UNIVERSIDAD
METROPOLITANA

Introducción al **Toolbox de LMIs**

CONTROL ROBUSTO

Prof. Pedro Antonio TEPPA GARRÁN

1. Ejemplo de un sistema politópico.
2. Criterio de desempeño
   Realimentación de estado y reubicación de polos.
3. Instrucciones básicas del **Toolbox de LMIs**.
4. Ejemplo de reubicación de polos.
5. TESIS

1. EJEMPLO DE UN SISTEMA POLITÓPICO

PLANTA LPV

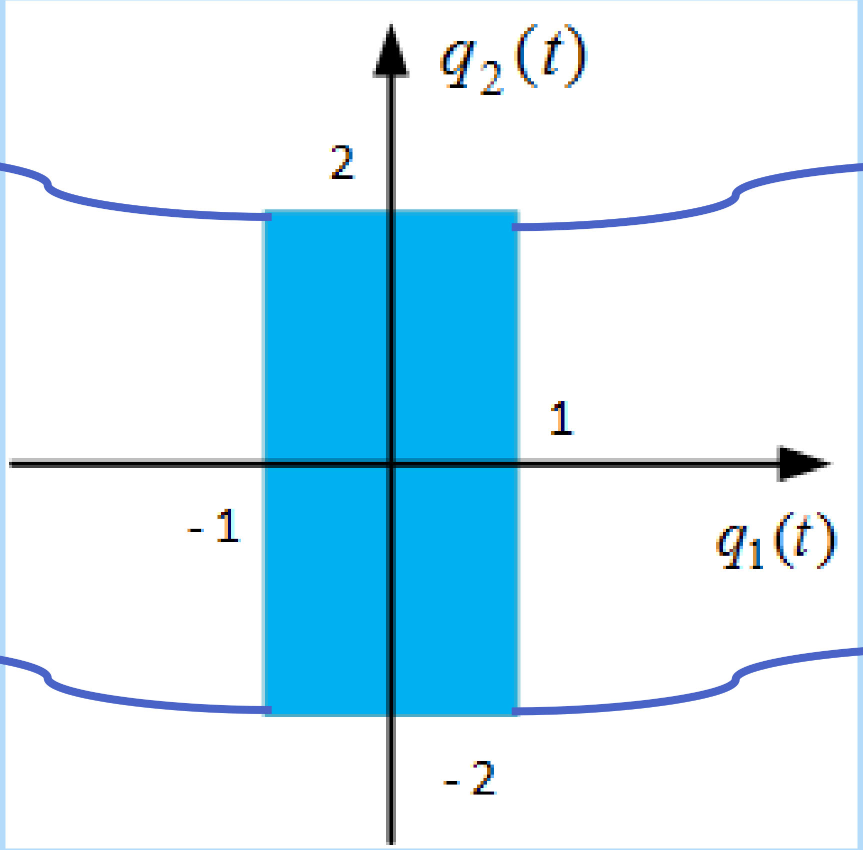
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q_1(t) & -q_2(t) \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

