



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa  
Catarina - Campus Florianópolis  
Engenharia Eletrônica  
Sistemas de Controle II

# PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLADOR DIGITAL UTILIZANDO ALOCAÇÃO DE POLOS

Aluno: João Antônio Cardoso

Prof. Flávio Alberto Bardemaker Batista

Florianópolis, 27 de maio de 2019

# SUMÁRIO

	<b>Lista de ilustrações</b>	<b>2</b>
	<b>Lista de tabelas</b>	<b>2</b>
	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Desenvolvimento</b>	<b>3</b>
2.1	Descrição da Planta	3
2.2	Identificação da Planta	5
2.2.1	Bloco de Primeira Ordem	6
2.2.2	Bloco de Segunda Ordem	7
2.3	Planta em Malha Aberta	8
2.4	Requisitos de Projeto	10
2.5	Projeto do Controlador por Alocação de Polos	11
2.5.1	Taxa de Amostragem	11
2.5.2	Local do polo desejado	12
2.5.3	Estratégias para o Controlador	13
2.5.4	Equações Recursivas	16
2.5.5	Resultados	17
<b>3</b>	<b>Conclusões</b>	<b>19</b>
	 <b>APÊNDICES</b>	 <b>21</b>
	<b>APÊNDICE A – CÓDIGOS FONTE DO PROJETO</b>	<b>22</b>
	<b>APÊNDICE B – CAPTURAS DO BLOCO DE PRIMEIRA ORDEM</b>	<b>23</b>
	<b>APÊNDICE C – CAPTURAS DO BLOCO DE SEGUNDA ORDEM</b>	<b>25</b>
	<b>APÊNDICE D – CAPTURAS DA PLANTA EM MALHA ABERTA</b>	<b>27</b>
	<b>APÊNDICE E – CAPTURAS DA PLANTA EM MALHA FECHADA</b>	<b>29</b>

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Planta . . . . .	4
Figura 2 – Resposta ao degrau considerando tolerâncias . . . . .	5
Figura 3 – Resposta ao Degrau do Bloco de Segunda Ordem . . . . .	7
Figura 4 – Resposta ao Degrau do Bloco de Segunda Ordem . . . . .	8
Figura 5 – Resposta ao Degrau na Planta em Malha Aberta . . . . .	9
Figura 6 – Diagrama de blocos do sistema . . . . .	11
Figura 7 – Resposta ao Degrau na Planta em Malha Aberta . . . . .	12
Figura 8 – Polos da planta em malha aberta em relação ao desejado de malha fechada	13
Figura 9 – Repostas ao degrau do sistema . . . . .	15
Figura 10 – Simulação de repostas ao degrau para o sistema digital . . . . .	17
Figura 11 – Resposta ao Degrau na Planta em Malha Fechada e Aberta . . . . .	18
Figura 12 – Tempo de Subida . . . . .	23
Figura 13 – Tempo de Acomodação . . . . .	24
Figura 14 – Tempo de Subida . . . . .	25
Figura 15 – Tempo de Acomodação . . . . .	26
Figura 16 – Magnitude e Tempo de Pico . . . . .	26
Figura 17 – Tempo de Subida . . . . .	27
Figura 18 – Tempo de Acomodação . . . . .	28
Figura 19 – Magnitude e Tempo de Pico . . . . .	28
Figura 20 – Tempo de Subida . . . . .	29
Figura 21 – Tempo de Acomodação . . . . .	30
Figura 22 – Magnitude e Tempo de Pico . . . . .	30

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparação dos resultados . . . . .	19
--	----

# INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um relatório do processo de solução do primeiro trabalho da disciplina de Sistemas de Controle II, no qual se pretende projetar e implementar um controlador digital, da teoria à prática laboratorial.

## 1 OBJETIVOS

A partir de um enunciado explicando a proposta de trabalho disponibilizada pelo professor, o autor propõe os seguintes itens como objetivos deste trabalho:

- Fabricar uma planta para ser controlada.
- Identificar a função de transferência equivalente da planta.
- Especificar os requisitos do projeto.
- Projetar um controlador utilizando alocação de polos.
- Implementar o controlador em um *microcontrolador*.
- Avaliar o funcionamento da solução implementada.
- (opção do autor) Desenvolver o projeto utilizando somente softwares gratuitos, respeitando suas licenças de uso, dando preferência para softwares de código aberto.

## 2 DESENVOLVIMENTO

Como objeto de estudo, uma planta para ser controlada foi proposta pelo professor, e modificada de acordo com a disponibilidade de componentes e também modificada para a utilização de alimentação simples ao invés de alimentação simétrica, facilitando a montagem, que desta forma pode ocorrer diretamente por uma porta USB 1.0, comum em nossas ferramentas de trabalho como osciloscópios e computadores.

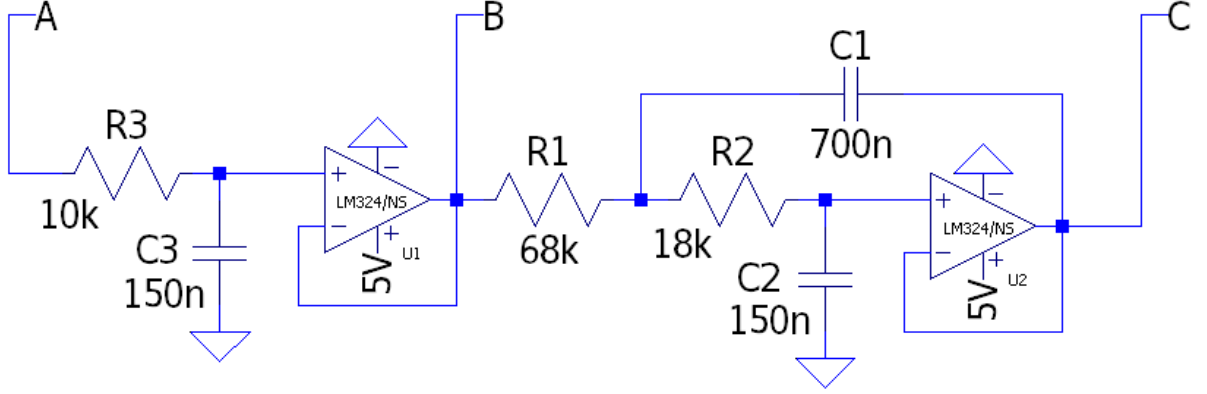
Por se tratar de um projeto de controle digital, o autor optou por utilizar um *DSP TMS320F28335* da *Texas Instruments* como controlador, imbutido em um *Control Card*, conectado à um kit de desenvolvimento chamado *C2000 Peripheral Explorer Kit*.

### 2.1 Descrição da Planta

A planta resultante ([Figura 1](#)) consiste em três nós que são interconectados por meio de dois blocos. O bloco entre os nós **A** e **B** pode ser compreendido como um filtro

passa-baixa de primeira ordem ativo de ganho unitário. O segundo bloco, entre os nós **B** e **C**, pode ser compreendido como um filtro passa-baixa de segunda ordem ativo de ganho unitário, utilizando uma topologia conhecida como *Sallen-key*.

Figura 1 – Planta



Fonte: do autor.

Como o amplificador operacional do primeiro bloco fornece a característica de alta impedância na entrada e baixa impedância na saída, podemos caracterizar os dois blocos separadamente. Sendo assim, as funções de transferência dos blocos, e também da planta completa (do nó **A** à **C**), podem ser descritas como nas Equações 1, 2 e 3, respectivamente.

$$H_{AB} = \frac{V_B}{V_A} = \frac{\frac{1}{R_3 C_3}}{s + \frac{1}{R_3 C_3}} \quad (1)$$

$$H_{BC} = \frac{V_C}{V_B} = \frac{\frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}}{s^2 + s \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}} \quad (2)$$

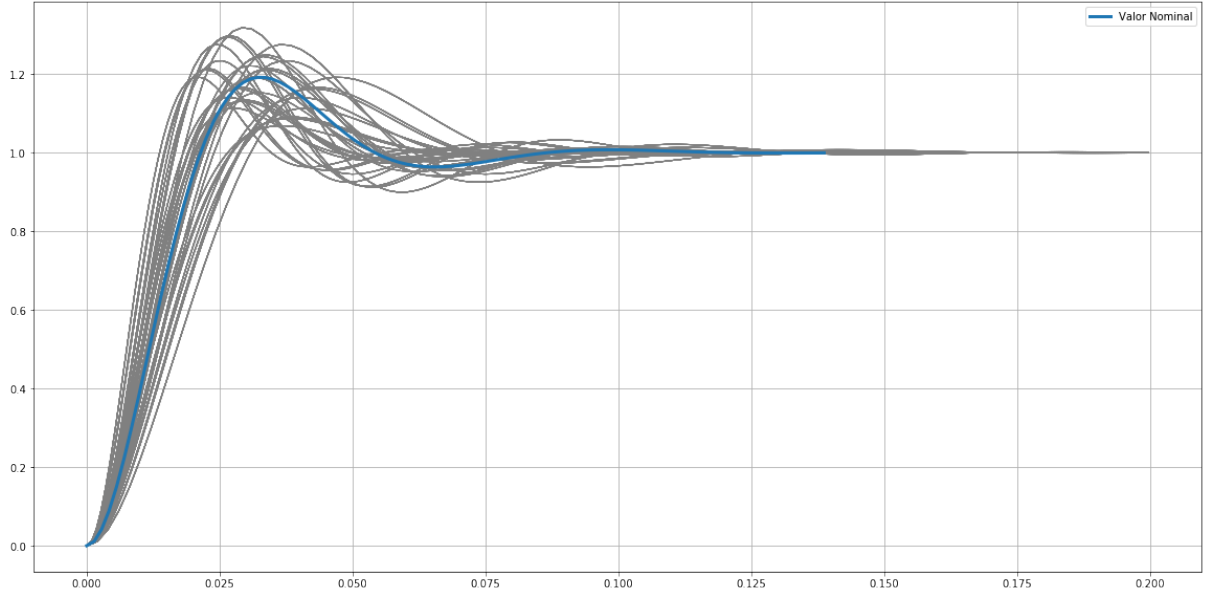
$$H_{AC} = \frac{V_C}{V_A} = H_{AB} H_{BC} = \frac{\frac{1}{R_3 C_3}}{s + \frac{1}{R_3 C_3}} \frac{\frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}}{s^2 + s \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}} \quad (3)$$

Considerando resistores de 10% e capacitores de 20% de tolerância, foi realizada uma análise combinacional dos valores máximos, mínimos e nominais, por meio de um *script* em *Python* para que se compreendesse o conjunto possíveis de respostas do sistema, nesta análise inicial foi gerado um gráfico (2).

