

# Técnicas de Integração II

## Algumas Integrais Trigonométricas

Prof. Dr. José Ricardo de Rezende Zeni

UNESP, FEG, Depto de Matemática

Guaratinguetá, agosto de 2017

Direitos reservados. Reprodução autorizada desde que citada a fonte.

# Produto de Potências de Senos e Cossenos

$$\int \operatorname{sen}^k(x) \cos^n(x) dx$$

É conveniente separar em dois casos (pois as técnicas utilizadas em cada caso são diferentes)

1º Caso: pelo menos um dos expoentes,  $k$  ou  $m$ , é ímpar.

2º Caso: ambos os expoentes,  $k$  e  $m$ , são pares.

# 1º Caso – Parte 1 – Fundamental

Um dos expoentes é igual a 1.

$$\int \cos^n(x) \operatorname{sen}(x) \, dx \quad \text{ou} \quad \int \operatorname{sen}^k(x) \cos(x) \, dx$$

Substitua  $u = \cos x$  (quando o expoente do seno for igual a 1) para obter

$$\int \cos^n(x) \operatorname{sen}(x) \, dx = -\int u^n \, du$$

Quando o expoente do cosseno for igual a 1 substitua  $u = \operatorname{sen} x$ .

# 1º Caso – Parte 1 – Exemplos

Um dos expoentes é igual a 1.

$$\int \cos^2(x) \operatorname{sen}(x) \, dx$$

$$\int \operatorname{sen}(x) \cos(x) \, dx$$

$$\int \cos^7(x) \operatorname{sen}(x) \, dx$$

$$\int \operatorname{sen}^4(x) \cos(x) \, dx$$

Neste caso, o outro expoente não precisa ser um inteiro.

$$\int \sqrt{\cos(x)} \operatorname{sen}(x) \, dx$$

$$\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \, dx$$

## 1º Caso – Parte 2

Um dos expoentes é ímpar (maior que 1).  
Será reduzido ao caso fundamental usando a  
identidade trigonométrica  $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ .

Exemplo

$$\int \cos^2(x) \text{sen}^3(x) dx$$

Escreva  $\text{sen}^3 x = (1 - \cos^2 x) \cdot \text{sen} x$

Assim, a integral acima se reduz à

$$\int \cos^2(x) \text{sen}(x) dx - \int \cos^4(x) \text{sen}(x) dx$$

## 1º Caso – Parte 2 – Exemplos

Um dos expoentes é ímpar (maior que 1).

$$\int \operatorname{sen}^3(x) \, dx$$

$$\int \operatorname{sen}^2(x) \cos^3(x) \, dx$$

$$\int \cos^3(x) \operatorname{sen}^5(x) \, dx$$

$$\int \cos^5(x) \, dx$$

Neste caso, o outro expoente não precisa ser um inteiro.

$$\int \sqrt{\cos(x)} \operatorname{sen}^3(x) \, dx$$

$$\int \frac{\cos^3(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} \, dx$$

## 2º Caso – Expoentes pares

Ambos os expoentes são pares.

Será reduzido à integral do  $\cos(kx)$  usando as identidades trigonométrica para o arco metade

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos(2x))$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos(2x))$$

Exemplo

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx$$

## 2º Caso – Exemplos

Ambos os expoentes são pares.

$$\int \sin^4(x) \, dx$$

$$\int \sin^2(x) \cos^2(x) \, dx$$

$$\int \cos^2(x) \sin^4(x) \, dx$$

$$\int \cos^6(x) \, dx$$

Neste caso, os expoentes são inteiros positivos.



# Produto de Tangentes e Secantes

$$\int \tan^k(x) \sec^n(x) dx$$

Em algumas destas integrais, a técnica para resolução é similar a utilizada para resolver o produto de senos e cossenos.

