Resumen sobre igualdad de triángulos para 12mo grado

Para satisfacer los pedidos de nuestros estudiantes de 12mo grado y contribuir con tu preparación nuestra empresa CINESOFT ha elaborado este resumen.

Este material te servirá como un complemento a las clases televisivas, junto a tu libro de texto.

Este resumen está dedicado a recordar algunos contenidos de geometría plana que se aplican en demostraciones y cálculo en figuras planas simples y compuestas.

Contenidos que trataremos:

1. Criterios de igualdad de triángulos
2. Cálculo y demostraciones en figuras planas

Rogamos nos disculpes cualquier imprecisión y la hagas llegar a nosotros para hacer la corrección inmediatamente.

Esperamos que te sea útil para lograr una mejor preparación.

Autores: MSc. Jesús Cantón Arenas

MSc. Mirta Capote Jaume

Resumen sobre Igualdad de Triángulos

Para demostrar la **igualdad de dos triángulos**, es necesario conocer **no solo** los **teoremas** necesarios para ello, sino también las **propiedades** de las **figuras planas** que te permiten **justificar** los **elementos** respectivamente iguales.

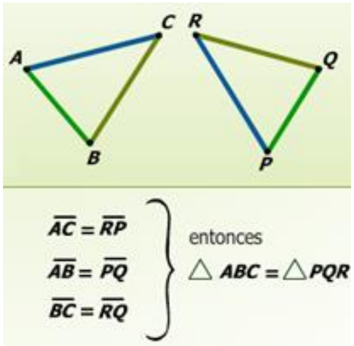
Es por eso, que debes estudiar primero el **resumen** sobre **Geometría Plana** que elaboramos para ti y que aparece en nuestra página del Portal Educativo.

En este resumen también te ofrecemos, a partir de ejemplos resueltos, **ideas** sobre las acciones que debes acometer para escribir la demostración.

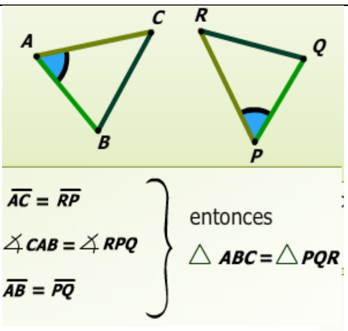
Agregamos, además incisos de **cálculo** para que compruebes cómo aparece este objetivo en los libros de texto y en las distintas evaluaciones a las que te enfrentarás.

I. Teoremas de igualdad de triángulos

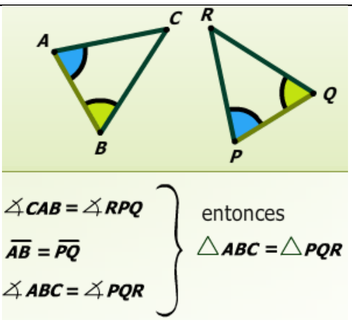
Dos triángulos son **iguales** si tienen sus tres lados respectivamente iguales.(**LLL**)



Dos triángulos son **iguales** si tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales. (**LAL**)



Dos triángulos son **iguales** si tienen un lado y los ángulos adyacentes a él respectivamente iguales. (**ALA**).



Recuerda que: al indicar la igualdad de parejas de segmentos o de ángulos, debes argumentar utilizando las relaciones o propiedades de las figuras que te permitan sustentar tu afirmación.

IMPORTANTE PARA EL CÁLCULO

♦ Si **dos triángulos** son **iguales** sus **áreas** son **iguales** y sus **perímetros** también.

Nota:

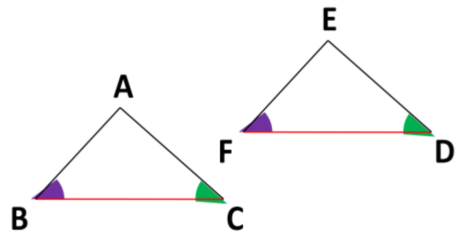
1. Como puedes apreciar, para **demostrar** que dos triángulos son **iguales**, es necesario llegar a la **igualdad** de, al menos, **tres** de sus seis elementos.

2. Cuando logramos demostrar la **igualdad** de dos triángulos, los **elementos** correspondientes (**lados** o **ángulos**) que no se utilizaron al escribir la respuesta, también serán **iguales** y se justifican por una de las siguientes razones:

- por **elementos homólogos** en **triángulos iguales**,
- o porque en **triángulos iguales**, a **ángulos iguales** se oponen **lados iguales** o viceversa.

Por ejemplo, en estos triángulos **iguales** se cumplirá, además de lo marcado, que:

$\overline{AB} = \overline{FE}$; $\overline{AC} = \overline{ED}$ y $\angle$**A** = $\angle$**E**



Si dos triángulos son **iguales**, se cumple además que:

1. sus **áreas** son **iguales**.

2. sus **perímetros** son **iguales**.

II. Para resolver un ejercicio de **igualdad** de **triángulos**, debes:

1. Leer la información que te brindan en los datos.

2. Interpretar cuáles de esas informaciones te permiten marcar **lados** o **ángulos iguales** sobre la figura.

Para ello, es necesario dominar los **teoremas** y **propiedades** estudiados sobre las **figuras planas**.

3. Marcar en la figura los **elementos** que son **iguales**.

4. Verificar si los **elementos marcados** conforman uno de los **teoremas** de **igualdad**, o hay que buscar algún otro.

5. Escribir la **igualdad** de los **elementos** que sean necesarios para completar un teorema.

6. Concluir la demostración de la igualdad, escribiendo **literalmente** el **teorema** utilizado.

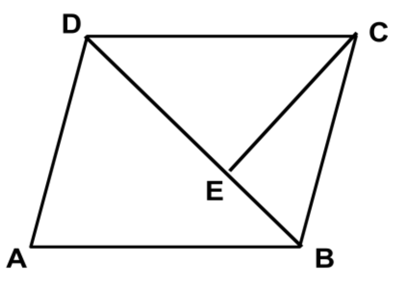
Si el ejercicio pide **demostrar** una **igualdad** de **elementos** o una **clasificación** determinada, debes realizar un último paso.

7. Plantear y **argumentar** la conclusión a la que arribaste.

III. Ejemplos donde se pide la demostración de la igualdad de dos triángulos directamente.

Ejemplo 1

En la figura:



- ABCD paralelogramo.
- $\overline{DB}$ una de sus diagonales.
- E es un punto de $\overline{DB}$.

a) Prueba que $_\triangle$DAB = $_\triangle$DCB.

b) Si $\overline{CE}$ es la altura relativa a $\overline{BD}$ en el $\triangle$DBC, el $\angle$ABD = 30º, calcula la amplitud del $\angle$DCE.

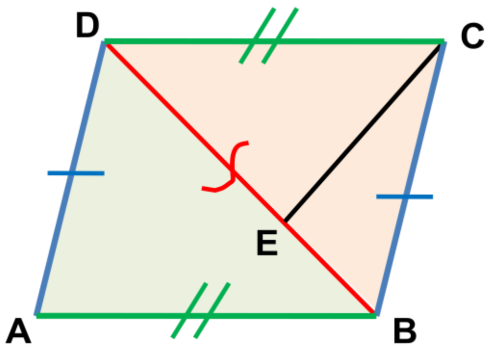
c) Si $\overline{DB}$ = 10 cm y $\overline{EC}$ = 6,0 cm, calcula el área de ABCD.

Solución a):

Este es uno de los pocos ejercicios que se puede resolver por los **tres** teoremas de **igualdad** y lo aprovechamos para mostrarte cómo **marcar** en la figura los **elementos** respectivamente iguales y cómo se **escribe** la **respuesta** en cada caso.

1ra vía:

En los triángulos **DAB** y **DCB**:



♦ $\overline{DB}$ es lado común.

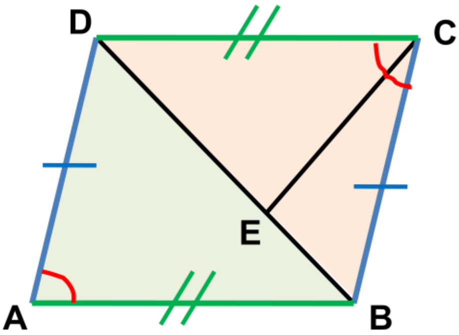
♦ $\overline{DA} = \overline{BC}$ por lados opuestos de un paralelogramo.

♦ $\overline{AB} = \overline{DC}$ por lados opuestos de un paralelogramo.

$\triangle$**DAB** = $\triangle$**DCB**, por tener sus tres lados respectivamente iguales (L ; L ; L).

2da vía:

En los triángulos **DAB** y **DCB**:



♦ ∠A = ∠DCB por ser ángulos opuestos de un paralelogramo.

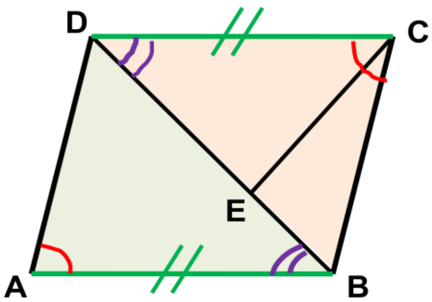
♦ $\overline{DA} = \overline{BC}$ por lados opuestos de un paralelogramo.

