Síntese de Matemática

matéria do secundário

1 Funções

1.1 Introdução às funções

Matemática foca-se, principalmente, no estudo de funções e na análise do seu comportamento. Uma função pega num número x e transforma-o num outro número y, sendo $y = f(x)$.

A primeira coisa que podemos analisar em funções é o seu domínio e imagem. Para encontrar o domínio (valores possíveis de x), temos de olhar para a função e, com o que conhecemos, determinar os valores que x não pode tomar. Por exemplo, para a função $\frac{1}{x}$ sabemos que $x \neq 0$; logo, o domínio será $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Para encontrar a imagem, temos de recorrer a uma visualização gráfica.

A função acima pode ser expressa como:
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Primeiro é indicada a letra que representa a função; de seguida é indicado o domínio e o contradomínio; em baixo, é apresentada a variável e a expressão da função. O contradomínio representa o conjunto de chegada - a imagem de uma função encontra-se dentro do contradomínio; ou seja, se tivéssemos uma função que pudesse retomar $[1, 2, 3, 4, 5]$; se o contradomínio for $[0, 1, 2, 3]$, a imagem será $[1, 2, 3]$.

Diz-se que uma função é:

- sobrejetiva, se o contradomínio for igual à imagem;
- injetiva, se cada y só tiver um valor de x associado (existe inversa);
- bijetiva, se for sobrejetiva e injetiva.

Definição 1.1 *Diz-se que uma função f^{-1} é inversa de f se $f^{-1}(f(x)) = x$ $\forall x$. Graficamente, é simétrica ao eixo $y = x$.*

Definição 1.2 *Chama-se função implícita àquela que não tem variáveis isoladas - algumas destas podem, até mesmo, não conseguir ser isoladas, ex: $x^3 + y^2 = xy$.*

1.2 Exemplos de funções

O primeiro tipo de funções são as funções de 1º grau: $y = ax + b$. Estas representam uma reta com $y = b$ quando $x = 0$, em que o declive a pode ser calculado por: $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. A reta formará também um ângulo θ com a horizontal, fazendo com que $a = \tan\theta$.

Temos também as funções de 2º grau: $y = ax^2+bx+c$. Estas representam uma parábola e os seus zeros podem ser calculados pela fórmula resolvente: $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. A parábola pode ser convexa (se $a > 0$) ou côncava (se $a < 0$). Esta pode passar no eixo y quando está a descer (se $b < 0$) ou quando está a subir (se $b > 0$). Para além disso, $y = c$ quando $x = 0$.

Todas estas funções são formadas por polinómios. Um polinómio é uma expressão da seguinte forma: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$. Qualquer função polinomial de grau n tem sempre n zeros (estes podem ser iguais ou não; reais ou complexos). Uma outra forma de escrever um polinómio é escrevê-lo em relação aos seus zeros. Por exemplo, se um polinómio $ax^2 + bx + c$ tem os zeros r_1 e r_2, podemos concluir que $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$. Se $r_1 = r_2$, $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)^2$.

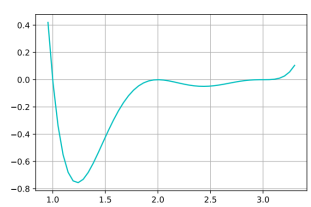

Figura 1: Representação gráfica da função $f(x) = (x - 1)\cdot(x - 2)^2\cdot(x - 3)^3$

Então, qualquer polinómio de grau n é igual a: $a(x - r_1)^{p_1}(x - r_2)^{p_2}\cdots$, sendo que $p_1 + p_2 + \cdots = n$. Logo, tendo o polinómio escrito desta forma, sabemos representá-lo graficamente - pois sabemos o valor dos zeros r e o valor p a que estão elevados. Podemos representá-los da seguinte forma:

- Se $p = 1$, o gráfico vai simplesmente cruzar o eixo;
- Se p for ímpar, mas $p \neq 1$, o gráfico cruza o eixo, com deformação;
- Se p for par, o gráfico toca no eixo e volta para trás.

