Cinemática

A cinemática é a parte da mecânica que estuda e descreve o movimento dos corpos sem se preocupar com as suas causas, ou seja, no estudo da cinemática não nos aprofundamos no estudo das forças que provocam o movimento.

Variação de Espaço (Deslocamento)

$$\boxed{\Delta S = S - S_0}$$

A variação de espaço, ou deslocamento, é a diferença entre o ponto final S e o inicial S_0 da posição de um corpo, independente da trajetória feita entre estes pontos.

Distância

$$\boxed{D = |\Delta S_1| + \cdots + |\Delta S_n|}$$

A distância total percorrida por um corpo é igual à soma de todos os seus deslocamentos. Por exemplo, se um corpo tem um movimento retilíneo progressivo em certo sentido (ΔS_1), e em algum momento há a inversão do sentido da velocidade desse corpo e agora ele realiza um deslocamento (ΔS_2) em movimento retrógado, a distância total D será a soma desses deslocamentos em módulo.

Velocidade Média

$$\boxed{V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}}$$

A velocidade média não descreve a real velocidade de um corpo quando este realiza certo deslocamento ΔS em um tempo Δt, mas sim uma velocidade constante caso esse corpo estivesse realizando um movimento retilíneo uniforme ao longo do percurso ΔS. Caso o movimento de um corpo seja retilíneo uniforme (aceleração nula), a sua velocidade média será igual a sua velocidade real, já que está não varia ao longo do tempo. A unidade de velocidade no SI é o m/s.

Tipos de Movimento

Movimento Progressivo: Quando a velocidade de um corpo é positiva em relação a um referencial.

Movimento Retrógado: Quando a velocidade de um corpo é negativa dado um referencial.

Movimento Acelerado: Quando a aceleração e a velocidade estão apontando para a mesma direção e sentido.

Movimento Retardado: Quando a aceleração e a velocidade estão apontando para a mesma direção, mas apresentam sentidos contrários.

Velocidade Instantânea

$$\boxed{V_I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}}$$

A velocidade instantânea de um corpo descreve a real velocidade de um corpo em qualquer ponto de sua trajetória. O uso da derivada nos permite analisar valores de tempo cada vez menores para determinada variação de espaço, isso em termos geométricos calcula o coeficiente angular da reta tangente ao ponto do espaço analisado, seguindo a definição de velocidade, só que em termos infinitesimais.

Função Horária do Espaço no MRU

$$\boxed{\begin{gathered} V = \frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow S - S_0 = V\Delta t \rightarrow t_0 = 0 \\ \therefore S = S_0 + Vt \end{gathered}}$$

Analisando a variação do espaço a partir do momento $t_0 = 0$, a função horária do espaço surge de manipulações algébricas sobre a fórmula da velocidade de um corpo em MRU.

Ultrapassagens e Encontros

Para o estudo de ultrapassagens e encontros é conveniente usar a velocidade relativa dos corpos analisados.

$$\boxed{V_{RU} = V_A - V_B, \ \ V_A > V_B}$$

A velocidade relativa para ultrapassagens pode ser entendida como se o corpo de menor velocidade (V_B) estivesse em repouso para um referencial fixo enquanto o de maior velocidade (V_A) se aproxima dele com o passar do tempo.

Quando há uma distância D entre os corpos o tempo para acontecer a ultrapassagem é dado por:

$$\boxed{V = \frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow t = \frac{D}{V_A - V_B}}$$

Já a velocidade relativa para encontros é exatamente o oposto, quando dois corpos estão indo um em direção ao outro o espaço D entre eles diminui muito mais rápido já que a velocidade vem dos dois sentidos, portanto:

$$\boxed{V_{RE} = V_A + V_B}$$

O tempo para acontecer o encontro é dado por:

$$\boxed{V = \frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow t = \frac{D}{V_A + V_B}}$$

Aceleração Média

$$\boxed{a_m = \frac{\Delta V}{\Delta t}}$$

A aceleração média é a variação de velocidade pelo tempo e sua unidade é o m/s^2. Um corpo com uma aceleração $a = \frac{1m}{s^2} = \frac{1\frac{m}{s}}{s}$ tem um aumento de velocidade de 1 m/s por segundo caso seu movimento seja retilíneo. Assim como um corpo em MRU tem $V_m = V$, um corpo em MRUV tem sua aceleração constante e não nula, ou seja, $a_m = a$.

