

Ueslei Aparecido Moreira Santos Pina - 11837081

João Otávio da Silva - 12563748

Nicolas de Góes - 12563780

Eduardo Maciel de Matos - 12563821

# PROPOSTA DE DESENVOLVIMENTO: Modelagem de Produção

São Carlos 2022

# Sumário

1. Introdução	3
2. Descrição da Produção	4
2.1 Materiais	4
2.2 Itens a serem produzidos	4
3. Restrições	7
4. Modelagem	7
Qualquer problema de maximização:	7
5. Código	9
6. Resultados Obtidos	15

### 1. Introdução

O seguinte relatório tem como objetivo documentar a solução de um problema de otimização linear, resolvido através do algoritmo *simplex*. O problema escolhido pelo grupo se assemelha com o problema de produção, visto em aula.

O nosso cenário consiste em uma empresa de manufatura de móveis e eletrodomésticos. Tendo em mãos, os equipamentos que podem ser produzidos, seus respectivos lucros, materiais utilizados e quantidade mínima a ser confeccionada, buscamos encontrar a melhor combinação de equipamentos a serem produzidos, de forma a maximizar o lucro obtido.

<u>Observação:</u> Os valores utilizados foram inferidos pelo grupo, foram realizadas algumas pesquisas a respeito de alguns equipamentos, de forma a tentar manter certa coerência. Porém, ainda assim, são valores estimados e não condizem 100% com a realidade.

#### 2. Descrição da Produção

#### 2.1 Materiais

- **Horas Homem**: Quantidade de horas empregadas por um ou mais trabalhadores para finalizar um produto.
- Unidades Estoque: O espaço utilizado para armazenar um produto no estoque.
- **Horas De Máquina** : Quantidade de horas em que um produto deve ser processado por uma máquina para ser confeccionado.
- Madeira Mdf: Quantidade de madeira necessária para a confecção de um produto.
- Plástico: Quantidade de plástico necessária para a confecção de um produto.
- Parafusos Pregos Rebites: Quantidade de parafusos, pregos e rebites necessária para a confecção de um produto.
- Vidro Temperado: Quantidade de vidro temperado necessária para a confecção de um produto.
- **Tecido**: Quantidade de tecido necessária para a confecção de um produto.
- **Aço**: Quantidade de aço necessária para a confecção de um produto.
- Tinta : Quantidade de tinta necessária para a confecção de um produto.
- Cola : Quantidade de cola necessária para a confecção de um produto.

#### 2.2 Itens a serem produzidos

**Armário de MDF:** quantidade mínima de 40 unidades produzidas, lucro de R\$ 900,00 por unidade, o tempo de produção é 24 de homens/hora, o espaço ocupado no estoque é de 4  $m^2$ , usa 8  $m^2$  de madeira MDF, 0.2 kg compõem as peças de plástico, são usados 0.1 kg de parafusos, pregos e rebites, é necessário 0.5  $m^2$  de vidro temperado e são 4 empregados horas de máquina.

**Guarda-roupas:** quantidade mínima de 40 unidades produzidas, lucro de R\$ 850,00 por unidade, o tempo de produção é 25 de homens/hora, o espaço ocupado no estoque é de 5  $m^2$ , usa 8  $m^2$  de madeira MDF, 0.2 kg compõem as peças de plástico, são usados 0.1 kg de parafusos, pregos e rebites e são empregados 4 horas de máquina.

**Fogão:** quantidade mínima de 9 unidades produzidas, lucro de R\$ 250,00 por unidade, o tempo de produção é 12 de homens/hora, o espaço ocupado no estoque é de 1  $m^2$ , 0.1 kg compõem as peças de plástico, são usados 0.05 kg de parafusos, pregos e rebites, é necessário 0.5  $m^2$  de vidro temperado, 20 kg de aço, são empregados 10 horas de máquina e 1 litro de tinta.

**Sofá:** quantidade mínima de 5 unidades produzidas, lucro de R\$ 650,00 por unidade, o tempo de produção é 20 de homens/hora, o espaço ocupado no estoque é de 3  $m^2$ , usa 0,5  $m^2$  de madeira MDF, 0.2 kg compõem as peças de plástico, são usados 0.1 kg de parafusos, pregos e rebites, 4  $m^2$  de tecido e são empregados 15 horas de máquina.

**Cadeira de madeira:** quantidade mínima de 40 unidades produzidas, lucro de R\$ 50,00 por unidade, o tempo de produção é 4 de homens/hora, o espaço ocupado no estoque é de  $0.25 m^2$ , usa  $0.5 m^2$  de madeira MDF, são usados 0.01 kg de parafusos, pregos e rebites,  $0.25 m^2$  de tecido e são empregados 3 horas de máquina.

