

Control de un Sistema No Lineal de Suspensión de Bola Magnética

Mario Torre

06-85553

mtorre@usb.ve

Resumen:

Palabras Clave:

I. INTRODUCCIÓN

Este trabajo presenta el análisis y control de un Sistema de Suspensión de Bola Magnética (SSBM). Este sistema, tomado de [1], fue seleccionado a fin de realizar una serie de análisis en cumplimiento con las especificaciones de la Tarea 2 de la asignatura "Control Multivariable" (PS7315).

En primer lugar, se realizó una linealización del sistema SSBM alrededor de un punto de equilibrio. Posteriormente, se realizó un análisis a lazo abierto del Sistema, se resolvieron los problemas de regulación, de seguimiento y de seguimiento robusto. Finalmente, se realizaron nuevamente estos análisis empleando el principio de separación (diseño de observador).

La sección II se exhibe el SSBM a controlar, así como su linealización alrededor del punto de equilibrio. La sección III se presenta el diseño del controlador y el análisis en cada caso con su respectiva solución. En la sección IV se diseña nuevamente el controlador, pero en este caso utilizando un observador. Finalmente en la sección V se muestran los resultados obtenidos y en la sección VI se presentan algunas conclusiones. Las referencias bibliográficas se exhiben en la sección VII.

II. ANÁLISIS DEL SISTEMA

A. Descripción del Sistema

El sistema en estudio consiste en un circuito eléctrico con un electroimán, el cual atrae una bola metálica de tal manera que contrarresta la fuerza de la gravedad, y permite que dicha bola permanezca suspendida [2]. A este sistema se le denomina Sistema de Suspensión de Bola

Magnética (SSBM). La Figura 1 muestra el diagrama esquemático del SSBM.

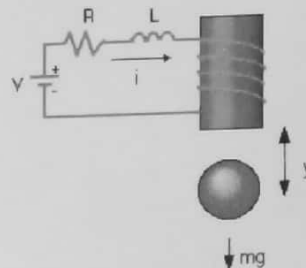


Fig.1: Sistema de Suspensión de una Bola Magnética (SSBM).

Las ecuaciones constitutivas del SSBM son las siguientes:

Circuito Eléctrico:

$$V = iR + L \frac{di}{dt} \quad (1)$$

Ecuación de Fuerza magnética:

$$f = \frac{qi^2}{y} \quad (2)$$

Balance de cuerpo libre:

$$mg - f = m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (3)$$

Si designamos como **variables de estado** $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = i$, y como entrada $u = V(t)$, podemos escribir las ecuaciones (1), (2) y (3) de la siguiente manera:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{qx_3^2}{mx_1} + g \quad (5)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{R}{L}x_3 + \frac{u}{L} \quad (6)$$

Las ecuaciones (4), (5) y (6) representan las **ecuaciones de estado** del SSBM. Por las características de estas ecuaciones, resulta claro de que se trata de un sistema no lineal.

Se realizó la linealización alrededor de un punto de equilibrio, identificado por x_{1eq} , x_{2eq} y x_{3eq} , respectivamente. Estos puntos de equilibrio se calculan al obtener los valores de x_1 , x_2 y x_3 en donde $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$ y $\dot{x}_3 = 0$ respectivamente. Los puntos de equilibrio vienen dados por:

$$x_{1eq} = \frac{qV^2}{mgR^2} \quad (7)$$

$$x_{2eq} = 0 \quad (8)$$

$$x_{3eq} = \frac{V}{R} \quad (9)$$

Las matrices A y B de las Ecuaciones de Estado linealizadas del SSBM vienen dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Donde f_1 , f_2 y f_3 están representadas por las ecuaciones (7), (8) y (9) respectivamente. El modelo en variables de estado de este sistema viene dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{cx_{3eq}^2}{mx_{1eq}^2} & 0 & -\frac{2cx_{3eq}}{mx_{1eq}} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u \quad (12)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Suponiendo que la salida $y = x_1$.

La función de transferencia del Sistema $G(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$ viene dada por la siguiente expresión:

$$G(s) = \frac{-\frac{2qx_{3eq}}{mLx_{1eq}}}{s^2 \left(s + \frac{R}{L} \right) - \frac{qx_{3eq}^2}{mx_{1eq}^2} \left(s + \frac{R}{L} \right)} \quad (14)$$

Nótese que reagrupando los componentes del denominador, la función de transferencia se puede reescribir así:

$$G(s) = \frac{-\frac{2qx_{3eq}}{mLx_{1eq}}}{\left(s + \frac{R}{L} \right) \left(s^2 - \frac{qx_{3eq}^2}{mx_{1eq}^2} \right)} \quad (15)$$

Dado que $\frac{qx_{3eq}^2}{mx_{1eq}^2} > 0$, la función de

transferencia $G(s)$ tiene dos polos en el plano

izquierdo en $s = -\frac{R}{L}$ y $s = -\sqrt{\frac{q}{m}} \frac{x_{3eq}}{x_{1eq}}$ y un

polo en el plano derecho en $s = \sqrt{\frac{q}{m}} \frac{x_{3eq}}{x_{1eq}}$,

por lo que el SSBM es inestable.

Se consideraron valores específicos para los parámetros del Sistema. Estos fueron extraídos de [2]. La Tabla 1 muestra los valores de las constantes y parámetros a utilizar en este trabajo.

Tabla 1: Constantes y Parámetros del SSBM

Parámetros y Constantes Utilizados	
$m=0.05\text{kg}$	$g=9.81\text{ m/s}^2$
$q=0.0001$	$V=7\text{ V}$
$L=0.01\text{ H}$	$x_{\text{seg}}=0.01$
$R=1$	$x_{\text{seg}}=7$

En este caso, el modelo en variables de estado queda como sigue:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 980 & 0 & -2.8 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} u \quad (16)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

B. Análisis a Lazo Abierto

Se realizó el análisis a lazo abierto del SSBM utilizando MATLAB, y se obtuvieron los siguientes resultados:

```
>> A=[0 1 0; 980 0 -2.8; 0 0 -100];
>> b=[0;0;100];
>> c=[1 0 0];
>> d=0;
>> [num,den]=ss2tf(A,b,c,d)
num =
    0     0   -0.0000  -280.0000
den =
  1.0e+004 *
    0.0001    0.0100   -0.0980    9.8000
>> eig(A)
ans =
   31.3050
  -31.3050
  100.0000
>> roots(den)
ans =
  100.0000
  -31.3050
   31.3050
```

```
>> sys=ss(A,b,c,d)
```

```
a =
      x1      x2      x3
x1      0       1       0
x2    980       0   -2.8
x3      0       0   -100
```

```
b =
      u1
x1      0
x2      0
x3    100
```

```
c =
      x1      x2      x3
y1      1       0       0
d =
      u1
y1      0

Continuous-time model.
```

```
>> step(A,b,c,d,0.2)
```

(La respuesta del sistema a lazo abierto se muestra en la Figura 2).

