Derivadas

A derivada de uma função $f(x)$ é outra função $f^{'}(x)$ ou também denotada por $\frac{dy}{dx}$ que representa a taxa de variação instantânea de y em relação à x em um ponto $y = f(x)$. Geometricamente, a derivada no ponto $x = a$ de uma função $y = f(x)$ é o coeficiente angular $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ da reta tangente ao ponto $(a, f(a))$.

Definição de Derivada

$$\boxed{f^{'}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

A definição de derivada em um determinado ponto $x = a$ nos diz que, quando $x \to a$ a variação de y, ou seja, $\Delta y = f(x) - f(a)$, irá tender a zero, assim como o denominador. Isso em termos geométricos nos mostra que a taxa de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ irá tender a um valor definido quando estes intervalos assumirem valores cada vez mais próximos de zero, mas nunca iguais à zero.

Fazendo $\Delta x = x - a$, temos que quando $x \to a$, $\Delta x \to 0$, substituindo na definição:

$$\boxed{f^{'}(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}}$$

Que de forma genérica pode ser escrita em função de qualquer ponto x:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Onde Δx representa a variação no eixo x e $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ a variação no eixo y.

Continuidade

Se $\exists f^{'}(a)$ então$f(x)$ é contínua em $x = a$. Isso é evidente já que se $f(x)$ não é contínua em $x = a$ haveria inúmeras retas tangentes àquele ponto, o que contradiz a definição de derivada. No entanto, cabe observar que a recíproca desse teorema não é válida, exemplo disso é a função $f(x) = |x|$ no ponto $x = 0$, nesse ponto há várias retas que o tangenciam, embora ela seja contínua nesse ponto.

Regra de L'Hôpital

Seja as funções $f(x)$ e $g(x)$ ambas diferenciáveis em $x = c$, ou seja, c pertence aos domínios das respectivas derivadas, e $g'(c) \neq 0$, $f(c) = g(c) = 0$:

$$\boxed{\begin{gathered}\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\lim\limits_{x\to c}\dfrac{g(x)-g(c)}{x-c}} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} \\ \therefore \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}\end{gathered}}$$

A Regra de L'Hôpital também funciona quando as funções $f(x)$ e $g(x)$ tendem ao infinito à medida que $x \to c$. Às vezes alguns limites necessitam serem adaptados para poderem se enquadrar nos requisitos necessários para o uso de L'Hôpital, algumas das variações são:

Produto Indeterminado

$$\boxed{\text{"}0\,.\,\infty\text{"} \to f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}}$$

Diferença Indeterminada

$$\boxed{\text{"}\infty\text{-}\infty\text{"} \to Manipulação\ Algébrica}$$

Potências Indeterminadas

$$\boxed{"0^0", "\infty^0", "1^\infty" \rightarrow f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln[f(x)]}}$$

Teorema da Função Inversa

$$\boxed{\begin{gathered} y = f^{-1}(x) \rightarrow f(y) = x \\ \frac{d\, f(y)}{dy} = \frac{dx}{dy} \rightarrow f^{'}(y)\,\frac{dy}{dx} = 1 \rightarrow y^{'} = \frac{1}{f^{'}\left(f^{-1}(x)\right)} \\ \therefore \frac{d\, f^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{f^{'}\left(f^{-1}(x)\right)} \end{gathered}}$$

O teorema da função inversa nos diz que a derivada de uma função inversa é igual ao inverso da derivada da função original em relação à função inversa.

Propriedades Operatórias das Derivadas

$$[f(x)+g(x)]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = f'(x)+g'(x)$$
$$\therefore [f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$$

$$[cf(x)]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{cf(x+\Delta x)-cf(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} c\,\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$= c\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = cf'(x)$$
$$\therefore [cf(x)]' = cf'(x)$$

$$f(x) = g(x)h(x) \to f'(x) = [g(x)h(x)]'$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)h(x+\Delta x)-g(x)h(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)h(x+\Delta x)-g(x)h(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x)h(x)}{\Delta x} - \frac{g(x+\Delta x)h(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)h(x+\Delta x)-g(x)h(x)+g(x+\Delta x)h(x)-g(x+\Delta x)h(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)[h(x+\Delta x)-h(x)]+h(x)[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)[h(x+\Delta x)-h(x)]}{\Delta x} + \frac{h(x)[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}$$
$$= h'(x)\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x) + g'(x)\lim_{\Delta x\to 0} h(x) = g(x)h'(x)+h(x)g'(x)$$
$$\therefore [g(x)h(x)]' = g(x)h'(x)+h(x)g'(x)$$