Aceleração Instantânea

$$\boxed{a_I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}}$$

Assim como a velocidade instantânea, a aceleração instantânea é a análise infinitesimal da variação de velocidade por intervalos de tempo infinitesimais.

Função Horária da Velocidade no MRUV

$$\boxed{\begin{array}{c} a = \dfrac{\Delta V}{\Delta t} \rightarrow V - V_0 = a\Delta t \rightarrow t_0 = 0 \\ \therefore V = V_0 + at \end{array}}$$

Como a aceleração é constante no MRUV a velocidade irá variar linearmente. Para uma análise onde se deseja descobrir a velocidade final de um corpo é necessário saber a velocidade inicial daquele corpo, a sua aceleração, e o tempo que a aceleração vai agir sobre ele.

Função Horária do Espaço no MRUV

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta S = A = \frac{(V+V_0)\Delta t}{2} = \frac{(V_0 + a\Delta t + V_0)\Delta t}{2} = \frac{2V_0\Delta t + a\Delta t^2}{2} \\ = \frac{2V_0\Delta t}{2} + \frac{a\Delta t^2}{2} = V_0\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2} \rightarrow t = 0 \\ \therefore S = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}\end{gathered}}$$

A variação do espaço é numericamente igual à área do gráfico Velocidade x Tempo, como a função horária da velocidade no MRUV é descrita por uma reta, a figura plana formada sob o gráfico é um trapézio, cuja área é igual $\frac{(B+b)h}{2}$, substituindo os valores e realizando algumas manipulações algébricas se chega na função horária do espaço no MRUV.

Velocidade Média no MRUV

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta S = \frac{(V_1+V_2)\Delta t}{2} = V_m\Delta t \\ \therefore V_m = \frac{V_1+V_2}{2}\end{gathered}}$$

Usando esse mesmo gráfico é possível chegar à equação da velocidade média no MRUV.

Equação de Torricelli

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} \to \Delta t = \frac{\Delta V}{a} \to t = \frac{\Delta V}{a} = \frac{V - V_0}{a}$$

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2} \to \Delta S = V_0 \left(\frac{V - V_0}{a} \right) + \frac{a \left(\frac{V - V_0}{a} \right)^2}{2}$$

$$\Delta S = \frac{V_0 V - {V_0}^2}{a} + \frac{V^2 - 2V_0 V + {V_0}^2}{2a} = \frac{2V_0 V - 2{V_0}^2 + V^2 - 2V_0 V + {V_0}^2}{2a}$$

$$= \frac{V^2 - {V_0}^2}{2a}$$

$$\therefore V^2 = {V_0}^2 + 2a\Delta S$$

A equação de Torricelli é muito prática quando precisamos calcular velocidades, aceleração e deslocamento quando não se tem o tempo.

Equações de Queda Livre

$$\boxed{S = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}} \rightarrow \boxed{h = \frac{gt^2}{2}}$$

$$\boxed{V = V_0 + at} \rightarrow \boxed{V = gt}$$

$$\boxed{V^2 = {V_0}^2 + 2a\Delta S} \rightarrow \boxed{V^2 = 2gh}$$

As equações de queda livre são adaptações das já vistas equações de MRUV. Elas são muito práticas quando se vai descrever um movimento em queda livre (resistência do ar nula), onde a velocidade inicial é nula. Quando o movimento é de queda livre na Terra a aceleração é a da gravidade g. É conveniente adotar o sentido da trajetória para baixo, por isso g fica positivo. h é a altura que o corpo cai.

Lançamento Vertical

$$\boxed{V^2 = {V_0}^2 + 2a\Delta S} \rightarrow \boxed{h_{max} = \frac{{V_0}^2}{2g}}$$

$$\boxed{V = V_0 + at} \rightarrow \boxed{t_s = t_d = \frac{V_0}{g}}$$

Todas as equações do MRUV valem para o lançamento vertical, tanto no lançamento para cima quanto para baixo. É conveniente adotar o sentido da trajetória para baixo, dessa forma a aceleração da gravidade se torna negativa na subida e positiva na descida. Para se descobrir a altura máxima que um corpo atinge quando lançado verticalmente para cima basta zerar sua velocidade final, afinal no ponto mais alto de sua trajetória sua velocidade vertical será sempre nula, e isolar h na equação de Torricelli. Como a função horária do espaço no MRUV é quadrática, ela apresenta uma simetria em torno de seu vértice, que é a altura máxima, isso significa que o tempo de subida quando um corpo é lançado de um ponto sempre será igual ao tempo de descida até esse mesmo ponto, e a velocidade que esse corpo apresentar quando passar por certo ponto na subida será sempre igual em módulo à velocidade de quando ele passar na descida. O tempo de subida/descida por sua vez é encontrado quando zeramos a velocidade final na subida como já explicado e isolamos o tempo.