Funções podem, no entanto, não ser polinómios; como por exemplo a função exponencial (a^x), logarítmica ($\log x$), trigonométrica ($\sin x$), etc. A lembrar sobre cada uma: a função exponencial cresce mais rapidamente do que qualquer outra função (vindo daí a expressão crescimento exponencial) e é uma função muito importante na matemática, sendo a mais popular e^x; a função logarítmica é a inversa da exponencial e cresce mais lentamente do que qualquer outra função, sendo a mais popular $\ln x$ (logaritmo natural); a função trigonométrica pode ser entendida com auxílio ao círculo trigonométrico; porém, a sua análise pode-se tornar complicada em problemas mais complexos.

A função módulo é aquela que torna todos os seus valores positivos:
$|a-b| = c \leftrightarrow a-b = c \vee a-b = -c$
Para além de equações, temos também inequações. Ao trabalhar com módulos, quando os separamos, o símbolo de desigualdade "roda para a direita":
$|a-b| < c \leftrightarrow a-b < c \wedge a-b > -c$
$|a-b| > c \leftrightarrow a-b > c \vee a-b < -c$

Continuando no tema de desigualdades, imaginemos que temos um valor $x \in [3, 9]$. É verdade dizer que $x \leq 9\ \forall x$; porém, também é verdade dizer $x \leq 200\ \forall x$. Todos os valores de x fazem com que a afirmação seja verdadeira. No entanto, dizer $x \leq 8\ \forall x$ seria incorreto, pois existem valores de x, por exemplo, o 9, que quebram a condição.

Logo, chamamos ao 9, ao 200 e a todos os números que fazem da condição verdadeira majorantes (ou limites superiores). Ao menor majorante, neste caso, ao 9, chamamos supremo.
Da mesma forma, $x \geq 3\ \forall x$ e $x \geq -1\ \forall x$. Tanto -1 e 3 são minorantes (ou limites inferiores), mas só o 3 é o ínfimo.

Dentre todas as desigualdades, existe uma que se destaca: a desigualdade aritmética-geométrica:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$$

Também é conhecida como desigualdade das médias e só podemos usá-la com números positivos. O primeiro membro será sempre menor do que o segundo a não ser que $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$.

Por fim, temos $x^2 + y^2 = r^2$, que representa uma circunferência; porém, isto não se trata de uma função, mas sim uma condição, pois para um x existe mais do que um y. Para representar uma circunferência como uma função temos de escrever um sistema:

$$\begin{cases} y = +\sqrt{r^2 - x^2} \\ y = -\sqrt{r^2 - x^2} \end{cases}$$

Se quisermos que a circunferência tenha centro (a, b), em vez de $(0, 0)$, podemos escrever a condição como $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, sendo somente necessário adicionar mais coordenadas se trabalharmos em dimensões superiores.

Para terminar, para traçar graficamente qualquer função, devemos separá-la em funções mais simples, ex: $f(x) = (x^2 + 1)\log(x + 7)$. Primeiro, construimos o gráfico de $\log x$ e depois de $\log(x + 7)$ - lembrando que "o x é mentiroso" e quanto mais parece estar a crescer, mais diminui. Só depois, multiplicamos cada ponto pelo respetivo $(x^2 + 1)$ para obter $f(x)$.

1.3 Fatorização de polinómios

Ao trabalhar com polinómios é bastante importante saber fatorizá-los, pois, como vimos atrás, se tivermos o polinómio na sua forma fatorizada, conseguimos obter muita mais informação, como também manipular melhor a expressão. Abaixo encontra-se uma lista com as técnicas de fatorização com exemplos de como as usar corretamente.

1. **Colocar termos comuns em evidência**

   $3x^4 + 3x^3 + 6x^2 = 3x^2 \cdot (x^2 + x + 3)$

   $9x^2 \cdot (2x + 7) - 12x \cdot (2x + 7) = 3x \cdot (2x + 7) \cdot (3x - 4)$

2. **Agrupar e colocar termos comuns em evidência**

   Se a razão entre os dois primeiros termos for igual à dos dois termos restantes, pode-se recorrer a este critério.

