Funções

As funções na matemática são leis de formação que determinam uma relação entre os elementos de dois conjuntos, o domínio $D(f)$ (entradas) e o contradomínio $CD(f)$ (saídas). Para ser considerada uma função, uma lei de formação deve associar cada entrada a uma única saída. Caso f seja uma função real, então $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Lê-se "f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$", ou seja, a entrada e a saída são números reais).

Função Par

$$\boxed{f(x) = f(-x)}$$

Graficamente a função par se reflete em torno do eixo y, isso significa que para todo valor x pertencente ao $D(f)$, seu simétrico, ou seja, $-x$, tem a mesma imagem que x no conjunto $Im(f)$. Exemplos de função par: $f(x) = x^2$ e $f(x) = \cos(x)$.

Função Ímpar

$$\boxed{f(x) = -f(-x)}$$

Graficamente a função ímpar é simétrica em torno da origem, isso significa que se uma função é dita ímpar então todos os pontos $(x, f(x))$ e $(-x, -f(x))$ pertencem a f. Exemplos de função ímpar: $f(x) = x,\ f(x) = x^3$ e $f(x) = \sin(x)$.

Função Injetiva ou Injetora

$$\boxed{a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b)}$$

A função injetora relaciona todo elemento do conjunto imagem a um único elemento do domínio, ou seja, para todo y só há um único x correspondente. Exemplos de função injetiva: $f(x) = x$, $f(x) = x^3$ e $f(x) = x^3 + x + 5$.

Função Sobrejetiva ou Sobrejetora

$$\boxed{CD(f) = Im(f)}$$

Em uma função sobrejetora temos seu contradomínio igual a sua imagem. Exemplo de função sobrejetiva: $f(x) = x$ e $f(x) = x^3$.

Função Bijetiva ou Bijetora

A função é bijetiva quando é sobrejetiva e injetiva, ou seja, todo número do seu contradomínio está associado a um único valor no seu domínio. Exemplos de funções bijetivas: $f(x) = x$ e $f(x) = x^3$.

Função inversa

$$\boxed{f: D \to CD \sim f^{-1}: CD \to D}$$

Para uma função admitir inversa ela precisa ser bijetiva, injetiva para não haver problemas de correspondência dupla quando formos relacionar algum valor do contradomínio (domínio) a um valor do domínio (contradomínio), e sobrejetiva para que todos os elementos de entrada do contradomínio = imagem (domínio) tenha um valor de saída no domínio (contradomínio).

As funções f^{-1}e f sempre serão simétricas em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$).

Para se encontrar a função inversa de f, primeiramente deve-se permutar as variáveis y e x, depois se isola y em termos de x. Exemplo:

$$\boxed{\begin{gathered} f(x) = x^3 + 5 \\ y = x^3 + 5 \ \to x = y^3 + 5 \ \to y = \sqrt[3]{x - 5} \\ \therefore \ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 5} \end{gathered}}$$

Função de Grau Zero ou Função Constante

$$\boxed{f(x) = a}$$

A função constante é caracterizada por sempre retornar o mesmo valor de saída, independente do valor de entrada. O grau de uma função é sempre caracterizado pelo maior expoente da variável independente x, nesse caso podemos escrever a função como $f(x) = ax^0 = a$. Seu gráfico é uma reta paralela ao eixo x que passa por $y = a$.

Função de 1° Grau ou Função Afim

$$\boxed{f(x) = ax + b}$$

A função afim, assim como a função constante, é uma reta, no entanto, agora essa reta apresenta uma inclinação ($a = \tan(\theta) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq 0$) diferente de zero. A constate a é chamada de coeficiente angular da reta e define se a reta é crescente ($a > 0$) ou descrescente ($a < 0$), enquanto a outra constante b é chamada de coeficiente linear da reta (onde a reta cruza o eixo y). A raiz (onde a reta cruza o eixo x) de uma função afim é dada por:

$$\boxed{x_0 = -\frac{b}{a}}$$

Caso $b = 0$, a função passa a se chamar função linear, que nada mais é do que um caso especial da função afim, onde agora a raiz x_0 é na origem (0,0) do sistema de coordenadas.

