Álgebra Linear e Geometria Analítica

João Miguel Soares da Silva

12 de Agosto de 2018

Conteúdo

1 Sistemas Lineares

Com a entrada para a Universidade, muitos dos conceitos matemáticos anteriormente utilizados são substituídos. O primeiro destes é a forma como se olha para sistemas lineares. Tome-se o sistema seguinte:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 3 \\ \dfrac{4}{3}x + 6y - z = 3 \end{cases}$$

Quando um computador faz um cálculo, trabalha sempre com recurso a matrizes. Vejamos como fica o sistema quando o transformamos numa matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ \frac{4}{3} & 6 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

Podemos fazer três operações básicas dentro de matrizes:

1. Trocar de linhas - ex: $L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{3} & 6 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

2. Multiplicar uma linha por um escalar - ex: $L_1 \rightarrow 5 \cdot L_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 10 & 15 & 5 & 15 \\ \frac{4}{3} & 6 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

3. Somar, a uma linha, outra multiplicada por um escalar - ex: $L_2 \rightarrow L_2 + (-2) \cdot L_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ -\frac{8}{3} & 0 & -3 & -3 \end{array}\right]$$

A este tipo de matriz, que representa uma igualdade, dá-se o nome de matriz alargada.

Como vamos ver mais à frente, matrizes são ferramentas muito úteis na geometria e são capazes de fornecer bastante informação; porém, para resolver problemas comuns por escrito, não faz diferença aquilo que usamos.

2 Propriedades de Matrizes

2.1 Característica de uma matriz

Considere-se a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O *pivot* de uma linha é a primeira posição que não é zero. Os *pivots* desta matriz são: $a_{1,1}$ *(1ª linha e 1ª coluna)*, $a_{2,4}$ *(2ª linha e 4ª coluna)* e $a_{3,4}$ *(3ª linha e 4ª coluna)*. A 4ª linha não tem *pivot*, logo, é chamada de “linha nula”.

Diz-se que uma matriz está “em escada” quando as linhas nulas estão no fim e, sempre que se desce uma linha, o *pivot* encontra-se à direita em relação à linha anterior. A matriz acima não está em escada, pois a 2ª e 3ª linha têm o *pivot* na mesma coluna.

Definição 2.1 *Chama-se característica ao número de colunas que apresentam um pivot quando a matriz se encontra em escada. Para qualquer matriz M, a sua característica representa-se por $car(M)$.*

No caso da matriz acima, ao tranforma-la em escada, $car(M) = 2$.

Ao transformar um sistema linear numa matriz A, pode-se concluir que este é:

- impossível, se a matriz A e a sua alargada tiverem características diferentes;
- possível determinado, se $car(A) =$ nº de incógnitas;
- possível indeterminado, se $car(A) <$ nº de incógnitas.

Um sistema linear homogéneo é o sistema em que todos os termos independentes são iguais a zero; logo, é sempre possível.

2.2 Operações com matrizes

É possível somar quaisquer duas matrizes, desde que elas possuam as mesmas dimensões M_{m*n}.

Ex:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{bmatrix}.$$

Multiplicar matrizes, porém, é mais complicado. Enquanto que $A + B = B + A$, $A \times B \neq B \times A$. Sendo que $A \times B = C$, para obter a posição $c_{i,j}$, é necessário fazer operações de multiplicação e soma entre a linha i de A e a coluna j de B. Assim sendo, para ser possível fazer multiplicação, o número de colunas de A tem de ser igual ao número de linhas de B. Se tivermos A_{m*n} e B_{n*k}, irá resultar: C_{m*k}.

Ex:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot g + b \cdot i + c \cdot k & a \cdot h + b \cdot j + c \cdot l \\ d \cdot g + e \cdot i + f \cdot k & d \cdot h + e \cdot j + f \cdot l \end{bmatrix}$$

Pode-se, porém, simplesmente multiplicar uma matriz por um escalar. Nesse caso, todos os elementos são multiplicados da mesma forma. Ex:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{bmatrix}$$

Definição 2.2 *Designa-se por matriz transposta de M a matriz que apresenta, como colunas, as linhas de M. Para qualquer matriz M, a sua transposta designa-se por M^T.*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$$

2.3 Determinantes

Definição 2.3 *É possível atribuir um escalar a uma matriz quadrada A_{n*n}, chamado determinante. Para uma matriz A, representa-se por $det(A)$ ou $|A|$.*

Observemos a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

Um determinante de uma matriz pode ser obtido ao multiplicar todos os membros da diagonal principal (diagonal que começa em $a_{1,1}$ e acaba em $a_{n,n}$) se, e só se, todos os elementos abaixo da diagonal forem zero.

