectivamente. Calcula la distancia entre las cuerdas.

52. Prueba que el $\Delta MTQ \sim \Delta MSR$ sabiendo que el cuadrilátero MNPQ es un cuadrado, $\overline{MS}$ y $\overline{MT}$ bisectrices de los ángulos NMB y AMN respectivamente, $\overline{RS} \parallel \overline{AB}$, M $\in$AB y R $\in$ $\overline{MT}$ como se muestra en la figura.

a) Si $\overline{MN}$ = 25 cm y $\angle S$ = 25º, calcula el área sombreada.



53.



La figura muestra el ΔABC isósceles de base $\overline{AB}$ donde $\overline{CM}$ es la mediana relativa a ese lado, $\overline{AN} \perp \overline{BC}$ y, $\overline{CM}$ y $\overline{AN}$ se intersecan en P.

a) Prueba que: Δ BCM ~ ΔABN.

b) ¿Es $\angle ACB = 2\cdot\angle NAB$? Fundamenta.

c) Si $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ y $A_{\Delta ABN}$= 7,5 cm^2, calcula el área rayada.

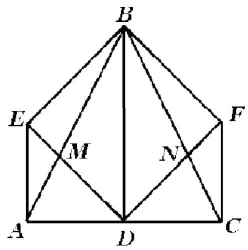
54. En un triángulo equilátero de lado 6,0 cm se han inscrito tres círculos iguales tangentes dos a dos. Determina el radio de los círculos y qué por ciento ocupan del área del triángulo.

55. En la figura ΔACB isósceles de base $\overline{AC}$, DFBE es un cuadrado cuya diagonal $\overline{BD}$ es altura del ΔACB y $\overline{AM} = \overline{CN}$. Prueba que:

a) $\overline{EA} = \overline{CF}$

b) $\Delta DBM = \Delta DNB$.

c) $\Delta NBD \sim \Delta CFN$.

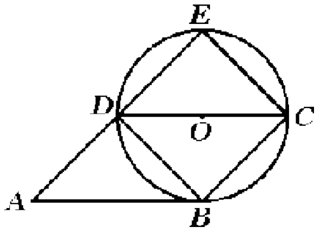


56. En la circunferencia C(O; 5,0cm), B, C, D y E son puntos de la circunferencia, $\angle ABC$ = 135º, $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{AB}$ tangente a la circunferencia en B, $\overline{AD}$ prolongación de $\overline{ED}$ y los arcos DE y BC son iguales.

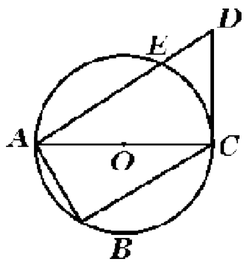
a) Prueba que ABCD es un paralelogramo y que BCED es un cuadrado.

b) ¿Es ABCE un trapecio? Fundamenta.

c) Calcula la amplitud del $\angle A$ y la longitud del $\overline{BD}$.



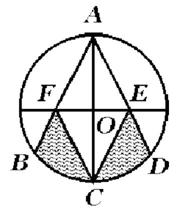
57. En la circunferencia C(O; $\overline{OA}$), B, C, y E son puntos de la circunferencia,



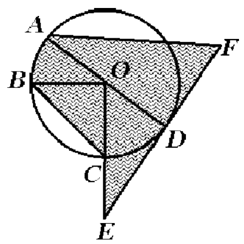
$\overline{AC}$ diámetro, $\overline{DC}$ tangente a la circunferencia en C, $\overline{AB} = \overline{OA}$, $\overline{AD} \perp \overline{AB}$.

a) Demuestra que ABCD es un trapecio.
b) Prueba que: $\Delta ABC \sim \Delta ACD$.
c) Establece la proporcionalidad entre los lados homólogos.
d) Determina la razón de semejanza.
e) Calcula el área de ABCD.

58. En la circunferencia C(O; $\overline{OA}$), $\overline{AC}$ es un diámetro, el arco BD mide 120º, $\overline{OA}$ = 6,0 cm y AFCE es un rombo. Calcula el área sombreada.



59.

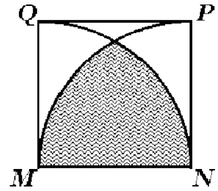


En la circunferencia C(O; $\overline{OA}$), B, C, y D son puntos de la circunferencia, $\overline{OA}$ = 5,0 cm, $\overline{AD}$ diámetro, $\overline{EF}$ tangente en D, punto medio de $\overline{EF}$, $\overline{OB} \perp \overline{OE}$, $\angle E = 30^\circ$, O, C y E puntos alineados.

a) Prueba que: $\Delta OED \sim \Delta ADF$.
b) Calcula el área sombreada.

60. La sección transversal de una pieza tiene forma de triángulo equilátero con una perforación circular en el centro. El lado del triángulo es de 6,0 cm y el radio del hueco es la mitad de la distancia del centro del triángulo al lado. calcula el área de la sección transversal.

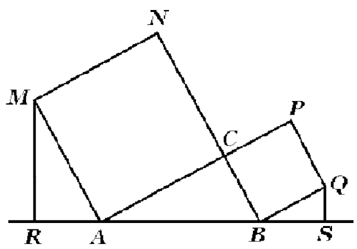
61. En el cuadrado ABCD con centro en A y C se trazan los arcos BD de radio 6,0 dm. Calcula el área formada entre los arcos.



62. En el cuadrado MNPQ con centro en M y N se trazan los arcos NQ y MP de radio $\overline{MN}$ = 4,2 cm. Calcula el área sombreada.

63. Haciendo centro en un vértice de un triángulo equilátero de 4,0 cm de lado se trazó una circunferencia de radio igual a la distancia del vértice al centro de gravedad del triángulo. Calcula el área de la figura así formada

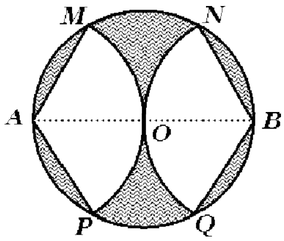
64. En la figura ΔABC rectángulo en C, CBQP y ACNM cuadrados, $\overline{MR} \perp \overline{RS}$, $\overline{QS} \perp \overline{RS}$,



R, A, B y S puntos alineados.
Prueba que: $\overline{AB} = \overline{MR} + \overline{QS}$

65. En un vértice de un triángulo equilátero de lado "a" se construye una circunferencia de radio igual a la mitad del lado. Calcula el área así formada.

66. En una circunferencia de centro O y radio $\overline{OA}$ se trazan con centro en los extremos del diámetro $\overline{AB}$ los arcos MP y NQ tangentes en O como se muestra en la figura. Si M, P, Q y N son puntos de la circunferencia, demuestra que el área sombreada es igual al área de los sectores circulares APM y BNQ.

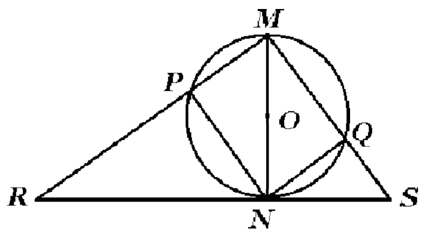


67. En la circunferencia C(O; $\overline{ON}$), P y Q son puntos de la circunferencia, $\overline{MN}$ es un diámetro y $\overline{RS}$ es tangente es N; $\overline{RM} \perp \overline{MS}$.

a) Prueba que los siete triángulos que se forman son semejantes.

b) Demuestra que MPNQ es un rectángulo.

c) Calcula el área del ΔNSQ sabiendo que $\overline{MS}$ = 2,4 dm y $\angle$R = 22,6º.



68. Demuestra que en todo triángulo equilátero de lado "a", las alturas, medianas mediatrices y bisectrices del triángulo miden $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

69. En una circunferencia al trazar la mediatriz de un radio se forman dos triángulos equiláteros entre los extremos del radio y los puntos que la mediatriz determina en la circunferencia. Fundamenta esta afirmación.

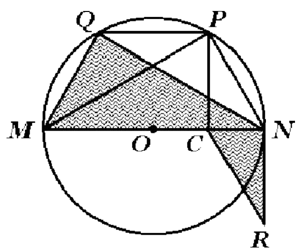
70. La figura muestra una circunferencia C(O; $\overline{ON}$) donde $\overline{MN}$ es un diámetro y los arcos MQ y NP son iguales, $\overline{PC}$ es mediatriz de $\overline{ON}$, $\overline{RN}$ tangente en N y $\overline{NP} \parallel \overline{RC}$.

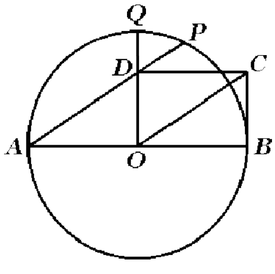
a) Demuestra que: ΔMNQ = ΔMNP.

b) ¿Es MNPQ un trapecio isósceles? Fundamenta.

c) Prueba que: ΔMNQ ~ ΔRNC.

d) Si $\overline{MN}$ = 8,0 dm, halla el área sombreada.



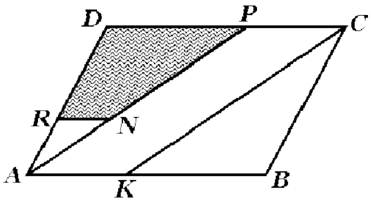


71. La figura muestra una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ que determina un círculo de 50,24 cm^2 de área donde $\overline{BC}$ es tangente en B a la circunferencia, $\overline{OQ} \parallel \overline{BC}$ y AOCD es un paralelogramo.

a) Prueba que: $\Delta AOD = \Delta OBC$.

b) Demuestra que OBCD es un rectángulo.

c) Calcula la amplitud del $\angle ADQ$ y el área del cuadrilátero ABCD, si $\tan\angle AOC = -0{,}75$



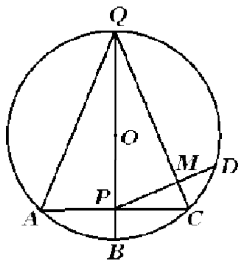
72. En el paralelogramo ABCD, $\overline{AP}$ y $\overline{CK}$ son bisectrices de los ángulos DAB y BCD respectivamente y $\overline{RN} \parallel \overline{DC}$.

a) Demuestra que: $\overline{AR}\cdot\overline{KC} = \overline{BC}\cdot\overline{AN}$

b) Si $\dfrac{\overline{AR}}{\overline{AD}} = \dfrac{1}{3}$ y $A_{\Delta RAN}$= 18 cm^2. Calcula el área sombreada.

