

Aula 20 – Técnicas de Integração – Integração de Potências e Produtos de Funções Trigonômétricas

Objetivo

Aprender a integrar potências e produtos de funções trigonométricas.

Introdução

Apesar de função ser um conceito relativamente novo, as funções trigonométricas são conhecidas desde a antiguidade, na forma de tabelas.

Para resolver problemas de trigonometria elementar, aprendemos bem cedo os valores de seno e de cosseno de alguns ângulos especiais.

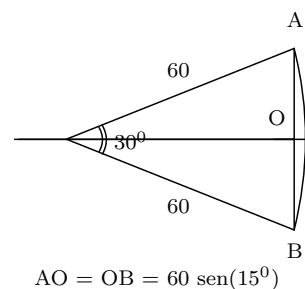
θ	$\text{sen } \theta$	$\text{cos } \theta$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Hiparcos de Nicaea (180 - 125 a.C.) foi quem construiu as primeiras tabelas trigonométricas. Isso lhe rendeu o epíteto de “pai da trigonometria”. Hiparcos era um astrônomo, e foi ele quem organizou o conhecimento de astronomia obtido empiricamente pelos povos que viveram na Mesopotâmia, entre eles os babilônios.

A tabela trigonométrica que ele construiu associa a cada ângulo inteiro o comprimento da corda que este ângulo determina em um círculo de raio igual a 60. Por exemplo, sua tabela indicaria que

$$\text{corda}(30^\circ) = AB = 2 \times 60 \times \text{sen}(15^\circ) \approx 31,058.$$

Nesta aula, estaremos lidando, principalmente, com funções trigonométricas. É um bom momento para você fazer uma revisão desse conteúdo clássico tão importante. Rever as definições, as principais propriedades e,



principalmente, as chamadas identidades trigonométricas. Você já tem muito material sobre esses temas. Reveja-o.

Por exemplo, você deve saber que $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ são definidas para todo $x \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\}$ além disso, a identidade trigonométrica

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1} \quad (1)$$

gera

$$\boxed{\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x.} \quad (2)$$

A integral $\int \cos^2 x \, dx$.

Vamos começar vendo a parte de integrais com dois exemplos típicos.

Exemplo 20.1

Calcule $I_1 = \int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$ e $I_2 = \int \cos^2 x \, dx$.

No caso de I_1 , a substituição simples resolve o problema.

$$I_1 = \int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C.$$

Para integrar I_2 , podemos usar a integração por partes, como foi sugerido na aula anterior.

Fazendo $\begin{cases} u = \cos x \\ x dv = \cos x \, dx \end{cases}$ temos $\begin{cases} du = -\operatorname{sen} x \, dx \\ v = \operatorname{sen} x \end{cases}$ e obtemos

$$I_2 = \int \cos^2 x \, dx = \cos x \operatorname{sen} x + \int \operatorname{sen}^2 x \, dx.$$

Se você tentar prosseguir aplicando a integração por partes, voltará à estaca zero. Aqui é necessária uma outra coisa, a identidade trigonométrica fundamental, na forma $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$. Assim,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \cos^2 x \, dx = \cos x \operatorname{sen} x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx \\ I_2 &= \cos x \operatorname{sen} x + \int dx - I_2 \\ 2 I_2 &= \cos x \operatorname{sen} x + x + C_1 \\ I_2 &= \int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cos x \operatorname{sen} x + C. \end{aligned}$$

Algumas identidades trigonométricas

Você observou como foi providencial o uso da identidade trigonométrica. Realmente, elas são muito úteis. Veremos o cálculo dessa última integral feito de outra maneira. Antes, porém, precisaremos de outras identidades trigonométricas. As fórmulas

$$\boxed{\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b} \quad (3)$$

$$\boxed{\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} \quad (4)$$

são particularmente conhecidas. Fazendo $a = b = x$ em (4), obtemos

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x.} \quad (5)$$

Usando a identidade trigonométrica fundamental (1), derivamos as seguintes fórmulas.

$$\begin{aligned} \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x &= \cos 2x \\ \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) &= \cos 2x \\ 2 \cos^2 x &= 1 + \cos 2x \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x} \quad (6)$$

e, similarmente,

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x} \quad (7)$$

que são válidas para todo $x \in \mathbb{R}$.

Podemos usá-las para fazer as seguintes integrais:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.\end{aligned}$$

Vamos comparar as duas respostas obtidas para $\int \cos^2 x \, dx$:

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cos x \sin x + C. \\ \int \cos^2 x \, dx &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C.\end{aligned}$$

Qual delas é a correta? Bem, na verdade, ambas as respostas estão certas. Veja, fazendo $a = b = x$ na fórmula (3), obtemos

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$

(8)

Integrais do tipo $\int \sin^n x \cos^m x \, dx$.

Vamos lidar com integrais de funções definidas pelo produto de potências das funções $y = \sin x$ e $y = \cos x$. Na verdade, mostraremos, através de exemplos, como as técnicas que desenvolvemos até agora podem ser propriamente usadas.

Há duas situações que devemos diferenciar.

