Nome: João Vitor de Freitas Barbosa
DRE: 117055449

Cálculo Numérico

Tarefa 2

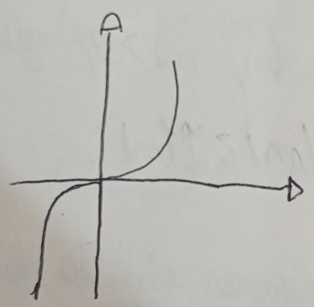
Nome: João Vitor de Freitas Barbosa

Cálculo Numérico

Tarefa 2

Exercício 2.1: (Ache uma prova ou dê um contra-exemplo) Se f é estritamente crescente em I, então para todo $x \in I$, $f'(x) > 0$

Falso. O contra-exemplo mais simples é o da função $f(x) = x^3$, cuja derivada é zero quando $x = 0$.



A função $f(x) = x^3$ é estritamente crescente em I, porém existe um ponto onde a reta tangente à curva é horizontal, o coeficiente angular dessa reta tangente é igual a zero, logo a derivada não é estritamente positiva.

Assim, a derivada não é estritamente positiva.

Exercício 2.2: (Teorema da Função decrescente). Prove que: Se para todo $x \in I$, $f'(x) \leq 0$, então $f(x)$ é decrescente em I.

Sejam m e n pontos de I, tais que $m > n$. Aplicamos o teorema do valor médio no intervalo $[m, n]$. Como este intervalo está contido em $[a, b]$, as hipóteses do teorema do valor médio continuam válidos em $[m, n]$. Assim, existe um ponto c em (m, n), tal que

$$f(n) - f(m) = f'(c)(n - m).$$

Como, por hipótese, $f'(c) < 0$ e $(n - m) < 0$, segue que

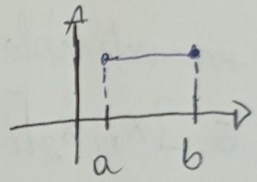
$$f(n) - f(m) < 0, \text{ isto é, } f(m) > f(n).$$

Como m e n são pontos quaisquer em $[a, b]$, segue que f é uma função decrescente em $[a, b]$.

Exercício 2.3 (Teorema da Função Constante). Prove que: Se para todo $x \in I$, $f'(x) = 0$, então $f(x)$ é constante em I.

Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é uma função constante em $[a, b]$, isto é, existe um número real K, tal que, $f(x) = K$, qualquer que seja o ponto x de $[a, b]$.

Como sabemos que a derivada é a inclinação da reta tangente da nossa função, então se $f'(x) = 0$, logo no ponto x não há inclinação, temos uma:



Sabemos também que

$$S'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$, se $S'(x) = 0$ então

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$\Rightarrow$ analisando, sabemos que b e a são pontos distintos, portanto $b - a \neq 0$, então nos resta $f(b) - f(a) = 0$

Exercício 2.4 (Teorema da Função Estritamente Crescente): Prove que: Se para todo $x \in I$, $f'(x) > 0$, então $f(x)$ é estritamente crescente em I.

Precisamos provar que quaisquer que sejam x_1 e x_2 em I, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$

Sejam então x_1 e x_2 em I, com $x_1 < x_2$: por hipótese, f é contínua em $[x_1, x_2]$, e derivável em todo ponto interior a esse intervalo. Logo, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in]x_1, x_2[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Logo, como $f'(c) > 0$, temos: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ e,

como $x_1 < x_2$, temos $x_2 - x_1 > 0$ e,

portanto, $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Assim, $f(x_2) > f(x_1)$ então f é estritamente crescente em I.

Exemplo 3.1: Aproxime sen(0.01) com erro máximo menor que 10^{-6}

$$|f(x) - T_N(x)| \leq \frac{M x^{N+1}}{(N+1)!}$$

① Ache o polinômio de Taylor

② Estimar M

$$f^{(N+1)}(x) \leq M \text{ para todo } x \text{ no intervalo}$$

Determine M tal que

$$|sen(0.01) - T_N(0.01)| \leq 10^{-6}$$

$$|sen(0.01) - T_N(0.01)| \leq \frac{M(x-a)^{N+1}}{(N+1)!} \leq 10^{-6}$$

$$|f^{(N+1)}(x)| \leq 1 \quad \text{para } f(x) = sen(x) \quad \text{para qualquer } N$$

$$\frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \leq 10^{-6} \rightsquigarrow \frac{(0.01)^{N+1}}{(N+1)!} \leq 10^{-6}$$

N	$\frac{(0.01)^{N+1}}{(N+1)!}$
0	0.01
1	$10^{-4}/2$
2	$10^{-6}/6$
3	$\frac{10^{-8}}{24}$
4	$\frac{10^{-10}}{5!}$
5	

$N = 2$

$sen(0.01) = 0 + (0.01)$

$sen(0.01) = 0.01$

Exercício 3.1. Porque aproximação $\text{sen}(x) \approx x$ é muito boa para valores x próximos de zero? Explique com um texto usando o Teorema de Taylor.