73. La circunferencia de centro O y radio $\overline{OD}$ tiene como diámetro $\overline{BQ}$ y se le Ha inscrito el ΔACQ isósceles de base $\overline{AC}$,

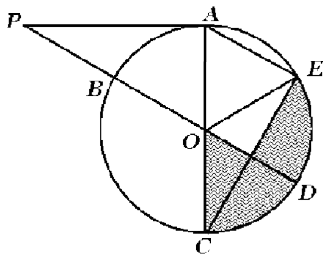
P es punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{DP} \perp \overline{QC}$.



a) Prueba que: $\overline{QP}^2 = \overline{AQ}\cdot\overline{QM}$.

b) Si $\angle DPC$ = 22,5º y la longitud de la circunferencia es de 31,4 cm, calcula la longitud del arco y la cuerda que determina el $\angle AQC$.

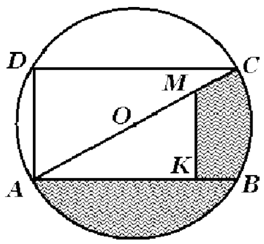
74. En la circunferencia de centro O y radio $\overline{OB}$ donde $\overline{AC}$ es un diámetro, $\overline{AP}$ es tangente en A a la circunferencia y el ΔAOE es equilátero de área $9\sqrt{2}$ cm^2. Los puntos D y E pertenecen a la circunferencia, $\overline{PD} \perp \overline{CE}$ y, B y O $\in$ $\overline{PD}$.



a) Demuestra que: $\overline{PB} = \overline{OC}$.

b) Calcula el área sombreada.

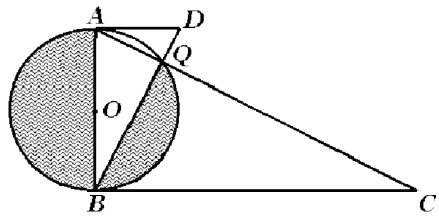
75. En la figura, $\overline{AC}$ es un diámetro de la C(O;$\overline{OD}$), B punto de la circunferencia, los arcos AD y BC miden 60º respectivamente y $\overline{MK}$ es la distancia del punto M al $\overline{AB}$.



a) Demuestra que: $\overline{AC}\cdot\overline{MK} = \overline{AM}\cdot\overline{AD}$.

b) Si $\overline{AK} = 6\sqrt{3}$ cm y $4\overline{AM} = 3\overline{AC}$, calcula el área sombreada.

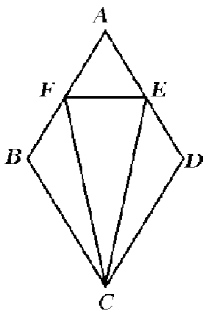
76. En una circunferencia de centro O y radio r = 4,0 cm se tiene que los puntos A, B y Q pertenecen a ella, $\overline{AB}$ es un diámetro y $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son tangentes a la circunferencia en A y B respectivamente.



a) Prueba que: $\overline{AB} - \sqrt{\overline{BC} \cdot \overline{AD}} = 0$

b) Calcula el área sombreada si $\overline{AQ} = 4,0$ cm y $\overline{AD} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BC}$.

77.



En la figura el cuadrilátero ABCD es un rombo, ΔAEF: isósceles de base $\overline{EF}$ y $\overline{EF}$ paralela media del ΔABD.

a) Prueba que: ΔCEF es isósceles.

b) Demuestra que: $\Delta AFE \sim \Delta BCD$.

c) Si el lado AB mide 9,8 cm y el $\angle$A es de 50º, calcula el área del ΔCEF.

78. Demuestra que si dos triángulo isósceles tienen respectivamente iguales las bases y las alturas relativas a ellas, entonces estos triángulos son iguales.

79. En el ΔMNP,

C: punto medio de $\overline{MP}$,

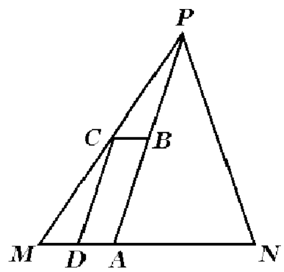
D: punto medio de $\overline{MA}$ y

B: punto medio de $\overline{AP}$.

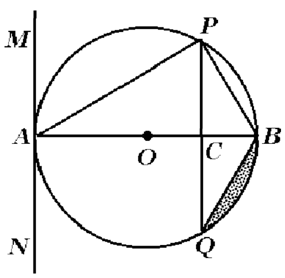
Prueba que: a) $\Delta CBP = \Delta MDC$

b) $\Delta NDC \sim \Delta MAP$

c) ABCD es un paralelogramo.



80.



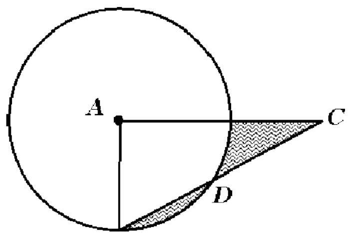
En la C(O; $\overline{OA}$), P, Q $\in$ C, $\overline{AB}$: diámetro, $\overline{MN}$: tangente en A a la circunferencia y $\overline{PQ} \parallel \overline{MN}$.

a) Prueba que: ΔBPQ es isósceles.

b) Demuestra que: $\Delta ACP \sim \Delta BCQ$.

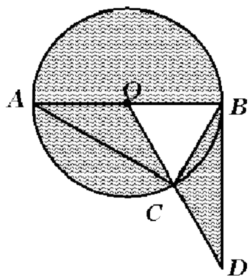
c) Si $\overline{OA}$ = 5,0 cm; calcula $\overline{PQ}$ y el área sombreada.

81. En el ΔABC rectángulo en A se traza una circunferencia de centro A y radio $\overline{AB}$ que

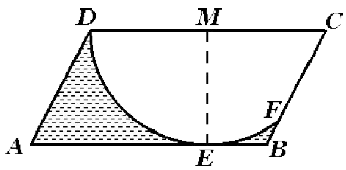


corta a la hipotenusa en su punto medio D.
Si $\overline{AB}$ = 6,0 cm , calcula el área sombreada.

82. En la C(O; $\overline{OC}$), $\overline{AB}$ diámetro, $\overline{BC}$ = $\overline{OC}$,
$\overline{BD}$ tangente a la circunferencia en B.
a) ¿Es C punto medio de $\overline{OD}$? Fundamenta.
b) Demuestra que: ΔACO = ΔBCD.
c) Si $\overline{AB}$ = 8,2 cm, calcula el área sombreada.

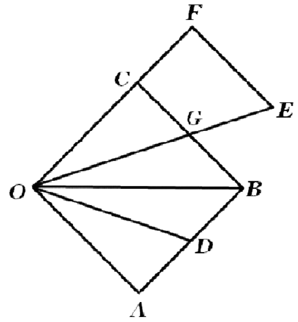


83.

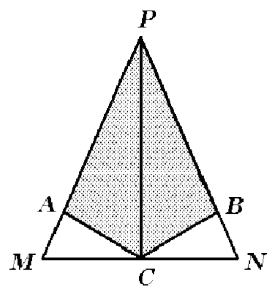


En el paralelogramo ABCD, con centro en M punto medio del lado $\overline{CD}$ se traza el arco DF tangente a $\overline{AB}$ en E. Si el lado $\overline{AD}$ = $2\sqrt{3}$ cm y el $\angle$A = 60º, calcula el área sombreada.

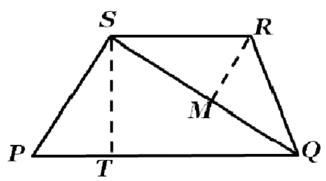
84. En la figura OABC es un cuadrado, GODB un trapezoide simétrico, $\overline{FE} \parallel \overline{OA}$ y $\overline{CF} = \overline{AD}$.
a) Prueba que: ΔOAD = ΔDEF.
b) Si $\overline{OA}$ = 6,0 cm y $3 \cdot \overline{CG} = 2 \cdot \overline{FE}$, calcula el $A_{\Delta OAD}$.



85. Sea el ΔMNP isósceles de base $\overline{MN}$, $\overline{PC}$ altura relativa a la base, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ distancias del punto C a los lados $\overline{MP}$ y $\overline{NP}$ respectivamente.
a) Prueba que: ΔCBP ~ ΔAMC.
b) Demuestra que: $\overline{AP} = \overline{BP}$.
c) Si $\overline{PC}$ = 6,4 cm y $\overline{MN}$ = 4,8 cm, calcula el área sombreada.

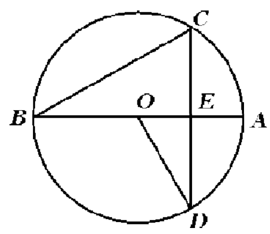


86.



En el trapecio PQRS de bases $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ tenemos: $\overline{PS} \perp \overline{SQ}$, $\overline{RS} = \overline{RQ}$, $\overline{RM} \perp \overline{SQ}$ y $\overline{ST}$ altura del trapecio.
a) Prueba que: ΔRMQ ~ ΔSPT.
b) Prueba que la distancia del punto M al $\overline{PQ}$ es igual a $\overline{MR}$.
c) Demuestra que: $\angle$S = $\angle$Q + $\angle$P .

87. En la C(O; $\overline{OA}$) se tiene que $\overline{AB}$ es un diámetro,

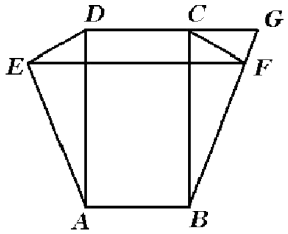


E punto medio de $\overline{CD}$ y $\overline{OA}$ respectivamente.

a) Prueba que: $\Delta BEC \sim \Delta ODE$.

b) Demuestra que: ΔCBD es equilátero.

c) Si $\overline{OE} = 3{,}0$ dm, calcula el área del ΔCBD.

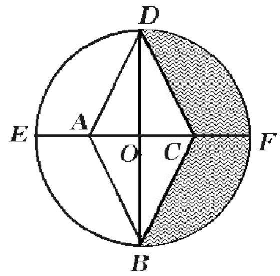
88. 

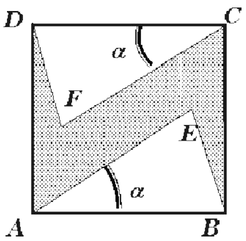
En la figura, ABCD es un rectángulo, $\overline{AE} = \overline{BF}$, $\overline{ED} \perp \overline{AE}$, $\overline{CF} \perp \overline{BG}$, $\angle EAD = \angle GCF$ y los puntos D, C y G están alineados.

a) Prueba que: $\Delta ADE \sim \Delta BGC$.

b) Si $A_{ABCD} = 50\ cm^2$, $\overline{DG} = 12{,}5$ cm y $\overline{ED} = 6{,}0$ cm, calcula $A_{\Delta CFG}$.

89. En la circunferencia de centro O, $\overline{EF}$ y $\overline{BD}$ son diámetros, $\overline{BD} = 32$ cm, B, D, E y F son puntos de ella. ABCD es un rombo tal que A y C son puntos medios de $\overline{OE}$ y $\overline{OF}$ respectivamente. Calcula el perímetro del rombo y el área sombreada.



90. 