Logo, $|A| = a \cdot d \cdot f$.

Sendo assim, podemos concluir que basta transformar uma matriz M na sua escalonada para obter o determinante? Não!

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & d & e \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}$$

Vejamos então quais as regras para calcular determinantes. Para qualquer matriz quadrada M_{n*n}:

1. Se existir uma linha ou coluna nula (só com zeros), $|M| = 0$;
2. Se existirem duas linhas ou colunas exatamente iguais, $|M| = 0$;
3. Se uma matriz estiver em escada, $|M|$ corresponde ao produto dos elementos da diagonal principal;
4. Ao trocar uma linha ou coluna por outra, $|M|$ muda de sinal;
5. Ao multiplicar uma linha ou coluna da matriz M por um escalar k, gerando uma nova matriz kM, $|M| = \frac{1}{k} \cdot |kM|$.

Caso exista uma linha ou coluna formada por somas, é possível obter o seu determinante da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Só é possível separar uma linha/coluna de cada vez.

Agora sabemos como obter o determinante de uma matriz M se tivermos a matriz em escada ou, se soubermos o determinante de uma outra matriz N, podemos obter $|M|$ transformando M em N. Mas como podemos obter o determinante de uma outra matriz qualquer?

Numa matriz M_{1*1} não existem dúvidas, o determinante resume-se ao valor contido na matriz.

Vejamos o caso de uma matriz M_{2*2}:

$$\underset{L_2 \to L_2 - \frac{c}{a}L_1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \to \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{cb}{a} \end{vmatrix}$$

Logo, $|M_{2*2}| = a \cdot (d - \frac{cb}{a}) = ad - bc$

Definição 2.4 *O cofator de um elemento $a_{i,j}$ de uma matriz, representado por $A_{i,j}$, é calculado pela expressão: $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot MC_{i,j}$, sendo $MC_{i,j}$ o determinante da matriz obtida eliminando a linha e a coluna em que $a_{i,j}$ está contido.*

Agora que sabemos como calcular os determinantes de matrizes M_{1*1} e M_{2*2}, vamos aprender a obter o determinante de qualquer matriz M_{n*n}. Para tal, segundo a regra de Laplace, ao escolher uma linha i ou coluna j qualquer na matriz, para qualquer matriz M_{n*n}, o determinante pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$|M| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot A_{i,j}$$

(desenvolvimento segundo a linha i)

$$|M| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot A_{i,j}$$

(desenvolvimento segundo a coluna j)

Definição 2.5 *A matriz adjunta é a matriz transposta da matriz que se obtém quando se substitui cada elemento $a_{i,j}$ pelo seu cofator $A_{i,j}$. A matriz adjunta da matriz M representa-se por $adj(M)$.*

Definição 2.6 *A matriz identidade é a matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1, enquanto que todos os outros elementos da matriz são 0. Representa-se por Id ($|Id| = 1$) e, ao multiplicar por uma matriz M, irá retomar a própria matriz M.*

Definição 2.7 *As matrizes A e B são matrizes inversas uma da outra se $A \times B = B \times A = Id$.*

Para obter a matriz inversa de M (M^{-1}), recorre-se à seguinte expressão:

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot adj(M)$$

Ou então, também é possível obter a inversa pelo método da condensação:

$$\left[\ A \mid Id\ \right]$$

Ao transformar o primeiro membro na matriz identidade, o segundo membro irá transformar-se na inversa de A:

$$\left[\ Id \mid A^{-1}\ \right]$$

3 Geometria Elementar

Aqui será seita uma breve introdução à natureza da geometria, para que o resto deste documento se torne mais fácil de entender.

Vejamos o exemplo de $\mathbb{R}^2$ (espaço a duas dimensões). Podemos entender este espaço através de um referencial cartesiano ortonormado. Estes espaços chamam-se espaços vetoriais, pois são habitados por vetores. Podemos determinar o vetor que vai de A a B através de $\overrightarrow{AB} = B - A = (X_B - X_A, Y_B - Y_A)$.

Um dos conceitos mais usados numa introdução à geometria é o "produto escalar" (também chamado "produto interno" ou "dot product"), que corresponde à projeção de vetores um sobre o outro.