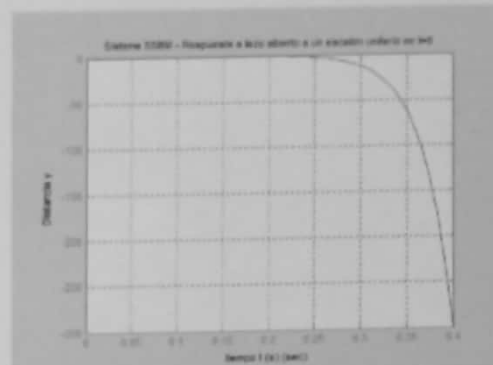


Fig. 2: Respuesta del Sistema a lazo abierto (entrada: escalón en $t=0$).

Tal como se observa en los resultados obtenidos con MATLAB, el Sistema tiene un polo en el semiplano izquierdo ($s=-31.3050$), tal como se obtuvo analíticamente en la sección A de este capítulo. La respuesta del sistema es no-acotada a medida que $t \gg 0$, por lo que se concluye que el sistema es inestable.

III. DISEÑO DEL CONTROLADOR DEL SISTEMA

A. Problema de Regulación

En primer lugar, se procedió a determinar si efectivamente el sistema SSBM definido por el par (A,b) es controlable.

La Matriz de Controlabilidad para un sistema de tercer orden viene dado por:

$$\Gamma = [b \quad Ab \quad A^2b]$$

Se utilizó MATLAB para el cálculo tanto de la matriz Γ , como de su rango.

```
>> A=[0 1 0; 980 0 -2.8; 0 0 -100];
>> b=[0;0;100];
>> c=[1 0 0];
>> d=0;
>> Lambda=[b A*b;A^2*b]
```

```

Lambda =
    0         0    -280
    0    -280   28000
   100  -10000 1000000
>> rank(Lambda)
ans =
    3

```

El rango de la matriz Γ es 3, igual al orden del sistema ($n = 3$). Con esto se concluye que la Planta es controlable.

Una vez determinado que el sistema es controlable, se puede aplicar una ley de control proporcional a esta planta. Este control modifica el diagrama de bloques del Sistema al mostrado en la Figura 3.

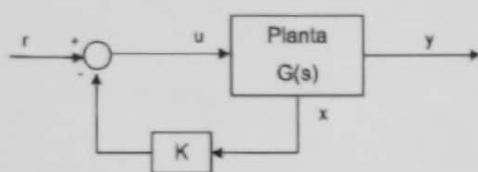


Fig. 3: Diagrama de Bloques del Sistema con una ley de control proporcional.

La ley de control aplicada establece que:

$$u = r - Kx \quad (18)$$

Se calculó K de manera que todos los polos del sistema controlado estuviesen en el semiplano izquierdo. Se seleccionó la ubicación de los polos de tal manera que estuviesen en el área Ψ , representada por la gráfica de la Figura 4.

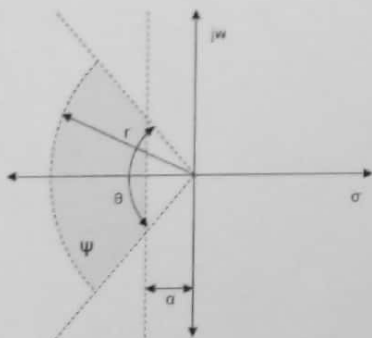


Fig. 4: Área Ψ dentro de la cual deben estar ubicados los polos del Sistema SSBM controlado.

De acuerdo con la Figura 4, el valor α representa el tiempo de respuesta del sistema, el valor r refleja sus dinámicas rápidas, el ángulo θ mide el "amortiguamiento" de la respuesta del sistema [3].

A efectos simplemente didácticos, se ubicarán los polos del sistema controlado de manera que la respuesta sea "ligeramente sub-amortiguada", con un tiempo de respuesta determinado. En este caso, se asumió lo siguiente:

- Tiempo de Respuesta $\tau = \frac{1}{\alpha} = 0.25$ s.
- Tasa de Amortiguamiento $\xi = \cos(\theta) = 0.866$ ($\theta = 30^\circ$).
- Limitación a respuestas rápidas $\frac{1}{r} = 0.1$ s ($r = 10$).

Con estos valores, se pudo determinar la ubicación de los polos:

$$p1 = -\alpha + j\alpha \tan(\theta) \quad (19)$$

$$p2 = -\alpha - j\alpha \tan(\theta) \quad (20)$$

$$p3 = -0.95r \quad (21)$$

(Nota: Se colocó $0.95r$ para que el polo $p3$ quede dentro del área Ψ).

Para los valores escogidos, los polos quedan así:

$$p1 = -4 + j2.31 \quad (22)$$

$$p2 = -4 - j2.31 \quad (23)$$

$$p3 = -9.5 \quad (24)$$

La Figura 5 muestra la ubicación de los polos en el plano complejo s.

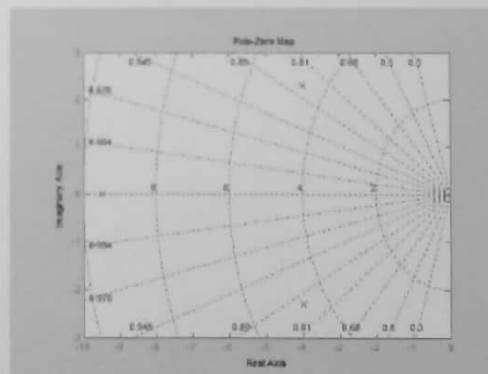


Fig. 5: Ubicación de los polos del sistema controlado, en el plano s.

Una vez determinada la ubicación de los polos, se determinó el valor de la matriz K para la ley de control proporcional establecida en la Figura 3.

```

>> A=[0 1 0; 980 0 -2.8; 0 0 -100];
>> b=[0;0;100];
>> c=[1 0 0];
>> d=0;
>> polos=[-4+j*2.31,-4-j*2.31, -9.5];

```

```
>> K=place(A,b,polos)

K =

   -61.9739   -3.8476   -0.8250

>> eig(A-b*K)

ans =

   -4.0000 + 2.3100i
   -4.0000 - 2.3100i
   -9.5000

>> x0=[0.1;0;0];
>> initial(A-b*K,b,c,d,x0)
```

(La respuesta del sistema a condiciones iniciales se muestra en la Figura 6).

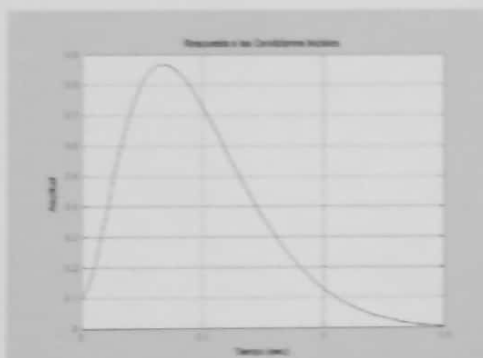


Fig. 6: Respuesta del Sistema controlado ante condiciones iniciales.