A partir do esquemático da planta (Figura 1), um novo esquemático foi desenhado no software de projeto de placas de circuito impresso *KiCAD*, contendo pontos de teste, conectores e *jumpers* para facilitar o teste dos blocos isoladamente. Para tal esquemático, *layout* foi desenhado, e a placa manufaturada.

Como projetar um controlador que funcione para toda a gama de tolerância dos componentes está fora do contexto desta disciplina, vamos projetar um controlador

Figura 2 – Resposta ao degrau considerando tolerâncias



Fonte: do autor.

especificamente para este exemplar manufaturado. Para tal, é necessário levantar sua função de transferência equivalente.

## 2.2 Identificação da Planta

Uma técnica para a identificação da planta pode ser aplicar um sinal conhecido e a partir de figuras de mérito, levantar seus parâmetros e equacionar uma função de transferência de segundo grau equivalente.

Por se tratar de uma planta que trabalha em uma região de tensão positiva na entrada e saída, e também por sabermos que o circuito possui não linearidades próximo aos valores de sua alimentação, aqui iremos aplicar um degrau de 1 à 1.5 [V], ou seja, não é um degrau unitário, mas é um sinal conhecido e tomando alguns cuidados, toda a teoria que utiliza degraus unitários pode ser utilizada.

Para deixar explícito como foram computadas as figuras de mérito, as Equações 4 à 5 descrevem o modo com que foram calculados os valores de *Tempo de Subida* (*Rise Time* -  $t_r$ ) *Sobressinal* (*Overshoot* -  $M_p$ ), o *Tempo de Acomodação em 5%* (*Settling Time* -  $t_{s5\%}$ ).

$$V_{10\%} = 0,1 \cdot (V_{\infty} - V_0)$$

$$V_{90\%} = 0,9 \cdot (V_{\infty} - V_0)$$

$$t_r = t_{(V_{90\%})} - t_{(V_{10\%})} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
V_{max_{5\%}} &\leq (1 + 0.05) \cdot (V_{(\infty)} - V_0) + V_0 \\
V_{min_{5\%}} &\leq (1 - 0.05) \cdot (V_{(\infty)} - V_0) + V_0 \\
t_{s_{5\%}} &= \max \left( t_{(V_{max_{5\%}})} \quad , \quad t_{(V_{min_{5\%}})} \right)
\end{aligned} \tag{5}$$

Antes de realizar as medições, a primeira etapa foi executar a auto-calibração do osciloscópio e calibrar manualmente as ponteiras, para garantir que não houvessem erros técnicos nas medições.

Com o osciloscópio devidamente calibrado, verificou-se o sinal *PWM* de entrada, se estava na frequência de operação correta, e se estava nos ciclos-tarefa como foi calculado.

O gatilho do osciloscópio foi configurado no canal 2, que mostra o momento em que o degrau é aplicado, portanto, todas as medidas de tempo com os cursores são relativos ao tempo em que o degrau foi aplicado, que será considerado como o tempo inicial ( $t_0 = 0 [s]$ ).

A primeira ponteira do osciloscópio foi então conectada na saída da planta. O resultado é mostrado na [Figura 5](#).

Para medir com maior precisão, optou-se por trabalhar com o diferentes escalas do osciloscópio para focar em cada parte da forma de onda. A fim de alcançar uma precisão ainda melhor no osciloscópio, foi utilizado o *trigger* no *modo normal*, que permitiu que a função de média de 128 amostras na aquisição atuasse como uma sobre-amostragem, adicionando pelo menos três bits de precisão no desenho da forma de onda, reduzindo consideravelmente o ruído aleatório.

Para que o relatório não fique demasiadamente longo, as capturas do osciloscópio detalhadas para cada aquisição de tempo de subida, tempo de acomodação e tempo de pico constam no [Apêndice B](#) para o bloco de primeira ordem, e no [Apêndice C](#) para o bloco de segunda ordem, assim como no [Apêndice D](#) para a planta completa em malha aberta.

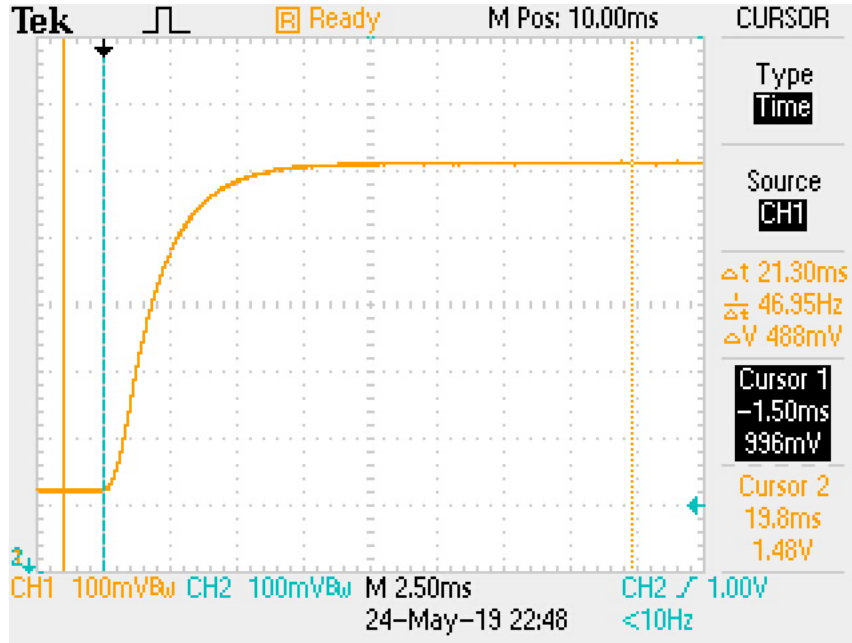
### 2.2.1 Bloco de Primeira Ordem

Aplicando um degrau de 1,0 à 1,5[V] no nó **A** da [Figura 1](#), e medindo a saída no nó **B** temos a resposta ao degrau do bloco de primeira ordem ([Figura 3](#)

Para este bloco de primeira ordem, o [Apêndice B](#) mostra as capturas utilizadas para obtenção dos valores para caracterizar a planta em termos das figuras *tempo de subida*, que resultou em  $t_r = 3,12 [ms]$ ; e o *Tempo de Estabilização em 5%*, medido como  $t_{95\%} = 4,88 [ms]$ , ocorrendo em  $V_{95\%} = 1,4653[V]$ .

Utilizando os valores medidos nas definições para a frequência natural  $w_n$  e a definição de da constante de tempo  $\tau$  ([Equação 6](#)), podemos chegar na [Equação 7](#) para a função de transferência do bloco de primeira ordem.

Figura 3 – Resposta ao Degrau do Bloco de Segunda Ordem



Resposta ao degrau de 0,5 [V] aplicado pela tensão média do *PWM*. No Canal 1 (Amarelo) é a saída da planta e o canal 2 (azul), o *trigger*. Fonte: do autor.

$$\tau = \frac{1}{w_n} = -\frac{t_{95\%}}{\log(0,05)} = 613,9 [s] \quad (6)$$

$$H_{AB} = \frac{\tau}{s + \tau} = \frac{631,9}{s + 613,9} \quad (7)$$

### 2.2.2 Bloco de Segunda Ordem

Aplicando um degrau de 1,0 à 1,5[V] no nó **B** da Figura 1, e medindo a saída no nó **C** temos a resposta ao degrau do bloco de segunda ordem (Figura 4

Para verificar o valor de regime permanente, a escala horizontal do osciloscópio foi enquadrada em 274 [ms], que se mostrou já não ter oscilação alguma. O valor obtido foi de  $V_\infty = 1,49 [V]$ , que define um erro em regime permanente em relação ao valor esperado de 1,5[V].

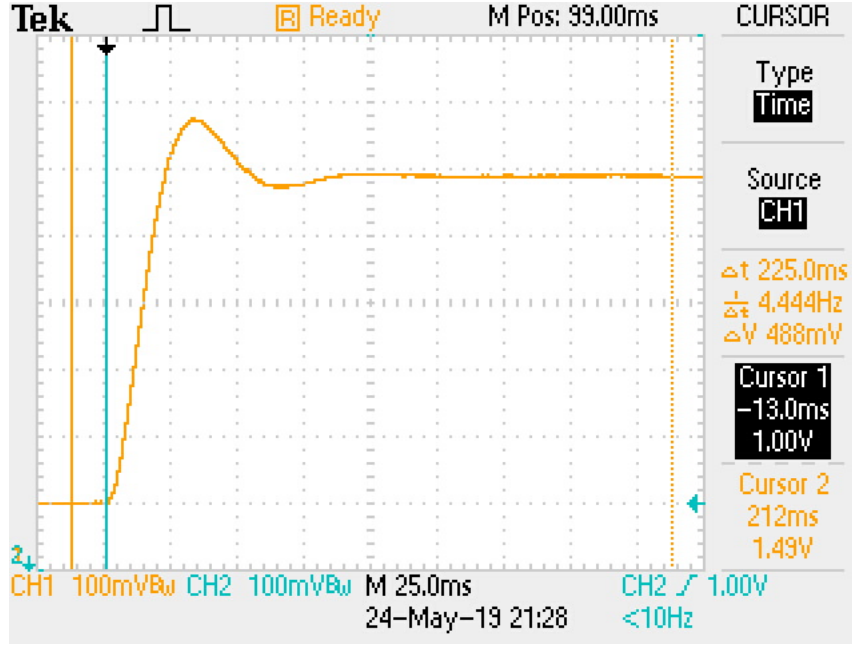
O tempo de subida pode ser verificado enquadrando a forma de onda para que os 10 e 90% do valor de regime permanente estivessem na tela dentro das 6 divisões verticais (onde o osciloscópio tem maior resolução), medindo  $t_{10\%} = 4,8 [ms]$  e  $t_{90\%} = 19,8 [ms]$ , resultando em  $t_{subida} = 15,0 [ms]$ , como pode ser visto na Figura 17 do Apêndice C.