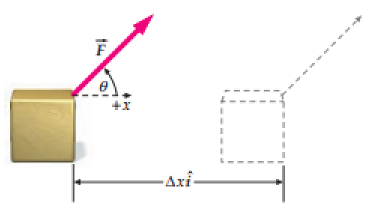

Figura 1: A força aplicada é projetada na distância percorrida, pelo cosseno

Sendo assim, podemos calcular o produto interno de vetores por $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = A \cdot B \cdot \cos\theta$. Também é possível calculá-lo por $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = (A_X \cdot B_X) + (A_Y \cdot B_Y)$.
Sabendo esta fórmula, podemos concluir que o produto escalar de vetores perpendiculares será 0. Podemos usar esta informação para calcular mediatrizes, planos medidores, retas tangentes a círculos e esferas, como também calcular a equação de um plano, que depende do seu vetor normal $\overrightarrow{n}$.

Vetores podem-se representar por $(a, b, c, ...)$ ou $< a, b, c, ... >$.
Espaços vetoriais têm por base vetores unitários chamados versores. Em $\mathbb{R}^2$ temos $\hat{\imath} = \langle 1, 0 \rangle$ e $\hat{\jmath} = \langle 0, 1 \rangle$, que indicam a direção e sentido dos eixos e, quando multiplicados por um escalar, andam sobre o seu eixo. Para descobrir o versor $\hat{v}$ de um vetor qualquer $\overrightarrow{v}$ usamos $\hat{v} = \dfrac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}$.
Em física, ao representar vetores, é mais comum usar a representação: $a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k} + \cdots$; ou então: $a\overrightarrow{e_x} + b\overrightarrow{e_y} + c\overrightarrow{e_z} + \cdots$.

4 Espaços Vetoriais

4.1 Conceito de vetores e de espaços vetoriais

Da matemática e da física do secundário, conhecemos o conceito de vetores: representações gráficas com um ponto de aplicação, direção, sentido e comprimento, que podem ser somados através da regra do paralelogramo. Mas será essa a definição mais adequada? Não serão antes vetores um conjunto de algarismos que, simplesmente para ajuda visual, se podem representar no espaço? A resposta correta é que vetores não são simplesmente uma destas definições; vetores só podem ser completamente entendidos e caraterizados se a forma como nós os observamos estiver disposta a mudar sobre o contexto do problema.

Um vetor pode ser representado por uma matriz. Ex: $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

A matriz representada acima indica que, para qualquer ponto dado, o vetor irá fazer com que esse ponto se mova $+2$ unidades segundo a direção x e $+3$ unidades segundo a direção y.

Com isto, conclui-se que é possível somar vetores e também multiplica-los por um escalar, da mesma forma como fazemos operações com matrizes. Ex:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(forma um novo vetor)

$$4 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

(escala o vetor já existente, formando um novo vetor colinear)

Definição 4.1 *Damos o nome de "campo" ao conjunto K onde adição, subtração, multiplicação e divisão estão bem definidos e se comportam da mesma forma como em $\mathbb{R}$. Para qualquer $x \neq 0 \in K$, o seu simétrico $-x$, o seu inverso x^{-1} e todos os valores resultantes das operações acima têm de se encontrar no conjunto.*

Definição 4.2 *Ao espaço E definido por vetores, onde todos eles podem ser somados entre si e multiplicados por um escalar de um campo K, chamamos espaço vetorial E sobre K.*

Para que algo possa ser considerado um espaço vetorial, tem de obedecer às três condições seguintes:

1. $0_E \in E$;
2. $u, v \in E \to u + v = v + u \in E$;
3. $u \in E$, $\alpha \in K \to \alpha \cdot u \in E$.

Se existir um espaço vetorial $H \in E$, então, H é um subespaço vetorial de E. É necessário notar que $\mathbb{R}^2 \notin \mathbb{R}^3$; para que o plano xOy seja subespaço de $\mathbb{R}^3$, este tem de ser apresentado como $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ao somar dois espaços vetoriais F e G, a dimensão do novo espaço criado pode ser calculada por:

$$dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$$

Se $dim(F \cap G) = 0$, diz-se que estamos na presença de uma soma direta, representada por $\oplus$:

$$dim(F \oplus G) = dim(F) + dim(G)$$

Se $F, G \in E$ e $F \oplus G = E$, diz-se que F e G são complementares.