**Cadeira de aço:** quantidade mínima de 40 unidades produzidas, lucro de R\$ 50,00 por unidade, o tempo de produção é 3 de homens/hora, o espaço ocupado no estoque é de  $0.25 \ m^2$ , 0.1 kg compõem as peças de plástico, 0.25  $m^2$  de tecido, 6 kg de aço, são empregados 3 horas de máquina e 0.5 litros de tinta.

**Painel de TV:** quantidade mínima de 20 unidades produzidas, lucro de R\$ 250,00 por unidade, o tempo de produção é 4 de homens/hora, o espaço ocupado no estoque é de  $0.15 \ m^2$ , usa 2  $m^2$  de madeira MDF, são usados 0.5 kg de parafusos, pregos e rebites, são empregados 2 horas de máquina e 50 gramas de cola.

**Escrivaninha**: quantidade mínima de 10 unidades produzidas, lucro de R\$ 180,00 por unidade, o tempo de produção é 3 de homens/hora, o espaço ocupado no estoque é de 0.2  $m^2$ , usa 1  $m^2$  de madeira MDF, são usados 0.01 kg de parafusos, pregos e rebites e são empregados 2 horas de máquina.

**Gabinete:** quantidade mínima de 30 unidades produzidas, lucro de R\$ 80,00 por unidade, o tempo de produção é 2 de homens/hora, o espaço ocupado no estoque é de  $0.1\ m^2$ , usa  $0.5\ m^2$  de madeira MDF, são usados  $0.01\ kg$  de parafusos, pregos e rebites, é necessário  $0.4\ m^2$  de vidro temperado, são empregados 1 hora e 30 minutos de máquina e 100 gramas de cola.

**Mesa de aço:** quantidade mínima de 10 unidades produzidas, lucro de R\$ 200,00 por unidade, o tempo de produção é 3 de homens/hora, o espaço ocupado no estoque é de 3  $m^2$ , é necessário 3.5  $m^2$  de vidro temperado, 5 kg de aço, são empregados 7 horas de máquina e 1 litro de tinta.

**Mesa de madeira** : quantidade mínima de 10 unidades produzidas, lucro de R\$ 300,00 por unidade, o tempo de produção é 6 de homens/hora, o espaço ocupado no estoque é de 3  $m^2$ , usa 1  $m^2$  de madeira MDF, são usados 0.01 kg de parafusos, pregos e rebites, é necessário 3.5  $m^2$  de vidro temperado, são empregados 12 horas de máquina e 100 gramas de cola.

**Cama de madeira:** quantidade mínima de 10 unidades produzidas, lucro de R\$ 600,00 por unidade, o tempo de produção é 8 de homens/hora, o espaço ocupado no estoque é de 2  $m^2$ , usa 3  $m^2$  de madeira MDF, 0.2 kg compõem as peças de plástico, são usados 0.02 kg de parafusos, pregos e rebites, são empregados 12 horas de máquina e 100 gramas de cola.

**Mesa de vidro:** quantidade mínima de 30 unidades produzidas, lucro de R\$ 1000,00 por unidade, o tempo de produção é 10 de homens/hora, o espaço ocupado no estoque é de 1  $m^2$ , 0.1 kg compõem as peças de plástico, são usados 0.01 kg de parafusos, pregos e rebites, é necessário 1  $m^2$  de vidro temperado, 2 kg de aço, são empregados 30 horas de máquina e 0.2 litros de tinta.

**Armário de aço:** quantidade mínima de 10 unidades produzidas, lucro de R\$ 400,00 por unidade, o tempo de produção é 30 de homens/hora, o espaço ocupado no estoque é de 3  $m^2$ , 0.2 kg compõem as peças de plástico, são usados 0.05 kg de parafusos, pregos e rebites, é necessário 0.2  $m^2$  de vidro temperado, 5 kg de aço, são empregados 20 horas de máquina, 0.5 litros de tinta e 100 gramas de cola.

**Janela de aço:** quantidade mínima de 20 unidades produzidas, lucro de R\$ 350,00 por unidade, o tempo de produção é 10 de homens/hora, o espaço ocupado no estoque é de 3  $m^2$ , 0.2 kg compõem as peças de plástico, são usados 0.1 kg de parafusos, pregos e rebites, é necessário 0.7  $m^2$  de vidro temperado, 3 kg de aço, são empregados 25 horas de máquina e 0.4 litros de tinta.

