



Politechnika Wrocławska

Wydział Matematyki

Kierunek studiów: Matematyka stosowana

Specjalność: –

Praca dyplomowa – inżynierska

## MODELOWANIE ZAGADNIEŃ ZWIĄZANYCH Z MAŁŻEŃSTWAMI

Joanna Wojciechowicz

słowa kluczowe:

Model interakcji społecznych, ewolucja relacji w małżeństwie, dynamika nieliniowa, równania różniczkowe, układy równań różniczkowych.

krótkie streszczenie:

W pracy przeanalizowaliśmy ciągle model interakcji w małżeństwie, badając jego rozwiązania oraz stabilność dla wszystkich typów związków. Zaproponowaliśmy nowy podtyp pary i analitycznie wyznaczyliśmy dla niego rozwiązania. Ponadto przedstawiliśmy propozycje ulepszenia modelu, a następnie badaliśmy wpływ jego poszczególnych parametrów na wyniki. Dodatkowo zbadaliśmy rozwiązania z modelu Tunga w zestawieniu z modelem z zaproponowanymi ulepszeniami.

Opiekun pracy dyplomowej	dr hab. inż. Łukasz Płociniczak	.....	.....
	Tytuł/stopień naukowy/imię i nazwisko	ocena	podpis

*Do celów archiwalnych pracę dyplomową zakwalifikowano do:\**

*a) kategorii A (akta wieczyste)*

*b) kategorii BE 50 (po 50 latach podlegające ekspertyzie)*

*\* niepotrzebne skreślić*

pieczęćka wydziałowa

Wrocław, rok 2023





Wrocław University  
of Science and Technology

Faculty of Pure and Applied Mathematics

Field of study: Applied Mathematics

Specialty: –

Engineering Thesis

## MODELLING PHENOMENA ASSOCIATED WITH MARRIAGE

Joanna Wojciechowicz

keywords:

Social interaction model, marital evolution,  
nonlinear dynamics, differential equations,  
systems of differential equations.

short summary:

In this thesis, we analyzed a continuous model of marital interaction by deriving its solutions and analyzing the stability of each type of marriage interaction. We proposed a new pair subtype and found its exact solutions. We presented some improvements to the current model and explored the influence of its parameters. Moreover, we compared the results from Tung's model with those from the improved model.

Supervisor	dr hab. inż. Łukasz Płociniczak	.....	.....
	Title/degree/name and surname	grade	signature

*For the purposes of archival thesis qualified to:\**

*a) category A (perpetual files)*

*b) category BE 50 (subject to expertise after 50 years)*

*\* delete as appropriate*

stamp of the faculty

Wrocław, 2023



# Spis treści

<b>Wstęp</b>	<b>3</b>
<b>1 Wprowadzenie</b>	<b>5</b>
1.1 Geneza powstania modelu . . . . .	5
1.2 Podstawy matematyczne [1] . . . . .	5
1.3 Eksperyment . . . . .	7
1.3.1 Opis eksperymentu . . . . .	7
1.3.2 Pozyskane dane . . . . .	8
1.3.3 Wnioski Gottmana . . . . .	10
<b>2 Model ciągły</b>	<b>11</b>
2.1 Wprowadzenie . . . . .	11
2.2 Samooddziaływanie . . . . .	11
2.3 Interakcje małżeńskie . . . . .	12
2.4 Terminologia . . . . .	12
2.5 Rozwiązanie i analiza stabilności dla przypadku ogólnego . . . . .	13
2.5.1 Pierwsza ćwiartka . . . . .	14
2.5.2 Druga ćwiartka . . . . .	16
2.5.3 Trzecia ćwiartka . . . . .	16
2.5.4 Czwarta ćwiartka . . . . .	16
2.6 Związek Validating . . . . .	16
2.7 Związek Avoiding . . . . .	17
2.7.1 Rozwiązanie dla przypadku szczególnego . . . . .	20
2.8 Związek Volatile . . . . .	23
<b>3 Uogólnienie modelu</b>	<b>27</b>
3.1 Obszary problematyczne . . . . .	27
3.2 Funkcja wpływu . . . . .	27
3.2.1 Analiza stabilności . . . . .	28
3.2.2 Rozwiązanie i porównanie wyników . . . . .	31
3.3 Nowy człon w modelu . . . . .	31
3.3.1 Analiza stabilności . . . . .	33
3.3.2 Rozwiązanie . . . . .	34
<b>Podsumowanie</b>	<b>37</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>38</b>



# Wstęp

Związek małżeński jest jednym z najbardziej ryzykownych kontraktów, na jaki decyduje się znaczna większość społeczeństwa. Rozwód niedobrej pary niesie za sobą znaczne konsekwencje, chociażby finansowe dla obu stron. Psychologia na podstawie eksperymentów, obserwacji i badań wciąż próbuje rozwikłać tajemnicę udanego związku.

Pod koniec XX wieku grupa matematyków zaproponowała nowatorskie, dość kontrowersyjne podejście do tak delikatnego tematu, jak relacje w związku – wykorzystanie modelu równań różnicowych do predykcji dynamiki małżeństwa. W Rozdziale 1 nakreślamy rys historyczny, motywację i przyglądamy się bliżej eksperymentowi, na którym opierało się całe rozumowanie.

W kolejnym rozdziale wprowadzamy model ciągły zaproponowany przez K. K. Tunga, wyprowadzamy rozwiązanie analityczne i badamy stabilność dla każdego typu związku. Proponujemy również nowy podrodzaj interakcji partnerów i analizujemy dla niego nasz model.

Ostatni rozdział poświęcamy własnym propozycjom ulepszenia modelu. Dostosowujemy go do realiów zakresu emocji człowieka, rozszerzamy o dodatkowy człon, badamy wpływ poszczególnych parametrów i porównujemy z wynikami Tunga.





# Rozdział 1

## Wprowadzenie

### 1.1 Geneza powstania modelu

Według Europejskiego Urzędu Statystycznego w 2020 roku w Unii Europejskiej wzięto około 0,7 miliona rozwodów. Jak podaje „Our World in Data”, obserwuje się ogólny wzrost wskaźnika rozwodów na świecie od 1970 roku. Co roku wiele ludzi ponosi ogromne konsekwencje – przykładowo finansowe – w związku z decyzją o rozwiązaniu związku małżeńskiego.

Profesor John M. Gottman z Uniwersytetu Waszyngtońskiego na podstawie swoich wieloletnich badań nad małżeństwem, rozwodem i scenariuszami naprawy związku wraz z J. D. Murrayem i Julianem Cookiem zaproponował nowatorskie podejście do badania interakcji małżeńskich za pomocą modelowania matematycznego. Wykorzystane zostały do tego dane zebrane z przeprowadzonego przez Gottmana i R. W. Levensona eksperymentu (1983–1987). Podejście to opiera się na równaniach różnicowych oraz równaniach różniczkowych obrazujących zmianę w czasie.

Tutaj pojawia się ciekawy problem – w przypadku interakcji małżeńskich nie posiadamy żadnej teorii pozwalającej na zapisanie równań. Jak Cook [3] wspomina „Co różniło się w naszym podejściu od innych to to, że musieliśmy użyć metod modelowania do generowania samych równań. Tym samym celem modelowania matematycznego w naszym przypadku stało się generowanie teorii.”. Tego typu publikacja pozwoliła na nowy – inny niż statystyka – sposób myślenia o interakcjach w małżeństwie i ich zmianach w czasie. Otworzyła również pole do dalszych badań. Po opracowaniu równań dla konkretnej pary ich zachowanie może być symulowane w innych warunkach niż te, w których dane zostały zebrane. Następnie, przeprowadzając eksperyment, można zweryfikować poprawność wyników symulacji. Teoria może zostać zbudowana, a potem zweryfikowana na podstawie danych.

### 1.2 Podstawy matematyczne [1]

W tym rozdziale wprowadzamy podstawowe definicje, fakty i twierdzenia matematyczne, które będą używane w dalszej części pracy.

**Definicja 1.1.** Układ dwóch równań autonomicznych to układ równań różniczkowych zwyczajnych postaci

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ x' = g(x, y), \end{cases} \quad (1.1)$$

w którym prawa strona równań nie zależy jawnie od zmiennej niezależnej.

Jedynie w przypadku równań autonomicznych jesteśmy w stanie szukać punktów krytycznych i badać ich stabilność.

**Definicja 1.2.** Punktem krytycznym (stacjonarnym) układu

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (1.2)$$

jest punkt  $(x_c, y_c)$  taki, że  $f(x_c) = g(y_c) = 0$ . W tych punktach  $x' = y' = 0$ . Dla układów liniowych  $\vec{x}' = A\vec{x}$  mamy zawsze  $\vec{x}_c = 0$ , o ile  $\det A \neq 0$ .

Punkty stacjonarne możemy badać pod względem ich stabilności.

**Fakt 1.3.** Niech  $\vec{x}' = A\vec{x}$  jest układem liniowym o stałych współczynnikach, o jednym punkcie krytycznym  $\vec{x} = 0$ , a  $\lambda_{1,2}$  są wartościami własnymi. Wtedy ten punkt jest

- asymptotycznie stabilny, jeżeli  $\Re(\lambda_{1,2}) < 0$  (węzły i spirale stabilne),
- stabilny, jeżeli  $\Re(\lambda_{1,2}) = 0$  (centrum),
- niestabilny, jeżeli  $\Re(\lambda_1) > 0$  lub  $\Re(\lambda_2) > 0$  (węzły, siodła i spirale niestabilne).

**Definicja 1.4** (Stabilność w sensie Lapunowa). Niech  $\vec{\phi}$  będzie rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (1.3)$$

z punktem krytycznym  $\vec{x}_c$ . Wtedy  $\vec{x}_c$  jest

- stabilny, jeżeli dla  $t > 0$  mamy

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \|\vec{\phi}(0) - \vec{x}_c\| < \delta \implies \|\vec{\phi}(t) - \vec{x}_c\| < \epsilon, \quad (1.4)$$

- asymptotycznie stabilny, jeżeli jest stabilny oraz

$$\exists 0 < \delta_0 < \delta \|\vec{\phi}(0) - \vec{x}_c\| < \delta_0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{\phi}(t) = \vec{x}_c, \quad (1.5)$$

- niestabilny, jeżeli nie jest stabilny.

Tutaj  $\|\cdot\|$  oznacza normę wektora (długość).

Przy układach równań różniczkowych do określenia stabilności ich punktów stacjonarnych używamy pojęcia macierzy Jacobiego.

**Definicja 1.5.** Macierz Jacobiego dla układu

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y) \end{cases} \quad (1.6)$$

to macierz  $A$  zbudowana z pochodnych cząstkowych (pierwszego rzędu) funkcji  $F$  i  $G$ . Jest postaci

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\delta F}{\delta x} & \frac{\delta F}{\delta y} \\ \frac{\delta G}{\delta x} & \frac{\delta G}{\delta y} \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Możemy również badać stabilność układów nieliniowych, o czym mówi twierdzenie Hartmana-Grobmana.

**Twierdzenie 1.6** (Hartman-Grobman). *Niech układ nieliniowy*

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y) \end{cases} \quad (1.8)$$

*ma linearyzację  $\vec{u}' = A\vec{u}$  w okolicy punktu krytycznego  $\vec{x}_c$ . Załóżmy, że wszystkie wartości własne  $A$  mają niezerową część rzeczywistą. Wtedy istnieje otoczenie  $\vec{x}_c$ , w którym rozwiązania układu nieliniowego są topologicznie równoważne rozwiązaniom układu liniowego.*

Dzięki portretom fazowym jesteśmy w stanie dużo dowiedzieć się o układzie bez rozwiązywania go.

**Definicja 1.7.** Płaszczyzna fazowa (portret fazowy) to zbiór wszystkich trajektorii rozwiązań układu

$$\begin{cases} x'_1 = F(x_1, x_2) \\ x'_2 = G(x_1, x_2), \end{cases} \quad (1.9)$$

czyli zbiór  $\{(x_1(t), x_2(t)), t \in \mathbb{R}\}$ .

Wyliczając  $\frac{G(x_1, x_2)}{F(x_1, x_2)}$  w różnych punktach  $(x_1, x_2)$  możemy wypełnić przestrzeń strzałkami, które są st stycznymi do trajektorii. Możemy to zrobić bez rozwiązywania układu. Jest to pole kierunków. Łącząc wszystkie wektory styczne krzywymi, możemy naszkicować przestrzeń fazową.

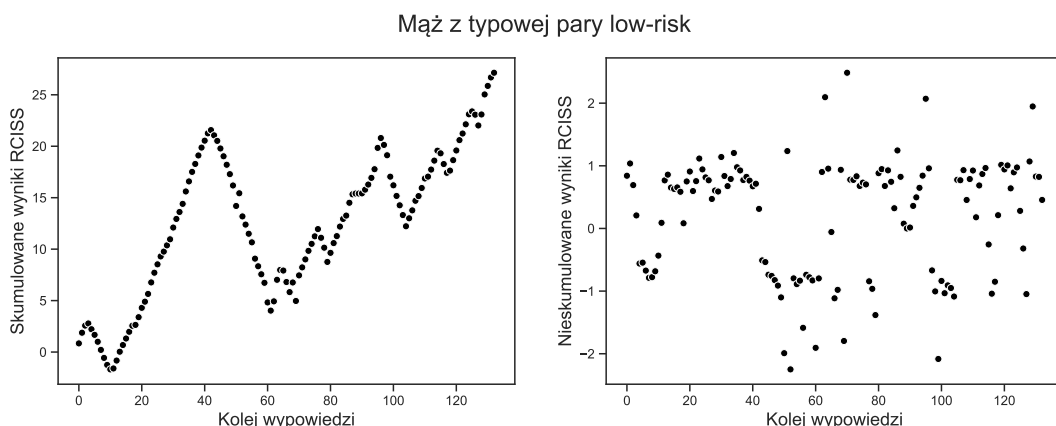
## 1.3 Eksperyment

### 1.3.1 Opis eksperymentu

Gottman i Levenson [3], [4], [5] pomiędzy rokiem 1983, a 1987, przeprowadzili eksperyment, w którym wzięły udział 73 pary heteroseksualne. Wykorzystali do niego obserwacyjny system kodowania zachowań interaktywnych tzw. *RCISS - Rapid Couples Interaction Scoring System* oraz system kodowania mimiki twarzy tzw. *Facial Action Coding System*. Każda para podczas swojej sesji była proszona o wybranie obszaru problematycznego w ich związku do 15-minutowej dyskusji. Wszystkie rozmowy były nagrywane, a następnie oglądane przez Gottmana i Levensona ponownie i tłumaczone na system kodowania RCISS. Celem eksperymentu było zmierzenie ilości pozytywnych i negatywnych reakcji współmałżonka, gdy przychodzi jego kolej na wypowiedź. Podział na pozytywne i negatywne był prowadzony na podstawie wcześniejszych badań, w których starano się rozróżnić pary szczęśliwe od nieszczęśliwych, na podstawie oceny zachowań, które przejawiały podczas konfliktowej interakcji małżeńskiej.

