GRAFOS

Prof. Cristhiane Xavier

Baseado em: Ziviani, Nivio. Projeto de Algoritmos – Cap.7 Algoritmos em Grafos.

Motivação

- Muitas aplicações em computação necessitam considerar um conjunto de conexões entre pares de objetos:
  - Existe um caminho para ir de um objeto a outro seguindo as conexões?
  - Qual é a menor distância entre um objeto e outro objeto?
  - Quantos outros objetos podem ser alcançados a partir de um determinado objeto?

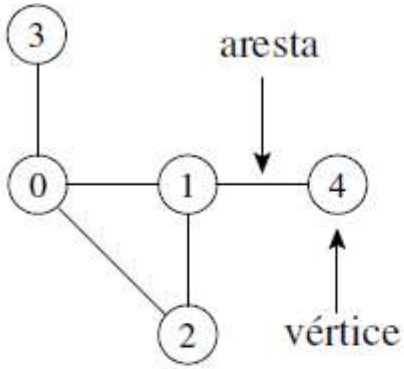
- Existe um tipo abstrato chamado **grafo** que é usado para modelar tais situações.

Aplicações

- Alguns exemplos de problemas práticos que podem ser resolvidos através de uma modelagem em grafos:
  - Ajudar máquinas de busca a localizar informação relevante na Web.
  - Descobrir os melhores casamentos entre posições disponíveis em empresas e pessoas que aplicaram para as posições de interesse.
  - Descobrir qual é o roteiro mais curto para visitar as principais cidades de uma região turística.

Conceito

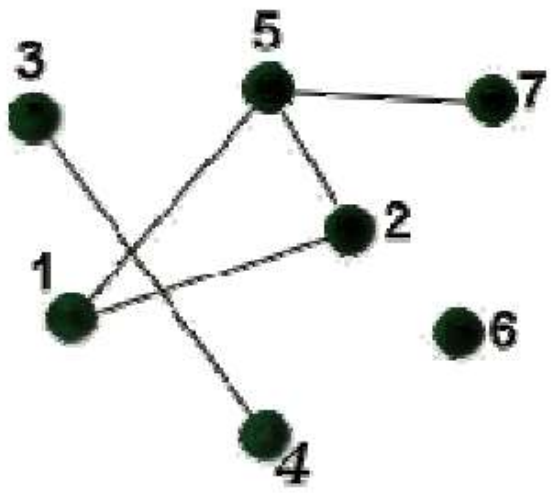
- Coleção de **vértices** e **arestas**;
  - Vértice é um objeto simples que pode ter nomes e outros atributos;
  - Aresta é uma conexão entre dois vértices.



- Notação: ***G = (V, A)***
  - ***V*** é um conjunto de vértices
  - ***A*** conjunto de arestas

Exemplo

- Os conjuntos abaixo definem um grafo ***G***:
  - $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
  - $A(G) = \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{5, 7\}$



Terminologia

- Dois vértices u e v são **adjacentes** (vizinhos) se $\{u,v\} \in E(G)$, ou seja, se há pelo menos uma aresta ligando u a v em G.

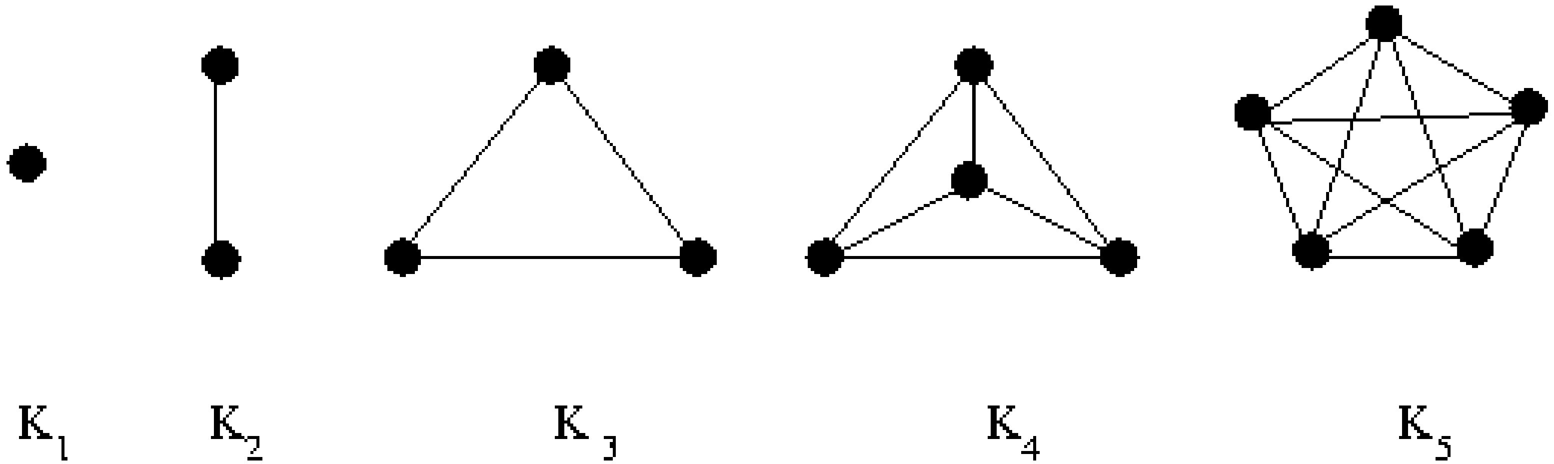
- Duas arestas são adjacentes se possuem um vértice em comum.

