

Integrar Envolvendo Seno e Cosseno

$$a) \int \text{sen } x \, dx = -\text{cos } x + C$$

$$b) \int \text{cos } x \, dx = \text{sen } x + C$$

$$c) \int \text{sen } x \cdot \text{cos } x \, dx \Rightarrow \begin{array}{l} u = \text{sen } x \\ du = \text{cos } x \, dx \end{array} \quad \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\text{sen}^2 x}{2} + C$$

$$d) \int \sin^2 x \, dx$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ // Essa identidade seria útil se o expoente fosse ímpar

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ // Vamos precisar dessa identidade

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx - \int \frac{\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{x}{2} = \frac{\sin 2x}{4} + C}$$

$$e) \int \cos^2 x \, dx$$

Como o expoente é par, vamos usar a identidade acima:

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} x + \frac{\sin 2x}{4} + C}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$f_1 \int \sin^2 x \cdot \cos x \, dx$$

Para resolver a integral de todo, vamos usar o método da substituição.

$$u = \sin x$$
$$du = \cos x \, dx$$

$$\int u^2 \, du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$g_1 \int \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$u = \cos x$$
$$du = -\sin x \, dx$$

$$\int u^2 (-du) = -1 \cdot \int u^2 \, du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$$L1 \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$$

Primeiramente, vamos precisar da identidade fundamental, pois com ela deixamos tudo em função do cosseno ou do seno.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x \, dx = \int \cos^2 x - \cos^4 x \, dx = \int \cos^2 x \, dx - \int \cos^4 x \, dx$$

* Agora, ficamos com a seguinte integral:

$$\int \cos^2 x \, dx - \int \cos^4 x \, dx$$

* Para resolver a integral acima vamos precisar de outra identidade:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx - \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx - \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 \, dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} - \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \underbrace{\cos^2 2x}_{\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}}) \, dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} - \frac{1}{4} \int \left(1 + 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) \, dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} - \frac{1}{4} \int 1 \, dx - \frac{2}{4} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x \, dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} - \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{8} + \frac{x}{8} + \frac{(\sin 4x)}{32} + C$$

$$i) \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\int \sin^2 x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$u = \cos x$$

$$du = -\sin x \, dx$$

$$-\int (1 - u^2) \cdot u^2 \, du = -\int (u^2 - u^4) \, du = -\int u^2 \, du + \int u^4 \, du$$

$$= -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

* Integrals do tipo $\sin^n x \cdot \cos^m x$, com um ímpar e um par:

• (1) Se a substituição gostar do par;

• Tenta deixar tudo em função do par, usando a identidade fundamental

• A outra parte será o du .

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x \cdot (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$u = \sin x$$

$$du = \cos x \, dx$$

$$\int u^2 \cdot (1 - u^2) \, du = \int u^2 - u^4 \, du = \int u^2 \, du - \int u^4 \, du$$

$$\Rightarrow = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

$$R_1 \int \sin^3 x \cdot \cos^3 x \, dx$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \cdot (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$u = \sin x$$

$$du = \cos x \, dx$$

$$\int u^3 \cdot (1 - u^2) \, du$$

- Quando ambos os termos forem ímpares, o 'u' será o seno.
- Deixe tudo em função do seno, usando a identidade fundamental.