Fórmula de Taylor

A Fórmula de Taylor consiste em um método de aproximação de uma função por um polinômio, com erro possível de ser estimado.

Definição: Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas até ordem n num ponto c no intervalo I. O polinômio de Taylor de ordem n de f no ponto c, que denotamos por $P_n\ (x)$, é dado por:

$$P_n\ (x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n$$

$$P_n\ (x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}f^{(k)}(c)(x-c)^k$$

Agora, dado o polinômio de Taylor de grau n de uma função, denotamos por $R_n\ (x)$ a diferença entre $f(x)$ e $P_n\ (x)$, entendendo $R_n\ (x)$ como o resto ou o erro da aproximação de $f(x)$ por $P_n\ (x)$.

$$R_n\ (x) = |f(x) - P_n\ (x)| = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(z)(x-c)^{n+1}$$

Onde z está entre c e x. Logo podemos escrever $f(x)$ como:

$$f(x) = P_n\ (x) + R_n\ (x)$$

$$f(x) = \ f(c) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(z)(x-c)^{n+1}$$

Quanto maior o grau do polinômio e quanto mais próximo o valor de referência c estiver do valor x que se deseja descobrir, maior será a precisão do calculo.

Exemplo

Determine os polinômios de Taylor de grau 2 e grau 4 da função $f(x) = \cos(x)$, no ponto $c = 0$. Após isso, encontre um valor aproximado para $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e estime seu erro.

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

$$= \cos(0) - \sin(0)\,x - \frac{1}{2}\cos(0)\,x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \frac{1}{24}f^{(iv)}(0)x^4$$

$$= \cos(0) - \sin(0)\,x - \frac{1}{2}\cos(0)\,x^2 + \frac{1}{6}\sin(0)\,x^3 + \frac{1}{24}\cos(0)\,x^4$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

$$R_4\,(x) = \frac{1}{120}f^{(v)}(z)x^5 = -\frac{\sin(z)}{120}x^5$$

Nesse caso vamos admitir um “teto” para a função $R_4\,(x)$, ou seja, o valor máximo que ela pode assumir, para que então possamos analisar o erro encontrado.

$$|-\sin(z)| \le 1 \quad \rightarrow \quad R_4\,(x) = \frac{1}{120}x^5$$

$$P_4\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{6}\right)^4 = 0{,}866053883\ \ldots$$

$$R_4\ \left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5 = 0{,}000327953\ \ldots$$

Portanto, pela estimativa de erro, temos que até a terceira casa decimal do valor encontrado no polinômio de Taylor está correto. Como confirmação, o valor de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ calculado na calculadora nos retorna:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}866025403\ \ldots$$

Percebe-se que até a quarta casa decimal o valor está correto, isso acontece porque na estimativa do erro temos certeza até aquela casa decimal, no caso a terceira.