POSIBLES RESPUESTAS

EXAMEN DE INGRESO A LA EDUCACIÓN SUPERIOR. MATEMÁTICA 2025 (1RA CONVOCATORIA)

PREGUNTA 1

Lee detenidamente y responde:

1.1. Clasifica cada una de las proposiciones siguientes en verdadera (V) o falsa (F). Escribe V o F en la línea dada. De las que consideres falsas, justifica por qué lo son.

a) _V_ Si A y B son dos conjuntos numéricos tales que: $A = \{x \in \mathbb{R}: -2 < x < 2\}$ y B: Conjunto de los números naturales, entonces $A \cap B$ es un conjunto finito.

La proposición es verdadera porque $A \cap B$ está formado solamente por los elementos 0 y 1, por lo que es un conjunto finito.

b) _F_ La expresión $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 1$, es positiva para todo $x \in \mathbb{R}: x > 0$.

La proposición es falsa, porque si suponemos que es verdadera y tomamos $x = 1$, que pertenece al intervalo propuesto, resulta:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^1 - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

...por lo que la expresión toma valor negativo y esto contradice la suposición de que la proposición es verdadera, y por eso resulta falsa.

Otra vía es resolver la inecuación:

$\left(\frac{1}{4}\right)^x - 1 > 0$	planteamos la inecuación para determinar los valores de x para los cuales la expresión es positiva
$\left(\frac{1}{4}\right)^x > 1$	adicionamos 1 a ambos miembros
$\left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^0$	transformamos $1 = \left(\frac{1}{4}\right)^0$ para obtener una comparación de potencias de igual base
$x < 0$	aplicamos el recíproco del teorema de monotonía de la potenciación para comparar los exponentes de las potencias de ambos miembros (como en este caso la base es menor que 1, el orden de los exponentes es el inverso del que tenían las potencias)

...por lo que la expresión toma valores positivos para $x \in \mathbb{R}: x < 0$, y la proposición original resulta falsa.

c) _F_ La ecuación $a^2 + 9 = 0$, tiene solución en el dominio de los números reales.

La proposición es falsa, porque si suponemos que es verdadera, entonces podemos transformar la ecuación, restando 9 de ambos miembros, para que nos quede $a^2 = -9$, pero sabemos que $a^2 \geq 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$, por lo que no existe ningún número real a tal que su cuadrado sea -9 (un número negativo), lo que contradice la suposición de que la proposición es verdadera, y por eso resulta falsa.

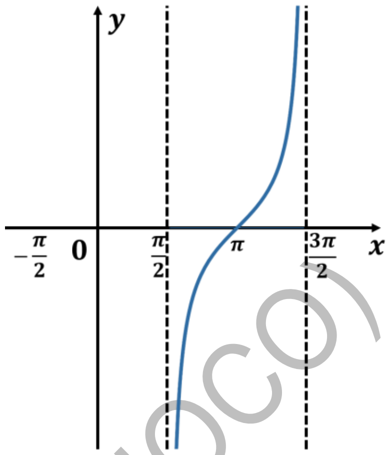
Otra vía es calcular el discriminante de esa ecuación de segundo grado:

$$D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(9) = -36 < 0$$

...y como el discriminante es menor que 0 concluimos que la ecuación no tiene soluciones en el dominio de los números reales.

1.2. Selecciona la respuesta correcta marcando con una X en la línea dada.

1.2.1. La gráfica que se muestra a continuación corresponde con una función f descrita por una ecuación de la forma $y = \tan x$, definida en el intervalo real $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$. Se puede afirmar que:



a) ___ La función f es par.

b) ___ La función f es decreciente en el intervalo dado.

c) _X_ La función f es negativa para todo $\left\{x \in \mathbb{R}: \frac{\pi}{2} < x < \pi\right\}$.

d) ___ El punto $P\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$ pertenece al gráfico de la función f.

Tenemos la función tangente definida en un intervalo real por lo que podemos analizar si las propiedades que nos proponen los distractores se cumplen o no.
La primera opción es incorrecta porque la función f está definida en un intervalo que solo tiene valores positivos de x, así que la imagen correspondiente a los valores opuestos de dichos argumentos no existe mediante la misma función f, y por tanto no se puede aplicar la definición de función par. También se puede comprobar que el gráfico no es simétrico respecto al eje de las ordenadas.
La segunda opción es incorrecta porque si analizamos el gráfico en el dominio dado, a medida que aumentan los valores de x, también aumentan los valores de y, y esto nos indica que f es monótona creciente en el intervalo dado.
La tercera opción es la correcta, pues en el intervalo que proponen, todos los puntos del gráfico están por debajo del eje de las abscisas, por lo que sus ordenadas (los valores de la función) son negativas, tal y como plantea la proposición. No se incluye el valor $\frac{\pi}{2}$ por no existir ese valor en el dominio (además de que indefine la expresión de la función y es, por tanto asíntota), y tampoco se incluye π porque anula a la expresión de f, por lo que es un cero de la función, y en ese valor de x, la función no es positiva ni negativa.
La cuarta opción es incorrecta porque para $x = \frac{3\pi}{2}$ la función no tiene valor (ese no es un argumento del dominio), por lo que ningún punto que tenga esa abscisa puede pertenecer al gráfico de la función.

