Matrizes

Matriz, no seu conceito mais básico, é uma tabela de elementos a_{ij} dispostos em m linhas e n colunas sobre um corpo numérico K, onde $a_{ij} \in K$.

Dimensão de uma matriz

$$\boxed{A = [a_{ij}]_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}}$$

Acima temos uma matriz de $\dim(A) = mxn$, ou seja, a dimensão de uma matriz é dada pelo seu número de linhas (m) e o seu número de colunas (n). Os subíndices dos elementos a_{ij} dispostos na matriz A simbolizam a respectiva posição desse elemento $(i = linha, j = coluna)$.

Operações com Matrizes e Suas Propriedades

Soma de Matrizes

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

Na soma de matrizes basicamente soma-se termo a termo de ambas as matrizes. A única condição necessária para que a soma de matrizes seja possível é que $\dim(A) = \dim(B)$.

Propriedades

$$\begin{gathered} A+B=B+A \\ A+\vec{O}=A \\ A+(B+C)=(A+B)+C \\ A+(-A)=\vec{O} \end{gathered}$$

Em que $\vec{O}$ é a matriz nula

$$\vec{O}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{mxn}$$

Multiplicação de Matriz por Escalar

$$\boxed{\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}}$$

Na multiplicação de uma matriz A por um escalar $\lambda \in K$, a matriz resultante é igual à matriz original só que com cada elemento multiplicado por λ.

Produto de Matrizes

$$\boxed{\begin{aligned} C = AB = &\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}_{nxk} \\ = &\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{1n} & \cdots & a_{11}b_{1k} + \cdots + a_{1n}b_{nk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1k} + \cdots + a_{mn}b_{nk} \end{bmatrix}_{mxk} \end{aligned}}$$

A condição necessária para que seja possível o produto de matrizes é que o número de colunas de A seja igual ao número de linhas de B. No produto de matrizes somamos o produto dois a dois dos elementos da primeira linha de A pela primeira coluna de B, essa soma resulta no elemento c_{11} da matriz resultante, ao fazermos o mesmo processo só que com a segunda coluna de B teremos o elemento c_{12} e assim por diante, os subíndices dos elementos resultantes mostram qual linha de A (i) foi multiplicada pela coluna de B (j). A dimensão da matriz resultante será o número de linhas de A pelo número de colunas de B, ou seja, $\dim(C) = mxk$.

Propriedades

$$\boxed{\begin{gathered} AB \neq BA \\ (AB)C = A(BC) \\ A(B+C) = AB + AC \\ (B+C)A = BA + CA \\ (B-C)A = \vec{O} \rightarrow A = \vec{O} \; ou \; B = C \end{gathered}}$$

Determinante de uma Matriz e Suas Propriedades

O determinante é um número associado a uma matriz nxn que apresenta algumas propriedades significativas no estudo das matrizes, como mostrar se uma matriz admite inversa (det $(A) \neq 0$), ou se um conjunto de vetores dispostos em uma matriz são linearmente dependentes ($\det(A) = 0$), entre outras funções. O determinante deriva de uma sequência lógica de operações algébricas em cima dos elementos de uma matriz e essa sequência varia de acordo com a ordem (n) da matriz.

Para $n = 1$

$$\boxed{\begin{gathered} A = \left[a_{ij}\right]_{1x1} \\ \det(A) = a_{11} \end{gathered}}$$

Para $n = 2$

$$\boxed{\begin{gathered} A = [a_{ij}]_{2x2} \\ \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{gathered}}$$

Para $n = 3$

$$\boxed{\begin{gathered} A = [a_{ij}]_{3x3} \\ \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \end{gathered}}$$

Para $n \geq 4$ (Teorema de Laplace)

Quando a ordem de uma matriz A for maior ou igual a quatro é recomendável que se use o Teorema de Laplace que diz que o determinante de qualquer matriz é igual à soma dos cofatores A_{ij} dessa matriz.

$$\boxed{\begin{gathered} \det(A) = \sum A_{ij} \\ A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij} \end{gathered}}$$

O número D_{ij} presente no cálculo do cofator é chamado de menor complementar e ele é encontrado fazendo o determinante da matriz resultante quando se elimina a linha e a coluna do elemento a_{ij} escolhido para o cálculo do cofator.