4.2 Combinações lineares

Definição 4.3 *Diz-se que um vetor $u \in E$ é uma combinação linear de $u_1, u_2, ..., u_n$ se existirem escalares $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ tais que:*

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n.$$

Vamos treinar isto com um exemplo. Podemos admitir que $< 2, 3, 2 >$ é combinação linear de $< 1, 0, 1 >$ e $< 0, -9, 0 >$? A resposta é sim. Se tomarmos os escalares 2 e $-\frac{1}{3}$, ficamos com: $2\cdot < 1, 0, 1 > -\frac{1}{3}\cdot < 0, -9, 0 >= \, =< 2, 3, 2 >$. Da mesma forma, podemos admitir que o vetor $< 4, 8 >$ é combinação linear de $< 1, 0 >$ e $< 0, 1 >$; porém, ao contrário do caso anterior, estes dois vetores conseguem gerar também todos os vetores de $\mathbb{R}^2$; chamando-se então geradores de $\mathbb{R}^2$.

Definição 4.4 *Seja E um espaço vetorial sobre K; se o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores $u_1, ..., u_k$ gerarem todo e qualquer vetor de E, dizemos que esses vetores são geradores do espaço e representam-se por $< u_1, ..., u_k >$ (informalmente: um vetor formado por vetores).*

Imaginemos uma condição, em $\mathbb{R}^3$, $< x, y, z >$: $x + y - z = 0$. Como encontramos os geradores deste subespaço? Primeiro, temos de utilizar a nossa intuição para concluir que esta condição dá origem a um espaço em $\mathbb{R}^2$; sendo assim, tentamos reduzir o número de incógnitas a duas: $z = x+y \therefore$ ficamos com $< x, y, x + y >= x < 1, 0, 1 > +y < 0, 1, 1 >$. Temos incógnitas a multiplicar com vetores para gerar o subespaço, o que é a definição de gerador; concluimos assim que o gerador é $<< 1, 0, 1 >, < 0, 1, 1 >>$.

Será o gerador anterior o único que gera o subespaço? Não. Se adicionarmos mais um vetor que seja uma combinação linear dos outros ou se retirmarmos um vetor que seja uma combinação linear, irá gerar o mesmo subespaço: $<< 1, 0, 1 >, < 0, 1, 1 >>=<< 1, 0, 1 >, < 0, 1, 1 >, < 1, 1, 2 >>=$ $=<< 1, 1, 2 >, < 0, 1, 1 >>$. Para provar isto, vamos fazer o processo inverso: $a_1 < 1, 1, 2 > +a_2 < 0, 1, 1 >=< a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_1 + a_2 >=< x, y, z >$.

$$\begin{cases} x = a_1 \\ y = a_1 + a_2 = x + a_2 \\ z = x + x + a_2 = x + y \end{cases} \qquad \therefore x + y - z = 0 \textit{ define o subespaço.}$$

O subespaço gerado por $< u_1, ..., u_k >$ é o menor subespaço que contém $u_1, ..., u_k$, ou seja, ao adicionar um novo vetor u_{k+1}, irá sempre formar um subespaço maior ou igual.

Definição 4.5 *Diz-se que $u_1, ..., u_k$ são linearmente independentes se para que $a_1u_1 + ... + a_ku_k = 0 \to a_1 = ... = a_k = 0$. Se existir uma outra combinação de a_i que não esta que torne a condição seja verdadeira, então, existe combinação linear entre os vetores e denominam-se linearmente dependentes.*

Colocando todos os vetores numa matriz, se a sua característica for máxima, então, os vetores são linearmente independentes.

Definição 4.6 *A um gerador linearmente independente, damos o nome de base.*

Definição 4.7 *A dimensão de um espaço vetorial é igual à característica da matriz da sua base, o que corresponde também ao número de vetores dessa mesma base (cada vetor linearmente independente gera uma nova dimensão).*

4.3 Polinómios como vetores

Conhecemos da física que podemos representar vetores como $3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$; porém, existe uma outra estrutura matemática que segue este formato: polinómios. Foi dito, no início desta secção, que existirão casos em que devemos parar de pensar em vetores como setas e passar a pensar neles somente como um conjunto de algarismos; chegou o momento de fazer isso mesmo.

Segundo os critérios que definimos no início da secção, $7x^2 + 4x + 5$ pode muito bem ser considerado um vetor. Mas como podemos pensar nele? Por cada $+4$ unidades em x, anda-se $+7$ em x^2? Não, isso não faz sentido nenhum. Polinómios não podem ser representados no espaço como setas; apenas podem ser interpretados sob a forma de matrizes:

$$7x^2 + 4x + 5 = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \therefore \textit{ polinómio de grau k tem k+1 dimensões.}$$

4.4 Mudança de base

Todos os vetores em $\mathbb{R}^2$ podem ser representados por combinações lineares dos vetores $((1,0),(0,1))$; ou seja, $(a \cdot (1,0), b \cdot (0,1))$.