Bom podemos considerar uma curva derivável $f(x)$ e um ponto $(p, f(p))$ sobre ela. Em seguida, considerar a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$, que possui equação

$$L(x) = f(p) + f'(p)(x-p)$$

Podemos dizer então que a reta tangente é uma aproximação para o gráfico de f. Denotamos esta aproximação por $f(x) \approx L(x)$, para x suficientemente próximo de p. Assim,

$$f(x) \approx f(p) + f'(p)(x-p)$$

Por $\text{sen}(x)$, podemos notar que $f'(x) = \cos(x)$ e que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$. Sendo assim

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = 0 + 1(x-0) = x$$

Desse modo, para determinar uma aproximação de $\text{sen}(x)$ para x com valores próximos a zero, basta lembrar que $L(x) \approx f(x)$. Um bom exemplo seria $L(0.1) = 0.1$,

$$\text{sen}(0.1) \approx 0.1.$$

Exercício 3.2: Seja $f(x) = \ln(x)$. Aproxime $f(1.5)$ usando o polinômio de Taylor de terceiro ordem com $a = 1$. Quantos dígitos corretos possui a aproximação? Quantos termos deve ter o polinômio para o erro de truncamento ser menor que 10^{-8}?

Inicialmente temos

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{+2}{x^3}. \text{ Portanto}$$

$$f(1) = \ln(1) = 0; \quad f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1; \quad f'''(1) = \frac{2}{1} = 2$$

O polinômio de Taylor de ordem 3 é dado $\quad x_0 = a = 1$, $x = 1.5$

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$$

$$P_3(x) = 0 + 1(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3$$

$$P_3(1.5) = 0 + (1.5-1) - \frac{(1.5-1)^2}{2} + \frac{(1.5-1)^3}{3}$$

$$P_3(1.5) = (0.5) - \frac{(0.5)^2}{2} + \frac{(0.5)^3}{3} \approx 0.5 - 0.125 + 0.041\overline{6} = 0.4166$$

Sabemos que seja f uma função derivável até a ordem $(n+1)$ no intervalo aberto I com x_0 e $x \in I$. Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x_0 e x tal que:

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x),$$

onde $E_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$ é o erro que obtemos ao substituir $f(x)$ por $P_n(x)$.

Portanto desenvolvendo a expressão do erro relativo a aproximação da função $f(x) = \ln(x)$ por $P_n(x)$ desenvolvido na origem, temos:

$0 = \ln 1 < \ln x$

$$E_n(x) = \frac{\ln x}{(n+1)!}(x-1)^{(n+1)}$$

Como $f(1) = 0$, podemos obter aproximações

$$|E_n(1)| = \left|\frac{\ln x}{(n+1)!}\right| = \frac{\ln x}{(n+1)!} < 0$$

$$E_3(x) = \frac{f^4(\bar{x})}{4!}(x-x_0)^4 < 10^{-8}$$

Exercício 3.4) Como o Teorema de Taylor em sin(x), pode ter ajudar a calcular o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \ ?$$

O Teorema de Taylor nos dá uma aproximação da função em questão que queremos com um determinado erro.

O limite é utilizado no intuito de expor o comportamento de uma função nos momentos de aproximação de determinados valores. O limite de uma função possui grande importância no cálculo diferencial.

Tarefa 2

Nome: João Vitor de Freitas Barbosa

DRE: 117055449

In [3]:
```
function fatorial(n :: Integer)
    if n < 0
        error("Fatorial só pode ser n>=0")
    elseif n == 0
        return 1
    else
        return n * fatorial(n-1)
    end
end
```

Out[3]:
```
fatorial (generic function with 1 method)
```

Exercício 3.3:

Implemente em Julia o polinomial de Taylor para calcular ln(x) usando como exemplo esse link começando em 1:07:44. Na sua implementação, o usuário deve poder colocar um erro m´aximo como entrada (dica: exercício anterior).

