punto de inflexión

Ecuación de estado

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = g - \frac{C x_3^2}{m x_1}$$

$x_1 = y$
$x_2 = \dot{y}$
$x_3 = i$

$$\dot{x}_3 = -\frac{R}{L} x_3 + \frac{u}{L}$$

El punto de equilibrio se encuentra en

$$\dot{x}_{eq} = 0$$

Como nos interesa controlar la posición, nuestra salida debe ser

$$y_{(t)} = x_{1\,(t)}$$

Pto de equilibrio $(x_{1eq}, x_{2eq}, x_{3eq})$

$$\dot{x}_{1eq} = 0 = x_{2eq}$$

$$\dot{x}_{2eq} = 0 = g - \frac{C x_3^2}{m x_1} \rightarrow x_{1eq} = \frac{C x_{2eq}^2}{mg}$$

$$\rightarrow x_3 = \sqrt{\frac{x_{1eq}\, mg}{C}}$$

$$\dot{x}_3 = 0 = -\frac{R}{L} x_{3eq} + \frac{u}{L} \rightarrow$$

$$\rightarrow x_{3eq} = \frac{u}{R}$$

$$u = R\sqrt{\frac{x_{1eq}\, mg}{C}}$$

↳ u depende de x_1 = posición

$$P_{eq}\left(\frac{C u^2}{mgR^2}, 0, \frac{u}{R}\right)$$

$$(x_{1eq}, x_{2eq}, x_{3eq})$$

El punto de equilibrio se coloco en función de la tensión de la fuente, pero el punto de equilibrio en realidad viene determinado por la posición de interés (x_1). Recordar que la entrada al sistema es $u_{(t)}$

Matriz Jacobiana

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{-C x_3^2}{m}\left(-\frac{1}{x_1^2}\right) = \frac{C x_3^2}{m x_1^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{-2C x_3}{m x_1} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = -\frac{R}{L} \qquad \frac{\partial f_3}{\partial u} =$$

Aproximación lineal, se utilizará la siguiente

$$x_{1eq} = \bar{x}_1 \qquad x_{2eq} = \bar{x}_2$$

$$\frac{d\Delta x_{(t)}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{C\bar{x}_3^2}{m\bar{x}_1^2} & 0 & \frac{-2C}{m} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

$$\Delta y(t) = [1 \quad 0 \quad 0]\, \Delta x(t)$$

Obtenemos la función d

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0 \; ; \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0 \; ;$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = -\frac{R}{L} \; ; \quad \frac{\partial f_3}{\partial u} = \frac{1}{L} \; ;$$

Aproximación lineal, por comodidad se utilizará la siguiente notación

$x_{1eq} = \bar{x}_1 \quad x_{2eq} = \bar{x}_2 \quad x_{3eq} = \bar{x}_3$

$$\frac{d\Delta x_{(t)}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{C\bar{x}_3^2}{m\bar{x}_1^2} & 0 & \frac{-2C\bar{x}_3}{m\bar{x}_1} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \Delta x_{(t)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \Delta u_{(t)}$$

$$\Delta y_{(t)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta x_{(t)}$$

Obtenemos la función de transferencia

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1} B + D$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{C\bar{X}_3^2}{m\,\bar{X}_1} & 0 & \frac{-2C\bar{X}_3}{m\,\bar{X}_1} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$$

Matlab

$$G(s) = \frac{2\bar{X}_3 C}{(R+Ls)(\bar{X}_3^2 C - \bar{X}_1 m s^2)}$$