♦ $\overline{AB} = \overline{DC}$ por lados opuestos de un paralelogramo.

△**DAB** = △**DCB**, por tener dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales (L ; a ; L).

3ra vía:

En los triángulos **DAB** y **DCB**:



♦ ∠A = ∠DCB por ángulos opuestos de un paralelogramo.

♦ ∠CDB = ∠DBA por alternos entre las paralelas $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ y secante $\overline{DB}$.

♦ $\overline{AB} = \overline{DC}$ por lados opuestos de un paralelogramo.

△**DAB** = △**DCB**, por tener un lado y sus ángulos adyacentes respectivamente iguales (a ; L ; a).

Nota: Como puedes apreciar en este ejercicio:

1. es **fundamental** conocer las **propiedades** de los **paralelogramos** y los **ángulos** entre **paralelas**.

2. las **marcas** de los **lados** o **ángulos** respectivamente iguales, deben ser las **mismas**, para que la vista te ayude a resolver correctamente el ejercicio.

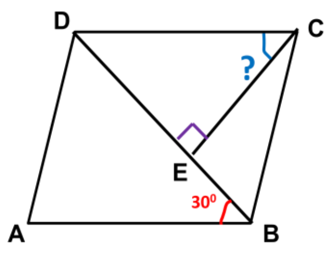
3. En el caso de los **ángulos** entre **paralelas**, se deben mencionar tanto las **paralelas** como la **secante**.

4. se escribe primero la **igualdad** de los **elementos** y a su lado la **justificación** correspondiente.

5. al final se plantea la **igualdad** demostrada y se **argumenta** con el **teorema** de igualdad utilizado, escrito literalmente.

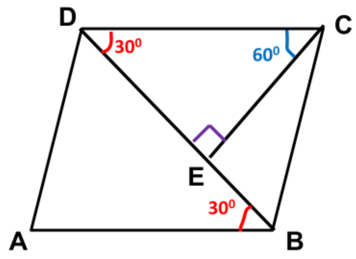
Solución b):

● Marcas sobre la figura las condiciones dadas.



● Hallas y justificas la amplitud de los ángulos en la figura que permitan llegar al ángulo pedido.

♦ **∠DBA** = **30º** por **dato**.



♦∠**CDB** = **30º** por **alternos** entre las paralelas $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ y secante $\overline{DB}$.

♦∠**CED** = **90º** por ser $\overline{CE}$ **altura** relativa a $\overline{BD}$ en el △DBC.

♦∠**DCE** = **60º** por **suma de ángulos interiores** en el △**DCE**.

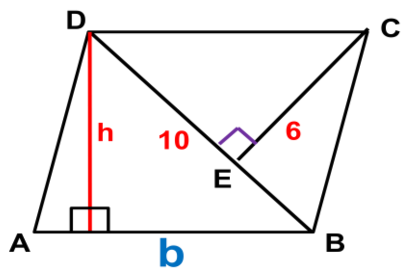
Nota:

1. Ten en cuenta que, para resolver ejercicios sobre **cálculo de ángulos**, generalmente hay que determinar la amplitud de **varios ángulos** en la figura hasta llegar al pedido.

2. El ángulo **DCE** También se puede argumentar, por **suma de ángulos complementarios** en el triángulo **rectángulo DEC**.

3. También aquí necesitas apoyarte para los **cálculos** y las **fundamentaciones** en **teoremas** y **propiedades** de la Geometría Plana.

Solución c):



- Marcas sobre la figura los datos numéricos.

- Escribes la **fórmula** para calcular

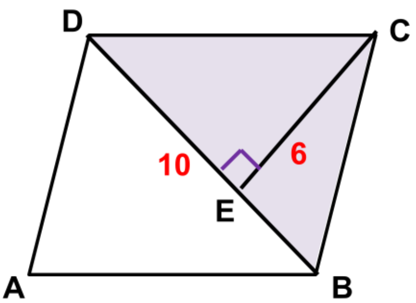
el **área** del paralelogramo **ABCD**.

A(ABCD) = **b·h**

Como **base** se puede tomar el lado $\overline{AB}$ y la **altura** hay que trazarla desde el vértice **D** o el **C**.

Como puedes apreciar, **no** conoces la **base** ni la **altura** del **paralelogramo** y con los datos que te brinda el texto y los conocimientos que tienes hasta ahora, **no es posible** hallarlos.

Sin embargo, aquí puedes utilizar una **idea** interesante, como ya demostraste que los triángulos **ABD** y **DBC** son **iguales**, entonces sus **áreas** son **iguales**, por lo que puedes hallar el área del paralelogramo por **suma** de **áreas**.



$A_{(ABCD)} = A_{(\triangle ABD)} + A_{(\triangle DBC)}$

♦ Halla el área del **△DBC**:

$A_{(\triangle DCB)} = \frac{b.h}{2} = \frac{\overline{DB}.\overline{CE}}{2}$ (escribes la fórmula)

$A_{(\triangle DCB)} = \frac{10\ cm\ .\ 6\ cm}{2}$ (sustituyes)

$A_{(\triangle DCB)} = \frac{60\ cm^2}{2} = \mathbf{30\ cm^2}$ (calculas)

♦ Halla el área del **ABCD**:

$A_{(\triangle ABD)} = A_{(\triangle DCB)}$, por ser triángulos iguales.

$A_{(ABCD)} = A_{(\triangle ABD)} + A_{(\triangle DCB)}$ o $A_{(ABCD)} = 2A_{(\triangle DCB)}$

$A_{(ABCD)} = 30\ cm^2 + 30\ cm^2 = 60\ cm^2$

R/ El área del paralelogramo es igual a **60 cm²**.

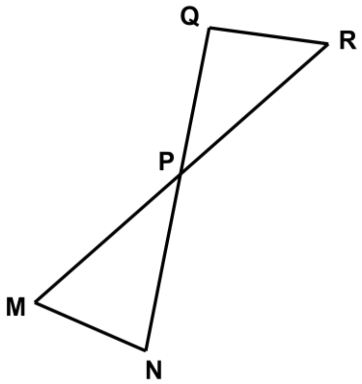
Nota: Ten en cuenta que, para resolver ejercicios sobre **cálculo** de **áreas** o **perímetros,**

1. No es necesario utilizar el **coma cero** de los datos en los **cálculos** que realizas.

2. La **respuesta** se da con la **menor** cantidad de cifras que tiene los datos.

3. Cuando trabajes con cualquier **paralelogramo**, puedes utilizar el **recurso** que aprendiste en este ejercicio, o sea, si a un **paralelogramo** se le traza una de sus **diagonales**, queda **dividido** en **dos triángulos** de **igual área**.

Ejemplo 2



En la figura:

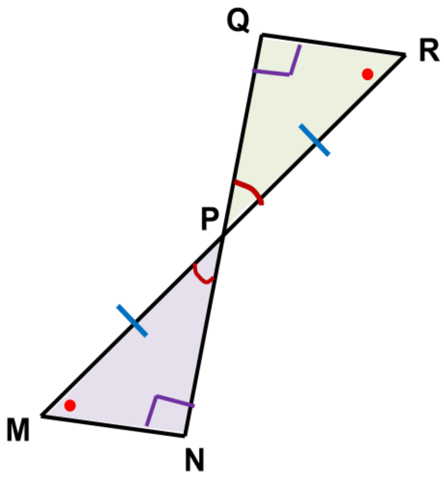
- $\overline{MR}$ y $\overline{NQ}$ se cortan en el punto P.
- $\overline{MR} = 2\overline{MP}$.
- $\angle Q = 90^{o}$ y el $\triangle MNP$ es rectángulo en N.

a) Prueba que ∆MNP = ∆PQR.

b) Si $\overline{MN}$ = 6,0 dm y $\overline{NP}$ = 8,0 dm, calcula la longitud de $\overline{MR}$.

c) Halla el área de la figura.

Solución a):



En los triángulos **MNP** y **PQR**:

♦ $\overline{MP}$ = $\overline{PR}$ por ser $\overline{MR}$ = 2$\overline{MP}$.

♦ ∠**MPN** = ∠**QPR** por ser opuestos por el vértice.

♦∠**MNP** = 90º, por ser ∆MNP rectángulo en N.

∠**PQR** = 90º por dato.

♦∠**MNP** = ∠**QPR** por ser rectos.

♦∠**M** = ∠**R** por terceros ángulos.

∆**MNP** = ∆**PQR**, por tener un lado y sus ángulos adyacentes respectivamente iguales (a ; L ; a).

Nota:

Como puedes apreciar para resolver este inciso, debes saber reconocer los **ángulos opuestos por el vértice**, la

igualdad de dos **segmentos** por la condición de **punto medio** y la propiedad de los **triángulos rectángulos**.

Además, debes tener en cuenta que:

1. Cuando justificas que **dos ángulos** son **iguales** a una determinada amplitud por **causas diferentes**, hay que **igualarlos** al final, como aparece para los **ángulos rectos**.