Na podstawie wyników RCISS każda para była klasyfikowana jako *regulated*<sup>1</sup> (inaczej *low-risk*<sup>1</sup>) bądź *nonregulated*<sup>1</sup> (*high-risk*<sup>1</sup>). Klasyfikacja ta była oparta na graficznej metodzie zaproponowanej przez Gottmana (1979). W czasie każdej wypowiedzi badanego w ciągu rozmowy liczba pozytywnych RCISS kodów (gdy mówił coś pozytywnego) minus

<sup>1</sup>Ze względu na nazewnictwo ściśle związane z psychologią w pracy będę używać nazw w języku angielskim.



Rysunek 1.1: Skumulowane i nieskumulowane wyniki RCISS dla męża z przykładowej pary low-risk. Źródło danych: [5].

liczba negatywnych kodów RCISS (gdy mówił coś negatywnego) była liczona i zapisywana. Następnie skumulowane wartości tych wyników przedstawiono na wykresach dla każdej pary z osobna. Przykładowe wyniki RCISS możemy zobaczyć na wykresach 1.1, 1.2 dla typowej pary low-risk oraz 1.3, 1.4 dla high-risk. Przyporządkowanie do grupy regulated lub nonregulated przebiegało na podstawie nachylenia wykresów, które były uznawane za odpowiednie oszacowanie różnicy pomiędzy kodami dodatnimi i ujemnymi w czasie. Krzywe te zostały stworzone za pomocą regresji liniowej. Jeżeli zarówno mąż, jak i żona mieli dodatnio nachylone krzywe, para była klasyfikowana jako regulated, a jeśli choć jedno z nich miało ujemnie nachyloną krzywą – nonregulated. Klasyfikacja ta nosi nazwę *Gottman - Levenson variable*. Zatem regulated związki to te, które w ogólności wykazują więcej pozytywnych niż negatywnych RCISS kodów, a nonregulated przeciwnie.

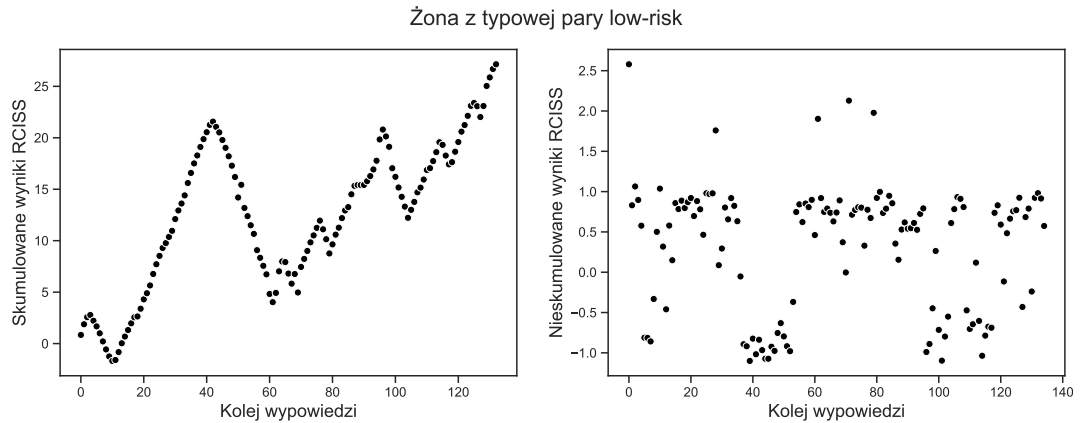
W eksperymencie 42 pary zostały uznane za regulated, a pozostałe 31 za nonregulated. W 1987 roku, po 4 latach od rozpoczęcia eksperymentu, wszystkie pary zostały zaproszone do kolejnej części. Dane dotyczące obecnego stanu ich związku zostały zebrane, a następnie przeanalizowane. Cook w [3] podsumował najciekawsze wyniki, jakie otrzymał Gottman.

- 32% z low-risk związków w porównaniu z 70% z high-risk związków brało pod uwagę rozwód,
- 17% low-risk związków w porównaniu z 37% z high-risk związków weszło w separację,
- 7% low-risk związków w porównaniu z 19% high-risk związków wzięło rozwód.

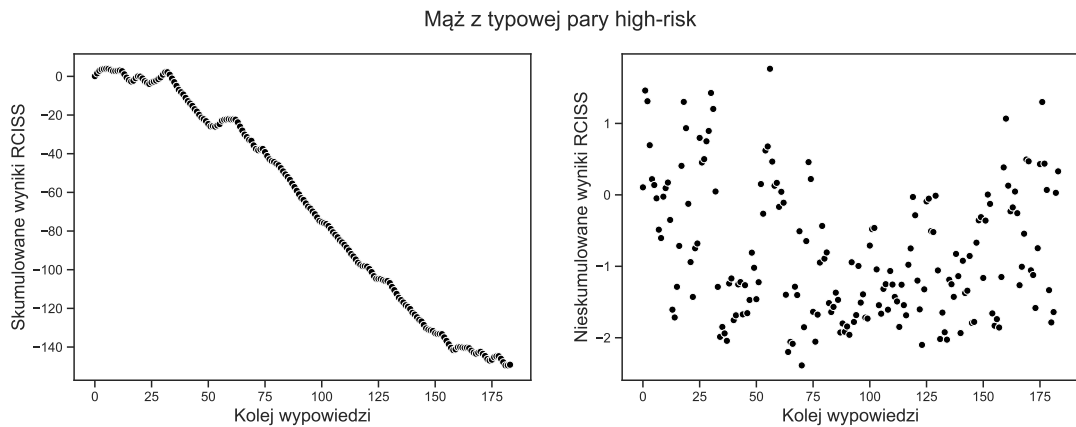
Jest widoczna wyraźna tendencja w zwracaniu się ku rozwodowi dla związków nonregulated. Oczywiście, w eksperymencie Gottmana mamy do czynienia z małą próbką i krótkim okresem czasu (4 lata) na badanie tak rozległego tematu, jakim jest pogarszanie się interakcji międzyludzkich. Ponowne badania można byłoby przeprowadzić na większej ilości par, nie tylko heteroseksualnych i obserwować funkcjonowanie związku przez cały okres jego trwania.

### 1.3.2 Pozyskane dane

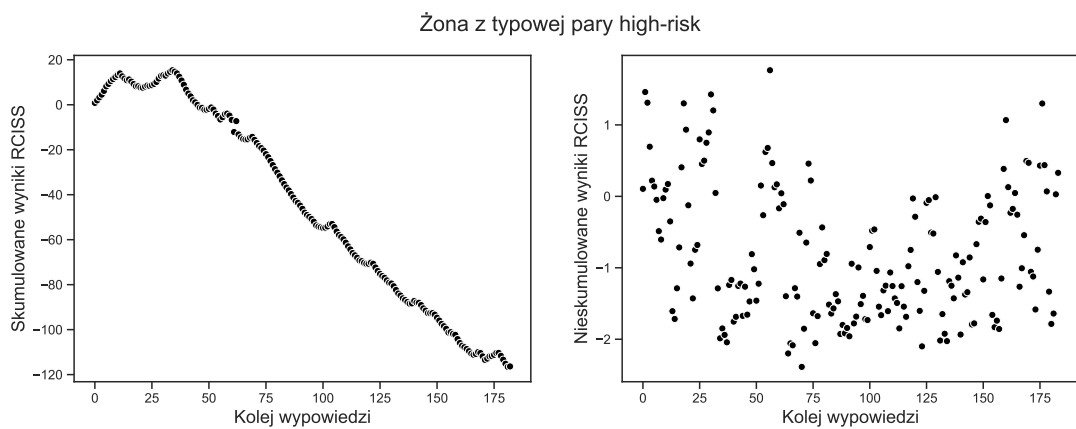
Dane pozyskane przez Gottmana i Levensona z eksperymentu niestety nie są dziś dostępne. Jedyne wgląd w dane, jaki mamy dziś to wykresy 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, które powstały na podstawie danych sczytanych z wykresów z pracy [5]. Zwróciłam się do Instytutu



Rysunek 1.2: Skumulowane i nieskumulowane wyniki RCISS dla żony z przykładowej pary low-risk. Źródło danych: [5].



Rysunek 1.3: Skumulowane i nieskumulowane wyniki RCISS dla męża z przykładowej pary high-risk. Źródło danych: [5].



Rysunek 1.4: Skumulowane i nieskumulowane wyniki RCISS dla żony z przykładowej pary high-risk. Źródło danych: [5].

Gottmana z prośbą o ich udostępnienie, ale otrzymałam odpowiedź: „Methods for sharing and saving data in the 80’s weren’t like they are now, and we as well wish we could have that access!”.

### 1.3.3 Wnioski Gottmana

W 1994 roku Gottman zaproponował trzy typy długotrwale stabilnych związków małżeńskich oraz dwa typy dążące do rozpadu. Pierwsze z nich to tzw. *Validators*<sup>2</sup>, *Volatiles*<sup>2</sup> i *Avoiders*<sup>2</sup>, a pozostałe *Hostile*<sup>2</sup> i *Hostile-detached*<sup>2</sup>. Zostały one rozróżnione na podstawie zachowań przy rozwiązywaniu problemów oraz jednej zmiennej zaprojektowanej w celu zapewnienia wskaźnika ilości i czasu prób perswazji. Jeśli chodzi o związki uznane za nonregulated – Hostile i Hostile-detached to różnią się one od siebie pozytywnymi i negatywnymi zachowaniami. Pary Hostile-detached są dużo bardziej negatywnie nastawione do siebie nawzajem i obojętne podczas wypowiedzi partnera. Gottman w 1993 przedstawił stałą, która w przybliżeniu jest niezmienna w każdym z trzech typów regulated par. Był to stosunek pozytywnych do negatywnych kodów RCISS badanego i dla tej grupy wynosił około 5.

---

<sup>2</sup>Ze względu na specyfikę w nazewnictwie ściśle powiązanym z psychologią w pracy używać będę nazw typów związków w języku angielskim.

# Rozdział 2

## Model ciągły

### 2.1 Wprowadzenie

Model ciągły został zaproponowany przez Tunga w [5] i Rozdział 1 w większości bazuje na tej publikacji. Celem modelu jest wykorzystanie wydobytych z eksperymentu danych (kody RCISS) do predykcji zachowania małżeństwa. Zakładamy, że na rozpad bądź przetrwanie związku małżeńskiego mają wpływ dwa czynniki – naturalne usposobienie współmałżonków (ich oddziaływanie na siebie samych) oraz sposób interakcji i komunikowania się każdego z nich w związku małżeńskim. Niech  $x(t)$  będzie miarą poczucia szczęścia męża, a  $y(t)$  miarą poczucia szczęścia żony. Będziemy odnosić się tutaj do średniej kroczącej, a nie wyników skumulowanych z danych.

### 2.2 Samooddziaływanie

Każdy z małżonków nie będąc jeszcze w związku, dążył do tzw. zrównoważonego stanu emocjonalnego. Niech  $x_0, y_0$  oznaczają ten stan odpowiednio dla męża i żony. Możemy go interpretować jako wrodzone predyspozycje czy temperament człowieka. Proces ten opisują poniższe równania autonomiczne (1.1) – (2.1), (2.2).

$$\frac{dx}{dt} = r_1 (x_0 - x), \quad (2.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = r_2 (y_0 - y), \quad (2.2)$$

gdzie  $r_1, r_2 \in (0, 1)$  – pewne stałe, takie, że  $1 - r_{1,2}$  interpretujemy jako poziom stabilności w uczuciach. Ich punktami krytycznymi (1.2) są odpowiednio

$$x^* = x_0, \quad x^* = y_0. \quad (2.3)$$

Punkty te są stabilne, ponieważ  $r_1, r_2 > 0$ . Po rozwiązaniu równań (2.1), (2.2) otrzymujemy

$$x(t) = -D_1 e^{-r_1 t} + x_0, \quad (2.4)$$

$$y(t) = -D_2 e^{-r_2 t} + y_0, \quad (2.5)$$

gdzie  $D_1, D_2$  – pewne stałe. Możemy zauważyć, że zaburzenie ze stanu stabilności emocjonalnej zanika wraz z czasem.

Parametry dla zrównoważonego stanu emocjonalnego –  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  – są wyznaczone na podstawie podzbioru danych z eksperymentu, w którym wynik RCISS drugiego z małżonków wynosił 0, więc teoretycznie nie wywierał on wtedy wpływu na drugą osobę. Według Cooka [3] taka sytuacja miała miejsce w około 15% danych. Najprawdopodobniej informacje te moglibyśmy pozyskać również, przeprowadzając eksperyment indywidualnie z każdym badanym. Wtedy wyeliminowalibyśmy wpływ partnera/partnerki na jej/jego reakcję.

## 2.3 Interakcje małżeńskie

Cook (1995) określił trzy główne typy interakcji małżeńskich, jakie mogą przyjąć mąż –  $x$  oraz żona –  $y$  i dopasował je do typów związków, które zaproponował Gottman. Niech  $I_2(x)$  – wpływ wywarty na żonę przez emocje męża, a  $I_1(y)$  – wpływ żony na męża. Wszystkie style komunikacji w związku małżeńskim opisuje poniższy model ogólny

$$\frac{dx}{dt} = r_1(x_0 - x) + I_1(y) \quad (2.6)$$

$$\frac{dy}{dt} = r_2(y_0 - y) + I_2(x), \quad (2.7)$$

gdzie

$$I_i(z) = \begin{cases} a_i z & \text{dla } z > 0 \\ b_i z & \text{dla } z < 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

$a_i$ ,  $b_i$  – pewne stałe, których wartości zależą od typu małżeństwa.

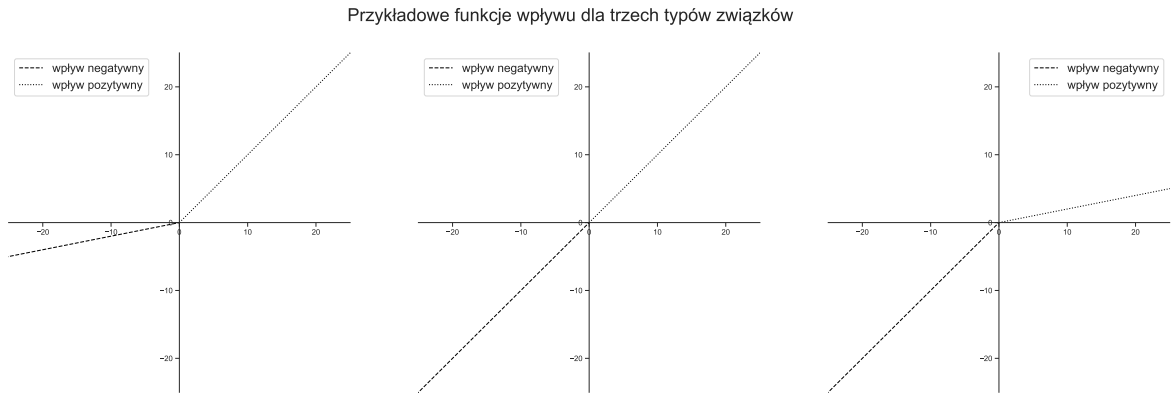
- W Validating modelu interakcji małżeńskiej jeden małżonek wpływa na drugiego zarówno pozytywnie jak i negatywnie – tutaj  $a \approx b$ . Zatem możemy podejrzewać, że krzywe w funkcji wpływu będą w przybliżeniu takie same – jak na środkowym wykresie na rysunku 2.1.
- W modelu Conflict Avoiding małżonek, który przyjmuje taką postawę, unika konfrontacji swoich negatywnych emocji z współmałżonkiem. Zatem tutaj  $\frac{b}{a} \ll 1$ . Sytuację tę obrazuje pierwszy wykres od lewej na rysunku 2.1.
- Partner, który przyjmuje model interakcji Volatile komunikuje współmałżonkowi głównie swoje negatywne emocje. Stąd tutaj  $\frac{a}{b} \ll 1$ . Tę sytuację obrazuje trzeci wykres od lewej na rysunku 2.1.