Movimento Circular

Grandezas essenciais para o estudo do movimento circular;

Período

$$\boxed{T = \frac{\Delta t}{n} = \frac{1}{f}}$$

É o tempo que leva para se completar um ciclo. $[T] = s$.

Frequência

$$\boxed{f = \frac{n}{\Delta t} = \frac{1}{T}}$$

É a quantidade de ciclos completos por unidade de tempo.
$[f] = \ Hz \ ou \ RPM$

Ângulo

$$\boxed{\begin{gathered} Por\ definição: \pi = \frac{C}{2R} \rightarrow C = (2\pi)R \rightarrow S = \theta R \\ \therefore \theta = \frac{S}{R} \end{gathered}}$$

O ângulo é igual ao valor do arco desse ângulo em um circulo qualquer dividido pelo raio desse circulo. $[\theta] = {}^{\circ}\ ou\ rad$.

Velocidade Angular Média e Instantânea

$$\boxed{\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}}$$

$$\boxed{\omega_I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}}$$

Assim como a velocidade média no MRUV/MRU mede a variação de espaço pelo tempo, a velocidade angular média calcula a variação do ângulo pelo tempo. Novamente, no MCU, a velocidade angular média será igual à velocidade angular real do corpo. Os conceitos da velocidade linear instantânea também se aplicam para ω_I.

$[\omega] = \frac{\circ}{s}\ ou\ \frac{rad}{s}$.

Aceleração Angular Média e Instantânea

$$\boxed{\gamma_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$$

$$\boxed{\gamma_I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$$

Todos os conceitos de aceleração no MRUV se aplicam à aceleração angular média e à aceleração angular instantânea no MCUV.

Velocidade e Aceleração Lineares e Relações Entre Grandezas

$$\boxed{\begin{gathered}\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \\ \therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}V_L = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} = \omega R \\ \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_0}{\Delta t} = \frac{\frac{S}{R} - \frac{S_0}{R}}{\Delta t} = \frac{S - S_0}{R\Delta t} = \frac{\Delta S}{R\Delta t} \\ \rightarrow \omega R = \frac{\Delta S}{\Delta t} = V_L \\ \therefore V_L = \omega R\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\frac{V}{R} - \frac{V_0}{R}}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{R\Delta t} \rightarrow \gamma R = \frac{\Delta V}{\Delta t} = a_L \\ \therefore a_L = \gamma R\end{gathered}}$$

A velocidade linear é a velocidade adquirida por um ponto a uma distância R do centro da circunferência. A velocidade angular independe do raio, logo no cálculo de V_L onde ω é constante (MCU) precisamos apenas fazer uma análise de R. Como quanto maior é o raio maior é o arco (ΔS) varrido por uma mesma velocidade angular ($\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$), então há um aumento na velocidade linear naquele ponto proporcional à distância a que este se encontra do centro do circulo. A mesma ideia se aplica à aceleração.

Equações do MCU e MCUV

$$\boxed{S = S_0 + Vt} \rightarrow \boxed{\theta = \theta_0 + \omega t}$$

$$\boxed{V = V_0 + at} \rightarrow \boxed{\omega = \omega_0 + \gamma t}$$

$$\boxed{S = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}} \rightarrow \boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\gamma t^2}{2}}$$

$$\boxed{V^2 = {V_0}^2 + 2a\Delta S} \rightarrow \boxed{\omega^2 = {\omega_0}^2 + 2\gamma\Delta\theta}$$

Equações adaptadas do MRU e MRUV para o MCU e MCUV.