¿Para qué valor de α el área sombreada en el cuadrado ABCD es la mitad del área del cuadrado, sabiendo que los triángulos ABE y DCF son iguales e isósceles de bases $\overline{BE}$ y $\overline{DF}$ Respectivamente?

91. Haciendo centro en un vértice de un triángulo equilátero de 4,0 cm de lado se trazó una circunferencia de radio igual a la distancia del vértice al centro de gravedad del triángulo. Calcula el área de la figura así formada.

92. Demuestra que en todo triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c, el radio de la circunferencia inscrita se obtiene por : $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

Capítulo 2. Geometría del Espacio

1. Propiedades de la Geometría del Espacio.

Al igual que analizamos en la Geometría Plana las propiedades de las figuras y las relaciones métricas que se cumplen entre ellas, en el presente epígrafe relacionaremos algunas propiedades de la estereometría, y las relaciones métricas que se cumplen en el espacio.

1.1 Espacio, rectas y planos.

● Espacio: Conjunto de puntos donde las rectas y planos son subconjuntos de él.

● Recta: Es un subconjunto propio del espacio que tiene las siguientes propiedades:

a) dos puntos determinan una recta y solo una,
b) por un punto pasan infinitas rectas,
c) si dos rectas tienen dos puntos comunes son coincidentes,
d) el conjunto de puntos de una recta se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números reales, de manera que se conserva el orden.

● Plano: Es un subconjunto propio del espacio determinado unívocamente por:

a) tres puntos no alineados, o
b) dos rectas que se cortan, o
c) dos rectas paralelas, o
d) una recta y un punto exterior a ella.

● Relación de posición entre rectas en el espacio.

<u>Paralelas</u>: Dos rectas del espacio son paralelas si y solo si están contenidas en un plano y son paralelas en ese plano (figura 2.1a).

<u>Se cruzan</u>: se dice que dos rectas en el espacio se cruzan si no tienen puntos comunes y no están en el mismo plano (figura 2.1b), también se llaman rectas alabeadas.

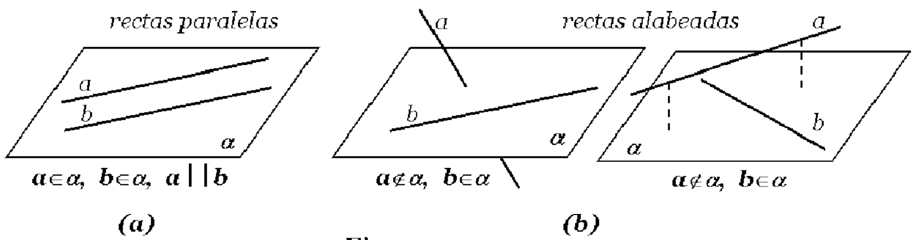


Fig. 2.1

● Una recta y un plano son paralelas si no se intersecan.

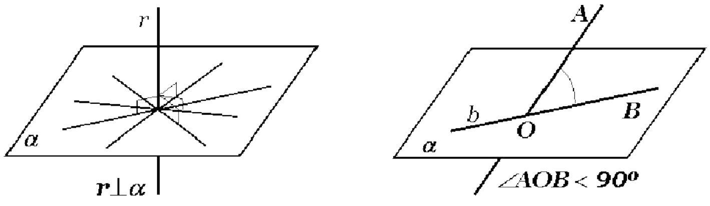
● <u>Criterio de paralelismo de recta y plano</u>: Una recta es paralela a un plano si es paralela a una recta contenida en dicho plano.

● Si dos rectas se cruzan, por cada una de ellas se puede trazar un plano paralelo a la otra.

● Intersección de recta y plano.

a) Si una recta interseca a un plano y es perpendicular a todas las rectas que pasan por el punto de intersección entonces es perpendicular al plano (figura 2.2a). El punto de intersección recibe el nombre de pie de la perpendicular.

b) Si una recta interseca a un plano y no es perpendicular al menos a una recta que pasa por el punto de intersección entonces la recta es oblicua al plano (figura 2.2b). El punto de intersección recibe el nombre de pie de la oblicua.



(a) (b)

Fig. 2.2

● Criterio de perpendicularidad de recta y plano:
Si una recta es perpendicular a dos rectas de un plano que se cortan en su pie, entonces es perpendicular al plano.

- Por perpendicular u oblicua a un plano se entiende también al segmento de recta perpendicular o de recta oblicua entre un punto de dicha recta y un plano.

● Por cualquier punto de una recta se puede trazar un plano y solo un plano perpendicular a dicha recta.

● Llamamos distancia de un punto a un plano a la longitud del segmento de perpendicular comprendido entre el punto y el plano (figura 2.3). La longitud del $\overline{AA'}$ es la distancia del punto A al plano α.

● Si desde un punto se trazan una perpendicular y varias oblicuas a un plano, la perpendicular es menor que las oblicuas (figura 2.4).

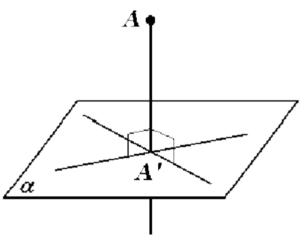


Fig. 2.3

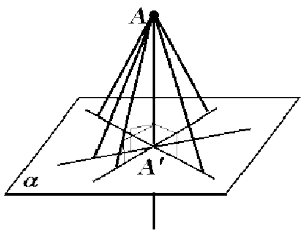


Fig. 2.4

● Se llama proyección de una oblicua sobre un plano α al segmento determinado entre el pie de una oblicua y el pie de la perpendicular trazada desde un punto de la oblicua al plano α. En la figura 2.5 el $\overline{AB'}$ es la proyección del $\overline{AB}$ sobre el plano α, se denota por: $\overline{AB'} = \text{proy}_{\alpha}\ \overline{AB}$ y el $\angle BAB'$ formado por la oblicua y su proyección se llama ángulo entre la oblicua $\overline{AB}$ y el plano α, o ángulo de inclinación de la oblicua respecto al plano α.

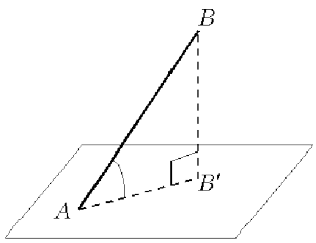


Fig. 2.5

● Si desde un punto que no pertenece a un plano α o desde varios puntos que estén a igual distancia del plano α se trazan oblicuas de forma tal que sus proyecciones sobre α son iguales entonces las oblicuas también lo son. (figura 2.6)

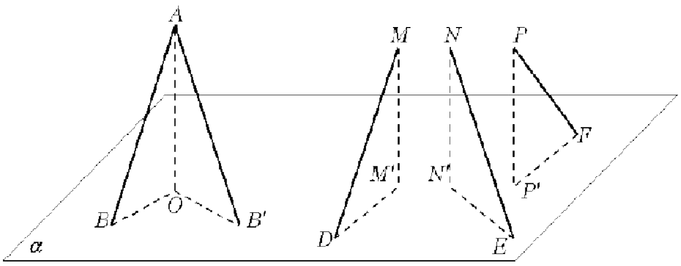


Fig. 2.6

● Si desde un punto que no pertenece a un plano α o desde varios puntos que estén a igual distancia del plano α se trazan oblicuas iguales entonces sus proyecciones sobre α también lo son.
● Dos rectas perpendiculares a un plano son paralelas entre si.
● Si una de dos rectas paralelas es perpendicular a un plano la otra también lo es.
● Teorema de las tres perpendiculares.
Si una recta de un plano que pasa por el pie de una oblicua al plano es perpendicular a la proyección de la oblicua, entonces es perpendicular a la oblicua (figura 2.7).

El recíproco de este teorema también se cumple y plantea:
Si una recta de un plano que pasa por el pie de una oblicua es perpendicular a la oblicua, entonces es perpendicular a la proyección de la oblicua.

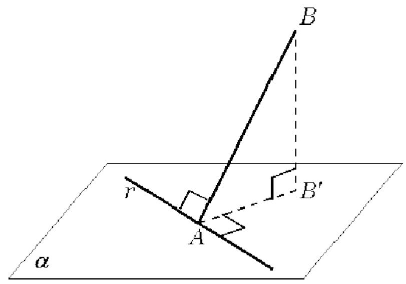


Fig. 2.7

● El área de la proyección de un polígono sobre un plano α es igual al área del polígono por el coseno del ángulo formado por el plano del polígono y el plano α.

1.2 Pares de planos.
● Dos planos son paralelos si no se intersecan.
● Criterio de paralelismo de dos planos.
- Dos planos son paralelos si son perpendiculares a una recta.
- Dos planos son paralelos si uno de ellos es paralelo a dos rectas que se cortan en el otro.

● Por un punto exterior a un plano α se puede trazar uno y solo un plano paralelo al plano α.
● Si dos planos son paralelos a un tercero son paralelos entre sí.
● Si dos planos paralelos son cortados por un tercero, las rectas de intersección que resultan son paralelas. En la figura 2.8 se tiene que $\alpha \cap \gamma = \{p\}$, $\beta \cap \gamma = \{r\}$ y $\alpha \| \beta$ entonces $r \| p$.

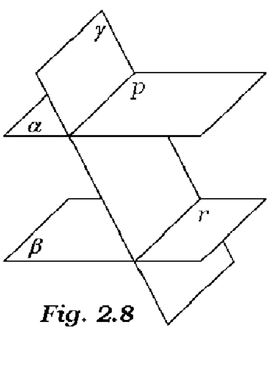


Fig. 2.8

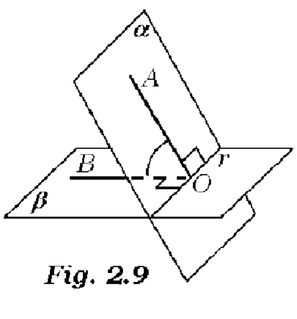


Fig. 2.9

● Se llama ángulo de inclinación entre dos planos al menor ángulo formado por dos rectas, una de cada plano, perpendiculares a la recta de intersección entre los planos en un mismo punto de esta. En la figura 2.9 el $\angle AOB$ es el ángulo de inclinación entre los planos α y β.

● Criterio de perpendicularidad de dos planos.
Dos planos son perpendiculares si uno de ellos contiene una recta perpendicular al otro.

● Si dos planos α y β son perpendiculares y una recta r contenida en α es perpendicular a la recta de intersección, entonces r es perpendicular al plano β (figura 2.10).

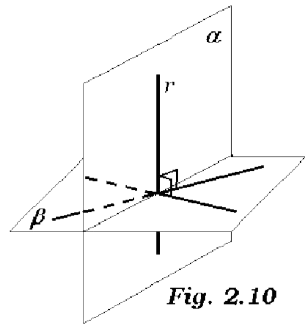


Fig. 2.10

1.3 Poliedros

● Se llama ángulo poliedro a la región del plano limitada por tres o más planos que se cortan sucesivamente, según rectas que concurren en un punto (figura 2.11). El punto en que concurren los planos (O) se llama vértice del poliedro, a las semirrectas OA, OB, OC, OD, … aristas y a los planos AOB, BOC, COD, … caras del ángulo poliedro.