$$q_1(t) \in [-1, 1]$$

$$q_2(t) \in [-2, 2]$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$



$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

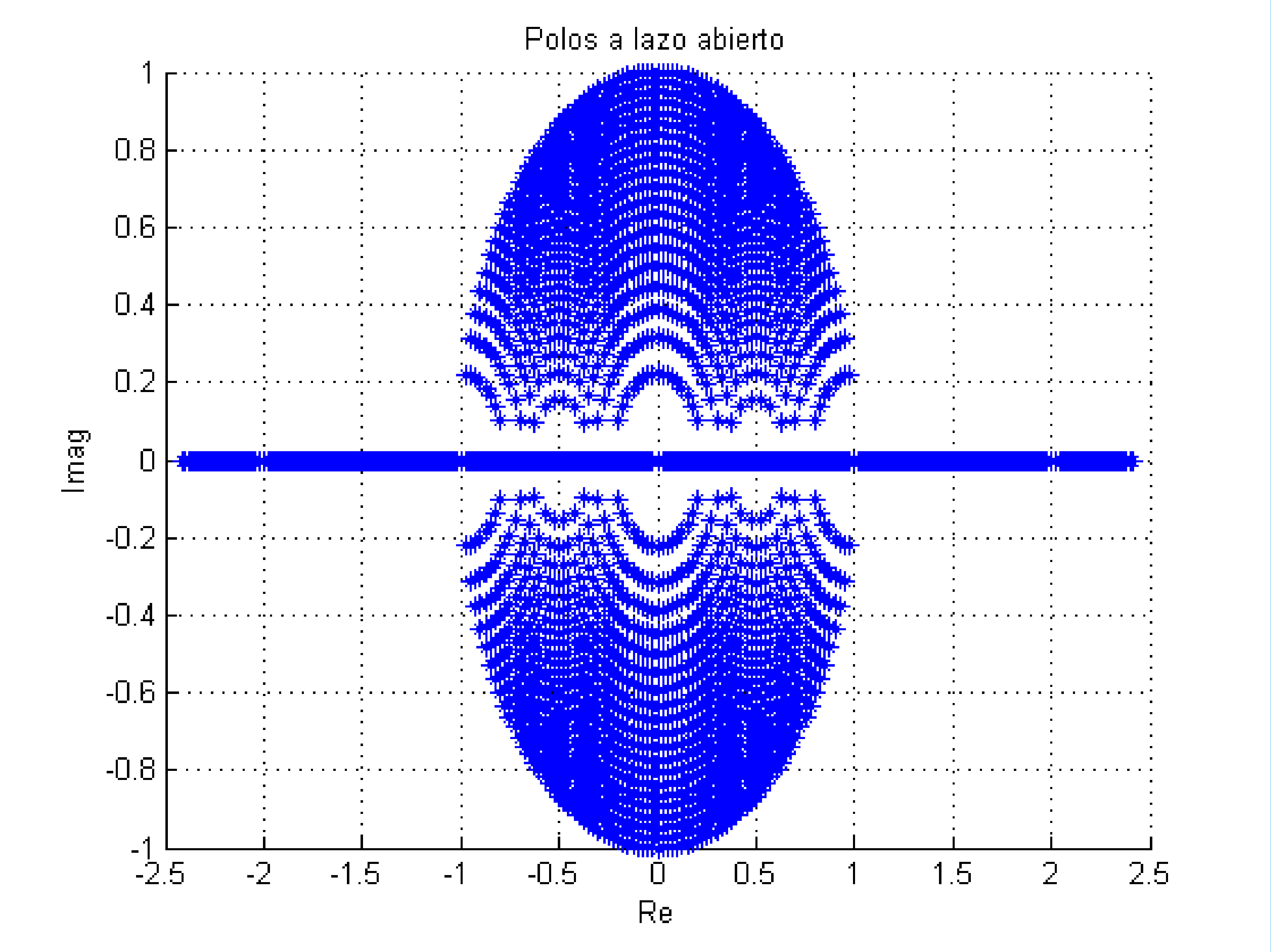
$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