O tempo de atraso foi obtido quando a tensão alcançou 50% do seu valor de regime permanente em relação ao degrau aplicado ( $v_{50\%} = 1.245 [v]$ , medindo  $t_{50\%} = 12,0 [ms]$ .

O tempo de pico e sua magnitude foram também medidos com a menor escala



Figura 4 – Resposta ao Degrau do Bloco de Segunda Ordem



Resposta ao degrau de 0,5 [V] aplicado pela tensão média do *PWM*. No Canal 1 (Amarelo) é a saída da planta e o canal 2 (azul), o *trigger*. Fonte: do autor.

vertical do osciloscópio e foi obtido um tempo de pico  $t_{pk} = 34,0 [ms]$ , com um pico de  $V_{pk} = 1.57 [V]$ , resultando em um sobressinal de  $M_p = 16,3265\%$  (Figura 19).

Já o tempo de acomodação foi alcançado com a maior resolução do osciloscópio (20,0 [mV] por divisão), entrando dentro do período para 5% (máximo de 1,5145 [V] e mínimo de 1,4655 [V]) de ondulação em  $t_{s5\%} = 47,6 [ms]$ , como é mostrado na Figura 18.

Aplicando os valores medidos nas definições descritos pelas equações Equação 6 à Equação 6, podemos chegar na Equação 11 para a função de transferência do bloco de segunda ordem.

$$zeta = -\frac{\log(M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \log(M_p)^2}} = 0,499706 \quad (8)$$

$$w_n = \frac{\pi}{t_{pk} * \sqrt{1 - \zeta^2}} = 108,58948 [rad/s] \quad (9)$$

$$w_d = w_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 524,2176 [rad/s] \quad (10)$$

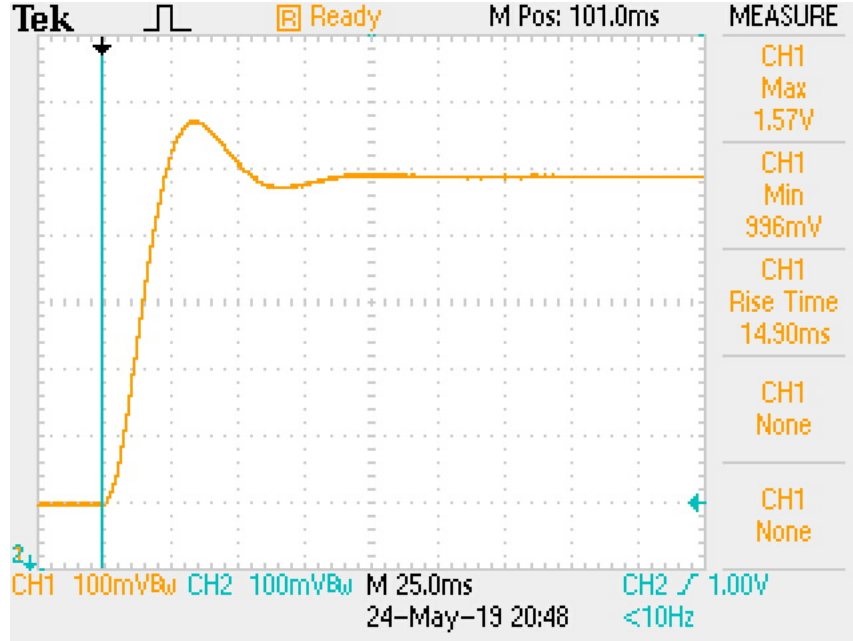
$$H_{BC} = \frac{(2\pi w_n)^2}{s^2 + 2\zeta (2\pi w_n)s + (2\pi w_n)^2} = \frac{376800}{s^2 + 613,5 s + 376800} \quad (11)$$

### 2.3 Planta em Malha Aberta

Podemos considerar a planta em malha aberta como uma caixa-preta e obter uma função de segundo grau equivalente seguindo exatamente a mesma metodologia para a

obtenção da função de transferência do bloco de segunda ordem, porém, injetando o degrau no nó **A** e medindo a saída no nó **C**. Tal resposta pode ser visto na [Figura 5](#).

Figura 5 – Resposta ao Degrau na Planta em Malha Aberta



Resposta ao degrau de  $0,5 [V]$  aplicado pela tensão média do *PWM*. No Canal 1 (Amarelo) é a saída da planta e o canal 2 (azul), o *trigger*. Fonte: do autor.

No [D](#) pode ser verificado a captura para a obtenção dos parâmetros, que foram:

$$V_0 = 0 [V]$$

$$V_\infty = 1,49 [V]$$

$$t_{subida} = 15,0 [ms]$$

$$t_{50\%} = 12,0 [ms]$$

$$t_{s5\%} = 47,6 [ms]$$

$$V_{pk} = 1.57 [V]$$

$$t_{pk} = 34,0 [ms]$$

$$M_p = 16,3265\%$$

$$\zeta = 0,4997062$$

$$w_n = 103,330164 [rad/s]$$

Utilizando tais parâmetros chegamos na equação de segundo grau equivalente ([Equação 12](#):

$$H_{AC} = \frac{10680}{s^2 + 103.3 s + 10680} \quad (12)$$

Por outro lado, como temos acesso ao nó **B**, que conecta os dois blocos, podemos levantar as funções de transferências de cada um dos blocos separadamente e, para obter a função de transferência de malha aberta da planta podemos simplesmente multiplicar uma pela outra e simplificar, ficando com uma equação de terceiro grau [Equação 13](#).

$$H_{AC} = H_{AB} H_{BC} = \frac{7239000}{s^3 + 722,4 s^2 + 78410 s + 7239000} \quad (13)$$

A partir desta planta de terceiro grau, podemos simular e obter as figuras de mérito para ela:

$$V_0 = 0 [V]$$

$$V_\infty = 1,49 [V]$$

$$t_{subida} = 15,6 [ms]$$

$$t_{50\%} = 11,8 [ms]$$

$$t_{s5\%} = 50,8 [ms]$$

$$V_{pk} = 1.57 [V]$$

$$t_{pk} = 21,0 [ms]$$

$$M_p = 16,1014\%$$

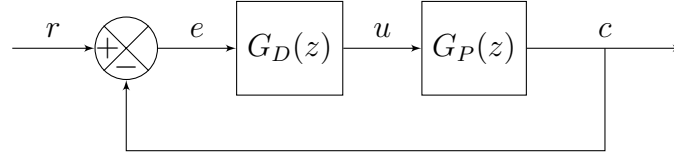
Tendo a planta definida, precisar compreender nossos requisitos de projeto.

## 2.4 Requisitos de Projeto

Como objetivo do projeto, o professor propôs um controlador que modifique o *Tempo de Acomodação de 5%* e o *Sobressinal* para a metade de seus valores em malha aberta, ou seja, neste caso ficamos com  $t_{s5\%} \leq 25,4 [ms]$  e  $M_p \leq 8,05\%$ . Outra exigência é que haja erro nulo em regime permanente e que o sistema controlado seja estável.

Para projetar tal controlador, será utilizada a metodologia conhecida como projeto de controlador por alocação de polos.

Figura 6 – Diagrama de blocos do sistema



Fonte: do autor.

## 2.5 Projeto do Controlador por Alocação de Polos

A topologia para o sistema em malha fechada utilizada aqui é uma realimentação unitária com o controlador digital ( $G_D(z)$ ) na malha direta, conectado diretamente na planta a ser controlada ( $G_P(z)$ ), digitalizada com um segurador de ordem zero ( $ZOH$ ), como mostrado em [Figura 6](#).

Para alcançar os requisitos de projeto, precisamos definir a localização dos polos dominantes quando fecharmos a malha.

Para tal, pode-se utilizar uma relação analítica aproximada entre as figuras de mérito de um sistema de segunda ordem e os parâmetros de um sistema de segundo grau conhecidos como fator de amortecimento ( $\zeta$ ) e frequência natural ( $w_n$ ), conforme as [Equação 8](#) e [Equação 9](#). É importante salientar que são aproximações e que ao utilizarmos essas equações estamos admitindo uma margem de erro nos resultados do projeto. Para minimizar os efeitos de tais erros, aplica-se um fator de projeto, que aqui equivale a 2,5% para o tempo de acomodação e 0,07% para o sobressinal, ou seja, nos cálculos será utilizado um tempo de acomodação de 24,76% e sobressinal de 8,045%, mas o sistema ainda será avaliado de acordo com os requisitos definidos na sessão anterior.

Encontrou-se um  $\zeta$  necessário de 0,6257 e um  $w_n$  de 209,41[rad/s] para cumprir tais requisitos, ou seja, precisamos que os polos dominantes do sistema tenha uma boa equivalência com sistema de segunda ordem abaixo (14):

$$H_{req} = \frac{43850}{s^2 + 262,1s + 43850} \quad (14)$$

### 2.5.1 Taxa de Amostragem

Como projetaremos um controlador digital, precisamos definir a taxa de amostragem que será empregada. Como uma regra geral, pode-se considerar que o controlador precisa de um bom número de amostras durante o tempo de subida do sinal desejado para realizar as ações de controle. Neste viés, uma recomendação se dá por utilizar uma frequência de amostragem cerca de 8 a 10 vezes superior à frequência natural amortecida ( $w_d$ ), que aqui é calculada como 163,34[rad/s], ou seja, uma frequência de 400Hz parece ser suficiente.

Neste ponto, o autor gostaria de deixar claro que houveram diversas iterações

utilizando *scripts* automatizados para projetar e testar o controle utilizando algumas taxas diferentes e chegou à conclusão que valores entre 500 e 10kHz funcionavam bem, optando por ficar em **1kHz**. A percepção obtida é que, para esta planta, quanto maior a frequência, mais sensível à precisão do conversor analógico-digital o controlador se tornava, e quanto mais baixa a frequência, maior o valor máximo das ações de controle, chegando em saturações no sinal de *PWM* aplicado.

