	Universidade Federal de Campina Grande - UFCG Centro de Ciências e Tecnologia - CCT Unidade Acadêmica de Matemática - UAMat	
DISCIPLINA:	Cálculo Diferencial e Integral II	PERÍODO: 2021.2
CURSO:		TURNO: MANHÃ
PROFESSOR:		DATA: 15/06/2022
ALUNO(A):		NOTA:

AVALIAÇÃO 1

ATENÇÃO: **Desligue e guarde qualquer aparelho eletrônico. Não remova o grampo da prova! Questões sem os cálculos serão desconsideradas.**

QUESTÃO OBJETIVA (6 pontos) Calcule as integrais e marque a alternativa com a resposta correta.

---

1. (1,5 ponto) $\int_0^{\pi/2} \sin^2(2\theta)\cos^3(2\theta)d\theta$

   (a) 0 (b) π (c) 2π (d) 3π (e) 4π

2. (1,5 ponto) $\int_0^{\pi} 2\pi x(x\sin x)dx$

   (a) 0 (b) π (c) 8π (d) $2\pi(\pi^2+4)$ (e) $2\pi(\pi^2-4)$

3. (1,5 ponto) $\int_0^{1} \frac{2x}{2+x-x^2}dx$

   (a) $\frac{\ln 3}{3}$ (b) $\ln 2$ (c) $\frac{2\ln 2}{3}$ (d) $\ln 3$ (e) 0

4. (1,5 ponto) $\int_0^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}dx$

   (a) $\frac{\pi}{4}$ (b) π (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) 3π (e) 0

QUESTÕES DISCURSIVAS (4 pontos)

---

5. (2 pontos) Calcule a integral $\int \frac{x^2}{(x-1)(x^2+2x+1)}dx$.

6. (2 pontos) Analise a convergência das integrais.

   (a) $\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}+\sin x}dx$ (b) $\int_4^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}-1}dx$

BOA PROVA!!!

1) Temos 1

$$\int \operatorname{sen}^2(2\theta)\cos^3(2\theta)\,d\theta = \int \cos^2(2\theta)\operatorname{sen}^2(2\theta)\cos(2\theta)\,d\theta$$

$$= \int (1-\operatorname{sen}^2(2\theta))\operatorname{sen}^2(2\theta)\cos(2\theta)\,d\theta$$

$$= \int (1-u^2)\,u^2\,\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int (u^2-u^4)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^3}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{u^5}{5} = \frac{u^3}{6} - \frac{u^5}{10}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^3 2\theta}{6} - \frac{\operatorname{sen}^5 2\theta}{10} + C$$

Substituição

$u = \operatorname{sen} 2\theta$

$du = 2\cos 2\theta\,d\theta$

$\cos 2\theta\,d\theta = \dfrac{du}{2}$

Logo,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(2\theta)\cos^3(2\theta)\,d\theta = \left[\frac{\operatorname{sen}^3 2\theta}{6} - \frac{\operatorname{sen}^5 2\theta}{10}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^3\pi}{6} - \frac{\operatorname{sen}^5\pi}{10} - \frac{\operatorname{sen}^3 0}{6} + \frac{\operatorname{sen}^5 0}{10} = 0 - 0 - 0 + 0$$

$= 0$ (Resposta (a))

2) Inicialmente, note que $\int 2\pi x(x\operatorname{sen} x)\,dx =$ $= 2\pi\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$. Assim, vamos usar o método tabular no nosso cálculo. Sendo $f(x) = x^2$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$, temos

$f(x)$ e suas derivadas		$g(x)$ e suas integrais
x^2	(+)	$\operatorname{sen} x$
$2x$	(−)	$-\cos x$
2	(+)	$-\operatorname{sen} x$
0		$\cos x$

(2)

Logo,

$$\int 2\pi x (x \operatorname{sen} x) dx = 2\pi \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$= 2\pi \left[-x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x \right] + C$$

Portanto,

$$\int_0^{\pi} 2\pi x (x \operatorname{sen} x) dx = 2\pi \left[-x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x \right]_0^{\pi}$$

$$= 2\pi \left[-\pi^2 \underbrace{\cos \pi}_{=-1} + 2\pi \underbrace{\operatorname{sen} \pi}_{=0} + 2 \underbrace{\cos \pi}_{=-1} + \underbrace{0^2}_{=0} \cos 0 - 2 \cdot 0 \underbrace{\operatorname{sen} 0}_{=0} - 2\underbrace{\cos 0}_{=1} \right]$$

$$= 2\pi \left[\pi^2 - 2 - 2 \right] = 2\pi \left[\pi^2 - 4 \right] \quad \text{(Resposta (e))}$$

