Integrais Envolvendo Seno e Cosseno

a) $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$

b) $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$

c) $\int \operatorname{sen} x \cdot \cos x \, dx \Rightarrow \begin{array}{l} u = \operatorname{sen} x \\ du = \cos x \, dx \end{array} \qquad \int u \, du = \dfrac{u^2}{2} + C = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C$

d) $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ // Essa identidade seria útil se o expoente fosse ímpar

$\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ // Vamos precisar dessa identidade

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx - \int \frac{\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx$$

$$\boxed{\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C}$$

e) $\int \cos^2 x \, dx$

Como o expoente é par, vamos usar a identidade abaixo:

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C}$$

$sen^2 x + cos^2 x = 1$

i

f) $\int sen^2 x \cdot cos\, x\, dx$

Para resolver a integral ao lado, vamos usar o método da substituição.

$u = sen\, x$

$du = cos\, x\, dx$

$$\int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{sen^3 x}{3} + C$$

g) $\int sen\, x \cdot cos^2 x\, dx$

$u = cos\, x$

$du = -sen\, x\, dx$

$$\int u^2 (-du) = -1 \cdot \int u^2\, du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{cos^3 x}{3} + C$$

L1 $\int sen^2 x \cdot cos^2 x \, dx$

Primeiramente, vamos precisar da identidade fundamental, pois com ela deixamos tudo em função do cosseno ou do seno.

$$sen^2 x + cos^2 x = 1$$

$$sen^2 x = 1 - cos^2 x$$

$$\int sen^2 x \cdot cos^2 x \, dx = \int (1 - cos^2 x) \cdot cos^2 x \, dx = \int cos^2 x - cos^4 x \, dx = \int cos^2 x \, dx - \int cos^4 x \, dx$$

* Agora, ficamos com a seguinte integral:

$$\int cos^2 x \, dx - \int cos^4 x \, dx$$

* Para resolver a integral acima vamos precisar de outra identidade:

$$cos^2 x = \frac{1 - cos 2x}{2}$$

$$= \int \frac{1 - cos 2x}{2} dx - \int \left(\frac{1 - cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int cos 2x \, dx - \frac{1}{4} \int (1 - cos 2x)^2 \, dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{sen 2x}{4} - \frac{1}{4} \int (1 - 2 cos 2x + \underbrace{cos^2 2x}) \, dx$$

$$cos^2 \theta = \frac{1 + cos 2\theta}{2}$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{sen 2x}{4} - \frac{1}{4} \int \left(1 - 2 cos 2x + \frac{1 + cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{sen 2x}{4} - \frac{1}{4} \int 1 \, dx - \frac{2}{4} \int cos 2x + \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int cos 4x \, dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{sen 2x}{4} - \frac{x}{4} - \frac{sen 2x}{8} + \frac{x}{8} + \frac{(sen 4x)}{32} + C$$

i) $\int sen^3 x \cdot cos^2 x \, dx$

$sen^2 x + cos^2 x = 1$

$sen^2 x = 1 - cos^2 x$

$$\int sen^2 x \cdot sen\, x \cdot cos^2 x \, dx = \int (1 - cos^2 x) \cdot sen\, x \cdot cos^2 x \, dx$$

$u = cos\, x$

$du = -sen\, x \, dx$

$$-\int (1-u^2) \cdot u^2 \, du = -\int (u^2 - u^4) \, du = -\int u^2 \, du + \int u^4 \, du$$

$$= -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C$$

$$= \frac{-cos^3 x}{3} + \frac{cos^5 x}{5} + C$$

* Integrais do tipo $sen^n x \cdot cos^m x$, com um ímpar e um par:

- O 'u' da substituição gosta do par;
- Tenta deixar tudo em função do par, usando a identidade fundamental
- A outra parte será o du.

j) $\int sen^2 x \cdot cos^3 x \, dx$ $\quad cos^2 x = 1 - sen^2 x$

$$\int sen^2 x \cdot cos\, x \cdot (1 - sen^2 x) \, dx$$

$u = sen\, x$
$du = cos\, x \, dx$

$$\int u^2 \cdot (1 - u^2) \, du = \int u^2 - u^4 \, du = \int u^2 \, du - \int u^4 \, du$$

$$= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C$$

$$= \frac{sen^3 x}{3} - \frac{sen^5 x}{5} + C$$

R1 $\int sen^3 x \cdot cos^3 x \, dx$

$cos^2 x = 1 - sen^2 x$

$$\int sen^3 x \cdot cos\, x \cdot (1 - sen^2 x) \, dx$$

$u = sen\, x$

$du = cos\, x \, dx$

$$\int u^3 \cdot (1 - u^2) \, du$$

- Quando ambos os termos forem ímpar, o 'u' será o seno.
- Deixe tudo em função do seno, usando a identidade fundamental.