Abaixo eu calculo o polinômio de Taylor de Ordem n para ln(x), onde as derivadas seguem f(x) = ln(x), f'(x) = 1/x, f''(x) = -1/(x^2), f'''(x) = 2/(x^3)

In [262]:
```
function ln(x, n, atol)
    s = 0.0
    a = 1
    b = -1
    base = 1
    for k = 1:n
        s += ((a*(base^b))/fatorial(k))*((x-base)^k)
        a=a*b
        b+=-1
    end
    return s
end
```

Out[262]:
```
ln (generic function with 2 methods)
```

In [269]:
```
ln(1.5, 25, 1e-8)
```

Out[269]:
```
0.40546401996263515
```

In [269]:
```
ln(1.5, 25, 1e-8)
```
Out[269]:
```
0.40546401996263515
```
In [264]:
```
log(1.5)
```
Out[264]:
```
0.4054651081081644
```

Exercício 5.1:

Implemente em Julia o Método da Bisseção para calcular a solução da equação x^2 − 10 = 0 no intervalo [0,20]. Se precisar de ajuda use esse link começando em 11:00.

In [118]:
```
f(x) = x^2 - 10
a, b = 0.0, 20.0
```
Out[118]:
```
(0.0, 20.0)
```
In [146]:
```
x = (a+b) / 2

if f(a) * f(x) < 0
    b = x
else
    a = x
end
x, f(x)
```
Out[146]:
```
(3.1622767448425293, -5.789028136859997e-6)
```
In [154]:
```
"""
    (x, fx, exitflag) = bisseccao(f, a, b)
"""
function bisseccao(f, a, b;
                   atol = 1e-8, rtol = 1e-8,
                   max_tempo = 10.0, max_iter = 1000)
    fa = f(a)
    fb = f(b)
    ϵ = atol + rtol * max(abs(fa), abs(fb))
    ϵba = atol + rtol * abs(b-a)
    if abs(fa) <= ϵ
        return a, fa, :sucesso
    elseif abs(fb) <= ϵ
        return b, fb, :sucesso
    elseif fa * fb >= 0
        return a, fa, :falha_sinais_opostos
    end
```

```julia
    elseif fa * fb >= 0
        return a, fa, :falha_sinais_opostos
    end

    x = (a + b)/2
    fx = f(x)
    iter = 0
    t0 = time()
    δt = time() - t0

    resolvido = (abs(fx) <= ϵ || abs(b - a) <= ϵba)
    cansado = (iter >= max_iter || δt >= max_tempo)

    while !(resolvido || cansado)
        if f(a) * f(x) < 0
            b = x
            fb = fx
        else
            a = x
            fa = fx
        end

        x = (a + b)/2
        fx = f(x)

        iter+=1
        δt = time() - t0
        resolvido = (abs(fx) <= ϵ || abs(b - a) <= ϵba)
        cansado = (iter >= max_iter || δt >= max_tempo)
    end
    exitflag = :desconhecido
    if resolvido
        exitflag = :sucesso
    elseif cansado
        if iter >= max_tier
            exitflag = :max_iter
        else
            exitflag = :max_tempo
        end
    end

    return x, fx, exitflag, iter, b-a
end
```

Out[154]: bisseccao

In [155]:

```julia
f(x) = x^2 - 10
a, b = 0.0, 20.0
bisseccao(f, a, b)
```

Out[155]: (3.162277936935425, 1.7504285665381758e-6, :sucesso, 23, 2.384185791015625e-6)

In [155]:
```
f(x) = x^2 - 10
a, b = 0.0, 20.0
bisseccao(f, a, b)
```

Out[155]:
```
(3.162277936935425, 1.7504285665381758e-6, :sucesso, 23, 2.384185791015625e-6)
```

Exercício 5.2:

Dado o intervalo [a, b] e o número n de passos da bissecção, qual ́e o tamanho do intervalo [an, bn]?

Podemos ver abaixo que o tamanho do intervalo é dado pelo último valor de retorno: 2.384185791015625e-6

In [156]:
```
f(x) = x^2 - 10
a, b = 0.0, 20.0
bisseccao(f, a, b)
```

Out[156]:
```
(3.162277936935425, 1.7504285665381758e-6, :sucesso, 23, 2.384185791015625e-6)
```

Desafio 5.1:

Usando o exercício anterior, determine quantos passos você precisa executar no método da bissecção com intervalo [a, b] se o usuário pedir um erro máximo de 10^−8. Deixe claro com você esta definindo o erro.

O erro no caso, está definido na própria função como **atol(erro absoluto)** e **rtol(erro relativo)** como 1e-8 = 10^-8

Como podemos ver abaixo, temos 23 passos para um erro máximo de 10^-8

In [157]:
```
f(x) = x^2 - 10
a, b = 0.0, 20.0
bisseccao(f, a, b)
```

Out[157]:
```
(3.162277936935425, 1.7504285665381758e-6, :sucesso, 23, 2.384185791015625e-6)
```