Del resultado mostrado en la Figura 6, se concluye que el sistema es asintóticamente estable. Esto está verificado por el hecho de que todos los autovalores de $(A-b*K)$ tienen parte real negativa.

B. Problema de Seguimiento

En la parte C de esta sección, se calculó K de manera que el sistema SSBM controlado, identificado por el par $(A-b*K,b)$ es asintóticamente estable ante una entrada acotada.

Respuesta al Escalón

Se procedió a evaluar el comportamiento del sistema ante un escalón de entrada:

$$r(t) = a, t \geq 0 \quad (25)$$

Para efectos de la simulación, se seleccionó $a = 1$. A fin de que la salida y siga asintóticamente la entrada r , se calculó la ganancia del Sistema a lazo cerrado cuando

$t \rightarrow \infty$, para así determinar la ganancia (o atenuación) el amplificador que debe colocarse a la entrada del sistema. En este caso (utilizando MATLAB) se obtuvo lo siguiente:

```
>> A=[0 1 0; 980 0 -2.8; 0 0 -100];
>> b=[0;0;100];
>> c=[1 0 0];
>> d=0;
>> [num, den] = ss2tf(A,b,c,d)
num =
     0         0   -0.0000  -280.0000
den =
    1.0e+004 *
    0.0001   -0.0100   -0.0980   -9.8000

>> polos=[-4+j*2.31,-4-j*2.31, -9.5]

polos =
   -4.0000 + 2.3100i  -4.0000 - 2.3100i  -9.5000

>> poly (polos)
ans =
     1.0000     17.5000     97.3361    202.6930

>> p=202.693/-280
p =
   -0.7239
```

Es importante destacar que el valor de p es el resultante de la división entre el coeficiente independiente del polinomio numerador de la función de transferencia a lazo abierto (la cual es igual al polinomio del numerador de la función de transferencia a lazo cerrado), entre el coeficiente independiente del polinomio del denominador de la función de transferencia a lazo cerrado.

La Figura 7 presenta el diagrama de bloques del sistema SSBM en MATLAB Simulink. El amplificador p ha sido programado para tener una ganancia de -0.7239 , según lo anteriormente calculado. Además, se colocó en el bloque K el vector de realimentación, según lo calculado en la parte C de esta sección ($K = [-61.9739 \ -3.8476 \ -0.8250]$).

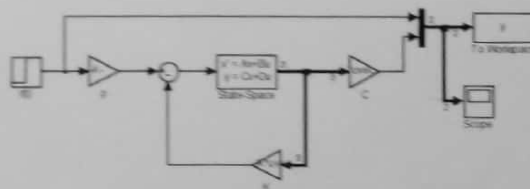


Fig. 7: Diagrama de Bloques del SSBM a lazo cerrado, utilizando MATLAB Simulink.

La Figura 8 exhibe la señal de salida y junto con la señal de entrada r , para $r(t)=u(t)$ (escalón unitario).

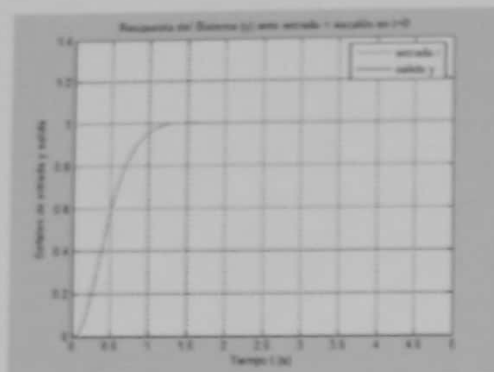


Fig. 8: Señales de entrada y salida del Sistema SSBM a lazo cerrado.

Se observa que la señal de salida del sistema y efectivamente sigue asintóticamente a la señal de entrada r , en una forma ligeramente subamortiguada, tal como se seleccionó en el cálculo de los polos del sistema a lazo cerrado ($\xi = 0.866$). Sin embargo, el tiempo de respuesta τ de la señal de salida está alrededor de 0.75s y no 0.25 como se esperaba. No obstante, se logró el objetivo de control propuesto, especialmente sobre este sistema, el cual es inestable a lazo abierto.

Respuesta a la rampa

Se procedió a determinar la respuesta del sistema SSBM a lazo cerrado ante una rampa de la forma:

$$r(t) = at, t \geq 0 \quad (26)$$

A efectos de la simulación, se seleccionó $a = 2$. Se utilizó el mismo diagrama de bloques mostrado en la Figura 7, pero sustituyendo la fuente de entrada a una rampa con pendiente 2. Las señales de entrada $r(t)$ y de salida $y(t)$ se muestran en la Figura 9.

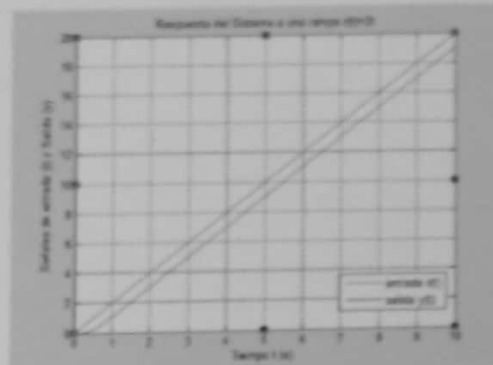


Fig. 9: Respuesta del Sistema SSBM ante una entrada de rampa $r(t) = 2t$.

En la figura 9 se observa que la señal controlada $y(t)$ sigue a la señal de entrada $r(t)$, con un retraso de aproximadamente 0.5s.

C. Problema de Seguimiento Robusto

Se planteó un cambio en el esquema de control de la planta, a fin de poder obtener una salida controlada aún ante variaciones en los valores de elementos que la componen (control robusto). A tal efecto, se realizó una modificación en el diagrama de bloques del Sistema SSBM controlado, según se muestra en la Figura 10.

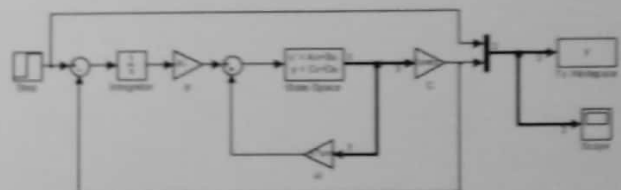


Fig. 10: Diagrama de Control modificado para lograr control robusto.

No obstante, antes de realizar la variación del valor de los elementos que componen la planta, se determinó cuáles son las condiciones que deben cumplir tales valores a fin de que el Sistema a lazo cerrado sea BIBO estable. La estabilidad BIBO del sistema a lazo cerrado es una condición necesaria para que el control robusto funcione adecuadamente [3]. A fin de determinar las condiciones requeridas para la estabilidad BIBO del Sistema a lazo cerrado, se utilizó el siguiente teorema:

Teorema: Un sistema LTI SISO con función de transferencia racional propia $G(s)$ es BIBO estable si y sólo si sus polos tienen parte real negativa.