- Um grafo que possui um único vértice é chamado de *trivial*, os demais grafos são *não-triviais*.

- Um grafo é *simples* se não possui laços nem aresta paralela, ou seja, ligando os mesmos pares de vértices.

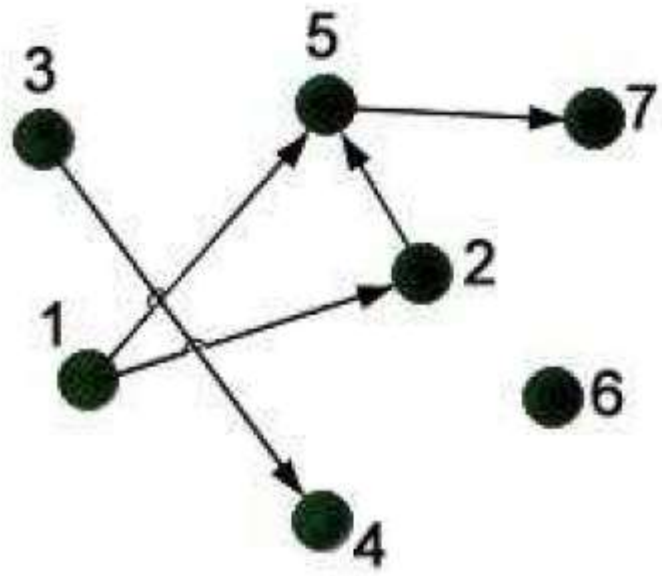
Grafo completo

- Cada par de vértices distintos é ligado por uma aresta, ou seja, possui arestas ligando todos os nós entre si.



Grafo direcionado

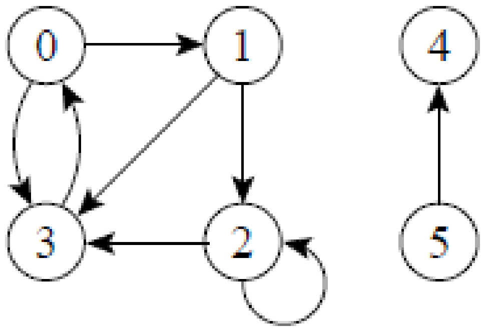
- O conjunto de arestas consiste em pares de vértices ordenados, onde a aresta (u,v) é diferente da aresta (v,u).



Grafo direcionado

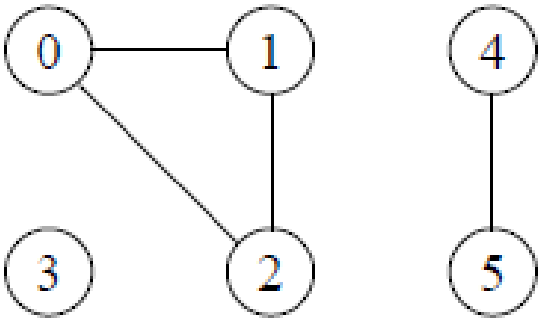
- Uma aresta (u, v) sai do vértice u e entra no vértice v. O vértice v é **adjacente** ao vértice u.

- Podem existir arestas de um vértice para ele mesmo, chamadas de *self-loops*.



Grafo não direcionado

- As arestas (u, v) e (v, u) são consideradas como uma única aresta. A relação de adjacência é simétrica.
- *Self-loops* não são permitidos.



Grau de um vértice

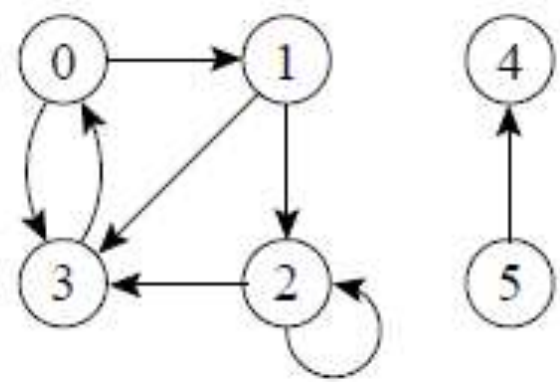
- O grau de um vértice u – ***d(u)*** – de um grafo não direcionado é o **número de arestas que incidem em *u***.

- Um vértice de grau zero é dito **isolado** ou **não conectado**.

- O grau de um vértice em um grafo direcionado é o número de arestas que chegam nele mais o número de arestas que saem dele.

Grau de um vértice

- Ex.: O vértice 2 tem *in-degree* 2, *out-degree* 2 e grau 4.

