Integrais

A integral é uma ferramenta matemática que nos permite calcular áreas de gráficos de funções em intervalos de valores. Antes de começar a definir os tipos de integrais vamos provar e demonstrar a sua veracidade.

Seja uma função $F(x)$ que retorna como *output* o valor da área sobre o eixo x de uma função entre um intervalo $[a, x]$. Se dividirmos a área desse gráfico em n-ésimos retângulos de base $\Delta t = \frac{x-a}{n}$ e altura $f(t_i)$ podemos fazer uma soma desses n-ésimos retângulos resultando assim em um valor próximo ao do valor real da área. Fica claro que se aumentarmos o número de retângulos maior será nossa precisão, ao passo que se fizermos com que n tenda ao infinito (logo Δt tenderá a zero) teremos infinitos retângulos que preencherão toda a área do gráfico, ou seja, a soma desses infinitos retângulos resultara no valor exato dessa área. Portanto, já deduzimos que $F(x)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$F(x) = \lim_{\Delta t \to 0} [f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

O somatório acima é chamado de Soma de Riemann. Pois bem, para facilitar a visualização adotou-se que esse limite com o somatório de infinitos retângulos seria representado pelo símbolo de integral, que é:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t = \int_a^x f(t)dt$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Lê-se “$F(x)$ é igual a integral definida de a a x de $f(t)$ em relação t”. Agora que já definimos como essa função que nos retorna o valor de área funciona vamos demonstrar como encontra-la partindo da definição de derivadas. A definição de derivada nos diz que:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Aplicando em $F(x)$ temos:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}$$

Segundo o teorema do valor médio para integração sempre teremos entre um intervalo $[x,\ \Delta x]$ um valor c tal que $f(c)\Delta x = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$, esse teorema pode ser logicamente deduzido ao levarmos em consideração que sempre existirá um valor num intervalo fechado que multiplicado pelo valor da diferença entre os extremos desse intervalo nos retornará o valor de área compreendida nesse intervalo. Isolando $f(c)$ e substituindo em $F'(x)$:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)$$

Graficamente, se Δx tender a zero, então c tenderá a x, logo:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Ou seja, $F(x)$ é a antiderivada de $f(x)$. Se conseguirmos aplicar as operações inversas da derivação sobre a função $f(x)$ teremos a função que nos retornará o valor de área compreendido entre qualquer intervalo definido para essa função.

Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

Sejam as duas funções

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (I)$$

$$F(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt \qquad (II)$$

Subtraindo (I) de (II)

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Trocando as variáveis $x = a$ e $x + \Delta x = b$

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)}$$

Portanto, de acordo com o teorema fundamental do cálculo, o valor de área entre o intervalo $[a,\ b]$ de uma função $f(t)$ definida nesse intervalo, é igual a diferença da antiderivada do limite superior de integração pelo limite inferior.

Integral Definida e Indefinida

A integral definida tem seus limites de integração definidos, e quando calculada retorna um valor real, no caso a área. Exemplo genérico de uma integral definida:

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx}$$

Já a integral indefinida não tem seus limites de integração definidos, e quando calculada retorna uma função, chamada de primitiva, que pode ser usada, segundo o TFC, para encontrar valores de área para intervalos quaisquer. Como já foi provado que a primitiva ou antiderivada é uma função que se origina ao se realizar as operações inversas da derivação sobre uma função, e que a derivada de uma constante C é igual a zero, logo se conclui que no cálculo da integral indefinida é necessário inserir uma constante C na função encontrada. Uma observação a ser feita é que, no desenvolvimento do TFC, essa constante sempre se anula, ou seja, não é necessário mostra-la para integrais definidas. Exemplo de integral indefinida:

$$\boxed{F(x) + C = \int f(x)dx \quad\quad C \in \mathbb{R}}$$

Integrais Usuais

As integrais tabeladas abaixo foram encontradas fazendo-se o caminho inverso das regras práticas de derivação.

Função	Integral
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq 1$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C \quad a \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x \rvert + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\sec^2(x)$	$\tan(x) + C$
$\csc^2(x)$	$-\cot(x) + C$
$\sec(x)\tan(x)$	$\sec(x) + C$
$\csc(x)\cot(x)$	$-\csc(x) + C$
$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

Regras de Integração

Integração por Substituição

$$\boxed{\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du}$$

Integração por Partes

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\int (fg)' = \int f'g + \int fg'$$

$$\boxed{\int fg' = fg - \int f'g}$$

Integrais Trigonométricas

1° Caso

$$\int \sin^{\mathrm{m}}(x)\cos^{\mathrm{n}}(x)\,dx$$

Se n é ímpar, então:

- Guardar um $\cos(x)$ ao final do integrando;

- Usar $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$;

- Substituir $u = \sin(x)$.