1.2.2. En la Óptica Ocular se puede representar el aumento que produce una lente según la distancia focal de la misma. El aumento que se produce puede ser con una lupa común del tipo $A(x) = \frac{4}{4-x}$, con $x < 4$, donde A es el aumento que produce y x es la distancia a la que se coloca el objeto que estamos aumentando. Si el aumento que produce una lente es de 20 milímetros (mm), entonces la distancia a la que se encuentra el objeto es, aproximadamente:

a) _X_ $3{,}8\ mm$ b) ___ $3{,}08\ mm$ c) ___ $0{,}38\ mm$ d) ___ $2{,}0\ mm$

Se trata de un ejercicio donde se modela una situación de la vida real a través de una función racional y nos dan un valor de la variable dependiente (la imagen de algún argumento) para que determinemos cuál es el valor de la variable independiente que tiene como correspondiente al valor dado. Sustituimos y resolvemos la ecuación:

$20 = \frac{4}{4-x}$	plateamos la ecuación
$20(4-x) = 4$	multiplicamos ambos miembros por $(4-x)$ teniendo en cuenta que $x \neq 4$
$4 - x = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$	dividimos ambos miembros entre 20 y simplificamos la fracción resultante en el miembro derecho
$-x = \frac{1}{5} - 4$	restamos 4 a ambos miembros
$-x = -\frac{19}{5}$	efectuamos la operación $\frac{1}{5} - 4 = \frac{1-20}{5} = -\frac{19}{5}$
$x = \frac{19}{5} = 3{,}8$	multiplicamos por -1 ambos miembros y convertimos la fracción en expresión decimal, pues los distractores tienen esa forma de representación

Comprobando:

$$A(3{,}8)=\frac{4}{4-3{,}8}=\frac{4}{0{,}2}=\frac{40}{2}=20 \checkmark$$

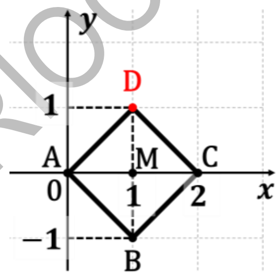
1.3. Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera para cada caso:

Los puntos $A(0;0)$, $B(1;-1)$, $C(2;0)$ y $D(x;y)$ dados en ese orden son las coordenadas de los vértices del cuadrado $ABCD$.

1.3.1. Si M es el punto medio de la diagonal $\overline{BD}$, entonces M tiene coordenadas: _$(1;0)$_.

1.3.2. El área del cuadrado $ABCD$ es _2_ u^2.

Este ejercicio de geometría analítica conlleva el uso de las propiedades de las figuras planas. Podemos esbozar la representación gráfica del cuadrado en cuestión, como se ve a la derecha.



Para el primer ejercicio nos piden las coordenadas del punto medio de la diagonal $\overline{BD}$, pero como en un cuadrado las dos diagonales se cortan en su punto medio (por ser esta una propiedad de cualquier paralelogramo), podemos determinar dichas coordenadas utilizando la otra diagonal, $\overline{AC}$:

$$M\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)\rightarrow M\left(\frac{0+2}{2};\frac{0+0}{2}\right)\rightarrow M(1;0)$$

Para el segundo ejercicio basta con calcular la longitud de uno de los lados del cuadrado, o bien de una de sus diagonales. A continuación de exponen ambas vías:

Usando un lado del cuadrado:

$$A_{ABCD}=\overline{AB}^2=\left(\sqrt{2}\right)^2=2\ u^2$$

$$|\overline{AB}|=d(A;B)=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

$$d(A;B)=\sqrt{(0-1)^2+[0-(-1)]^2}=\sqrt{1^2+1^2}$$

$$d(A;B)=\sqrt{2}\ u$$

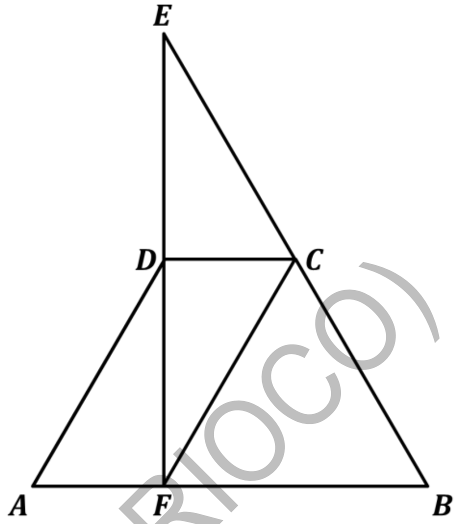
Usando una diagonal del cuadrado:

$$A_{ABCD}=\frac{\overline{AC}^2}{2}=\frac{2^2}{2}=\frac{4}{2}=2\ u^2$$

$$|\overline{AC}|=d(A;C)=|x_A-x_C|=|0-2|=|-2|=2\ u$$

Es importante destacar que para resolver ambos ejercicios no nos hizo falta determinar las coordenadas del cuarto vértice del cuadrado, pero igualmente se podía hacer: $D(1;1)$

PREGUNTA 2



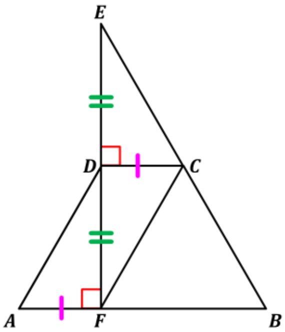
En la figura se representa el trapecio $ABCD$ isósceles de bases $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ y altura $\overline{DF}$. Se tiene además que:

- $AFCD$ es un paralelogramo;
- los puntos E, D y F están alineados;
- el punto C está situado sobre el segmento $\overline{BE}$; y
- D es el punto medio del segmento $\overline{EF}$.

a) Demuestra que $\Delta AFD = \Delta EDC$.

b) Si $\overline{AF} = 2{,}0\ dm$ y $\tan \sphericalangle DAF = \sqrt{3}$, calcula el área del trapecio $ABCD$.

a)



1ᴬ VÍA: CRITERIO $(l.a.l.)$

En ΔAFD y ΔEDC se cumple que:

(1) $\overline{AF} = \overline{DC}$ (por ser lados opuestos del paralelogramo $AFCD$)

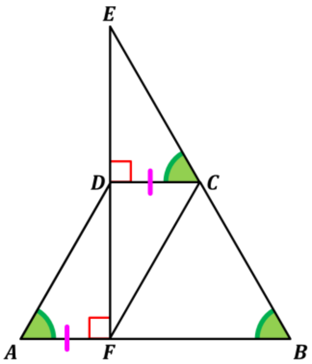
(2) $\overline{FD} = \overline{DE}$ (por ser D punto medio de $\overline{EF}$)

$\overline{EF} \perp \overline{AB}$ en F y $\overline{EF} \perp \overline{DC}$ en D (por ser $\overline{DF}$ es altura del trapecio $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, y ser E, D y F puntos alineados)

(3) $\sphericalangle AFD = \sphericalangle EDC = 90°$ (por ser $\overline{EF} \perp \overline{AB}$ en F y $\overline{EF} \perp \overline{DC}$ en D)

De (1), (2) y (3) se tiene que:

$\Delta AFD = \Delta EDC$ (por tener dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales) ■



2ᴬ VÍA: CRITERIO $(a.l.a.)$

$\overline{EF} \perp \overline{AB}$ en F y $\overline{EF} \perp \overline{DC}$ en D (por ser $\overline{DF}$ es altura del trapecio $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, y ser E, D y F puntos alineados)

(1) $\sphericalangle AFD = \sphericalangle EDC = 90°$ (por ser $\overline{EF} \perp \overline{AB}$ en F y $\overline{EF} \perp \overline{DC}$ en D)

(2) $\overline{AF} = \overline{DC}$ (por ser lados opuestos del paralelogramo $AFCD$)

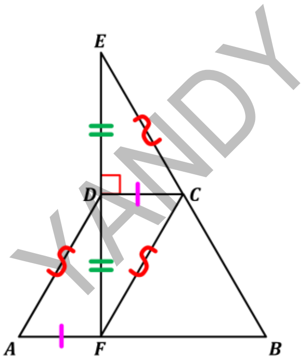
$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC$ (por ser ángulos adyacentes a la base $\overline{AB}$ del trapecio isósceles $ABCD$)

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle DCE$ (por ser correspondientes entre $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, bases del trapecio $ABCD$, y $\overline{BE}$ secante)

(3) $\therefore \sphericalangle DAF = \sphericalangle DCE$ (por carácter transitivo de la igualdad de ángulos)

De (1), (2) y (3) se tiene que:

$\Delta AFD = \Delta EDC$ (por tener un lado y los ángulos adyacentes a él respectivamente iguales) ■



3ᴬ VÍA: CRITERIO $(l.l.l.)$

(1) $\overline{AF} = \overline{DC}$ (por ser lados opuestos del paralelogramo $AFCD$)

(2) $\overline{FD} = \overline{DE}$ (por ser D punto medio de $\overline{EF}$)

$\overline{CD}$ es mediana relativa a EF en ΔCEF (por ser D punto medio de $\overline{EF}$)

$\overline{EF} \perp \overline{DC}$ en D (por ser $\overline{DF}$ es altura del trapecio $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, y ser E, D y F puntos alineados)

$\therefore \overline{CD}$ es altura relativa a $\overline{EF}$ en ΔCEF (por ser $\overline{EF} \perp \overline{DC}$ en D)

$\therefore \Delta CEF$ es isósceles de base $\overline{EF}$ (por coincidir la mediana y la altura relativas a $\overline{EF}$ en ese triángulo)

$\therefore \overline{CF} = \overline{CE}$ (por ser ΔCEF isósceles de base $\overline{EF}$)

Pero como $\overline{CF} = \overline{AD}$ (por ser lados opuestos del paralelogramo $AFCD$), entonces:

(3) $\overline{CE} = \overline{AD}$ (por carácter transitivo de la igualdad de segmentos)

De (1), (2) y (3) se tiene que:
$\Delta AFD = \Delta EDC$ (por tener sus tres lados respectivamente iguales) ■

NOTA ACLARATORIA: Se pueden realizar muchas más demostraciones (usando el criterio $(L.l.a.)$; demostrando que $\overline{DC}$ es paralela media relativa a $\overline{FB}$ en ΔBEF; demostrando que $\Delta AFD = \Delta CDF$, que $\Delta CDF = \Delta EDC$ y luego por transitividad que $\Delta AFD = \Delta EDC$; etc.), pero considero que las tres demostraciones expuestas son las más sencillas que se pueden realizar.

b)

