Métodos Numéricos (M2039) — 2023/2024

Folha de Exercícios 3 - Soluções de exercícios selecionados

1. (a) Usando interpolação linear: $f(\pi/5) \approx p_1(\pi/5) = 0.74641$.
   Como $|E_1(\pi/5)| < 3.3 \times 10^{-2}$, então $f(\pi/5) = 0.746 \pm 3.3 \times 10^{-2}$.

   (b) Usando interpolação parabólica: $f(\pi/5) \approx p_2(\pi/5) = 0.73569$.
   Como $|E_2(\pi/5)| < 2.8 \times 10^{-2}$, então $f(\pi/5) = 0.736 \pm 2.8 \times 10^{-2}$.

2. (a) $f(0.4) \approx p(0.4) = 0.2291056$

   (b) $|E(0.4)| < 3.3 \times 10^{-4}$. Então $f(0.4) = 0.22911 \pm 3.3 \times 10^{-4}$.

5. Para usar toda a informação (4 pontos) fazer interpolação cúbica, $n = 3$,
   $f(1.38) \approx 0.1399$

6. Usando a informação toda da tabela $e^{0.7} \approx p_3(0.7)$.
   $e^{0.7} = 2.01368 \pm 1.1 \times 10^{-4}$

7. (a) grau 2: $p_2(x) = 5.9x^2 - 4.3x + 10$
   grau 3: $p_3(x) = 1.35x^3 + 0.5x^2 - 0.25x + 10$

   (b) Sabemos que (1) f é um polinómio de grau 5 (2) dispomos de um conjunto de 6 pontos de abcissas distintas da função f. Por este conjunto de pontos 6 passa um e um só polinómio de grau ≤ 5. Então f é o polinómio interpolador daquele conjunto de pontos. Determinem p_5.

8. (b) $P(x) = 13 - 9(x+2) + 2(x+2)(x+1)$

11. Neste problema temos: $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$ e $f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_2 = 2$. Temos 3 pontos da função f, por isso $n = 2$. Queremos construir o spline cúbico natural $S(x)$, definido em $[0, 2]$ que interpola f no conjunto de pontos dado:

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ S_2(x), & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Vamos começar por construir o sistema que permite determinar os valores de M_0, M_1 e M_2.

* spline cúbico natural $\Longrightarrow M_0 = M_2 = 0$

* $h_1 = x_1 - x_0 = 1$, $h_2 = x_2 - x_1 = 1$;
para $i = 1$ obtemos a equação seguinte:

$$\frac{h_1}{6}M_0 + \frac{h_1 + h_2}{3}M_1 + \frac{h_2}{6}M_2 = \frac{f_2 - f_1}{h_2} - \frac{f_1 - f_0}{h_1}$$

e já temos o sistema completo (temos uma equação deste tipo para $i = 1, ..., n-1$ e neste caso $n = 2$):

$$\begin{cases} M_0 = 0 \\ \frac{h_1}{6}M_0 + \frac{h_1+h_2}{3}M_1 + \frac{h_2}{6}M_2 = \frac{f_2-f_1}{h_2} - \frac{f_1-f_0}{h_1} \\ M_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_0 = 0 \\ \frac{1}{6}M_0 + \frac{2}{3}M_1 + \frac{1}{6}M_2 = 0 \\ M_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M_0 = 0 \\ M_1 = 0 \\ M_2 = 0 \end{cases}$$

De seguida já podemos substituir os valores nas expressões de $S_i(x), \quad i = 1, ..., n$

$$S_i(x) = M_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i} + (f_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6})\frac{x_i-x}{h_i} + (f_i - M_i\frac{h_i^2}{6})\frac{x-x_{i-1}}{h_i}$$

e obtemos $S_1(x) = x$ e $S_2(x) = x$ e, portanto,

$$S(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

ou, neste caso, podemos escrever $S(x) = x, \quad x \in [0, 2]$.