   $x^5 + x - 2x^4 - 2 = x \cdot (x^4 + 1) - 2 \cdot (x^4 + 1) = (x^4 + 1) \cdot (x - 2)$

3. **Fatorização de expressões de 2º grau:** $ax^2 + bx + c$

   Pode-se fatorizar recorrendo à fórmula resolvente (ao encontrar os zeros, fica: $a(x - r_1)(x - r_2)$).

   Uma outra forma de fatorizar é tendo em mente que: $p_1 \cdot p_2 = ac$ e $p_1 + p_2 = -b$, resultando em: $a \cdot (x - \frac{p_1}{a}) \cdot (x - \frac{p_2}{a})$; porém, só funciona para zeros em $\mathbb{R}$, enquanto que a fórmula resolvente também nos indica os zeros complexos.

   $4x^2 + 10x - 6$ Temos de encontrar p_1 e p_2, tal que $p_1 \cdot p_2 = -24$ e $p_1 + p_2 = -10$. $p_1 = 2$ e $p_2 = -12$. Logo, ficamos com: $4 \cdot (x - \frac{1}{2}) \cdot (x + 3)$

4. **Polinómios de grau superior**

   Pode ajudar imenso fazer algo do género: $u = x^2$ e $u^2 = x^4$.

   Começar sempre por colocar termos comuns em evidência e, se não puder ser fatorizado somente dessa forma, recorrer à regra de Ruffini.

   $30x^5 - 166x^4 - 542x^3 + 2838x^2 + 1520x - 800 =$

   $= 2 \cdot (15x^5 - 83x^4 - 271x^3 + 1419x^2 + 760x - 400)$

   Para usar Ruffini, precisamos de conhecer já um dos zeros. Para funções complicadas como esta, é suicídio não ter uma representação gráfica ou, no mínimo, um calculadora.

   Podemos obter uma lista de zeros possíveis (não de todos) ao dividir os divisores do coeficiente do termo de grau 0 pelos divisores do coeficiente do termo de grau n. Neste caso, temos como lista de zeros possíveis: $\pm\frac{1, 2, 4, 5, 100, 200, 400}{1, 5, 15}$ (não é necessário escrever todos - provavelmente só se vai trabalhar com os primeiros)

   Depois de testar alguns, vemos que 5 é um zero. Aplicamos Ruffini, obtemos uma nova expressão, vemos que 5 também é zero desta e aplicamos Ruffini novamente.

   $2 \cdot (x - 5)^2 \cdot (15x^3 + 67x^2 + 24x - 16)$

   Fazendo o processo anterior com esta nova expressão, sabendo que -4 é um zero, obtemos $2 \cdot (x - 5)^2 \cdot (x + 4) \cdot (15x^2 + 7x - 4)$.

Como sabemos fatorizar quadráticas: $30 \cdot (x-5)^2 \cdot (x+4) \cdot (x-\frac{1}{3}) \cdot (x+\frac{12}{15})$

5. ***Casos particulares...***

   $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$;
   $A^2 + B^2 = (A+Bi)(A-Bi)$, ao trabalhar em $\mathbb{C}$;
   $A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$;
   $A^2 + 2AB + C = (A+B)^2 + C - B^2$;
   em geral (binómio de Newton): $(x+y)^n = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

É importante ter em mente que nem todos os polinómios podem ser fatorizados em $\mathbb{R}$.

2 Trigonometria

A trigonometria é uma ferramenta muito forte da matemática que nos ajuda a entender e a trabalhar com tudo aquilo que envolva ângulos; porém, temos primeiro de abandonar o sistema de graus (um círculo tem 360 graus) e começar a trabalhar com radianos (um círculo tem 2π radianos).