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}\rightarrow g(x)=f(x)h(x)\rightarrow g^{'}(x)=[f(x)h(x)]'$$
$$\rightarrow g^{'}(x)=f(x)h^{'}(x)+f^{'}(x)h(x)=\frac{g(x)}{h(x)}h^{'}(x)+f^{'}(x)h(x)$$
$$\rightarrow f^{'}(x)h(x)=g^{'}(x)-\frac{g(x)}{h(x)}h^{'}(x)$$
$$\rightarrow f^{'}(x)=\frac{g^{'}(x)h(x)-g(x)h^{'}(x)}{[h(x)]^2}$$
$$\therefore\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]^{'}=\frac{g^{'}(x)h(x)-g(x)h^{'}(x)}{[h(x)]^2}$$

$$f(x)=g\big(h(x)\big)\rightarrow f^{'}(x)=\left[g\big(h(x)\big)\right]^{'}$$
$$\begin{cases} g(x)=y \\ h(x)=u(x)\end{cases}\rightarrow\left[y\big(u(x)\big)\right]^{'}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y\Delta u}{\Delta x\Delta u}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$\sim\Delta x\rightarrow 0\ \leftrightarrow\Delta u\rightarrow 0$$
$$\therefore\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$
$$\therefore\left[g\big(h(x)\big)\right]^{'}=\frac{dg(x)}{dh(x)}\frac{dh(x)}{dx}$$

Derivadas Fundamentais

Seja a e c constantes pertencentes aos Reais com $a > 0$ e $a \neq 1$.

$$\frac{d(c)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$
$$\therefore \frac{d(c)}{dx} = 0$$

$$\frac{d(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$y = x \to \Delta y = \Delta x$$
$$\frac{d(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$
$$\therefore \frac{d(x)}{dx} = 1$$

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1} \ (dedução\ por\ Binômio\ de\ Newton)$$

$$\frac{d\ln(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$
$$= \ln \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$
$$\sim \frac{x}{\Delta x} = n \to \frac{1}{n} = \frac{\Delta x}{x} \to \frac{1}{\Delta x} = \frac{n}{x} = n\frac{1}{x}$$
$$\sim \Delta x \to 0 \ \leftrightarrow n \to \infty$$
$$= \ln \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n\frac{1}{x}} = \ln\left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{x}}$$
$$Por\ Definição: e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$$
$$= \ln(e)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln(e) = \frac{1}{x}$$
$$\therefore \frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d\ln(e^x)}{dx} = \frac{dx\ln(e)}{dx} = \frac{d(x)}{dx} = 1$$
$$\rightarrow \frac{d\ln(e^x)}{dx} = \frac{d\ln(e^x)}{d(e^x)}\frac{d(e^x)}{dx} = \frac{1}{e^x}\frac{d(e^x)}{dx}$$
$$\rightarrow \frac{1}{e^x}\frac{d(e^x)}{dx} = 1 \rightarrow \frac{d(e^x)}{dx} = e^x$$
$$\therefore \frac{d(e^x)}{dx} = e^x$$

$$\frac{d\ln(a^x)}{dx} = \frac{dx\ln(a)}{dx} = (x)'\ln(a) + x[\ln(a)]' = \ln(a)$$
$$\rightarrow \frac{d\ln(a^x)}{dx} = \frac{d\ln(a^x)}{d(a^x)}\frac{d(a^x)}{dx} = \frac{1}{a^x}\frac{d(a^x)}{dx}$$
$$\rightarrow \frac{1}{a^x}\frac{d(a^x)}{dx} = \ln(a) \rightarrow \frac{d(a^x)}{dx} = a^x\ln(a)$$
$$\therefore \frac{d(a^x)}{dx} = a^x\ln(a)$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_e(x)}{\log_e(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$
$$\rightarrow \frac{d\log_a(x)}{dx} = \frac{d\frac{\ln(x)}{\ln(a)}}{dx} = \frac{1}{\ln(a)}\frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{\mathrm{x}\,.\ln(a)}$$
$$\therefore \frac{d\log_a(x)}{dx} = \frac{1}{\mathrm{x}\,.\ln(a)}$$

$$\frac{d\sin(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)\cos(\Delta x) + \sin(\Delta x)\cos(x) - \sin(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)\cos(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)\cos(\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}$$

$$= \cos(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)\,[\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} \frac{[\cos(\Delta x) + 1]}{[\cos(\Delta x) + 1]}$$

$$= \cos(x) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)\,[\cos(\Delta x)^2 - 1]}{\Delta x[\cos(\Delta x) + 1]} = \cos(x) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)\,[-\sin^2(\Delta x)]}{\Delta x[\cos(\Delta x) + 1]}$$

$$= \cos(x) + \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{\sin(\Delta x)\sin(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x[\cos(\Delta x) + 1]}$$

