Limites

O conceito de limite é usado para descrever o comportamento de uma função f à medida que um valor $x \in I$, com $I \subset \mathbb{R}$, se aproxima se certo valor a, com $f(a)$ não necessariamente pertencendo à $Im(f)$, assim como o comportamento quando valores de $x \in D(f)$ tendem ao infinito.

Definição de Limite

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = A}$$

A definição de limite nos diz que quando x tende ao valor a, tanto pela esquerda quanto pela direita de a, a função $f(x)$ tende ao valor A.

Limites Laterais

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) \to \exists \lim_{x \to a} f(x)}$$

A condição de existência do limite de $f(x)$ quando $x \to a$ é que os limites laterais existam e sejam iguais. Isso quer dizer que quando $x \to a^+$ (x tende a a por valores que são maiores que a) a função $f(x)$ deve tender ao mesmo valor que quando $x \to a^-$ (x tende a a por valores que são menores que a).

Teorema do confronto

$$\boxed{\begin{gathered} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ a \in D(f), \quad D(f) \subseteq \mathbb{R} \\ \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A \to \lim_{x \to a} g(x) = A \end{gathered}}$$

O teorema do confronto é facilmente entendido quando nos damos conta que se o limite de uma função existe, ele é um número real. Aplicando essa ideia à expressão vemos que se um valor está entre um intervalo $[A;\ A]$ esse valor só pode ser o próprio A.

Assíntotas

Assíntotas no conceito de limites são retas que delimitam uma função $f(x)$ quando $x \to a$. Isso significa que quando $x \to a$ a função $f(x)$ irá cada vez mais se aproximar dessa reta quando ambas tenderem ao infinito, mas nunca irá tocá-la.

Assíntotas Verticais

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \end{array}}$$

Caso qualquer uma das expressões acima seja verdadeira, então se tem uma assíntota vertical em $x = a$.

Assíntotas Horizontais

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L}$$

Se $f(x) \to L$ quando $x \to \pm\infty$ então a função f tem uma assíntota horizontal em $y = L$.

Continuidade

Podemos usar limites para definir se uma função é ou não contínua em um ponto $x = a$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, então $a \in D(f)$, e como $\exists \ \lim_{x \to a} f(x)$ (garante a existência dos limites laterais), logo $f(x)$ é contínua em $x = a$.

Limite Fundamental

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \cos(x) = 1}$$

Propriedades Operatórias dos Limites

Seja $c \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{x\to a} f(x)$ e $\exists \lim_{x\to a} g(x)$.

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \to a \in D(f)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} c = c}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} cf(x) = c \lim_{x\to a} f(x)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n, \ \ n \in \mathbb{N}^*}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a}[\log_c f(x)] = \log_c \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \frac{c}{"0"} \to Limite\ Infinito}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \frac{0}{"0"} \to Manipulação\ Algébrica, L'Hôpital}$$