Para conseguir entender trigonometria, é necessário entender o círculo trigonométrico. Este é um círculo de raio $r = 1$ que, ao desenhar ângulos sobre ele, nos pode fornecer todas as identidades trigonométricas. Para qualquer ângulo θ, podemos representar o círculo trigonométrico da seguinte forma:

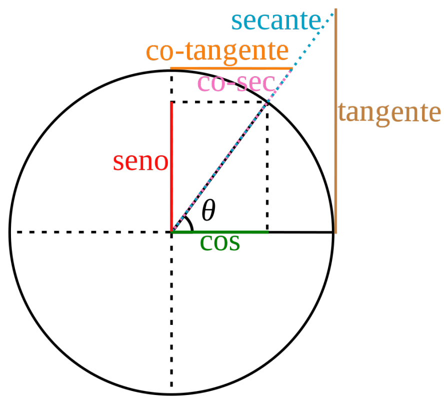

Figura 2: Círculo trigonométrico

Ao arrastar o seno para a direita, podemos ver a relação que existe entre trigonometria e triângulos retângulos:

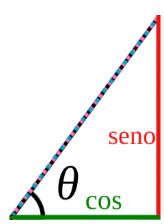

Figura 3: Triângulo retângulo

Como podemos ver, o $\sin\theta =$ cateto oposto. Mas isso só é verdade porque $r = 1$. Como podemos ver pelo círculo, $\sin\theta \in [-1, 1]$; logo, para obter o valor de sin em qualquer triângulo retângulo, temos de dividir pela hipotenusa.

$\sin\theta = \dfrac{\textit{cateto oposto}}{\textit{hipotenusa}}$ e $\cos\theta = \dfrac{\textit{cateto adjacente}}{\textit{hipotenusa}}$

Ao aplicar o teorema de Pitágoras, vemos que $1^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$.
À medida que θ aumenta, cos diminui e sec aumenta: $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$.

Por semelhança de triângulos, podemos concluir que $\dfrac{\sin\theta}{1} = \dfrac{\tan\theta}{\sec\theta}$.

Logo, $\tan\theta = \sin\theta\cdot\sec\theta \leftrightarrow \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \leftrightarrow \tan\theta = \dfrac{\textit{cateto oposto}}{\textit{cateto adjacente}}$.

Aplicando a mesma lógica, podemos obter todas as outras identidades trigonométricas.

É importante ter em mente que, ao ter $\sin x = n$, como $\sin x \in [-1, 1]$, x pode assumir um número infinito de valores.

Existem valores de certos ângulos que são necessários para muitos problemas. Para os decorar, recorre-se a um truque com uma mão[1].

Uma forma de simplificar expressões trigonométricas é reduzindo-as ao primeiro quadrante. Se tivermos, por exemplo, um ângulo $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, sabemos que existe um ângulo simétrico a esse no primeiro quadrante ($\theta = \frac{\pi}{4}$). Podemos relacioná-los fazendo $\sin\alpha = \sin\theta$, $\cos\alpha = -\cos\theta$, etc.

É possível decompor as razões trigonométricas da seguinte forma:

$\sin(a+b) = \sin a\cdot\cos b + \sin b\cdot\cos a$
$\cos(a+b) = \cos a\cdot\cos b - \sin a\cdot\sin b$
$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\cdot\tan b}$

Temos também as funções inversas. No caso das funções trigonométricas, temos $\arccos x = \cos^{-1} x$, $\arcsin x = \sin^{-1} x$ e $\arctan x = \tan^{-1} x$ (sendo que $\cos^{-1} x \neq \cos x^{-1}$, etc.). Assim, $\arcsin\sin x = x$, etc.

Por último, para qualquer triângulo (retângulo ou não), se soubermos 2 ângulos (A, B ou C) e 1 lado exatamente oposto (a, b ou c), podemos determinar os outros com a regra dos senos: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$; ou então, se soubermos 1 ângulo e dois lados, recorremos à regra dos cossenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos A$.

[1] [Exact Trig Values - Hand Trick]

3 Números complexos

Os números podem-se dividir em **naturais** $\mathbb{N}$ (números inteiros não negativos), **inteiros** $\mathbb{Z}$, **racionais** $\mathbb{Q}$ (números que podem ser representados por frações), **reais** $\mathbb{R}$ (números com que trabalhamos normalmente) e **complexos** $\mathbb{C}$ (inclui o número imaginário i, que é bastante útil em problemas avançados).