Definição 4.8 *À base em que cada vetor v_k é formado por zeros, exceto pelo valor igual a 1 na sua posição k, chama-se base canónica.*

A base canónica de um polinómio $\mathbb{R}_k[x]$ é $(x^k, x^{k-1}, ..., x, 1)$.

Podemos assim dizer que o vetor (a, b) em $\mathbb{R}^2$ é representado em ordem à sua base canónica. Existe alguma forma de que o vetor $(a, b) = (10a, 10b)$, sendo $a, b \neq 0$? A resposta a esta pergunta é sim, se estiverem representados em bases diferentes.

Imaginemos que duas pessoas desenham uma grelha num caderno quadriculado; uma pessoa pode tomar dez quadrículas como uma unidade enquanto que a outra só toma uma quadrícula. Como a segunda grelha é dez vezes menor, qualquer vetor (a, b) desenhado na primeira, terá coordenadas $(10a, 10b)$ ao ser representado na segunda.

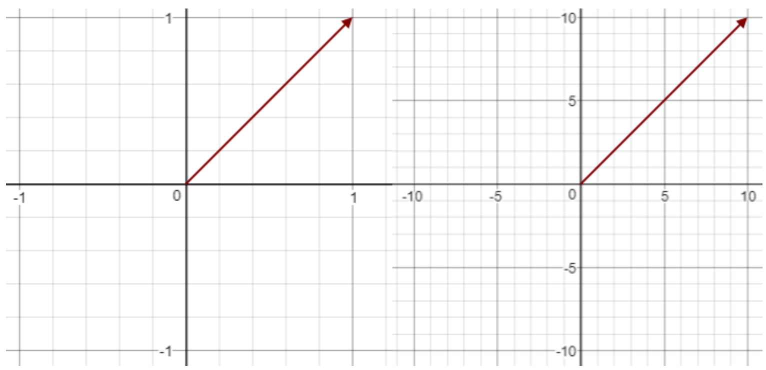

Figura 2: Mesmo vetor representado em bases diferentes

Assim sendo, dois vetores que possuam coordenadas diferentes podem ser o mesmo vetor, se estiverem em referenciais diferentes - representados em bases diferentes.

Uma nota importante é que qualquer base β pode ser vista como a base canónica do seu espaço; a base que nós definimos como base canónica pode não a ser para alguém que utilize uma base diferente. Ou seja, existe acordo que a base canónica se representa como $<< 1, 0 >, < 0, 1 >>$; porém, a sua forma depende do ponto de vista de cada pessoa. Logo, a partir de agora, quando nos for dado um vetor u, pensemos nele em relação, não propriamente à base canónica, mas a uma base qualquer β; desta forma, será possível pensar em vetores duma forma muito mais abstrata.

5 Transformações Lineares

5.1 Conceito de transformação linear

Uma transformação não se refere a nada mais do que uma função (ou aplicação). Ou seja, ao inserir um certo valor na função, este irá ser transformado noutro. Neste caso, a aplicação irá tomar um vetor e transforma-lo num outro. Então, porque lhes chamamos transformações em vez de funções, se significam o mesmo? Como vetores são, muitas das vezes, auxiliados por representações, é usado o conceito de transformação, pois este associa a ideia de movimento.

Tomemos, por exemplo, a transformação $f(x) = (2x)$, no espaço vetorial $\mathbb{R}$. Ao tomar o vetor [1], não devemos pensar que o vetor [2] aparece do nada, mas sim que o próprio espaço é esticado (transformado), levando consigo o vetor $[x]$, para gerar um novo vetor $[2x]$, relativamente ao espaço vetorial original.

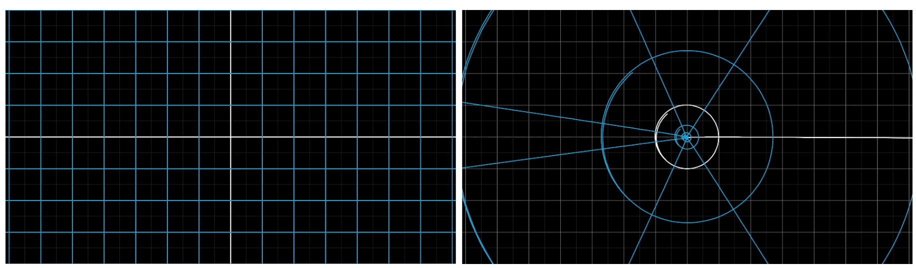

Figura 3: Transformação não-linear do espaço

É possível existirem transformações bastante complexas, capazes de transformar o espaço nalgo completamente diferente; assim sendo, a álgebra linear foca o seu estudo num só tipo de transformações: transformações lineares. Estas têm duas propriedades: mantêm a origem no lugar e mantêm as linhas da grelha retas e igualmente espaçadas.