2. Existen varios ejercicios como este, donde obtienes la **igualdad** respectiva de **un lado** y **dos ángulos**, sin embargo **no** se cumple el teorema (a ; L a), por no ser uno de esos ángulos **adyacentes** a dicho lado. En estos casos, como ves se acude a la **igualdad** de la **tercera pareja de ángulos**, ya que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es una **constante**, **180º**.

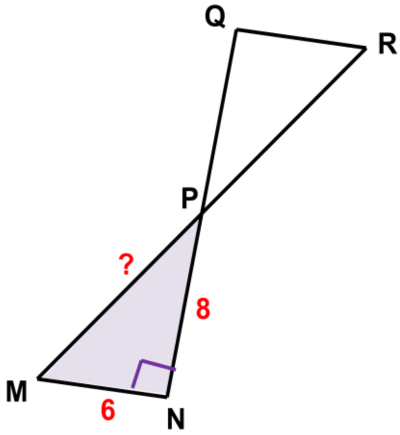
3. La **tercera pareja** de ángulos se puede justificar también por **suma de ángulos interiores** de un triángulo o **terceros ángulos**.

Importante: No existe una justificación de **terceros lados**, ya que la suma de los **tres lados** en un triángulo es igual al **perímetro**, que **no** es **constante**.

4. En estos casos se escribe en la demostración **cuatro elementos**, **un lado** y las **tres parejas de ángulos**, pero sigue siendo el teorema **(a ; L ; a)**, ya que el **ángulo no**

adyacente al lado se toma como vía para **justificar** la **tercera pareja** y no como un elemento en sí.

Solución b):



• Colocas los datos sobre la figura.

• Como $\overline{MR} = 2\overline{MP}$, hallando $\overline{MP}$ se resuelve el inciso.

• Como el **△MNP** es rectángulo en **N** y conoces la longitud de sus **dos catetos**, se puede calcular la **hipotenusa** aplicando el **teorema de Pitágoras**.

♦Hallas $\overline{MP}$:

En el **△MNP** rectángulo en **N**:

$\overline{\mathrm{MP}}^2 = \overline{\mathrm{MN}}^2 + \overline{\mathrm{NP}}^2$ por el **teorema de Pitágoras**.

$\overline{\mathrm{MP}}^2 = (6\mathrm{dm})^2 + (8\mathrm{dm})^2$ (sustituyes)

$\overline{\mathrm{MP}}^2 = 36\ \mathrm{dm}^2 + 64\ \mathrm{dm}^2$ (calculas los cuadrados)

$\overline{\mathrm{MP}}^2 = 100\ \mathrm{dm}^2$ (adicionas)

$\overline{\mathrm{MP}} = \sqrt{\mathbf{100\ dm^2}}$ (extraes la raíz cuadrada)

$\overline{\mathrm{MP}} =$ **10 dm**

♦Hallas $\overline{MR}$:

$\overline{MR} = 2\overline{MP}$

$\overline{MR}$ = 2·**10 dm** = **20 dm**

R/ La longitud de $\overline{MR}$ es de **20 dm**.

Nota:

1. Cuando en un **triángulo rectángulo** se conocen **dos** de sus **lados**, el **tercero** se halla aplicando el **teorema de Pitágoras**.

2. No es necesario utilizar el **coma cero** de los datos en los **cálculos** que realizas.

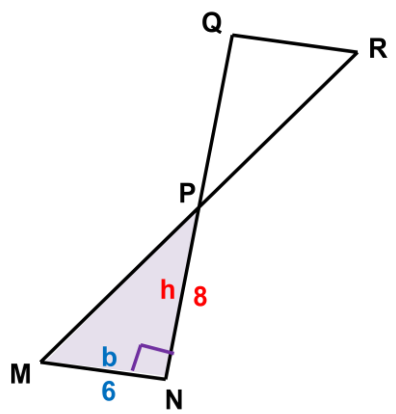
3. La **respuesta** se da con la **menor** cantidad de cifras que tienen los datos.

Solución c)

• Como ya sabes, si **dos triángulos** son **iguales**, sus **áreas** también los son, luego:

$\mathbf{A}_{(\text{figura})} = 2\mathbf{A}_{(\Delta MNP)}$

• En un **triángulo rectángulo**, si conoces los **catetos**, se puede calcular su **área**, ya que ambos son **perpendiculares** y uno se toma como **base** y el otro como **altura**.



♦Hallas el área del **ΔMNP**:

$A_{(\Delta MNP)} = \frac{b.h}{2} = \frac{\overline{MN}.\overline{NP}}{2}$ (escribes la fórmula)

$A_{(\Delta MNP)} = \frac{6\,dm\,.\,8\,dm}{2}$ (sustituyes)

$A_{(\Delta MNP)} = \frac{48\,dm^2}{2}$ = **24 dm^2** (calculas)

♦Halla el área de la figura:

$A_{(figura)} = 2A_{(\Delta MNP)}$

$A_{(figura)} = 2 \cdot$ **24 dm^2**

$A_{(figura)} =$ **48 dm^2**

R/ El área de la figura es igual a **48 dm^2**.

Nota: Ten en cuenta que para resolver ejercicios sobre **cálculo** de **áreas** o **perímetros,**

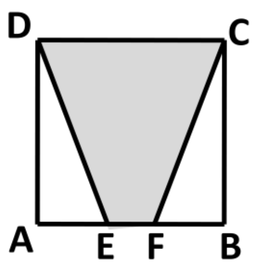
1. No es necesario utilizar el **coma cero** de los datos en los **cálculos** que realizas.

2. La **respuesta** se da con la **menor** cantidad de cifras que tienen los datos.

Ejemplo 3

En la figura:

● ABCD cuadrado.



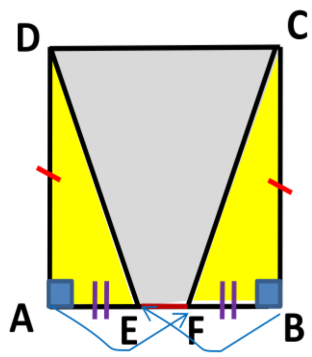
• E y F puntos de $\overline{AB}$, tales que

$\overline{AF} = \overline{EB}$.

a) Prueba que ∆DAE = ∆CBF.

b) Si $\overline{AD}$ = 12 dm y $\overline{DE}$ = 13 dm, calcula el área de la región sombreada.

Solución a):



En los triángulos **DAE** y **CBF**:

♦ $\overline{AD} = \overline{BC}$ por ser lados de un cuadrado.

♦∠**A** = ∠**B** = 90º por ser ángulos interiores de un cuadrado.

$\overline{AF} = \overline{EB}$ por dato

$\overline{EF}$ segmento común

Luego, ♦ $\overline{AE} = \overline{FB}$ por diferencia de segmentos.

∆**DAE** = ∆**CBF**, por tener dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales (L ; a ; L).

Nota:

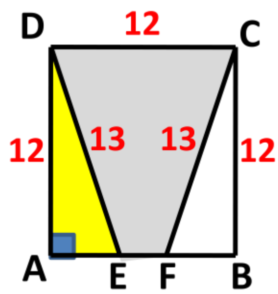
En este ejercicio es necesario dominar las **propiedades** de un **cuadrado** y aparece además como un elemento a utilizar para la igualdad, la **diferencia de segmentos**.

Ten en cuenta que los segmentos **iguales** que te brindan en los datos tienen **mayor longitud** que los que necesitas, pero si le **sustraes** el **segmento común** ($\overline{EF}$), obtienes la igualdad deseada.

Existe también la **suma** de **segmentos**, así como la **suma** o **diferencia** de **ángulos**, que utilizaremos en otros ejercicios.

Solución b)

- Colocas los datos sobre la figura.



- Hallas el lado $\overline{AE}$:

En el **△DAE** rectángulo en A:

$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2$ por el **teorema de Pitágoras**.

$(13\ \text{dm})^2 = (12\ \text{dm})^2 + \overline{AE}^2$ (sustituyes)

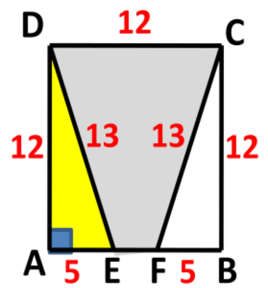
$169\ \text{dm}^2 = 144\ \text{dm}^2 + \overline{AE}^2$ (calculas los cuadrados)

$\overline{AE}^2 = 169\ \text{dm}^2 - 144\ \text{dm}^2$ (despejas)

$\overline{AE}^2 = 25\ \text{dm}^2$ (efectúas la sustracción)

$\overline{AE} = \sqrt{\mathbf{25\ dm^2}}$ (extraes la raíz cuadrada)

$\overline{AE} =$ **5 dm**



• Para hallar el **área sombreada**, se puede proceder de dos formas:

I. Resta de áreas.

• Como los triángulos **DAE** y **CBF** son **iguales**, sus **áreas** son **iguales**.