## 2.4 Terminologia

W modelu, jak w eksperymencie Gottmana, używane są terminy regulated (low-risk) oraz nonregulated (high-risk). Tutaj nie odnoszą się one do nachylenia krzywej wyników RCISS, ale poczucia szczęścia badanego w związku i poza nim. Jeśli założymy, że warunkiem na sukces w małżeństwie jest bycie przynajmniej tak szczęśliwym, jak byłoby się bez niego, to warunek ten możemy zapisać jako

$$x^* \geq x_0, \quad y^* \geq y_0. \quad (2.9)$$





Rysunek 2.1: Teoretyczne zobrazowanie funkcji wpływu dla 3 typów związków małżeńskich.

## 2.5 Rozwiązanie i analiza stabilności dla przypadku ogólnego

Równania (2.6) i (2.7) tworzą liniowy układ równań. Można podać jego analityczne rozwiązanie. Bez utraty ogólności przyjmujemy, że  $a_i = b_i$ . Wtedy

$$\frac{dx}{dt} = r_1 (x_0 - x) + a_1 y, \quad (2.10)$$

$$\frac{dy}{dt} = r_2 (y_0 - y) + a_2 x. \quad (2.11)$$

Rozwiązania są postaci

$$x(t) = x^* + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (2.12)$$

$$y(t) = y^* + C_1 \left( \frac{r_1}{a_1} + \frac{\lambda_1}{a_1} \right) e^{\lambda_1 t} + C_2 \left( \frac{r_1}{a_1} + \frac{\lambda_2}{a_1} \right) e^{\lambda_2 t}, \quad (2.13)$$

gdzie  $\lambda_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q}$ ,  $p \equiv -(r_1 + r_2)$ ,  $q \equiv r_1 r_2 - a_1 a_2$ .

Szukając punktu stacjonarnego musimy rozwiązać równania

$$r_1 (x_0 - x^*) + a_1 y^* = 0, \quad (2.14)$$

$$r_2 (y_0 - y^*) + a_2 x^* = 0. \quad (2.15)$$

Ostatecznie

$$x^* = \frac{x_0 + \frac{a_1}{r_1} y_0}{1 - \frac{a_1 a_2}{r_1 r_2}}, \quad (2.16)$$

$$y^* = \frac{y_0 + \frac{a_2}{r_2} x_0}{1 - \frac{a_1 a_2}{r_1 r_2}}. \quad (2.17)$$

Macierz Jacobiego (1.5) układu równań (2.10), (2.11) jest postaci

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} -r_1 & a_1 \\ a_2 & -r_2 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

a jej wartości własne to

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(r_1 + r_2) \pm \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4(r_1 r_2 - a_1 a_2)}}{2}. \quad (2.19)$$

Jest tylko jedno rozwiązanie  $(x^*, y^*)$  i aby było ono stabilne, musi być spełniony warunek  $\lambda_{1,2} < 0$ . Ze względu na postać  $\lambda_{1,2}$  – (2.19), oznacza to, że

$$0 < \frac{a_1 a_2}{r_1 r_2} < 1. \quad (2.20)$$

Jeżeli rozszerzymy warunek (2.20) na warunki

$$\frac{a_1}{r_1} < 1, \quad \frac{a_2}{r_2} < 1, \quad (2.21)$$

to możemy zinterpretować tę sytuację. Oznacza ona, że badany reaguje szybciej na własne emocje niż na emocje współmałżonka. Przykładowa płaszczyzna fazowa<sup>1</sup> (1.7) w tym przypadku pokazana jest na Rys. 2.2. Widzimy, że tworzy ona węzeł stabilny, gdzie wszystkie rozwiązania zbiegają do jednego punktu – punktu stacjonarnego układu.

W przeciwnym wypadku, w którym

$$\frac{r_1}{a_1} < 1, \quad \frac{r_2}{a_2} < 1, \quad (2.22)$$

mamy do czynienia z przypadkiem niestabilnym. Współmałżonkowie reagują szybciej na emocje drugiej osoby niż na swoje własne. Prowadzi to do zapętlenia, bez żadnego mechanizmu łagodzenia. Smutek żony prowadzi do smutku męża, który z kolei prowadzi do jeszcze większego smutku żony itd. Nie rozważamy tego przypadku, ponieważ zakładamy, że tego typu para nie dotrwa nawet do momentu zaręczyn. Przykładowa płaszczyzna fazowa dla tego przypadku widoczna jest na Rys. 2.3. Tworzy ona siodło, które obrazuje niestabilny punkt stacjonarny układu.

Punkt stabilny  $(x^*, y^*)$  może się znaleźć w każdej ćwiartce układu współrzędnych w zależności od jego parametrów. Rozważymy teraz każdą z nich.

### 2.5.1 Pierwsza ćwiartka

Tutaj, aby  $x^*, y^* > 0$  musi być spełnione

$$x_0 + \frac{a_1}{r_1} y_0 > 0, \quad y_0 + \frac{a_2}{r_2} x_0 > 0. \quad (2.23)$$

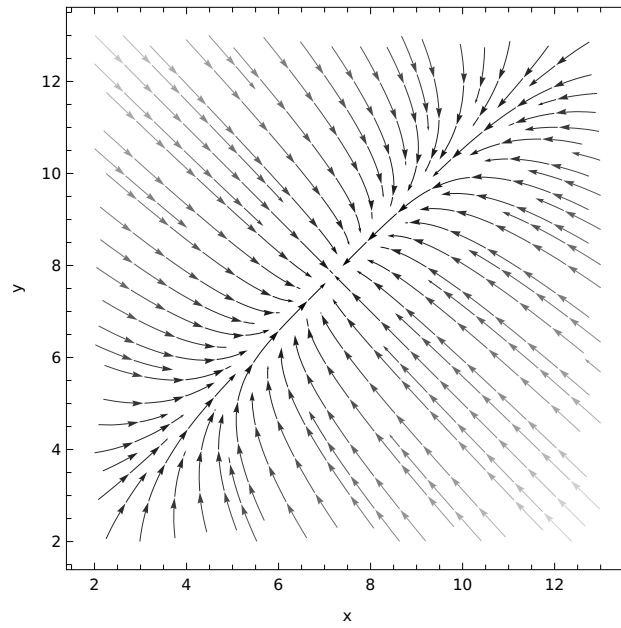
Wtedy mamy

$$x^* \gg x_0 > 0, \quad y^* \gg y_0 > 0. \quad (2.24)$$

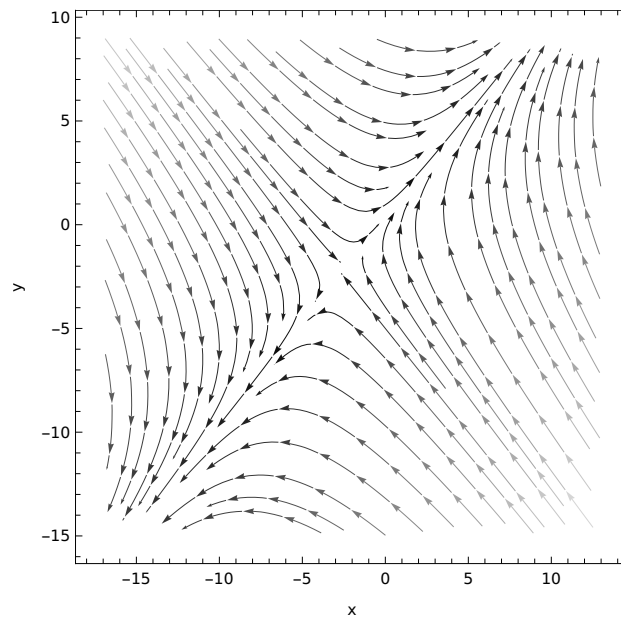
Stąd mamy do czynienia ze związkiem regulated. Ponadto niezależnie od stylu interakcji, jaki przyjmuje każdy z partnerów, jeśli oboje są z natury pozytywni tj.  $x_0, y_0 > 0$ , małżeństwo klasyfikowane jest jako low-risk.

---

<sup>1</sup>Wszystkie portrety fazowe w pracy są tworzone w programie [2].



Rysunek 2.2: Płaszczyzna fazowa dla parametrów  $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ ,  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 3$ .



Rysunek 2.3: Płaszczyzna fazowa dla parametrów  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 3$ .

### 2.5.2 Druga ćwiartka

Tutaj, aby  $x^* < 0$ ,  $y^* > 0$  mamy

$$x_0 + \frac{a_1}{r_1}y_0 < 0, \quad y_0 + \frac{a_2}{r_2}x_0 > 0. \quad (2.25)$$

Pomimo że punkt stacjonarny dla męża jest ujemny, nadal możemy zakwalifikować to małżeństwo jako low-risk, jeśli

$$x^* > x_0, \quad y^* \approx y_0 > 0. \quad (2.26)$$

Z postaci punktów krytycznych (2.16), (2.17) możemy zauważyć, że dla negatywnego męża ( $x_0 < 0$ ) i pozytywnej żony ( $y_0 > 0$ ) zawsze otrzymamy  $x^* > x_0$  niezależnie od sposobu interakcji przyjętego przez żonę. Jednak, aby z drugiej strony żona nie była za bardzo bodźcowana negatywnymi emocjami ze strony męża, powinien on przyjąć system Avoiding. Z drugiej strony, jeśli to żona jest z natury negatywna ( $y_0 < 0$ ), a mąż pozytywny ( $x_0 > 0$ ) małżeństwo nadal ma szansę, jeśli czynnik  $\frac{a_2}{r_2}$  będzie bardzo duży, a  $\frac{a_1}{r_1}$  mały. Wtedy będziemy mieli sytuację

$$x^* \approx x_0, \quad y^* > y_0. \quad (2.27)$$

### 2.5.3 Trzecia ćwiartka

Tutaj, aby  $x^*, y^* < 0$

$$x_0 + \frac{a_1}{r_1}y_0 < 0, \quad y_0 + \frac{a_2}{r_2}x_0 < 0. \quad (2.28)$$

Patrząc na postaci tych równań, widzimy, że niezależnie od przyjętego sposobu interakcji małżeństwo będzie skazane na porażkę, ponieważ zawsze  $x^* < x_0$  oraz  $y^* < y_0$ . Właśnie taka sytuacja definiuje małżeństwa Hostile i Hostile-detached.

### 2.5.4 Czwarta ćwiartka

W tym przypadku mamy sytuację  $x^* > 0$ ,  $y^* < 0$ , więc

$$x_0 + \frac{a_1}{r_1}y_0 > 0, \quad y_0 + \frac{a_2}{r_2}x_0 < 0. \quad (2.29)$$

Jest ona analogiczna jak w drugiej ćwiartce układu – (2.5.2). Tutaj role męża i żony są zamienione.

## 2.6 Związek Validating

Ten związek może być określany mianem low-risk, a więc regulated. Zarówno mąż, jak i żona stosują ten sam system interakcji, w którym oddziałują na siebie nawzajem zarówno negatywnie, jak i pozytywnie w tym samym stopniu. Zatem  $a_i \approx b_i$ . Dla uproszczenia przyjmijmy w obliczeniach  $a_i = b_i$ . Zatem równania (2.6) i (2.7) przyjmują postać.

$$\frac{dx}{dt} = r_1(x_0 - x) + a_1y, \quad (2.30)$$

$$\frac{dy}{dt} = r_2(y_0 - y) + a_2x. \quad (2.31)$$

Mąż wpływa swoimi pozytywnymi bądź negatywnymi komunikatami na żonę z tempem zmian  $a_2$ , natomiast wpływ żony na męża jest opisany stałą  $a_1$ .

Długotrwałe skutki tego związku zależą od tego, czy badany jest z natury osobą pozytywną, czy negatywną. Jeśli zarówno żona, jak i mąż mają pozytywne podejście tj.  $x_0, y_0 > 0$ , ich poczucie szczęścia jest zwiększane przez pozytywność ich partnerki/partnera. Na przykładzie męża jego poczucie szczęścia bez partnerki dążyło do  $x_0$ . Natomiast po zawarciu związku małżeńskiego z kobietą z naturalnie pozytywnym nastawieniem jest ono powiększone o jej pozytywność odpowiednio przeskalowaną  $-\frac{a_1}{r_1}y_0$  oraz przemnożone przez czynnik  $(1 - \frac{a_1 a_2}{r_1 r_2})^{-1} > 1$ . Zatem w tego typu związku mamy spełniony warunek (2.9), gdyż

$$x^* = \frac{x_0 + \frac{a_1}{r_1}y_0}{1 - \frac{a_1 a_2}{r_1 r_2}} \gg x_0, \quad (2.32)$$

$$y^* = \frac{y_0 + \frac{a_2}{r_2}x_0}{1 - \frac{a_1 a_2}{r_1 r_2}} \gg y_0. \quad (2.33)$$

Jest to widoczne podczas analizy przykładowych trajektorii rozwiązań na wykresie 2.4<sup>2</sup>, gdzie zarówno trajektoria  $x(t)$ , jak i  $y(t)$  jest powyżej odpowiednio  $x_0, y_0$ . Każdy z małżonków jest szczęśliwszy, będąc w tego typu związku, niż był bez niego.

Natomiast, jeśli mąż i żona są z natury negatywnymi ludźmi tj.  $x_0, y_0 < 0$  małżeństwo pogłębia ich poczucie smutku – trajektorie rozwiązań dla przykładowych parametrów tego przypadku na Rys. 2.5 są poniżej poziomu odpowiednio  $x_0, y_0$ . Ten typ związku jest uznawany za nonregulated.