Para testar se uma qualquer transformação é linear matematicamente:

1. $f(0_E) = 0$

2. $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

Conseguimos atrás entender que é possível representar estas transformações tal como representamos funções normalmente. Vamos agora representa-las tal como temos feito com outros conceitos: através de matrizes. As transformações podem simplesmente ser representadas pelas coordenadas dos novos vetores base que serão criados. Se o vetor base em $\mathbb{R}$ é [1], podemos concluir que a função anterior se pode representar como: [2].

Imaginemos a função em $\mathbb{R}^2$ $f(x, y) = (2x - y, x + 2y)$. O vetores base serão transformados em: $f(1, 0) = (2, 1)$ e $f(0, 1) = (-1, 2)$, tal como pode ser observado na figura 4.

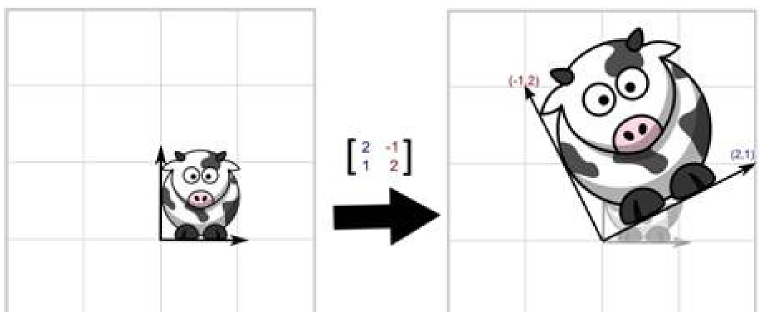

Figura 4: Transformação linear do espaço

A função pode então ser descrita como: $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Agora que entendemos isto, daqui para a frente, sempre que se vê uma matriz, é possível imaginá-la como uma transformação do espaço. Assim que se pensar em matrizes desta forma, será possível entender a verdadeira natureza da álgebra linear.

5.2 Distinção entre transformação e mudança de base

Os conceitos de transformação e de mudança de base parecem bastante semelhantes, então, o que é que os distingue? Enquanto que uma mudança de base somente altera o espaço vetorial, uma transformação altera o espaço e tudo lá inserido. No caso da figura 4, se esta se tratasse de uma mudança de base, os vetores base mudavam, porém, a imagem da vaca ficaria no mesmo lugar. No entanto, atrás foi dito que uma transformação f, ao mudar o espaço, gera um novo vetor **em relação ao espaço original**. Porquê este pormenor? Certamente, se só fizéssemos a transformação (com o espaço e o vetor ao mesmo tempo), as coordenadas do vetor não iam mudar, pois não só o vetor tinha mudado, mas a base também. Logo, uma transformação deve ser seguida por uma mudança de base. A matriz de uma aplicação f representa-se por:

M(função; base de entrada, base de saída)

A transformação atrás referida ($f(x,y) = (2x-y, x+2y)$) pode ser representada por: $M(f; b_c, b_c)$ *começa na base canónica, faz a transformação, volta à base canónica.*

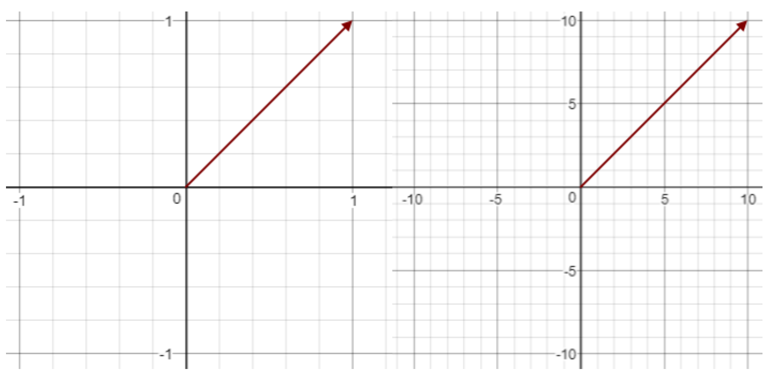

Figura 5: Chamando base α ao primeiro gráfico, o segundo pode ser representado como $\beta = << \frac{1}{10}, 0 >, < 0, \frac{1}{10} >>$ em relação a α