$\tan \sphericalangle DAF = \sqrt{3} \Longrightarrow \sphericalangle DAF = 60°$ o bien $\sphericalangle DAF = 240°$
pero como $\sphericalangle DAF$ es un ángulo interior del ΔAFD, entonces necesariamente $\sphericalangle DAF = 60°$
ΔAFD es rectángulo en F (por ser $\sphericalangle AFD = 90°$, ya demostrado)
$\sphericalangle FDA = 30°$ (por suma de ángulos interiores en el ΔAFD, donde $\sphericalangle AFD = 90°$ y $\sphericalangle DAF = 60°$)
Aplicando el teorema del ángulo de $30°$ en ΔAFD rectángulo en F, tenemos:
$\overline{AD} = 2 \cdot \overline{AF} = 4\ dm$
$\overline{DF} = \sqrt{3} \cdot \overline{AF} = 2\sqrt{3}\ dm$
$\overline{DC} = \overline{AF} = 2\ cm$ (por ser lados opuestos del paralelogramo $AFCD$)
$\overline{CF} = \overline{AD} = 4\ dm$ (por ser lados opuestos del paralelogramo $AFCD$)
$\overline{CB} = \overline{AD} = 4\ dm$ (por ser lados no paralelos del trapecio $ABCD$ isósceles de bases $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$)
$\therefore\ \overline{CF} = \overline{CB}$ (por carácter transitivo de la igualdad de segmentos)
$\sphericalangle CFB = \sphericalangle DAF = 60°$ (por ser correspondientes entre $\overline{CF} \parallel \overline{AD}$, lados opuestos del paralelogramo $AFCD$, y $\overline{AB}$ secante)
$\therefore\ \Delta BCF$ es equilátero [por tener dos lados iguales ($\overline{CF} = \overline{CB}$) y un ángulo interior de $60°$ ($\sphericalangle CFB$)]
$\overline{FB} = \overline{CB} = 4\ dm$ (por ser lados del ΔBCF equilátero)
$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB} = 2 + 4 = 6\ dm$ (por suma de segmentos)

$$A_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \cdot \overline{DF}$$
$$A_{ABCD} = \frac{6+2}{2} \cdot 2\sqrt{3}$$
$$A_{ABCD} \approx \frac{8}{2} \cdot 2 \cdot 1{,}732$$
$$A_{ABCD} = 8 \cdot 1{,}732$$
$$A_{ABCD} = 13{,}856\ dm^2$$
$$A_{ABCD} \approx 14\ dm^2$$

Respuesta: El área del trapecio $ABCD$ es aproximadamente $14\ dm^2$.

NOTA ACLARATORIA: Se pueden realizar otras demostraciones (calculando la longitud de $\overline{EF}$ y luego usando el teorema del ángulo de $30°$ por segunda vez, pero en el ΔBEF rectángulo en F para calcular la longitud de $\overline{FB}$; etc.).

PREGUNTA 3

Sean las funciones f y g dadas por las ecuaciones:
$f(x) = \sqrt{x+4}$ y $g(x) = \log_2(x-3)$.
a) Determine el dominio de las funciones f y g.
b) Halla el conjunto solución de la ecuación $25^{\log_2 f(x)} \cdot 5^{g(x)} = 125$.
c) Calcula $(f \circ g)(4)$.

a) La función f es una función raíz cuadrada, y sabemos que estas funciones solo están definidas si el radicando es no negativo (mayor o igual que 0), así que planteamos y resolvemos una inecuación lineal:

$x + 4 \geq 0$	plateamos la inecuación
$x \geq -4$	restamos 4 de ambos miembros

Por tanto: $Dom\, f$: $\{x \in \mathbb{R}: x \geq -4\}$

La función g es una función logarítmica, y sabemos que estas funciones solo están definidas si el argumento del logaritmo es positivo (mayor que 0), así que planteamos y resolvemos otra inecuación lineal:

$x - 3 > 0$	plateamos la inecuación
$x > 3$	adicionamos 3 a ambos miembros

Por tanto: $Dom\, g$: $\{x \in \mathbb{R}: x > 3\}$

b)

$25^{\log_2 \sqrt{x+4}} \cdot 5^{\log_2(x-3)} = 125$	planteamos la ecuación
$(5^2)^{\log_2 \sqrt{x+4}} \cdot 5^{\log_2(x-3)} = 5^3$	transformamos $25 = 5^2$ y $125 = 5^3$
$5^{2\log_2 \sqrt{x+4}} \cdot 5^{\log_2(x-3)} = 5^3$	aplicamos la propiedad «potencia de una potencia»: $(a^r)^s = a^{rs}$
$5^{\log_2(\sqrt{x+4})^2} \cdot 5^{\log_2(x-3)} = 5^3$	aplicamos la propiedad «producto de una constante por un logaritmo»: $n \cdot \log_a b = \log_a b^n$
$5^{\log_2(x+4)} \cdot 5^{\log_2(x-3)} = 5^3$	aplicamos la propiedad «n-ésima potencia de una raíz n-ésima»: $(\sqrt[n]{a})^n = a$
$5^{\log_2(x+4)+\log_2(x-3)} = 5^3$	aplicamos la propiedad «producto de potencias de igual base»: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
$\log_2(x+4) + \log_2(x-3) = 3$	aplicamos la propiedad «igualdad de potencias de igual base»: $a^r = a^s \Leftrightarrow r = s$
$\log_2[(x+4)(x-3)] = 3$	aplicamos la propiedad «suma de logaritmos de igual base»: $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$
$\log_2(x^2 + x - 12) = \log_2 8$	calculamos el producto notable «producto de dos binomios con un término común» en el miembro izquierdo; y transformamos el miembro derecho en un logaritmo de base 2 aplicando la propiedad «logaritmo de base a de una potencia de base a»: $\log_a a^b = b$
$x^2 + x - 12 = 8$	aplicando la propiedad «igualdad de logaritmos de igual base»: $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$
$x^2 + x - 20 = 0$	restamos 8 de ambos miembros para llevar la ecuación a la forma polinómica igualada a cero
$(x+5)(x-4) = 0$	descomponemos el factores el miembro izquierdo
$x + 5 = 0 \quad o \quad x - 4 = 0$	aplicamos la propiedad «producto cero de dos números reales»: $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$
$x_1 = -5 \quad o \quad x_2 = 4$	resolviendo ambas ecuaciones lineales