Propriedades

$$\det(I) = 1$$
$$\det(A) = \det(A^T)$$
$$\det(AB) = \det(A)\det(\mathrm{B})$$
$$AA^{-1} = I \ \rightarrow \det(AA^{-1}) = \det(I) \rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}, \det(A) \neq 0$$
$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A), \lambda \in K$$
$$\det(A^\lambda) = [\det(A)]^\lambda, \lambda \in K$$
$$\det(\vec{O}) = 0$$

Se A é uma matriz triangular: $\det(A) = \prod a_{ii}$.

Se A tem uma linha ou coluna de zeros (nula): $\det(A) = 0$

Se λ multiplica alguma linha ou coluna de A: $\det(A') = \lambda \det(A)$

Se houver permutação entre duas linhas ou duas colunas de A: $\det(A') = -\det(A)$

Se somarmos a uma linha ou coluna um múltiplo de outra linha ou coluna de A: $\det(A') = \det(A)$

Se A tem duas ou mais linhas e colunas múltiplas ou iguais: $\det(A) = 0$

Traço de uma Matriz e Suas Propriedades

$$\boxed{tr(A) = \sum a_{ii}}$$

O traço de uma matriz é a soma dos elementos da diagonal principal dessa matriz.

Propriedades

$$\boxed{\begin{array}{c} tr(A + B) = tr(A) + tr(B) \\ tr(\lambda A) = \lambda tr(A) \\ tr(A) = tr(A^T) \\ tr(AB) = tr(BA) \end{array}}$$

Tipos de Matrizes e Suas Propriedades

Quadrada

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn}}$$

A matriz quadrada nada mais é do que uma matriz com o número de linhas igual a número de colunas $(m = n)$. Apenas matrizes quadradas têm determinante.

Identidade

$$\boxed{I = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{nxn}}$$

A matriz identidade é uma matriz definida pela expressão $a_{ij} := \begin{cases} 1, se\ i = j \\ 0, se\ i \neq j \end{cases}$, ou seja, os elementos da diagonal principal da matriz identidade são iguais a um e todos os outros são iguais a zero.

Propriedades

$$\boxed{\begin{gathered} AI = IA = A \\ tr(I) = n \\ I^{-1}I = I \rightarrow I^{-1} = I \\ I^T = I \\ \det(I) = 1 \\ I^{\lambda} = I, \lambda \in K \end{gathered}}$$

Inversa

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

A matriz inversa A^{-1} da matriz A tem a propriedade de ao ser multiplicada pela matriz A resultar na matriz identidade I. Quando existe a matriz inversa de determinada matriz ela é única.

Propriedades e Demonstrações

$$\boxed{\begin{array}{c} A^{-1}(A^{-1})^{-1} = I \rightarrow A^{-1}(A^{-1})^{-1} = A^{-1}A \rightarrow AA^{-1}(A^{-1})^{-1} = AA^{-1}A \\ \rightarrow I(A^{-1})^{-1} = IA \quad \therefore \quad (A^{-1})^{-1} = A \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = I = B^{-1}B = B^{-1}(A^{-1}A)B = (B^{-1}A^{-1})(AB) \\ \rightarrow (AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) \\ \rightarrow (AB)^{-1}(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (AB)^{-1}(B^{-1}A^{-1})(AB) \\ \rightarrow I(B^{-1}A^{-1}) = (AB)^{-1}I \ \therefore \ (AB)^{-1} = (B^{-1}A^{-1}) \\ Generalizando\ (A_1A_2 \ldots A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{n-1}^{-1} \ldots A_1^{-1} \end{array}}$$

$$\boxed{I = I^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = (A^T)^{-1}A^T \ \therefore \ (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}}$$

$$\boxed{(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1} = \frac{A^{-1}}{\lambda}, \lambda \in K, \lambda \neq 0}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} AA^{-1} = I \ \rightarrow \det(AA^{-1}) = \det(I) \rightarrow \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} \\ A\ condição\ de\ exitência\ da\ matriz\ inversa\ é\ que\ o\ \det(A) \neq 0 \end{array}}$$

Para encontrar a matriz inversa monta-se a matriz ampliada $[A \vdots I]$ e por meio de transformações usando operações elementares chega-se na matriz ampliada $[I \vdots A^{-1}]$.