Exemplo

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(x)\cos^3(x)\,dx$$

$$u = \sin(x) \quad \rightarrow \quad du = \cos(x)\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(x)\cos^2(x)\cos(x)\,dx \quad \rightarrow \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{u}^2(1-\mathrm{u}^2)du$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{u}^2(1-\mathrm{u}^2)du = \int_0^{\frac{1}{2}} (\mathrm{u}^2-\mathrm{u}^4)du = \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 \Big|\begin{matrix}0{,}5\\0\end{matrix} = \frac{17}{480}$$

Se m é ímpar, então:

- Guardar um $\sin(x)$ ao final do integrando;

- Usar $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$;

- Substituir $u = \cos(x)$.

Exemplo

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3(x)\cos^2(x)\,dx$$

$$u = \cos(x) \quad \rightarrow \quad -du = \sin(x)\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2(x)\cos^2(x)\sin(x)\,dx \quad \rightarrow \quad \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} (1-u^2)u^2\,du$$

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} (1-u^2)u^2\,du = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} (\mathrm{u}^2-\mathrm{u}^4)\,du = \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 \Big|\begin{matrix}1\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{matrix} = \frac{64-33\sqrt{3}}{480}$$

Se m e n são pares, então:

- Usar $\sin^2(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$;

- Usar $\cos^2(x) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)]$.

Exemplo

$$\int \cos^2(x)\, dx = \frac{1}{2}\int [1 + \cos(2x)]dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

2° Caso

$$\int \tan^{\mathrm{m}}(x) \sec^{\mathrm{n}}(x)\, dx$$

Se n é par, então:

- Guardar um $\sec^2(x)$ ao final do integrando;

- Usar $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$;

- Substituir $u = \tan(x)$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6(x) \sec^4(x)\, dx$$

$$u = \tan(x) \quad \rightarrow \quad du = \sec^2(x)\, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6(x)\, [1 + \tan^2(x)] \sec^2(x)\, dx \quad \rightarrow \quad \int_0^1 u^6(1 + u^2)du$$

$$\int_0^1 u^6(1+u^2)du = \int_0^1 (u^6+u^8)du = \frac{1}{7}u^7 + \frac{1}{9}u^9\bigg|\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = \frac{16}{63}$$

Se m é ímpar, então:

- Guardar um $\tan(x)\sec(x)$ ao final do integrando;

- Usar $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$;

- Substituir $u = \sec(x)$.

$$\int \tan^5(x)\sec^2(x)\,dx$$

$$u = \sec(x) \quad \rightarrow \quad du = \tan(x)\sec(x)\,dx$$

$$\int \tan^4(x)\sec(x)\tan(x)\sec(x)\,dx = \int [u^2-1]^2\,udu$$

$$\int (u^5 - 2u^3 + u)du = \frac{1}{6}u^6 - \frac{1}{2}u^4 + \frac{1}{2}u^2 + C$$

O 2° caso pode ser estendido para $\int \cot^{\mathrm{m}}(x)\csc^{\mathrm{n}}(x)\,dx$.

3° Caso

$$\int \sin(mx)\cos(nx)\,dx$$

Usar $\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\sin(A-B) + \sin(A+B)]$.

$$\int \sin(mx)\sin(nx)\,dx$$

Usar $\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$.

$$\int \cos(mx)\cos(nx)\,dx$$

Usar $\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$.

Exemplo

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(4x)\cos(5x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} [\sin(-x) + \sin(9x)]dx$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} [\sin(9x) - \sin(x)]dx = \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{18}\cos(9x)\bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{5}{36}$$

Integração por Substituição Trigonométrica

Expressão	Substituição
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\sin(\theta) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\tan(\theta) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec(\theta) \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Exemplo

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx$$

$$x = 3\sin(\theta) \quad \rightarrow \quad dx = 3\cos(\theta)\, d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx = \int \frac{\cos(\theta)\sqrt{9[1 - \sin^2(\theta)]}}{3\sin^2(\theta)}\, d\theta = \int \frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)}\, d\theta$$

$$\int \cot^2(\theta)\, d\theta = \int [\csc^2(\theta) - 1] d\theta = -\cot(\theta) - \theta + C$$

$$\cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}}{\frac{x}{3}} = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$$

$$x = 3\sin(\theta) \quad \rightarrow \quad \sin(\theta) = \frac{x}{3} \quad \rightarrow \quad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\therefore \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} - \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

A estratégia é transformar uma função racional em uma soma de frações mais simples, em geral, com termos irredutíveis, para que seja possível determinar o valor da integral.

