

Determinação Do Momento De Inércia Utilizando Um Método Oscilatório

João Guilherme Paiva Bezerra de Melo

Maio 2023, Universidade do Porto

Resumo

Neste trabalho foi possível determinar o momento de inércia para massas constantes variado apenas a distribuição dela e o eixo de rotação. Foi possível também testar o teorema de Steiner. Foram estudadas condições que aumentaram o erro associado ao experimento, ressaltando as principais causas e fatores. Por fim, foram calculados e comparados com os valores teóricos o momento de inércia de outros dois sólidos rígidos. Foi concluído que existe uma gama experimental mais eficiente para realizar o experimento.

1 Introdução

Com o objetivo de calcular o momento de inércia de algumas configurações de massas e verificar o teorema de Steiner, Eq. 1, foi utilizada a montagem experimental da figura 1, a qual será mais bem explicada no capítulo 2.1. A função do esquema é utilizar a frequência oscilatória de uma mola para determinar o momento em diferentes configurações. Para ser possível efetuar esse cálculo é preciso relacionar as duas grandezas mencionadas.

$$I_p = I_s + M_d^2 \quad (1)$$

- I_p = momento de inércia em relação ao eixo paralelo ao de simetria.
- I_s = momento de inércia em relação ao eixo de simetria.

primeiro tem-se que considerar uma distribuição de N massas m_i distribuídas ao redor de um referencial OO' (eixo fixo) a distâncias r_i . Assumindo essa configuração e com ajuda da Eq. 3, conseguimos definir momento de inércia como Eq. 2.

$$I_{oo'} = \sum_i m_i r_i^2 \quad (2)$$

$$\vec{\sigma} = I_{oo'} \omega \quad (3)$$

Generalizando a equação 2 para distribuições contínuas de massas temos Eq. 4.

$$I_{oo'} = \iiint m_i r_i^2 dv \quad (4)$$

Mais uma vez com ajuda da Eq. 3 podemos definir a equação do movimento da partícula como Eq. 5 assumindo que o referencial OO' é o eixo principal de rotação do corpo. Considerando \vec{M}_o como o momento angular de todas as forças atuantes no corpo e que \vec{M}_o é paralela a OO' .

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{L}_o}{dt} = I_{oo'} \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (5)$$

Como o momento é aplicado sobre uma mola pode-se concluir a Eq. 6 uma vez que agora \vec{M}_o é um momento restaurador. Sabendo disso pode-se resolver a equação diferencial 5 comparando com a do movimento harmônico simples, Eq. 7, chegando na Eq. 8. É válido destacar que D é uma constante que depende unicamente das características do esquema montado principalmente da mola.

$$M_o = -D\theta \quad (6)$$

- onde θ é o ângulo de deslocamento.

$$\theta(t) = \theta_{\max} \cos(\Omega t + \varphi) \quad (7)$$

- Ω = frequência angular.
- φ = uma constante que representa a diferença de fase.

$$T^2 = \frac{4}{\pi^2} \frac{I_{oo'}}{D} \quad (8)$$

2 Experiência

2.1 Método experimental

2.1.1 Esquema experimental

Como mostrado na montagem a baixo ,fig.1,tem-se um suporte contendo uma barra de metal que nela ligada uma mola que ,quando desviada de sua posição de origem, gera um momento torsor com as características mencionada na introdução.Para determinar o período de oscilação da mola foi utilizado um *fotogate* da marca PASCO o qual está ligado a um contador de tempo calibrado para registrar o período de uma oscilação , módulo "pendule".Essa montagem foi feita para simular as condições especificadas na introdução, mas para isso tem-se que fazer algumas considerações e as consequências serão explicadas no tópico de análise.