**Janela de madeira:** quantidade mínima de 10 unidades produzidas, lucro de R\$ 450 por unidade, o tempo de produção é 10 de homens/hora, o espaço ocupado no estoque é de 3  $m^2$ , usa 1  $m^2$  de madeira MDF, 0.1 kg compõem as peças de plástico, são usados 0.1 kg de parafusos, pregos e rebites, é necessário 0.7  $m^2$  de vidro temperado, 0.1 kg de aço, são empregados 20 horas de máquina, 0,2 litros de tinta e 100 gramas de cola.

**Estante de aço:** quantidade mínima de 9 unidades produzidas, lucro de R\$ 550,00 por unidade, o tempo de produção é 10 de homens/hora, o espaço ocupado no estoque é de  $0.6 \ m^2$ , são usados  $0.7 \ kg$  de parafusos, pregos e rebites, 18 kg de aço, são empregados 1 hora de máquina e  $0.4 \ litros$  de tinta

**Tábua de passar roupa:** quantidade mínima de 40 unidades produzidas, lucro de R\$ 80,00 por unidade, o tempo de produção é 5 de homens/hora, o espaço ocupado no estoque é de  $0.2\ m^2$ , usa  $0.35\ m^2$  de madeira MDF, são usados  $0.01\ kg$  de parafusos, pregos e rebites, é necessário  $0.1\ m^2$  de vidro temperado,  $0.2\ m^2$  de tecido, 2 kg de aço, são empregados 7 horas de máquina,  $0.1\ litro$  de tinta e 50 gramas de cola.

**Sapateira:** quantidade mínima de 30 unidades produzidas, lucro de R\$ 150,00 por unidade, o tempo de produção é 8 de homens/hora, o espaço ocupado no estoque é de 3  $m^2$ , usa 3,5  $m^2$  de madeira MDF, 0.1 kg compõem as peças de plástico, são usados 0.02 kg de parafusos, pregos e rebites, são empregados 7 horas de máquina, 2 litros de tinta e 150 gramas de cola.

**Cama de aço:** quantidade mínima de 7 unidades produzidas, lucro de R\$ 750,00 por unidade, o tempo de produção é 25 de homens/hora, o espaço ocupado no estoque é de 2  $m^2$ , usa 2  $m^2$  de madeira MDF, 0.1 kg compõem as peças de plástico, são usados 0.1 kg de parafusos, pregos e rebites, 20 kg de aço, são empregados 30 horas de máquina e 3 litros de tinta.

### 3. Restrições

Foram modeladas restrições de quantidade mínima que determinado produtos deve ser produzido (valores citados acima, na descrição dos produtos a serem produzidos) e restrições de quantidade de matéria prima disponível, valores descritos abaixo:

- ➤ Horas Homens : A quantidade disponível para a produção dos itens é de 70000 horas
- ightharpoonup Unidades Estoque : A quantidade disponível para a produção dos itens é de 9000  $m^2$
- $\rightarrow$  Madeira Mdf : A quantidade disponível para a produção dos itens é de  $40000m^2$
- > Plástico: A quantidade disponível para a produção dos itens é de 50000 kg
- Parafusos Pregos Rebites: A quantidade disponível para a produção dos itens é de 70000 kg
- ightharpoonup Vidro Temperado : A quantidade disponível para a produção dos itens é de 30000  $m^2$
- ightharpoonup Tecido: A quantidade disponível para a produção dos itens é de  $40000m^2$
- > Aço: A quantidade disponível para a produção dos itens é de 60000 kg
- ➤ Horas De Máquina : A quantidade disponível para a produção dos itens é de 100000 horas
- > Tinta: A quantidade disponível para a produção dos itens é de 30000 L
- > Cola : A quantidade disponível para a produção dos itens é de 30000 gramas

## 4. Modelagem

Qualquer problema de maximização:

$$max.: f(x)$$
  
s. a.:  $x \in D$ ,

pode ser transformado em um problema de minimização equivalente:

min.: 
$$-f(x)$$
  
s. a.:  $x \in D$ .

As soluções (x) locais e globais de ambos os problemas são as mesmas, com sinais opostos para os valores ótimos (da função)

min.: 
$$C^{T} x$$
  
s. a.:  $Ax \le b$   
 $A_{eq}x \le b_{eq}$ 

Modelagem do problema a partir das variáveis e restrições:

#### max.:

$$[\ 900x_{1} \ +850x_{2} + 250x_{3} + 650x_{4} + \ 50x_{5} + 50x_{6} + 250x_{7} + 180x_{8} + 80x_{9} + 200x_{10} + 300x_{11} + 600x_{12} + 1000x_{13} + 400x_{14} + 350x_{15} + 450x_{16} + 550x_{17} + 80x_{18} + 150x_{19} + 750x_{20} \ ]$$

#### s. a.:

### 5. Código

O problema foi resolvido através do método simplex, utilizando a linguagem de programação Python e duas de suas bibliotecas: *numpy* para operações algébricas e *texttable* para a impressão dos resultados formatados em tabela. A versão do método utilizada, foi a mesma implementação do algoritmo simplex feita em sala.