Transmissão de Movimento Circular

Duas rodas em contato ou ligadas por correia, corrente etc.:

$$\boxed{\begin{gathered} V_A = V_B \to \omega_A R_A = \omega_B R_B \to 2\pi f_A R_A = 2\pi f_B R_B \\ \therefore f_A R_A = f_B R_B \end{gathered}}$$

A expressão acima obedece ao que já vimos, se o raio é menor para uma mesma velocidade linear consequentemente sua frequência é maior, e vice versa.

Duas ou mais rodas em um eixo comum:

$$\boxed{\omega = \omega_1 = \cdots = \omega_n}$$

Se o eixo tem uma velocidade angular ω, todas as rodas que estiverem em comum com esse eixo também terão essa velocidade angular.

Velocidade Vetorial Média e Instantânea

$$\boxed{\overrightarrow{V_m} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$

A velocidade vetorial média é dada por uma razão envolvendo o tempo e o vetor deslocamento $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$ onde $\overrightarrow{r_2}$ e $\overrightarrow{r_1}$ são os vetores posição final e inicial, respectivamente. O vetor velocidade média tem a mesma direção e sentido que o vetor deslocamento, só que em uma intensidade menor.

Aceleração Vetorial Média, Centrípeta, Tangencial e Total

$$\boxed{\overrightarrow{a_m} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}}$$

$$\boxed{a_c = \frac{V^2}{R}}$$

$$\boxed{a_t = \frac{\Delta V}{\Delta t}}$$

$$\boxed{\vec{\gamma} = \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_t} \rightarrow \gamma^2 = a_c^2 + a_t^2}$$

A aceleração centrípeta é a aceleração responsável por mudar a direção do vetor velocidade de um corpo quando este realiza uma curva, ela é perpendicular ao vetor velocidade e sempre aponta para o centro do circulo formado pelo arco da curva. A aceleração vetorial média é uma aceleração total média sobre um corpo, ela pode ou não mudar a direção do vetor velocidade, a depender se esse corpo realizou alguma curva em seu trajeto, lembrando que mesmo mantendo a velocidade constante $V_1 = V_2$ a diferença $\Delta\vec{V} = \overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1}$ não necessariamente é zero uma vez que a velocidade é uma grandeza vetorial. A aceleração vetorial tangencial é a já vista aceleração escalar, só que agora está sendo representada por vetores tangentes a trajetória, assim como a velocidade. A aceleração vetorial total é a soma vetorial da aceleração centrípeta e da tangencial, quando o corpo não realiza curvas a aceleração total será igual a tangencial, assim como em um MCU a aceleração total é igual à aceleração centrípeta. No MCU a velocidade e o raio são constantes, logo a aceleração centrípeta também é.

Lançamento Oblíquo

$$\boxed{\begin{array}{c} V_x = V_0\cos(\theta) \\ V_{0y} = V_0\sin(\theta) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S \ \rightarrow \ h_{max} = \dfrac{{V_{0y}}^2}{2g} = \dfrac{V_0^2\sin^2(\theta)}{2g} \\ \therefore h_{max} = \dfrac{V_0^2\sin^2(\theta)}{2g} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} V = V_0 + at \ \rightarrow t_s = \dfrac{V_{0y}}{g} = \dfrac{V_0\sin(\theta)}{g} \ \rightarrow \ t_T = \dfrac{2V_{0y}}{g} \\ \therefore t_s = \dfrac{V_0\sin(\theta)}{g} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \Delta S = Vt \ \rightarrow A = V_x t_T = \dfrac{2V_xV_{0y}}{g} = \dfrac{{V_0}^2[2\cos(\theta)\sin(\theta)]}{g} = \dfrac{{V_0}^2\sin(2\theta)}{g} \\ \therefore A = \dfrac{{V_0}^2\sin(2\theta)}{g} \end{array}}$$

Para facilitar a análise do lançamento oblíquo podemos decompor os vetores com base no ângulo θ em relação a horizontal ($0 \leq \theta \leq \pi$). A componente no eixo x representa um movimento uniforme, e no eixo y um movimento uniformemente variado. Analisando as equações do movimento oblíquo vemos que para uma altura e um alcance máximo precisamos de um sin máximo para cada ocasião. Para a altura máxima $\sin^2(\theta) = 1$, temos $\theta = \frac{\pi}{2}rad$, e para o alcance máximo $\sin(2\theta) = 1$ temos $\theta = \frac{\pi}{4}rad$.