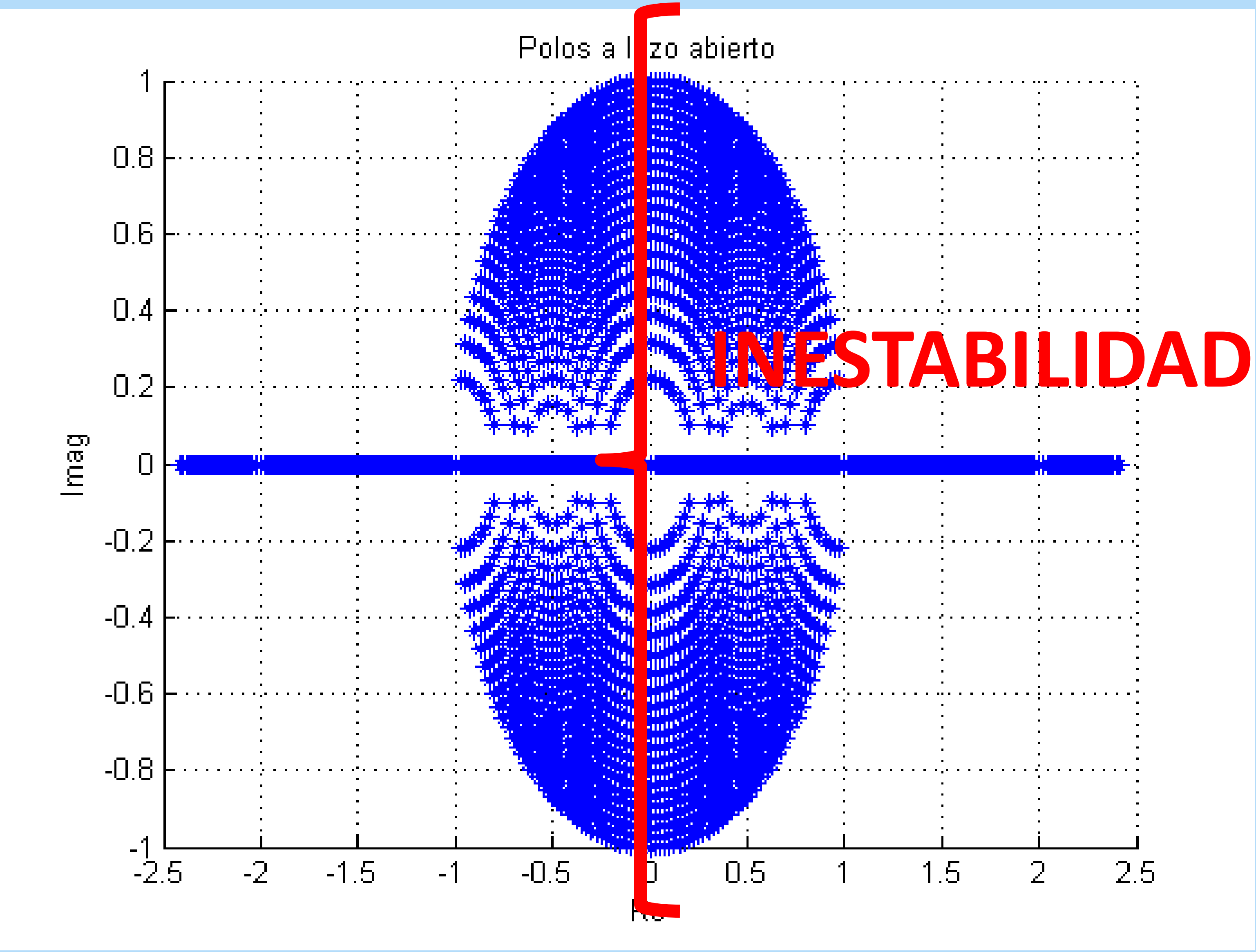
$$\boldsymbol{A}(t) \in \mathcal{C}_o\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4\}$$

```
% Polos a lazo abierto en el dominio de variación paramétrico
figure
for q1=-1:0.05:1
    for q2=-2:0.05:2
        A=[0 1;-q1 -q2];
        p=eig(A);
        hold on
        plot(real(p(1)),imag(p(1)),'*')
        plot(real(p(2)),imag(p(2)),'*')
    end
end
grid
xlabel('Re'), ylabel('Imag'), title('Polos a lazo abierto')
hold off
```

UNIVERSIDAD METROPOLITANA



UNIVERSIDAD METROPOLITANA



UNIVERSIDAD METROPOLITANA

2. CRITERIO DE DESEMPEÑO

Considere el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & B(t) & B_w \\ C_z & D_{zu} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \\ w \end{bmatrix} \qquad . \tag{1}$$

$$[A(t), B(t)] \in Co\{(A_1, B_1), \cdots, (A_N, B_N)\}$$

donde $x \in \Re^n$ es el vector de estado, $u \in \Re^m$ el vector de control, $w \in \Re^l$ el vector de perturbación y $z \in \Re^p$ es la salida controlada. El modelo del sistema a lazo cerrado con $u = Kx,\ K \in \Re^{m \times n}$ tiene la forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A(t) + B(t)K)x(t) + B_w w(t) \\ z(t) = (C_z + D_{zu}K)x(t) \end{cases} . \tag{2}$$

Realimentación de estado + reubicación de polos

Teorema 3

El sistema lineal (1) *es estabilizable por realimentación de estado* $u(t) = Kx(t)$ *y sus polos a lazo cerrado se encuentran en el interior de la región LMI* $R(\alpha, \rho, \theta)$ *si y solo si existen matrices* $S = S^T > 0 \in \Re^{n\,x\,n}$ *y* $R \in \Re^{m\,x\,n}$ *(arbitraria) tales que:*