♦Hallas el **área** del **△DAE**:

$$A_{(\triangle DAE)} = \frac{b.h}{2} = \frac{\overline{AE}.\overline{AD}}{2}$$ (escribes la fórmula)

$$A_{(\triangle DAE)} = \frac{5\ dm\ .\ 12\ dm}{2}$$ (sustituyes)

$$A_{(\triangle DAE)} = \frac{60\ dm^2}{2} = \mathbf{30\ dm^2}$$ (calculas)

♦Hallas el **área** del **cuadrado**:

$A_{(ABCD)} = a^2$ (escribes la fórmula)

$A_{(ABCD)} = (12\ dm)^2$ (sustituyes)

$A_{(ABCD)} = \mathbf{144\ dm^2}$ (efectúas)

♦Hallas el **área sombreada**:

$A_{(sombreada)} = A_{(ABCD)} - 2\ A_{(\triangle DAE)}$

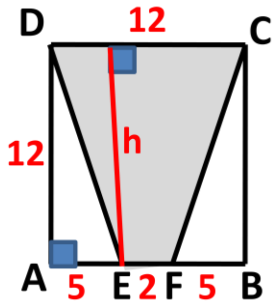
$A_{(sombreada)} = 144\ dm^2 - 2\cdot 30\ dm^2$

$A_{(sombreada)} = 144\ dm^2 - 60\ dm^2$

$A_{(sombreada)} = \mathbf{84\ dm^2}$

II. Área del trapecio EFCD.

• Como la parte sombreada es un **trapecio**, hallas su **área** por la fórmula de dicha figura.



• Conocemos la **base mayor** $\overline{DC}$ = 12 dm, la **altura** que coincide en longitud con el lado $\overline{DA}$ = 12 dm y debes hallar la **base menor** $\overline{EF}$.

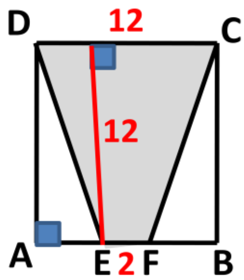
♦Hallas la **base menor**:

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AE}} + \overline{\mathrm{EF}} + \overline{\mathrm{FB}}$ (suma de segmentos)

12 dm = 5 dm + $\overline{\mathrm{EF}}$ + 5 dm (sustituyes)

12 dm – 10 dm = $\overline{\mathrm{EF}}$ (adicionas y transpones)

$\overline{\mathrm{EF}}$ = **2 dm** (sustraes)



♦Hallas el **área** del **trapecio**:

$$A_{(EFCD)} = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{(\overline{DC}+\overline{EF}).h}{2}$$

$$A_{(EFCD)} = \frac{(12\ dm + 2\ dm)\ .\ 12\ dm}{2}$$

$$A_{(EFCD)} = \frac{\cancel{14}\ dm\ .12\ dm}{\cancel{2}} = 7\text{ dm} \cdot 12\text{ dm}$$

$A_{(EFCD)}$ = **84 dm²**

R/ El área sombreada es igual a **84 dm²**.

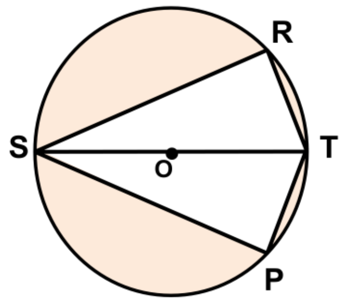
Nota:

1. La **respuesta** se da con las **dos cifras**, porque los datos tienen **dos**.

2. Las **áreas sombreadas** o **rayadas** se calculan generalmente por **diferencia de áreas**, pero si lo **sombreado** o **rayado** es una figura conocida que tiene su **fórmula** de área, puedes intentar también de esa manera.

Ejemplo 4

En la figura:



- $\overline{ST}$ es un diámetro de la circunferencia de centro O.
- R y P puntos de la circunferencia.
- $\widehat{RT}$ y $\widehat{PT}$ son arcos iguales.

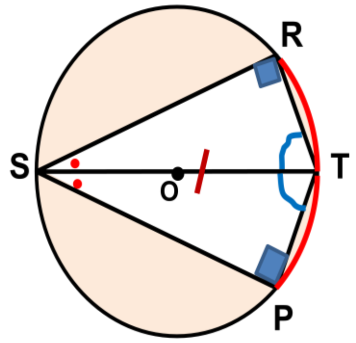
a) Prueba que $\triangle$SRT = $\triangle$SPT.

b) Calcula el área de la región sombreada, si $\overline{SR}$ = 16 cm y $\overline{RT}$ = 12 cm.

c) Si se sabe que el arco RT mide 74º, halla la amplitud de los ángulos interiores del $\triangle$SRT.

Solución a):

En los triángulos **SRT** y **SPT**:



♦ $\overline{ST}$ segmento común.

♦ ∠**R** = ∠**P** = 90º por estar inscritos sobre el diámetro $\overline{ST}$.

♦ ∠**RST** = ∠**PST** por estar inscritos sobre cuerdas iguales.

♦ ∠**RTS** = ∠**PTS** por terceros ángulos.

▵**SRT** = ▵**SPT**, por tener un lado y sus ángulos adyacentes respectivamente iguales (a ; L ; a).

Nota:

1. En este ejercicio aparece la **circunferencia**, por lo que es importante dominar sus **elementos** y **propiedades**. Específicamente utilizamos aquí, los **ángulos inscritos** sobre el **diámetro** y sobre **arcos iguales**.

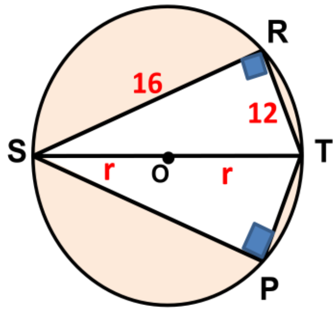
2. También se podía decir que $\overline{RT} = \overline{TP}$ por corresponderle **arcos iguales**, pero habría que escribir más elementos para llegar al teorema.

Solución b)

- Colocas los datos sobre la figura.

- El **área sombreada** se calcula mediante la **diferencia** de las **áreas** del **círculo** y cada **triángulo**.

♦ Hallas el **radio** del **círculo**:



En el $\triangle$**SRT** rectángulo en **R**:

$\overline{ST}^2 = \overline{SR}^2 + \overline{RT}^2$ por el **teorema de Pitágoras**.

$\overline{ST}^2 = (16\ \text{cm})^2 + (12\ \text{cm})^2$ (sustituyes)

$\overline{ST}^2 = 256\ \text{cm}^2 + 144\ \text{cm}^2$ (calculas los cuadrados)

$\overline{ST}^2 = 400\ \text{cm}^2$ (adicionas)

$\overline{ST} = \sqrt{400\ \text{cm}^2}$ (extraes la raíz cuadrada)

$\overline{ST}$ = **20 cm**

Luego **r** = $\overline{ST}$: 2 = **20 cm** : 2 = **10 cm**

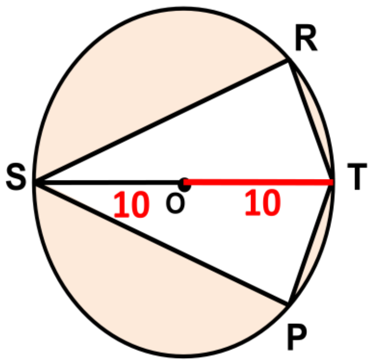
♦ Hallas el **área** del **círculo**:

$\mathbf{A}_{(\text{círculo})} = \pi \cdot \mathbf{r}^2$

$\mathbf{A}_{(\text{círculo})} = 3{,}14 \cdot (10\ \text{cm})^2$

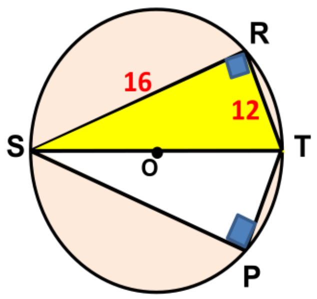
$\mathbf{A}_{(\text{círculo})} = 3{,}14 \cdot 100\ \text{cm}^2$

$\mathbf{A}_{(\text{círculo})} = \mathbf{314\ cm^2}$



♦ Hallas el **área** de un **triángulo**:

$\mathbf{A}_{(\triangle SRT)} = \dfrac{b.h}{2} = \dfrac{\overline{SR}.\overline{RT}}{2}$



$$A_{(\triangle SRT)} = \frac{16\ cm\ .\ 12\ cm}{2}$$

$$A_{(\triangle SRT)} = \frac{192\ cm^2}{2} = \mathbf{96\ cm^2}$$

Nota: Recuerda que como los triángulos son **iguales**, sus **áreas** son **iguales**.

♦ Hallas el **área sombreada**:

$A_{(sombreada)} = A_{(cçirculo)} - 2\ A_{(\triangle SRT)}$

$A_{(sombreada)} = 314\ cm^2 - 2{\cdot}96\ cm^2$

$A_{(sombreada)} = 314\ cm^2 - 192\ cm^2$

$A_{(sombreada)} = \mathbf{122\ cm^2}$

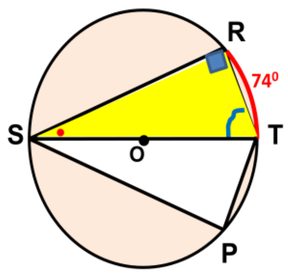
R/ El área sombreada es igual a **1,2 dm²**.

