Ministério da Educação
Instituto Federal Fluminense
campus Macaé

P: João Alvaro
W: HTTP://PROFJOAOALVARO.BLOGSPOT.COM
E: JOAO.BAPTISTA@IFF.EDU.BR

ALGA 01

NOTA DE AULA 07.

RESOLVENDO SISTEMAS LINEARES.

1 Sistemas Triangulares

Afirmação. *Dado o sistema S, podemos escrever na forma matricial $AX = B$ onde:*

- *A é a matriz dos coeficientes.*
- *X é a matriz das variáveis.*
- *B é a matriz dos termos independentes.*

Exemplo. *Considere o sistema S:*

$$S: \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 1 \\ x - 7y & = & 2 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1.1 Sistema Triangular superior.

Definição 1. *Dizemos que um sistema S é triangular superior, se em sua forma matricial, sua matriz dos coeficientes for triangular superior*

Exemplo.

$$S: \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 1 \\ -7y & = & 2 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Afirmação. *Note que um sistema triangular possui um método intuitivo para ser resolvido* ***(encontramos as variáveis de baixo para cima)****. Este método é denominado* ***método das substituições retroativas.***

Definição 2. *Dizemos que um sistema S é triangular inferior, se em sua forma matricial, sua matriz dos coeficientes for triangular inferior*

Exemplo.

$$S: \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 1 \\ -7y & = & 2 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1.2 Sistema triangular inferior.

Definição 3. *Dizemos que um sistema S é triangular inferior, se em sua forma matricial, sua matriz dos coeficientes for triangular inferior*

Exemplo.

$$S : \begin{cases} 2x & = & 1 \\ 3x - 7y & = & 2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Afirmação. *Note que assim como no sistema triangular superior, o inferior também possui um método intuitivo para ser resolvido **(encontramos as variáveis de cima para baixo)**. Este método é denominado **método das substituições sucessivas.***

2 Sistemas equivalentes

Definição 4. *Dizemos que os sistemas S_1 e S_2 são equivalentes se possuem as mesmas soluções.*

Exemplo. *Os sistemas:* $\begin{cases} x + y & = & 3 \\ 2x - y & = & 0 \end{cases}$ *e* $\begin{cases} x + y & = & 3 \\ 3x & = & 3 \end{cases}$ *São equivalentes já que $(1, 2)$ é solução única de ambos sistemas.*

3 Operações elementares.

Definição 5. *Seja S um sistema linear de m equações com n variáveis. Interessa-nos considerar os sistemas que podem ser obtidos de S de um das maneiras*

i.) Permutar duas equações de S.

Exemplo. $\begin{cases} x + y & = & 3 \\ 2x - y & = & 0 \end{cases} L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{cases} 2x - y & = & 0 \\ x + y & = & 3 \end{cases}$

ii.) Multiplicar uma das equações de S por um número $\alpha \neq 0$

Exemplo. $\begin{cases} x + y & = & 3 \\ 2x - y & = & 0 \end{cases} L_1 \leftarrow (2) \cdot L_1 \begin{cases} 2x + 2y & = & 3 \\ 2x - y & = & 0 \end{cases}$

iii.) Somar a uma equação do sistemas uma outra equação desse sistema multiplicada por um número real.

Exemplo. $\begin{cases} x + y & = & 3 \\ 2x - y & = & 0 \end{cases} L_2 \leftarrow L_2 + (-1) \cdot L_1 \begin{cases} x + y & = & 3 \\ 3x & = & 3 \end{cases}$

Afirmação. *Operações elementares formam sistemas equivalentes.*

Basta verificar que os sistemas possuem mesma solução.

4 Sistemas Escalonado.

Definição 6. *Considere um sistema linear de m equações com n incógnitas que tem o seguinte aspécto:*

$$S: \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_{r_1} & & & & +\alpha_{1n} \cdot x_n & = & \beta_1 \\ & \alpha_{12} \cdot x_{r_2} & & & \alpha_{1n} \cdot x_n & = & \beta_2 \\ & & \cdots & & & & \\ & & & \alpha_{kr_k} \cdot x_{r_k} & \cdots & +\alpha_{kn} \cdot x_n & = & \beta_k \\ & & & & 0x_n & = & \beta_{k+1} \end{cases}$$

Onde $\alpha_{1r_1} \neq 0, \alpha_{2r_2} \neq 0, \cdots, \alpha_{kr_k} \neq 0$ e cada $r_i \geq 1$
Se tivermos $1 \leq r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r_k \leq n$ diremos que S é um sistema linear escalonado. É claro que se $\beta_{k+1} = 0$, a última equação de S pode ser eliminada do sistema. Logo num sistema escalonado o número de coeficientes iniciais nulos em cada equação, a partir da segunda, é maior do que na precedente.

Exemplo. *Exemplo de sistema escalonado:*

$$\begin{cases} 2x & -y & -z & -3t & = & 0 \\ & & z & -t & = & 1 \\ & & & 2t & = & 2 \end{cases}$$

Proposição. *Todo sistema linear S é equivalente a um sistema escalonado.*

Afirmação. *Dado o sistema S, podemos encontrar um sistema S' escalonado equivalente à S utilizando uma sequência finita de operações elementares. A esse processo, damos o nome de escalonamento.*