A mudança de base da base α para a base β pode ser representada por: $M(Id; \alpha, \beta)$. Como encontramos esta matriz? Quando a transformação é a identidade, nada acontece aos vetores base, mas estes terão novas coordenadas. Estas serão simplesmente as coordenadas da primeira base em relação à segunda. Como a base β é dada relativamente a α, $M(Id; \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$. Podemos relacionar as funções desta forma: $M(f; B_1, B_2) = M(f; B_2, B_1)^{-1}$, logo:

$$M(Id; \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Agora, como podemos descobrir $M(f;\alpha,\beta)$? Como a identidade não altera nenhuma matriz, $M(f;\alpha,\beta) = M(Id \circ f;\alpha,\beta)$. Mas como é que isto nos ajuda?

Para qualquer função composta, a seguinte condição é verdadeira:

$$M(g \circ f; B_1, B_2) = M(g;\beta, B_2) \times M(f; B_1, \beta)$$

Sendo β uma base qualquer

É importante relembrar que a ordem importa. Porém, porque é que a base de saída aparece primeiro do que a base de entrada? Relembremos também que $g \circ f$ se lê g **após** f; ou seja, primeiro acontece f, só depois acontece g. Assim, numa multiplicação de matrizes, as que estão à direita são as que acontecem primeiro. Logo, a expressão acima diz que se vai de B_1 até β e só depois se vai de β até B_2.

Então, agora já temos todas as ferramentas para chegar à solução do problema (vamos fazer de α a nossa base intermédia):

$M(f;\alpha,\beta) = M(Id \circ f;\alpha,\beta) = M(Id;\alpha,\beta) \times M(f;\alpha,\alpha) =$

$= \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}.$

Da mesma forma, pode-se admitir:

$$M(h \circ g \circ f; B_1, B_2) = M(h;\beta_y, B_2) \times M(g;\beta_x,\beta_y) \times M(f; B_1, \beta_x)$$

Sendo β_x e β_y duas bases quaisquer

Pode-se recorrer a este método para qualquer número de funções compostas.

Imaginemos agora uma função g, tal que $\begin{matrix} g(1,1) = (1,-2,3) \\ g(-1,1) = (3,0,-1) \end{matrix}$. Como encontramos a matriz desta transformação? $(1,1)$ e $(-1,1)$ são linearmente independentes, logo, são uma base (chamemos-lhe ω). Sabemos que, para representar uma função, basta escrever os novos vetores em que a base se irá transformar; logo, $M(g;\omega, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Porém, nós pretendemos que a afirmação inicial seja verdadeira (não será se considerarmos ω a base de partida, pois ω está escrita em relação a uma base B_1 - sendo esta a base canónica do seu espaço), logo:

$M(g; B_1, B_2) = M(g; \omega, B_2) \times M(Id; B_1, \omega) = M(g; \omega, B_2) \times M(Id; \omega, B_1)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Com isto, podemos reparar na importância de representar as transformações como $M(f; B_1, B_2)$, se não o fizermos, não sabemos o que a matriz significa. Tomemos, por exemplo, a matriz: $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Olhando só para ela, não sabemos se se trata de uma transformação (o vetor aumenta 7 unidades de î e 4 de ĵ), de uma mudança de base (a base diminui e o mesmo vetor terá coordenadas maiores na nova base), ou se uma combinação de ambos; porém, o "resultado visual" final será o mesmo.

5.3 Kernel e imagem de uma transformação

Definição 5.1 *O Kernel (palavra alemã, significando núcleo, em português) de uma transformação f corresponde aos zeros dessa função. Representa-se por $Ker(f)$.*

Exemplo de como calcular um núcleo:

$M(f; B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] x = -2y \therefore Ker(f) = \{(-2y, y), y \in \mathbb{R}\}$.

Definição 5.2 *A imagem de uma aplicação refere-se ao subespaço gerado pelas imagens dos vetores base do espaço de partida.*

6 Propriedades de Transformações

6.1 Produto vetorial

Se existir uma área A_i inserida num espaço vetorial em $2D$; se o espaço sofrer uma transformação definida pela matriz M, a área da figura será: $A = A_i \cdot |det(M)|$ *(se $det(M)$ for negativo, significa que as orientações dos vetores base foram invertidas)*. Em $3D$, a mesma regra se aplica com volumes.