Nota:

1. La **respuesta** se da con **dos cifras**, porque los datos tienen **dos**. Como un número de **tres cifras** no se puede redondear a **dos**, es necesario **cambiar** de unidad de medida.

Solución c)

• Colocas los datos sobre la figura.



♦∠**R** = **90º** por estar inscrito sobre el diámetro $\overline{ST}$.

♦∠**RST** = **37º** porque el ángulo inscrito mide la **mitad** del arco que determina.

♦∠**RTS** = **53º** por **suma** de ángulos agudos en un triángulo rectángulo.

Nota: El ∠**RTS** también se puede argumentar por suma de ángulos interiores en el △**SRT**, pero la vía utilizada es mucho más racional y de gran utilidad para abreviar los cálculos.

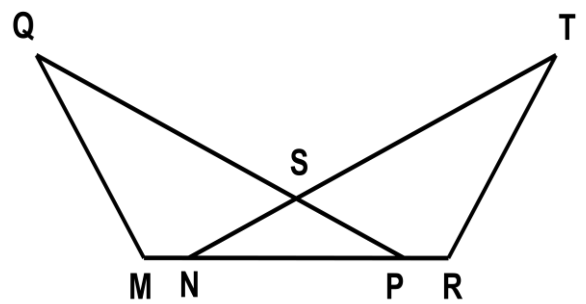
IV. Ejemplos de aplicación de la igualdad de dos triángulos.

La **igualdad de triángulos** es muy útil para la demostración de la **igualdad** de **lados** o **ángulos**, la **clasificación** de **figuras planas** y **propiedades** de la **Geometría Plana**.

Ejemplo 1

En la figura:

● M, N, P y R puntos alineados.



- S punto de intersección de $\overline{QP}$ y $\overline{TN}$.
- △SNP isósceles de base $\overline{NP}$.
- $\overline{QS}$ = $\overline{TS}$.
- ∠Q = ∠T.

a) Prueba que $\overline{QM}$ = $\overline{TR}$.

b) Si el ∠NSP = 130º y el ∠M = 120º, clasifica el △QMP de acuerdo a la longitud de sus lados.

Solución a):

- Para demostrar que $\overline{QM}$ = $\overline{TR}$, hay que probar la **igualdad** de dos triángulos que contengan a dichos lados.

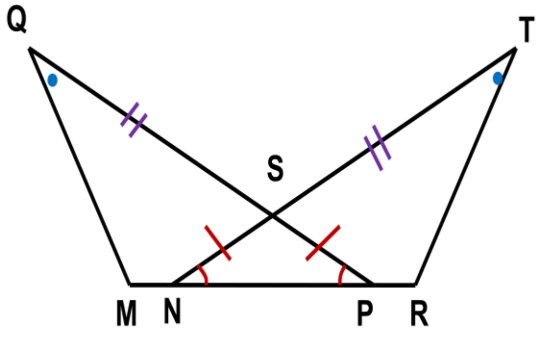
- Seleccionas los triángulos:

En los triángulos **QMP** y **TRN**:

♦ $\overline{SN}$ = $\overline{SP}$ por ser lados no base del triángulo isósceles △SNP.

♦ $\overline{QS}$ = $\overline{TS}$ por dato.

♦ Luego $\overline{QP}$ = $\overline{TN}$ por **suma de segmentos**.



♦ ∠**Q** = ∠**T** por dato.

♦ ∠**N** = ∠**P** por ángulos bases del triángulo isósceles △SNP.

△QMP = **△TRN**, por tener un lado y sus ángulos adyacentes respectivamente iguales (a ; L ; a).

$\overline{QM}$ **=** $\overline{TR}$ por ser **lados homólogos** de triángulos iguales.

Nota:

1. En este ejemplo, nos apoyamos en la **igualdad de triángulos** para demostrar que dos de **segmentos** son iguales.

2. Para realizar esta demostración debes conocer, las **propiedades** del triángulo **isósceles** y la **suma** de **segmentos**.

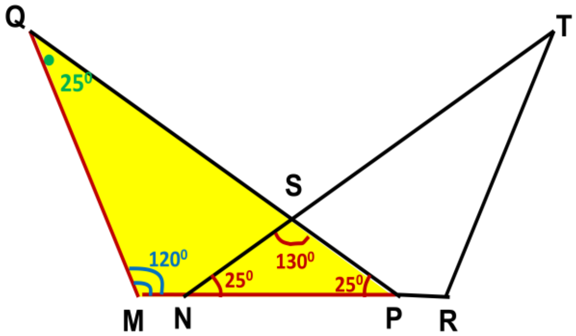
Solución b):

• Marcas los datos sobre la figura.

En el **△NSP**:

♦ ∠**NSP** = 130º por dato.

♦ ∠**SNP** = ∠**SPN** = 25^0 por suma de ángulos interiores.



En el **△QMP**:

♦ ∠**M** = 120^0 por dato.

♦ ∠**QPM** = 25^0 ya calculado.

♦ **∠Q** = 25º por suma de ángulos interiores.

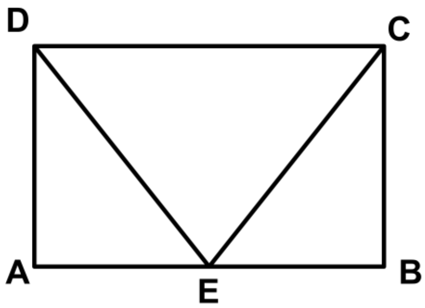
Como en un **triángulo**, a **ángulos iguales** se oponen **lados iguales**, entonces $\overline{QM}$ = $\overline{MP}$.

R/ El ▵**QMP** es **isósceles**, de base $\overline{QP}$ por tener dos lados iguales.

Ejemplo 2

En la figura:

- ABCD rectángulo.
- E es el punto medio del lado $\overline{AB}$



a) Prueba que el ▵DEC es isósceles de base $\overline{DC}$.

b) Si el área del ▵ADE es igual a 10 dm^2 y $\overline{AD}$ = 50 cm, calcula el área y el perímetro del rectángulo ABCD.

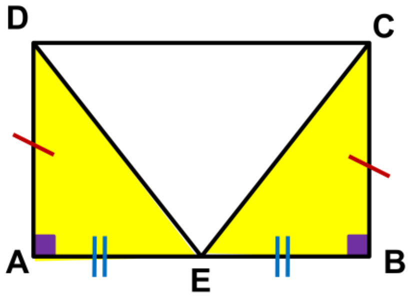
Solución a):

- Para demostrar que el triángulo es **isósceles**, hay que probar que tiene **dos lados iguales**.

- Los lados iguales deben ser $\overline{DE}$ y $\overline{EC}$, ya que su base es $\overline{DC}$.

• Tomamos **dos triángulos** que contengan a dichos lados y probamos que son **iguales**.

En los triángulos **DAE** y **CBE**:



♦ $\overline{AD} = \overline{BC}$ por ser lados opuestos de un rectángulo.

♦$\angle$**A** = $\angle$**B** = 90º por ser ángulos interiores de un rectángulo.

♦ $\overline{AE}$ **=** $\overline{EB}$ por ser E punto medio del lado $\overline{AB}$.

△**DAE** = △**CBE**, por tener dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales (L ; a ; L).

$\overline{DE}$ **=** $\overline{EC}$ por ser **lados homólogos** de triángulos iguales.

Luego, el △**DEC** es **isósceles** de base $\overline{DC}$, por tener dos lados iguales.

Nota:

1. En este ejercicio, a partir de la **igualdad** de **triángulos** y de una pareja de sus **elementos homólogos**, pudimos demostrar que un triángulo es **isósceles**.

2. Para resolverlo, debías saber las **propiedades** del **rectángulo** y la condición de **punto medio** de un **segmento**.

3. Ten en cuenta, el orden en que debes trabajar:

♦ **seleccionar** correctamente los triángulos a utilizar,

♦ **demostrar** que son iguales,

♦ **encontrar** los elementos homólogos necesarios,

♦ y **escribir** la conclusión.

Solución b)

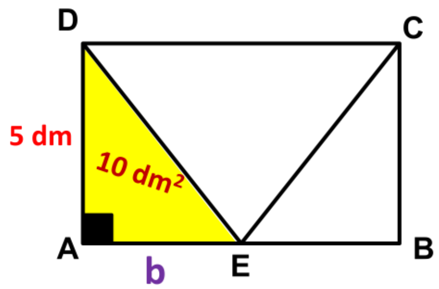
• Colocas los datos sobre la figura.

• Como conoces el **área** de un **triángulo** y su **altura**, puedes obtener su **base**, despejando en la fórmula.

