Equações Diferenciais

As equações diferenciais (ED's) são equações onde a igualdade dos termos envolvem funções e suas respectivas derivadas como incógnitas. Existem as equações diferenciais ordinárias (EDO's) onde as funções dependem de uma única variável, e as equações diferenciais parciais (EDP's) em que as funções dependem de duas ou mais variáveis.

$$\text{EDO:} \quad \frac{df(t)}{dt} + 2f(t) = 0$$

$$\text{EDP:} \quad \frac{\varphi^2 u(x,t)}{\varphi x^2} = 3\frac{\varphi u(x,t)}{\varphi t}$$

Assim como os sistemas de equações para incógnitas que não dependem de nenhuma variável como, por exemplo, $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ y + x = 1 \end{cases}$, os sistemas de ED's são usados para se organizar as informações a respeito de um conjunto ED's, para então, em seguida, usando técnicas apropriadas de resolução, encontrar a solução de todo o sistema.

A ordem de uma ED é a ordem da derivada de maior grau da função da ED.

$$\text{EDO de primeira ordem:} \quad \frac{df(t)}{dt} + 2f(t) = 0$$

$$\text{EDP de segunda ordem:} \quad \frac{\varphi^2 u(x,t)}{\varphi x^2} = 3\frac{\varphi u(x,t)}{\varphi t}$$

Ainda na classificação das ED's temos a linearidade. Se uma ED é dita linear, então não há produtos de uma função com ela mesma ou com suas derivadas, caso contrário, a ED é dita não-linear.

EDO de primeira ordem não linear: $f^{'}(t)f(t) + 2f(t) = 0$

EDP de segunda ordem linear: $\frac{\varphi^2 u(x,t)}{\varphi x^2} = 3\frac{\varphi u(x,t)}{\varphi t}$

Técnicas de Resolução

EDO linear de primeira ordem não trivial (Método de Leibniz)

Multiplica-se toda a expressão por um fator integrante de forma a obter uma equação diferencial ordinária resultante que seja facilmente integrável.

$$f'(t) + g(t)f(t) = h(t)$$

$$f'(t)\mu(t) + g(t)\mu(t)f(t) = h(t)\mu(t)$$

$$[f(t)\mu(t)]' = f'(t)\mu(t) + f(t)\mu'(t)$$

$$f(t)\mu'(t) = g(t)\mu(t)f(t) \;\; \rightarrow \;\; \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = g(t)$$

$$[\ln \mu(t)]' = g(t) \quad \rightarrow \quad \mu(t) = e^{\int g(t)dt}$$

$$\left[f(t)e^{\int g(t)dt}\right]' = h(t)e^{\int g(t)dt}$$

$$\boxed{\therefore f(t) = \frac{\int h(t)e^{\int g(t)dt}dt}{e^{\int g(t)dt}}}$$

Exemplo

$$y' + 2y = 3 \quad \rightarrow \quad \mu(t) = e^{\int 2dt} = e^{2t}$$

$$ye^{2t} = \int 3\,e^{2t}dt = \frac{3}{2}e^{2t} + C$$

$$y = \frac{3}{2} + Ce^{-2t}$$

EDO linear de primeira ordem trivial

$$\frac{df(t)}{dt} = g(t) \quad \rightarrow \quad f(t) = \int g(t)dt$$

Exemplo

$$f'(t) = t^2 + 1$$

$$f(t) = \int (t^2 + 1)dt = \frac{1}{3}t^3 + t + C$$

EDO linear de segunda ordem homogênea

$$y'' + by' + cy = 0$$

EDO's nesse formato admitem como solução (além da solução trivial) funções do tipo $y = ke^{\lambda t}$, de fato:

$$\begin{cases} y' = k\lambda e^{\lambda t} \\ y'' = k\lambda^2 e^{\lambda t} \end{cases} \rightarrow \ k\lambda^2 e^{\lambda t} + bk\lambda e^{\lambda t} + cke^{\lambda t} = ke^{\lambda t}(\ \lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

$$k \neq 0 \ \rightarrow ke^{\lambda t} \neq 0 \ \ \therefore \ \lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Portanto a equação característica da EDO é

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Sendo uma equação do segundo grau ela admite duas raízes.

Para $\Delta > 0 \ \rightarrow \ \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$y = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

Se $\Delta = 0 \ \rightarrow \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$y = e^{\lambda t}(A + Bt) \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

E se $\Delta < 0 \ \rightarrow \ \lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ (conjugado), $\quad \lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$

$$y = e^{\alpha t}[A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)] \qquad A, B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Para $\Delta < 0$ temos que α é igual a parte real das raízes, e β é o número que acompanha a parte imaginária positiva da raiz.

Exemplo

$$y'' - y' - 2y = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$$

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Nem sempre todas as combinações lineares de duas soluções de uma EDO desse tipo também serão solução. Para se ter certeza se duas soluções podem ser combinadas para formar uma expressão geral de todas as respostas possíveis, analisamos o Wronskiano da EDO. Esse Wronskiano é um determinante que deriva das condições de combinação linear pré-estabelecidas, e se for diferente de zero a EDO aceita como solução geral a combinação linear de duas soluções particulares.

$$\omega = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{vmatrix}$$

Portanto, se y_1 e y_2 são soluções para a EDO $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ e $\omega \neq 0$, então $C_1y_1 + C_2y_2$ também é solução, $\forall\ C_1, C_2\ \in \mathbb{R}$.

ED’s Separáveis

As equações diferenciais separáveis podem ser manipuladas de tal forma que seja possível integrar ambos os lados da equação e assim encontrar a solução da ED.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y\cos(x)}{1 + 2y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos(x)}{1 + 2y^2} \quad \rightarrow \quad \int \left(\frac{1}{y} + 2y\right) dy = \int \cos(x)\, dx$$

$$\ln|y| + y^2 - \sin(x) = C$$

$$\ln|1| + 1^2 - \sin(0) = 1 = C$$

$$\ln|y| + y^2 - \sin(x) = 1$$

Portanto, y é indiretamente definido pela equação acima.

ED's Exatas

O método de resolução para ED's exatas envolve uma pré-condição para que então se encontre a função de forma indireta. O formato geral de uma ED para que a condição seja possível é:

$$ndx + Ndy = 0$$

Onde n e N são funções dependentes de duas variáveis, x e y. A condição para que a equação seja exata é que:

$$n_y = N_x$$

Exemplo

$$y\cos(x) + 2xe^y + [\sin(x) + x^2e^y - 1]y' = 0$$

$$[y\cos(x) + 2xe^y]dx + [\sin(x) + x^2e^y - 1]dy = 0$$

$$\begin{cases} n = \ y\cos(x) + 2xe^y \\ N = \sin(x) + x^2e^y - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n_y = \cos(x) + 2xe^y \\ N_x = \cos(x) + 2xe^y \end{cases} \rightarrow \quad n_y = N_x$$

$$\varphi(x,y) = \int ndx = \int Ndy$$

$$\varphi(x,y) = \int [y\cos(x) + 2xe^y]dx = y\sin(x) + x^2e^y + g(y)$$

$$\varphi_y(x,y) = \sin(x) + x^2e^y + g'(y) = \sin(x) + x^2e^y - 1$$

$$g'(y) = -1 \quad \rightarrow \quad g(y) = -y + C$$

$$y\sin(x) + x^2e^y - y = C$$