3) Vamos utilizar frações parciais. Temos

$$\frac{2x}{2 + x - x^2} = \frac{2x}{-(x^2 - x - 2)} = \frac{-2x}{x^2 - x - 2} = \frac{-2x}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1}$$

Pelo Método de Heaviside, obtemos

$$A = \left. \frac{-2x}{x+1} \right|_{x=2} = \frac{-2 \cdot 2}{2 + 1} = -\frac{4}{3}$$

$$B = \left. \frac{-2x}{x-2} \right|_{x=-1} = \frac{(-2)(-1)}{-1-2} = -\frac{2}{3}$$

Logo,

$$\int \frac{2x}{2 + x - x^2} dx = \int \frac{(-4/3)}{x - 2} dx + \int \frac{(-2/3)}{x + 1} dx$$

$$= -\frac{4}{3} \ln |x - 2| - \frac{2}{3} \ln |x + 1| + C$$

3

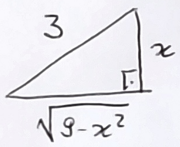
Portanto,

$$\int_0^1 \frac{2x}{2+x-x^2} = \left[-\frac{4}{3}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln|x+1|\right]_0^1$$

$$= -\frac{4}{3}\overbrace{\ln 1}^{=0} - \frac{2}{3}\ln 2 + \frac{4}{3}\ln 2 + \frac{2}{3}\overbrace{\ln 1}^{=0}$$

$$= \frac{2}{3}\ln 2 \qquad \text{(Resposta (c))}$$

4) Para resolver $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ vamos fazer uma substituição trigonométrica. Temos



- $\text{sen}\,\theta = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow dx = 3\cos\theta\, d\theta$

  para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

- $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9 - 9\,\text{sen}^2\theta} = 3\sqrt{\cos^2\theta} = 3|\cos\theta|$

  $= 3\cos\theta$

Logo,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{3\cos\theta\, d\theta}{3\cos\theta} = \int d\theta = \theta$$

$$= \text{arc sen}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

e, portanto

$$\int_0^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \text{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)\Big|_0^{3/2} = \text{arc sen}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) - \text{arc sen}\, 0$$

$$= \text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right) - \text{arc sen}\, 0 = \frac{\pi}{6} - 0$$

$$= \frac{\pi}{6} \qquad \text{(Resposta (c))}$$

5) Por frações parciais, temos (4)

$$\frac{x^2}{(x-1)(x^2+2x+1)} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 = A(x^2+2x+1) + B(x^2-1) + Cx - C$$

$$= Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 - B + Cx - C$$

$$= (A+B)x^2 + (2A+C)x + (A-B-C)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B = 1 \quad (I) \\ 2A + C = 0 \Rightarrow C = -2A \\ A-B-C = 0 \Rightarrow A - B + 2A = 0 \Rightarrow 3A - B = 0 \quad (II) \end{cases}$$

De (I) e (II) vem

$$\begin{cases} A + \cancel{B} = 1 \\ 3A - \cancel{B} = 0 \end{cases}$$

$$4A = 1 \Rightarrow A = 1/4 \quad e \quad 3 \cdot \frac{1}{4} - B = 0 \Rightarrow B = \frac{3}{4}$$

Substituindo A e B em $A-B-C=0$, vem $\frac{1}{4} - \frac{3}{4} - C = 0$

$\Rightarrow C = -1/2$. Portanto

$$\int \frac{x^2}{(x-1)(x^2+2x+1)}dx = \int \frac{1/4}{x-1}dx + \int \frac{3/4}{x+1}dx + \int \frac{(-1/2)}{(x+1)^2}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int (x+1)^{-2}dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{3}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}(-1)(x+1)^{-1}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{3}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{2x+2} + C$$

6)(a) Note que $\sqrt{x} + \operatorname{sen} x \geq \sqrt{x}$, para todo $x > 0$, donde (5)

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \operatorname{sen} x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ para todo } x > 0.$$

Como

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^{\pi} x^{-1/2}\,dx = \lim_{a \to 0^+} \left[2x^{1/2}\right]_a^{\pi} =$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \left[2\sqrt{\pi} - 2\sqrt{a}\right] = 2\sqrt{\pi}$$

então, pelo Teste da Comparação Direta, $\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x} + \operatorname{sen} x}\,dx$ é convergente.

6) (b) Sejam $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$ e $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Temos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \cdot \sqrt{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 - 1/\sqrt{x}} = 1 > 0$$

e

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_4^{b} x^{-1/2}\,dx = \lim_{b \to \infty} \left[2x^{1/2}\right]_4^{b} =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[2\sqrt{b} - 2\sqrt{4}\right] = \infty$$

Como $\int_4^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge, segue pelo Teste da Comparação no limite, que $\int_4^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x} - 1}\,dx$ também diverge.