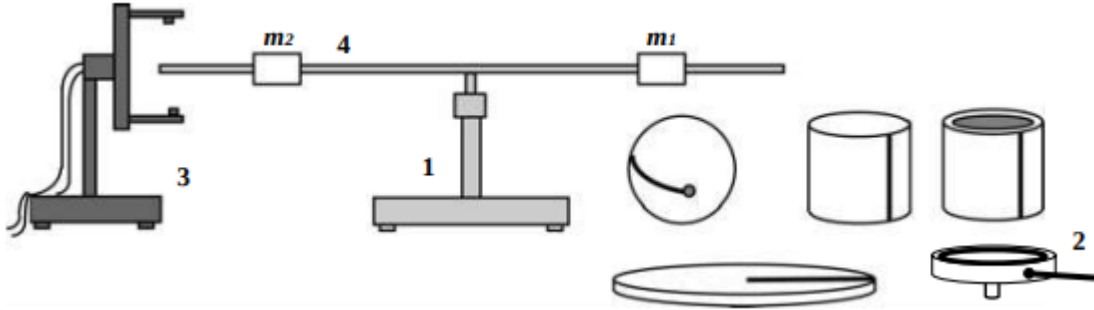


Figura 1: Protocolo T5A UP

- 1 = Base de suporte com mola associada.
- 2 = Base para cilindros.
- 3 = *Fotogate* ligado a um contador de tempo marca : PASCO.
- 4 = Barra com massas m_1 m_2 .

2.1.2 Coleta de dados para determinação de D

Para fazer a determinação de D é preciso calcula o momento de inércia na posição de equilíbrio para diferentes distâncias d_t , pois , com esses valores e com auxílio da Eq.9 que vem da Eq.8 podemos calcular D.

$$I_{oo'} = \frac{D}{4\pi^2} T^2 \quad (9)$$

Para recolher essas dados foram presas as massas m_1 e m_2 de forma que a distância de uma para a outra seja de d_t e a meia distância entre elas se encontre o eixo de rotação.

m1 [g]	m2 [g]	L [cm]	m_L [g]
u(0,01)	u(0,01)	u(0,05)	u(0,01)
210,8	212,44	60,8	132,19

Tabela 1: tabela obtida em laboratório

Além dessa configuração também foram pesadas as massas , a vareta e medido o comprimento da vareta, tab.1. Massas e vareta pesadas na balança de marca METTLER modelo PJ400.

Ao girar a vareta em um ângulo de 90° foi medido período de oscilação no sentido direto (anti-horário) e inverso (horário), foi tomado o valor médio para o valor do período (as incertezas foram desprezadas pois são irrelevantes na análise). Com os valores medido e com ajuda da E.q10 foi preenchida a tabela tab.2.

$$I' = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + m_{\text{vareta}} \left(\frac{L^2}{12} \right) \quad (10)$$

dt [cm]	TD [s]	TI [s]	T ² [s]	I [kg.m ²]	I' [Kg.m ²]
u(0,05)	u(0,001)	u(0,001)			
29,5	7,929	7,92	62,8	0,04079	0,04090
28,5	7,7	7,695	59,3	0,03863	0,03845
27,9	7,486	7,496	56,1	0,03672	0,03702
27	7,278	7,282	53,0	0,03481	0,03493
27,5	7,453	7,466	55,6	0,03643	0,03608

Tabela 2: tabela obtida em laboratório

Na tab.2 I' foi calculado por meio fórmula Eq.10 já I, é um ajuste linear da Eq.9 . suas matriz é mostrada no tópico de análise.

2.1.3 cálculo do teorema de Steiner

Definido uma distância d_t e variando o eixo de simetria das massas , como mostra a fig.2, é preenchida a tab.3.

d [m]	T ² [s ²]	I _z [Kgm ²]	I'	I _z - I'	I _z - I' /I _z
0,08	40,41	0,2327	0,01699	0,00629	0,027
0,061	32,35	0,01864	0,01425	0,00439	0,0189
0,044	27,03	0,01557	0,01283	0,00274	0,0118
0,03	21,86	0,01259	0,01131	0,00127	0,0055
0,017	18,71	0,01098	0,01069	0,00009	0,0004

Tabela 3: tabela obtida em laboratório

Com essa nova geometria para preencher a 3 basta mais uma vez medir os períodos de oscilações.

Tendo essas valores de oscilações obtidos é calculado I_z pela fórmula Eq.9, uma vez que D já é conhecido pela análise gráfica do tópico 2.1.2 . Na coluna seguinte da tab.3, foi calculado o valor previsto de I pelo teorema de Steiner , Eq.1 e por fim, foi calculado a diferença absoluta entra os valores obtidos $|I_z - I'_z|$ e a diferença relativa $|I_z - I'_z|/I_z$.