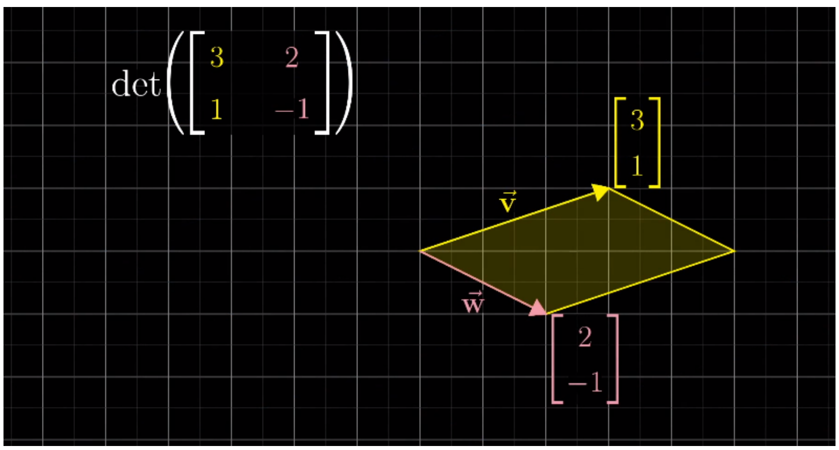

Figura 6: A área deste paralelogramo pode ser calculada pelo determinante, se imaginarmos isto como uma transformação

Sendo $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ dois vetores aleatórios, o seu produto vetorial (também chamado "produto externo" ou "cross product", representado por $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$) irá formar um novo vetor perpendicular de módulo igual à área do paralelogramo formado por $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. Este módulo pode ser calculado pelo determinante, tal como indicado acima, ou por $|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}| = |\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}| \cdot \sin\theta$.

Sendo M a "transformação" que origina estes vetores, o vetor formado pelo produto vetorial pode ser representado por $det(M)\hat{k}$ e pode ser calculado através de: $\begin{vmatrix} 0 & v_1 & w_1 \\ 0 & v_2 & w_2 \\ \hat{k} & 0 & 0 \end{vmatrix}$. Esta expressão pode ser generalizada, possibilitando vetores com uma terceira componente: $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & v_1 & w_1 \\ \hat{j} & v_2 & w_2 \\ \hat{k} & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$.

6.2 Diagonalização de matrizes

Definição 6.1 *Chamam-se eigenvectors de M aos vetores que, quando sofrem a transformação M, simplesmente formam um vetor colinear; ou seja, tratam-se dos vetores $\overrightarrow{v}$,para os quais $M\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$, sendo λ um escalar chamado eigenvalue.*

Temos então: $M\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v} \leftrightarrow M\overrightarrow{v} = \lambda(Id\overrightarrow{v}) \leftrightarrow (M-\lambda Id)\overrightarrow{v} = 0$. Como podemos encontrar os valores de λ? A única forma de um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ igualar a zero, quando transformado, é se o espaço vetorial cair de uma dimensão N para $N-k$, $k > 0$. Quando é que isso acontece? Quando existe dependência linear de vetores; ou seja, quando o determinante é zero.

Em suma, procuramos os valores de λ, para os quais $det(M - \lambda Id) = 0$.

Para determinar quais os *eigenvectors* correspondentes a um *eigenvalue*, basta resolver a expressão $(M - \lambda Id)\overrightarrow{v} = 0$, da mesma forma que fazemos com o *kernel*. Saber estes vetores pode ser bastante importante. Imaginemos, por exemplo, uma transformação que cria uma rotação em $3D$; o *eigenvector* dessa transformação, como não roda, será o eixo de rotação. Uma outra utilidade refere-se à diagonalização de matrizes.

Definição 6.2 *Chama-se matriz diagonal à matriz que só apresenta valores diferentes de zero na sua diagonal principal.*

Existem muitas coisas que fazem com que matrizes diagonais sejam preferíveis; uma delas é a facilidade de multiplicar a matriz por si mesma várias vezes, para melhor estudar os efeitos da transformação. Transformações em que os vetores base são *eigenvectors* são diagonais (pensando numa matriz diagonal, conseguimos facilmente entender o porquê). Porém, não precisamos que haja uma grande coincidência para trabalhar com matrizes diagonais. Se o conjunto dos *eigenvectors* gerar o espaço, podemos recorrer a uma mudança de base.

Imaginemos que queremos determinar a quinta potência de uma matriz. $M_1(f; b_c, b_c)$ não é diagonal; porém, se existirem *eigenvectors* suficientes para gerar o espaço, teremos $M_2(f; eigenbasis, eigenbasis)$ como uma matriz diagonal. Podemos assim determinar a quinta potência de M_2 e, sendo $g = f^5$, basta agora transformar $M_3(g; eigenbasis, eigenbasis)$ em $M_4(g; b_c, b_c)$.