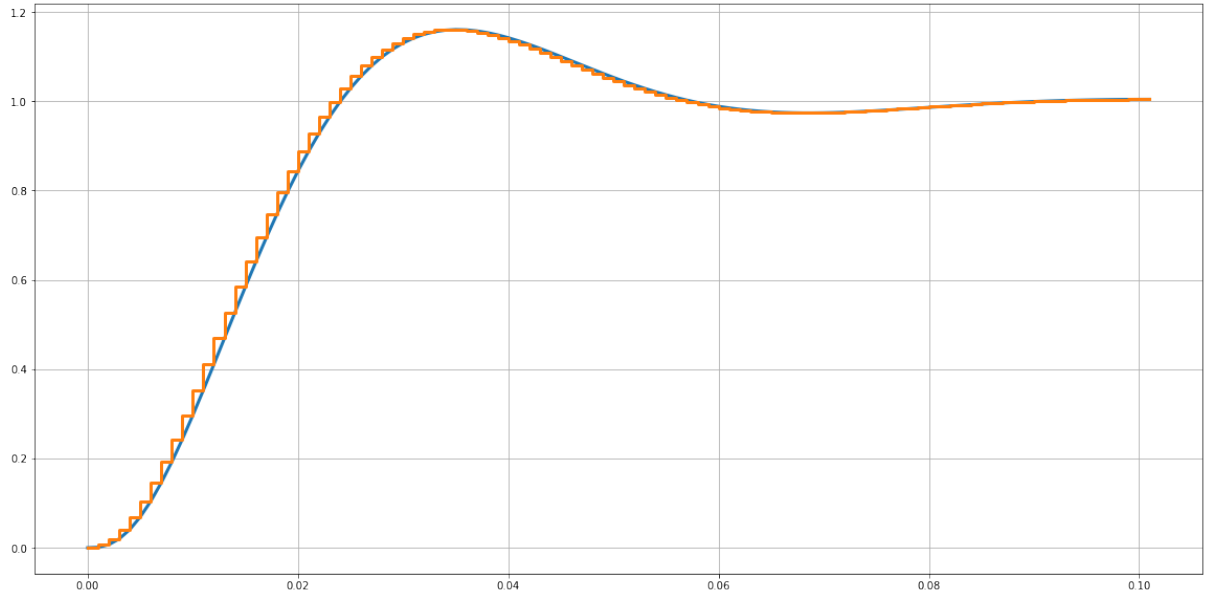
Utilizando tal frequência de amostragem aproximadamente 38 vezes maior que a frequência natural amortecida da planta, faz-se a amostragem da [Equação 15](#) a partir de um segurador de ordem zero *ZOH*, resultando em [Equação 16](#).

$$G_p(s) = \frac{7239000}{s^3 + 722,4 s^2 + 78410 s + 7239000} \quad (15)$$

$$G_p(z) = \frac{0,001013 z^2 + 0,003402 z + 0,0007061}{z^3 - 2,427 z^2 + 1,918 z - 0,4856} \quad (16)$$

Para testar a equivalência, testou-se a partir de um *script* a resposta dos sistemas no domínio contínuo (*S*) e discreto (*Z*), mostrados na [Figura 7](#).

Figura 7 – Resposta ao Degrau na Planta em Malha Aberta



Resposta ao degrau unitário da planta em *S* e *Z*. Fonte: do autor.

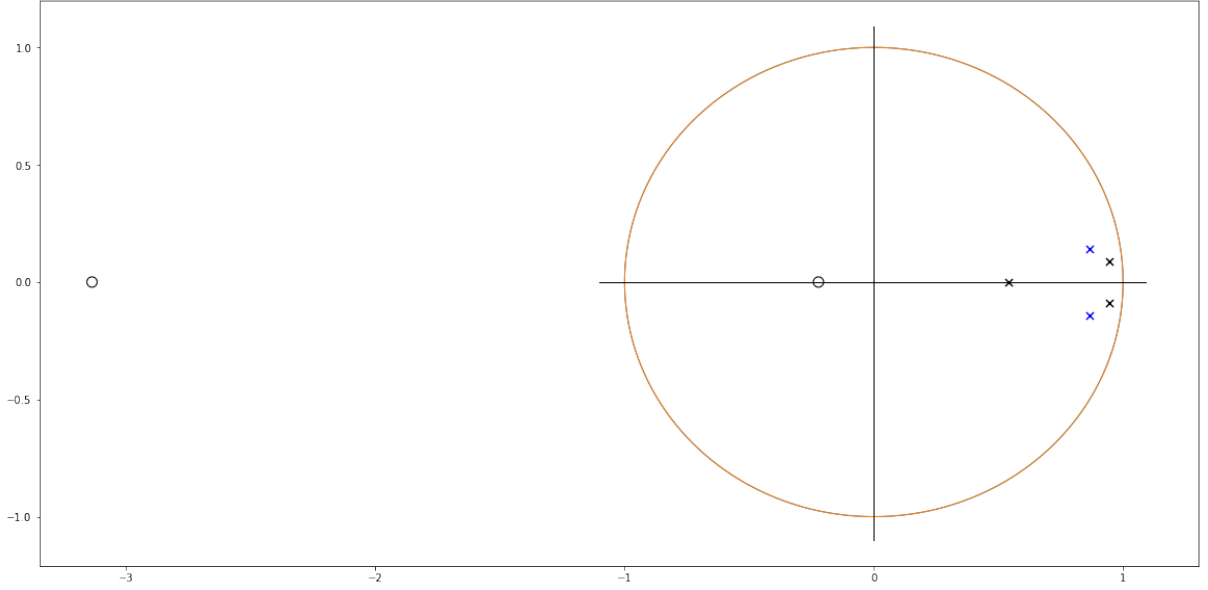
### 2.5.2 Local do polo desejado

A partir da [Equação 17](#) calculamos a posição dos polos dominantes no plano *Z* como sendo aproximadamente  $P = 0,865511 \pm 0,142649 j$ .

$$P = e^{-Ts\zeta w_n} e^{\pm Ts w_n j} \quad (17)$$

Ou seja, para satisfazermos nossos requisitos de projeto precisamos que os polos dominantes do sistema em malha fechada estejam localizados conforme mostrado em [Figura 8](#).

Figura 8 – Polos da planta em malha aberta em relação ao desejado de malha fechada



Polos da planta em malha aberta em Preto, e polos dominantes de malha fechada desejados, em Azul. Fonte: do autor.

### 2.5.3 Estratégias para o Controlador

Para alcançar o requisito de erro nulo em regime permanente, um polo em  $z = 1$  é necessário. Podemos cancelar o par de polos dominantes do sistema com um par de zeros complexos em nosso controlador, e calcular um polo de malha aberta que resulte nos polos dominantes de malha fechada serem exatamente os polos dominantes desejados, ou seja, selecionamos um controlador avanço-atraso com um par complexo de zeros  $\alpha$ , um polo em  $z = 1$  para lidar com o erro e um polo adicional  $\beta$ , conforme mostra a [Equação 18](#).

$$G_D(z) = K \frac{(z + \alpha)(z + \alpha^*)}{(z - 1)(z + \beta)} \quad (18)$$

Para que haja o cancelamento, temos  $\alpha = 0,942996 + 0,088960j$ .

Para que os polos desejados  $P = 0,865511 \pm 0,142649j$  sejam o lugar das raízes, a soma dos ângulos de polos e zeros em relação a ele deve ser igual a  $\pm 180^\circ$ . Um *script* ([Apêndice A](#)) foi programado para fazer tais cálculos. Um detalhe importante é que os

polos e zeros já conhecidos do controlador foram adicionados neste somatório. Após a execução do algoritmo obteve-se:

$$\begin{aligned}\sum \angle p &= -2,2542774744995544 [rad] = -129,16058514023453^\circ \\ \sum \angle z &= -1,6878597011287606 [rad] = -96,7072372848905^\circ \\ \angle \beta &= \sum \angle p - \sum \angle z \pm 180 = 1,0043785534241032 [rad] = 57,546652144655994^\circ \\ \beta &= \text{real}(P) - \tan(\angle \beta) \text{imag}(P) = 0,641193772122912\end{aligned}$$

O ganho  $K$  pode ser determinado pela condição de módulo (Equação 19), resultando em  $K = 0,148765765461027$ .

$$|G_D(z)G_P(z)|_{z=P} = 1 \quad (19)$$

Por fim resultamos com a função de transferência de um controlador (Equação 20) que levará os polos dominantes de malha fechada para exatamente a localização desejada  $P$  (conforme calculado em Equação 17).

$$G_d(z) = \frac{4,149z^2 - 7,825z + 3,722}{z^2 - 1,641z + 0,6412} \quad (20)$$

Computando a função de transferência de malha aberta e malha fechada conforme a topologia da planta (Figura 6), resultamos na Equação 21 e Equação 22.

$$FTMA(z) = 1 FTMD(z) = G_D(z)G_P(z) = \frac{0,004202z^2 + 0,01412z + 0,002929}{z^3 - 2,182z^2 + 1,529z - 0,347} \quad (21)$$

$$FTMF(z) = FTMD(z)1 + FTMA(z) = \frac{b(z)}{a(z)} \quad (22)$$

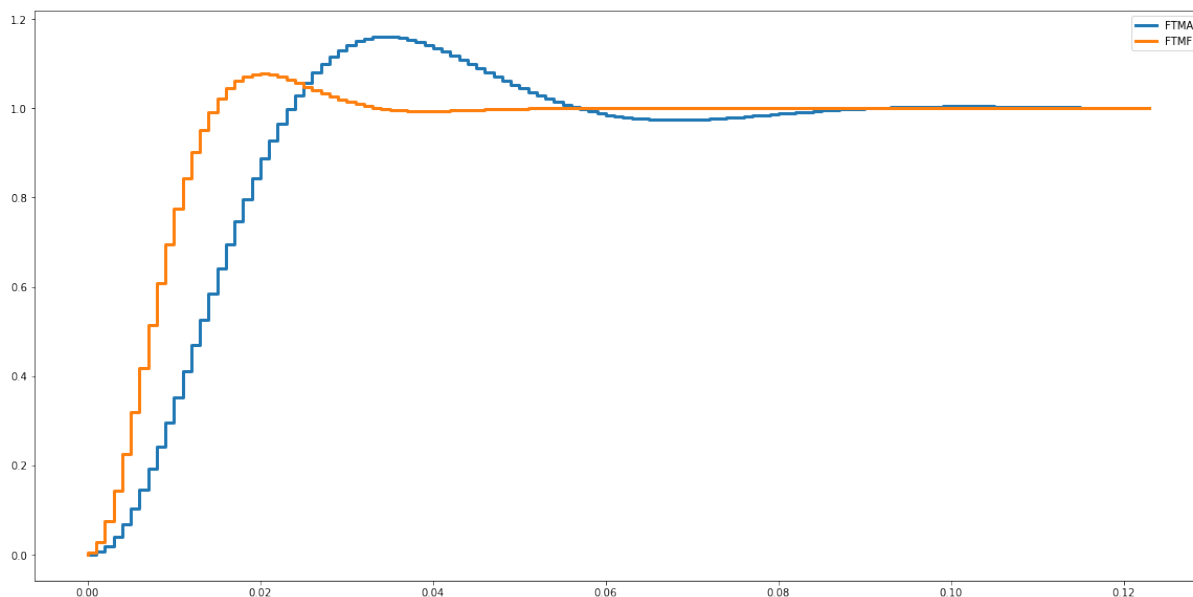
Sendo:

$$\begin{aligned}b(z) &= 0,004202z^6 - 0,001734z^5 - 0,02783z^4 \\ &\quad + 0,05027z^3 - 0,02871z^2 + 0,001449z + 0,002358 \\ a(z) &= z^7 - 5,95z^6 + 15,11z^5 - 21,21z^4 \\ &\quad + 17,73z^3 - 8,818z^2 + 2,407z - 0,277\end{aligned}$$

Para testar o controlador, um degrau unitário foi aplicado no sistema em malha aberta e fechada e seus resultados podem ser vistos na Figura 9.