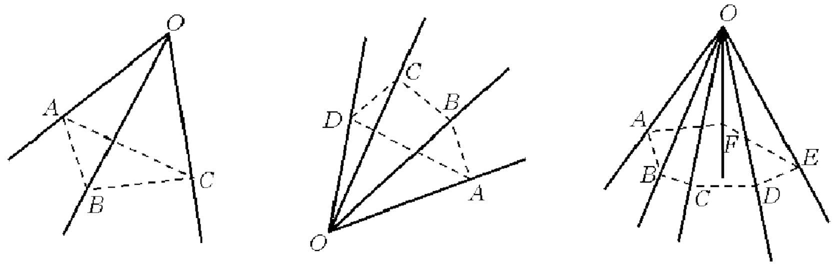


Fig. 2.11

● Un ángulo poliedro es convexo si está a un lado cualquiera de sus ángulos planos (figura 2.11).

● La suma de los ángulos planos de un ángulo poliedro es menor o igual a 360º.

● <u>Poliedro</u>: Se llama poliedro a todo cuerpo limitado por un número finito de planos.
- Las pirámides y prismas son poliedros.

● Las pirámides, prismas o cono en que la altura coincida con el centro de la base se llama recto.

● Las pirámides y prismas rectos que tengan por base un polígono regular se dicen regulares.

● Se llama poliedro convexo si está contenido en un solo lado de cualquiera de los planos que lo limitan.

● Un poliedro convexo se llama regular si sus caras son polígonos regulares iguales y todos sus ángulos poliedros son iguales. Existen cinco tipos de poliedros regulares y son (figura 2.12):

- El **tetraedro**, tiene 4 caras que son triángulos equiláteros.
- El **cubo**, tiene 6 caras que son cuadrados.
- El **octaedro**, tiene 8 caras que son triángulos equiláteros.
- El **dodecaedro**, tiene 12 caras que son pentágonos regulares.
- El **icosaedro**, tiene 20 caras que son triángulos equiláteros.

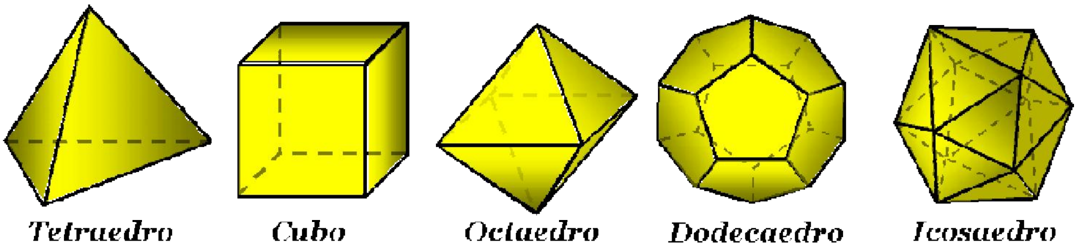


Fig. 2.12

● Volúmenes.

- Prismas y cilindro: $V = A_Bh$ - Pirámides y cono: $V = \frac{1}{3} A_Bh$
- Cubo: $V = a^3$ - Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

● Áreas en los cuerpos.

- <u>Área lateral</u> (A_L):
  Prismas y pirámides: suma de las áreas de las caras del cuerpo.
  Cilindro circular recto: $A_L = 2\pi rh$
  Cono: $A_L = \pi rg$
  En el caso de los prismas rectos el área lateral también se puede obtener por la expresión $\mathbf{A_L = P.h}$ con P: perímetro de la base y h: altura del prisma.
- <u>Área total</u> (A_T): Es la suma del área lateral y el área de las bases.
- Área de una esfera: $A = 4\pi r^2$

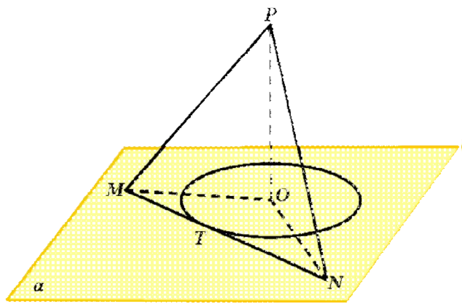
2. Ejercicios propuestos.

1. Demuestra que si dos oblicuas que parten de un mismo punto tiene igual sus proyecciones sobre un plano α entonces son iguales.

2. Un $\triangle MNP$ tiene el lado $\overline{MN}$ en el plano α tangente en el punto T a una circunferencia de centro O y radio 5,4 cm de ese plano como muestra la figura. El punto O es la proyección del punto P sobre el plano.

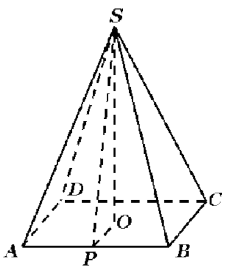
a) Demuestra que $\overline{PT}$ es altura del $\triangle MNP$.

b) Si el $\triangle MNO$ es isósceles de base $\overline{MN}$, prueba que el $\triangle MNP$ también lo es.



c) Si $\overline{MN}$ es igual al diámetro de la circunferencia y el $\angle PTO = 60º$, calcula el área del ΔMNP y el volumen de la pirámide oblicua OMNP.

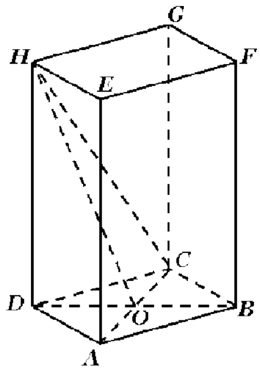
3. En la figura ABCDS es una pirámide recta de base cuadrada de 4,0 cm de lado. El punto O es la proyección de S sobre la base y P punto medio de $\overline{AB}$, el $\angle PSO = 30º$. Calcula el volumen de la pirámide, su área lateral y total.



4. Un prisma ABCDEFGH tiene como bases los rombos ABCD y EFGH. ABCD está en el plano α y sus diagonales son $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ que se cortan en O. Demuestra que $\overline{OH}$ es altura del ΔHOC.

a) Si el perímetro del rombo es de 52 cm, la diagonal $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{BD} + 4$ y el $\angle DOH = 60º$, calcula el área del ΔHOC.

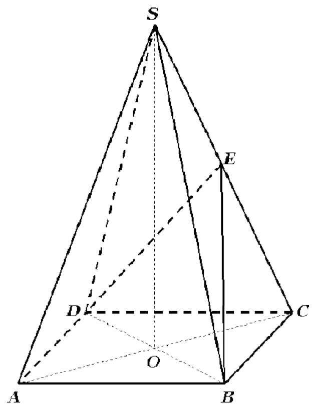
b) Calcula el volumen del prisma.



5. La pirámide recta ABCDS de base cuadrada se corta por un plano que contiene a los puntos B, D y E de forma tal que E es el punto medio de la arista $\overline{SC}$. Si el área de su base es de 98,0 cm^2 y la arista $\overline{SC} = 25,0$ cm,

a) calcula el volumen de la pirámide resultante,

b) halla el área de la sección transversal y su inclinación respecto a la base.

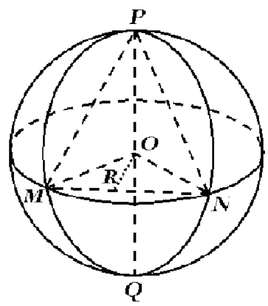


6. En la figura $\overline{PQ}$ es un diámetro de la esfera de centro O y radio $\overline{OM}$ perpendicular al plano MNO, $\overline{OM} \perp \overline{ON}$, R punto medio de $\overline{MN}$ y N punto de la esfera.

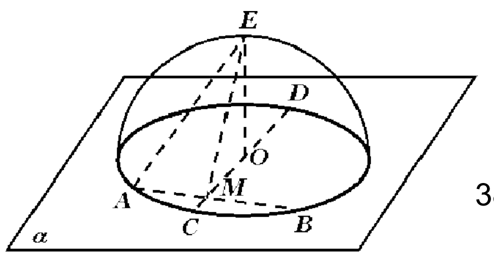
a) Demuestra que el ΔMNP es isósceles.

b) Prueba que: $\Delta ORN \sim \Delta MOP$.

c) Si $\overline{PQ} = 10$ cm, calcula el volumen de la esfera y el de la sección de esfera PMQN.



7. Sobre el plano α se apoya una semiesfera de centro O, donde $\overline{CD}$

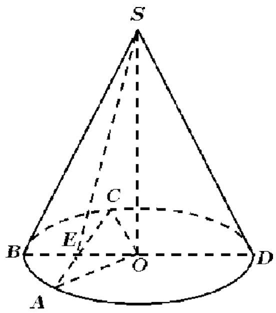


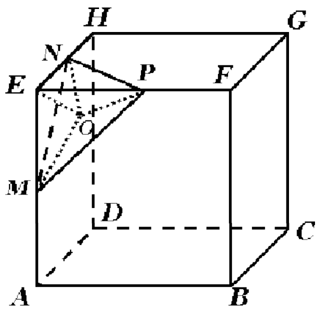
es un diámetro tal que $\overline{CD} \perp \overline{AB}$.

Los puntos A, B, C, D y E son puntos de la semiesfera con O proyección sobre α del punto E.

Si $\overline{AB} = 4\sqrt{5}$ cm y el área del ΔAME de $10\sqrt{5}$ cm^2, calcula el volumen de la semiesfera y el de la pirámide AMOE.

8. Sean los puntos A, B, C y D de la circunferencia base de un cono de altura $\overline{OS}$. La oblicua $\overline{SE}$ forma con su proyección $\overline{OE}$ sobre el plano de la base del cono el $\angle$SEO = 45º, la cuerda $\overline{AC}$ es perpendicular al diámetro $\overline{BD}$ en el punto E, $\overline{AC}$ = 4,0 cm y $\angle$AOC = 60º. Halla el volumen del cono y demuestra que $\overline{SE} \perp \overline{AC}$.



9. 

Al cubo ABCDEFGH de 12 dm de lado lo corta un plano por los puntos medios M, N y P de las aristas concurrentes en el vértice E. O es la proyección sobre el plano MNP del vértice E.

a) Demuestra que el ΔMNP es equilátero.

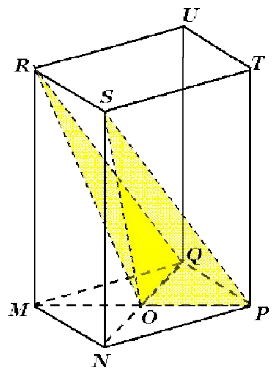
b) Calcula el volumen y el área total de la pirámide resultante.