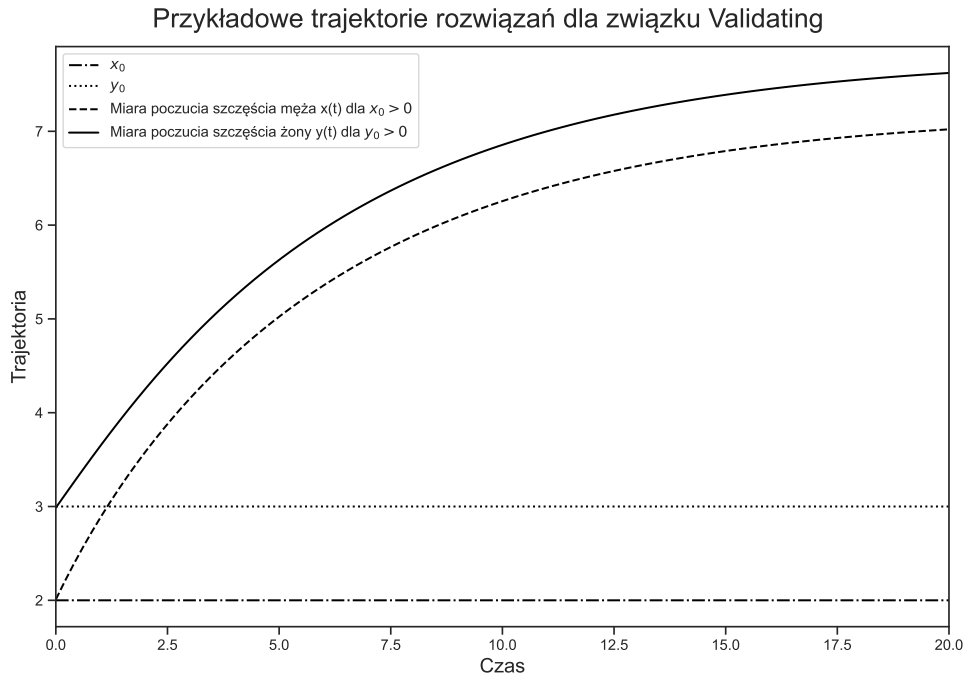
W przypadku, gdy  $x_0$  i  $y_0$  są przeciwnych znaków, małżeństwo nadal może przetrwać pod pewnymi warunkami. Przykładowo, jeśli mąż ma podejście negatywne tj.  $x_0 < 0$ , ale żona jest z natury bardzo pozytywną osobą tj.  $y_0 \gg 0$  to przez ich interakcje między sobą punkt stacjonarny męża może być dodatni, jeśli  $x_0 + \frac{a_1}{r_1}y_0 > 0$ . Natomiast punkt stacjonarny żony tj.  $y^*$  również może być dodatni, jeśli  $y_0 + \frac{a_2}{r_2}x_0 > 0$ . Ten przypadek możemy obserwować na górnym wykresie na Rys. 2.6. W tym przypadku małżeństwo będzie low-risk. Jeśli w tej sytuacji żona nie jest z natury wystarczająco pozytywną osobą ( $y_0$  nie jest wystarczająco duże), to małżeństwo nie będzie typu regulated. Sytuację tę obrazuje dolny wykres na Rys. 2.6, gdzie trajektoria rozwiązań dla żony jest poniżej jej poziomu  $y_0$ , co przyporządkowuje ten typ związku do grupy high-risk.

## 2.7 Związek Avoiding

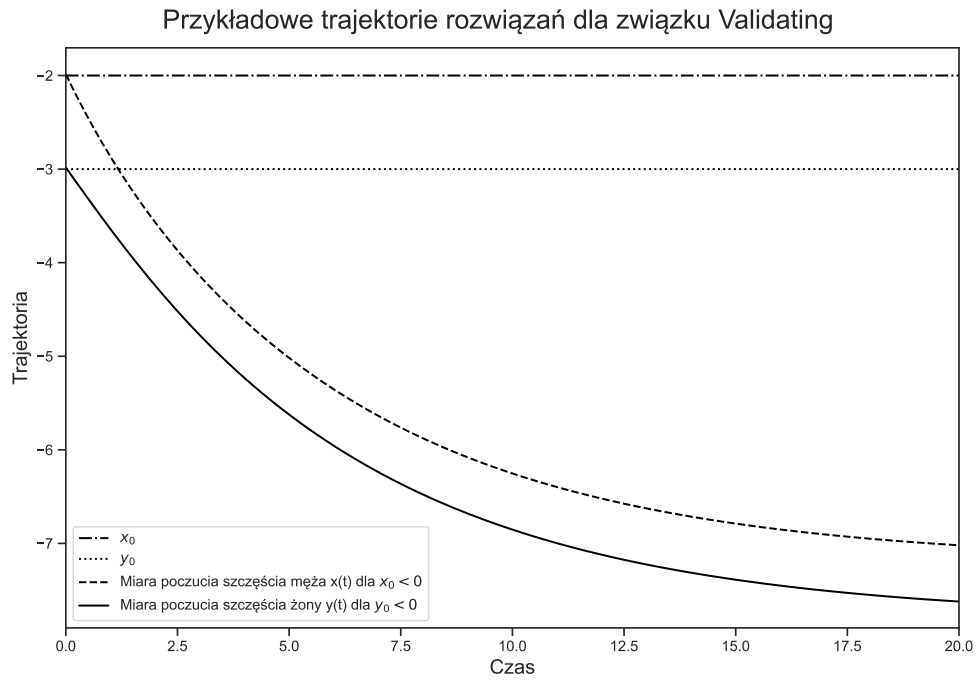
Powszechnie wiadomo, że system zagłuszania swoich negatywnych emocji i niekomunikowania ich partnerowi nie skutkuje dobrym i zgodnym związkiem. Natomiast według modelu, jeśli współmałżonkowie nie mają swojej wyjściowej postawy aż tak pozytywnej, jak osoby w związku Validating, przyjęcie strategii polegającej na unikaniu konfrontacji współmałżonka ze swoimi negatywnymi emocjami może być pomocne w utrzymaniu związku. Zakładając  $a_i = b_i$  oraz dość skrajną sytuację, gdy partnerzy zupełnie nie okazują swoich negatywnych emocji, układ wygląda następująco.

$$\frac{dx}{dt} = r_1(x_0 - x) + a_1 I(y), \quad (2.34)$$

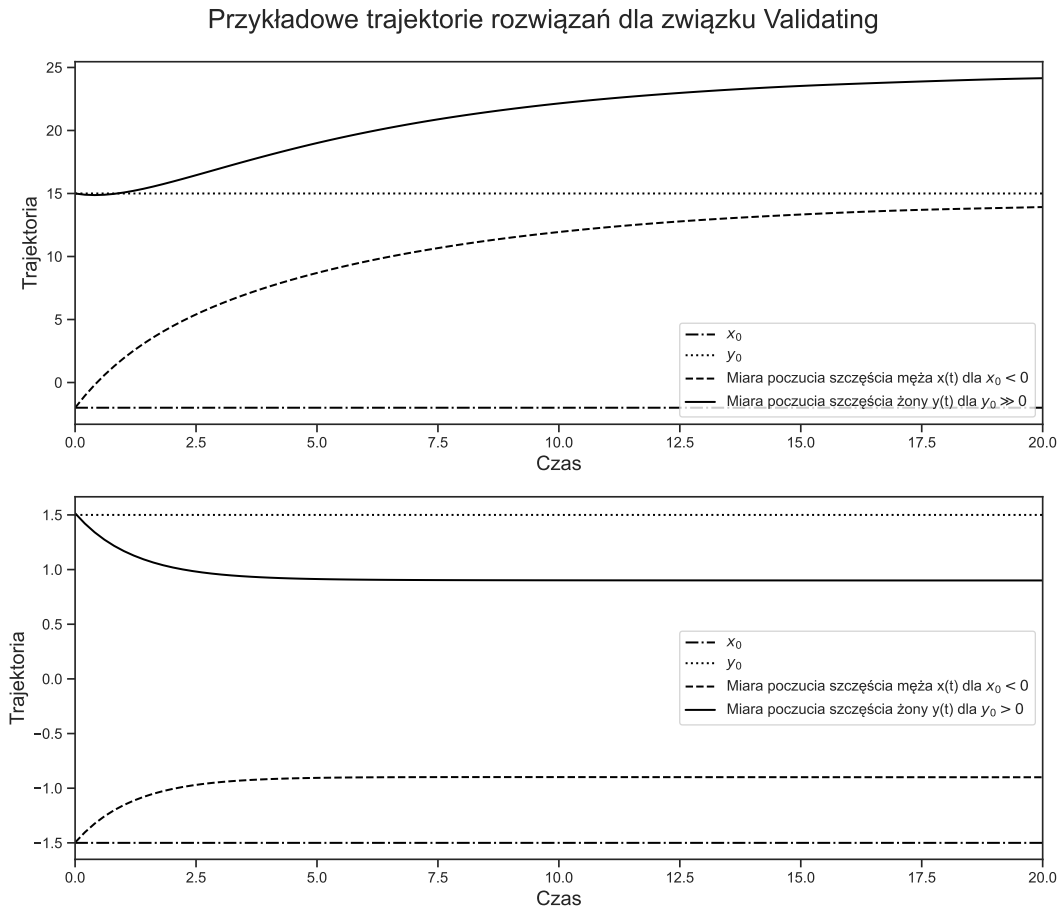
<sup>2</sup>Wszystkie wykresy trajektorii rozwiązań w pracy są tworzone z użyciem metody Monte Carlo dla  $N = 10000$ . Warunki początkowe są generowane losowo z rozkładu jednostajnego na przedziale odpowiednio  $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$  oraz  $(y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ .



Rysunek 2.4: Trajektorie rozwiązań związku Validating dla parametrów  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ ,  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 3$ .



Rysunek 2.5: Trajektorie rozwiązań związku Validating dla parametrów  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ ,  $x_0 = -2$ ,  $y_0 = -3$ .



Rysunek 2.6: Trajektorie rozwiązań związku Validating dla parametrów  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ ,  $x_0 = -2$ ,  $y_0 = 15$  oraz  $x_0 = -1.5$ ,  $y_0 = 1.5$ .

$$\frac{dy}{dt} = r_2 (y_0 - y) + a_2 I(x), \quad (2.35)$$

gdzie

$$I(y) = \begin{cases} y, & \text{jeśli } y > 0 \\ 0, & \text{jeśli } y < 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Tak samo dla  $I(x)$ .

Szukamy punktów stacjonarnych, przyrównując prawe strony powyższych równań (2.34), (2.35) do 0:

$$r_1 (x_0 - x^*) + a_1 I(y^*) = 0, \quad (2.37)$$

$$r_2 (y_0 - y^*) + a_2 I(x^*) = 0. \quad (2.38)$$

Teraz, jeśli  $x^*, y^* > 0$  to mamy  $I(x^*) = x^*, I(y^*) = y^*$  i punkty stacjonarne są postaci (2.16), (2.17). Natomiast, jeśli  $x^*, y^* < 0$  to mamy  $I(x^*) = 0, I(y^*) = 0$  i punkty stacjonarne są postaci (2.3).

Jeżeli żona i mąż mają podejście pozytywne tj.  $x_0, y_0 > 0$  to stają się jeszcze szczęśliwsi w małżeństwie, ponieważ  $x^* > x_0 > 0, y^* > y_0 > 0$ . Trajektorie rozwiązań na przykładowym Rys. 2.7 są ponad poziomem odpowiednio  $x_0$  i  $y_0$ , więc para jest klasyfikowana jako regulated.

Natomiast jeśli każdy z małżonków jest z natury negatywną osobą, tj.  $x_0, y_0 < 0$ , to nie są oni mniej nieszczęśliwi w związku małżeńskim niż byli bez niego, ponieważ  $x^* = x_0, y^* = y_0$ . Przykładowe trajektorie obrazujące tę sytuację możemy zobaczyć na Rys. 2.8. Tego typu strategia jest bezpieczniejsza dla związków, które z natury nie są tak pozytywne jak związki Validating. Para przyjmując ten sposób interakcji w przypadku, gdy  $x_0, y_0 < 0$  nadal pozostaje typem regulated.

Małżeństwo unikające konfliktu może być udane, nawet jeśli jeden małżonek jest negatywny, pod warunkiem, że drugi małżonek jest bardziej pozytywny, niż małżonek negatywny jest negatywny. Przez unikanie interakcji, gdy jedna osoba jest negatywna, para jest bodźcowana pozytywnością partnera z pozytywnym nastawieniem, a negatywność drugiego nie wpływa na związek. Tutaj punkt stacjonarny jest taki sam jak w przypadku związku Validating z odmiennymi nastawieniami współmałżonków, jeśli  $x_0 + \frac{a_1}{r_1} y_0 > 0, y_0 + \frac{a_2}{r_2} x_0 > 0$ . Porównując Rys. 2.9 z wykresami dla pary Validating – Rys. 2.6 (zostały użyte te same parametry) widzimy kolejną przewagę strategii Avoiding. Na dolnym wykresie także mamy parę regulated, czego nie zaobserwowaliśmy przy parze typu Validating.

### 2.7.1 Rozwiązanie dla przypadku szczególnego

Możemy rozszerzyć strategię zaproponowane przez Tunga w [5] poprzez rozważenie związku, w którym tylko jedna osoba (przykładowo żona) przyjmuje strategię Avoiding. Druga natomiast pozostaje odporna na emocje partnera. W takiej sytuacji nasz układ przyjmuje postać