$$= \cos(x) - [\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)\sin(\Delta x)}{[\cos(\Delta x) + 1]}]$$

$$= \cos(x) - \left[\frac{\sin(x)\ .\ 0}{2}\right] = \cos(x)$$

$$\therefore \frac{d\sin(x)}{dx} = \cos(x)$$

$$\frac{d\cos(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)\cos(\Delta x) - \sin(x)\sin(\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)\cos(\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x}$$

$$= -\sin(x) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)\,[\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} \frac{[\cos(\Delta x) + 1]}{[\cos(\Delta x) + 1]}$$

$$= -\sin(x) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)\,[\cos^2(\Delta x) - 1]}{\Delta x[\cos(\Delta x) + 1]} = -\sin(x) + \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{\cos(x)\sin^2(\Delta x)}{\Delta x[\cos(\Delta x) + 1]}$$

$$= -\sin(x) - \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)\sin(\Delta x)}{\cos(\Delta x) + 1}\right]$$

$$= -\sin(x) - \left[\frac{\cos(x)\ .\ 0}{2}\right] = -\sin(x)$$

$$\therefore \frac{d\cos(x)}{dx} = -\sin(x)$$

$$\frac{d\ \tan(x)}{dx} = \frac{d\,\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}}{dx} = \frac{[\sin(x)]'\cos(x) - \sin(x)\,[\cos(x)]'}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(\mathrm{x}) + \sin^2(\mathrm{x})}{\cos^2(\mathrm{x})} = \frac{1}{\cos^2(\mathrm{x})} = \sec^2(\mathrm{x})$$

$$\therefore \frac{d\ \tan(x)}{dx} = \sec^2(\mathrm{x})$$

$$\frac{d\cot(x)}{dx} = \frac{d\,\dfrac{1}{\tan(x)}}{dx} = \frac{(1)'\tan(x) - 1[\tan(x)]'}{\tan^2(x)} = -\frac{\sec^2(x)}{\tan^2(x)}$$

$$= -\frac{\dfrac{1}{\cos^2(\mathrm{x})}}{\dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -\csc^2(x)$$

$$\therefore \frac{d\cot(x)}{dx} = -\csc^2(x)$$

$$\frac{d\sec(x)}{dx} = \frac{d\,\dfrac{1}{\cos(x)}}{dx} = \frac{(1)'\cos(x) - 1[\cos(x)]'}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{1}{\cos(x)}\tan(x) = \sec(x)\tan(x)$$

$$\therefore \frac{d\sec(x)}{dx} = \sec(x)\tan(x)$$

$$\frac{d\csc(x)}{dx} = \frac{d\,\dfrac{1}{\sin(x)}}{dx} = \frac{(1)'\sin(x) - 1[\sin(x)]'}{\sin^2(x)} = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$= -\frac{1}{\sin(x)}\cot(x) = -\csc(x)\cot(x)$$

$$\therefore \frac{d\csc(x)}{dx} = -\csc(x)\cot(x)$$

$$\frac{d\ \sin^{-1}(x)}{dx}$$
$$y = \sin^{-1}(x) \rightarrow \sin(y) = x$$
$$\frac{d\ \sin(y)}{dx} = \frac{d(x)}{x} \rightarrow \cos(y)\frac{dy}{dx} = 1 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d\ \sin^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{\cos(y)}$$
$$y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\ \sim\ \cos^2(y) + \sin^2(y) = 1 \rightarrow \cos(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)}$$
$$\sin^2(y) = x^2 \rightarrow\ \cos(y) = \sqrt{1-x^2}$$
$$\therefore \frac{d\ \sin^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d\ \cos^{-1}(x)}{dx}$$
$$y = \cos^{-1}(x) \rightarrow \cos(y) = x$$
$$\frac{d\ \cos(y)}{dx} = \frac{d(x)}{x} \rightarrow -\sin(y)\frac{dy}{dx} = 1 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d\ \cos^{-1}(x)}{dx} = -\frac{1}{\sin(y)}$$
$$y \in [0; \pi]\ \sim\ \cos^2(y) + \sin^2(y) = 1 \rightarrow \sin(y) = \sqrt{1-\cos^2(y)}$$
$$\cos^2(y) = x^2 \rightarrow\ \sin(y) = \sqrt{1-x^2}$$
$$\therefore \frac{d\ \sin^{-1}(x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d\ \tan^{-1}(x)}{dx}$$
$$y = \tan^{-1}(x) \rightarrow \tan(y) = x$$
$$\frac{d\ \tan(y)}{dx} = \frac{d(x)}{x} \rightarrow \sec^2(y)\frac{dy}{dx} = 1 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d\ \tan^{-1}(x)}{dx} = \cos^2(y)$$
$$\sim \tan^2(y) = x^2 \rightarrow \sin^2(y) = x^2\cos^2(y)$$
$$\sim \cos^2(y) + \sin^2(y) = 1 \rightarrow \cos^2(y) = 1 - \sin^2(y)$$
$$\rightarrow \cos^2(y) = 1 - x^2\cos^2(y) \rightarrow \cos^2(y)\,(1+x^2) = 1$$
$$\therefore \cos^2(y) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\therefore \frac{d\ \tan^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d\ \cot^{-1}(x)}{dx}$$
$$y = \cot^{-1}(x) \to \cot(y) = x$$
$$\frac{d\ \cot(y)}{dx} = \frac{d(x)}{x} \to -\csc^2(y)\frac{dy}{dx} = 1 \to \frac{dy}{dx} = \frac{d\ \cot^{-1}(x)}{dx} = -\sin^2(y)$$
$$\sim \cos^2(y) + \sin^2(y) = 1 \to \cos^2(y) = 1 - \sin^2(y)$$
$$\sim \cot^2(y) = x^2 \to \cos^2(y) = x^2 \sin^2(y) \to 1 - \sin^2(y) = x^2 \sin^2(y)$$
$$\to \sin^2(y)\,(1 + x^2) = 1 \to \sin^2(y) = \frac{1}{1 + x^2}$$
$$\therefore \frac{d\ \cot^{-1}(x)}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