Medindo por meio de um *script* (Apêndice A), temos a medição de um sobressinal de 7,7% e um tempo de acomodação de 26 [ms], aparentemente não atendendo o requisito

Figura 9 – Repostas ao degrau do sistema



Resposta ao degrau unitário do sistema em malha aberta e em malha fechada. Fonte: do autor.

de tempo de acomodação, que deveria ser menor ou igual a  $25,4 [ms]$ , mesmo projetado com um certo fator.

Neste ponto o autor reprojeto diversas vezes o controlador, combinando variações de requisitos de projeto juntamente com variações na frequência de amostragem (que não se mostrou influenciar significativamente), e por mais que o fator fosse aumentado, não havia uma diminuição significativa no tempo de acomodação, ou seja, o erro no cálculo do  $\zeta$  utilizado no projeto não é linear e para este caso em específico o erro aumenta conforme diminuimos o requisito para o tempo de acomodação.

Por fim optou-se por partir para testes práticos para avaliar o resultado com o controlador operando na planta real, que por sua vez pode ser ligeiramente diferente da planta modelada devido à precisão limitada das capturas do osciloscópio.

Outra dificuldade interessante é que a planta foi levantada duas vezes durante o processo de reprojeto, pois nas quatro semanas decorridas desde que o projeto foi iniciado, os controladores que inicialmente desempenhavam bem passaram a ter sua performance degradada e o autor notou que a resposta ao degrau da planta havia modificado em termos cerca de 10% em relação tempo de subida, valor e tempo de pico, sobressinal e também erro em regime permanente.

A mudança não prevista na planta atrasou o projeto significativamente até que o problema fosse percebido, pois praticamente todos os controladores que funcionavam pareciam ter a mesma performance, mesmo com projetos bastante diferentes, possivel-



mente havia um erro grande na estratégia de cancelamento dos polos, de modo que eles continuavam sendo os polos dominantes do sistema.

A partir do momento em que o autor levantou pela segunda vez a planta, os resultados com os mesmos parâmetros se mostraram imediatamente melhores e só assim foi possível perceber a atuação significativa dos diferentes controladores reprojatados, na resposta do sistema.

O autor desconhece o motivo real da anormalidade na planta, mas imagina que possa ter relação com o tema *contaminação de substrato* - talvez estivesse com uma umidade maior perto da data da corrosão e montagem da placa, que foi quando a planta foi identificada pela primeira vez.

#### 2.5.4 Equações Recursivas

Para que seja possível implementar o controlador em um microcontrolador, que irá atuar em cada amostra do valor de entrada e saída, é necessário levar a equação recursiva para a função de transferência do controlador, exatamente como um filtro de resposta infinita (*IIR*).

Realizando a transformada  $Z$  inversa na equação para cada sinal  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{c}$  da planta ([Figura 6](#)), as equações recursivas foram obtidas, mostrados nas Equações 23 à 25, sendo  $G_{P_a}$  as raízes do denominador e  $G_{P_b}$  do numerador da equação da planta  $G_P$ , e  $G_{D_a}$  e  $G_{D_b}$  o mesmo, mas para a equação do controlador.

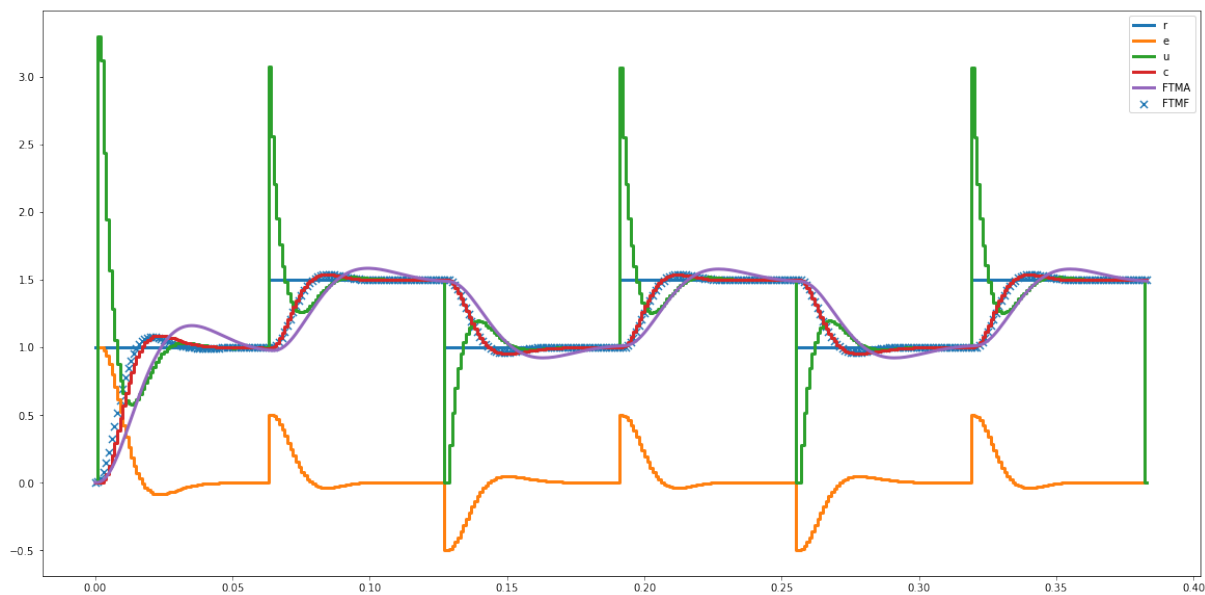
$$\begin{aligned} c[k+3] = & G_{P_b}[0] u[k+2] + G_{P_b}[1] u[k+1] + G_{P_b}[2] u[k] \\ & - G_{P_a}[1] c[k+2] - G_{P_a}[2] c[k+1] - G_{P_a}[3] c[k] \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} u[k+3] = & G_{D_b}[0] e[k+3] + G_{D_b}[1] e[k+2] + G_{D_b}[2] e[k+1] \\ & - G_{D_a}[1] u[k+2] - G_{D_a}[2] u[k+1] \end{aligned} \quad (24)$$

$$e[k+3] = r[k+3] - c[k+3] \quad (25)$$

A partir destas equações um *script* ([Apêndice A](#)) simulou o sistema a partir de uma entrada de um trem de degraus de 1 a 1,5[V]. O Resultado pode ser visto na [Figura 10](#), na qual também pode ser comparado com a resposta de malha aberta e malha fechada (utilizando as funções de transferência ao invés das equações recursivas).

Figura 10 – Simulação de repostas ao degrau para o sistema digital



Resposta ao degrau unitário do sistema em malha aberta e em malha fechada. Fonte: do autor.

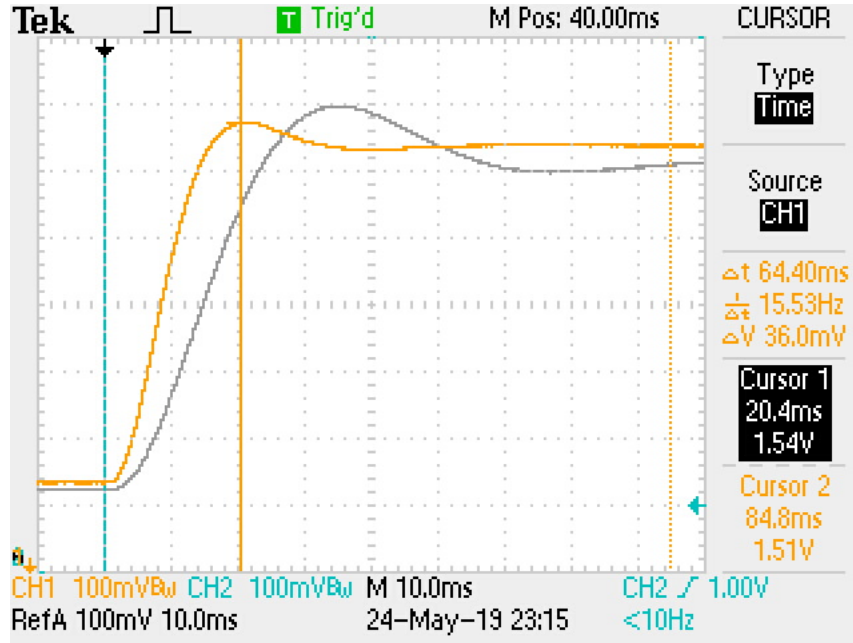
Aparentemente ocorre saturação na ação de controle  $u$ . O autor tentou uma diversidade de reprojeto variando a localização do polo desejado e a frequência de amostragem e por não haver variações significativas em seu valor, o autor optou por, novamente, avaliar os resultados na planta real.

### 2.5.5 Resultados

Um *script*([Apêndice A](#)) gerou as constantes utilizadas no *firmware* implementado no *DSP*. A resposta ao degrau para o sistema em malha fechada em comparação ao mesmo sistema em malha aberta pode ser visto na [Figura 11](#). As formas de onda apresentam resultados similares aos esperados pela simulação da [Figura 9](#).