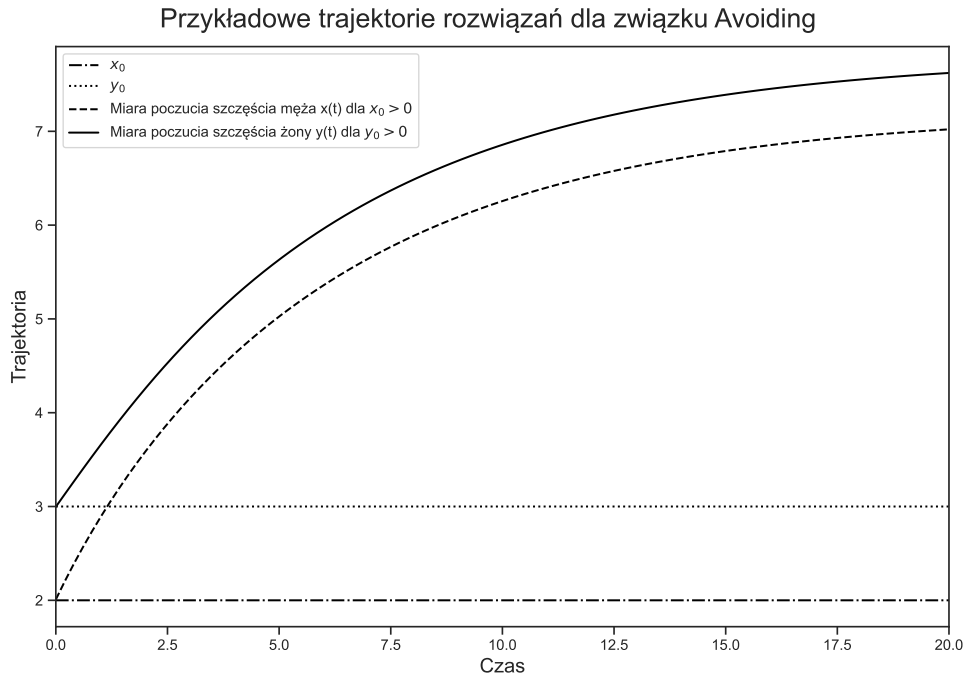
$$\frac{dx}{dt} = r_1 (x_0 - x), \quad (2.39)$$

$$\frac{dy}{dt} = r_2 (y_0 - y) + a_2 I(x), \quad (2.40)$$

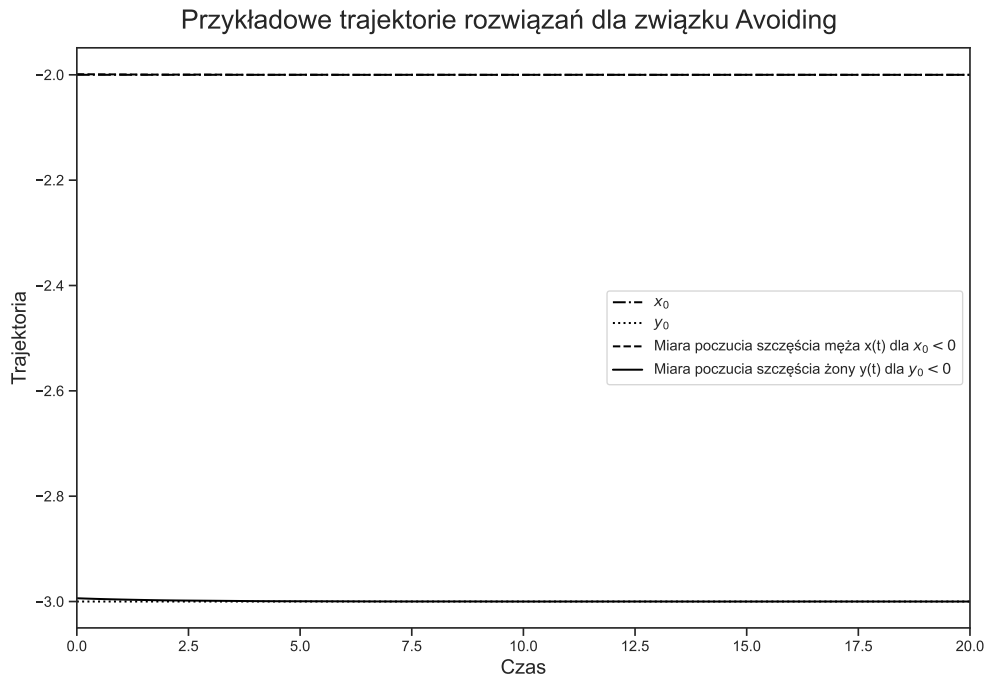
gdzie  $I(x)$  jest postaci (2.36). Rozwiązanie równania (2.39) dla  $x(0) = X$  wygląda następująco

$$x(t) = (X - x_0) e^{-r_1 t} + x_0. \quad (2.41)$$

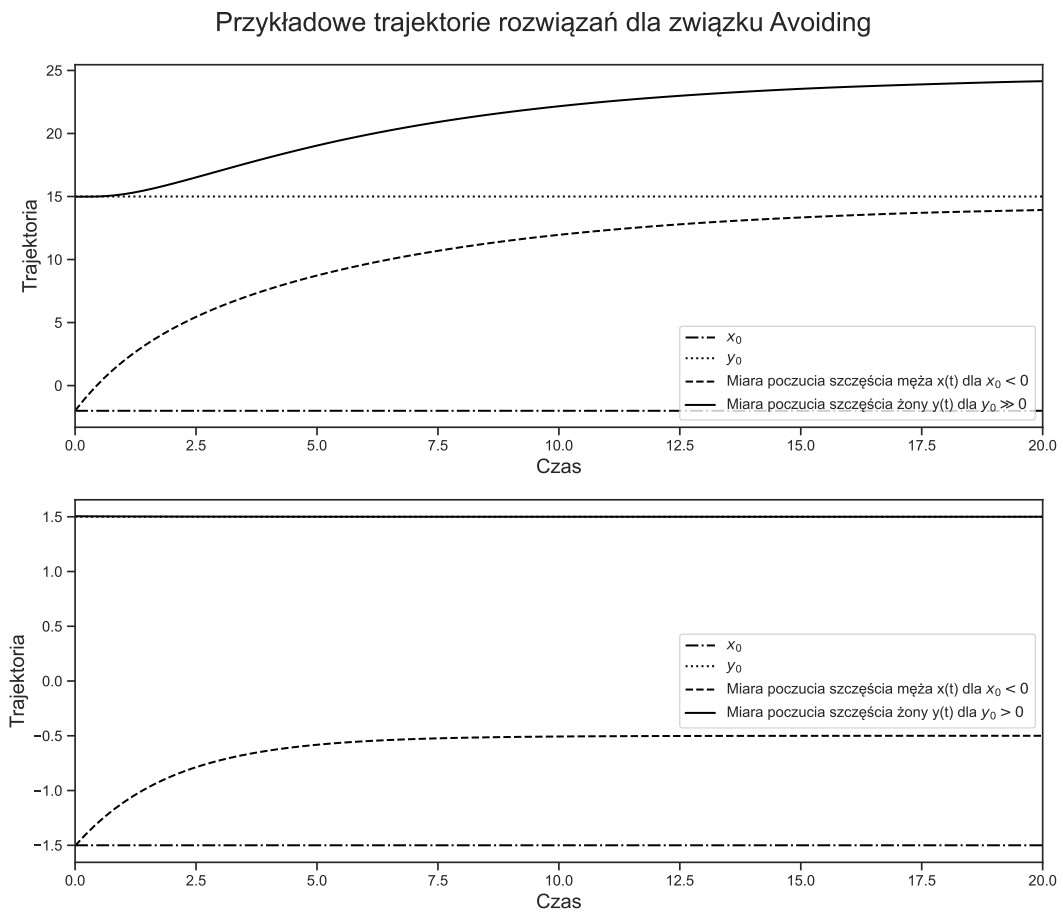




Rysunek 2.7: Trajektorie rozwiązań związku Avoiding dla parametrów  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ ,  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 3$ .



Rysunek 2.8: Trajektorie rozwiązań związku Avoiding dla parametrów  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ ,  $x_0 = -2$ ,  $y_0 = -3$ .



Rysunek 2.9: Trajektorie rozwiązań związku Avoiding dla parametrów  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ ,  $x_0 = -2$ ,  $y_0 = 15$  oraz  $x_0 = -1.5$ ,  $y_0 = 1.5$ .

Równanie (2.40) rozwiązujemy za pomocą czynnika całkującego postaci  $\mu(t) = e^{r_2 t}$ . Ostatecznie

$$y(t) = e^{-r_2 t} [y(0) + y_0 (e^{r_2 t} - 1) + a_2 \int_0^t e^{r_2 s} I(x(s)) ds]. \quad (2.42)$$

Może zaistnieć co najwyżej jeden taki moment czasowy  $t_0$ , dla którego  $x(t_0) = 0$ . Jest to moment

$$t_0 = -\frac{1}{r_1} \ln \left( \frac{x_0}{x_0 - X} \right), \quad (2.43)$$

przy założeniu  $\frac{x_0}{x_0 - X} > 0$ . Jeśli dobierzemy parametry tak, aby  $X < 0$  i  $\frac{x_0}{x_0 - X} > 0$ , to zaobserwujemy taki moment  $t_0$ , a funkcja wpływu będzie miała postać

$$I(x) = I(t) = \begin{cases} x(t), & \text{jeśli } t > t_0 \\ 0, & \text{jeśli } t < t_0. \end{cases} \quad (2.44)$$

Wtedy możemy zapisać

$$y(t) = \begin{cases} e^{-r_2 t} (y(0) + y_0 (e^{r_2 t} - 1)), & \text{jeśli } t < t_0 \\ e^{-r_2 t} (y(0) + y_0 (e^{r_2 t} - 1) + a_2 \int_{t_0}^t e^{r_2 s} x(s) ds), & \text{jeśli } t > t_0. \end{cases} \quad (2.45)$$

Podstawiając postać  $x(t)$  – (2.41) i przyjmując  $y(0) = Y$  otrzymujemy

$$y(t) = \begin{cases} e^{-r_2 t} (Y + y_0 (e^{r_2 t} - 1)), & \text{jeśli } t < t_0 \\ e^{-r_2 t} \left( Y + y_0 (e^{r_2 t} - 1) + \frac{a_2(X-x_0)}{r_2-r_1} (e^{t(r_2-r_1)} - e^{t_0(r_2-r_1)}) + \frac{a_2 x_0}{r_2} (e^{r_2 t} - e^{r_2 t_0}) \right), & \text{jeśli } t > t_0. \end{cases} \quad (2.46)$$

Na Rys. 2.10 widzimy trajektorie rozwiązań dla dobranych odpowiednio pod założenia parametrów. Trajektorie rozwiązań  $x(t)$  zmienia znak w punkcie  $t_0$  oznaczonym pionową kropkowaną linią. Od tego momentu widoczna jest znacząca zmiana trajektorii rozwiązań  $y(t)$ . Znak rozwiązań  $y(t)$  zależy oczywiście od dobranych parametrów – trajektoria może również przebiegać powyżej 0 np. dla dodatkich  $Y, y_0$ .

## 2.8 Związek Volatile

W przypadku tego typu związku współmałżonkowie komunikują swojemu partnerowi głównie negatywne emocje, ale pomimo tego może on być określany mianem low-risk. Model dla tej pary wygląda następująco

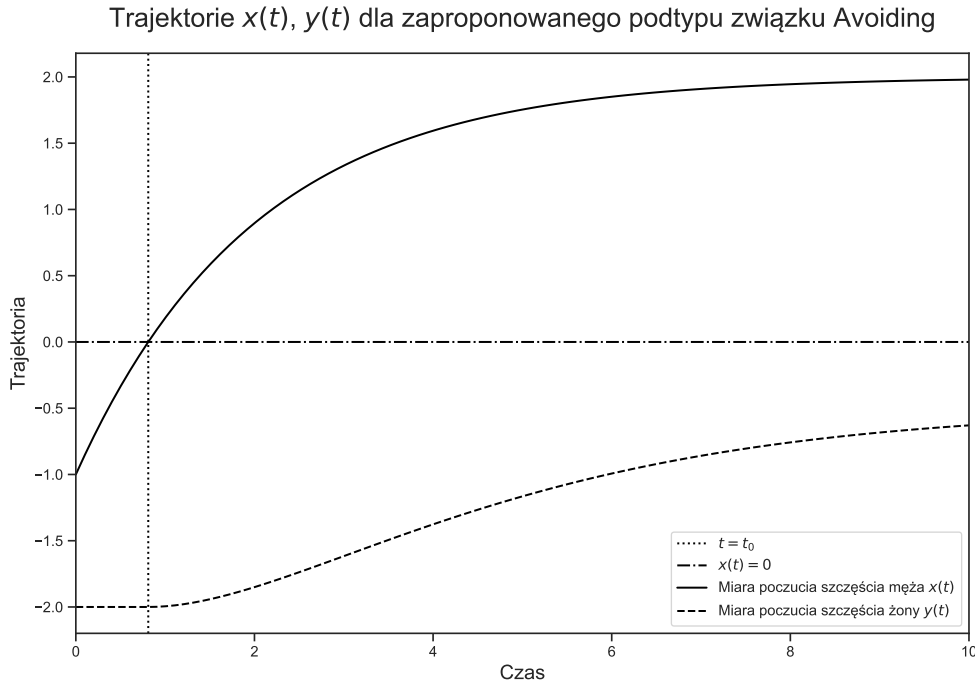
$$\frac{dx}{dt} = r_1 (x_0 - x) + I_1(y), \quad (2.47)$$

$$\frac{dy}{dt} = r_2 (y_0 - y) + I_2(x), \quad (2.48)$$

gdzie

$$I_1(y) = \begin{cases} a_1 y, & \text{jeśli } y > 0 \\ b_1 y, & \text{jeśli } y < 0, \end{cases} \quad (2.49)$$

$$I_2(x) = \begin{cases} a_2 x, & \text{jeśli } x > 0 \\ b_2 x, & \text{jeśli } x < 0. \end{cases} \quad (2.50)$$



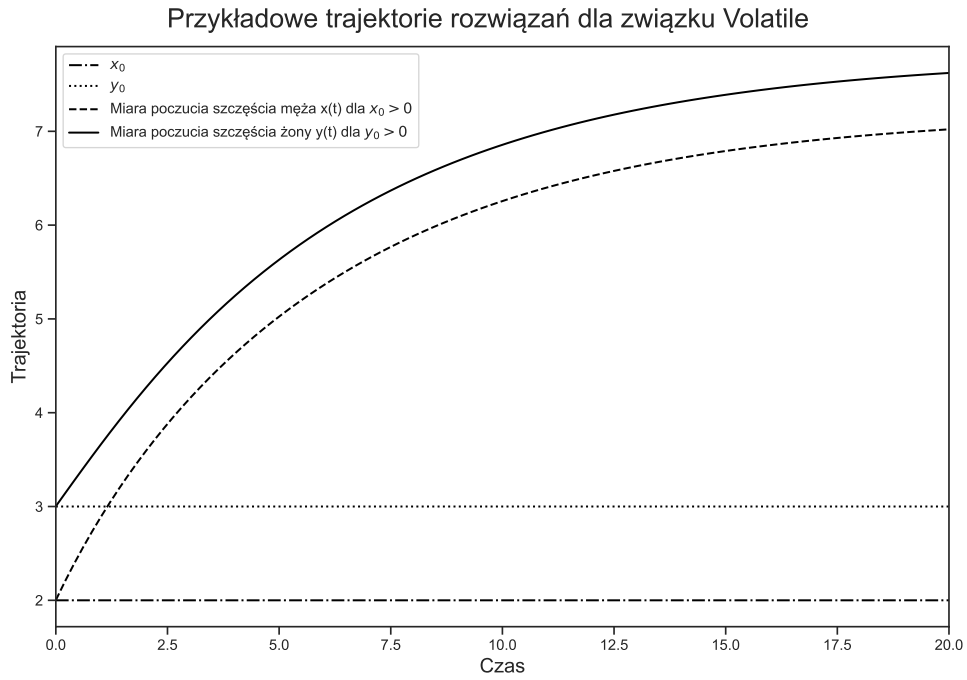
Rysunek 2.10: Trajektorie rozwiązań zaproponowanego podtypu związku Avoiding dla parametrów  $r_1 = 0.5$ ,  $r_2 = 0.4$ ,  $a_2 = 0.3$ ,  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = -2$ ,  $X = -1$ ,  $Y = -2$ .