♦ Hallas la **base** del triángulo:

$\overline{AD}$ = 50 cm = **5 dm**

$$A_{(\Delta DAE)} = \frac{b.h}{2} = \frac{\overline{AE}.\overline{DA}}{2}$$

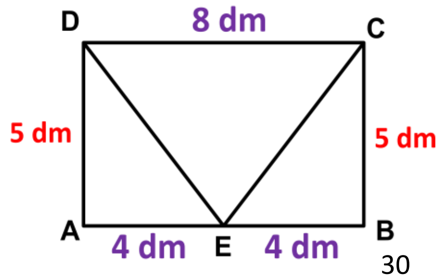


$$10\ dm^2 = \frac{\overline{AE}\ .\ 5\ dm}{2}$$

$$\overline{AE} = \frac{10\ dm^2\ .\ 2}{5\ dm} = \frac{20\ dm^2}{5\ dm}$$

$\overline{AE}$ = **4 dm**

♦ Hallas el **área** del **rectángulo**:



$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB}$ por suma de segmentos

$\overline{AB}$ = 4 dm + 4 dm = **8 dm**

A(ABCD) = b·h = $\overline{AB}\cdot\overline{DA}$

A(ABCD) = 8 dm·5 dm = **40 dm²**

♦ Hallas el **perímetro** del **rectángulo**:

P(ABCD) = 2 (a + b) = 2($\overline{AB} + \overline{DA}$)

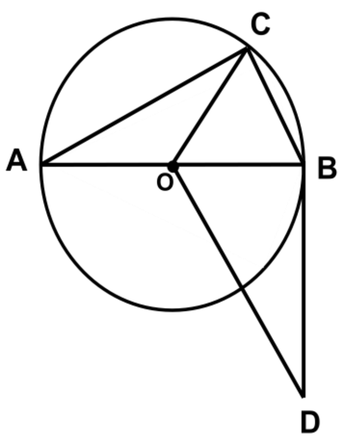
P(ABCD) = 2·(8 dm + 5 dm) = 2·(13 dm)

P(ABCD) = **26 dm**

Nota: Los resultados de los segmentos hallados en los cálculos intermedios **no** se escriben con **dos cifras**, porque esta regla se aplica **solo** en la **respuesta final** del inciso.

Ejemplo 3

En la figura:



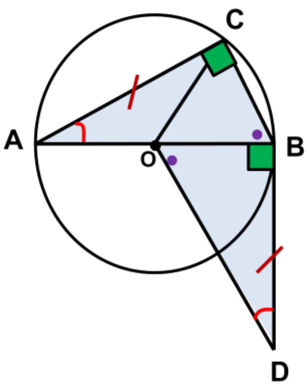
- C es un punto de la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$.
- $\overline{DB}$ es tangente a la circunferencia en B.
- $\overline{AC} = \overline{BD}$.
- $\overline{CB}$ // $\overline{OD}$

a) Prueba que el △OBC equilátero.

b) Halla la amplitud del ∠D.

c) Si el perímetro del △OBC es igual a 6,0 cm, calcula la longitud de la circunferencia.

Solución a):



En los triángulos **ACB** y **OBD**:

♦ $\overline{\mathbf{AC}}$ = $\overline{\mathbf{BD}}$ por dato.

♦ **∠ACB** = 90º por inscrito sobre el diámetro $\overline{AB}$.

♦ **∠OBD** = 90º por ser $\overline{DB}$ tangente a la circunferencia en B.

♦ **∠ACB = ∠OBD** por ser rectos por tener la misma amplitud.

♦ **∠CBA** = **∠BOD** por alternos entre las paralelas $\overline{CB}$ y $\overline{OD}$ con secante $\overline{OB}$.

♦ **∠A** = **∠D** por terceros ángulos.

△**ACB** = △**OBD**, por tener un lado y sus ángulos adyacentes respectivamente iguales (a ; L ; a).

Luego:

$\overline{\mathbf{OB}}$ = $\overline{\mathbf{CB}}$ por lados homólogos de triángulos iguales.

$\overline{\mathbf{OB}}$ = $\overline{\mathbf{OC}}$ por ser radios.

Entonces $\overline{\mathbf{CB}}$ = $\overline{\mathbf{OC}}$ por transitividad.

Como los tres lados del ∆**OBC** son **iguales**, es **equilátero**.

Nota:

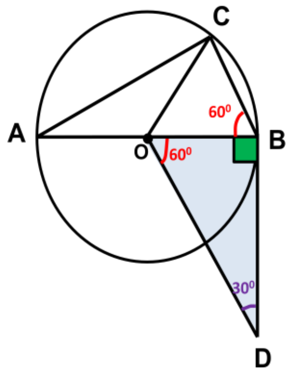
1. Aquí hemos utilizado importantes **propiedades** de los **ángulos** en la **circunferencia**, como el **teorema de Tales** y el de la **tangente**.

2. También se utilizaron los ángulos entre **paralelas**.

3. En la conclusión se utiliza la **transitividad**, que muestra la igualdad entre **tres elementos**, sean lados, ángulos, triángulos, áreas, etc, o sea:

♦ Si un elemento **1** es igual a un elemento **2** y a su vez, el elemento **1** es igual a un elemento **3**, entonces se cumplirá que el elemento **2** es igual al elemento **3**.

Solución b):



• Colocas los datos sobre la figura.

• Como hay que hallar el **∠D**, trabajamos en el ∆**OBD.**

♦**∠CBO** = **60º** por ser el ∆**OBC** equilátero.

♦**∠BOD** = **∠CBO** = **60º** por alterno entre las paralelas $\overline{CB}$ y $\overline{OD}$ con secante $\overline{OB}$.

♦∠**OBD** = **90º** por ser $\overline{DB}$ es tangente a la circunferencia en **B**.

♦∠**D** = **30º** por suma de ángulos agudos en el ∆**OBD** rectángulo en **B**.

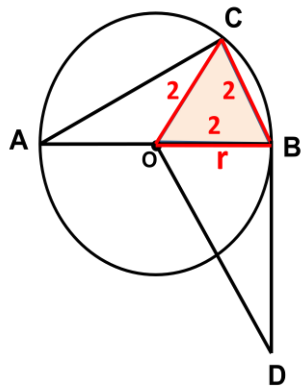
Solución c):

♦Planteas la fórmula:

L$_{\text{(circunferencia)}}$ = 2·π·**r**

● Para hallar la **longitud** de la circunferencia, hay que calcular su **radio**.

● Para calcular el **radio**, te apoyas en el **dato numérico** y que el ∆**OBC** es **equilátero**.



P$_{(\Delta OBC)}$ = 3·$\overline{OB}$ (planteas la fórmula)

6 cm = 3·$\overline{OB}$ (sustituyes)

$\overline{OB} = \frac{6\ cm}{3}$ = **2 cm** (despejas y divides)

r = **2 cm**

♦Hallas la longitud de la circunferencia:

L$_{\text{(circunferencia)}}$ = 2·π·**r** = 2·3,14·**2 cm**

L$_{\text{(circunferencia)}}$ = **12,56 cm**

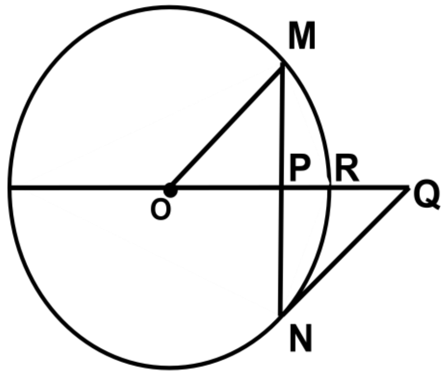
R/ La longitud de la circunferencia es de aproximadamente 13 cm.

Nota:

1. Como los datos tienen **dos** cifras, la respuesta se **redondea** a **dos**.

2. La longitud de la circunferencia también se puede hallar utilizando la fórmula **L = π·d**.

Ejemplo 4



En la figura:

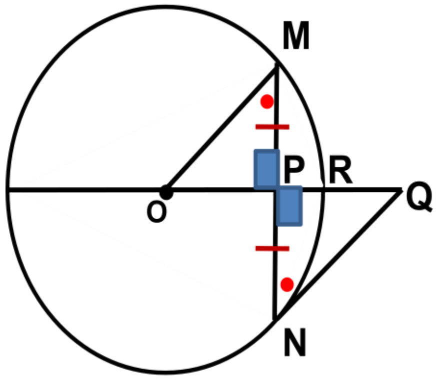
- $\overline{MN}$ es una cuerda de la circunferencia de centro O y $\overline{OR}$ uno de sus radios.
- $\overline{OR}$ es perpendicular a $\overline{MN}$ en P.
- O, P, R y Q son puntos alineados.
- $\overline{OM} \parallel \overline{NQ}$

a) Prueba que $\overline{NQ}$ tiene igual longitud que el radio de la circunferencia.

b) Si el arco MN mide 90º y $\overline{OQ}$ = 4,0 cm, calcula el área del círculo.

Solución a):

En los triángulos **OPM** y **QPN**:



♦ $\overline{\mathbf{MP}}$ = $\overline{\mathbf{NP}}$ porque como $\overline{OR} \perp \overline{MN}$ se cumple que, cuando un radio corta a una cuerda **perpendicularmente**, la divide a la **mitad**.

♦ ∠**MPO** = ∠**NPQ** por opuestos por el vértice. (También se pueden justificar por ser **rectos**).

♦ ∠**OMP** = ∠**PNQ** por alternos entre las paralelas $\overline{OM}$ y $\overline{NQ}$ con secante $\overline{MN}$.