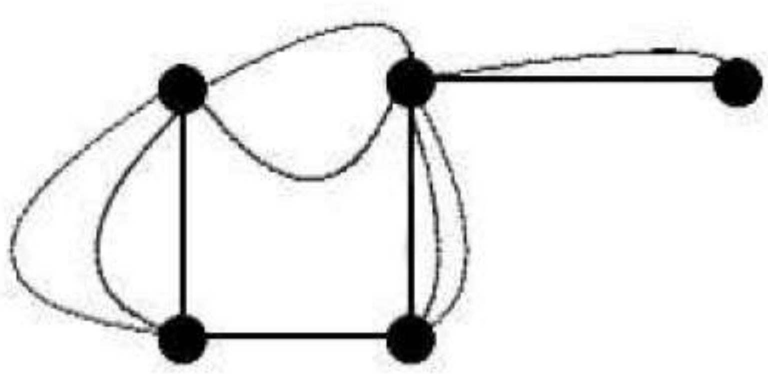


- A soma dos graus de todos os vértices de um grafo G é igual a 2 vezes o número do arestas, ou seja,

$$\sum_{u \in V} d(u) = 2\,|E|$$

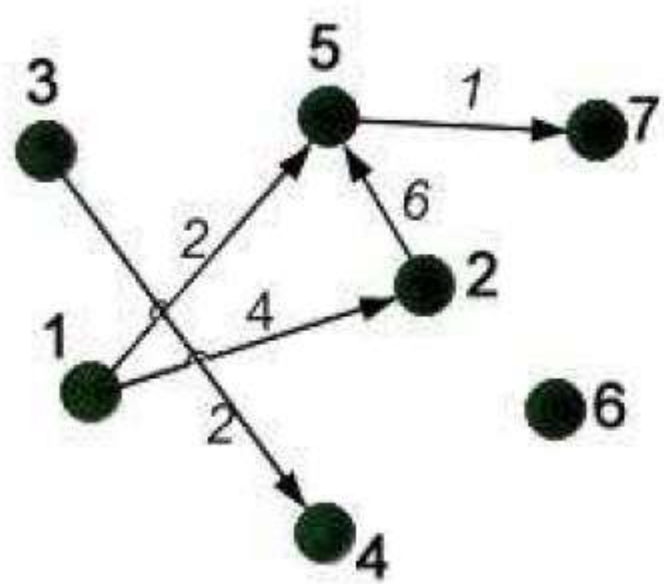
Multigrafo

- Pode-se ter várias arestas incidentes no mesmo par de vértices.



Grafo ponderado ou valorado

- Possui valores associados às suas arestas que representam, por exemplo, custo, peso, distância, comprimento, etc..



Caminho em Grafos

- Um caminho de comprimento k de um vértice $\boldsymbol{v_1}$ a um vértice $\boldsymbol{v_n}$ em um grafo é uma sequência de vértices: $(v_1, v_2, v_3, \ldots v_{n-1}, v_n)$.

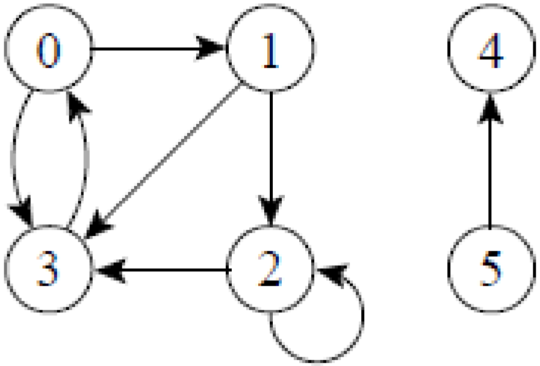
- O comprimento do caminho é o número de arestas dele.

- Se existir um caminho de v_o a v_n, é dito que v_n é alcançável por v_o.

Caminho em grafos

- Um caminho é **simples** se todos os vértices do caminho são distintos.

- Ex.: O caminho (0, 1, 2, 3) é simples e tem comprimento 3. O caminho (1, 3, 0, 3) não é simples.

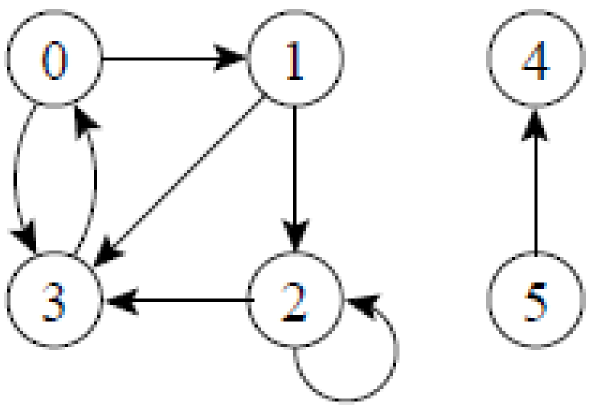


Ciclos

- Em um grafo direcionado:
  - Um caminho $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ forma um ciclo se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos uma aresta.
  - O ciclo é simples se os vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são distintos.
  - O *self-loop* é um ciclo de tamanho 1.