1. Pelo menos uma das duas potências é um inteiro ímpar.

$$I_1 = \int \sin^2 x \cos x \, dx; \quad I_2 = \int \cos^3 x \, dx.$$

2. Todas as potências são números pares.

$$I_3 = \int \cos^4 x \, dx; \quad I_4 = \int \cos^2 x \sin^2 x \, dx.$$

Como veremos, cada caso demanda uma estratégia diferente. As do tipo 1 são menos trabalhosas. Elas podem ser resolvidas por substituição simples. Veja como.

Exemplo 20.2

Cálculo de $I_1 = \int \sin^2 x \cos x \, dx$ e de $I_2 = \int \cos^3 x \, dx$.

Para resolver I_1 , fazemos a substituição $u = \sin x$, $du = \cos x \, dx$ e obtemos

$$I_1 = \int \sin^2 x \cos x \, dx = \int u^2 \, du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

No caso I_2 , usamos a identidade trigonométrica (1) na forma $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ para reescrever

$$\cos^3 x = (\cos^2 x)(\cos x) = (1 - \sin^2 x)(\cos x) = \cos x - \sin^2 x \cos x.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_2 = \int \cos^3 x \, dx &= \int (\cos x - \sin^2 x \cos x) \, dx = \\ &= \int \cos x \, dx - \int \sin^2 x \cos x \, dx = \\ &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

Assim, podemos sempre “reservar” uma cópia de $\sin x$ ou de $\cos x$ para compor o du e a identidade (1) para rearranjar a função e fazer a substituição simples.

No caso de todas as potências serem pares, essa tática não se aplica. Aqui teremos de usar as chamadas *fórmulas de redução*, que são obtidas usando a integração por partes. Antes de olharmos para fórmulas gerais, vejamos como a idéia funciona em dois casos mais simples.

Exemplo 20.3

Cálculo de $I_3 = \int \cos^4 x \, dx$ e de $I_4 = \int \cos^2 x \sin^2 x \, dx$.

Para calcular I_3 , vamos usar a integração por partes.

$$\begin{cases} u = \cos^3 x \\ dv = \cos x \, dx \end{cases} \implies \begin{cases} du = -3 \cos^2 x \sin x \, dx \\ v = \sin x. \end{cases}$$

$$\text{Assim, } \int \cos^4 x \, dx = \cos^3 x \sin x + 3 \int \cos^2 x \sin^2 x \, dx.$$

Agora, aquele truque que já usamos antes: como $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$,

temos

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \, dx &= \cos^3 x \, \text{sen } x + 3 \int (\cos^2 x - \cos^4 x) \, dx \\ \int \cos^4 x \, dx &= \cos^3 x \, \text{sen } x + 3 \int \cos^2 x \, dx - 3 \int \cos^4 x \, dx \\ 4 \int \cos^4 x \, dx &= \cos^3 x \, \text{sen } x + 3 \int \cos^2 x \, dx \\ \int \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \cos^3 x \, \text{sen } x + \frac{3}{4} \int \cos^2 x \, dx.\end{aligned}$$

Como já calculamos a integral $\int \cos^2 x \, dx$ anteriormente, podemos concluir:

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \cos^3 x \, \text{sen } x + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cos x \, \text{sen } x \right) + C \\ \int \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \cos^3 x \, \text{sen } x + \frac{3x}{8} + \frac{3}{8} \cos x \, \text{sen } x + C.\end{aligned}$$

Você pode usar o “teste da derivada” para certificar-se de que os cálculos estão corretos.

Para calcular I_4 , basta usar a identidade trigonométrica fundamental para obter

$$I_4 = \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x) \, dx = \int \cos^2 x \, dx - \int \cos^4 x \, dx.$$

Agora, usando os cálculos que acabamos de fazer, temos

$$I_4 = \int \cos^2 x \, \text{sen}^2 x \, dx = \frac{x}{8} + \frac{1}{8} \cos x \, \text{sen } x - \frac{1}{4} \cos^3 x \, \text{sen } x + C.$$

Fórmula de redução para $\int \cos^n x \, dx$ e $\int \text{sen}^n x \, dx$

Assim como usamos a integração por partes e o truque com a identidade trigonométrica fundamental para calcular $\int \cos^4 x \, dx$, podemos obter a seguinte fórmula, chamada de *fórmula de redução*:

$$\boxed{\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \, \text{sen } x + \frac{(n-1)}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx.} \quad (9)$$

Exercício 1. Use a fórmula de redução para calcular $\int \cos^3 x \, dx$.

De maneira análoga obtemos a fórmula de redução para senos:

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{(n-1)}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx. \quad (10)$$

Exercício 2. Use a fórmula de redução para calcular $\int \sin^4 x \, dx$.