2.1.4 calculando o momento de inércia de outros sólidos

Agora o objetivo é calcular o momento de inércia de diferentes sólidos cuja fórmula de calculo teórico é resumida na fig8 e comparar com os valores obtidos experimentalmente.

Nesse momento foi retirada a vareta e fixado o sólido diretamente na base do suporte da mola , como mostra a fig3.

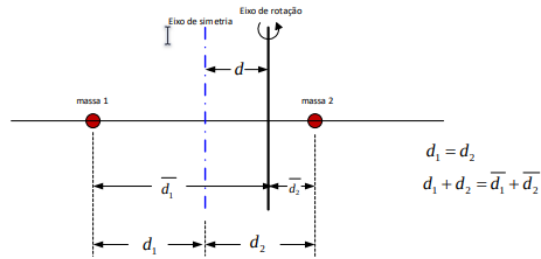


Figura 2: Protocolo T5A UP



Figura 3: foto do relatório UP T5A

Com o mesmo procedimento já mencionado foi preenchida a tabela tab.4 e a tab.5.

cilindro oco					
m(kg)	d(m)	Td	TD	TI	T ² (s ²)
u(0,00001)	u(0,0005)	u(0,001)	u(0,001)	u(0,001)	u(0016)
0,3632	0,10005	1,17	1,17	1,17	1,369

Tabela 4: tabela obtida em laboratório

cilindro oco					
m(kg)	d(m)	Td	TD	TI	T ² (s ²)
u(0,00001)	u(0,0005)	u(0,001)	u(0,001)	u(0,001)	u(0016)
0,3632	0,10005	1,17	1,17	1,17	1,369

Tabela 5: tabela obtida em laboratório

Foram calculado as imagens para os casos do cilindro oco e do cilindro maciço mostrados na fig.4.

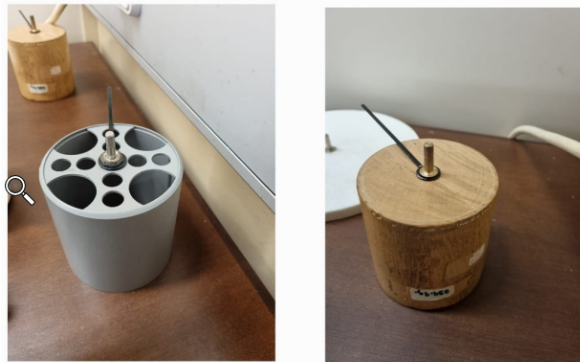


Figura 4: foto tirada por mim em laboratório

2.2 Resultados e Análise Experimental

Para se feita a análise foram feitas algumas considerações : as massas m_1 e m_2 são pontuais , foram desprezadas o momento da força aplicada na vareta, e considerado o movimento da mola como não amortecido. Essas considerações geram erros maiores do que propriamente os erros associados as medidas por isso não foi feita uma análise formal dos erros. Isso não é verdade para o calculo do momento de outros sólidos uma vez que não se tem a vareta nem queremos considerar com uma massa pontual.

2.3 Análise tab.2

O primeiro passo e mais importante dessa análise é o cálculo da constante D , para isso foi traçado o gráfico de I' em função de T^2 , calculada sua matriz de ajuste, traçado o devido ajuste linear e com base Eq.9 foi calculado $D = (0,02525 \pm 0,00004) Kg m^2 s^{-2}$ com um erro de $\approx 2\%$. gráfico e matriz representados em fig.5)

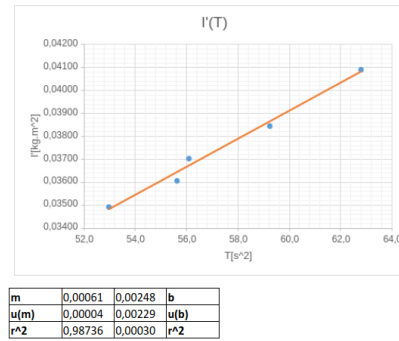


Figura 5: gráfico feito em laboratório

Com finalidade de estudar qual gama experimental possui um erro menor foi traçado o gráfico da diferença relativa entre os valores medidos e teóricos $|I - I'|/I'$ em função de d_t^2 , fig6.