Exemplo. *Considere o sistema abaixo:*

$$\begin{cases} 5x & -2y & +2z & = & 2 \\ 3x & +y & +4z & = & -1 \\ 4x & -3y & +z & = & 3 \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{cases} 5x & -2y & +2z & = & 2 \\ 3x & +y & +4z & = & -1 \\ 4x & -3y & +z & = & 3 \end{cases} \quad c_1 \leftrightarrow c_2 \quad \begin{cases} -2y & +5x & +2z & = & 2 \\ y & +3x & +4z & = & -1 \\ -3y & +4x & +z & = & 3 \end{cases} \quad l_1 \leftrightarrow l_2$$

$$\begin{cases} y & +3x & +4z & = & -1 & l_1 \\ -2y & +5x & +2z & = & 2 & l_2 \leftarrow l_2 + 2 \cdot l_1 \\ -3y & +4x & +z & = & 3 & l_3 \leftarrow l_3 + 3 \cdot l_1 \end{cases} \begin{cases} y & +3x & +4z & = & -1 & l_1 \\ & +11x & +10z & = & 0 & l_2 \\ & +13x & +13z & = & 0 & l_3 \leftarrow \frac{1}{13} \cdot l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y & +3x & +4z & = & -1 & l_1 \\ & +11x & +10z & = & 0 & l_2 \leftrightarrow l_3 \\ & +x & +z & = & 0 & l_3 \leftrightarrow l_2 \end{cases} \begin{cases} y & +3x & +4z & = & -1 & l_1 \\ & +x & +z & = & 0 & l_2 \\ & +11x & +10z & = & 0 & l_3 \leftarrow l_3 - 11 \cdot l_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y & +3x & +4z & = & -1 \\ & +x & +z & = & 0 \\ & & -z & = & 0 \end{cases}$$

Donde temos $z = 0, x = 0$ e $y = -1$ **confira...**

Obs. *Note que as operações elementares acima não foram necessariamente os melhores passos para chegar ao sistema escalonado equivalente. Recomendo que tente fazer novamente buscando outras operações elementares, lembrando que podem ser combinadas operações de modo a chegar no sistema escalonado.*

5 Discussão de um sistema.

Discutir um sistema linear S significa efetuar um estudo de S visando a classificá-lo quanto a existência ou não de solução e quanto a quantidade de soluções.

- Possível e determinado: quando possui uma única solução.
- Possivel e indeterminado: quando possui mais de uma solução.
- Impossível: quando não possui solução.

5.1 Sistema impossível.

Quando durante o processo de escalonamento, em uma certa etapa, obtém-se um sistema:

$$\begin{cases} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0x_1 & 0x_2 & + & \cdots & & & +0x_n & = & \beta_i & (\beta_i \neq 0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{cases}$$

note que não existe valores para o conjunto ordenado x_k, $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tal que a equação seja verdadeira. E por isto temos o sistema impossível.

5.2 Sistema possível e determinado.

Quando durante o processo de escalonamento de um sistema S obtemos um sistema do tipo:

$$\begin{cases} x_1 & \alpha_{12} \cdot x_2 & & \cdots & \alpha_{1n} \cdot x_n & = & \beta_1 \\ & x_2 & +\alpha_{22} \cdot x_3 & \cdots & \alpha_{2n} \cdot x_n & = & \beta 2 \\ & & & \vdots & & & \\ & & & & x_n & = & \beta_n \end{cases}$$

Neste caso temos S um sistema possível e determinado pois basta substituirmos os valores das variáveis nas equações imediatamente acima. Este processo chama-se **método das substituições retroativas.**

5.3 Sistema possível e indeterminado.

Suponhamos que durante o processo de escalonamento obtemos um sistema do tipo a seguir:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & + & \cdots & \alpha_{1r_2}\cdot xr_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1r_p}\cdot xr_p & + & \cdots & +\alpha_{1n}\cdot xn & = & \beta_1 \\
\cdots & + & \cdots & x_{r_2} & + & \cdots & + & \alpha_{2r_p}\cdot xr_p & + & \cdots & +\alpha_{2n}\cdot xn & = & \beta_2 \\
 & & & & x_{r_3} & \cdots & + & \cdots & + & \cdots & +\alpha_{3n}\cdot xn & = & \beta_3 \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & & & \cdots & & \cdots & & \\
 & & & & \cdots & \cdots & & x_{r_p} & + & \cdots & +\alpha_{pn}\cdot xn & = & \beta_p
\end{array}\right.$$

Com $p < n$.

Note que podemos ir eliminando, por meio de operações elementares, o termo em x_{r_2} na primeira equação, os temos x_{r_3} da primeira e segunda equações, $\cdots$, os termos em x_{r_p} da primeira à $(p-1)-sima$ equação. Feito isso passamos para o segundo membro de cada equação todas as parcelas, exceção feita à primeira. Teremos então algo como:

$$\left\{\begin{array}{ccc}
x_{r_1} & = & f_1 \\
x_{r_2} & = & f_2 \\
 & \cdots & \\
x_{r_p} & = & f_p
\end{array}\right.$$

Onde cada f_i é uma expressão linear nas variáveis $x_j]$ com $j \neq 1, j \neq r_2, \cdots, j \neq r_p$. A cada sequencia de valores que dermos então a essas $n-p$ vaiáveis (variáveis livres) obtemos valores para $x_1, x_{r_2}, \cdots, x_{r_p}$ e consequentemente uma solução do sistema. Como $p < n$, teremos mais do que uma solução **(infinitas)** e o sistema é dito possível e indeterminado.

Exemplo. *Considere o sistema:*

$$S:\left\{\begin{array}{ccccccc}
x & - & 2y & - & z & = & 1 \\
2x & + & y & - & 3z & = & 0 \\
x & - & 7y & & & = & 3
\end{array}\right.$$

O Sistema escalonado fica

$$S':\left\{\begin{array}{ccccc}
x & & - & \frac{7}{5}z & = & \frac{1}{5} \\
 & y & - & \frac{1}{5}z & = & -\frac{2}{5}
\end{array}\right.$$

Note que tanto x quanto y dependem de z.