12. O spline cúbico completo é $S(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$.

    O sistema a resolver para determinar os M_i é:

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{6}M_1 - \frac{1}{3}M_0 = 1 \\ \\ \frac{1}{6}M_0 + \frac{2}{3}M_1 + \frac{1}{6}M_2 = 0 \\ \\ 1 + \frac{1}{6}M_1 + \frac{1}{3}M_2 = 1 \end{cases}$$

13. (a) $sl(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 4x - 3, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

    (b) $p_2(x) = 2x^2 - 2x + 1$

    (c) $scn(x) = \begin{cases} x^3 - x + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x^3 + 6x^2 - 7x + 3, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

14. (a) $sl(x) = \begin{cases} x/2, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 3x/2 - 1/2, & 1/2 \leq x \leq 1 \\ 3 - 2x, & 1 \leq x \leq 2 \\ -1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

    (b) $sc(x) = \begin{cases} 38x^3/21 + x/21, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ -106x^3/21 + 72x^2/7 - 107x/21 + 6/7, & 1/2 \leq x \leq 1 \\ 53x^3/21 - 87x^2/7 + 370x/21 - 47/7, & 1 \leq x \leq 2 \\ -19x^3/21 + 57x^2/7 - 494x/21 + 145/7, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

15. (a) $scn(x) = 3.13410x - 8.44811$

16. Sim.

17. $a = 3,\ b = 3,\ c = 1$. O spline não é natural pois $f''(3) \neq 0$.

18. Neste problema queremos determinar o polinómio $p_2(x)$ de grau ≤ 2 que melhor representa, no sentido dos mínimos quadrados, o conjunto de 4 pontos dado. Temos:

    $N = 3, \quad n = 2$

    $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, onde a_0, a_1 e a_2 e são tais que tornam mínima a função soma dos quadrados dos resíduos

    $$\Phi(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=0}^{3} R_i^2 = \sum_{i=0}^{3} (f_i - p_2(x_i))^2$$

    e, portanto, são as soluções do sistema $AA^T a = Af$, onde

    $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1.05 & 1.10 & 1.15 & 1.20 \\ 1.05^2 & 1.10^2 & 1.15^2 & 1.20^2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1.02470 \\ 1.04881 \\ 1.07238 \\ 1.09544 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

    O sistema a resolver fica

    $$\begin{pmatrix} 4 & 4.5 & 5.075 \\ 4.5 & 5.075 & 5.7375 \\ 5.075 & 5.7375 & 6.50221 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.24133 \\ 4.77739 \\ 5.39445 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0.39742 \\ a_1 = 0.70783 \\ a_2 = -0.10500 \end{cases}$$

    Logo $p_2(x) = 0.39742 + 0.70783x - 0.10500x^2$

    Neste tipo de aproximação de uma função o erro nos coeficientes calculados está ligado ao erro com que se têm os valores dos f_i e também ao erro na resolução do sistema e por isso, sem uma análise aprofundada do erro de propagação, podem decidir deixar o número de casas decimais que quiserem nos coeficientes. Por exemplo também podiam escrever o resultado assim $p_2(x) = 0.397 + 0.708x - 0.105x^2$.

19. $p_1(x) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{\pi}x$

20. Neste problema queremos determinar a combinação $p(x)$ de $sin(x)$ e de $cos(x)$ que melhor representa, no sentido dos mínimos quadrados, o conjunto de 3 pontos dado. Temos:

    $N = 2, \quad n = 1$, e as funções $\phi_0(x) = \sin(x)$ e $\phi_1(x) = \cos(x)$

    $p(x) = a_0 \sin(x) + a_1 \cos(x)$, onde a_0 e a_1 e são tais que tornam mínima a função soma dos quadrados dos resíduos

    $$\Phi(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{3} R_i^2 = \sum_{i=0}^{3} (f_i - p(x_i))^2$$

    e, portanto, são as soluções do sistema $AA^T a = Af$, onde

    $$A = \begin{pmatrix} \sin(0) & \sin(\pi/4) & \sin(\pi/2) \\ \cos(0) & \cos(\pi/4) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

O sistema a resolver fica

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1.1036 \\ a_1 = 0.1036 \end{cases}$$

Logo $p(x) = 1.1036 \;\sin(x) + 0.1036 \;\cos(x)$

21. $p(x) = 0.899 - 0.051\mathrm{e}^x$

22. $p(x) = 1.84 + 1.05x$