1° Caso: O denominador é um produto de fatores lineares distintos.

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Exemplo

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$$

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{1}{5} \\ C = -\dfrac{1}{10} \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx = \int \left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{5(2x - 1)} - \frac{1}{10(x + 2)}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{10}\ln|2x - 1| - \frac{1}{10}\ln|x + 2| + C$$

2° Caso: $Q(x)$ é um produto de fatores lineares, mas alguns deles são repetidos.

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{a_1x + b_1} + \cdots + \frac{A_{1k}}{(a_1x + b_1)^k} + \cdots + \frac{A_{n1}}{a_nx + b_n} + \cdots + \frac{A_{nk}}{(a_nx + b_n)^k}$$

Exemplo

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx$$

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$\int \left(x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 + x + 4\int \frac{x}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx$$

$$\frac{x}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{4} \\ B = \dfrac{1}{2} \\ C = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx = \int \frac{1}{4(x - 1)} + \frac{1}{2(x - 1)^2} - \frac{1}{4(x + 1)}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x - 1| - \frac{1}{2(x - 1)} - \frac{1}{4}\ln|x + 1| + C$$

$$\therefore \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + x + \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + \frac{2}{1 - x} + C$$

3° Caso: $Q(x)$ tem fatores quadráticos irredutíveis.

Exemplo

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$$

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}\right) dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{xdx}{x^2 + 4} - \int \frac{dx}{x^2 + 4}$$

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2 + 4| - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

4° Caso: Substituição racionalizante:

$$\int \frac{\sqrt{x + 4}}{x} dx$$

$$\begin{cases} u = \sqrt{x + 4} \\ x = u^2 - 4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x + 4}} \quad \rightarrow \quad dx = 2udu$$

$$\int \frac{\sqrt{x + 4}}{x} dx = 2\int \frac{u^2}{u^2 - 4} du = 2\int \left(1 + \frac{4}{u^2 - 4}\right) du$$

$$= 2u + 2\ln\left|\frac{u - 2}{u + 2}\right| + C = 2\sqrt{x + 4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x + 4} - 2}{\sqrt{x + 4} + 2}\right| + C$$

Integrais Impróprias

Tipo 1: São integrais sobre funções definidas em todo o intervalo analisado, tal que esse intervalo seja infinito.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_t^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)dx \qquad a \in \mathbb{R}$$

Todas as integrais acima são chamadas convergentes se os limites existem, e chamadas divergentes caso contrário.

Tipo 2: O integrando é descontínuo no intervalo dado.

Se f é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b, então:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

Já se f é contínua em $(a, b]$ e descontínua em a, então:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

Agora, se f tiver uma descontinuidade em c, onde $a < c < b$, e ambos $\int_a^c f(x)dx$ e $\int_c^b f(x)dx$ convergem, então:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Área entre curvas

A área A da região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são contínuas e $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a,\ b]$ é:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Já a área A da região limitada pela curva $y = f(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$, onde f é contínua $\forall x \in [a,\ b]$ é:

$$A = \underbrace{\int f(x)dx}_{Onde\ f(x) \geq 0\ em\ [a,b]} + \underbrace{\left|\int f(x)dx\right|}_{Onde\ f(x) < 0\ em\ [a,b]}$$

Para um caso onde se quer somente encontrar o valor da área A entre duas funções f e g, não é necessário saber qual função é maior que a outra no intervalo analisado, basta aplicar o módulo na integral da diferença entre as funções, não importando a ordem da subtração, já que:

$$A = \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]dx\right| = \left|\int_a^b [g(x) - f(x)]dx\right|$$

Exemplo

Determine a área da região limitada entre as parábolas $y = x^2$ e $y = 2x - x^2$.

$$x^2 = 2x - x^2 \quad \rightarrow \quad 2x(x-1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0, x = 1$$

$$\left|\int_0^1 [x^2 - (2x - x^2)]dx\right| = 2\left|\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)\right|\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = 2\left|-\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{3}\ u.a.$$

Volumes de sólidos de revolução

Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da seção transversal de S no plano P_x, passando por x e perpendicular ao eixo x, é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o volume de S é:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x = \int_a^b A(x)dx$$

Exemplo

Deduza a fórmula do volume de uma esfera de raio r.

$$A(R) = \pi R^2 \quad \rightarrow \quad A(y) = \pi y^2$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = r^2 - x^2$$

$$A(x) = \pi(r^2 - x^2)$$

$$2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)dx = 2\pi \left[xr^2 - \frac{1}{3}x^3\right] \Bigg\| \begin{matrix} r \\ 0 \end{matrix} = 2\pi \left[r^3 - \frac{1}{3}r^3\right] = \frac{4\pi r^3}{3}$$