$$A_i S + S A_i' + B_i R + R' B_i' + 2\alpha S < 0\,, \tag{7}$$

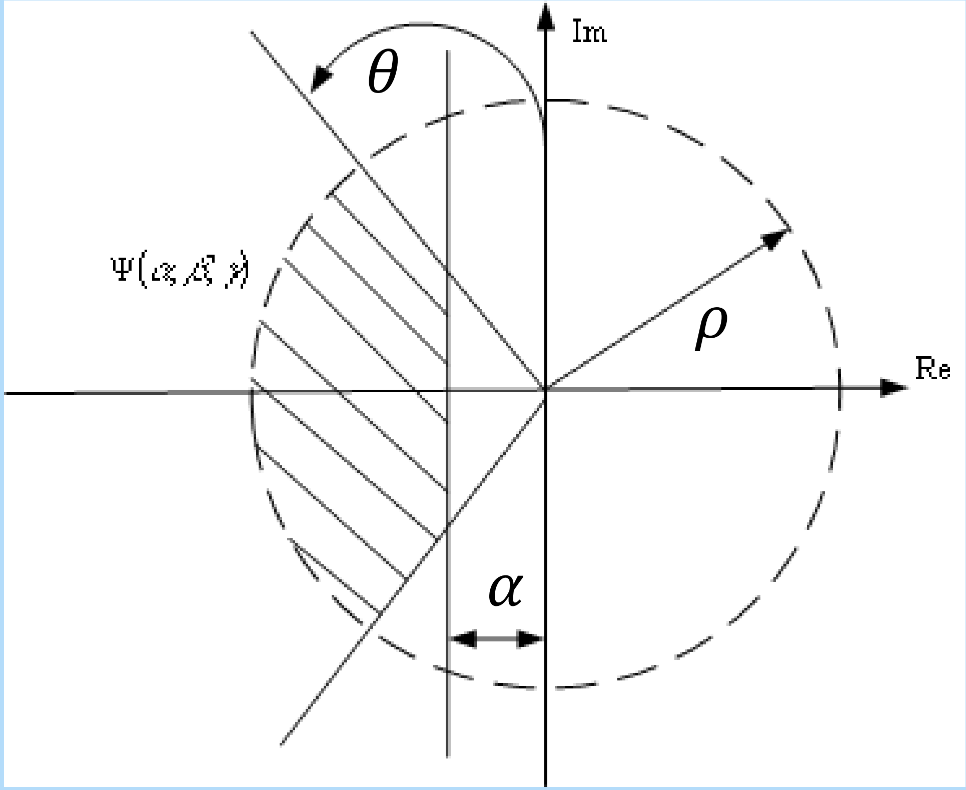
$$\begin{bmatrix} -\rho S & A_i S + B_i R \\ S A_i' + R' B_i' & -\rho S \end{bmatrix} < 0\,, \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} \sin\theta(A_i S + S A_i' + B_i R + R' B_i') & \cos\theta(A_i S - S A_i' + B_i R - R' B_i') \\ \cos\theta(S A_i' - A_i S + R' B_i' - B_i R) & \sin\theta(A_i S + S A_i' + B_i R + R' B_i') \end{bmatrix} < 0\,, \tag{9}$$

la ganancia estabilizante es $K = RS^{-1}, i = 1, \cdots, N$.

REFERENCIA

[3] CHILALI, M. y GAHINET, P. (1995) "H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3): 358 – 367.



3. INSTRUCCIONES BÁSICAS DEL TOOLBOX DE LMIs

i. Declaración del sistema LMI (*setlmis*)
ii. Definición de variables (*lmivar*)
iii. Construcción del sistema LMI (*lmiterm*)
iv. Ejecución ***solver***
(*getlmis, feasp, mincx, dec2mat*)

UNIVERSIDAD METROPOLITANA

i) setlmis Crear sistema LMI

$\gg setlmis([\,]) \quad < enter >$

ii) lmivar Definir variable tipo **matriz** en sistema LMI

$\gg S = lmivar(1,[4,1]) < enter > \quad \% \; S(4,4) \; matriz \; simétrica$

Un solo bloque de matriz diagonal simétrica

TAMAÑO 4 X 4

1: Matriz simétrica

$\gg R = lmivar(2,[2,3]) < enter > \quad \% \; R(2,3) \; matriz \; arbitraria$

TAMAÑO 2 X 3

2: Matriz arbitraria

iii) lmiterm

Definir las ecuaciones del sistema LMI

$$S > 0$$

$$AS + SA^T + BR + R^T B^T + 2\alpha S < 0$$

$$\begin{bmatrix} -\rho S & AS + BR \\ R^T B^T + SA^T & -\rho S \end{bmatrix} < 0$$