Podemos realizar la comprobación de dos formas: evaluando la ecuación original para cada valor de x, o bien analizando si los valores obtenidos se encuentran dentro del dominio de las funciones f y g simultáneamente (OJO CON ESTA VÍA, porque la función f podría perfectamente ser no positiva para ciertos valores de x y esto indefine la ecuación que resolvimos, pues la ecuación de f es el argumento de un logaritmo en la ecuación original). Utilicemos ambas vías, primero comprobando directamente en la ecuación:

para $x_1 = -5$:

MI: $25^{\log_2 \sqrt{-5+4}} \cdot 5^{\log_2 (-5-3)}$

$= 25^{\log_2 \sqrt{-1}} \cdot 5^{\log_2 (-8)}$

se indefinen ambos logaritmos de la ecuación original

para $x_2 = 4$:

MI: $25^{\log_2 \sqrt{4+4}} \cdot 5^{\log_2 (4-3)}$

$= (5^2)^{\log_2 \sqrt{8}} \cdot 5^{\log_2 1}$

$= 5^{2 \log_2 \sqrt{8}} \cdot 5^0$

$= 5^{\log_2 (\sqrt{8})^2} \cdot 1$

$= 5^{\log_2 8}$

$= 5^3$

$= 125$

MD: 125

MI = MD

Entonces el conjunto solución de la ecuación es $S = \{4\}$.

Si comprobamos por la segunda vía, primero podemos hallar la intersección de los dos dominios hallados en el inciso a), pues para que la ecuación que resolvimos AMBAS funciones tienen que estar definidas simultáneamente. Como el dominio de g es un subconjunto del dominio de f, se cumple que:

$Dom\ f \cap Dom\ g = Dom\ g = \{x \in \mathbb{R}: x > 3\}$

Aquí podemos rápidamente notar que $x_1 = -5$ no pertenece al dominio conjunto de ambas funciones, por lo que automáticamente se descarta. Solo falta comprobar que $x_2 = 4$ no hace negativa a la función f, pues aunque pertenece al dominio de ambas funciones, aún queda la posibilidad de que indefina al primer logaritmo (como explicamos antes de la comprobación). Entonces calculamos:

$f(4) = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

...y como $f(4) > 0$, el primer logaritmo no se va a indefinir, haciendo de esta la única solución de la ecuación.

c) Para calcular $(f \circ g)(4)$ podemos usar dos vías. Como $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$, podemos o bien determinar la ecuación de la función compuesta primero y luego la evaluamos para $x = 4$, o bien calcular $g(4)$ primero y luego $f\big(g(4)\big)$:

$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f[\log_2(x-3)]$

$(f \circ g)(x) = \sqrt{\log_2(x-3) + 4}$

$(f \circ g)(4) = \sqrt{\log_2(4-3) + 4}$

$(f \circ g)(4) = \sqrt{\log_2 1 + 4}$

$(f \circ g)(4) = \sqrt{0 + 4}$

$(f \circ g)(4) = \sqrt{4} = 2$

$g(4) = \log_2(4-3) = \log_2 1 = 0$

$f\big(g(4)\big) = f(0) = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2$

Observa que por ambas vías hemos obtenido el mismo resultado:

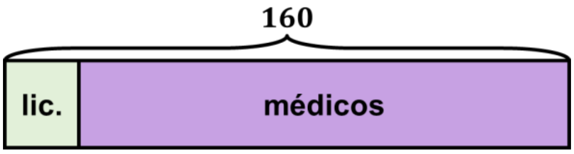
$(f \circ g)(4) = 2$

PREGUNTA 4

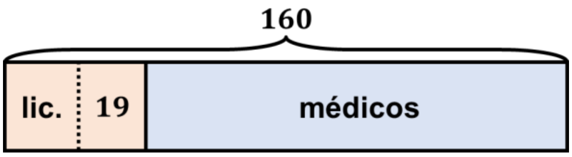
En marzo de 2021 fueron recibidos en el Aeropuerto José Martí, 160 miembros del Contingente Internacional de médicos Henry Reeve especializados en situaciones de desastre y graves epidemias, quienes se encontraban enfrentando la pandemia de COVID-19 en la República de México. La brigada de colaboradores estaba integrada por médicos, licenciados en Enfermería y un licenciado en Electromedicina. Si se hubiese aumentado en 19 la cantidad de licenciados a participar y disminuido en esa misma cantidad el total de médicos, entonces el triplo de la cantidad de licenciados sería igual a la cantidad de médicos que hubiesen enfrentado la pandemia en México. ¿Cuántos médicos y cuántos licenciados en Enfermería enfrentaron la pandemia de COVID-19 en la República de México?