▵**OPM** = ▵**QPN**, por tener un lado y sus ángulos adyacentes respectivamente iguales (a ; L ; a).

$\overline{\mathbf{OM}}$ = $\overline{\mathbf{NQ}}$ por lados homólogos de triángulos iguales.

Como $\overline{\mathbf{OM}}$ es un radio de la circunferencia e igual a $\overline{\mathbf{NQ}}$, entonces ambos segmentos tiene igual longitud.

Nota:

1. En este ejercicio se utiliza el teorema:

• Si un **radio** corta a una **cuerda perpendicularmente**, la divide a la **mitad**.

También se cumple su recíproco:

• Si un **radio** corta a una **cuerda** a la **mitad**, la divide **perpendicularmente**.

2. Además, nos apoyamos en los **ángulos** entre **paralelas** y los **opuestos por el vértice**, ya analizados anteriormente.

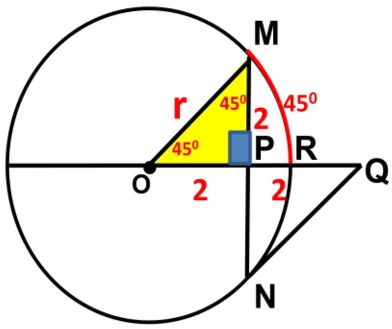
Solución b):

• Colocas los datos sobre la figura.

• Hay que hallar el **radio** del círculo, por lo que trabajamos en el **▵OPM**.

$\overline{OP} = \overline{PQ}$ = **2 cm**, por ser elementos homólogos de triángulos iguales.

• Como el **arco MN** mide **90º**, los **arcos MR** y **RN** miden **45º**, ya que si un **radio** corta a la **mitad** a una **cuerda**, también divide a la **mitad** del **arco** correspondiente.



En el **▵MPO**:

♦ **∠MOR** = **45º** porque el **ángulo central** tiene la misma amplitud que el **arco** que determina.

∠MPO = **90º** por ser $\overline{OR} \perp \overline{MN}$.

♦**$\angle$M** = **45º** por suma de ángulos agudos.

Luego, el $\triangle$**MPO** es isósceles de base $\overline{OM}$ y $\overline{OP}$ = $\overline{PM}$ = 2 cm.

Podemos calcular el **radio** $\overline{OM}$ aplicando el **teorema de Pitágoras**.

En el $\triangle$**MPO** rectángulo en **P**:

$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2$

$\overline{OM}^2$ = (2 cm)^2 + (2 cm)^2 = 4 cm^2 + 4 cm^2 = **8 cm^2**

r^2 = $\overline{OM}^2$ = **8 cm^2**

Nota: Como en la fórmula de **área**, el **radio** está al cuadrado, **no** hace falta extraer la **raíz cuadrada** en este caso.

♦Calculas el **área** del círculo:

$A_{círculo} = \pi \cdot r^2$

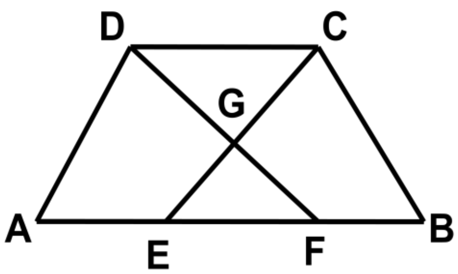
$A_{círculo}$ = 3,14·8 cm^2

$A_{círculo}$ ≈ 25,12 cm^2

R/ El área del círculo es de aproximadamente 25 cm^2.

Nota: Como los datos tiene **dos cifras**, la respuesta se redondea a **dos**.

Ejemplo 5



En la figura:

- ABCD es un trapecio de bases $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$.
- $\angle$GFB = $\angle$GEA.
- $\overline{AE} = \overline{FB}$.
- $\overline{EC} = \overline{FD}$.

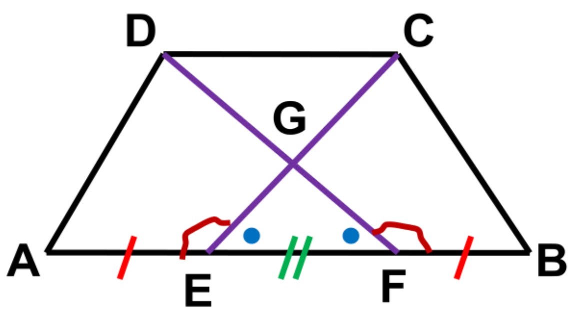
a) Prueba que el trapecio ABCD es isósceles.

b) Clasifica el $\triangle$EGF según la longitud de sus lados.

c) Si el perímetro del trapecio es igual a 30 cm, su altura mide 3,0 cm y $\overline{AD}$ = 5,0 cm, calcula su área.

Solución a):

En los triángulos **ADF** y **CBE**:



♦ $\overline{\mathbf{DF}} = \overline{\mathbf{EC}}$ por dato.

♦ **$\angle$GEA** = **$\angle$GFB** por dato.

♦ **$\angle$GFE** = **$\angle$GEF** por ser adyacentes a ángulos iguales.

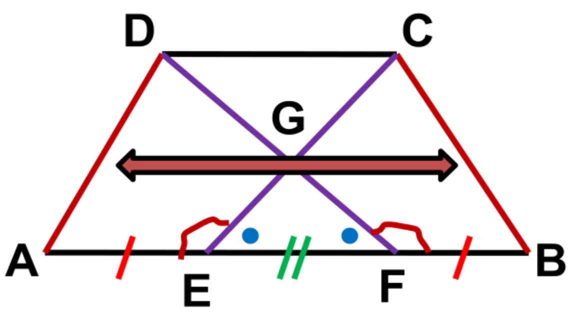
♦ $\overline{AE}$ = $\overline{FB}$ por dato.

♦ $\overline{EF}$ segmento común.

♦ $\overline{AF}$ = $\overline{EB}$ por suma de segmentos.

△ADF = **△CBE**, por tener dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales (L ; a ; L).

♦ $\overline{AD}$ = $\overline{CB}$ por lados homólogos en triángulos iguales.



Luego, **ABCD** es un trapecio isósceles por tener sus lados **no base iguales**.

Nota:

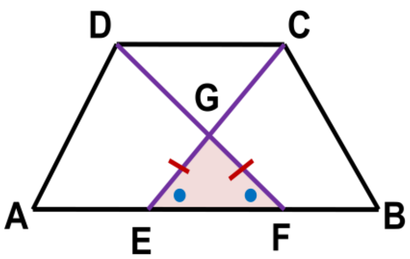
1. Para la demostración nos apoyamos en la ya trabajada **suma de segmentos**, los **ángulos adyacentes** y el **segmento común**.

2. Si mencionas como **elementos homólogos** a los **ángulos A** y **B**, tienes que escribir después que en **triángulos iguales** a **ángulos iguales** se oponen **lados iguales**, por lo que $\overline{AD}$ = $\overline{CB}$.

Esto se debe, a que la ***clasificación*** de **isósceles** en **triángulos** y **trapecios** es por los **lados** y **no** por los **ángulos**.

Solución b):

El $\triangle$**EGF** según la longitud de sus lados es **isósceles** de base $\overline{\mathbf{EF}}$, ya que como **GFE** = **∠GEF**, entonces se cumple que en un **triángulo**, a **ángulos iguales** se ponen **lados iguales** (como aclaramos en el inciso anterior).

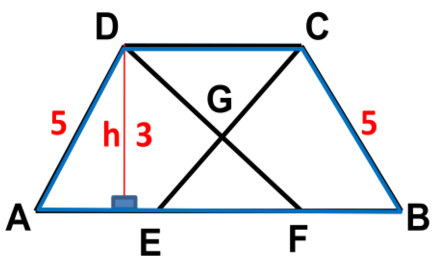


Solución c):

• Como el trapecio es **isósceles**,

$\overline{AD}$ = $\overline{BC}$ = **5 cm**.

• Conocidos el **perímetro** y los **lados** no base, se puede despejar en la fórmula la **suma** de las bases:



P$_{\mathbf{(ABCD)}}$ = $\overline{AB}$ + $\overline{DC}$ + 2$\overline{AD}$

30 = $\overline{AB}$ + $\overline{DC}$ + 2·**5**

30 – 10 = $\overline{AB}$ + $\overline{DC}$

$\overline{AB}$ + $\overline{DC}$ = **20 cm**

• Como en la fórmula de **área** del **trapecio**, las bases se **suman**, no es necesario hallar el valor de cada base por separado.

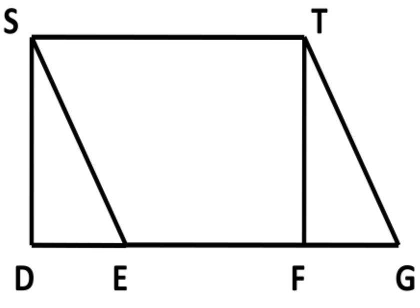
♦Hallas el **área**:

$$A_{(ABCD)} = \frac{(B+b).h}{2}$$

$$A_{(ABCD)} = \frac{(\overline{AB}+\overline{DC}).h}{2} = \frac{20\ cm\ .\ 3\ cm}{2} = 30\ cm^2$$

R/ El área del trapecio es de **30 cm²**.