En base a este teorema, se determinaron las condiciones que deben cumplir los elementos que componen la planta, a fin de que el sistema, a lazo cerrado, sea BIBO estable. De esta manera se cumple la condición necesaria para que se pueda realizar control robusto.

Tal como se presentó en las ecuaciones (12) y (13), las matrices A, b, c y d de la Planta a lazo abierto son las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \beta^2 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$c = [1 \quad 0 \quad 0] \quad (29)$$

$$d = 0 \quad (30)$$

Donde:

$$\alpha = -\frac{2gR}{V} \quad (31)$$

$$\beta^2 = \frac{R^2 m g^2}{V^2 q} \quad (32)$$

Al realizar el control de lazo cerrado mostrado en la Figura 3, el sistema resultante posee una nueva matriz de estado \tilde{A} , tal que:

$$\tilde{A} = A - b * K \quad (33)$$

Donde $K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$ es el vector de ganancia de realimentación del Sistema en lazo cerrado. Si se sustituyen los valores correspondientes, se obtiene:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \beta^2 & 0 & \alpha \\ -\frac{k_1}{L} & -\frac{k_2}{L} & -\frac{(R+k_3)}{L} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Los polos del Sistema de lazo cerrado, cuya matriz de estado es \tilde{A} , viene dado por las raíces del polinomio característico de este sistema, determinado por:

$$\text{den}(s) = \det(sI_n - \tilde{A}) \quad (35)$$

Nótese que $n = 3$, dado que este sistema es de tercer orden.

Realizando las sustituciones correspondientes, se obtuvo el siguiente polinomio característico:

$$\text{den}(s) = s^3 + \varphi_1 s^2 + \varphi_2 s + \varphi_3 \quad (36)$$

En donde,

$$\varphi_1 = \frac{(R+k_3)}{L} \quad (37)$$

$$\varphi_2 = \frac{\alpha k_2}{L} - \beta^2 \quad (38)$$

$$\varphi_3 = \frac{\alpha k_1}{L} - \frac{(R+k_3)}{L} \beta^2 \quad (39)$$

Para asegurar la estabilidad BIBO del Sistema controlado, se aplicó el criterio de Routh-Hurwitz[4], tal como se observa a continuación:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & \varphi_2 \\ s^2 & \varphi_1 & \varphi_3 \\ s & \left[\frac{\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_3}{\varphi_1} \right] & 0 \\ 1 & \varphi_3 & 0 \end{array} \quad (40)$$

Según el referido criterio, la condición necesaria y suficiente para que todos los polos de (36) tengan parte real negativa es que todas las expresiones de la primera columna de (40) deben ser de signo positivo. Esto lleva a las siguientes desigualdades:

$$\varphi_1 = \frac{(R+k_3)}{L} > 0 \quad (41)$$

$$\frac{\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_3}{\varphi_1} > 0$$

$$\Rightarrow \varphi_1 \varphi_2 - \varphi_3 > 0 \quad (42)$$

$$\varphi_3 = \frac{\alpha k_1}{L} - \frac{(R+k_3)}{L} \beta^2 > 0 \quad (43)$$

De las desigualdades (41), (42) y (43) se desprenden las siguientes expresiones:

$$R > -k_3 \quad (44)$$

$$\left(\frac{\alpha k_2}{L} - \beta^2 \right) \frac{(R+k_3)}{L} > \frac{\alpha k_1}{L} - \frac{(R+k_3)}{L} \beta^2 \quad (45)$$

Si se sustituye α y β por las expresiones (31) y (32), respectivamente, se obtiene:

$$\Rightarrow R + k_3 > \frac{L k_1}{k_2} \quad (46)$$

$$\frac{a\beta k_1}{L} > \frac{(R+k_2)}{L} \beta^2 \quad (47)$$

Así mismo, sustituyendo α y β por las expresiones (31) y (32), respectivamente, resulta:

$$2k_1 < -\frac{Rmg(R+k_2)}{Vq} \quad (48)$$

Las expresiones (44) a (47) someten a los valores de los componentes de la planta a importantes restricciones. Si se despeja R de la expresión (48), se obtiene que:

$$R < -\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + \frac{2k_1 V q}{mg}}}{2} \quad (49)$$

Por ejemplo, esta expresión (junto a las ecuaciones (44), (45) y (47)) somete a R a restricciones de valor para que el Sistema a Lazo cerrado sea BIBO estable.

Manipulando estas expresiones, se obtiene también:

$$q > -\frac{Rmg(R+k_2)}{2V k_1} \quad (50)$$

$$m < -\frac{2V q k_1}{g(R+k_2)} \quad (51)$$

$$V > -\frac{Rmg(R+k_2)}{2q k_1} \quad (52)$$

Si se sustituyen los valores de los parámetros de la Tabla 1 y los valores de k_1 , k_2 y k_3 en las expresiones anteriores, se obtiene lo siguiente:

$$R > 0.9861 \quad (53)$$

$$R < 1.0018 \quad (54)$$

$$q < 9.8832 \times 10^{-5} \quad (55)$$

$$m < 0.506 \quad (56)$$

$$V > 06.9182 \quad (57)$$

$$L < 0.0109 \quad (58)$$

Finalmente, en base a las restricciones calculadas, se cambiaron los valores de algunos componentes de la planta, a fin de determinar cuán robusto es el control implementado.

Variación de R en -1%

Se cambió el valor de R de 1 a 0.99, con lo cual la nueva matriz de estado A es como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 978.498 & 0 & -2.772 \\ 0 & 0 & -99 \end{bmatrix} \quad (59)$$

La respuesta del Sistema SSBM a lazo cerrado con esta variación de R , y su comparación con la respuesta nominal del sistema ($R=1$) se muestra en la Figura 11.

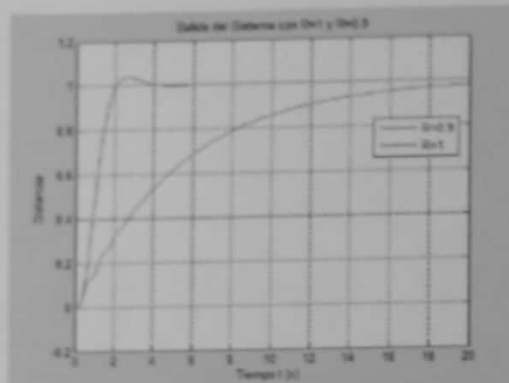


Fig. 11: Respuesta del Sistema ante un cambio en R en -1%. Comparación con respuesta nominal ($R=1$).

Variación de m en -10%

Se cambió el valor de m de 0.500 a 0.450. La matriz A con este nuevo valor de m es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 882 & 0 & -2.8 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \quad (60)$$

La comparación entre la señal de salida (con $m = 0.450$) y la señal nominal se muestra en la Figura 12.

Variación de q en 100%

Se cambió el valor de q de 10^{-4} a 2×10^{-4} . La matriz A con este nuevo valor de m es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 490 & 0 & -2.8 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \quad (61)$$

La comparación entre la señal de salida (con $q = 2 \times 10^{-4}$) y la señal nominal se muestra en la Figura 13.