Tutaj  $\frac{a_1}{b_1} \ll 1$  oraz  $\frac{a_2}{b_2} \ll 1$ . Jeśli  $x^*$ ,  $y^* > 0$ , to punkty stacjonarne są postaci (2.16), (2.17). Natomiast, gdy  $x^*$ ,  $y^* < 0$ , to mamy

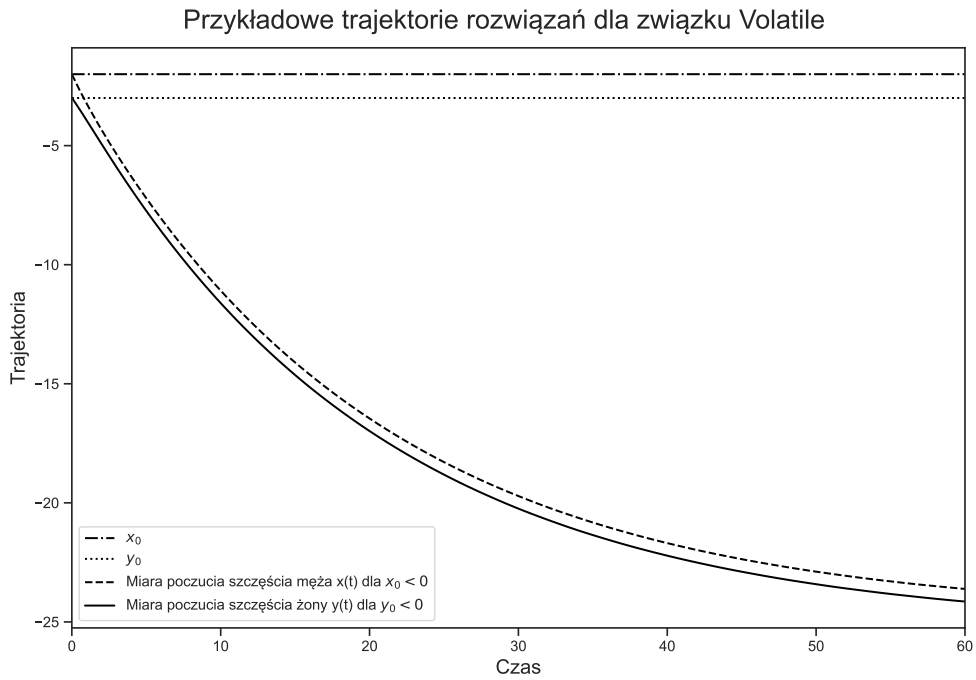
$$x^* = \frac{x_0 + \frac{b_1}{r_1} y_0}{1 - \frac{b_1 b_2}{r_1 r_2}}, \quad (2.51)$$

$$y^* = \frac{y_0 + \frac{b_2}{r_2} x_0}{1 - \frac{b_1 b_2}{r_1 r_2}}. \quad (2.52)$$

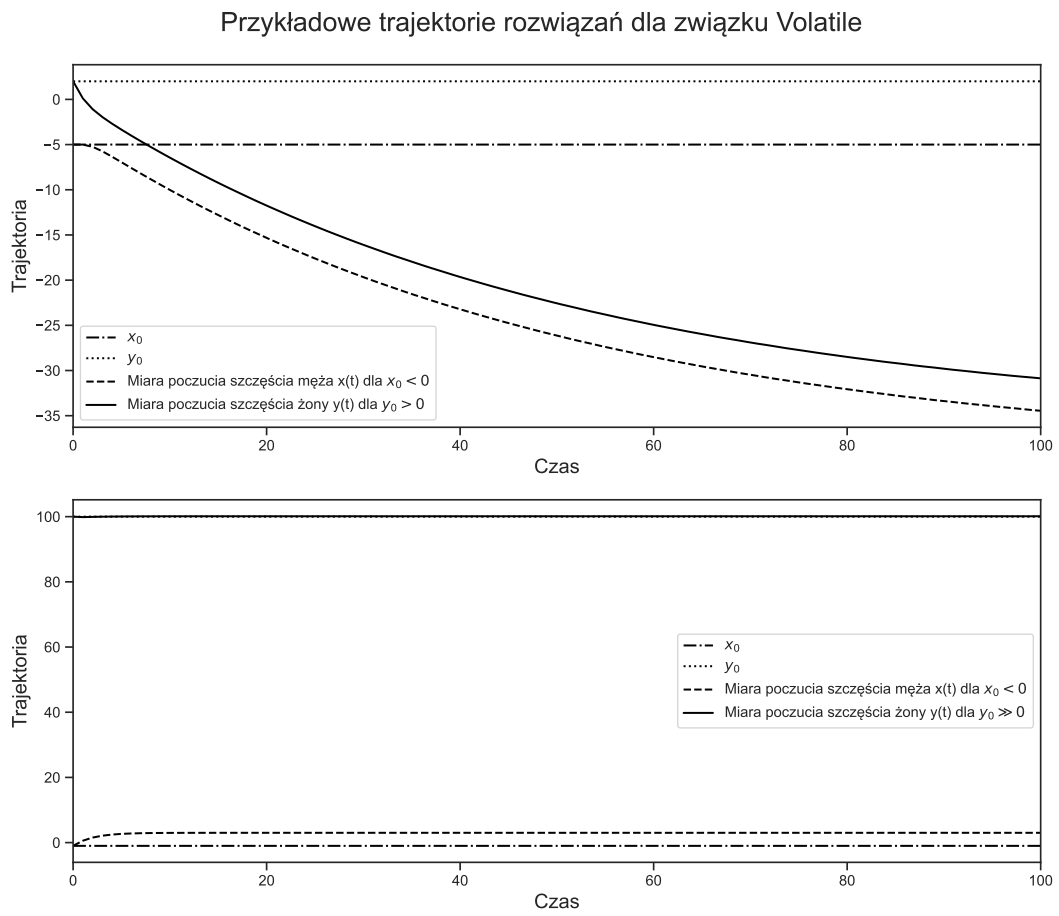
Sytuacja w związku zależy od tego, czy żona i mąż są z natury osobami pozytywnymi, czy negatywnymi – analogicznie do związku Validating. Jeśli zarówno mąż, jak i żona mają pozytywne nastawienie ( $x_0, y_0 > 0$ ), to trajektorie rozwiązań będą powyżej poziomu odpowiednio  $x_0$  i  $y_0$ , więc para będzie klasyfikowana jako regulated – przykładowo Rys. 2.11. Natomiast, gdy  $x_0, y_0 < 0$ , to związek pogłębia ich poczucie nieszczęścia i trajektorie są poniżej poziomu odpowiednio  $x_0, y_0$  – przykładowo wykres 2.12. Związek będzie określany jako high-risk. Kiedy mamy do czynienia z parą z przeciwnymi nastawieniami, to nadal ma ona szansę na udany związek – zależy to od poziomu pozytywności i negatywności każdego z partnerów oraz współczynników kierunkowych  $a$ ,  $b$ . Podobnie jak w związku Validating, co widać na wykresach 2.13, wysoki poziom pozytywności jednego partnera może zrównoważyć negatywność drugiego jak na dolnym wykresie 2.13 i będziemy mieli do czynienia ze związkiem regulated.



Rysunek 2.11: Trajektorie rozwiązań związku Volatile dla parametrów  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ ,  $b_1 = b_2 = 0.45$ ,  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 3$ .



Rysunek 2.12: Trajektorie rozwiązań związku Volatile dla parametrów  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ ,  $b_1 = b_2 = 0.45$ ,  $x_0 = -2$ ,  $y_0 = -3$ .



Rysunek 2.13: Trajektorie rozwiązań związku Volatile dla parametrów  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_1 = a_2 = \frac{1}{50}$ ,  $b_1 = b_2 = \frac{24}{50}$ ,  $x_0 = -5$ ,  $y_0 = 2$  oraz  $x_0 = -1$ ,  $y_0 = 100$ .

# Rozdział 3

## Uogólnienie modelu

### 3.1 Obszary problematyczne

Patrząc na założenia modelu zaproponowanego przez Tunga w [5] można zastanowić się nad adekwatnością wyboru postaci funkcji wpływu. Funkcja liniowa nie jest z żadnej strony ograniczona, przez co może dojść do sytuacji, w której poczucie szczęścia lub nieszczęścia osoby będzie wybuchać do nieskończoności, lub minus nieskończoności. Jest to przypadek nieaplikowalny do świata rzeczywistego, dlatego pierwszą propozycją ulepszenia modelu jest wykorzystanie innej funkcji wpływu.

Kolejnym aspektem są losowo pojawiające się w czasie, przełomowe wydarzenia w życiu człowieka. Aby uwzględnić je w rozumowaniu, dodamy nowy czynnik do modelu, który będzie odpowiedzialny za wydarzenie, które miało wpływ na związek dopiero od pewnego losowego momentu w czasie  $T > t_0$ .

### 3.2 Funkcja wpływu

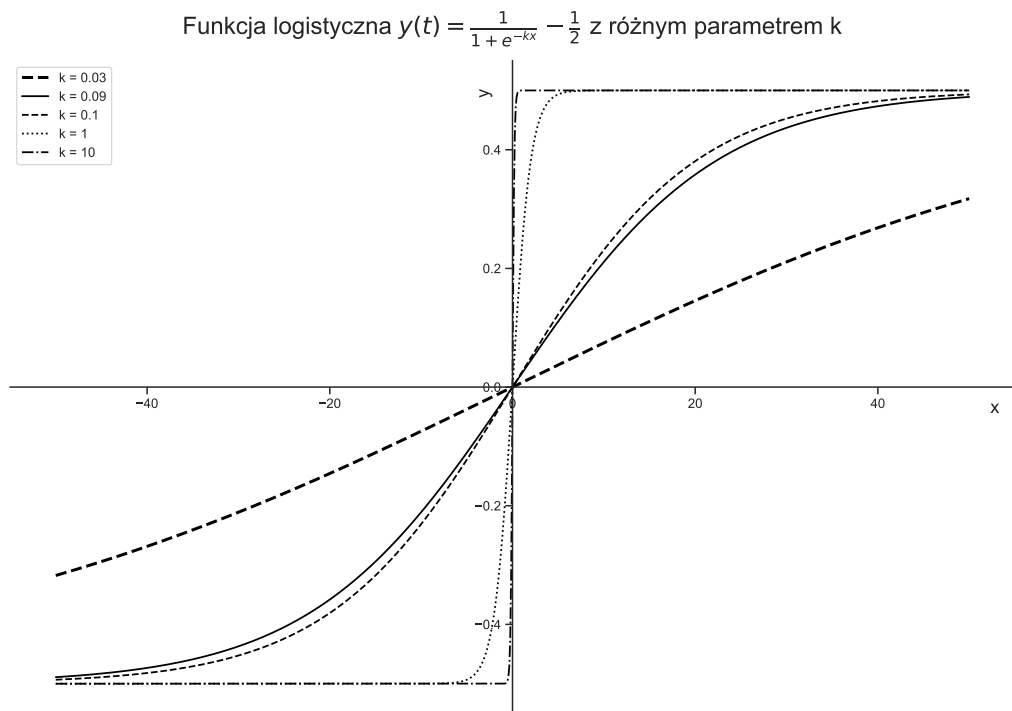
Propozycją na funkcję wpływu odpowiadającą funkcji liniowej, ale posiadającą ograniczenie z obu stron jest funkcja logistyczna postaci

$$I(x) = \frac{L}{1 + e^{-kx}} - \frac{L}{2}, \quad (3.1)$$

gdzie  $\frac{L}{2}$  – maksymalna wartość krzywej,  $-\frac{L}{2}$  – minimalna wartość krzywej,  $k$  - logistyczne tempo wzrostu, stromość krzywej. Manipulując parametrem  $k$ , możemy zmieniać stromość krzywej, która przy funkcji wpływu może być interpretowana jako szybkość, gwałtowność w reakcji na zachowanie partnera/partnerki. Im większa wartość tego parametru, tym większa gwałtowność – widoczne na Rys. 3.1. Natomiast zmiany wartości parametru  $L$  powodują zmianę zakresu wartości funkcji. Interpretujemy to jako zakres emocji, możliwą wielkość reakcji, jaką badany będzie mieć na zachowanie partnerki/partnera. Im większe  $L$ , tym większy zakres tych emocji. Z logistyczną funkcją wpływu model przyjmuje postać

$$\frac{dx}{dt} = r_1(x_0 - x) + \frac{L}{1 + e^{-ky}} - \frac{L}{2}, \quad (3.2)$$

$$\frac{dy}{dt} = r_2(y_0 - y) + \frac{L}{1 + e^{-kx}} - \frac{L}{2}. \quad (3.3)$$



Rysunek 3.1: Funkcja logistyczna z  $L = 1$  i różnym parametrem  $k$ .

### 3.2.1 Analiza stabilności

Nie jesteśmy w stanie analitycznie wyznaczyć postaci punktów stacjonarnych równań (3.2), (3.3). Natomiast rozważymy dwa konkretne przypadki, które przybliżają bardzo stromą oraz bardzo płaską postać funkcji wpływu.

1. Gdy  $k \rightarrow \infty$  mamy do czynienia z układem równań

$$\frac{dx}{dt} = r_1 (x_0 - x) + \frac{L}{2} \quad (3.4)$$

$$\frac{dy}{dt} = r_2 (y_0 - y) + \frac{L}{2}, \quad (3.5)$$

którego punkty stacjonarne są postaci

$$x^* = x_0 + \frac{L}{2r_1}, \quad (3.6)$$

$$y^* = y_0 + \frac{L}{2r_2}. \quad (3.7)$$

Natomiast

$$f'(x^*) = -r_1, \quad (3.8)$$

$$g'(y^*) = -r_2, \quad (3.9)$$

a  $r_1, r_2 > 0$ . Stąd wiemy, że punkty stacjonarne  $x^*, y^*$  są stabilne.



2. Gdy  $k \rightarrow 0$  mamy do czynienia z układem równań

$$\frac{dx}{dt} = r_1 (x_0 - x), \quad (3.10)$$

$$\frac{dy}{dt} = r_2 (y_0 - y), \quad (3.11)$$

którego punkty stacjonarne są postaci

$$x^* = x_0, \quad y^* = y_0. \quad (3.12)$$

Tutaj również są one stabilne, ponieważ  $r_1, r_2 > 0$ .

W obydwu rozważanych powyżej przypadkach stabilność punktów stacjonarnych nie zależy od wartości parametru  $L$ , który intuicyjnie mógłby zaburzyć układ.

Punkty stacjonarne układu równań (3.2), (3.3) możemy wyznaczyć numerycznie. Macierz Jacobiego jest postaci

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} -r_1 & \frac{Lke^{-ky}}{(1 + e^{-ky})^2} \\ \frac{Lke^{-kx}}{(1 + e^{-kx})^2} & -r_2 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

a jej wartości własne

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(r_1 + r_2) \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (3.14)$$

gdzie

$$\Delta = (r_1 + r_2)^2 - 4 \left( r_1 r_2 - \frac{L^2 k^2 e^{-k(x+y)}}{(1 + e^{-kx})^2 (1 + e^{-ky})^2} \right). \quad (3.15)$$

Gdy  $\lambda_{1,2} < 0$  to mamy do czynienia z przypadkiem stabilnym.