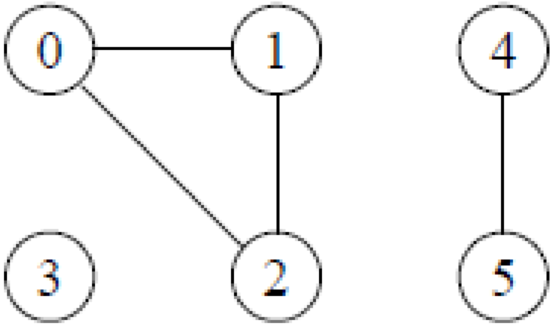
Ciclos

- Ex.: O caminho (0, 1, 2, 3, 0) forma um ciclo. O caminho(0, 1, 3, 0) forma o mesmo ciclo que os caminhos (1, 3, 0, 1) e (3, 0, 1, 3).



Ciclos

- Em um grafo não direcionado:
  - Um caminho ($v_0, v_1, \ldots, v_k$) forma um ciclo se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos três arestas.
  - O ciclo é simples se os vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são distintos.
  - Ex.: O caminho (0, 1, 2, 0) é um ciclo.

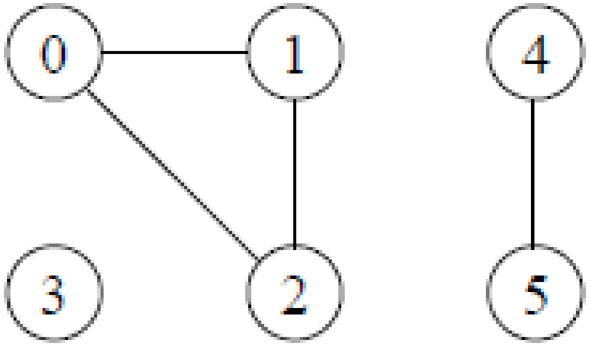


Componentes Conectados

- Um grafo não direcionado é conectado se cada par de vértices está conectado por um caminho.
- Os componentes conectados são as porções conectadas de um grafo.
- Um grafo não direcionado é conectado se ele tem exatamente um componente conectado.

Componentes Conectados

- Ex.: Os componentes são: {0, 1, 2}, {4, 5} e {3}.



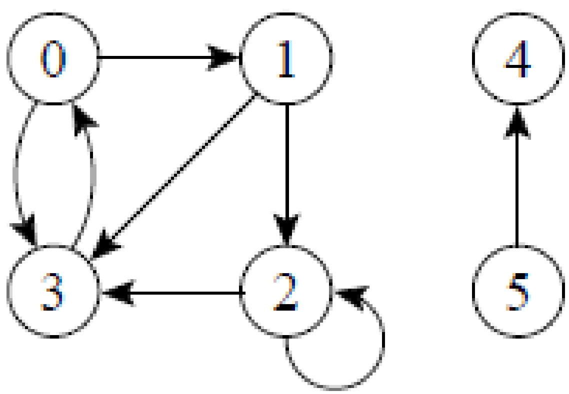
Componentes fortemente conectados

- Um grafo direcionado G = (V,A) é **fortemente conectado** se cada dois vértices quaisquer são alcançáveis a partir um do outro.

- Os **componentes fortemente conectados** de um grafo direcionado são conjuntos de vértices sob a relação “são mutuamente alcançáveis”.

Componentes fortemente conectados

- Ex.: {0, 1, 2, 3}, {4} e {5} são os componentes fortemente conectados, {4, 5} não o é pois o vértice 5 não é alcançável a partir do vértice 4.



Representação Computacional

- Em geral, um grafo pode ser representado de três formas:
  - Matriz de Adjacências
  - Matriz de Incidências
  - Lista de Adjacências

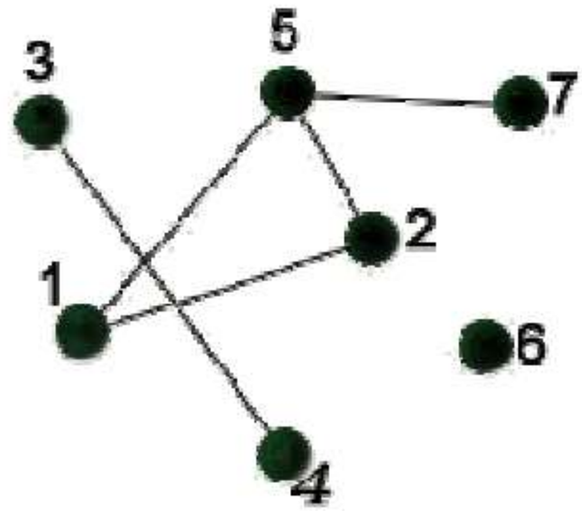
Matriz de Adjacências

- É uma matriz A |V| x |V|, onde

$$
Aij = \begin{cases} 1, \text{ se existe a aresta } v_i v_j \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}
$$

  - Para grafos ponderados A[i, j] contém o rótulo ou peso associado à aresta.
  - Se não existir uma aresta de i para j então é necessário utilizar um valor que não possa ser usado como rótulo ou peso.