$$\frac{d\ \sec^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$
$$\frac{d\ \csc^{-1}(x)}{dx} = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

Derivadas Superiores

$$\boxed{\frac{d^n y}{dx^n} \; ou \; f^n(x)}$$

As derivadas superiores nada mais são do que sucessivas derivadas de uma função, por exemplo, seja a função $f(x)$, usando a notação acima a derivada de primeira ordem será $\frac{dy}{dx}$, aplicando novamente a derivada teremos a derivada de segunda ordem $\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$=$\frac{d^2y}{dx^2}$, e assim sucessivamente, desde que as derivadas existam.

Máximos e Mínimos de uma Função

Definição de Máximos e Mínimos (Pontos Críticos): Um ponto crítico $x = c$ de uma função f é um número onde $f^{'}(c) = 0$ ou ainda onde $\nexists f^{'}(c)$.

Teorema do Valor Extremo: Se f é contínua em $[a;\ b]$, então f admite valor de máximo e mínimo absoluto.

A preposição acima se deve ao fato de que em um intervalo fechado, os extremos desse intervalo podem assumir valores de máximo e mínimo absolutos, ou seja, nos pontos $x = a$ e $x = b$, $\nexists f'(a)$ e $\nexists f'(b)$.

Teorema de Fermat: Se f tiver um máximo ou mínimo local em $x = c$, e $\exists f^{'}(c)$, então $f^{'}(c) = 0$.

Teste da Primeira Derivada

Seja uma função $f(x)$ e sua derivada de primeira ordem $f^{'}(x)$, se em um ponto $x = c$, $f^{'}(c) = 0$ ou $\nexists f'(c)$ então se tem um candidato a ponto crítico de f.

Se tomarmos dois valores $x = a$ e $x = b$ próximos de c, porém menor que c e maior que c, respectivamente, e $f^{'}(a) < 0$ $f^{'}(b) > 0$, então $x = c$ é um ponto de mínimo (não necessariamente absoluto), agora se $f^{'}(a) > 0$ $f^{'}(b) < 0$, então $x = c$ é um ponto de máximo (não necessariamente absoluto), em último caso se $f^{'}(a) < 0$ $f^{'}(b) < 0$ ou $f^{'}(a) > 0$ $f^{'}(b) > 0$, $x = c$ é um ponto de inflexão. A certeza de que um ponto é ou não máximo ou mínimo absoluto se dá quando analisamos os limites no infinito da função $f(x)$. Geometricamente, o teste da primeira derivada está analisando os coeficientes angulares das retas tangentes a pontos próximos de $x = c$, e com base nessa análise podemos dizer em qual classificação $x = c$ melhor se encaixa.

Teste da Segunda Derivada

Seja uma função $f(x)$, se em um ponto $x = c$, $f^{'}(c) = 0$ e $f^{''}(c) > 0$, então $x = c$ é um ponto de mínimo (não necessariamente absoluto), caso $f^{'}(c) = 0$ e $f^{''}(c) < 0$, então $x = c$ é um ponto de mínimo (não necessariamente absoluto), agora se $f^{'}(c) = 0$ e $f^{''}(c) = 0$, tem-se um teste inconclusivo, já que não é possível afirmar se naquele ponto há ou não inflexão. O teste da segunda derivada geometricamente verifica a concavidade da função $f(x)$, por isso é possível dizer se os pontos estudados são máximos ou mínimos.