Fórmulas básicas

$$\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + c$$

$$\int \tan(x) \cdot \sec(x) dx = \sec(x) + c$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

## Um Caso Simples

Quando o expoente da secante é igual a 2,  
a substituição  $u = \tan x$  permite escrever

$$\int \tan^k(x) \sec^2(x) dx = \int u^k du$$

Quando o expoente da secante é par,  
o problema pode ser reduzido ao caso acima usando

$$\sec^{2n+2}(x) = \sec^2(x) \cdot (1 + \tan^2(x))^n$$

## Outro Caso Simples

Quando o expoente da tangente é igual a 1,  
a substituição  $u = \sec x$  permite escrever ( $n \geq 1$ )

$$\int \tan(x) \sec^n(x) dx = \int u^{n-1} du$$

Quando o expoente da tangente é ímpar,  
o problema pode ser reduzido ao caso acima usando

$$\tan^{2n+1}(x) = \tan(x) \cdot (\tan^2(x))^n = \tan(x) \cdot (\sec^2(x) - 1)^n$$

## Um Caso Mais Díficil

Quando o expoente da tangente é par  
e o expoente da secante é ímpar,  
a integral pode ser resolvida utilizando  
o método de integração por partes

Exemplo

$$\int \tan^2(x) \sec(x) \, dx$$

# Integral de uma Potência da Função Tangente

Fórmula de redução ( $k > 1$ )

$$\int \tan^k(x) dx = \frac{1}{k-1} \tan^{k-1}(x) - \int \tan^{k-2}(x) dx$$

Isto reduz o problema para a integral da  $\tan(x)$  (se  $k$  for ímpar) ou a integral de 1 ( $k$  par).

Demonstração: use a identidade

$$\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$$

# Potências da Tangente – Exemplos

Usando a fórmula de redução.

$$\begin{aligned}\int \tan^3(x) \, dx &= \frac{1}{2} \tan^2(x) - \int \tan(x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \tan^2(x) + \ln(\cos(x)) + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \tan^4(x) \, dx &= \frac{1}{3} \tan^3(x) - \int \tan^2(x) \, dx \\ &= \frac{1}{3} \tan^3(x) - \tan(x) + x + c\end{aligned}$$

# Integral de uma Potência da Função Secante

$$\int \sec^k(x) \, dx$$

Expoente  $k = 2$  é uma fórmula básica

$$\int \sec^2(x) \, dx = \tan(x) + c$$

Expoente par ( $k > 2$ ): pode ser reduzido ao caso acima e a integral do produto de potências da tangente com a secante sendo o expoente da secante par (caso já visto). Exemplo

$$\int \sec^4(x) \, dx = \int (1 + \tan^2(x)) \cdot \sec^2(x) \, dx$$

# Potências da Secante – Expoente ímpar

Expoente  $k = 1$  é uma fórmula básica

$$\int \sec(x) \, dx = \ln(\sec(x) + \tan(x)) + c$$

Expoente ímpar: é um caso mais difícil mas pode ser resolvido usando integração por partes (combinado com outras técnicas), reduzindo o expoente da secante.

Exemplo

$$\int \sec^3(x) \, dx = 1/2 \sec(x) \cdot \tan(x) + 1/2 \int \sec(x) \, dx$$



# Potências da Secante – Fórmula de Redução

Expoente ( $n > 1$ ) inteiro positivo

$$\int \sec^n(x) \, dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2}(x) \cdot \tan(x) + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(x) \, dx$$

Demonstração usando integração por partes,  
similar a integração de  $\sec^3 x$ .

## Observação

O problema de resolver a integral do produto de uma potência par da tangente por uma potência ímpar da secante é equivalente ao problema de resolver a integral de uma potência ímpar da secante.

Use a identidade  $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$

Exemplo

$$\int \tan^2(x) \sec(x) \, dx = \int \sec^3(x) \, dx - \int \sec(x) \, dx$$

# Referências Bibliográficas

- Thomas, cap 8, seção 4.
- Simmons, cap 10, seção 3.