1ª VÍA: ARITMÉTICA

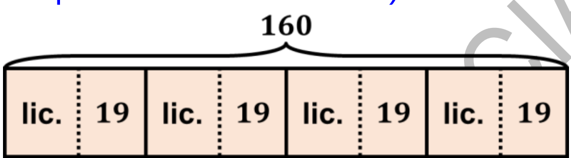
Podemos utilizar el primer dato que nos brinda el problema para plantear el siguiente esquema:



Sabemos que hay licenciados y médicos, y que en total son 160 personas. Ahora bien, cuando modificamos, siguiendo las indicaciones del problema, esas cantidades de licenciados y de médicos, sumando 19 a los primeros y quitando 19 a los segundos, es lógico ver que el total de personas no se altera, puesto que lo que estamos haciendo es «corriendo la línea divisoria» entre las cantidades para traspasar 19 personas de una parte hacia la otra:



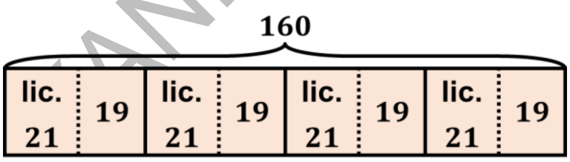
El problema nos plantea que en estas nuevas condiciones, la cantidad de médicos es igual al triplo de la cantidad de licenciados. Es decir, que podemos sustituir el rectángulo azul (la cantidad de médicos después de la modificación) por tres rectángulos naranjas (que representa cada uno la cantidad de licenciados después de la modificación):



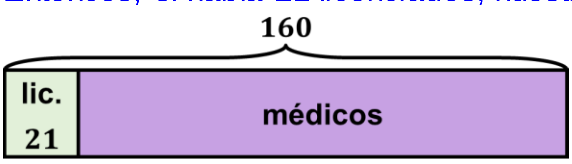
Ahora vemos una posible vía, pues si dividimos las 160 personas que había en total entre 4 partes iguales, obtendremos la cantidad de personas que hay en un rectángulo naranja (que representa la cantidad de licenciados original aumentada en 19), y ya luego solo tenemos que restar 19 de esa cantidad para encontrar la cantidad de licenciados que había en las condiciones iniciales (la cantidad real):

$160 : 4 = 40$

$40 - 19 = 21$



Entonces, si había 21 licenciados, nuestro esquema original queda así:



...y ahora resulta fácil calcular la cantidad de médicos:

$160-21=139$
Comprobamos el problema:
total de miembros de la brigada: $21+139=160$ ✓
cantidad de licenciados aumentada en 19: $21+19=40$
cantidad de médicos disminuida en 19: $139-19=120$
relación entre las cantidades modificadas: $3\cdot 40=120$ ✓
Antes de dar la respuesta al problema, hay que recordar que de todos los licenciados, había uno de Electromedicina y el resto de Enfermería, por lo que estos últimos solo eran 20.
Respuesta: Enfrentaron la pandemia de COVID-19 en la República de México 139 médicos y 20 licenciados en enfermería.

2A VÍA: ECUACIÓN LINEAL

Sabemos que el total de personal es de 160 personas, entre médicos y licenciados, por lo que podemos representar la cantidad de médicos en función de la cantidad de licenciados (o viceversa):
DECLARACIÓN DE LA VARIABLE:
l → cantidad de licenciados que participaron en la brigada
$160-l$ → cantidad de médicos que participaron en la brigada

Ahora podemos construir una tabla con los cambios en esas cantidades, tal como expresa el problema:

	cant. real	cant. modificada
licenciados	l	$l+19$
médicos	$160-l$	$160-l-19$ $=141-l$

El problema expresa que el triplo de la cantidad modificada de licenciados es igual a la cantidad modificada de médicos, por lo que podemos plantear la ecuación:
$3(l+19)=141-l$
Resolvemos la ecuación:

$3l+57=141-l$	resolvemos el producto del término por el binomio que aparece en el miembro izquierdo
$3l+l=141-57$	adicionamos l y restamos 57 en ambos miembros
$4l=84$	reducimos términos semejantes
$l=21$	dividimos entre 4 ambos miembros

Entonces la cantidad real de licenciados que participó en la brigada fue 21, y la de médicos fue:
$160-21=139$
La comprobación y la respuesta son idénticas a la vía aritmética.

NOTA ACLARATORIA: Si elegíamos representar la cantidad de licenciados en función de la cantidad de médicos, la declaración de la variable nos hubiera quedado así:
m → cantidad de médicos
$160-m$ → cantidad de licenciados
Las cantidades modificadas serían:

	cant. real	cant. modificada
médicos	m	$m-19$
licenciados	$160-m$	$160-m+19$ $=179-m$

...y la ecuación sería:

$m-19=3(179-m)$	ecuación
$m-19=537-3m$	resolvemos el producto del término por el binomio que aparece en el miembro derecho
$m+3m=537+19$	adicionamos $3m+19$ en ambos miembros
$4m=556$	reducimos términos semejantes
$m=139$	dividimos entre 4 ambos miembros

Por tanto, la cantidad de licenciados sería: $160-139=21$, que nos queda igual que en la vía anterior, como es lógico.