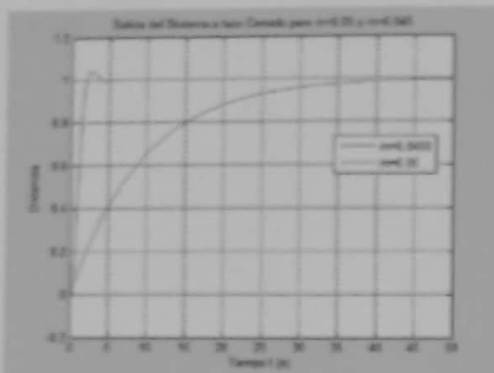


Fig. 12: Respuesta del Sistema ante un cambio en m en -10% . Comparación con respuesta nominal ($m=0.05$).

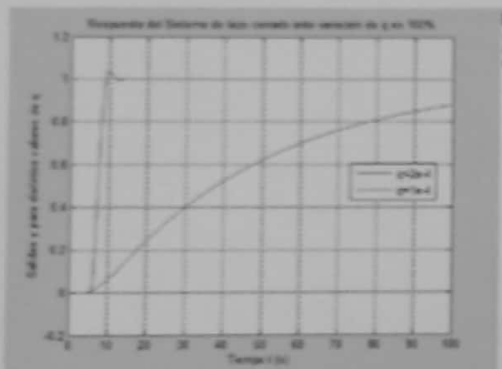


Fig. 13: Respuesta del Sistema ante un cambio en q en 100% . Comparación con respuesta nominal ($q = 10^{-4}$).

Al analizarse las figuras 11 a 13, se puede observar que el control diseñado para esta planta es muy poco robusto. Además, el sistema a lazo cerrado somete a restricciones muy severas a las tolerancias de los valores de los componentes de la planta, a fin de que el sistema total no sea BIBO estable. Esto puede resultar en importantes dificultades en el caso de que monte una implementación práctica de este sistema.

D. Problema de Seguimiento Robusto ante perturbaciones externas.

La Figura 14 muestra el diagrama del Sistema a lazo cerrado, con seguimiento robusto, en la que adicionalmente se ha introducido una señal de perturbación w .

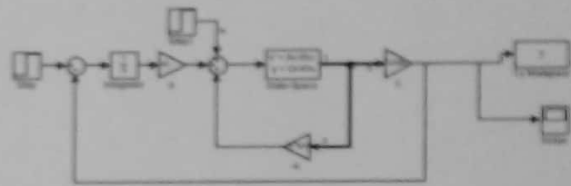


Fig. 14. Diagrama del Sistema de Control Robusto con una señal de perturbación externa.

Se inyectó una señal correspondiente a un escalón unitario en el sitio indicado en la Fig. 14 (w), a $t=50s$. La perturbación a la señal de salida causada por esta señal w , y su comparación con la misma señal de salida sin perturbación se muestra en la Figura 15.

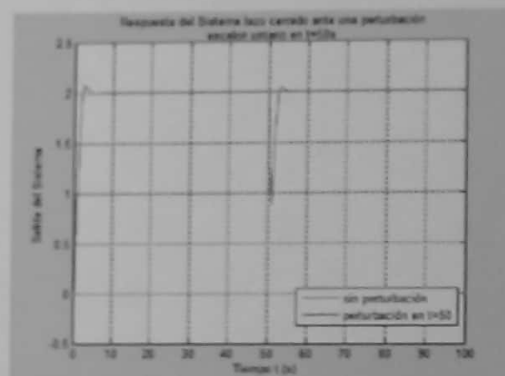


Fig. 15: Salida del Sistema a lazo cerrado y control robusto, ante una perturbación (escalón unitario en $t=50$). Comparación con la misma señal de salida sin perturbación.

Se puede observar que el sistema de control soporta la perturbación, generando un transitorio en el momento que dicha perturbación ocurre, pero asintóticamente tiene a su estado estacionario normal como si no hubiese habido perturbación alguna.

IV. DISEÑO DEL CONTROLADOR DEL SISTEMA CON OBSERVADOR

En esta sección, se presenta la realización de un esquema de control proporcional, pero considerando que no se dispone de las variables de estado. En este sentido, se procedió primeramente a diseñar un observador que, a partir de la entrada y la salida de la planta, pueda generar un estimado de sus variables de estado, tal como lo presenta la Figura 16.

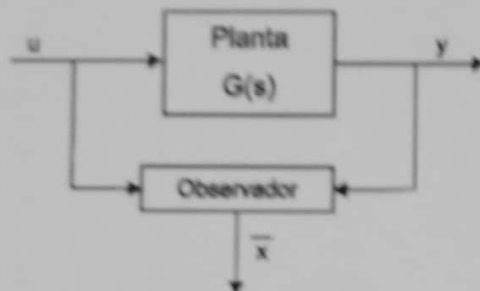


Fig. 16: Bloque observador para estimación de las variables de estado \hat{x} .

Las expresiones (16) y (17) definen las ecuaciones de estado del Sistema SSIIM a lazo abierto. En primer lugar, se procedió a determinar si efectivamente el sistema definido por el par (A, c) es observable.

La Matriz de Observabilidad para un sistema de tercer orden viene dado por:

$$\Theta = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix}$$

Para el cálculo de Θ , se utilizaron los siguientes comandos de MATLAB:

```
>> A=[0 1 0; 980 0 -2.8; 0 0 -100];
>> b=[0;0;100];
>> c=[1 0 0];
>> d=0;
>> Theta=[c;c*A;c*A^2];
Theta =
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
    980.0000         0   -2.8000
>> rank(Theta)
ans =
    3
```

El rango de la matriz Θ es 3, igual al orden del sistema ($n = 3$). Con esto se concluye que la Planta efectivamente es observable.

La Figura 17 muestra el diagrama de bloques del observador. Este observador se diseñó de manera que su respuesta fuera más rápida que la dinámica del sistema a lazo cerrado, tal como se determinó en la sección II de este trabajo.

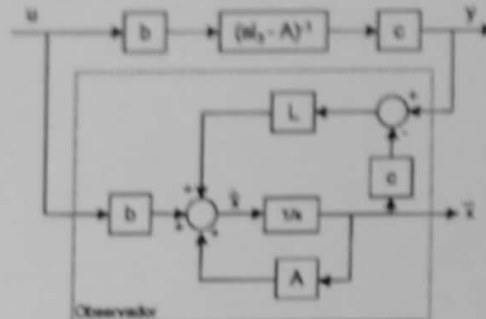


Fig. 17: Diagrama de bloques del observador.