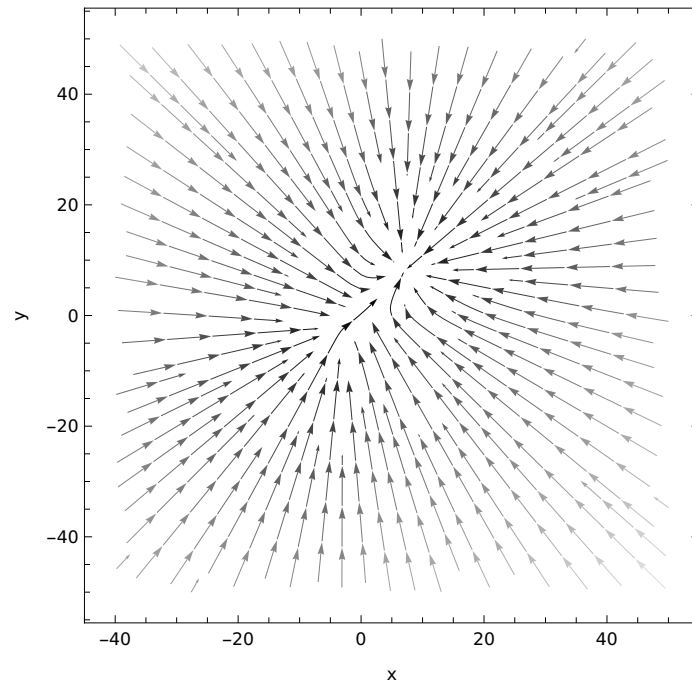
Nie jesteśmy w stanie analitycznie wyznaczyć postaci punktów stacjonarnych układu równań (3.2), (3.3). W związku z tym ciężko jest również odpowiedzieć na pytanie, czy dana para ma szansę stworzyć związek i dotrwać do momentu zaręczyn. Natomiast, jeśli istnieje choć jeden punkt stacjonarny, który jest stabilny, to wszystko zależy od dobranych warunków początkowych. Jeśli wystartujemy odpowiednio, to ten punkt stabilny nas przyciągnie, a jeśli nie to punkt niestabilny odepchnie nas albo do nieskończoności (ewentualnie minus nieskończoności) albo do punktu stabilnego. W tym przypadku nie podamy dokładnego warunku na powstanie związku, czyli stabilności punktu stacjonarnego, ponieważ możemy jedynie mówić o stabilności lub niestabilności lokalnej wokół danego punktu krytycznego.

Natomiast chcielibyśmy zobaczyć, jak zmiana parametru  $L$  wpływa na zachowanie wyznaczonego punktu stacjonarnego. Możemy zbadać to na wykresach. Dla dobranych parametrów na Rys. 3.2 wszystkie punkty stacjonarne są stabilne (wyznaczone numerycznie<sup>1</sup>). Obserwujemy pewien ciekawy skok ich wartości. Porównując portrety fazowe dla wybranych wartości  $L$  przed – Rys. 3.3 i po – Rys. 3.4 skoku widzimy, że na przedziale, który obserwujemy, zmieniła się ilość punktów stacjonarnych. Każdy z nich tworzy węzeł stabilny lokalnie wokół wyznaczonego numerycznie punktu stacjonarnego. Natomiast przez to, że nie znamy dokładnej ilości punktów stacjonarnych układu równań (3.2), (3.3) możemy jedynie mówić o tym, co widzimy na wycinku płaszczyzny fazowej.

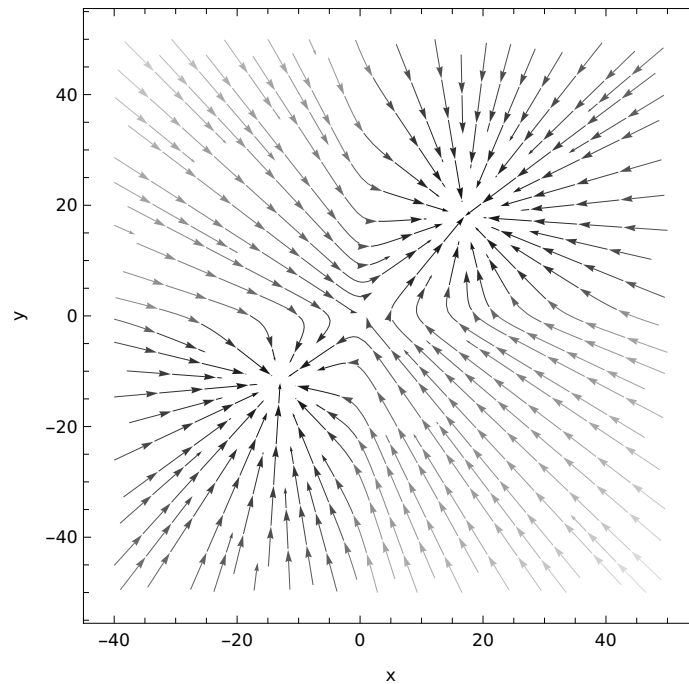
<sup>1</sup>Wszystkie obliczenia numeryczne w pracy zostały wykonane z wykorzystaniem biblioteki [6].



Rysunek 3.2: Punkty krytyczne w zależności od wartości parametru  $L$  dla  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 3$ .



Rysunek 3.3: Płaszczyzna fazowa dla parametrów  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 3$ ,  $k = 1$ ,  $L = 5$ .



Rysunek 3.4: Płaszczyzna fazowa dla parametrów  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 3$ ,  $k = 1$ ,  $L = 15$ .

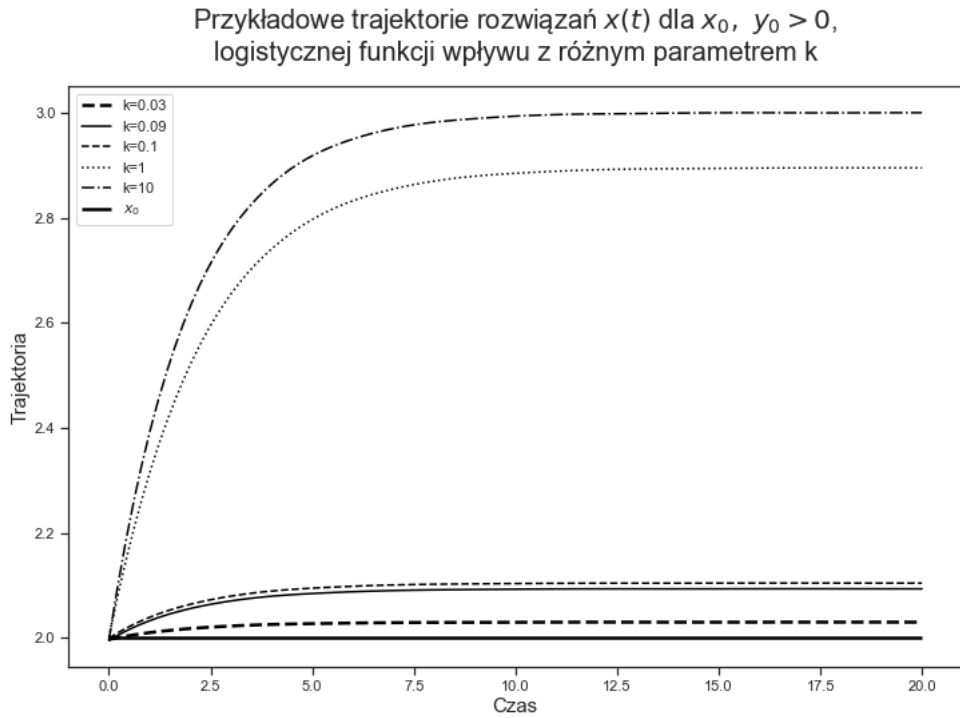
### 3.2.2 Rozwiązanie i porównanie wyników

Nieliniowy układ równań różniczkowych rozwiązujemy numerycznie. Na Rys. 3.5 możemy zobaczyć porównanie trajektorii rozwiązań układu z logistyczną funkcją wpływu z różnymi parametrami  $k$ . Im większa wartość parametru, a więc i stromość krzywej funkcji logistycznej, tym większy zakres wartości ma trajektoria rozwiązań. Oznacza to, że im większa gwałtowność w odpowiadaniu na emocje partnera/partnerki tym większy zakres odczuwanych emocji. W sytuacji, gdy  $x_0, y_0 > 0$ , to wyższy poziom szczęścia. Dla pozostałych dwóch przypadków –  $x_0, y_0 < 0$ ,  $x_0 > 0, y_0 < 0$  – mamy analogiczną zależność od tego parametru.

Zaproponowana funkcja (3.1) jest nieparzysta i przez to jest ulepszeniem liniowej funkcji wpływu użytej dla związku Validating, gdzie  $a_i \sim b_i$ . Aby porównać trajektorie rozwiązań dla związku Validating (z liniową funkcją wpływu) oraz trajektorie dla układu z logistyczną funkcją wpływu należy użyć parametrów takich, aby pochodne obu funkcji wpływu były takie same w punkcie  $x = 0$ . Wówczas możemy mówić o analogii pomiędzy tymi przypadkami. Patrząc na Rys. 3.6, gdzie  $x_0, y_0 > 0$  widzimy, że trajektoria rozwiązań układu z funkcją logistyczną ma dużo mniejszą wartość maksymalną niż odpowiadająca jej trajektoria układu z funkcją liniową. Ograniczenie funkcji wpływu pozwoliło na zmniejszenie zakresu poczucia szczęścia, co jest bliższe rzeczywistości, w której żyjemy. Dla pozostałych przypadków  $x_0, y_0 < 0$ ,  $x_0 < 0, y_0 > 0$  zachowana jest ta sama zależność pomiędzy liniową a logistyczną funkcją wpływu.

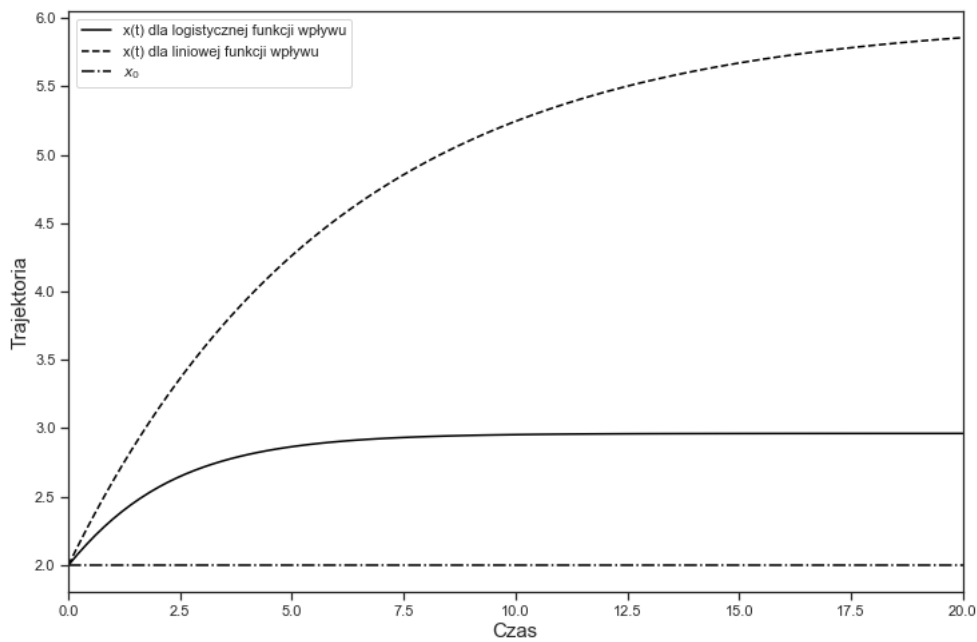
## 3.3 Nowy człon w modelu

Chcemy uwzględnić nowy czynnik w modelu – wydarzenie, które pojawia się w losowym momencie od początku trwania związku i dopiero od tego momentu ma wpływ na życie



Rysunek 3.5: Trajektorie rozwiązań  $x(t)$  dla logistycznej funkcji wpływu, różnych parametrów  $k$  oraz  $x_0 = y_0 = 2$ ,  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $L = 1$ .

Porównanie trajektorii rozwiązań  $x(t)$  dla  $x_0, y_0 > 0$ , logistycznej i liniowej funkcji wpływu



Rysunek 3.6: Trajektorie rozwiązań  $x(t)$  dla logistycznej i liniowej funkcji wpływu oraz parametrów  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ ,  $x_0 = y_0 = 2$ ,  $k = \frac{4}{3}$ .

pary, a więc na  $x(t)$ ,  $y(t)$ . Użyjemy do tego skokowej funkcji Heaviside'a, która jest postaci

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x < 0 \\ 1 & \text{jeśli } x \geq 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Nasz model wygląda następująco

$$\frac{dx}{dt} = r_1(x_0 - x) + I_1(y) + k_1xyH(t - T), \quad (3.17)$$

$$\frac{dy}{dt} = r_2(y_0 - y) + I_2(x) + k_2xyH(t - T), \quad (3.18)$$

gdzie  $k_1$ ,  $k_2$  – pewne stałe.

### 3.3.1 Analiza stabilności

Dzięki funkcji skoku jednostkowego ostatni człon równań pojawia się dopiero od momentu  $T$ . Jednak nie mamy już do czynienia z układem równań autonomicznych, więc nie jesteśmy w stanie powiedzieć nic o stacjonarności ani stabilności. Natomiast możemy spojrzeć na układ od momentu  $T$  i analizować jego zachowanie po przesunięciu o to okno czasowe  $(0, T)$ . Wtedy mamy do czynienia ponownie z równaniami autonomicznymi

$$\frac{dx}{dt} = r_1(x_0 - x) + a_1y + k_1xy, \quad (3.19)$$

$$\frac{dy}{dt} = r_2(y_0 - y) + a_2x + k_2xy, \quad (3.20)$$

dla których możemy badać stabilność. Mamy dwa punkty krytyczne i są one postaci

$$x_{1,2}^* = \frac{-k_1r_2y_0 + r_1r_2 - a_1a_2 + k_2x_0r_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2(a_2k_1 + k_2r_1)}, \quad (3.21)$$

$$y^* = \frac{r_1(x^* - x_0)}{a_1 + k_1x^*}, \quad (3.22)$$

gdzie  $\Delta = (k_1r_2y_0 - r_1r_2 + a_1a_2 - k_2x_0r_1)^2 - 4(a_2k_1 + k_2r_1)(r_2y_0a_1 + r_1r_2x_0)$ .