10. En el prisma MNPQRSTU de base cuadrada se han trazado las oblicuas $\overline{RO}, \overline{RQ}, \overline{SO}$ y $\overline{SP}$. La diagonal de la base $\overline{MP}$ mide 4,0 dm y el $\angle$MOR = 60º.

a) Demuestra que: ΔOQR = ΔOPS.

b) Calcula el área del Δ OPS.

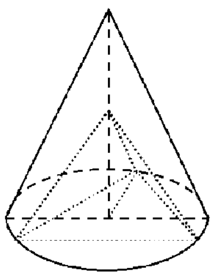
c) ¿Qué por ciento representa el volumen de la pirámide ONPS del volumen del prisma?



11. La figura muestra un cono circular recto en cuya base se ha inscrito un triángulo equilátero de 4,0 dm de lado que a su vez es la base de una pirámide de altura igual a la distancia del centro del cono a uno de los vértices del triángulo.

a) Calcula el volumen de la pirámide.

b) Calcula el volumen del cono sabiendo que la razón entre ambas alturas es $\frac{1}{2}$.

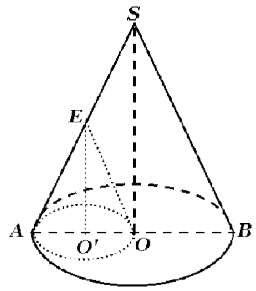


12. Dos puntos M y N exteriores al plano α, que se encuentran separados entre sí 15 cm, están a igual distancia de dicho plano. Se trazan las oblicuas $\overline{MA}$ y $\overline{NB}$ con una inclinación de 45º tales que sus proyecciones sobre α son paralelas e iguales a 12 cm y perpendiculares al segmento determinado por los puntos A y B.

a) Calcula el volumen del prisma de base triangular que queda determinado y su área total.

b) Halla las longitudes de las oblicuas $\overline{MB}$ y $\overline{NA}$ y su inclinación respecto al plano α.

13. Un cono circular recto de diámetro $\overline{AB} = 12$ dm, tiene dentro otro cono cuya base es tangente interior en A a su base y diámetro igual al radio del cono exterior. La altura $\overline{O'E}$ del cono interior es de 40 cm.



a) Calcula el volumen de ambos conos.

b) Calcula el área lateral del cono exterior.

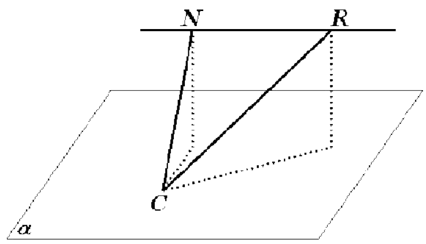
14. Desde un punto S se trazan dos oblicuas $\overline{SA}$ y $\overline{SB}$ al plano α formando un ángulo de 60º entre sus proyecciones en α. La oblicua $\overline{SA}$ tiene una inclinación de 45º respecto a α y su proyección es perpendicular al $\overline{AB}$ que mide 10,8 dm.

a) Calcula el volumen de la pirámide.

b) Determina el ángulo de inclinación de la oblicua $\overline{SB}$.

c) Halla el área del ΔSAB.

15. Por dos punto R y N de una paralela al plano α se trazan las oblicuas $\overline{RC}$ y $\overline{NC}$, determinándose el ΔRNC rectángulo en N. Si $\overline{RN} = 8{,}0$ dm $\angle$RCN = 30º y la oblicua $\overline{NC}$ tiene una inclinación de 45º respecto al plano α.

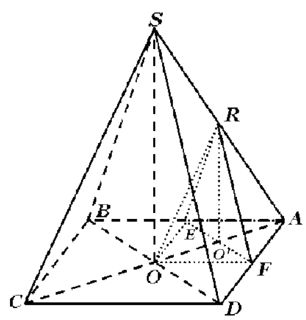


a) Determina el volumen de la pirámide.

b) Halla la longitud e inclinación de la oblicua $\overline{RC}$.

c) Calcula la altura relativa a la hipotenusa del ΔRNC.

16. La pirámide recta de base cuadrada ABCDS tiene en su interior otra pirámide de base cuadrada AEOFR de forma tal que el vértice R $\in \overline{AS}$ como muestra la figura. E y F son los puntos medios de las aristas $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ respectivamente, $\overline{AF} = 2{,}0$u y $\overline{OS} = \overline{AC}$.



a) Calcula el volumen de ambas pirámides.

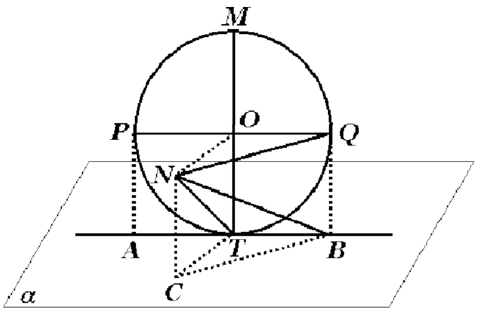
b) Demuestra que: $\overline{OR} \perp \overline{BD}$.

c) Prueba que: ΔFRE ~ ΔDSB.

17. De una pirámide de base triangular equilátera de 6,0 cm de lado y de altura el doble de la arista de la base se quiere obtener un tetraedro regular de igual base.

a) ¿Qué cantidad de material hay que rebajar para obtener el tetraedro?

b) ¿Qué ángulo formarían las aristas laterales del tetraedro y de la pirámide?

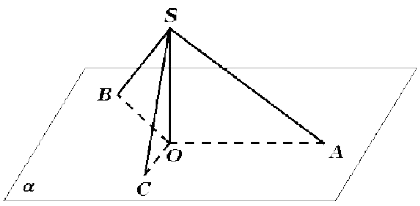


18. En una circunferencia $C(O;\overline{OM})$, $\overline{MT}$ y $\overline{PQ}$ son diámetros perpendiculares entre si, $\overline{MT}$ es perpendicular al plano α y la circunferencia es tangente en T a la recta AB determinada por las proyecciones de P y Q sobre α como muestra la figura. Un punto N $\notin \alpha$ cumple que C = $proy_{\alpha}$ N y O = $proy_{PTQ}$ N.

a) Prueba que los triángulos NQB y NTB son rectángulos.

b) Si $\overline{MT}$ = 15 dm y $\angle$NTO = 60º, calcula el volumen de la pirámide OTBQN y del prisma CBTNQO.

19. Desde un punto S que dista 12 dm de un plano α se trazan tres oblicuas $\overline{SA}$, $\overline{SB}$ y $\overline{SC}$ cuyas proyecciones $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ miden 16 dm, 9,0 dm y 5,0 dm respectivamente. Los ángulos que forman las proyecciones miden $\angle$AOB = 150º, $\angle$BOC = 120º y $\angle$AOC = 90º.



a) Calcula la longitud de cada oblicua y su inclinación respecto al plano α.

b) Halla la distancia entre cada pie de las oblicuas.

c) Determina el volumen de la pirámide ABCS.

20. A un cono de 10 cm de radio y 30 cm de altura se le quiere inscribir un cilindro de 8,0 cm de radio. Determina la altura del cilindro y qué porciento representa su volumen respecto al volumen del cono.

21. El volumen del prisma ABCDEFGH es de 2,05 dm^3, su base es un cuadrado de 256 cm^2. El prisma es cortado por el plano MDB de forma tal que M es el punto medio del $\overline{CG}$ como se muestra en la figura.

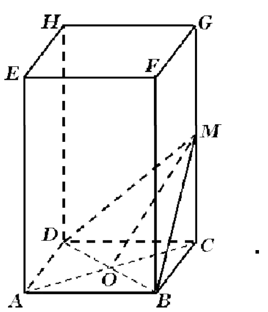
a) Prueba que: ΔBMD es isósceles.

b) Calcula el área del ΔBMD.

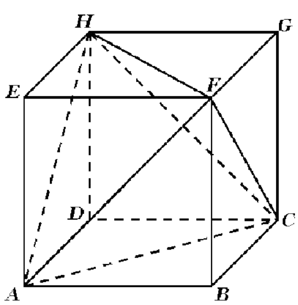
c) Demuestra que:

$A_{\Delta BCD} = A_{\Delta BMD} \cdot \cos\angle MOC$

d) Halla el volumen de la pirámide DBCM.



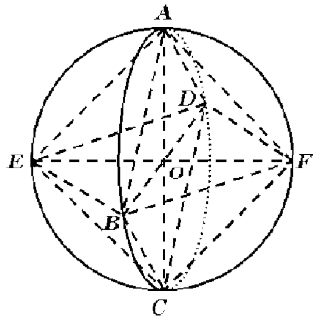
22.



Desde el vértice F del cubo ABCDEFGH se trazan las diagonales de las caras cuya intersección es dicho vértice, determinándose la pirámide ACHF.

a) Prueba que la pirámide ACHF es un tetraedro regular.

c) Si la arista del cubo es de 9,6 dm; halla el volumen de ACHF y la inclinación de sus caras respecto a las del cubo.



23. En una esfera de centro O y radio $\overline{OA}$ los arcos AB, BC, CD y AD son iguales y pertenecen a una de las circunferencias de la esfera, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ y $\overline{EF}$ son diámetros de la esfera perpendiculares entre sí.

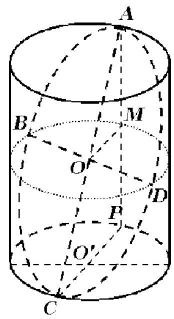
a) Si el radio de la esfera es de 5,3 cm, calcula el volumen del cuerpo formado dentro de ella como muestra la figura.

b) Calcula el área total de dicho cuerpo.

24. Un cilindro de 9,0 cm de radio y 40 cm de altura tiene inscrita una elipse cuyo eje menor y la proyección del eje mayor sobre la base son iguales al diámetro del cilindro como muestra la figura.

a) Si el área de una elipse se obtiene por la relación **A = πab**, donde "a" es la longitud del semieje mayor y "b" la del semieje menor, calcula su área.

b) ¿Qué amplitud tiene el ángulo de inclinación del plano que contiene a la elipse respecto a la base en que se apoya el cilindro?



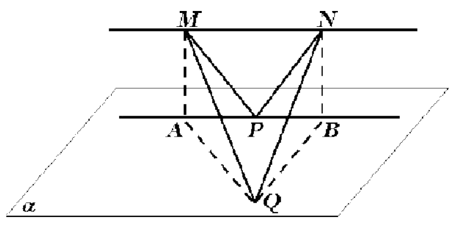
25. Una recta MN paralela al plano α dista del plano 100mm, siendo la recta AB su proyección sobre α y el punto P es el punto medio del $\overline{AB}$. Se trazan las oblicuas $\overline{MP}, \overline{MQ}, \overline{NP}$ y $\overline{NQ}$ tales que $\overline{MQ} = \overline{NQ}$ con $Q \in \alpha$ y $\overline{PQ} \perp$ NMP.

a) Demuestra que: $\Delta MQP = \Delta NPQ$.