O programa começa com a importação das bibliotecas e a com a definição das funções referentes ao algoritmo simplex, implementadas em aula.

Essa é a implementação mais abstrata do simplex, é ela que o usuário chamará para resolver seu modelo. Recebe o vetor da função objetiva, a matriz A (lado esquerdo das restrições) e o vetor b (lado direito das restrições). O que ela faz é modificar o modelo, adicionando variáveis artificiais e desigualdades triviais, de tal forma que fica possível, com o retorno da base do simplex, descobrir se o modelo é inviável, nesse caso, é retornado para o usuário a falha em resolver o problema, caso contrário, foi achada uma base relativa a uma solução básica viável, que será usada como primeira base, para de fato resolver o modelo original através do simplex.

```
def simplex(c, A, b):
    # Modifica a função objetivo, para que somente as variáveis artificiais que serão inseridas, tenham peso.
   m, n = A.shape
   c tilde = np.zeros((n + m, ))
   c tilde[n:] = 1.0
   # Monta matriz quadrada com os valores das (des)igualdades na diagonal.
   I tilde = np.zeros((m, m))
   I_tilde[range(m), range(m)] = b
    # Monta nova matriz A_tilde, concatenando a matriz anterior a matriz original A.
    A_{\text{tilde}} = \text{np.empty}((m, n + m))
    A_{tilde[:, : n] = A}
   A_tilde[:, n:] = I_tilde
   # Monta a lista com o índice as colunas que serão usadas como base no simplex, no caso, as colunas referentes as variáveis artificiais.
   B_1 = list(range(n, n + m))
   # Chama o metódo simplex com o modedlo alterado, com o parâmetro para a função retornar a base.
   B 1 = simplex 1(c tilde, A tilde, b, B 1, return base=True)
    # Se o maior índice das colunas da base retornada é maior ou igual que n, o modelo é inviável.
   if max(B 1) >= n:
      retval['status'] = 'Invabilidade detectada'
       return retval
    # Se não, achou uma base inicial e chama o simplex para resolver o modelo original.
   return simplex_1(c, A, b, B_1)
```

Implementação do método simplex, de fato. A função recebe o vetor c, a matriz A, o vetor de um vetor com os índices das colunas da matriz A que serão usadas como base. Começa resolvendo o sistema com a primeira base, e preparando as variáveis (como os índices das colunas das variáveis não básicas) para a próxima etapa (iterações).

```
def simplex_l(c, A, b, B_l, return_base=False):
    m, n = A.shape
    N_l = [i for i in range(n) if i not in B_l]
    B = A[:, B_l]
    x_B = np.linalg.solve(B, b)
    retval = {}
```

Na figura da página abaixo, vemos a continuação da implementação da função. Começa os passos iterativos, são selecionados alguns valores que serão utilizados (como o vetor dos coeficientes da função objetiva relativas às variáveis básicas e não básicas), após isso, começam as operações de resolução de sistemas, multiplicação matricial e cálculo de variáveis que entrarão e sairão da base na próxima iteração. Essa etapa é quando vamos "pular" de SBV em SBV, e fazer comparações com as bases adjacentes, e identificar se já chegamos no ponto ótimo, se o problema é ilimitado ou precisamos ir para a próxima iteração.

```
while True:
    N = A[:, N_1]
    c_N = c[N_1]
    c_B = c[B_1]
    v = np.linalg.solve(B.T, c_B)
    z = c_N - v @ N
    i = np.argmin(z)
    if z[i] >= 0.0:
        if return_base:
           return B l
       x = np.zeros((n, ))
       x[B 1] = x B
        retval['status'] = 'Sucesso'
        retval['x'] = x
        return retval
    y = np.linalg.solve(B, N[:, i])
    if y[np.argmax(y)] <= 0:
        if return base:
           return B l
        x = np.zeros((n, ))
        x[B 1] = x B
        d = np.zeros((n, ))
        d[B 1] = y
        d[N 1[i]] = 1.0
       retval['status'] = 'Ilimitado'
        retval['x'] = x
        retval['d'] = d
        return retval
    eps = float('inf')
    1 = None
    for k in range(m):
        if y[k] > 0:
            if x B[k] / y[k] < eps:
                eps = x_B[k] / y[k]
                1 = k
    x_B = x_B - y * eps
    x_B[1] = eps
    tmp = B_1[1]
    B_1[1] = N_1[i]
    N_l[i] = tmp
    B = A[:, B_1]
```

Montagem do vetor de custo e da matriz com o lado esquerdo das restrições. Os coeficientes da função objetiva são negativos para transformar o problema de maximização em um de minimização. Os valores nulos no vetor c, representam as variáveis de folga.

