P: João Alvaro
W: http://profjoaoalvaro.blogspot.com
E: joao.baptista@iff.edu.br

ALGA 01

NOTA DE AULA 07.

RESOLVENDO SISTEMAS LINEARES.

1 Sistemas equivalentes

Definição 1. *Dizemos que os sistemas S_1 e S_2 são equivalentes se possuem as mesmas soluções.*

Exemplo. *Os sistemas:* $\begin{cases} x+y &= 3 \\ 2x-y &= 0 \end{cases}$ *e* $\begin{cases} x+y &= 3 \\ 3x &= 3 \end{cases}$ *São equivalentes já que $(1,2)$ é solução única de ambos sistemas.*

2 Operações elementares.

Definição 2. *Seja S um sistema linear de m equações com n variáveis. Interessa-nos considerar os sistemas que podem ser obtidos de S de um das maneiras*

i.) Permutar duas equações de S.

Exemplo. $\begin{cases} x+y &= 3 \\ 2x-y &= 0 \end{cases} L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{cases} 2x-y &= 0 \\ x+y &= 3 \end{cases}$

ii.) Multiplicar uma das equações de S por um número $\alpha \neq 0$

Exemplo. $\begin{cases} x+y &= 3 \\ 2x-y &= 0 \end{cases} L_1 \leftarrow (2)\cdot L_1 \begin{cases} 2x+2y &= 3 \\ 2x-y &= 0 \end{cases}$

iii.) Somar a uma equação do sistemas uma outra equação desse sistema multiplicada por um número real.

Exemplo. $\begin{cases} x+y &= 3 \\ 2x-y &= 0 \end{cases} L_2 \leftarrow L_2 + (-1)\cdot L_1 \begin{cases} x+y &= 3 \\ 3x &= 3 \end{cases}$

Afirmação. *Operações elementares formam sistemas equivalentes.*

Basta verificar que os sistemas possuem mesma solução.

3 Sistemas Escalonado.

Definição 3. *Considere um sistema linear de m equações com n incógnitas que tem o seguinte aspécto:*

$$S : \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_{r_1} & & & & +\alpha_{1n} \cdot x_n & = & \beta_1 \\ & \alpha_{12} \cdot x_{r_2} & & & \alpha_{1n} \cdot x_n & = & \beta_2 \\ & & \cdots & & & & \\ & & & \alpha_{kr_k} \cdot x_{r_k} \quad \cdots & +\alpha_{kn} \cdot x_n & = & \beta_k \\ & & & & 0x_n & = & \beta_{k+1} \end{cases}$$

Onde $\alpha_{1r_1} \neq 0, \alpha_{2r_2} \neq 0, \cdots, \alpha_{kr_k} \neq 0$ e cada $r_i \geq 1$
Se tivermos $1 \leq r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r_k \leq n$ diremos que S é um sistema linear escalonado. É claro que se $\beta_{k+1} = 0$, a última equação de S pode ser eliminada do sistema. Logo num sistema escalonado o número de coeficientes iniciais nulos em cada equação, a partir da segunda, é maior do que na precedente.

Exemplo. *Exemplo de sistema escalonado:*

$$\begin{cases} 2x & -y & -z & -3t & = & 0 \\ & & z & -t & = & 1 \\ & & & 2t & = & 2 \end{cases}$$

Proposição. *Todo sistema linear S é equivalente a um sistema escalonado.*

Afirmação. *Dado o sistema S, podemos encontrar um sistema S' escalonado equivalente à S utilizando uma sequência finita de operações elementares. A esse processo, damos o nome de escalonamento.*

Exemplo. *Considere o sistema abaixo:*

$$\begin{cases} 5x & -2y & +2z & = & 2 \\ 3x & +y & +4z & = & -1 \\ 4x & -3y & +z & = & 3 \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{cases} 5x & -2y & +2z & = & 2 \\ 3x & +y & +4z & = & -1 \\ 4x & -3y & +z & = & 3 \end{cases} \quad c_1 \leftrightarrow c_2 \quad \begin{cases} -2y & +5x & +2z & = & 2 \\ y & +3x & +4z & = & -1 \\ -3y & +4x & +z & = & 3 \end{cases} \quad l_1 \leftrightarrow l_2$$

$$\begin{cases} y & +3x & +4z & = & -1 & l_1 \\ -2y & +5x & +2z & = & 2 & l_2 \leftarrow l_2 + 2 \cdot l_1 \\ -3y & +4x & +z & = & 3 & l_3 \leftarrow l_3 + 3 \cdot l_1 \end{cases} \begin{cases} y & +3x & +4z & = & -1 & l_1 \\ & +11x & +10z & = & 0 & l_2 \\ & +13x & +13z & = & 0 & l_3 \leftarrow \dfrac{l_3}{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y & +3x & +4z & = & -1 & l_1 \\ & +11x & +10z & = & 0 & l_2 \leftrightarrow l_3 \\ & +x & +z & = & 0 & l_3 \leftrightarrow l_2 \end{cases} \begin{cases} y & +3x & +4z & = & -1 & l_1 \\ & +x & +z & = & 0 & l_2 \\ & +11x & +10z & = & 0 & l_3 \leftarrow l_3 - 11 \cdot l_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y & +3x & +4z & = & -1 \\ & +x & +z & = & 0 \\ & & -z & = & 0 \end{cases}$$

Donde temos $z = 0, x = 0$ e $y = -1$ **confira...**

Obs. *Note que as operações elementares acima não foram necessariamente os melhores passos para chegar ao sistema escalonado equivalente. Recomendo que tente fazer novamente buscando outras operações elementares, lembrando que podem ser combinadas operações de modo a chegar no sistema escalonado.*