En este caso, se seleccionaron los polos del observador en base al siguiente criterio:

$$\text{Polos}(\text{observador}) = 5 \cdot \text{polos}(\text{Sistema controlado})$$

Los polos del sistema a lazo cerrado, se determinaron en la sección II, ecuaciones (22), (23) y (24). Por consiguiente, los polos seleccionados para el observador del sistema fueron:

$$po1 = -20 + j11.55 \quad (62)$$

$$po2 = -20 - j11.55 \quad (63)$$

$$po3 = -47.5 \quad (64)$$

Se calculó la matriz L utilizando MATLAB, a través de las siguientes instrucciones:

```
>> A=[0 1 0; 980 0 -2.8; 0 0 -100];
>> b=[0;0;100];
>> c=[1 0 0];
>> d=0;
>> polos=[-4+j*2.31, -4-j*2.31, -9.5];
>> polos2=5*polos;
polos2 =
   -20.0000 +11.5500i   -20.0000 -11.5500i   -47.5000
>> K0=place(A',c',polos2)
K0 =
    1.0e+005 *
   -0.0001    0.0466    1.2250
>> L=K0'
L =
    1.0e+005 *
   -0.0001
    0.0466
    1.2250
```

La Figura 18 muestra el diagrama de bloques en MATLAB-Simulink del Sistema a lazo Cerrado con observador. La Figura 19 muestra la estructura interna del bloque Observador.

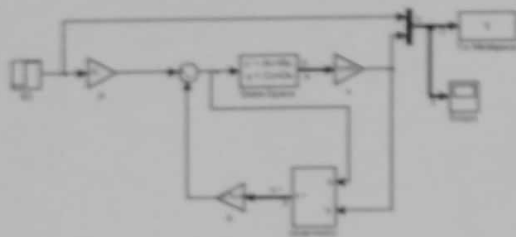


Fig. 18: Diagrama de Bloques del Sistema a lazo cerrado con Observador.

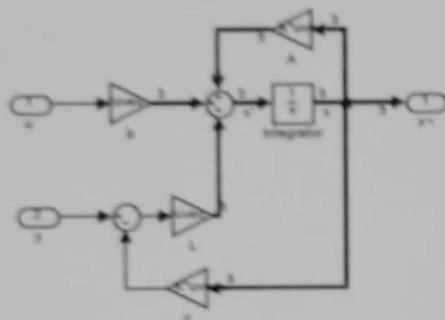


Fig. 19: Diagrama de Bloques interno del Observador.

A. Problema de Regulación

Se determinó la salida del Sistema con $r(t) = 0, t \geq 0$, con condiciones iniciales $x_0 = [0.1 \ 0 \ 0]$. La salida obtenida y se muestra en la Figura 20.

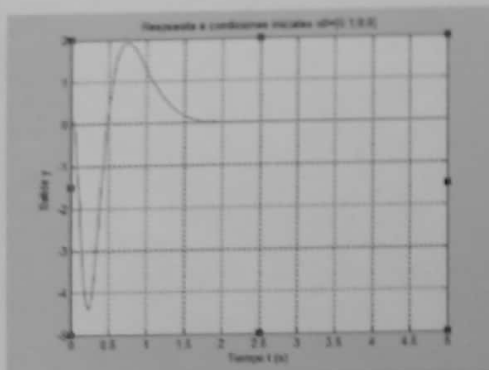


Fig. 20: Salida del Sistema a lazo cerrado en condiciones iniciales.

Es importante destacar que la gráfica de la Figura 20, es distinta a la obtenida en la Figura 6. Esto puede deberse a que bloque observador

tiene su propia dinámica en estado inicial, que influye en el estado inicial del sistema integrado.

B. Problema de Seguimiento

Respuesta al Escalón y a la Rampa

Se procedió a evaluar el comportamiento del sistema ante un escalón de entrada:

$$r(t) = a, t \geq 0 \quad (65)$$

Tal como se realizó en la sección II, punto B, se calculó la ganancia en estado estacionario (p) del sistema a lazo cerrado, a fin de ajustar la señal de entrada para que la salida lo siga asintóticamente.

La Figura 21 muestra la entrada y la salida del Sistema a lazo cerrado, con observador, para una entrada correspondiente a un escalón de tamaño 2.

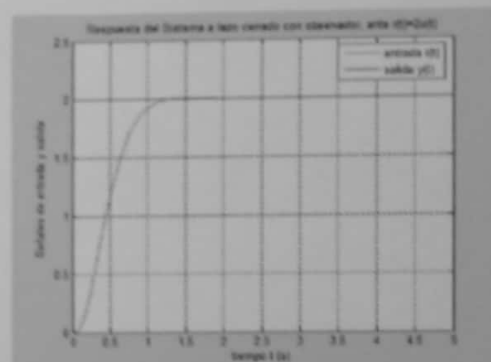


Fig. 20: Señales de entrada y Salida del Sistema con Observador, con $r(t) = 2u(t)$ (escalón unitario con $a=2$).

Nótese la similitud de la Figura 20 con la Figura 8 (respuesta del Sistema a lazo cerrado sin observador). Ambas gráficas son idénticas.

Es importante comparar las gráficas correspondientes a las variables de estado x , y las gráficas de las variables de estado estimadas por el observador \hat{x} . Ambas gráficas se muestran en las Figuras 21 y 22 respectivamente. La Figura 23 muestra las diferencias entre ambos grupos de variables.

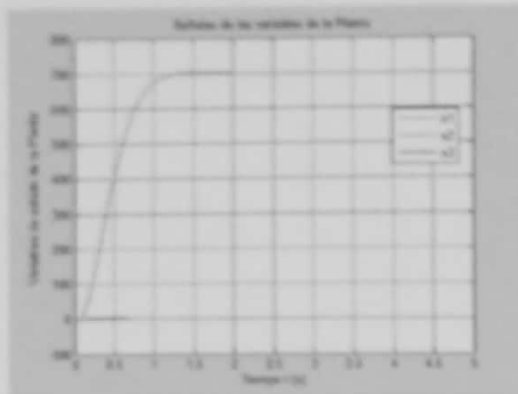


Figura 21: Gráficas correspondiente a las variables de estado de la planta x (tomadas directamente)

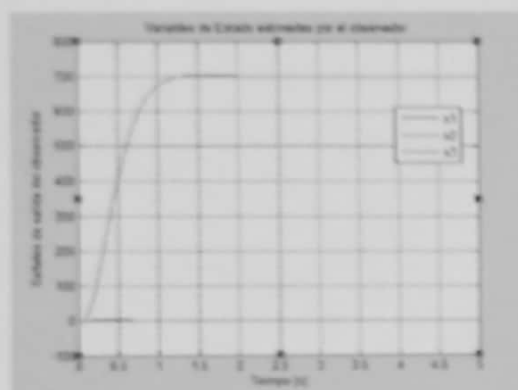


Figura 22: Gráficas correspondiente a las variables de estado \hat{x} estimadas por el observador.