O sinal da ação de controle  $u$ , que em simulação apresentou saturação, na prática, via ferramentas de *debug* foi verificado que não passou de  $1,6\text{ V}$  para os degraus de  $0,5\text{ V}$  aplicados, chegando próximo dos  $2,5\text{ V}$  na inicialização do sistema, momento em que ocorre um degrau de  $1\text{ V}$ .

Figura 11 – Resposta ao Degrau na Planta em Malha Fechada e Aberta



Resposta ao degrau de 0,5 [V] aplicado pela tensão média do *PWM*. No Canal 1 (Amarelo) é a saída do sistema em malha fechada, o canal de referência A (Branco), representando a resposta ao degrau do sistema em malha aberta, e o canal 2 (azul), o *trigger*. Fonte: do autor.

No [Apêndice E](#) pode ser verificado a captura do osciloscópio para a obtenção de cada um dos parâmetros a seguir:

$$V_0 = 1.0 \text{ [V]}$$

$$V_\infty = 1.51 \text{ [V]}$$

$$t_{subida} = 9,7 \text{ [ms]}$$

$$t_{50\%} = 8,2 \text{ [ms]}$$

$$t_{s5\%} = 25,6 \text{ [ms]}$$

$$V_{pk} = 1.54 \text{ [V]}$$

$$t_{pk} = 21,2 \text{ [ms]}$$

$$M_p = 5,88\%$$

$$\zeta = 0,6697192$$

$$w_n = 199,5495 \text{ [rad/s]}$$

Utilizando a mesma equação para descobrir a posição do polo desejado ([Equação 17](#) chega-se aos polos  $P_{planta} = 0,865738 + 0,129468j$ , diferente do polo desejado  $P = 0,865511 \pm 0,142649j$ , resultando em um erro positivo de 0,78% no tempo de acomodação

Tabela 1 – Comparação dos resultados

	$Mp\%$	$t_{s5\%}[ms]$	$t_r [ms]$	$v_{inf}$	$v_{inf}$
Bloco 1 nominal	0	4,56	3,29	1,49	0,999
Bloco 1 antigo	0	4,70	3,40	1,50	1,01
Bloco 1 atualizado	0	4,88	3,12	1,49	0,996
Bloco 2 nominal	19,25	49,0	14,0	1,49	1,00
Bloco 2 antigo	18,38	40,0	14,8	1,50	1,01
Bloco 2 atualizado	16,33	47,6	15,0	1,49	1,00
FTMA simulação	16,10	50,8	15,6	1,49	0,999
FTMA prático	16,32	49,2	15,2	1,49	1,01
FTMF simulação	7,70	26,0	9,00	1,50	1,00
FTMF prático	5,88	25,6	9,70	1,51	1,00
Requisitos	8,05	25,4	N/A	N/A	N/A

Fonte: do autor.

obtido. A [Figura 2.5.5](#) apresenta uma comparação de todos os dados obtidos durante o processo.

Neste ponto o autor vê algumas alternativas caso este erro seja intolerável: pode-se tentar um reprojeto com um fator de projeto maior para tentar obter um polo de malha fechada mais amortecido, pode-se variar o ganho do controlador K para compensar a localização do polo de malha fechada (que claramente não ficou exatamente no local desejado) ou pode-se levantar a planta com maior precisão para que a estratégia de cancelamento de polos seja mais efetiva.

Em contra-partida, o tempo para realização do projeto restringe qualquer uma destas ações, de modo que o autor considera um resultado tolerável, dentro das diversidades encontradas no processo.

### 3 CONCLUSÕES

Neste trabalho surgiu uma série de desafios técnicos (muito mais que questões teóricas pertinentes à metodologia de alocação de polos) no qual o projetista teve que lidar, tomando certo tempo para investigação, compreensão e resolução que de modo algum apareceriam em exercícios de livros didáticos, e que dificilmente são comentados nos mesmos.

Quanto aos resultados, vê-se que a localização do polo dominante de malha fechado projetado não ficou na posição nem durante as simulações, nem na prática, mostrando que um projeto seguindo esta metodologia deve ser feito com cautela, e possivelmente diversas iterações para buscando melhorias até cumprir os requisitos para a planta real, e se considerarmos uma planta com variações por conta da tolerância dos componentes, esta metodologia pode apresentar grandes dificuldades de ser implementada em um projeto

industrial sem que seja necessário realizar ajustes para cada unidade de um suposto produto.

O autor considera que o maior aprendizado neste processo foi compreender a influência dos erros de medição e dos desvios nas análises causados por aproximações em formulações e pensar sobre como lidar com eles.

Além disso, o autor cumpriu seu objetivo pessoal de realizar o trabalho inteiramente com software gratuitos, inclusive o sistema operacional (*Linux*), utilizando principalmente o *KiCAD* para o projeto da placa de circuito impresso, o pacote de controle *python-control* da linguagem de programação *Python*, o qual inclusive contribuiu adicionando a funcionalidade *stepinfo*, equivalente à função de mesmo nome do *MATLAB*, e por fim o *LaTeX* para compilação deste relatório.

Deste modo, o autor considera este projeto um processo de grande valor para a formação do estudante de engenharia eletrônica, que em exercício, atua com a interface entre a informação teórica e o que é concebível com a tecnologia e recursos disponíveis.

## Apêndices

## APÊNDICE A – CÓDIGOS FONTE DO PROJETO

Por somar mais de 50 páginas, o autor opta por não incluir a listagem dos códigos fonte no relatório, deixando todos eles abertos em licença GPL3, disponíveis em um repositório público no *github* do autor.

<[http://github.com/joaoantoniodcardoso/sct2\\_projeto1](http://github.com/joaoantoniodcardoso/sct2_projeto1)>

Para facilitar o acesso, o código fonte deste documento *LaTeX* podem ser acessados em:

<[http://github.com/joaoantoniodcardoso/sct2\\_projeto1/tex](http://github.com/joaoantoniodcardoso/sct2_projeto1/tex)>

O código fonte do *firmware* podem ser acessados em:

<[https://github.com/joaoantoniodcardoso/sct2\\_projeto1/tree/master/f28335\\_ccs7/basic\\_F28335](https://github.com/joaoantoniodcardoso/sct2_projeto1/tree/master/f28335_ccs7/basic_F28335)>

O código fonte do *hardware* podem ser acessados em:

<[https://github.com/joaoantoniodcardoso/sct2\\_projeto1/tree/master/hardware/main](https://github.com/joaoantoniodcardoso/sct2_projeto1/tree/master/hardware/main)>

O código fonte para as simulações no *LTSpice* podem ser acessados em:

<[https://github.com/joaoantoniodcardoso/sct2\\_projeto1/tree/master/hardware/simulations](https://github.com/joaoantoniodcardoso/sct2_projeto1/tree/master/hardware/simulations)>

O código fonte dos *scripts* em *Python* e *Jupyter Notebook* podem ser acessados em:

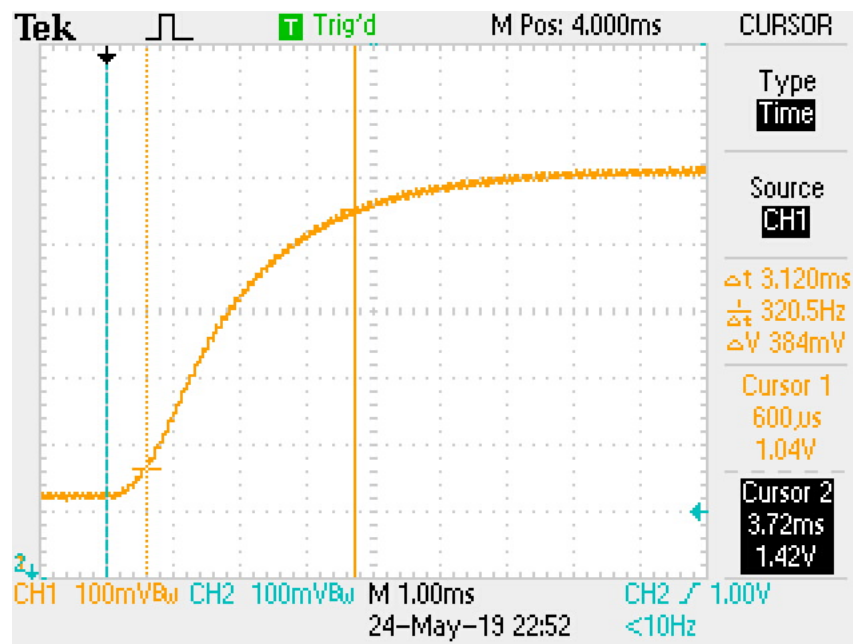
<[https://github.com/joaoantoniodcardoso/sct2\\_projeto1/tree/master/projeto](https://github.com/joaoantoniodcardoso/sct2_projeto1/tree/master/projeto)>

Por fim, o repositório pode ser baixado como um arquivo compactado em extensão *.zip* em:

<[https://github.com/joaoantoniodcardoso/sct2\\_projeto1/archive/master.zip](https://github.com/joaoantoniodcardoso/sct2_projeto1/archive/master.zip)>

## APÊNDICE B – CAPTURAS DO BLOCO DE PRIMEIRA ORDEM

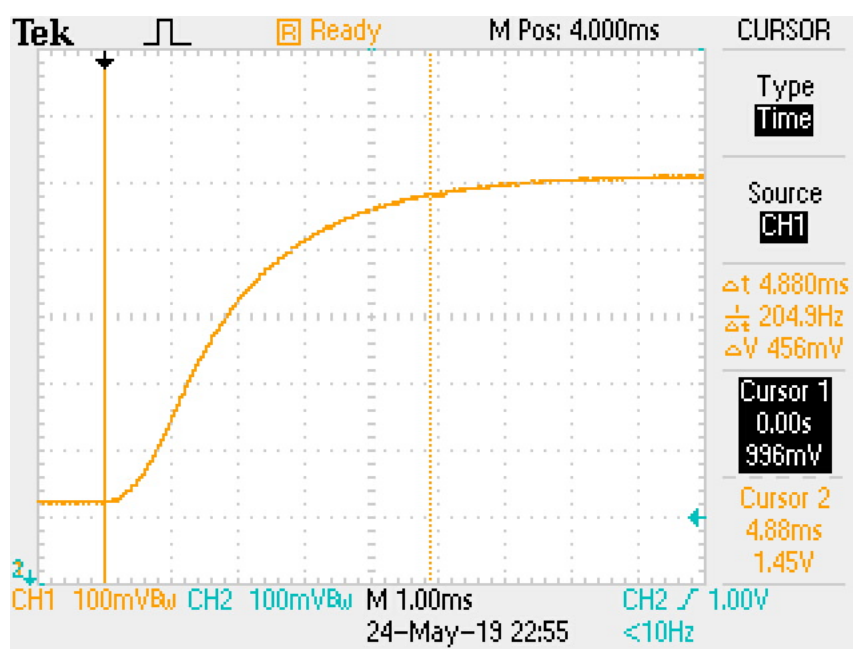
Figura 12 – Tempo de Subida



Resposta ao degrau de  $0,5[V]$  aplicado pela tensão média do *PWM*. No Canal 1 (Amarelo) é a saída do bloco de primeira ordem e o canal 2 (azul), o *trigger*. Fonte: do autor.