LMI	CÓDIGO MATLAB
$S > 0$	$\gg \quad lmiterm([-1\ 1\ 1\ S], 1,1)$
$AS + SA^T + BR + R^T B^T + 2\alpha S < 0$	$\gg \quad lmiterm([2\ 1\ 1\ S], A, 1,'s')$ $\gg \quad lmiterm([2\ 1\ 1\ R], B, 1,'s')$ $\gg \quad lmiterm([2\ 1\ 1\ S], 2 * \alpha, 1)$
$\begin{bmatrix} -\rho S & AS + BR \\ R^T B^T + SA^T & -\rho S \end{bmatrix} < 0$	$\gg \quad lmiterm([3\ 1\ 1\ S], -\rho, 1)$ $\gg \quad lmiterm([3\ 1\ 2\ S], A, 1)$ $\gg \quad lmiterm([3\ 1\ 2\ R], B, 1)$ $\gg \quad lmiterm([3\ 2\ 2\ S], -\rho, 1)$

UNIVERSIDAD METROPOLITANA

4. EJEMPLO DE REUBICACIÓN DE POLOS

```
% Realimentación de estado + reubicación de polos en región R(Alfa,Ro)
% Theta = 0.
clear all
% Planta
A1=[0 1;-1 -2];A2=[0 1;1 -2];A3=[0 1;1 2];A4=[0 1;-1 2];
B=[0;1];
% Especificaciones región reubicación de polos
Alfa=3;
Ro=8;
% Creación sistema LMI
setlmis([])
% Variables LMIs
S=lmivar(1,[2 1]); % S(2,2) simétrica
R=lmivar(2,[1 2]); % R(1,2) arbitraria
% S>0
lmiterm([-1 1 1 S],1,1);
```

```
% Restricciones asociadas al parámetro Alfa
```
% $A_1S + SA_1{}^T + BR + RB + 2\alpha S < 0$

```
lmiterm([2 1 1 S],A1,1,'s');
lmiterm([2 1 1 R],B,1,'s');
lmiterm([2 1 1 S],2*Alfa,1);
```
% $A_2S + SA_2{}^T + BR + RB + 2\alpha S < 0$

```
lmiterm([3 1 1 S],A2,1,'s');
lmiterm([3 1 1 R],B,1,'s');
lmiterm([3 1 1 S],2*Alfa,1);
```
% $A_3S + SA_3{}^T + BR + RB + 2\alpha S < 0$

```
lmiterm([4 1 1 S],A3,1,'s');
lmiterm([4 1 1 R],B,1,'s');
lmiterm([4 1 1 S],2*Alfa,1);
```
% $A_4S + SA_4{}^T + BR + RB + 2\alpha S < 0$

```
lmiterm([5 1 1 S],A4,1,'s');
lmiterm([5 1 1 R],B,1,'s');
lmiterm([5 1 1 S],2*Alfa,1);
```

