Métodos Numéricos (M2039) — 2023/2024

Folha de exercícios 4 - Soluções de exercícios.

1. (a) $I \approx 2.71828, \quad |E| \leq 3.7 * 10^0 \quad \Rightarrow \quad I = 2.7 \pm 3.7 \times 10^0$
   (b) $I \approx 5.05366, \quad |E| \leq 6.2 * 10^{-1} \quad \Rightarrow \quad I = 5.05 \pm 6.2 \times 10^{-1}$
   (c) $I \approx 4.67234, \quad |E| \leq 2.6 * 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad I = 4.6723 \pm 2.6 \times 10^{-3}$

2. Vamos considerar a partição do intervalo $[1, 2]$ em n=4 subintervalos de igual amplitude h=$\dfrac{(2-1)}{4}$=0.25. As abcissas que definem esta partição são:

$$x_0{=}a{=}1. \quad x_1{=}1.25 \quad x_2{=}1.5 \quad x_3{=}1.75 \quad x_4{=}b{=}2.$$

   (a) $I \approx I_R = 0.25\left(\mathrm{e}^1 + \mathrm{e}^{1.25} + \mathrm{e}^{1.5} + \mathrm{e}^{1.75}\right) = 4.1112291$

   Como $f(x)$=e^x então $f'(x)$=e^x, que é contínua, positiva e crescente em $[1, 2]$. Por isso $M = \max\limits_{1 \leq x \leq 2} |f'(x)| = |f'(2)| \leq 7.39 \quad$ e $\quad |E_R| \leq \dfrac{(2-1)}{2} \times 0.25 \times 7.39 \leq 9.3 \times 10^{-1}$

   Logo $I = 4.11 \pm 9.3 \times 10^{-1}$

   (b) $I \approx I_T = \dfrac{0.25}{2}\left(\mathrm{e}^1 + 2\left(\mathrm{e}^{1.25} + \mathrm{e}^{1.5} + \mathrm{e}^{1.75}\right) + \mathrm{e}^2\right) = 4.6950759$

   $f''(x)$=e^x

   $M = \max\limits_{1 \leq x \leq 2} |f''(x)| \leq 7.39 \quad$ e $\quad |E_T| \leq \dfrac{(0.25^2)}{12} \times (2-1) \times 7.39 \leq 3.9 \times 10^{-2}$

   Logo $I = 4.695 \pm 3.9 \times 10^{-2}$

   (c) $I \approx I_S = \dfrac{0.25}{3}\left(\mathrm{e}^1 + 4\mathrm{e}^{1.25} + 2\mathrm{e}^{1.5} + 4\mathrm{e}^{1.75} + \mathrm{e}^2\right) = 4.6708749$

   $f^{(4)}(x)$=e^x. Por isso

   $M = \max\limits_{1 \leq x \leq 2} |f^{(4)}(x)| \leq 7.39 \quad$ e $\quad |E_S| \leq \dfrac{(0.25^4)}{180} \times (2-1) \times 7.39 \leq 1.7 \times 10^{-4}$

   Logo $I = 4.67087 \pm 1.7 \times 10^{-4}$

3. (a) $I = 0.737 \pm 8.4 \times 10^{-2}$
   (b) $I = 0.6949 \pm 4.7 \times 10^{-3}$
   (c) $I = 0.69317 \pm 1.1 \times 10^{-4}$

4. Queremos calcular $I = \int_{1.8}^{3.4} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$, usando a regra dos trapézios, com 5 casas decimais corretas, isto é, com erro absoluto menor que 5×10^{-6}.

   Temos $f(x) = \mathrm{e}^x$; $M = \max_{1.8 \leq x \leq 3.4} |f''(x)| = \mathrm{e}^{3.4} \leq 30$. O erro absoluto $|E_h|$ cometido na integração usando a regra dos trapézios é majorado por $|E_h| \leq \frac{h^2}{12} \times (3.4 - 1.8) \times 30$.

   Queremos determinar h tal que

$$\frac{h^2}{12} \times (3.4 - 1.8) \times 30 \leq 5 \times 10^{-6}$$

   o que acontece para $h \leq 0.001118033$. Por isso basta considerar, por exemplo, $h = 0.001$ e portanto dividindo o intervalo de integração em $n = \frac{3.4 - 1.8}{h} = 1600$ subintervalos de igual amplitude.

5. Devemos usar $n \geq 12$ subintervalos de igual amplitude. Para $n = 12$ obtemos: $I = 0.74682$ (deixando o resultado com o erro pedido no enunciado).

6. (a) $I = 1.454 \pm 2.9 \times 10^{-2}$
   (b) $I = 1.4582 \pm 5.3 \times 10^{-3}$

7. $I \approx 2.06$

8. Dada um conjunto de pontos da função $f(x) = sinh(x)$ queremos calcular um valor aproximado de $f'(0.4)$, usando a fórmula das diferenças centrais

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$\text{Para } h = 0.001 \longrightarrow f'(x) \approx \frac{f(0.401) - f(0.399)}{2 \times 0.001} = 1.08$$

$$\text{Para } h = 0.002 \longrightarrow f'(x) \approx \frac{f(0.402) - f(0.398)}{2 \times 0.002} = 1.0825$$

   O valor exato é $f'(0.4) = 1.08107237...$ Como vemos o valor aproximado obtido com $h = 0.001$ constitui uma melhor aproximação de $f'(0.4)$ que o valor obtido com $h = 0.002$. Isto seria de esperar uma vez que a aproximação com $h = 0.001$ foi obtida com informação da fun ção f em pontos mais próximos de 0.4 do que a obtida para $h = 0.002$.

   Vou agora supor que, uma vez que se conhece a expressão da função f, tinha sido pedido para calcular um majorante do erro cometido na aproximação para $h = 0.001$. O erro é tal que, se f''' existir e for contÃnua em $]x-h, x+h[$ então

$$E = -\frac{h^{\,2}}{6} f'''(c), \quad x - h < c < x + h.$$

Neste caso $f'''(x) = cosh(x)$. Para $h = 0.001$ temos $M = \max_{0.399 \leq x \leq 0.401} |f'''(x)| \leq 1.1$ e, portanto,

$$|E| \leq \frac{h^2}{6} M \leq 2 \times 10^{-7}.$$

*Esteresultadomostraqueusandoafórmuladasdiferençascentraise*h=0.001*sepoderiaterumvaloraproximado*
*senamesma*f'(0.4)≈ 1.08.

9. Usei o menor valor de h possível em cada caso. Podem obter outros valores aproximados, mas com maior erro.

   $h = 0.1 \longrightarrow f'(1.8) \approx -0.2$, com erro $O(h)$.

   $h = 0.1 \longrightarrow f'(2.0) \approx -0.05$, com erro $O(h^2)$.

   $h = 0.1 \longrightarrow f'(2.1) \approx 0.1$, com erro $O(h)$.

   $h = 0.1 \longrightarrow f''(2.0) \approx 3.00$, com erro $O(h^2)$.

10. Pretende-se determinar a ordem de grandeza, no passo h, do erro cometido na aproximação de $f'(a)$ pela expressão dada. Para tal desenvolver em série $f(a+h)$ e $f(a+2h)$ até uma ordem conveniente (neste caso vejam que basta ir atÃ© termos em h^3) e manipular a expressão.

    A resposta é que a fórmula tem erro $O(h^2)$.

11. (a) $h = 0.1 \longrightarrow I = \int_{0.3}^{0.7} f(x)dx \approx 0.31$, com erro $O(h^2)$.

    (b) $h = 0.1 \longrightarrow f'(0.5) \approx -0.75$, com erro $O(h^2)$.