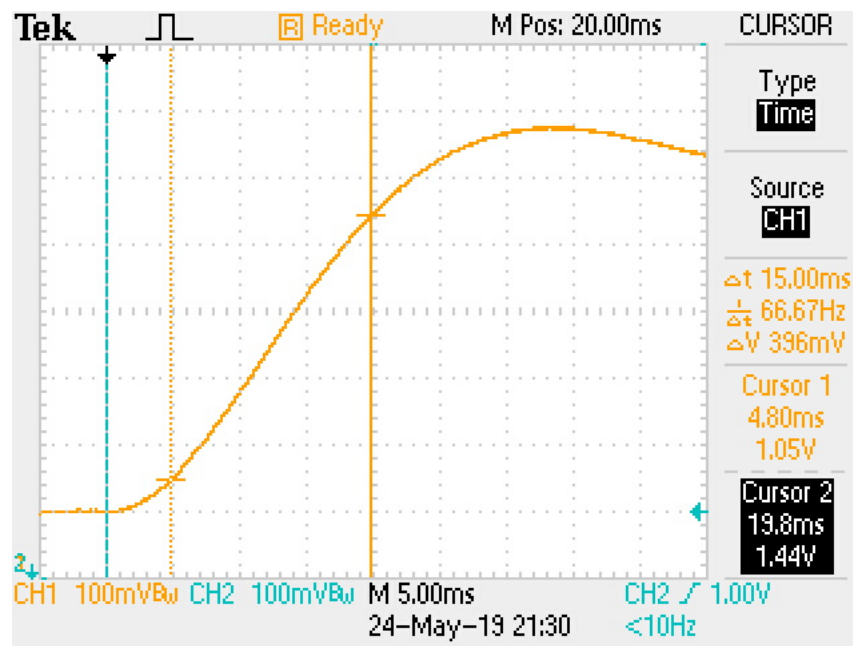
Figura 13 – Tempo de Acomodação



Resposta ao degrau de  $0,5\text{ [V]}$  aplicado pela tensão média do *PWM*. No Canal 1 (Amarelo) é a saída do bloco de primeira ordem e o canal 2 (azul), o *trigger*. Fonte: do autor.

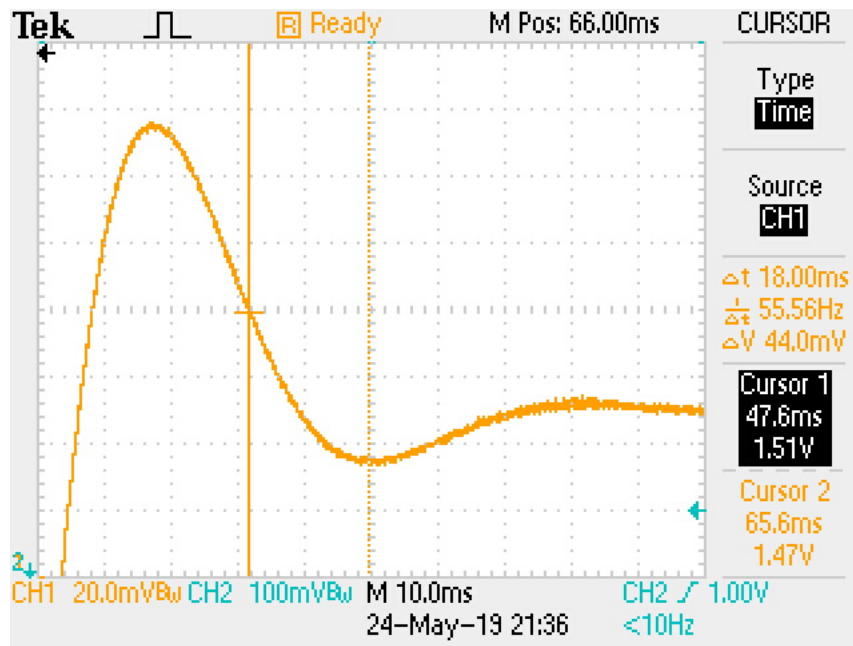
## APÊNDICE C – CAPTURAS DO BLOCO DE SEGUNDA ORDEM

Figura 14 – Tempo de Subida



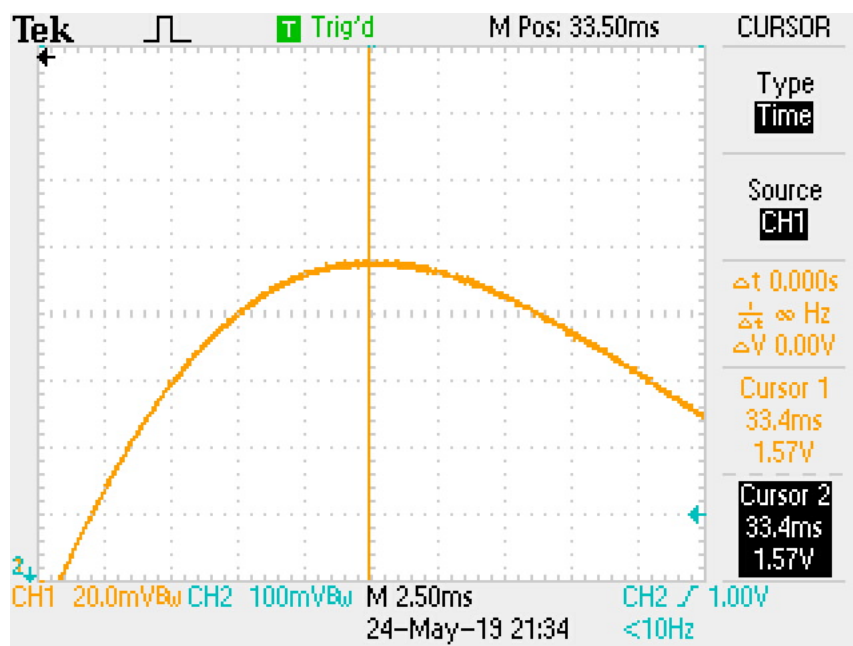
Resposta ao degrau de  $0,5 [V]$  aplicado pela tensão média do *PWM*. No Canal 1 (Amarelo) é a saída do bloco de segunda ordem e o canal 2 (azul), o *trigger*. Fonte: do autor.

Figura 15 – Tempo de Acomodação



Resposta ao degrau de 0,5 [V] aplicado pela tensão média do *PWM*. No Canal 1 (Amarelo) é a saída do bloco de segunda ordem e o canal 2 (azul), o *trigger*. Fonte: do autor.

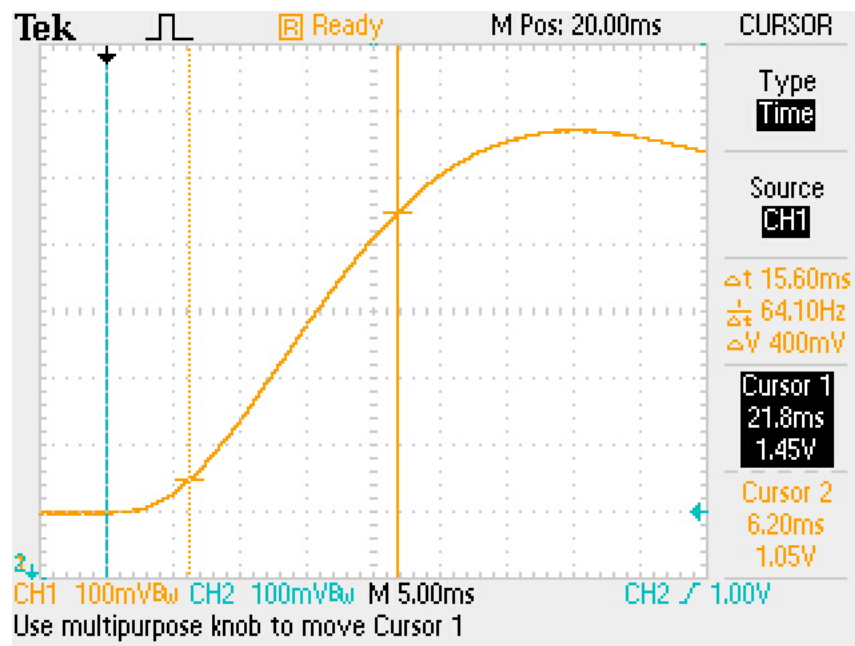
Figura 16 – Magnitude e Tempo de Pico



Resposta ao degrau de 0,5 [V] aplicado pela tensão média do *PWM*. No Canal 1 (Amarelo) é a saída do bloco de segunda ordem e o canal 2 (azul), o *trigger*. Fonte: do autor.