Argumentos diferentes

As fórmulas (3) e (4) podem ser usadas para derivar as seguintes identidades trigonométricas:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} \left(\sin(a-b)x + \sin(a+b)x \right) \quad (11)$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2} \left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x \right) \quad (12)$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2} \left(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x \right) \quad (13)$$

Veja, por exemplo, como podemos obter a primeira delas. De (3) concluímos que

$$\begin{aligned} \sin(a-b)x &= \sin(ax - bx) = \\ &= \sin ax \cos bx - \cos ax \sin bx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sin(a+b)x &= \sin(ax + bx) = \\ &= \sin ax \cos bx + \cos ax \sin bx. \end{aligned}$$

Somando as duas igualdades, obtemos

$$\sin(a-b)x + \sin(a+b)x = 2 \sin ax \cos bx.$$

Essas fórmulas são úteis para abordar integrais que envolvam funções trigonométricas com diferentes argumentos, reduzindo-as a integrais do tipo das que estudamos. Veja o exemplo seguinte.

Exemplo 20.4

Cálculo de $\int \sin x \sin 2x \, dx$.

Usando a fórmula (12), temos

$$\begin{aligned} \int \sin x \sin 2x \, dx &= \int \frac{1}{2} \left(\cos(1-2)x - \cos(1+2)x \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 3x \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{6} \sin 3x + C. \end{aligned}$$

Como a função $f(x) = \cos x$ é uma função par ($f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$), podemos trocar $\cos(-x)$ por $\cos(x)$.

Comentários gerais

As técnicas usadas são substituição simples ou integração por partes, bem como as fórmulas de redução. O problema é saber identificar qual técnica deve ser usada em cada caso. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentaremos um resumo com as principais estratégias.

Considere a seguinte integral:

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx$$

	Sugestão	Fórmulas úteis
m ímpar	Substituição $u = \sin x$ $du = \cos x \, dx$	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
n ímpar	Substituição $u = \cos x$ $du = -\sin x \, dx$	$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
m e n pares	Fórmulas de redução (9) ou (10)	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Caso você esteja lidando com um integrando que tenha argumentos diferentes, use as fórmulas (11), (12) ou (13) para reduzir toda a expressão a um único argumento. Veja o exemplo:

$$\sin 5x \sin x = \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 6x).$$

Exercícios

Começamos com as soluções dos exercícios sugeridos ao longo da aula.

Exercício 1.

Use a fórmula de redução para calcular $\int \cos^3 x \, dx$.

Solução:

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \, dx &= \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \int \cos x \, dx = \\ &= \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \sin x + C.\end{aligned}$$

Exercício 2.

Use a fórmula de redução para calcular $\int \sin^4 x \, dx$.

Solução: Vamos usar a fórmula (10) com $n = 4$.

$$\int \sin^4 x \, dx = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \int \sin^2 x \, dx.$$

Agora, podemos usar a integral de $\sin^2 x$ para completar o exercício:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \, dx &= -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x \right) + C \\ &= -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3x}{8} - \frac{3}{8} \sin x \cos x + C.\end{aligned}$$

Exercício 3.

Calcule $\int \cos^{1/2} x \sin^3 x \, dx$.

Solução: Como o expoente de $\sin x$ é 3, um número ímpar, vamos re-escrever $\sin^3 x$ como $(\sin^2 x)(\sin x)$, usar um dos fatores para compor o $du = -\sin x \, dx$ e fazer a substituição $u = \cos x$. Além disso, usaremos a identidade trigonométrica fundamental para escrever $\sin^2 x$ em termos de $\cos x$. Observe que esta técnica funciona mesmo quando o expoente de $y = \cos x$ não é um número inteiro. Assim,

$$\begin{aligned}\int \cos^{1/2} x \sin^3 x \, dx &= \int \cos^{1/2} x (\sin^2 x) \sin x \, dx = \\ &= \int \cos^{1/2} x (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \\ &= \int \cos^{1/2} x \sin x \, dx - \int \cos^{5/2} x \sin x \, dx = \\ &= -\frac{2}{3} \cos^{3/2} x + \frac{2}{7} \cos^{7/2} x + C.\end{aligned}$$

4. Calcule as seguintes integrais:

a) $\int \cos^5 x \sin x \, dx.$

b) $\int_0^{\pi/6} \cos^2 x \, dx.$

c) $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx.$

d) $\int \sin^2 2\theta \cos 2\theta \, d\theta.$

e) $\int_0^{\pi/3} \cos^3 x \, dx.$

f) $\int \cos^6 2x \, dx.$

g) $\int \sin^2 x \cos 2x \, dx.$

h) $\int (\cos t - \cos 2t)^2 \, dt.$

i) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 \frac{x}{2} \, dx.$

j) $\int \sin^{-3} x \cos^3 x \, dx.$

5. Calcule as seguintes integrais:

a) $\int \sin \frac{x}{2} \sin x \, dx.$

b) $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \cos 3x \, dx.$

c) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x \cos^2 x \, dx.$

d) $\int \cos 7x \cos 3x \, dx.$

Auto-avaliação

Uma palavra final a respeito deste conteúdo. Os exercícios não são difíceis, mas trabalhosos. Você precisará de várias fórmulas e nem sempre nos lembramos de cada uma delas. No entanto, há a necessidade de você saber identificar os casos mais simples e saber usar as fórmulas de recorrência apresentadas.