Ejemplo 6



En la figura:

• SDFT es un rectángulo.

• $\overline{SE}$ // $\overline{TG}$.

• E y F puntos de $\overline{DG}$.

a) Prueba que el cuadrilátero SEGT es un paralelogramo.

b) Demuestra que el área del rectángulo DFTS y el área del paralelogramo SEGT son iguales.

c) Si $\overline{SE}$ = 10 dm, $\overline{DE}$ = 6,0 dm y $\overline{EF}$ = $\overline{SE}$, calcula el perímetro del cuadrilátero SEFT.

Solución a):

Para concluir que un **cuadrilátero** es un **paralelogramo**, basta probar **una** de las siguientes **condiciones**:

- **un par** de **lados opuestos iguales** y **paralelos**.
- sus **diagonales** se cortan en su **punto medio**.

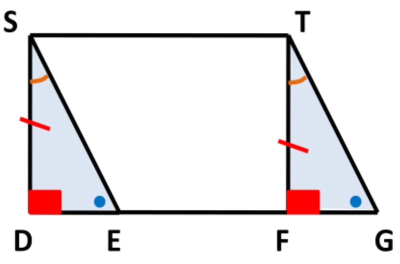
(Esta condición se verifica si en la figura están trazadas las diagonales)

- sus **lados opuestos** son **iguales**.
- sus **lados opuestos** son **paralelos**.
- sus **ángulos opuestos** son **iguales**.

Seleccionas los triángulos:

En los triángulos **SDE** y **TFG**:

♦ **∠D** = **∠TFG** por correspondientes entre las paralelas $\overline{SD}$ y $\overline{TF}$ con secante $\overline{DG}$.

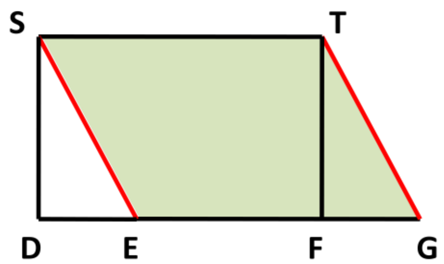


♦ $\angle$**SED** = $\angle$**G** por correspondientes entre las paralelas $\overline{\mathbf{SE}}$ y $\overline{\mathbf{TG}}$ con secante $\overline{DG}$.

♦ $\overline{\mathbf{SD}}$ = $\overline{\mathbf{TF}}$ por lados opuestos de un rectángulo.

♦ $\angle$**DSE** = $\angle$**FTG** por terceros ángulos.

▵SDE = **▵TFG**, por tener un lado y sus ángulos adyacentes respectivamente iguales (a ; L ; a).



♦ $\overline{\mathbf{SE}}$ = $\overline{\mathbf{TG}}$ por lados homólogos en triángulos iguales.

♦ $\overline{SE}$ // $\overline{TG}$ por dato.

Luego, **SEGT** es un **paralelogramo** por tener un par de lados opuestos **iguales** y **paralelos**.

Nota:

1. Para realizar la demostración de la igualdad utilizamos las **propiedades** del **rectángulo**, así como los **ángulos** entre **paralelas**.

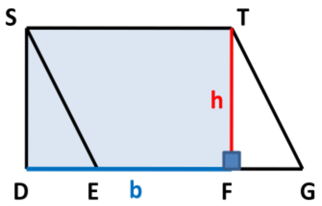
2. Para demostrar que el cuadrilátero es un **paralelogramo** utilizamos la **primera** condición, pero se pueden utilizar también la **tercera** y **cuarta**, incluso sin utilizar la igualdad como recurso, inténtalo. La **segunda** **no** es adecuada por no estar trazadas las **diagonales**.

Solución b):

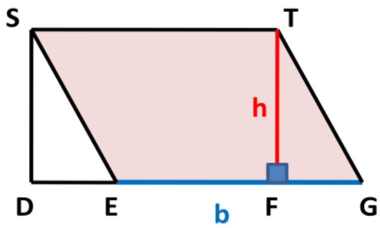
• Como **no** tenemos **valores numéricos** para hallar cada **área**, la demostración hay que realizarla de forma **general**.

• Planteas la fórmula de **área** de cada figura:

A(DFTS) = **b** . **h** = $\overline{DF} \cdot \overline{TF}$



A(SEGT) = **b** . **h** = $\overline{EG} \cdot \overline{TF}$



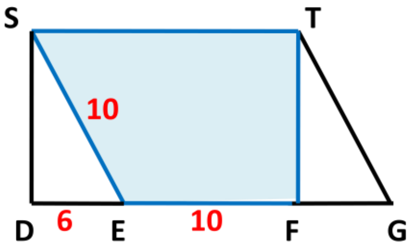
• Comparas sus **bases** y **alturas**:

$\overline{DF} = \overline{EG}$, ya que $\overline{DE} = \overline{FG}$ por **lados homólogos** de triángulos iguales y $\overline{EF}$ es un **segmento común**.

$\overline{TF}$ es **altura común** de ambas figuras.

Luego, **A(DFTS)** = **A(SEGT)** por tener bases iguales y altura común.

Solución c):



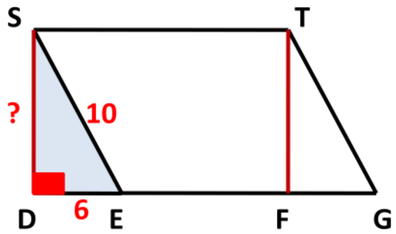
● Colocas los datos sobre la figura:

● Para hallar el **perímetro** es necesario determinar la longitud de los lados $\overline{TF}$ y $\overline{ST}$.

♦Hallamos $\overline{TF}$:

Como SDFT es un **rectángulo**, $\overline{TF} = \overline{SD}$.

En el ∆**SDE** rectángulo en **D**:



$\overline{SE}^2 = \overline{SD}^2 + \overline{DE}^2$ por el teorema de Pitágoras.

$10^2 = \overline{SD}^2 + 6^2$

$\overline{SD}^2 = 100 - 36 = 64$

$\overline{SD} = \sqrt{64} =$ **8 dm**

Luego, $\overline{TF} =$ **8 dm**

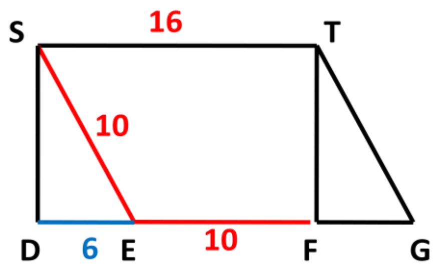
♦Hallamos $\overline{ST}$:

$\overline{ST} = \overline{DF}$ por **lados opuestos** del rectángulo **DFTS**.

$\overline{EF} = \overline{SE} = 10$ dm por dato

$\overline{DF} = \overline{DE} + \overline{EF}$ por **suma de segmentos**.

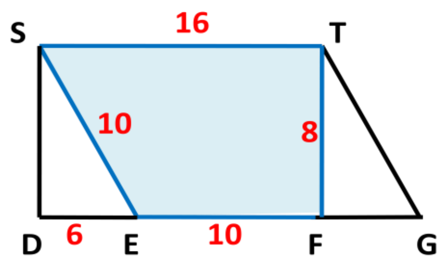
$\overline{DF}$ = 6 dm + 10 dm = **16 dm**



Luego, $\overline{ST}$ = **16 dm**

♦Calculas el **perímetro**:

P(EFTS) = $\overline{EF} + \overline{FT} + \overline{TS} + \overline{SE}$



P(EFTS) = 10 + 8 + 16 + 10

P(EFTS) = **44 dm**

R/ El perímetro del cuadrilátero EFTS es igual a **44 dm**.

Conclusión:

Como ves existen infinidad de ejercicios sobre **igualdad de triángulos** y en cada uno se utilizan diversas **justificaciones** para la **igualdad** de **elementos**, por lo que **no es posible** aprendérselos de memoria.

Es necesario, como ya explicamos, **reconocer** los **teoremas** y **dominar** las **propiedades** de las figuras planas.

Ten en cuenta en cada ejercicio algunas de las siguientes ideas:

1. Si hay en los datos **cuadrados**, **rectángulos**, **triángulos**, **rombos**, etc, pensar en las **propiedades** de dichas figuras.

2. Si hay en los datos una **circunferencia,** pensar en las **propiedades** relativas a **ángulos**, **cuerdas**, **arcos**, etc.

3. Si hay en los datos **paralelas**, pensar en los **ángulos** entre **paralelas**, específicamente los **alternos** y los **correspondientes**.

4. Si hay en los datos **segmentos** o **ángulos iguales** y no se corresponden con **lados** o **ángulos** de la igualdad, piensa en la posibilidad de realizar la **suma** o **diferencia** de ellos.

Existen otras muchas ideas, pero es imposible abarcarlas todas, por lo que el mayor consejo para aprender a **demostrar** la **igualdad** de dos triángulos es **resolver** la mayor cantidad de **ejercicios** y apoyarte en los **medios** que tienes a tu disposición como el **libro de texto**, los **resúmenes** y los **ejercicios** aplicados en evaluaciones anteriores.