Matriz Transposta

$$\boxed{A = [a_{ij}]_{mxn} \rightarrow A^T = [a_{ji}]_{nxm}}$$

A matriz transposta de uma matriz A é a matriz A com as suas linhas e colunas permutadas, há uma reflexão dos elementos em torno da diagonal principal da matriz, esta que não se altera.

Propriedades

$$\boxed{\begin{gathered}(A^T)^T = A \\ (A+B)^T = A^T + B^T \\ (\lambda A)^T = \lambda A^T, \lambda \in K \\ (AB)^T = B^T A^T \\ \det(A^T) = \det(A)\end{gathered}}$$

Matriz Simétrica e Antissimétrica

$$\boxed{A = A^T}$$

$$\boxed{A = -A^T}$$

Para uma matriz ser simétrica ou antissimétrica ela deve quadrada já que a matriz transporta tem a dimensão inversa a da matriz original.

Propriedades

$$\boxed{B = A + A^T \rightarrow B = B^T}$$

Matriz Diagonal

$$\boxed{A = [a_{ij}]_{nxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn}}$$

Em que $a_{ij} := \begin{cases} Qualquer\ Número\ Real, se\ i = j \\ 0, se\ i \neq j \end{cases}$.

Propriedades

$$\boxed{\begin{gathered} A = A^T \\ \det(A) = \prod a_{ii} \end{gathered}}$$

Matriz Ortogonal

$$\boxed{\begin{gathered} A^T = A^{-1} \to AA^T(A^T)^{-1} = AA^{-1}(A^T)^{-1} \\ \therefore A = (A^T)^{-1} \end{gathered}}$$

Uma matriz A é dita ortogonal caso a sua transposta coincida com a sua inversa. Usando propriedades já vistas é possível concluir que a transposta de uma matriz ortogonal também é ortogonal.

Propriedades

$$\boxed{\begin{gathered} AA^{-1} = AA^T = I \\ \det(A)\det(A^{-1}) = 1 \to \det(A)\det(A^T) = \det(A)\det(A) = [\det(A)]^2 = 1 \\ \therefore \det(A) = \pm 1 \end{gathered}}$$

Matriz Ampliada

$$C_A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_{m1} & \dots & b_{mk} \end{bmatrix}_{mx(n+k)}$$

Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e a matriz $B = [b_{ij}]_{mxk}$, a matriz ampliada de A e B será a matriz C_A.

Matriz Escalonada e Escalonada Reduzida Para Sistemas Lineares de Equações (Eliminação de Gauss)

$$C_E = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_{m1} \end{bmatrix}$$

$$C_{ER} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \vdots & b_{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_{m1} \end{bmatrix}$$

Matriz Adjunta para Matrizes de Ordem 2

$$\boxed{\bar{A} = [C_{ij}]^T}$$

A matriz C_{ij} é chamada de matriz dos cofatores e é a matriz onde cada elemento a_{ij} da matriz A é substituído por seu cofator A_{ij}. Para matriz de ordem $n \geq 3$ torna-se inviável o uso da matriz adjunta para o cálculo da inversa. Para matrizes de ordem dois a matriz adjunta genérica é da seguinte forma:

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow\ C_{ij} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} \rightarrow\ \bar{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

A matriz adjunta é usada na seguinte expressão para o cálculo da inversa de A:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{\bar{A}}{\det(A)}}$$

Característica de uma Matriz e o Teorema de Rouché-Capelli

A característica $\rho(A)$ de uma matriz A é o valor que representa o número de linhas não nulas de A quando esta está em sua forma escalonada.

Agora, sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{mxn}$, $B = [b_{i1}]_{mx1}$ e a matriz ampliada $C = [A \vdots B]_{mx(n+1)}$. O Teorema de Rouché-Capelli nos diz que:

Se $\rho(A) = \rho(C) = n$ → Então o sistema tem o mesmo número de equações e incógnitas, portanto é possível e determinado (SPD).

Se $n > \rho(A) = \rho(C)$ → Então o sistema tem mais incógnitas do que equações, logo o sistema é possível e indeterminado (SPI). Para esse mesmo caso de sistema temos a seguinte fórmula que nos diz quantas variáveis livres o sistema possui, $\omega = n - \rho(C)$.

E se $\rho(C) > \rho(A)$ → Então nosso sistema apresenta a seguinte expressão $0 = b_{m1}, b_{m1} \neq 0$, ou seja, o sistema é impossível (SI).