

Lista 1- Limite e Continuidade

1 - Calcule os limites:

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 7x - 4)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 12x + 36}{x - 5}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -3} \log(x^4 - 3x + 10)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \pi} \cos x \sin(x + \pi)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{5x^2 + 3x + 2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\pi} e^{\sin x}$$

2 - Para cada função a seguir, calcule $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, caso exista.

$$(a) f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & \text{se } x < 0 \\ 2x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{com } a = 0.$$

$$(b) f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} \quad \text{com } a = 4.$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 1, & \text{se } x < 2 \\ 2 - x, & \text{se } x > 2 \end{cases} \quad \text{com } a = 2.$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{se } x < -1 \\ -x, & \text{se } x > -1 \\ 0, & \text{se } x = -1 \end{cases} \quad \text{com } a = -1.$$

$$(e) f(x) = (x + 3) \frac{|x + 2|}{(x + 2)} \quad \text{com } a = -2.$$

$$(f) f(x) = \frac{\sqrt{2x}(x - 1)}{|x - 1|} \quad \text{com } a = 1.$$

3 - Use o Teorema do Confronto para mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\sqrt{x^3 + x^2} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{x} \right) \right] = 0.$$

4 - Seja f uma função tal que $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$, para $x \geq 0$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

5 - Seja g uma função tal que $2x \leq g(x) \leq x^4 - x^2 + 2$, para todo x . Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

6 - Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cos \left(\frac{2}{x} \right) = 0$.

7 - Considere a função

$$f(x) = \frac{2x + 12}{|x + 6|}$$

a) Esboce o gráfico de f .

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow -6^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -6^-} f(x)$.

c) Existe o $\lim_{x \rightarrow -6} f(x)$? Justifique.

8 - Seja $f(x) = 2x + |x - 3|$. Existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$? Justifique.

9 - Considere a função

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$$

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

10 - Calcule os limites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 14}{x - 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + x - 6}{x + 2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x^3 + 23x^2 + 24x}{x^2 - x - 12}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 65x^2 + 63x - 1}{x + 1}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x - 2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^3 - 13x^2 + 17x + 12}{x^2 - 6x + 8}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - x^3 - 5x^2 + 5}{x^2 + x - 2}$$

$$i) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a + h)^2 - a^2}{h}$$

$$j) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a + h)^3 - a^3}{h}$$

$$k) \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 - 1}{t - 1}$$

$$l) \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^5 - 1}{t - 1}$$

11 - Calcule os limites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{16 - x} - 4}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{x - 27}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 9x}{\sqrt{x} - 3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x^3} - 1}{\sqrt[6]{x} - 1}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 32} \frac{\sqrt[5]{x} - 2}{x - 32}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2(x - 3)} - 2}{x - 5}$$

$$h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{a - \sqrt{a^2 + h}}, (a > 0)$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + x} - 3}{x}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x + 1} - 3}{x - 2}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{4}}{x + 4}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{1 - x}}{x}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x-2}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{4}}{x+4}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x+1}}$$

$$r) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x^2 - 1}$$

$$s) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x-1}$$

$$t) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5} - 2}{x^2 - 1}$$

12 - Calcule

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 3x + 2)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (5 - 4x + x^2 - x^5)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 + 2x + 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x + 3$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 6x + 1}{6x^3 + 2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 6x + 1}{6x^2 + x + 3}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 7x - 3}{x^4 - 2x + 3}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x+1}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2x + 3}{3x^4 + 7x - 1}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-x}{3+2x}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2-2}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+x}{3+x^2}$$

13 - Calcule

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{x+3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x+3}}{2x-1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^3+x+2}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3+x^2+4}}{\sqrt{x^3+x-1}}$$

$$\begin{array}{ll}
e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x + 10} & f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + x + 1}}{x^2 - 5} \\
g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}}}{x} & h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}}} \\
i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 + x} - 3x & j) \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 + 2x} \\
k) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1} & l) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1} \\
m) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}} & n) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + x^2}{2x - x^2}
\end{array}$$

14 - Calcule

$$\begin{array}{ll}
a) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5}{3 - x} & b) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4}{x - 3} \\
c) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{4}{2x - 1} & d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 1}{x} \\
e) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - 3}{x^2} & f) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x^2 - x} \\
g) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x^2 - x} & h) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{3x + 1}{4x^2 - 1} \\
i) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + 3}{x^2 - 1} & j) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 3}{x^2 - 1} \\
k) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9} & l) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x + 1}{x^2 + x} \\
m) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 1}{x^2 + x} & n) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x - 5}{x^2 + 3x - 4} \\
o) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} & p) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2 - 4}{1 - x^2}
\end{array}$$

15 - Calcule usando os limites fundamentais.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^4 x}{x^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x \sec x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \sec x \cdot \operatorname{cosec} x)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