3[A] VÍA: SISTEMA DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

DECLARACIÓN DE LAS VARIABLES:

m → cantidad de médicos que participaron en la brigada

l → cantidad de licenciados que participaron en la brigada

En la primera ecuación solo necesitamos adicionar ambas cantidades para obtener el total de personas que tuvo la brigada:

$m + l = 160 \quad (1)$

Para la segunda ecuación, podemos confeccionar una tabla para entender cómo se modificaron las cantidades según el problema:

	cant. real	cant. modificada
médicos	m	$m - 19$
licenciados	l	$l + 19$

En esas condiciones modificadas, el problema plantea que el triplo de la cantidad de licenciados es igual a la cantidad de médicos, por lo que la segunda ecuación del sistema nos queda:

$3(l + 19) = m - 19 \quad (2)$

Ya podemos plantear y resolver el sistema de ecuaciones. Aquí expondremos tres métodos para resolverlo:

1[er] método: sustitución

$\begin{cases} m + l = 160 & (1) \\ 3(l+19) = m - 19 & (2) \end{cases}$	planteamos el sistema
$m = 160 - l \quad (3)$	despejamos la variable m en la primera ecuación
$3(l + 19) = 160 - l - 19$	sustituimos la ecuación (3) en la ecuación (2)
$3l + 57 = 141 - l$	resolvemos el producto del término por el binomio que aparece en el miembro izquierdo y reducimos términos semejantes en el derecho
$3l + l = 141 - 57$	adicionamos l y restamos 57 en ambos miembros
$4l = 84$	reducimos términos semejantes
$l = 21$	dividimos entre 4 ambos miembros
$m = 160 - 21 = 139$	sustituimos $l = 21$ en la ecuación (3)

La comprobación y la respuesta son idénticas a la vía aritmética.

2[do] método: igualación

$\begin{cases} m + l = 160 & (1) \\ 3(l+19) = m - 19 & (2) \end{cases}$	planteamos el sistema
$\begin{cases} m = 160 - l & (3) \\ m = 3(l+19) + 19 & (4) \end{cases}$	despejamos la variable m en ambas ecuaciones
$3(l + 19) - 19 = 160 - l$	igualamos los despejes de las ecuaciones (3) y (4)
$3l + 57 + 19 = 160 - l$	resolvemos el producto del término por el binomio que aparece en el miembro izquierdo
$3l + 76 = 160 - l$	reducimos términos semejantes
$3l + l = 160 - 76$	adicionamos l y restamos 76 en ambos miembros
$4l = 84$	reducimos términos semejantes
$l = 21$	dividimos entre 4 ambos miembros
$m = 160 - 21 = 139$	sustituimos $l = 21$ en la ecuación (3)

La comprobación y la respuesta son idénticas a la vía aritmética.

3^{er} método: reducción

$\begin{cases} m + l = 160 & (1) \\ 3(l + 19) = m - 19 & (2) \end{cases}$ planteamos el sistema

$\begin{cases} m + l = 160 & (1) \\ 3l + 57 = m - 19 & (2') \end{cases}$ ordenamos las ecuaciones paso a paso

$\begin{cases} m + l = 160 & (1) \\ -m + 3l = -19 - 57 & (2'') \end{cases}$

$\begin{cases} m + l = 160 & (1) \\ -m + 3l = -76 & (2'') \end{cases}$

$4l = 84 \quad (3)$ sumamos miembro a miembro las ecuaciones (1) y (2'') para eliminar la variable m

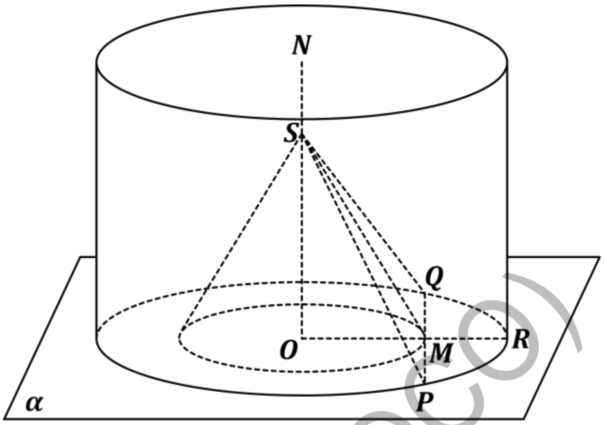
$l = 21$ dividimos entre 4 ambos miembros

$m + 21 = 160$ sustituimos $l = 21$ en la ecuación (1)

$m = 160 - 21 = 139$

La comprobación y la respuesta son idénticas a la vía aritmética.