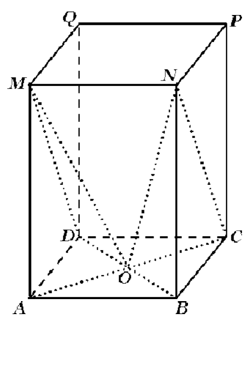
b) Prueba que: ΔAQB es isósceles.

c) Si $\overline{MN}$ = 20 cm y $A_{\Delta ABQ}$= 1,5 dm^2, calcula el volumen de la pirámide NMPQ y el área del ΔQNM.

d) De los triángulos que se forman en la figura, ¿cuáles son rectángulos? Fundamenta tu respuesta.



26. En el prisma de base cuadrada ABCDMNPQ y altura 8,0 dm, la diagonal $\overline{AC}$ = 6,0 cm, se



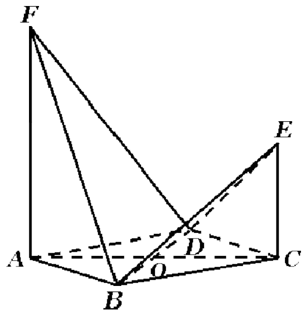
trazan las oblicuas $\overline{MD}$, $\overline{MO}$, $\overline{NC}$ y $\overline{NO}$.

a) Prueba que los triángulos OMD y OCN son rectángulos e iguales.

b) Calcula la amplitud del ángulo formado por las oblicuas $\overline{MO}$ y $\overline{NO}$.

c) ¿Qué porciento representa el volumen de la pirámide AODM del volumen del prisma?

27. El rombo ABCD sirve de base a dos tetraedros tal como muestra la figura. $\overline{AF} = 2 \cdot \overline{EC}$, $\overline{AF} \,||\, \overline{EC}$ y $\overline{AF} \perp ABC$. Si $\overline{AC}$ = 8,0 cm , $\overline{BD}$ = 6,0cm y $\angle EBC = 45º$, calcula:

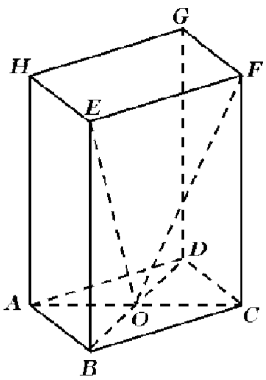


a) Área del ΔFBD.

b) Área del ΔBDE.

c) Volumen del cuerpo formado.

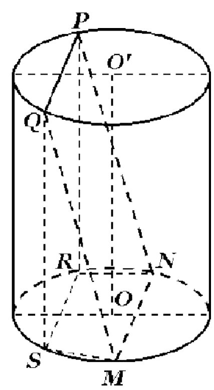
28. En el prisma ABCDEFGH de base romboidal se cumple que: $\overline{BD}$ = 6,0 cm y $\overline{AC} = \overline{FC}$ = 8,0 cm.



a) ¿Es isósceles el ΔEOF que se forma al trazar las oblicuas $\overline{OE}$ y $\overline{OF}$? Fundamenta

b) Calcula el ángulo que forman las oblicuas $\overline{OE}$ y $\overline{OF}$ y el área del ΔEOF.

29. Un cilindro de 24 cm de diámetro y 40 cm de altura tiene inscrito un trapecio isósceles MNPQ como nuestra la figura. La distancia de $\overline{MN}$ al centro O es la cuarta parte del radio y la de $\overline{PQ}$ al centro O' es la mitad del radio.

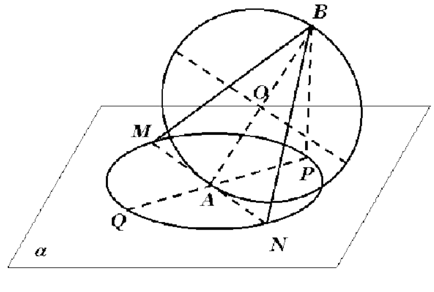


a) Prueba que la proyección MNRS de MNPQ es también un trapecio isósceles.

b) Calcula el área del trapecio MNPQ y de su proyección.

c) Calcula el ángulo de inclinación del plano MNQ respecto a la base de centro O del cilindro.

30. Una circunferencia de centro O y radio $\overline{OA}$ es tangente al plano α en A, centro de una circunferencia de radio $\overline{AP}$ = 6,8 dm en el plano α. El radio $\overline{AP}$ es la proyección sobre α del diámetro $\overline{AB}$. Los pies de las oblicuas $\overline{BM}$ y $\overline{BN}$

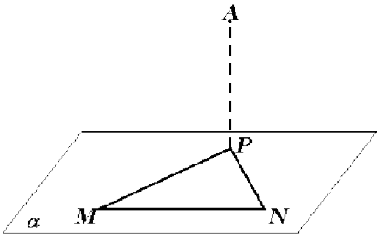


determinan el diámetro $\overline{MN} \perp \overline{PQ}$ en la circunferencia de centro A.

a) Demuestra que el ΔMNB es isósceles.

b) Si $\angle$BAP = 70,1º, calcula el área del ΔMNB y el volumen de la pirámide MNPB y el área del círculo de centro O.

31. En el plano α el triángulo MNP es isósceles y rectángulo en P, sus catetos miden 10 cm. El vértice P es la proyección sobre el plano de un punto A que se encuentra a 20 cm del plano como muestra la figura.



a) Demuestra que el ΔMNA es isósceles.

b) Halla la distancia del punto A a la hipotenusa del triangulo MNP.

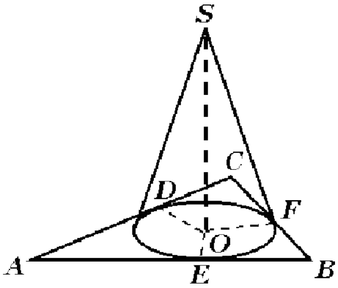
c) Calcula el volumen y el área lateral de la pirámide MNPA.

32. Un ΔABC equilátero de 24,0 cm de lado tiene inscrita una circunferencia de centro O que sirve de base a un cono de 20,0 cm de altura y vértice S cuya proyección en el plano ABC es el punto O.

a) Halla la inclinación de las generatrices del cono y su volumen.

b) Halla el volumen de la pirámide DEFS y su área total.

c) ¿Está inscrito el cono en el tetraedro de base ABC? Fundamenta.

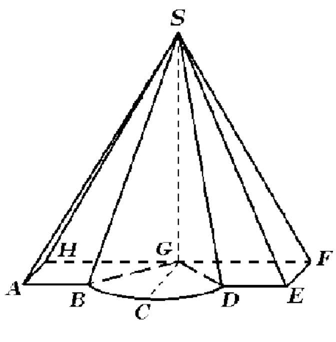


33. La figura muestra un cuerpo formado por dos pirámides oblicuas cuyas bases son trapecios rectángulos y un cuarto de cono de radio $\overline{GC}$, donde $\overline{AB} = \overline{DE} = \overline{AH} = \overline{EF}$, G punto medio de $\overline{HF}$, $\overline{HG} = 2 \cdot \overline{AB}$ y $\overline{HF}$ = 24 cm. Si el ΔHFS es equilátero,

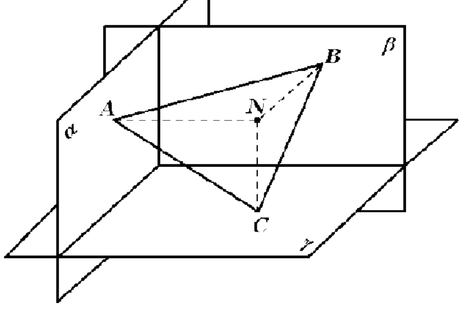
a) calcula el volumen del cuerpo.

b) Demuestra que: ΔABS = ΔDES.

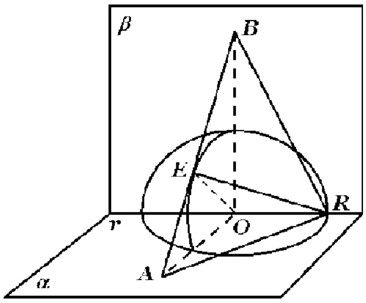
c) Determina las aristas que son iguales. Fundamenta tu respuesta.



34. Sobre tres planos α, β y γ perpendiculares entre si dos a dos se proyecta un punto N que no pertenece a ninguno de ellos de forma tal que A = proy$_{\alpha}$N, B = proy$_{\beta}$N y C = proy$_{\gamma}$N. $\overline{NA} = \overline{NB}$ = 80 cm y $\overline{NC}$ = 60 cm.



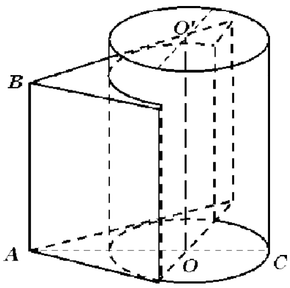
a) Prueba que: el ΔACB es isósceles.
b) Halla el área del ΔACB y la amplitud de sus ángulos interiores.
c) Calcula el volumen de la pirámide ACBN.
d) Calcula la amplitud del ángulo de inclinación respecto al plano β de las oblicuas $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.
e) Las oblicuas $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ tienen la misma inclinación respecto al plano γ. Fundamenta esta afirmación.



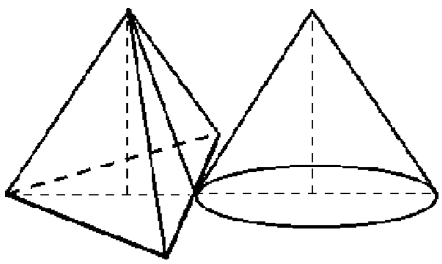
35. Una esfera de centro O y radio $\overline{OR}$ es cortada por dos planos α y β perpendiculares. La oblicua $\overline{AB}$ es tangente en E a la esfera, O es la proyección de los puntos A, B y R sobre los planos β, α y AOB respectivamente y $\overline{OA} = \overline{OB}$.

a) Demuestra que: ΔARB es isósceles.
b) Si $\overline{OE} = 7{,}00$ cm y $\overline{BR} = 7\sqrt{3}$ cm, calcula la longitud de la oblicua $\overline{AB}$ y el área del ΔARB.
c) Calcula el volumen de la pirámide oblicua de base EOR y vértice B.
d) Calcula la amplitud del ángulo formado entre las oblicua $\overline{AR}$ y $\overline{BR}$.

36. La base del cuerpo que representa la figura está compuesta por una circunferencia y un triángulo equilátero de forma tal que la circunferencia es tangente a dos lados del triángulo y su centro O es el punto medio del tercer lado del triángulo. Calcula el volumen del cuerpo sabiendo que $\overline{AB}$ y $\overline{OO'}$ son perpendiculares a la base, $\overline{OC} = 5{,}0$ cm, $\overline{AB} = 4\overline{OC}$ y $\overline{OO'} = 5\overline{OC}$.