$i = \sqrt{-1}$; porém, $\sqrt{-1} = i \wedge -i$ (pois se $x = y^2$, $x = (-y)^2$)

O número imaginário representa-se por $Z = (a, b) = a + bi$, sendo a a parte real e b a parte imaginária. Se $a = 0$, trata-se de um imaginário puro. Estes números podem ser representados no plano de Argand-Gauss:

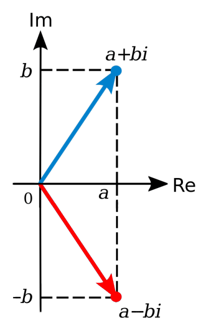

Figura 4: Plano de Argand-Gauss a representar $Z = a + bi$ e o seu conjugado $\bar{Z} = a - bi$

Neste plano, em vez de coordenadas retangulares (x, y), usa-se coordenadas polares (r, θ) - expressas usando o raio e o ângulo. Quando falamos de números complexos, ao ângulo θ chamamos "argumento". Observando o gráfico acima, vemos que o raio corresponde ao módulo (calculado por Pitágoras: $|Z| = r = \frac{|a|}{a}\sqrt{a^2 + b^2}$) e que, como $\tan\theta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, $\theta = \arctan\dfrac{b}{a}$.

Quando usamos coordenadas polares, é possível notar que faz mais sentido pensar no plano como um círculo; sendo assim, podemos atribuir uma representação trigonométrica ao ponto; esta será: $Z = |Z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$.

Para resolver problemas com números complexos, é importante ter em mente que $\cos\theta + i\sin\theta = cis\ \theta$; em frações cujo o denominador tem um número complexo, multiplicar com o conjugado ajuda a desfazer o problema; $Z_1 \cdot Z_2 = |Z_1| \cdot |Z_2| \cdot cis(\theta_1 + \theta_2)$; $i^2 = -1$, $i^{19} = i^3 = -i$, etc. (para simplificar potências de i, deve-se dividir por 4 e ir buscar o resto).

4 Probabilidades

4.1 Introdução às probabilidades

O tema da probabilidade e da combinatória é um dos mais chatos da matemática; pois enquanto que os outros podem ser vistos de um forma abstrata, este obriga, praticamente, a que haja uma visão precisa da realidade representada no problema, tornando a sua simplificação mais difícil.

Em probabilidade trabalhamos com experiências aleatórias e imprevisíveis que contêm um dado espaço amostral (conjunto dos resultados possíveis) E. Para determinar a probabilidade de um acontecimento, recorremos à lei de Laplace: $p = \dfrac{\textit{casos favoráveis}}{\textit{casos possíveis}}$.

A lei dos grandes números afirma que quando o número de provas aumenta, a frequência relativa estabiliza num certo valor.

Dois acontecimentos A e B são incompatíveis se $A \cap B = \emptyset$. Estes dois são contrários se, para além da condição anterior, $A \cup B = E$; ou seja, a soma das suas probabilidades é 1 (valor máximo).

Relembrando os símbolos: $A \cap B$ (interseção de A e B); $A \cup B$ (reunião de A e B); $\bar{A}$ (tudo o que não é A); $A \backslash B$ (o mesmo que $A \cap \bar{B}$). Para melhor interpretar estas noções, deve-se recorrer ao diagrama de Venn.

Numa tarefa com duas escolhas sucessivas, se a primeira tiver n possibilidades e a segunda m possibilidades, existem $n \cdot m$ formas de realizar a tarefa. Desta forma, é possível calcular os casos possíveis de um dado conjunto de acontecimentos.