Função de 2° Grau ou Função Quadrática

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Uma função quadrática, diferentemente da função afim, não pode ser descrita por uma reta, e sim por uma parábola que terá sua concavidade definida pelo coeficiente a, se $a < 0$ a concavidade é para baixo (a função tem um ponto máximo), e se $a > 0$ a concavidade é para cima (a função tem um ponto mínimo). Essa parábola cruza com o eixo y no ponto c $(f(0) = c)$, e suas duas raízes são calculadas usando a fórmula de Bhaskara:

$$\boxed{\begin{gathered}
a{x_0}^2 + bx_0 + c = 0 \\
\left(x_0\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0 \\
\left(x_0\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
x_0\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}} \to \Delta = b^2 - 4ac \\
x_0\sqrt{a} = -\frac{b}{2\sqrt{a}} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a}} \\
x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}
\end{gathered}}$$

Algumas características a respeito da função podem ser descobertas ao fazermos uma análise do seu discriminante Δ:

$$\boxed{\begin{array}{c} \Delta > 0 \ \rightarrow \ f \ tem \ duas \ raízes \ reais \ e \ distintas \\ \Delta = 0 \ \rightarrow f \ tem \ duas \ raízes \ reais \ e \ iguais \\ \Delta < 0 \ \rightarrow f \ tem \ duas \ raízes \ complexas \end{array}}$$

O vértice da parábola é o ponto onde há a inversão de sentido da parábola, toda parábola se reflete em torno da reta definida por $x = x_V$, onde x_V é a coordenada x do vértice. Com essa definição subentendesse que a média aritmética de quaisquer dois pontos que distam igualmente do eixo x resulta na coordenada x_V, uma vez que é aí onde há a reflexão da parábola, levando isso em consideração podemos usar as raízes da função para descobrir x_V e posteriormente y_V.

$$\boxed{\begin{array}{c} x_V = \dfrac{x_0^{'} + x_0^{''}}{2} = \dfrac{\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \dfrac{-\dfrac{b}{a}}{2} = -\dfrac{b}{2a} \\ \therefore x_V = -\dfrac{b}{2a} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} y_V = f(x_V) = a{x_V}^2 + bx_V + c = a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\dfrac{b}{2a}\right) + c \\ = \dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{b^2}{2a} + c = \dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{2b^2}{4a} + \dfrac{4ac}{4a} = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = -\dfrac{\Delta}{4a} \\ \therefore y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{array}}$$

Fatoração de uma Função Quadrática

$$
\boxed{
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= ax^2 - ax\left(-\frac{b}{a}\right) + a\frac{c}{a} \\
&= ax^2 - ax\left(x_0' + x_0''\right) + ax_0'x_0'' \\
&= ax^2 - axx_0' - axx_0'' + ax_0'x_0'' \\
&= a\left(x^2 + x_0'x_0''\right) - a\left(xx_0' + xx_0''\right) \\
&= a\left(x^2 + x_0'x_0'' - xx_0' - xx_0''\right) \\
&= a\left[x\left(x - x_0'\right) - x_0''\left(x - x_0'\right)\right] \\
&= a\left(x - x_0'\right)\left(x - x_0''\right) \\
\therefore f(x) &= a\left(x - x_0'\right)\left(x - x_0''\right)
\end{aligned}
}
$$

Relações de Girard

As relações de Girard são conjuntos de equações que expressam as relações existentes entre os coeficientes e as raízes de uma função de grau n qualquer. Segue as principais relações de Girard:

Para $n = 2$

$$\boxed{x_0^{'} + x_0^{''} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} x_0^{'} x_0^{''} = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 + b\sqrt{\Delta} - b\sqrt{\Delta} - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \rightarrow \therefore\ x_0^{'} x_0^{''} = \frac{c}{a} \end{gathered}}$$

Para $n = 3$

$$\boxed{x_0^{'} + x_0^{''} + x_0^{'''} = -\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{x_0^{'} x_0^{''} + x_0^{'} x_0^{'''} + x_0^{''} x_0^{'''} = \frac{c}{a}}$$

$$\boxed{x_0^{'} x_0^{''} x_0^{'''} = -\frac{d}{a}}$$

Função Exponencial e Regras de Potenciação

$$\boxed{f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1}$$

O valor real a é chamado de base. A base da função deve ser diferente de 1, caso contrário teríamos uma função constante, já que 1 elevado a qualquer número é 1. A base também deve ser maior que 0, ou então não teríamos uma função real, exemplificando:

$$\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1} = i \notin \mathbb{R}}$$

Quando $a > 1$ então se tem uma função crescente, já quando $0 < a < 1$ a função é decrescente, uma vez que qualquer número nesse intervalo pode ser escrito como $\frac{1}{c}$, óbvio que com o aumento de x há um aumento de c, e consequentemente $f(x)$ fica cada vez menor.