37. Un pirámide recta de base triangular equilátera de 24 cm de lado tiene igual altura que un cono cuya base es tangente a la de la pirámide. El radio del cono es igual a la distancia del centro del triángulo equilátero a uno de sus vértices y el ángulo de inclinación de las aristas de la pirámide respecto a la base es de 54,7º.

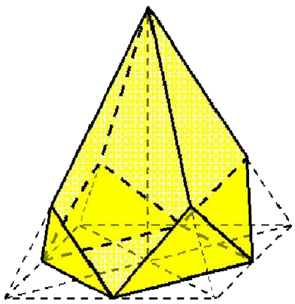


a) Calcula el volumen de ambos cuerpos.
b) Calcula el área lateral de la pirámide.
c) Calcula la amplitud del ángulo formado por la generatriz del cono y la altura de la cara de la pirámide en el punto de tangencia.

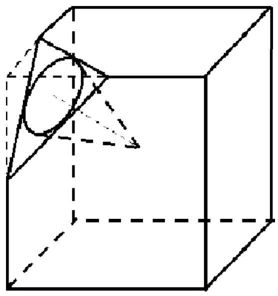
38. Una pirámide recta de base cuadrada es cortada por 4 planos de forma tal que intersecan a la base por los puntos medios de sus lados y a las aristas laterales por un punto que determina un segmento cuya longitudes es un tercio de la longitud de las aristas. Si la base tiene 64,0 cm^2 de área y la altura de la pirámide es de 1,50 dm:

a) Calcula el volumen del cuerpo resultante.

b) Halla el área de cada sección transversal y su inclinación respecto a la base.



39. Un cubo de 36 cm de lado es cortado por los puntos medios de tres aristas concurrentes en un vértice, por la sección transversal se realiza una perforación cónica tal que la circunferencia base queda inscrita en los lados de la sección transversal y la profundidad del hueco llega hasta el centro del cubo como se muestra en la figura.



a) Calcula el volumen del material eliminado

b) Halla el área total del cuerpo resultante.

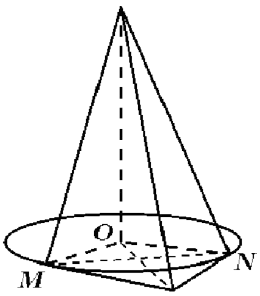
40. Desde un punto A exterior a una circunferencia de centro O y radio 5,0 cm se trazan las tangente $\overline{AM}$ y $\overline{AN}$. El centro O es la proyección de un punto S sobre el plano de la circunferencia y dista del plano 1,2 dm.

a) Prueba que el triángulo MNS es isósceles.

b) Demuestra que los triángulos SMA y SAN son rectángulos e iguales.

c) Si $\angle MAS = 60º$, calcula la distancia del punto A al centro de la circunferencia.

d) Calcula el volumen y el área total de la pirámide MANOS.

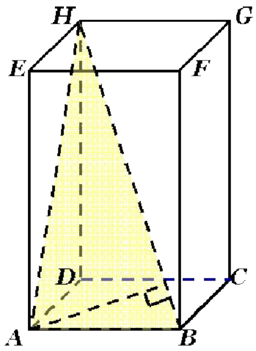


41. La altura y una paralela media de un triángulo equilátero de lado l representan el eje mayor y menor de una elipse que sirve de base a un cilindro recto cuya altura es el duplo de la altura del triángulo equilátero. Calcula el volumen del cilindro en función del lado del triángulo.

42. Una pirámide regular de base cuadrada de lado 9,0 cm y 15 cm de altura se corta por un plano paralelo a la base de forma tal, que su intersección con las aristas laterales son puntos cuyas distancias al vértice son los dos tercios de la longitud de la arista. Halla el volumen y el área total de la pirámide resultante.

43. Un cubo tiene un hueco cónico por el centro de una cara tal que su profundidad es la cuarta parte de la arista, y el diámetro es el doble de su profundidad. ¿Cuánto mide la arista del cubo y cuál es la capacidad del hueco si el cuerpo resultante tiene un volumen de 63 dm^3 ?

44. En el ortoedro ABCDEFGH, $\overline{AB}$ = 21cm y la diagonal de la cara ADHE mide 28 cm. Calcula la distancia del vértice A a la diagonal interior $\overline{BH}$ y el área del triángulo ABH.



45. Desde un punto S a 24 cm de un plano α se trazan las oblicuas $\overline{SA}$, $\overline{SB}$ y $\overline{SC}$ de 25 cm de longitud cada una de forma tal que los puntos A, B y C forman sobre α un triángulo acutángulo.

a) Calcula el volumen del cono de vértice S y cuya base contiene a los puntos A, B y C.

b) Si las proyecciones de las oblicuas $\overline{SA}$ y $\overline{SB}$ forman un ángulo de 120º, calcula el área del ΔSAB.

c) Calcula el ángulo entre las oblicuas $\overline{SA}$ y $\overline{SB}$.

46. Un punto P se proyecta sobre el plano de un cuadrado ABCD de 9,0 cm de lado, tal que el vértice C es su proyección y se trazan las oblicuas $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ y $\overline{DP}$.

a) Demuestra que: ΔABP = ΔADP.

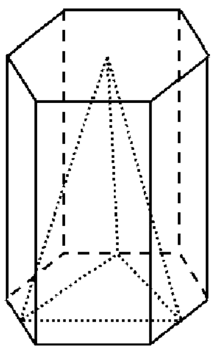
b) ¿Es la oblicua trazada desde el punto P al centro del cuadrado la altura del ΔBPD? Fundamenta.

c) Si el punto P dista del plano 40 cm, calcula el área de los triángulos ABP y BPD.

47. Un prisma de base exagonal regular de 4,0 dm de lado tiene inscrita una pirámide recta de base equilátera tal que los vértices de este triángulo son los puntos medios de lados alternos del exágono.

a) Si la altura del prisma es de 6,0 dm, calcula el volumen y el área lateral de la pirámide.

b) ¿En qué porcentaje debe reducirse la altura para que la pirámide sea un tetraedro regular?

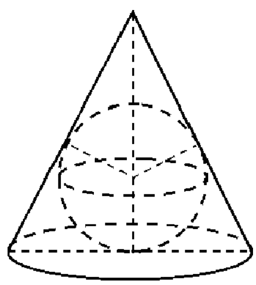


48. Un cono recto de radio r tiene inscrita una esfera de radio R tal que R = $\frac{\sqrt{3}}{3}$r. Demuestra que:

a) La sección transversal del cono, bajo esas condiciones, es un triángulo equilátero.

b) $\frac{V_e}{V_c} = \frac{4}{9}$.

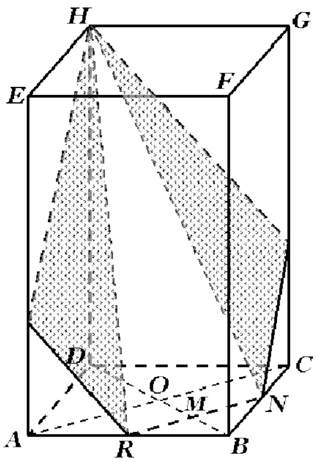
c) Si el radio de la base del cono es de 6,0 dm, halla el volumen de la esfera.



49. A una pirámide de base cuadrada de 7,6 cm de lado se le hace una perforación semiesférica por el centro de la base. Si el radio de la semiesfera es de 3,0 cm y la inclinación de las caras de la pirámide es de 60º,

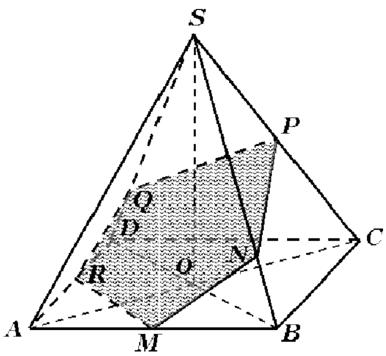
a) ¿cuál es el volumen de la pirámide perforada?
b) ¿es tangente la semiesfera a las caras de la pirámide?
c) calcula el área lateral de la pirámide.

50. El prisma ABCDEFGH de base cuadrada es cortado por un plano de forma tal que lo hace por los puntos medios de dos aristas consecutivas de la base y por el vértice H como se muestra en la figura. Si el cuadrado base tiene 4,0 dm de lado y la altura del prisma es de 6,0 dm,



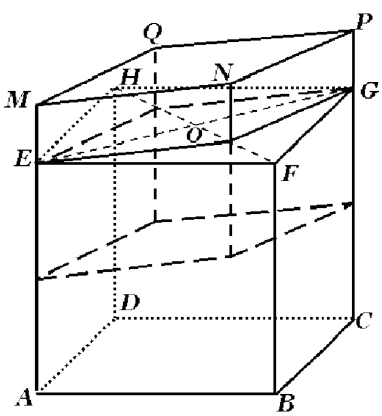
a) halla el área de la sección transversal sombreada,
b) ¿cuál es la amplitud del ángulo de inclinación con que el plano cortó al prisma?
c) ¿Es $\overline{QR} = \overline{NP}$? Fundamenta.
d) Demuestra que para cualquiera sea la longitud de la arista de la base y la altura del prisma el plano divide a la altura en la razón 1:3.

51. La figura muestra una pirámide recta de base cuadrada de altura igual a la arista de la base de 4,0 cm de longitud, que es cortada por el plano RMP donde R, M y P son puntos medios de las aristas correspondientes y $\overline{QN} \parallel \overline{BD}$



a) Calcula la amplitud del ángulo de inclinación de la sección transversal.
b) Demuestra que para cualquiera sea la longitud de la altura el plano divide a esta en la razón 1: 4.
c) Halla el área de la sección transversal RMNPQ.

52. En el cubo ABCDEFGH se introduce un prisma de base romboidal hasta la mitad de su altura como se muestra en la figura. El prisma tiene una altura igual a los tres cuartos de la altura del cubo y la longitud de la diagonal menor de su base es la mitad de la diagonal de las caras del cubo cuyas aristas miden 16 dm. Calcula:



a) el volumen del prisma y el del cubo hueco que le sirve de base,

b) el área total y volumen del cuerpo.

Respuestas
Capítulo 1

(3) sugerencia: utiliza la diferencia de segmentos y ángulos iguales.

(4) a) sugerencia: traza el $\overline{EB}$,
b) $A_{\Delta DFC}$ = 30 cm^2

(6) A_s = 14 cm^2

(7) b) sugerencia: prueba $\overline{EB}$ como mediatriz de $\overline{AC}$, c) A_s = 14 cm^2

(8) A_s = 14 cm^2

(9) sugerencia: prueba que $\Delta ADN = \Delta AMB$, A_s = 70 cm^2

(12) b) A_s = 8,4 cm^2

(14) d) sugerencia: prueba que ΔAOQ es isósceles,
A_s = 9,4 cm^2

(15) sugerencia: trabaja la simetría axial del rombo.

(16) sugerencia: prueba que $\Delta ABC = \Delta ACH$.