16 - Encontre as assíntotas ao gráfico da função:

$$a) f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$b) f(x) = \frac{3x}{x - 1}$$

$$c) f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x - 2}$$

$$d) f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$$

17 - Verifique se cada função a seguir é contínua no ponto a indicado:

$$a) f(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{se } x \leq 1 \\ 4, & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad \text{em } a = 1.$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } x < 2 \\ x - 5, & \text{se } x > 2 \\ 0, & \text{se } x = 2 \end{cases} \quad \text{em } a = 2.$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{se } x < 0 \\ \frac{\operatorname{tg} x}{x}, & \text{se } x > 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{com } a = 0.$$

$$d) f(x) = \begin{cases} x^2 - 8, & \text{se } x < 3 \\ \frac{\text{sen}(x-3)}{x-3}, & \text{se } x > 3 \\ 1, & \text{se } x = 3 \end{cases} \quad \text{com } a = 3.$$

$$e) f(x) = \begin{cases} x - x^2, & \text{se } x < -2 \\ x^3 + 2, & \text{se } x > -2 \\ 3, & \text{se } x = -2 \end{cases} \quad \text{com } a = -2.$$

18 - Determine o valor de L para que as funções abaixo sejam contínuas.

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2}, & \text{se } x \neq 2 \\ L, & \text{se } x = 2 \end{cases} \quad \text{em } p = 2.$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}, & \text{se } x \neq 3 \\ L, & \text{se } x = 3 \end{cases} \quad \text{em } p = 3.$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{10}}, & \text{se } x \neq 5 \\ L, & \text{se } x = 5 \end{cases} \quad \text{com } p = 5.$$

19 - Determine os valores de a e b para que a função seja contínua para qualquer x .

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x < 3 \\ 2ax, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < -2 \\ bx^2, & \text{se } x \geq -2 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} a^2x - 2a, & \text{se } x \geq 2 \\ 12, & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} -2, & \text{se } x \leq -1 \\ ax - b, & \text{se } -1 < x < 1 \\ 3, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} ax + 2b, & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + 3a - b, & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 3x - 5, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

20 - Mostre que a função $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$ possui uma raiz no intervalo $(1, 2)$.

21 - Sejam $f(x) = e^x$ e $g(x) = -x^2 + 4$. Mostre que existe $x \in (0, 2)$ tal que $f(x) = g(x)$.

22 - Prove que a equação $\operatorname{sen} x - \ln x = 0$ possui uma solução no intervalo $(1, e)$, onde e é a constante de Euler.

Gabarito

1. a) 6 b) $-\frac{16}{3}$ c) 2 d) 0 e) 4 f) 1
2. (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$ e não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 (b) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$.
 (c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -5$ e não existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
 (d) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$.
 (e) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -1$ e não existe $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.
 (f) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \sqrt{2}$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\sqrt{2}$ e não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
4. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 7$.
5. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$.
7. (b) $\lim_{x \rightarrow -6^+} f(x) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow -6^-} f(x) = -2$. (c) Não existe $\lim_{x \rightarrow -6} f(x)$.
8. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$.
9. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.
10. a) 9 b) 0 c) -7 d) -3 e) -64 f) 20 g) $\frac{9}{2}$ h) $-\frac{8}{3}$
 i) $2a$ j) $3a^2$ k) 4 l) 5
11. a) $-\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{27}$ c) 54 d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{9}{2}$ f) $\frac{1}{80}$ g) $\frac{1}{2}$ h) $-2a$
 i) $\frac{2}{3}$ j) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ k) $\frac{1}{6}$ l) 2 m) $\frac{2}{3}$ n) $-\frac{1}{16}$ o) 1 p) $\frac{1}{128}$
 q) $\sqrt[3]{3}$ r) $\frac{1}{4}$ s) $\frac{1}{12}$ t) $\frac{1}{8}$
12. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) $+\infty$ e) $\frac{5}{6}$ f) $+\infty$ g) 0
 h) 2 i) $\frac{1}{3}$ j) $-\frac{1}{2}$ k) 0 l) 0

13. a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) 1 e) 1 f) 0 g) -1 h) 1 i) $\frac{1}{6}$
j) -1 k) 3 l) -3 m) 1 n) -1

14. a) $-\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) $-\infty$ g) $+\infty$
h) $+\infty$ i) $-\infty$ j) $+\infty$ k) $+\infty$ l) $+\infty$ m) $+\infty$ n) $-\infty$
o) $+\infty$ p) $-\infty$

15. a) 2 b) 1 c) 1 d) 1 e) 3 f) 1 g) 0 h) 3
i) 1 j) 0

16.a) Assíntota horizontal: $y = 0$ e Assíntotas verticais: $x = 1$ e $x = -1$.

b) Assíntota horizontal: $y = 3$ e Assíntota vertical: $x = 1$.

c) Assíntota horizontal: $y = 0$ e Assíntotas verticais: $x = 1$ e $x = -2$.

d) Assíntota horizontal: Não existe, e Assíntota vertical: $x = -1$.

17. a) f é contínua em 1 b) f não é contínua em 2 c) f é contínua em 0

d) f é contínua em 3 e) f não é contínua em -2

18. (a) 12 (b) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (c) $\sqrt{2}$

19. a) $a = \frac{4}{3}$ (b) $b = -\frac{1}{2}$ (c) $a = -2$ ou $a = 3$ (d) $a = \frac{5}{2}$ e $b = -\frac{1}{2}$
(e) $a = -\frac{3}{2}$ e $b = -\frac{3}{2}$

21. Dica: Considere a função $h(x) = f(x) - g(x)$.