Quando a probabilidade de um acontecimento A muda porque aconteceu B, entramos no domínio da probabilidade condicionada e representamos por $A|B$ (lendo-se: A sabendo B). $p(A|B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Quando os acontecimentos são independentes, $p(A|B) = p(A)$; ou seja, $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Para concluir, uma expressão importante a lembrar é: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. Novamente, todo este raciocínio pode ser facilmente entendido recorrendo ao diagrama de Venn.

4.2 Distribuição de probabilidades

A distribuição de probabilidade de uma variável x é a aplicação que associa a cada valor x_i da variável a sua probabilidade p_i (com $p_1+p_2+...+p_k=1$).

Nas distribuições temos de ter em atenção a média $\bar{x}$, calculada por $\bar{x} = \sum_{i=k}^{k} x_i f_{r_i}$, e o desvio padrão s, calculado por $s = \sqrt{\sum_{i=k}^{k} f_{r_i}(x_i-\bar{x})^2}$. Quando aplicamos a lei dos grandes números e consideramos uma amostra infinita, a frequência relativa transforma-se na probabilidade e a média passa a representar-se como valor médio μ e o desvio padrão passa a representar-se com σ.

Se uma variável aleatória contínua segue uma distribuição normal, de valor médio μ e desvio padrão σ, esta representa-se por $N(\mu,\sigma)$ e pode ser entendida com auxílio da curva de Gauss.

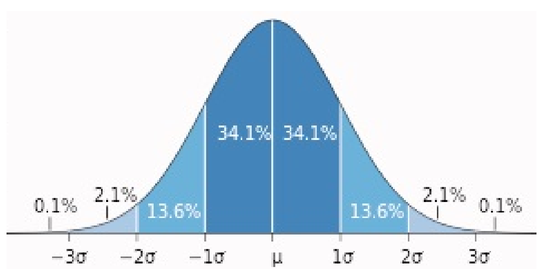

Figura 5: Curva de distribuição normal que representa a probabilidade dos desvios, em que o centro é o valor médio μ

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: ***Semiperímetro × Apótema***

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral do cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g - geratriz)

Área da superfície esférica: $4\, \pi\, r^2$

Volumes

Prisma regular: ***Área da base × Altura***

Prisma com as áreas das bases diferentes (ex: Cone): $\frac{1}{3} \times (A + a + \sqrt{A \times a}) \times \text{Altura}$ (A – área da base maior; a – área da base menor)

Esfera: $\frac{4}{3}\, \pi\, r^3$

Geometria

Vetor entre pontos: $\overrightarrow{AB} = B - A$

Distância entre 2 pontos A e B (módulo do vetor): $\sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$

Produto de vetores: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (A \times a) + (B \times b) + (C \times c)$

Condição de perpendicularidade: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$

Usando a regra acima: $(a, b) \perp (-b, a)$ *e* $(a, b, c) \perp (-b, a, 0)$

Equação vetorial da reta: $(X, Y, Z) = (a, b, c) + K(u_1, u_2, u_3),\ K \in R$ [1] [2]

2 vetores são colineares se: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

Equação do plano: $n1\, X + n2\, Y + n3\, Z + d = 0$

Ângulo entre vetores: $\cos(r \hat{} s) = \frac{|\vec{r} * \vec{s}|}{\|\vec{r}\| * \|\vec{s}\|}$

Inclinação: $tg(\vartheta) = m,\ se\ m>0$

Domínio de uma função composta f(g(X))

$$D = \{ X \in R : X \in Dg \wedge g(X) \in Df \}$$

Trigonometria

$\sin^2 + \cos^2 = 1$

$1 + tg^2 = \frac{1}{\cos^2}$

$1 + \frac{1}{tg^2} = \frac{1}{\sin^2}$

$\sin(a+b) = \sin a * \cos b + \sin b * \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a * \cos b - \sin a * \sin b$

$tg(a+b) = \frac{tg\, a + tg\, b}{1 - tg\, a * tg\, b}$

---

[1] Também pode ser escrito em forma de sistema (equações paramétricas)

[2] Também pode ser escrito como $\frac{X-a}{u_1} = \frac{Y-b}{u_2} = \frac{Z-c}{u_3}$ (equações simétricas)