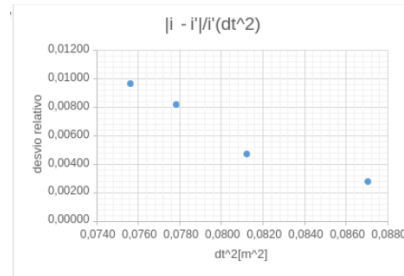


Figura 6: gráfico feito em laboratório

Analisando ele é possível perceber que a diferença diminui de acordo com o aumento de d_t , isso é o esperado uma vez que com o aumento da distancia o comprimento da massa vai se tornando cada vez menos relevante assim a consideração de que são massas pontuais fica mais precisa.

2.4 Análise tab.3

Agora com o valor de D sabido e com a nova configuração fig.2 podemos testar o teorema de Steiner 1. Para isso foi traçado o gráfico da diferença absoluta entre o momento medido e o momento previsto pelo teorema de Steiner $|I_z - I'_z|$ em função da distância ao quadrado entre o eixo de simetria e de rotação (d^2). pode ser visto em fig.7.

Com esse gráfico podemos ver que a gama experimental mais eficiente para se utilizar o teoremas de Steiner são para valores de d pequenos, isso é coerente pois, quando menor a diferença entre o eixo de simetria e o eixo de rotação menor também será o momento da força aplicada na vareta.

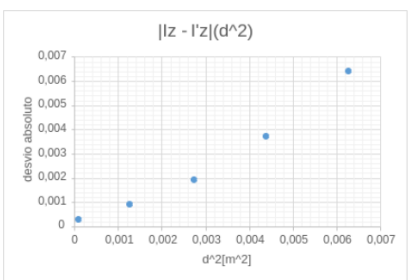


Figura 7: gráfico feito em laboratório

Com a análise gráfica fica claro que as considerações de massas pontuais e de que não existe momento de força na vareta são importantes na gama escolhida uma vez que são, pelos gráficos, visivelmente mais relevantes que os erros relacionados à precisão dos aparelhos de medidas.

2.5 Análise tab.4 e 5

Para o cálculo do momento dos sólidos foi utilizada a tabela que se encontra em anexos fig.8. Como esperado o cálculo dos sólidos obteve erros menores uma vez que não é necessário fazer as considerações sobre a vareta nem que as massas são pontuais. O valor obtido para o cilindro oco foi de $(8,75 \pm 0,04)10^{-4} kgm^2$, o que dá um desvio de $\approx 3\%$.

Para o cilindro maciço foi de $(4,6 \pm 0,05)10^{-4} Kg m^2$ e o desvio foi de $\approx 1,3\%$ do valor teórico.

3 conclusão

- Os momentos de inércia foram bem determinados com os devidos erros bem justificados e analisados devidos às condições do experimento, além disso foi possível analisar graficamente em quais gamas experimentais o estudo é mais preciso.
- D foi bem determinado com incerteza baixa e o atende às expectativas gráficas.
- O teorema de Steiner foi verificado e explicado em quais gamas ele foi mais preciso.
- No estudo dos momentos de inércia dos sólidos foi possível calcular os valores do momento de inércia com erros percentuais baixos.
- O estudo foi bem sucedido e atende com as expectativas considerando as condições de massas pontuais, de momento de força, alinhamento e movimento amortecido.

4 anexos




Cilindro maciço (eixo de rotação; raio r ; massa M)		$\frac{1}{2}Mr^2$
Cilindro maciço (eixo perpendicular; raio r e extensão L ; massa M)		$\frac{1}{4}Mr^2 + \frac{1}{12}ML^2$
Cilindro oco ($r_{in} \rightarrow$ raio interior; $r_{ex} \rightarrow$ raio exterior; massa M)		$\frac{1}{2}M(r_{int}^2 + r_{ext}^2)$

Figura 8: Imagem relatório T5A[1]

Referências

- [1] D. U. FIS1005. Trabalho 5A - Determinação de Momentos de Inércia Utilizando um Método Oscilatório. 2021.