(17) c) sugerencia: traza el radio $\overline{OD}$,aplica propiedades de la mediatriz y utiliza puntos notables del triángulo,
d) $A_{\Delta OEC}$ = 16 cm^2

(18) b) sugerencia: traza una paralela a $\overline{AB}$ por G,
A_s = 13 cm^2

(19) c) A_{BCHF}= 1,4 dm^2

(22) f) A_{FIG} = 32 cm^2

(23) b) $A_{\Delta ADC}$ = 20 dm^2

(24) $A_{\Delta ABC}$= 4,5 dm^2

(25) $A_{\Delta PMR}$ = 7,6 cm^2

(26) A_s = 2,6 cm^2

(27) b) $\angle BCD = 100º$

(28) sugerencia: aplica Ley de los cosenos, $\overline{CD}$ = 5,5 cm

(29) sugerencia: ten presente la propiedad del punto exterior a la circunferencia, A_s = 18 cm^2

(30) A_s = 6,3 cm^2

(32) $A_{\Delta AEN}$ = 3,5 cm^2

(35) $A_{\Delta DEF} = \dfrac{3a^2}{8}$ u^2

(36) 90,5%

(37) sugerencia: demuestra paralelismo, 29cm^2

(39) $A_{Fig.}$= 61 cm^2

(40) $\overline{AC}$ = 10 cm, $\overline{BD}$ = 6,9 cm

(42) 45 u^2

(43) c) sugerencia: traza el radio $\overline{OC}$, $A_{\Delta DEO}$=16 cm^2

(45) b) A_S= 29 dm^2

(46) b) $P_{\Delta ABC}$= 21 cm

(47) a) sugerencia: prueba $\Delta PRS \sim \Delta MNP$.
b) $A_{\Delta SPR}$= 36 dm^2

(48) $A_{\Delta ABC}$= 63 cm^2,
$A_{\Delta ADC}$= $A_{\Delta DBC}$= 31 cm^2
$A_{\Delta FDH}$= $A_{\Delta HDI}$= 14 cm^2
$A_{\Delta FIH}$= 28 cm^2
$A_{\Delta CGH}$= $A_{\Delta AFE}$= 3,5 cm^2

(50) sugerencia: traza la cuerda $\overline{BD}$,
$\overline{AB}$ = 6,7 cm y $\overline{BC}$ = 12 cm

(51) mayor distancia: 49 cm
menor distancia: 0,91 cm

(52) sugerencia: recuerda propiedad de las bisectrices de ángulos adyacentes, A_S= 2,4 dm^2

(53) sugerencia: establece la proporcionalidad de los lados homólogos y expresa el área del ΔABC en función del área del ΔABN, A_S= 53 cm^2

(54) r = 1,1 cm ;73,1%

(56) a) sugerencia: traza el radio $\overline{OB}$
b) $\angle A = 45º$, $\overline{BD}$ = 7,1 cm

(57) d) $k = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ó $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
e) $A_{ABCD}= \dfrac{7\sqrt{3}}{6}$ r^2 (r: radio)

(58) sugerencia: prueba que ΔABD

es equilátero y al área de FBCDE resta $A_{\Delta FCE}$;
A_S= 27 cm^2

(59) b) 84 cm^2

(60) A = 13 cm^2

(61) A = 21 dm^2

(62) <u>sugerencia</u>: analiza el punto de intersección de los arcos dados, A_S= 11cm^2

(63) $A_{Fig.}$= 21 cm^2.

(65) $A_{Fig.}= \frac{5\pi + 6\sqrt{3}}{24} a^2$

(66) <u>sugerencia</u>: traza un radio en la circunferencia de centro O.

(67) c) <u>sugerencia</u>: utiliza razones trigonométricas, $A_{\Delta NSQ}$= 15 cm^2

(70) <u>sugerencia</u>: utiliza la afirmación del ejercicio 67, A_S= 10 dm^2

(71) $\angle ADQ$ = 126,9º, A_{ABCD} = 18 cm^2

(72) b) A_S= 1,4 dm^2

(73) longitud del arco AC: 8,72 cm
$\overline{AC}$ = 7,66 cm

(74) b) A_S= 24,4 cm^2

(75) <u>sugerencia</u>: trabaja Pitágoras en función del radio,
A_S= 1,3 dm^2

(76) b) A_S= 36 cm^2

(77) c) $A_{\Delta CEF}$ = 28 cm^2

(80) c) A_S= 2,3 cm^2 ; $\overline{PQ}$ = 8,7 cm

(81) <u>sugerencia</u>: analiza el punto D respecto al ΔABC ; A_S= 9,4 cm^2

(82) A_S= 48 cm^2

(83) <u>sugerencia</u>: traza por D una perpendicular a $\overline{AB}$,
A_S = 4,7 cm^2

(84) b) <u>sugerencia</u>: prueba semejanza de triángulo,
$A_{\Delta OAD}$= 9,0 cm^2

(85) c) A_S = 14 cm^2

(87) c) $A_{\Delta CBD}$ = 47 dm^2

(88) b) $A_{\Delta CFG}$= 14 cm^2

(90) α = 30º

(91) A = 9,5

Capítulo 2

(2) $A_{\Delta MNP}$= 58 cm^2; V_{OMNP}= 91 cm^3

(3) A_L= 28 cm^2; A_T= 44 cm^2 ;
V = 15 cm^3

(4) a) <u>sugerencia</u>: expresa Pitágoras en función de $\overline{OD}$,
$A_{\Delta HOC}$= 60 cm^2
b) V= 1,0 dm^3

(5) a) <u>sugerencia</u>: traza las alturas de ambas pirámides y analiza teorema de las transversales,
V_R= 196 cm^3.
b) A_S= 87,5 cm^2.

(6) V_e= 0,52 dm^3; V_{PMQN}= 0,13 dm^3

(7) semiesfera: V = 972 cm^3
pirámide: V = 36,5 cm^3

(8) V = 55 cm^3

(9) b) <u>sugerencia</u>: analiza el punto O respecto al ΔNMP;
V = 36 cm^3; A_T= 85 cm^2

(10) b) $A_{\Delta OPS}$= 4,0 cm ^{2}
c) 16,7%

(11) a) V = 5,3 dm^3
b) V = 26 dm^3

(12) a) 22 dm^3; A_T= 9,0 dm^2
b) $\overline{MB} = \overline{NA}$ = 23 cm;
ángulo: 32º

(13) a) cono interior: V= 38 dm^3
cono exterior: V = 0,30 m^3
b) A_L= 1,9 m^2

(14) a) 70 dm^3; b) 26,6º
c) <u>sugerencia</u>: usar resultado del ejercicio 21 inciso c;
$A_{\Delta SAB}$ = 47,6 dm^2

(15) a) V = 0,26 m^3
b) $\overline{RC}$ = 16 dm;
inclinación: 37,8º

c) $h_{\overline{RC}} = 6{,}9$ dm

(16) a) pirámide interior: 3,8 u^3
pirámide exterior: 30u^3

(17) a) 37 cm^3; b) 19,2º

(18) pirámide: V= 0,24 m^3
prisma: V= 0,73 m^3

(19) sugerencia: aplica lo conocido de la trigonometría respecto a los triángulos.
a) 20 dm; 15 dm; 13 dm; 36,9º; 53,1º; 76,4º
b) 24 dm; 12 dm; 17dm
c) V_{ABCS}= 0,38 dm^3

(20) h = 6,0 cm; 38,4%

(21) b) 1,4 dm^2 ; d) 0,17 dm^3

(22) b) V = 0,29 dm^3; 54,9º

(23) a) V = 0,2 dm^3
b) sugerencia: prueba que el cuerpo es un octaedro,
A_T= 1,9 m^2

(24) a) A = 25 dm^2 ; b) 65,8º

(25) V_{NMPQ}=0,5 dm^3; $A_{\Delta QNM}$= 18 cm^2

(26) b) sugerencia: Ley de los cosenos; $\angle$MON= 28,8º
c) 8,3%

(27) a) 32 cm^2; b) 19 cm^2; c) 60 cm^3

(28) b) $\angle$EOF= 33,1º; $A_{\Delta EOF}$= 21 cm^2

(29) b) A_{MNPQ}= 9,0 dm^2;
A_{MNRS}= 2,0 dm^2
c) 77,3º

(30) a) sugerencia: analiza las proyecciones de $\overline{BM}$ y $\overline{BN}$.
b) $A_{\Delta MNB}$= 1,4 m^2 ;
v_{MNPB}= 0,29 m^3; $A_{cír,}$= 3,1 m^2

(31) b) 21 cm ; c) V_{MNPA}= 0,29 m^3;
A_L= 3,5 dm^2

(32) a) V = 1,0 dm^3; 70,9º
b) V = 415 cm^3; A_T= 428 cm^2

(33) a) v = 1,4 dm^3

(34) b) $A_{\Delta ACB}$= 41 dm^2;
$\angle$A = $\angle$B = 55,6º ;
$\angle$C = 68,9º
c) sugerencia: halla la inclinación de $\overline{NC}$ respecto al plano ABC; V = 75 dm^3

d) $\overline{AB}$: 45º; $\overline{BC}$: 53,1º

(35) b) $\overline{AB}$ = 14 cm;
$A_{\Delta ARB}$= 69,1 cm^2
c) 57,2 cm^3; d) 70,5º

(36) 1,2 dm^3

(37) a) pirámide: 1,6 dm^3
cono: 3,9 dm^3
b) A_L= 14,3 dm^2 c) 54,9º

(38) a) 213 cm^3 b) A_s= 14,3 cm^2;
79,8º

(39) a) 2,1 dm^3 ; b) 79 dm^2

(40) c) $\overline{OA}$ = 9,0 dm
d) V = 0,15 dm^3 ; A_T= 2,4 dm^2

(41) V = $\dfrac{3\pi l^3}{4}$

(42) V = 0,41 dm^3 ; A_T= 1,6 dm^2

(43) arista: 40 cm ;
Capacidad: 1 L = 1,0 dm^3

(44) distancia: 17 cm ; A = 2,9 dm^2

(45) a) 1,2 dm^3 ; b) 1,5 dm^2 ; c) 28º

(46) c) $A_{\Delta ABP}$= 1,8 dm^2,
$A_{\Delta BPD}$= 2,6 dm^2

(47) a) sugerencia: paralela media del trapecio: $\dfrac{B+b}{2}$
V = 31 dm^3; A_L= 56 dm^2
b) 18,3%

(48) c) 0,17 dm^3

(49) a) V=70 cm^3;
b) sugerencia: Teorema de la altura.
c) A_L= 1,2 dm^2

(50) a) 17 dm^2 ; b) 54,7º

(51) a) 35,3º
c) sugerencia: calcula la inclinación de las aristas;
A = 9,8m^2

(52) a) prisma: 1,5 m^3
Cubo: 3,1 m^3
b) A_T= 17 dam^2; V_C= 4,6 dam