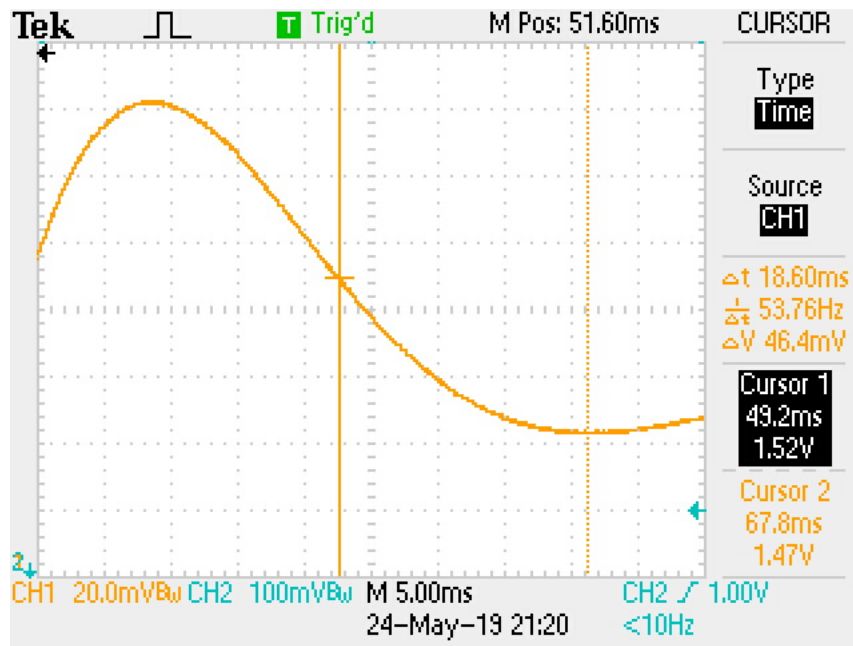
## APÊNDICE D – CAPTURAS DA PLANTA EM MALHA ABERTA

Figura 17 – Tempo de Subida



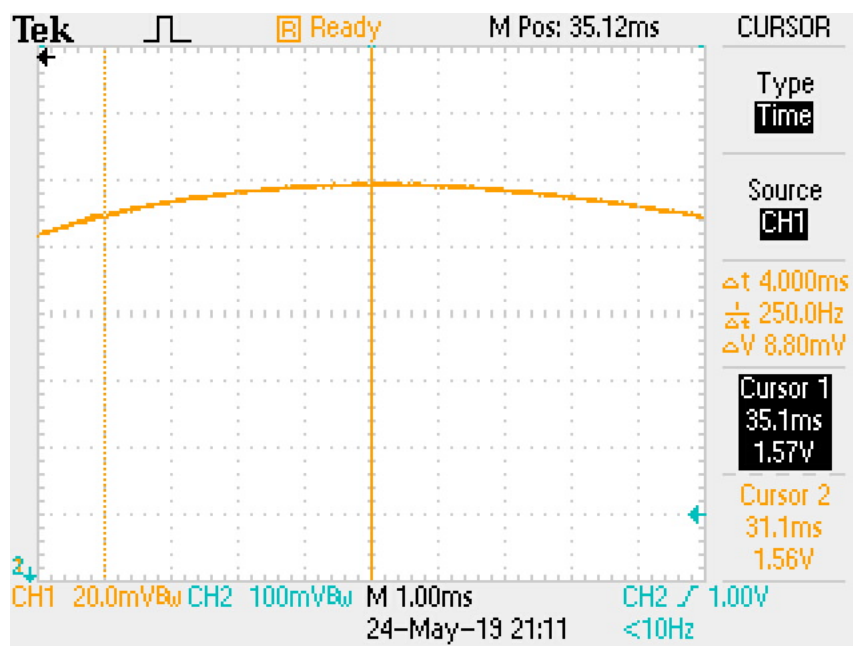
Resposta ao degrau de  $0,5 [V]$  aplicado pela tensão média do *PWM*. No Canal 1 (Amarelo) é a saída da planta e o canal 2 (azul), o *trigger*. Fonte: do autor.

Figura 18 – Tempo de Acomodação



Resposta ao degrau de 0,5 [V] aplicado pela tensão média do *PWM*. No Canal 1 (Amarelo) é a saída da planta e o canal 2 (azul), o *trigger*. Fonte: do autor.

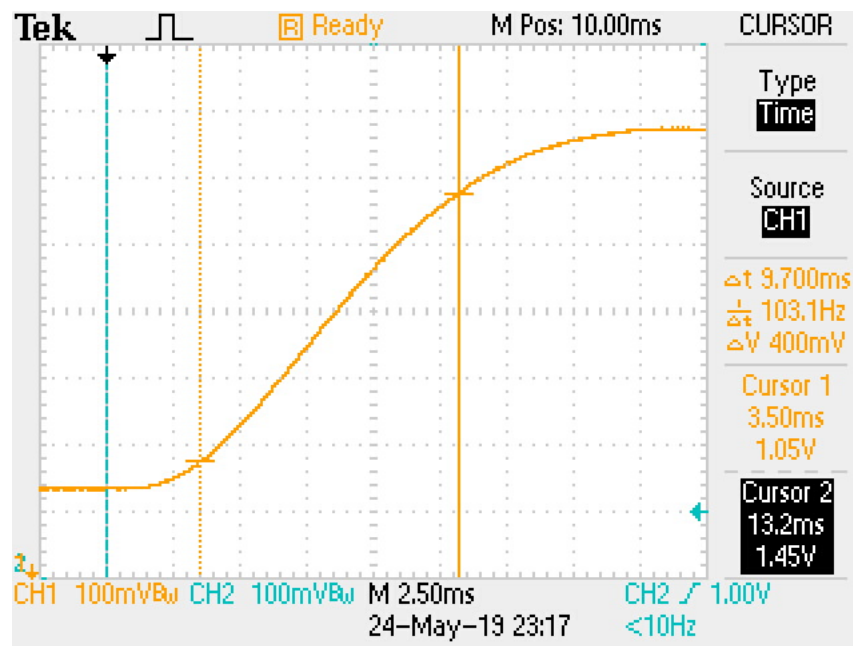
Figura 19 – Magnitude e Tempo de Pico



Resposta ao degrau de 0,5 [V] aplicado pela tensão média do *PWM*. No Canal 1 (Amarelo) é a saída da planta e o canal 2 (azul), o *trigger*. Fonte: do autor.

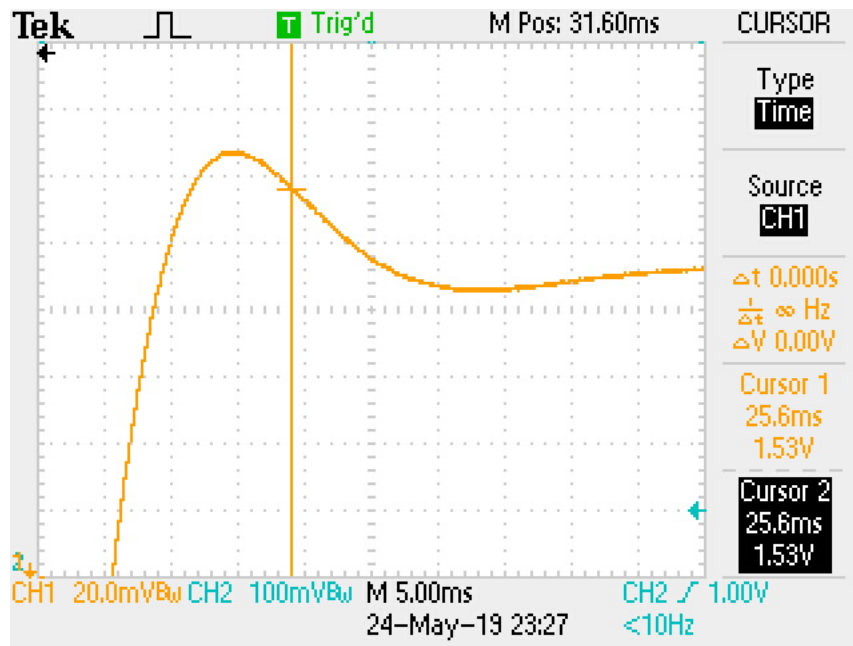
## APÊNDICE E – CAPTURAS DA PLANTA EM MALHA FECHADA

Figura 20 – Tempo de Subida



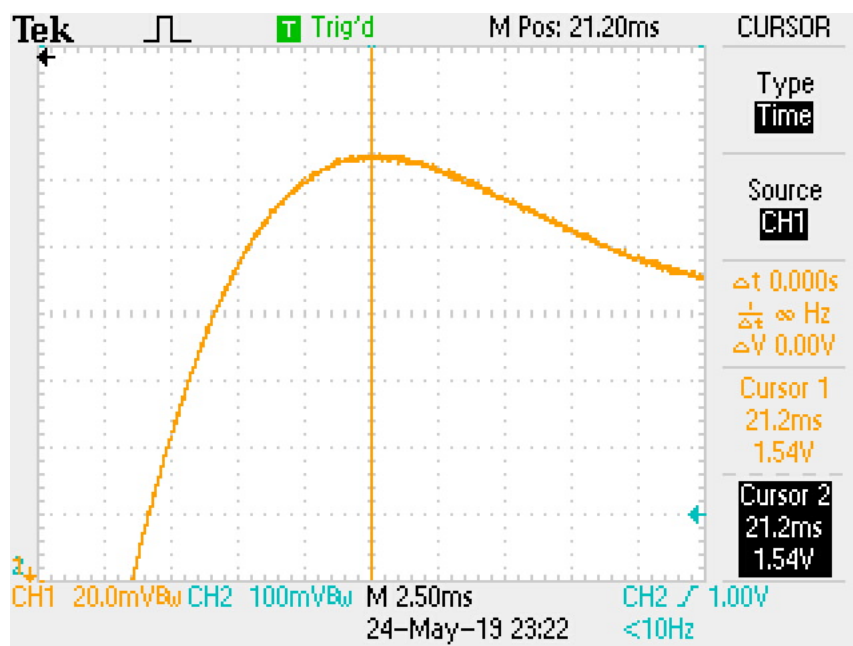
Resposta ao degrau de  $0,5\text{ [V]}$  aplicado pela tensão média do *PWM*. No Canal 1 (Amarelo) é a saída da planta e o canal 2 (azul), o *trigger*. Fonte: do autor.

Figura 21 – Tempo de Acomodação



Resposta ao degrau de 0,5 [V] aplicado pela tensão média do *PWM*. No Canal 1 (Amarelo) é a saída da planta e o canal 2 (azul), o *trigger*. Fonte: do autor.

Figura 22 – Magnitude e Tempo de Pico



Resposta ao degrau de 0,5 [V] aplicado pela tensão média do *PWM*. No Canal 1 (Amarelo) é a saída da planta e o canal 2 (azul), o *trigger*. Fonte: do autor.