Montagem do vetor com o lado direito das restrições. Os valores mínimos estão negativos, pois as desigualdades ">=", foram multiplicadas por -1, para transformar em "<="."

```
b = np.array([
   70000, # homens/hora/mes
   9000, # capacidade de estoque
   40000, # madeira MDF
   50000, # plástico
   70000, # parafusos / pregos / rebites (kg)
   30000, # vidro temperado m²
   40000, # tecido (m²)
   60000, # aço (kg)
   100000, # horas de máquina
   30000, # Tinta (L)
   30000, # cola (g)
   -40, # Armário MDF
   -40, # Guarda-Roupas
   -9 , # Fogão
   -5 , # Sofá
   -40, # Cadeira de Madeira
   -40, # Cadeira Aço
   -20, # Painel de TV
   -10, # Escrivaninha
   -30, # Gabinete
   -10, # Mesa de Aço
   -10, # Mesa de Madeira
   -10, # Cama de Madeira
   -30, # Mesa de Vidro
   -10, # Armário de Aço
   -20, # Janela de Aço
   -10, # Janela de Madeira
   -9 , # Estante de Aço
   -40, # Tábua e Passar Roupa
   -30, # Sapateira
   -7 # Cama de Aço
1)
```

Vetor com os nomes dos itens, usado para a impressão dos resultados.

```
equipamento = [

"Armário MDF", "Guarda-Roupas", "Fogão", "Sofá", "Cadeira de Madeira",

"Cadeira Aço", "Painel de TV", "Escrivaninha", "Gabinete", "Mesa de Aço",

"Mesa de Madeira", "Cama de Madeira", "Mesa de Vidro", "Armário de Aço",

"Janela de Aço", "Janela de Madeira", "Estante de Aço",

"Tábua e Passar Roupa", "Sapateira", "Cama de Aço"]
```

Como as restrições de mínimo de itens a serem produzidos e as variáveis de folga, têm uma forma bem definida na matriz A, optamos por colocá-las através de funções e não de forma *hard coded*.

```
min_values = np.zeros((n, n))
np.fill_diagonal(min_values, -1)

slack_variables = np.zeros((m+n, m+n))
np.fill_diagonal(slack_variables, 1)

A = np.concatenate((A, min_values), axis=0)
A = np.concatenate((A, slack_variables), axis=1)
```

Aqui chamamos a função do simplex, passando nosso modelo como parâmetro e imprimimos os resultados (status, valores ótimos e lucro total). A formatação da impressão, se dá através da biblioteca Textable.

```
resultado = simplex(c, A, b)
print(resultado['status'])
x = resultado['x']
itens_produzidos_table = Texttable()
itens_produzidos_table.add_row(["item", "quantidade"])
index = 0
for value in x[:n]:
    itens produzidos table.add row([equipamento[index], "{:.0f}".format(value)])
    index += 1
itens_produzidos_table.set_cols_align(['r', 'l'])
print(itens_produzidos_table.draw())
index = 0
soma_total = 0
for value in x[:n]:
    soma_total += float(round(value) * (c[index] * -1))
    index += 1
print("Lucro total: R$ {:.2f}".format(soma_total))
```

O arquivo instructions.txt presente no zip, possui instruções para rodar o código.

## 6. Resultados Obtidos

Com a solução do problema, e maximização do lucro tivemos um lucro estimado de R\$ 5146610,00.

Combinação de quantidades de itens a serem produzidos de forma a maximizar o lucro:

Item	Quantidade
Armário MDF	40
Guarda-Roupas	40
Fogão	9
Sofá	5
Cadeira de Madeira	40
Cadeira Aço	40
Painel de TV	330
Escrivaninha	1717
Gabinete	30
Mesa de Aço	10
Mesa de Madeira	10
Cama de Madeira	10
Mesa de Vidro	3009
Armário de Aço	10
Janela de Aço	20
Janela de Madeira	10
Estante de Aço	2954
Sapateira	40
Tábua de Passar Roupa	30
Cama de Aço	7