Matriz de Adjacências



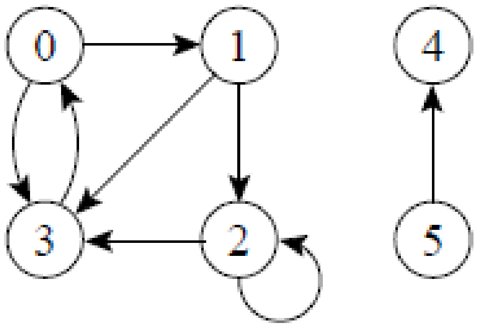
	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	0	1	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0
5	1	1	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0

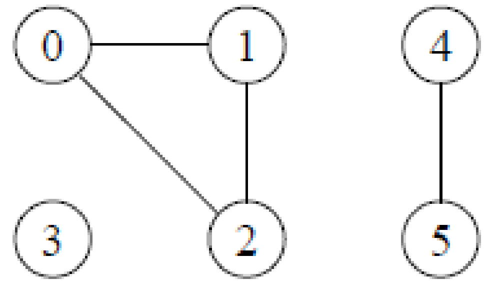
Matriz de Adjacências - Análise

- Deve ser utilizada para grafos **densos**, onde $|A|$ é próximo de $|V|^2$.
- O tempo necessário para acessar um elemento é independente de $|V|$ ou $|A|$.
- É muito útil para algoritmos em que necessitamos saber com rapidez se existe uma aresta ligando dois vértices.
- A maior desvantagem é que a matriz necessita de muito espaço.

Matriz de Adjacências

- Outros exemplos:





	0	1	2	3	4	5
0		1		1		
1			1	1		
2			1	1		
3	1					
4						
5						

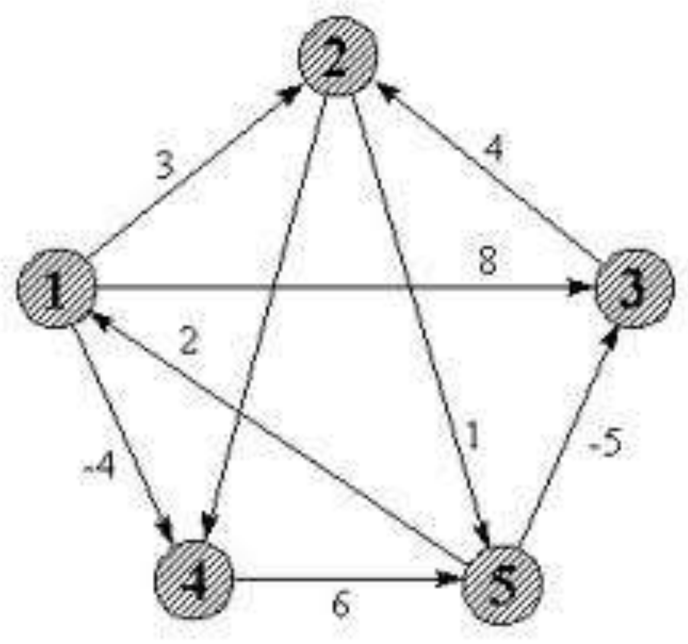
(a)

	0	1	2	3	4	5
0		1	1			
1	1		1			
2	1	1				
3						
4						
5						

(b)

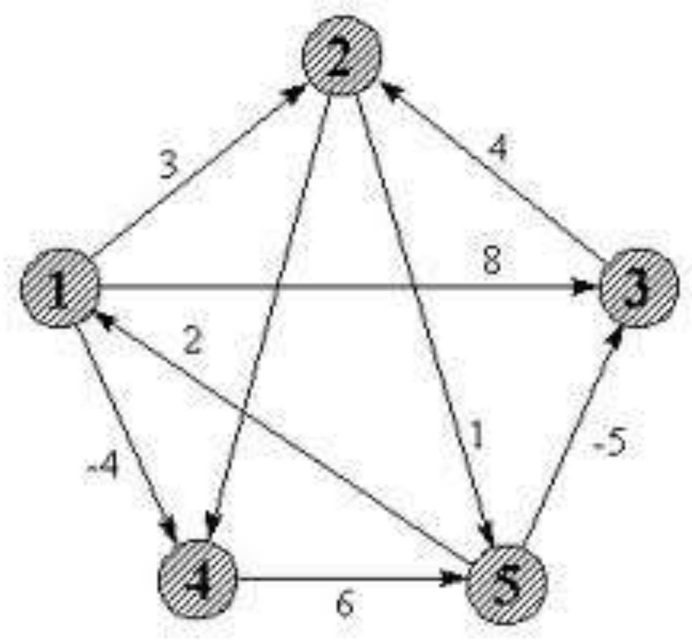
Exercício 1

- Criar a matriz de adjacências para o grafo abaixo:



Exercício 1

- Criar a matriz de adjacências para o grafo abaixo:

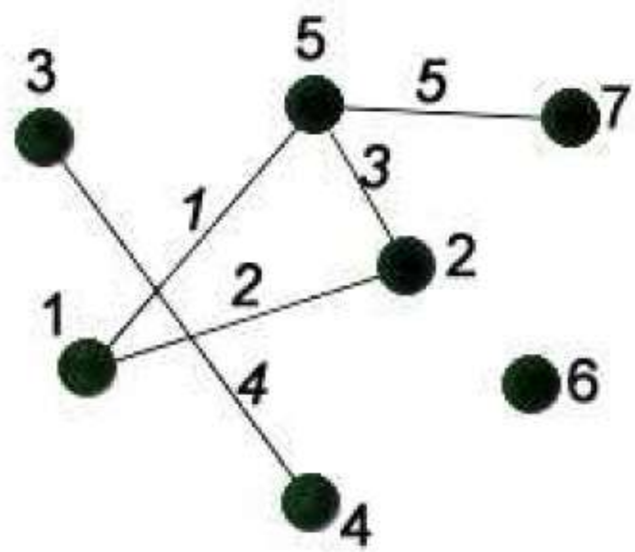


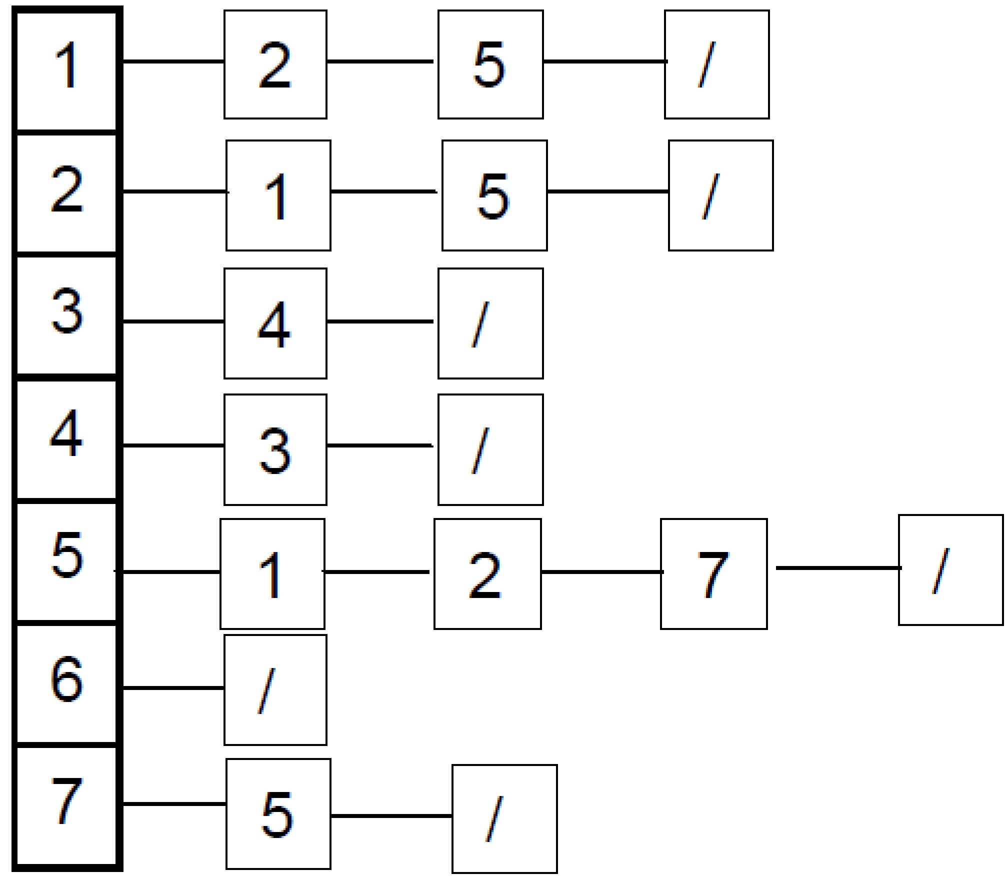
	1	2	3	4	5
1	0	3	8	-4	0
2	0	0	0	10	1
3	0	4	0	0	0
4	0	0	0	0	6
5	2	0	-5	0	0

Lista de Adjacências

- **U**sadas para representar grafos esparsos, ou seja, onde o número de arestas é bem menor que $|V|^2$.
- Para cada vértice, existe uma lista encadeada contendo os vértices adjacentes, ou seja, que são ligados diretamente por uma aresta.