UNIVERSIDAD METROPOLITANA

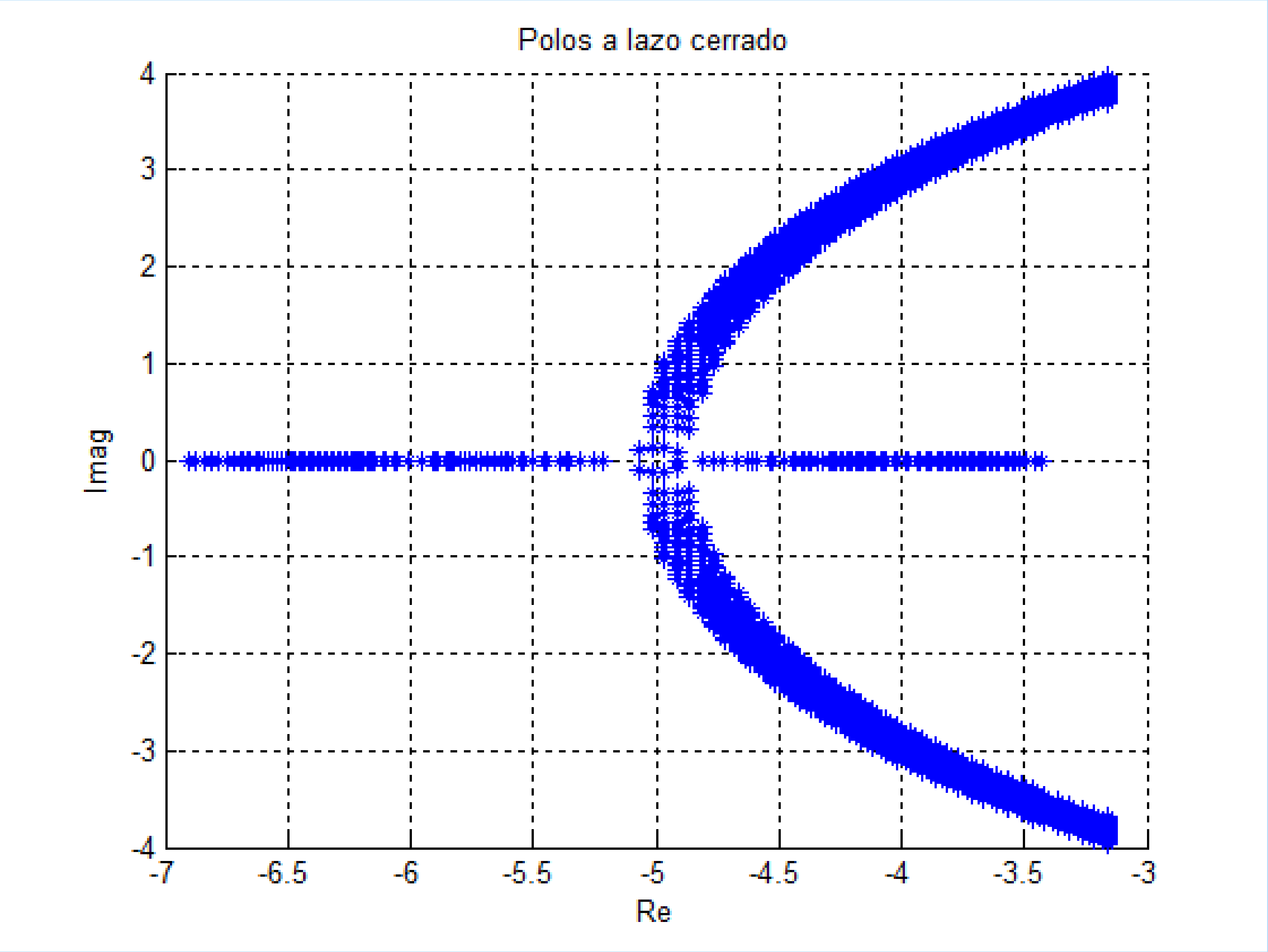
```
% Restricciones asociadas al parámetro Ro
% (A1,B)
lmiterm([6 1 1 S],-Ro,1);
lmiterm([6 1 2 S],A1,1);
lmiterm([6 1 2 R],B,1);
lmiterm([6 2 2 S],-Ro,1);
% (A2,B)
lmiterm([7 1 1 S],-Ro,1);
lmiterm([7 1 2 S],A2,1);
lmiterm([7 1 2 R],B,1);
lmiterm([7 2 2 S],-Ro,1);
% (A3,B)
lmiterm([8 1 1 S],-Ro,1);
lmiterm([8 1 2 S],A3,1);
lmiterm([8 1 2 R],B,1);
lmiterm([8 2 2 S],-Ro,1);
% (A4,B)
lmiterm([9 1 1 S],-Ro,1);
lmiterm([9 1 2 S],A4,1);
lmiterm([9 1 2 R],B,1);
lmiterm([9 2 2 S],-Ro,1);
```

$$\begin{bmatrix} -\rho S & A_i S + BR \\ S{A_i}^T + R^T B^T & -\rho S \end{bmatrix}$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

```
% Ejecución del solver
LMISYS=getlmis;
[tmin,xfeas]=feasp(LMISYS);
% Solución
S=dec2mat(LMISYS,xfeas,S);
R=dec2mat(LMISYS,xfeas,R);
K=R*inv(S);
```

```
% Polos a lazo cerrado del sistema politópico
figure
for q1=-1:0.1:1
    for q2=-2:0.1:2
        A=[0 1;-q1 -q2];
        p=eig(A+B*K);
        hold on
        plot(real(p(1)),imag(p(1)),'*')
        plot(real(p(2)),imag(p(2)),'*')
    end
end
grid
xlabel('Re'), ylabel('Imag'), title('Polos a lazo cerrado')
hold off
```



$\alpha = 3$

$\rho = 8$

Solver for LMI feasibility problems L(x) < R(x)
This solver minimizes t subject to L(x) < R(x) + t*I
The best value of t should be negative for feasibility

Iteration :	Best value of t so far
1	0.152537
2	0.023975
3	0.012355
4	0.012355
5	2.357657e-03
6	-8.680964e-04

Result: best value of t: -8.680964e-04
f-radius saturation: 0.000% of R = 1.00e+09

K =

-24.6691 -8.3307

R =

0.0840 -3.6910

S =

0.0345 -0.1121
-0.1121 0.7751

5. TESIS