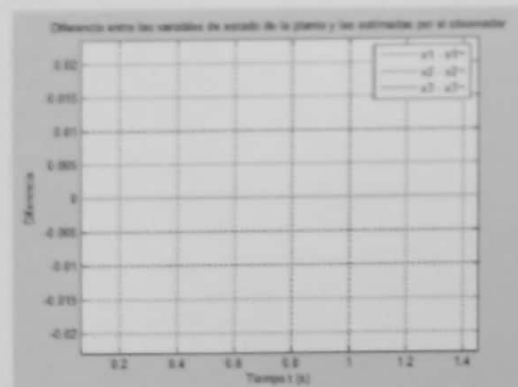


Figura 23: Gráficas correspondiente a las diferencias entre las variables de estado x y las variables de estado \hat{x} estimadas por el observador.

Del análisis de las Figuras 21, 22 y 23 se puede inferir que las variables estimadas por el observador son idénticas a las variables de estado de la planta (para la señal de entrada $r(t) = au(t)$), por lo que el observador realiza una

estimación exacta de dichas variables de estado, aún no teniendo acceso directo a las mismas.

La Figura 24, por otro lado, presenta la entrada y la salida ante una entrada rampa del tipo $r(t) = at, t \geq 0, a = 5$.

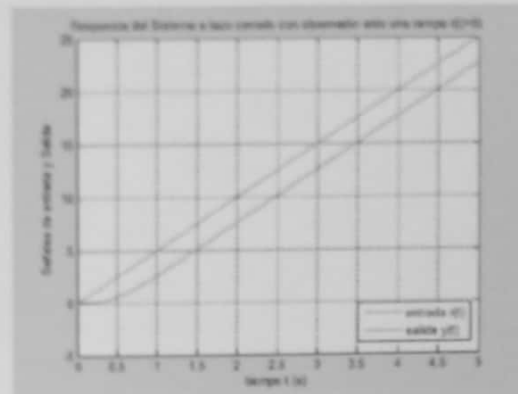


Fig. 24: Señales de entrada y Salida del Sistema con Observador, con $r(t) = 5t, t \geq 0$ (Rampa).

Tanto en la Figura 21 como en la Figura 24 puede observarse que la salida sigue asintóticamente la señal de entrada, lo cual significa que la ley de control está funcionando adecuadamente.

E. Problema de Seguimiento Robusto

Aún en el caso de que se utilice un observador, las restricciones en las variaciones a los parámetros de la planta, tal como se analizaron en la sección anterior, se deben mantener.

Para el caso del Sistema de lazo cerrado con observador, se evaluaron los mismos casos de variación en los valores de R , m y q . A continuación se presentan los resultados.

La Figura 25 muestra el diagrama en bloques del sistema de control robusto con observador, el cual fue utilizado para realizar las variaciones que se explican a continuación.

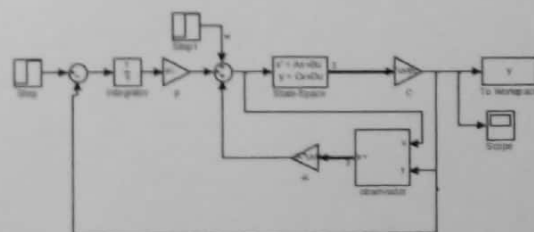


Fig. 25: Diagrama de bloque del sistema de control robusto con observador.

Variación de R en -1%

Se cambió el valor de R de 1 a 0.99. La Figura 26 presenta la respuesta del Sistema SIMM a lazo cerrado y observador con esta variación de R, y su comparación con la respuesta nominal del sistema ($R=1$). Se modificó la matriz A con los siguientes valores:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 978.498 & 0 & -2.772 \\ 0 & 0 & -99 \end{bmatrix} \quad (66)$$

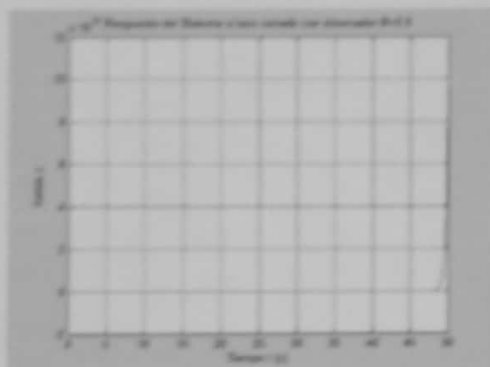


Fig. 26: Respuesta del Sistema ante un cambio en R en -1% (sin modificar el observador).

Tal como se observa en la Figura 26, la respuesta del Sistema ante la variación de R es inestable. Se modificaron los valores de la matriz A dentro del observador, y se obtuvo la gráfica de la Figura 27.

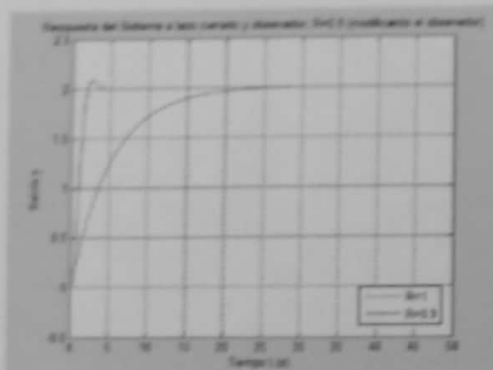


Fig. 27: Respuesta del Sistema ante un cambio de R en -1%, y modificando también en los parámetros de la matriz A en el observador.

Variación de m en -10%

Se cambió el valor de m de 0.500 a 0.450. La comparación entre la señal de salida (con $m = 0.450$) y la señal nominal se muestra en la Figura 28. Se modificó la matriz A con los siguientes valores:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 882 & 0 & -2.8 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \quad (67)$$

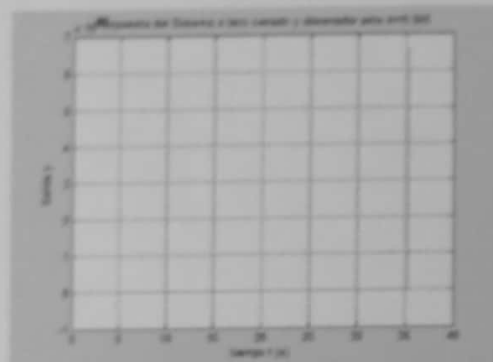


Fig. 28: Respuesta del Sistema a lazo cerrado y observador ante un cambio en m en -10%, sin modificar el observador.

Tal como se observa en la Figura 28, la respuesta del Sistema ante la variación de m es inestable. Posteriormente, se modificaron los valores de la matriz A dentro del observador, y se obtuvo la gráfica de la Figura 30.

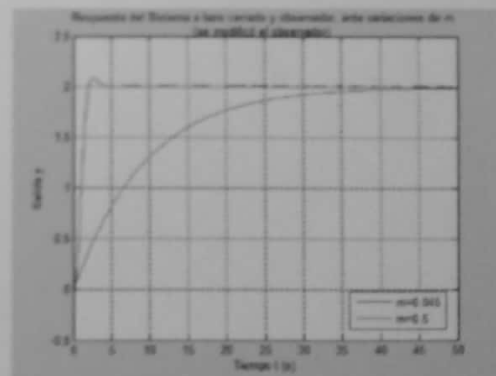


Fig. 29: Respuesta del Sistema ante un cambio de m en -10%, y modificando también en los parámetros de la matriz A en el observador.