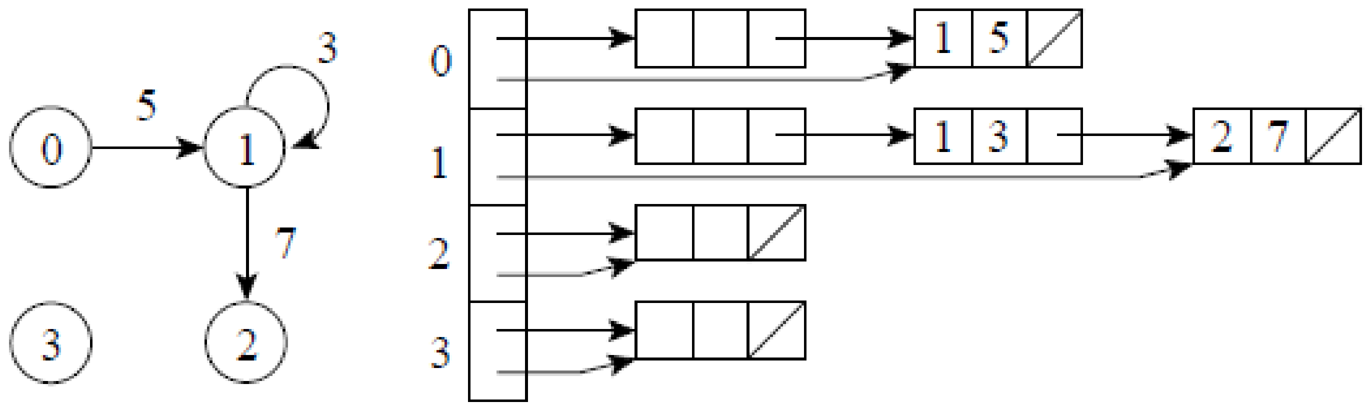
Lista de Adjacências

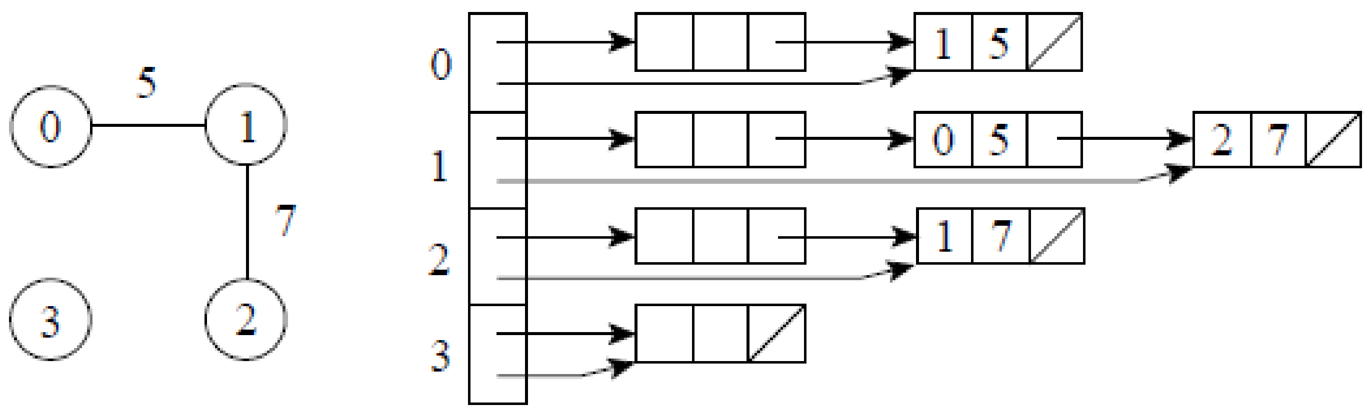




Lista de Adjacências

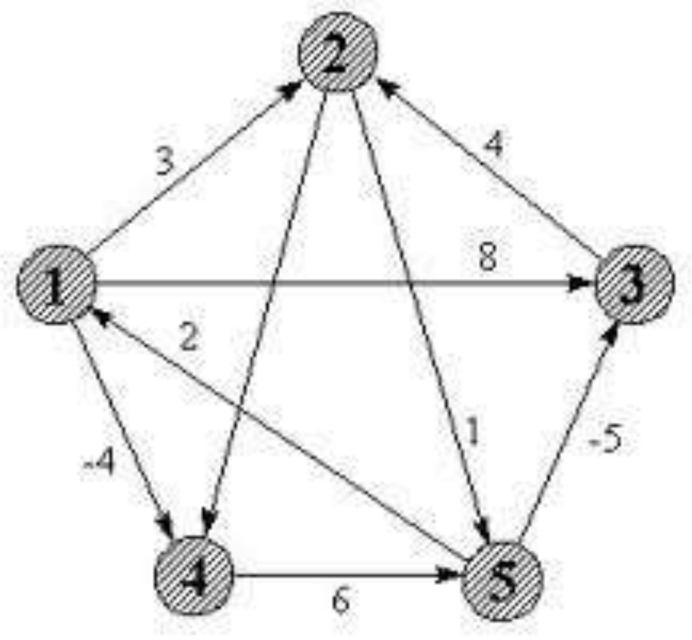
- Outro exemplo:





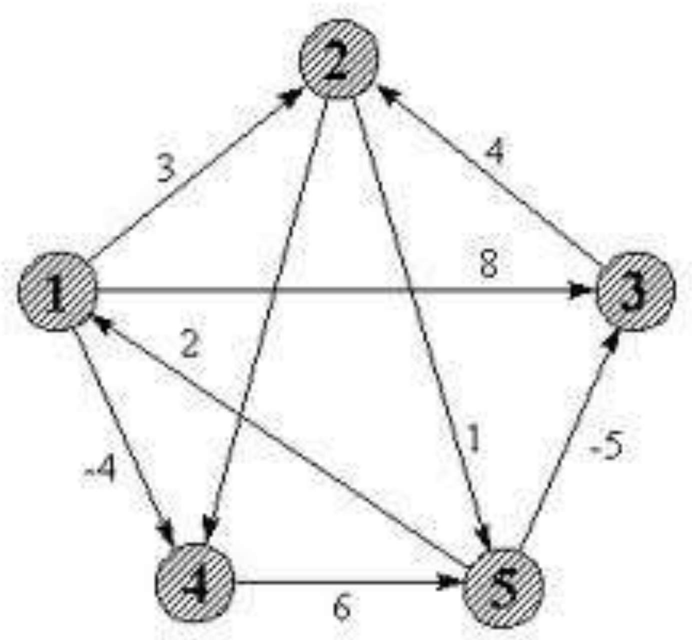
Exercício 2

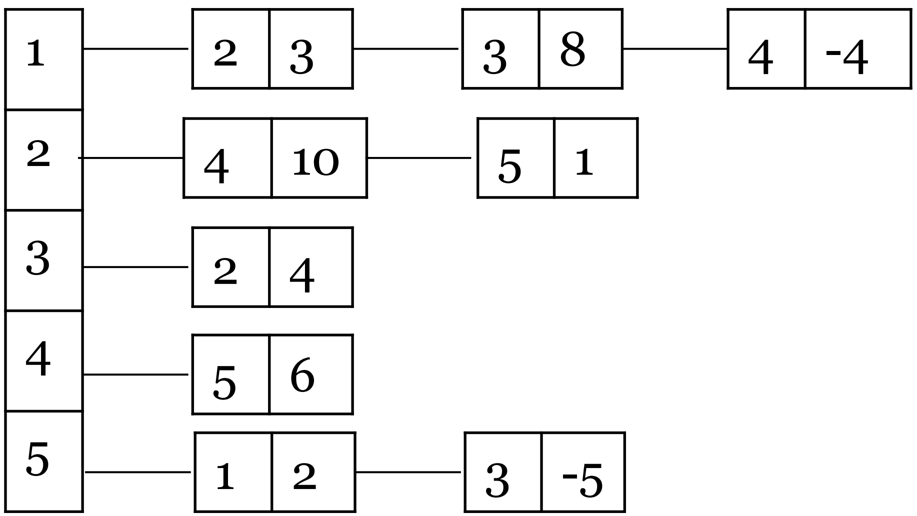
- Criar a lista de adjacências para o grafo abaixo:



Exercício 2

- Criar a lista de adjacências para o grafo abaixo:





Lista de Adjacências - análise

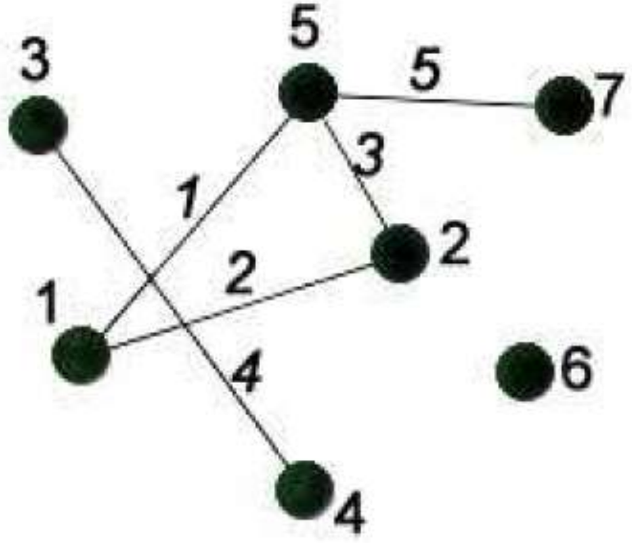
- Os vértices de uma lista de adjacência são em geral armazenados em uma ordem arbitrária.
- É compacta e usualmente utilizada na maioria das aplicações.
- A principal desvantagem é que ela pode gastar tempo maior do que a matriz para determinar se existe uma aresta entre o vértice i e o vértice j, pois podem existir n vértices na lista de adjacentes do vértice i.

Matriz de Incidências

- É uma matriz A|V| x |A|, onde as colunas representam os vértices e as linhas representam as arestas, e

$$Aij = \begin{cases} 1, \text{ se a aresta } e_j \text{ incide no vértice } v_i \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Matriz de Incidências



	1	2	3	4	5
1	1	1	0	0	0
2	0	1	1	0	0
3	0	0	0	1	0
4	0	0	0	1	0
5	1	0	1	0	1
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	1

Link para os vídeos das aulas

- AEDII 16/06/2020
- https://drive.google.com/file/d/1BqOi2jAaRdETfVZallhoRgq4gRJKrWm8/view?usp=sharing

- LABII 16/06/2020
- https://drive.google.com/file/d/1gYNhyWRbFdUDuG79lnmovU0W6cDTPKhV/view?usp=sharing