Propriedades Operatórias da Potenciação

$$\boxed{\begin{gathered} a^x a^y = \overbrace{aaa}^{x\ vezes} \ \dots \ \overbrace{aaa}^{y\ vezes} = a^{x+y} \\ \therefore a^x a^y = a^{x+y} \end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{a^x}{a^y} = \frac{\overbrace{aaa}^{x\ vezes}}{\underbrace{aaa}_{y\ vezes}} = \overbrace{aaa}^{x-y\ vezes} = a^{x-y} \\ \therefore \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \end{gathered}}$$

$$(a^x)^y = \overbrace{a^x a^x a^x}^{y\ vezes} = a^{\overbrace{x+x+x}^{y\ vezes}} = a^{xy}$$
$$\therefore (a^x)^y = a^{xy}$$

$$(abc \ldots n)^x = \overbrace{(abc \ldots n)(abc \ldots n)}^{x\ vezes} = a^x b^x c^x \ldots n^x$$
$$\therefore (abc \ldots n)^x = a^x b^x c^x \ldots n^x$$

Propriedades Gerais da Potenciação

$$1 = \frac{a^x}{a^x} = a^{x-x} = a^0$$
$$\therefore a^0 = 1$$

$$10^n = \overbrace{10.10.10}^{n\ vezes} = 1\ \overbrace{0000}^{n\ zeros}$$

$$\frac{1}{a^x} = \frac{a^0}{a^x} = a^{0-x} = a^{-x}$$
$$\therefore a^{-x} = \frac{1}{a^x} \rightarrow a^x = \frac{1}{a^{-x}}$$

Função Logarítmica e Propriedades dos Logaritmos

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) = \log_c(x)\,, x, c > 0, c \neq 1 \\ Definição \rightarrow c^{f(x)} = x \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) = \ln(x)\,, x > 0 \\ Definição \rightarrow e^{f(x)} = x \end{array}}$$

$$\boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cong 2{,}7182}$$

A função logarítmica é a inversa da função exponencial. A variável x é chamada de logaritmando, e a constante c de base. Por definição temos as mesmas regras da exponenciação aplicadas ao logaritmo, e mais uma que diz que o logaritmando deve ser sempre positivo, ora, usando a definição de exponenciação se descobre o porquê disso, é impossível um número real elevado a outro número real resultar em um número negativo. A função ln (logaritmo neperiano ou logaritmo natural) é um caso particular de logaritmo onde a base é igual ao Número de Euler, essa função especial também recebe o nome de logaritmo natural por que vários fenômenos na natureza descrevem comportamentos que podem ser expressos em uma função ln, como a desintegração radioativa e o resfriamento de um corpo.

Propriedades Operatórias dos Logaritmos

$$\boxed{\begin{array}{c} \begin{cases} x = \log_c(a) \\ y = \log_c(b) \\ z = \log_c(ab) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c^x = a \\ c^y = b \\ c^z = ab \end{cases} \rightarrow c^z = c^x c^y \rightarrow c^z = c^{x+y} \rightarrow z = x + y \\ \therefore \log_c(ab) = \log_c(a) + \log_c(b) \end{array}}$$

$$\begin{cases} x = \log_c(a) \\ y = \log_c(b) \\ z = \log_c\left(\frac{a}{b}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c^x = a \\ c^y = b \\ c^z = \frac{a}{b} \end{cases} \rightarrow c^z = \frac{c^x}{c^y} \rightarrow c^z = c^{x-y} \rightarrow z = x - y$$

$$\therefore \log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c(a) - \log_c(b)$$

$$\log_b(a^n) = \log_b\left(\overbrace{aaa}^{n\ vezes}\right) = \overbrace{\log_b(a) + \log_b(a) + \log_b(a)}^{n\ vezes}$$

$$\therefore \log_b(a^n) = n\log_b(a)$$

$$\begin{cases} x = \log_b(a) \\ y = \log_c(a) \\ z = \log_c(b) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b^x = a \\ c^y = a \\ c^z = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b^x = c^y \\ c^z = b \end{cases} \rightarrow (b)^x = (c^z)^x \rightarrow c^y = c^{zx} \rightarrow x = \frac{y}{z}$$

$$\therefore \log_b(a) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$$

Propriedades Gerais dos Logaritmos

$$\log_c(1) = 0$$
$$\log_c(c) = 1$$
$$\log_c(a) = \log_c(a) \rightarrow c^{\log_c(a)} = a$$
$$\log_c(a) = \log_c(b) \rightarrow a = b$$

$$\log_c(a) \geq \log_c(b)$$
$$0 < c < 1 \rightarrow a \leq b$$
$$c > 1 \rightarrow a \geq b$$

Funções Trigonométricas

(Preciso estudar mais sobre as trigonométricas inversas hehe)

$$\boxed{f(\theta) = \sin(\theta)}$$

$$\boxed{f(\theta) = \cos(\theta)}$$

$$\boxed{f(\theta) = \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}$$

$$\boxed{f(\theta) = \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}}$$

$$\boxed{f(\theta) = \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}}$$

$$\boxed{f(\theta) = \cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}}$$