Variación de q en 100%

Se cambió el valor de q de 10^{-4} a 2×10^{-4} . La comparación entre la señal de salida (con q =

2×10^{-4}) y la señal nominal se muestra en la Figura 31. Los valores de la nueva matriz A son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 490 & 0 & -2.8 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \quad (68)$$

La respuesta del Sistema ante este cambio de parámetro se muestra en la Figura 30.

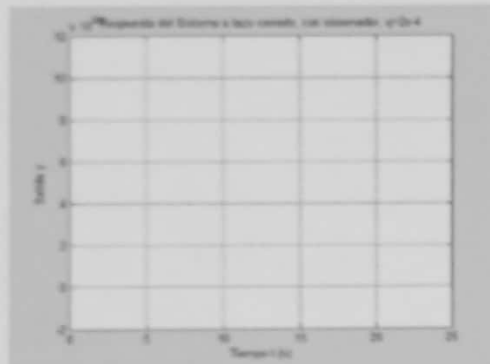


Fig. 30: Respuesta del Sistema ante un cambio en q en 100%, sin modificar el observador.

Al igual que en los casos de variaciones de R y m, la respuesta del sistema es inestable. Sin embargo, al propagar la modificación de la matriz A hacia dentro del observador, se obtuvo lo presentado en la Figura 31.

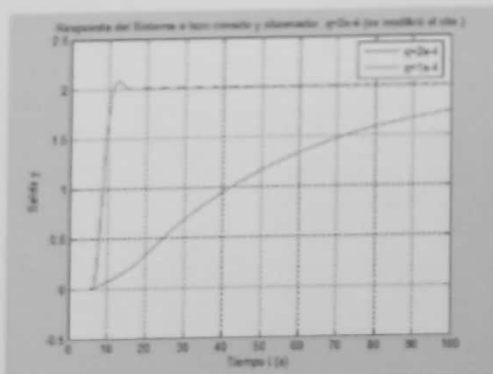


Fig. 31: Respuesta del Sistema a lazo cerrado y observador ante un cambio en q en 100%, modificando el observador.

De estos resultados se puede concluir que el observador **desmejora la robustez del control implementado**. Además, para que el observador funcione correctamente, debe estar ajustado a los parámetros de la planta. Si existe una desviación entre la planta real y la ideal, esto afectará el funcionamiento del observador.

F. Problema de Seguimiento Robusto ante perturbaciones externas.

La Figura 25 muestra el diagrama del Sistema a lazo cerrado con observador, y con seguimiento robusto, en la que adicionalmente se ha introducido una señal de perturbación w.

Se inyectó una señal correspondiente a un escalón unitario en el sitio indicado en la Figura 25 (w), a $t=25s$. La perturbación a la señal de salida causada por esta señal w, y su comparación con la misma señal de salida sin perturbación se muestra en la Figura 32.

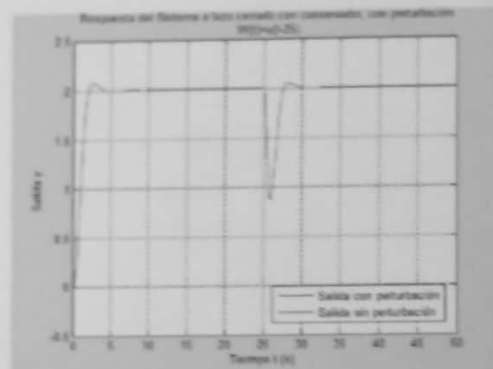


Fig. 32: Salida del Sistema a lazo cerrado y control robusto con observador, ante una perturbación (escalón unitario en $t=25$).

Nótese que el sistema de control soporta la perturbación, generando un transitorio en el momento que dicha perturbación ocurre, pero asintóticamente tiende a su estado estacionario normal como si no hubiese habido perturbación alguna.

V. RESULTADOS

Los resultados generados por los análisis y simulaciones realizados en este trabajo, muestran los siguientes puntos:

1. Un sistema inestable, tal como el Sistema de Suspensión de Bola Magnética SSBM, puede ser controlado a través de una ley de control, realimentando las variables de estado del sistema.
2. El sistema SSBM se ajustó plenamente a la ley de control. El sistema de lazo cerrado respondió correctamente tanto al seguimiento por escalón como por rampa.
3. Sin embargo, el SSBM presenta una elevada sensibilidad a los cambios de los valores de sus componentes. Por lo tanto, el control

robusto ante el cambio de tales componentes no fue eficiente.

4. El sistema de control en lazo cerrado si fue inmune a perturbaciones externas, presentando transitorios en el momento de la perturbación que se desvanecen en el estado estacionario.
5. Se implementó un observador para el sistema SSHM presentado en este trabajo. La respuesta de la combinación sistema a lazo cerrado-observador ante condiciones iniciales es distinta al caso de que no exista observador. Esta diferencia en comportamiento puede deberse al funcionamiento del mismo bloque observador, que tiene su propio comportamiento transitorio.
6. La utilización del bloque observador para este sistema, produjo una desmejora en el desempeño del sistema de control robusto. El conjunto sistema a lazo cerrado-observador produjo salidas no acotadas para casos de variación en las que el sistema a lazo cerrado (sin observador) si produjo salidas acotadas.
7. El observador es efectivo en la medida que esté planamente ajustado a las condiciones de la planta. Si los parámetros del observador difieren de los de la planta, los resultados de la combinación planta-observador pueden no ser los deseables.
8. El observador es evidentemente útil para los casos en que no se tiene acceso a las variables de estado. En este caso, el diseño de un observador que proporcione un estimado a tales variables es esencial. El Sistema de lazo cerrado con observador se comportó esencialmente igual al caso de que no tenía observador, pero con las excepciones ya explicadas.

VI. CONCLUSIONES

Es posible utilizar un Sistema de control proporcional realimentando las variables de estado, para lograr el control de una planta. La técnica permite realizar el control aún en plantas potencialmente inestables, como el caso del SSHM.

Es posible realizar el control de una planta aún en el caso de que no haya acceso a las variables de estado. Esto es posible con el diseño e implantación de un observador. Sin embargo, el observador tiene ciertas limitaciones que el diseñador debe tomar en cuenta.

VII. REFERENCIAS

- [1] C.W. Tao, J.S. Taur "A Robust Fuzzy Control of a Nonlinear Magnetic Ball Suspension System". Industrial Automation and Control: Emerging Technologies, 1995.
- [2] University of Michigan, "Control Tutorial for Matlab and Simulink", <http://www.engin.umich.edu/class/ctms/state/state.htm>
- [3] G. Goodwin, S. Graebe, M. Salgado "Control System Design". Edición 2001, Prentice Hall, p. 527.
- [4] B. Kuo "Automatic Control Systems". Tercera Edición 1975, p. 322.