PREGUNTA 5



5. Sobre el plano α está situada la base inferior del cilindro circular recto de altura $\overline{ON}$ y radio $\overline{OR}$. En el interior del cilindro circular recto y sobre el mismo plano α, se encuentra situada la base del cono circular recto de altura $\overline{OS}$. Se conoce además que:

- N, S y O son puntos alineados;
- la cuerda $\overline{PQ}$ de la circunferencia base del cilindro es tangente a la base del cono en el punto M;
- $\overline{OR} \cap \overline{PQ} = \{M\}$.

a) Demuestre que $\overline{SM}$ es la altura relativa al lado $\overline{PQ}$ del ΔQSP.

b) Calcula el volumen del cono si se sabe que el área lateral del cilindro es $70\pi\ dm^2$, $\overline{ON} = 7{,}0\ dm$ y $\overline{OR} = \frac{5}{3}\overline{OM}$ y $\sphericalangle MSO = 30°$.

a) 1ª VÍA: TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES

α: plano que contiene a las bases del cilindro y el cono circulares rectos

$\overline{SO} \perp \alpha$ en O (por ser $\overline{SO}$ altura del cono)

$\overline{SM}$ es oblicua a α en M

$\overline{OM} = \mathrm{proy}_{\alpha}\overline{SM}$

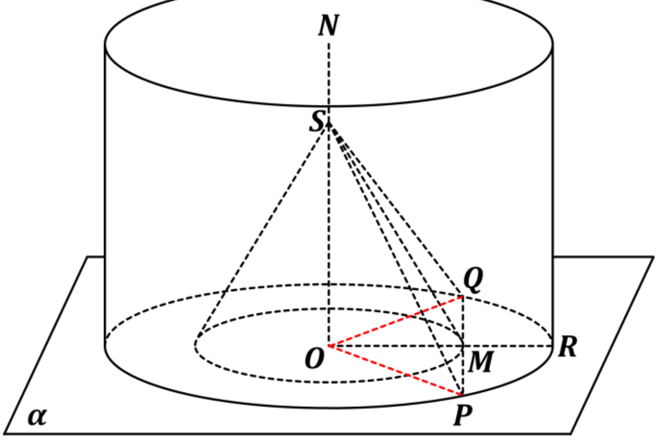
$\overline{PQ}$ es un segmento de recta contenido en el plano α y que pasa por M, pie de la oblicua

$\overline{OM} \perp \overline{PQ}$ en M (por ser $\overline{PQ}$ tangente en M a la circunferencia de la base del cono, y ser $\overline{OM}$ radio de dicha circunferencia en el punto de tangencia)

$\therefore$ $\overline{SM} \perp \overline{PQ}$ en M (por el teorema de las tres perpendiculares)

Entonces $\overline{SM}$ es la altura relativa al lado $\overline{PQ}$ del ΔQSP, por ser $\overline{SM} \perp \overline{PQ}$ en M. ■

2ª VÍA: PROPIEDADES DE LAS FIGURAS PLANAS



Construcción auxiliar: $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$: radios de la base del cilindro circular recto, por ser $\overline{PQ}$ una cuerda de la circunferencia de dicha base.

$\overline{SO} \perp \alpha$ en O (por ser $\overline{SO}$ altura del cono)

$\overline{SP}$ y $\overline{SQ}$ son oblicuas al plano α en P y Q respectivamente

$\overline{OP} = \mathrm{proy}_{\alpha}\overline{SP}$

$\overline{OQ} = \mathrm{proy}_{\alpha}\overline{SQ}$

$\overline{OP} = \overline{OQ}$ (por ser radios del cilindro circular recto)

$\therefore$ $\overline{SP} = \overline{SQ}$ (por ser oblicuas trazadas desde el punto S al plano α y tener proyecciones iguales sobre ese plano)

$\therefore$ ΔQSP es isósceles de base $\overline{PQ}$ (por ser $\overline{SP} = \overline{SQ}$)

$\overline{OM} \perp \overline{PQ}$ en M (por ser $\overline{PQ}$ tangente en M a la circunferencia de la base del cono, y ser $\overline{OM}$ radio de dicha circunferencia en el punto de tangencia)

$\therefore$ M es punto medio de $\overline{PQ}$ (por ser $\overline{OM}$ un segmento de radio del cilindro que corta perpendicularmente a la cuerda $\overline{PQ}$ en el punto M)

$\overline{SM}$ es mediana relativa al lado PQ en ΔQSP (por ser M punto medio de $\overline{PQ}$)

$\therefore$ $\overline{SM}$ es la altura relativa al lado $\overline{PQ}$ del ΔQSP, por coincidir con la mediana relativa a ese mismo lado que es base del ΔQSP isósceles. ■

b)

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{OM}^2 \cdot \overline{OS}$$
$$V_{cono} = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 3\sqrt{3}$$
$$V_{cono} = 9\pi\sqrt{3}$$
$$V_{cono} \approx 9 \cdot 3{,}141 \cdot 1{,}732$$
$$V_{cono} \approx 48{,}96\ dm^3$$
$$V_{cono} \approx 49\ dm^3$$

$A_{L_{cilindro}} = 2\pi \cdot \overline{OR} \cdot \overline{ON}$

$\overline{OR} = \dfrac{A_{L_{cilindro}}}{2\pi \cdot \overline{ON}} = \dfrac{70\pi}{2\pi \cdot 7} = 5\ dm$

$\overline{OR} = \frac{5}{3} \cdot \overline{OM}$ (por datos)

$\overline{OM} = \frac{3}{5} \cdot \overline{OR} = \frac{3}{5} \cdot 5 = 3\ dm$

ΔSOM es rectángulo en M (por ser $\overline{OS}$ altura del cono y $\overline{OM}$ uno de sus radios)

$\overline{OS} = \sqrt{3} \cdot \overline{OM} = 3\sqrt{3}\ dm$ (por teorema del ángulo de 30° en ΔSOM rectángulo en M)

Respuesta: El volumen del cono es aproximadamente $49\ dm^3$.