Macierz Jacobiego układu jest postaci

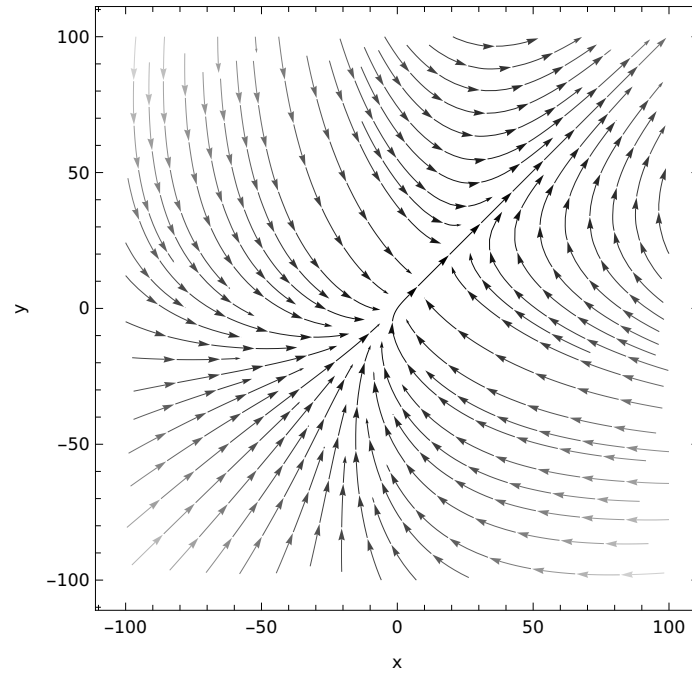
$$A(x, y) = \begin{pmatrix} -r_1 + k_1y & a_1 + k_1x \\ a_2 + k_2y & -r_2 + k_2x \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

a jej wartości własne

$$\lambda_{1,2} = \frac{(k_1y - r_1 + k_2x - r_2) \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (3.24)$$

gdzie  $\Delta = (-k_1y + r_1 - k_2x + r_2)^2 - 4((k_1y - r_1)(k_2x - r_2) - (k_1x + a_1)(k_2y + a_2))$ . Aby punkty stacjonarne były stabilne, musi być spełniony warunek  $\lambda_{1,2} < 0$  lub, jeśli są liczbami zespolonymi to  $\Re(\lambda_{1,2}) \leq 0$ .

Dla pierwszego zestawu rozważanych parametrów wartości własne macierzy Jacobiego są liczbami zespolonymi, a płaszczyzna fazowa jest przedstawiona na Rys. 3.7. Nie jesteśmy w stanie określić typów portretów lokalnych, jakie składają się na tę płaszczyznę fazową. Dla drugiego zestawu są to liczby rzeczywiste –  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  oraz  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ . Na portrecie

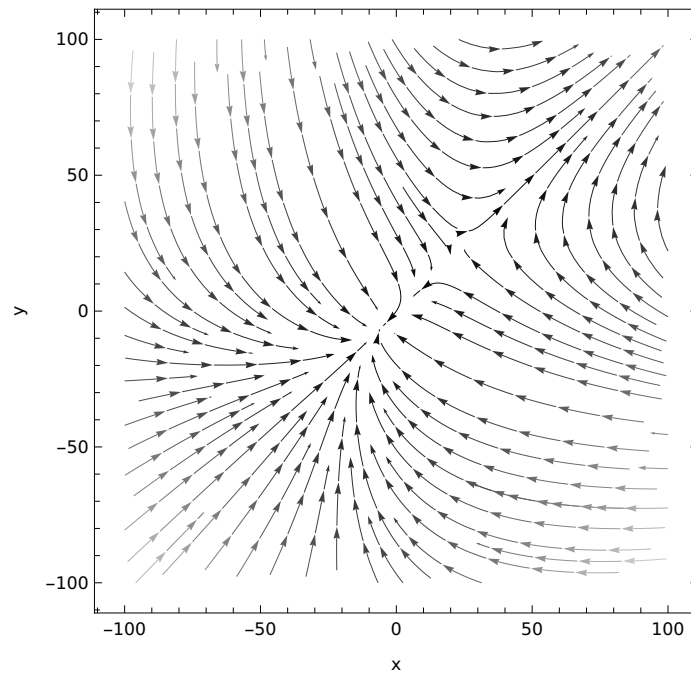


Rysunek 3.7: Płaszczyzna fazowa dla parametrów  $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ ,  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ ,  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 3$ ,  $k_1 = k_2 = 0.01$ .

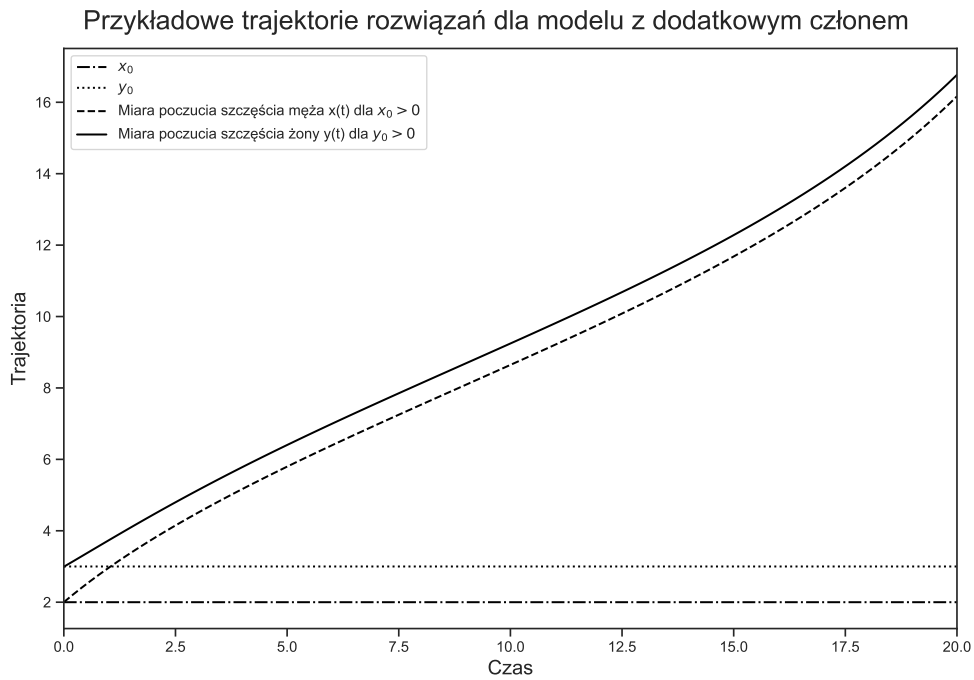
fazowym na Rys. 3.8 widzimy, że tworzą one lokalnie w pobliżu punktu stacjonarnego, który jest niestabilny – siodło oraz w pobliżu tego, który jest stabilny – węzeł stabilny. W trzecim przypadku również otrzymujemy liczby rzeczywiste –  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  oraz  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ . Na płaszczyźnie fazowej wokół odpowiadających im punktów krytycznych ponownie otrzymalibyśmy siodło (dla punktu krytycznego niestabilnego) i węzeł stabilny (dla stabilnego).

### 3.3.2 Rozwiązanie

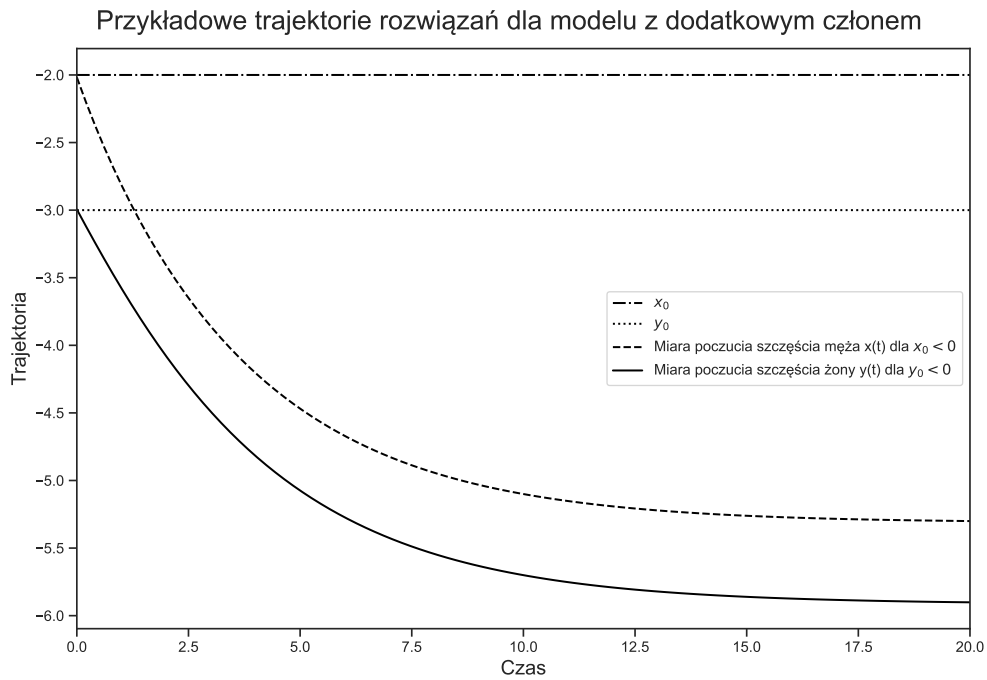
Nieliniowy układ równań (3.19), (3.20) rozwiązujemy numerycznie. Dla wybranych  $x_0, y_0 > 0$  na wykresie trajektorii na Rys. 3.9 obie trajektorie są powyżej odpowiednio poziomu  $x_0, y_0$ . Zatem poczucie szczęścia w związku żony i męża jest większe, niż gdy byli poza nim. Dla przypadku  $x_0, y_0 < 0$  trajektorie są poniżej odpowiednio  $x_0, y_0$ . Zatem mamy sytuację, w której związek dąży do rozpadu. W ostatniej sytuacji dla zadanych  $x_0 < 0, y_0 > 0$  związek również nie utrzyma się, ponieważ docelowo obie trajektorie są poniżej odpowiednio  $x_0$  i  $y_0$ .



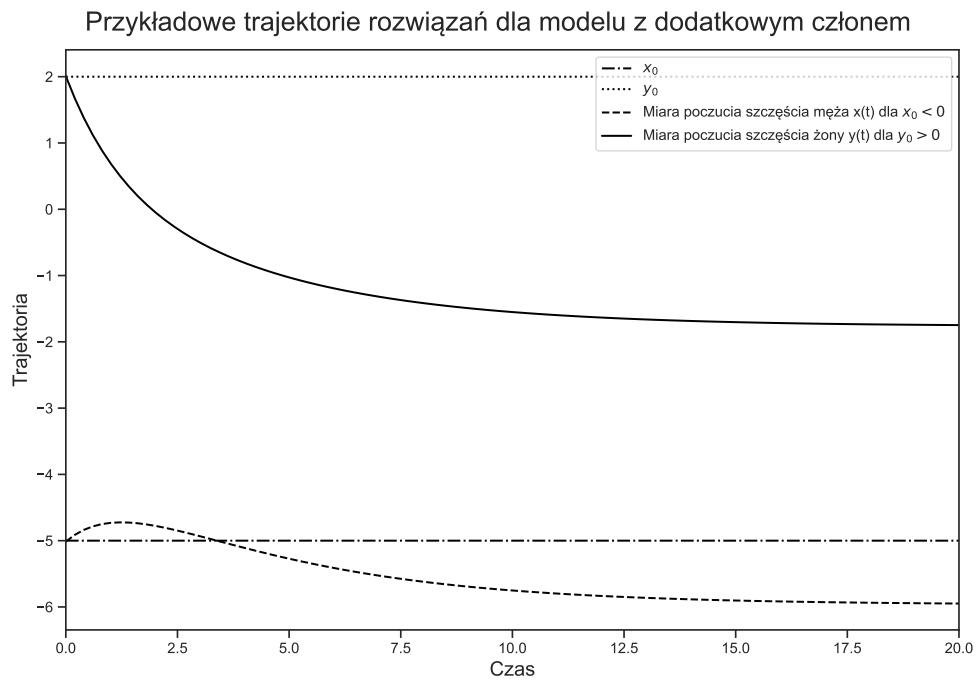
Rysunek 3.8: Płaszczyzna fazowa dla parametrów  $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ ,  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ ,  $x_0 = -2$ ,  $y_0 = -3$ ,  $k_1 = k_2 = 0.01$ .



Rysunek 3.9: Trajektorie rozwiązań dla parametrów  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ ,  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 3$ ,  $k_1 = k_2 = 0.01$ .



Rysunek 3.10: Trajektorie rozwiązań dla parametrów  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ ,  $x_0 = -2$ ,  $y_0 = -3$ ,  $k_1 = k_2 = 0.01$ .



Rysunek 3.11: Trajektorie rozwiązań dla parametrów  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ ,  $x_0 = -5$ ,  $y_0 = 2$ ,  $k_1 = k_2 = 0.01$ .



# Podsumowanie

Poprzez analizę i budowanie od podstaw ciągłego modelu Tunga mogliśmy wyprowadzić dokładne rozwiązania i przyjrzeć się stabilności dla wszystkich zaproponowanych typów związku. Ponadto zaproponowaliśmy i przeanalizowaliśmy nowy podtyp interakcji partnerów w tym modelu społecznym.

Wprowadziliśmy ulepszenia modelu, aby bardziej oddawał on realia otaczającej człowieka rzeczywistości. Zbadaliśmy zachowanie rozwiązań oraz stabilność dla dynamicznych układów nieliniowych po dodaniu poprawek. Przyjrzelśmy się również wpływowi konkretnych parametrów na zachowanie naszego modelu i porównaliśmy je z rozwiązaniami pierwotnego modelu Tunga.

Propozycją na kontynuowanie badań jest skupienie na znalezieniu możliwie najbardziej adekwatnej funkcji wpływu. Pomocna byłaby współpraca z psychologami, którzy dzięki swojej wiedzy są w stanie zweryfikować poprawność zaproponowanych funkcji.

W celu weryfikacji skuteczności modelu należałoby przeprowadzić eksperyment Gottmana, biorąc większą próbkę i przeprowadzając badania przez całą długość trwania każdego ze związków.



# Bibliografia

- [1] BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C., MEADE, D. B. *Elementary differential equations and boundary value problems*. John Wiley & Sons, 2021.
- [2] INC., W. R. Mathematica, Version 13.2. Champaign, IL, 2022.
- [3] JULIAN COOK, REBECCA TYSON, J. W. R. R. J. G., MURRAY, J. Mathematics of marital conflict: Qualitative dynamic mathematical modeling of marital interaction. *Journal of Family Psychology* 9, 2 (1995), 110–130.
- [4] MURRAY, J. D. *Mathematical biology: I. An introduction*. Springer, 2002.
- [5] TUNG, K. K. *Topics in Mathematical Modeling*. Princeton University Press, 41 William Street, Princeton, New Jersey 08540, 2007.
- [6] VIRTANEN, P., GOMMERS, R., OLIPHANT, T. E., HABERLAND, M., REDDY, T., COURNAPEAU, D., BUROVSKI, E., PETERSON, P., WECKESSER, W., BRIGHT, J., VAN DER WALT, S. J., BRETT, M., WILSON, J., MILLMAN, K. J., MAYOROV, N., NELSON, A. R. J., JONES, E., KERN, R., LARSON, E., CAREY, C. J., POLAT, İ., FENG, Y., MOORE, E. W., VANDERPLAS, J., LAXALDE, D., PERKTOLD, J., CIMRMAN, R., HENRIKSEN, I., QUINTERO, E. A., HARRIS, C. R., ARCHIBALD, A. M., RIBEIRO, A. H., PEDREGOSA, F., VAN MULBREGT, P., SciPY 1.0 CONTRIBUTORS. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods* 17 (2020), 261–272.