Sistemas Lineares
Métodos Diretos
Métodos Iterativos Estacionários

Andréa Maria Pedrosa Valli, Lucia Catabriga

Laboratório de Computação de Alto Desempenho (LCAD)
Departamento de Informática
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Vitória, ES, Brasil

Métodos Diretos

1. Características
2. Eliminação de Gauss
3. Fatoração LU
4. Matrizes Esparsas
5. Matrizes Esparsas x Métodos Diretos

- Encontra a solução exata a menos de erros de ponto flutuante.
- A idéia dos métodos é transformar o sistema em um sistema trivial (sistema triangular).
- A complexidade é em torno de n^3 (número de operações de ponto flutuante).
- Em certos casos, métodos diretos não são eficientes, por exemplo, quando a matriz dos coeficientes é uma matriz esparsa (muitos elementos iguais a zero).

Eliminação de Gauss [2]:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ & & a''_{33} & b''_3 \end{array}\right]$$

Eliminação progressiva

$$\Downarrow$$

$$x_3 = b''_3 / a''_{33}$$
$$x_2 = (b'_2 - a'_{23}x_3)/a'_{22}$$
$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$$

Substituição regressiva

Fatoração LU [2]:

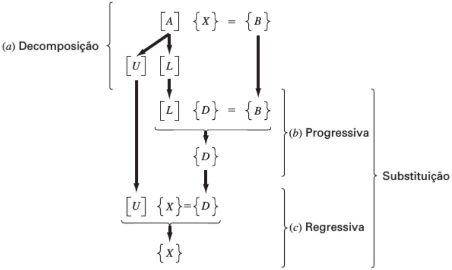
$$[A] \to [L][U]$$

onde

$$[U] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix}$$

e

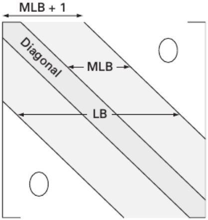
$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{bmatrix}$$



Matrizes Esparsas:

$$\begin{bmatrix} f_1 & g_1 & & & & \\ e_2 & f_2 & g_2 & & & \\ & e_3 & f_3 & g_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & e_{n-1} & f_{n-1} & g_{n-1} \\ & & & & e_n & f_n \end{bmatrix}$$

(a) Tridiagonal.



(b) Banda.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & c_1 & & & & & \\ b_2 & a_2 & b_2 & & c_2 & & & & \\ & b_3 & a_3 & 0 & & c_3 & & & \\ c_4 & & 0 & a_4 & b_4 & & c_4 & & \\ & c_5 & & b_5 & a_5 & b_5 & & c_5 & \\ & & c_6 & & b_6 & a_6 & 0 & & c_6 \\ & & & c_7 & & 0 & a_7 & b_7 & \\ & & & & c_8 & & b_8 & a_8 & b_8 \\ & & & & & c_9 & & b_9 & a_9 \end{bmatrix}$$

(c) Pentadiagonal.

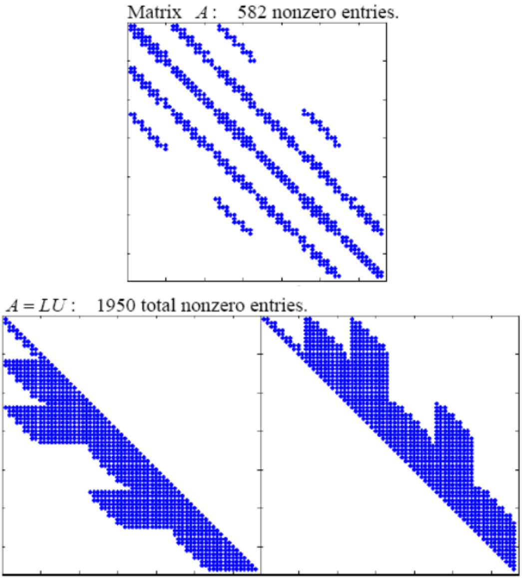
Problema:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = f(x) \qquad \text{para} \quad x \in (0,1)$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

Solução por diferenças finitas:

$$x_i = x_0 + i\,\Delta x, \qquad 0 = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} = 1$$
$$(1/(\Delta x)^2)u_{i-1} - (2/(\Delta x)^2)u_i + (1/(\Delta x)^2)u_{i+1} = f_i$$
$$\Longrightarrow \quad bu_{i-1} + au_i + bu_{i+1} = f_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\begin{bmatrix} a & b & & & \\ b & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b & a & b \\ & & & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - bu_0 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n - bu_{n+1} \end{bmatrix}$$


Matrix A: 582 nonzero entries.
$A = LU$: 1950 total nonzero entries.

8-15

Métodos Iterativos Estacionários

1. Características
2. Idéia dos Métodos
3. Matrizes Esparsas x Métodos Iterativos

- Encontra uma solução aproximada com precisão pré-fixada.
- O objetivo é transformar o sistema $Ax = b$ em uma expressão recursiva tal que $x^{(k+1)} = M\,x^{(k)} + c$ para uma condição inicial $x^{(0)}$ conhecida.
- Depende de critérios de convergência relacionados a matriz de iteração M.
- A complexidade, por iteração, é em torno de n^2 (número de operações de ponto flutuante).
- Quando a matriz dos coeficientes é esparsa, somente os coeficientes não nulos necessitam ser armazenados.

$$Ax = b \tag{1}$$

Isolar x, reescrevendo o sistema (1) da seguinte forma:

$$x = Mx + c \tag{2}$$

onde

$$\begin{aligned} M &= \text{matriz } n \times n \\ c &= \text{sistema } n \times 1 \end{aligned}$$

A construção da matriz de iteração M define o métodos iterativos estacionários. Neste curso vamos estudar:

- Método de Gauss-Jacobi
- Método de Gauss-Seidel
- Método SOR (successive over-relaxation)

Defina o processo iterativo com $k = 0, 1, 2, \cdots$

$$x^{(k+1)} = M\,x^{(k)} + c \tag{3}$$

Dado $x^{(0)}$, usar (3) para calcular

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= M\,x^{(0)} + c \\ x^{(2)} &= M\,x^{(1)} + c \\ &\vdots \end{aligned}$$

até que $e_{rel} = \frac{||x^{(k+1)} - x^{(k)}||}{||x^{(k+1)}||} < \epsilon$ ou $k \geq k_{max}$ (critério de parada)

onde

$$\begin{aligned} \epsilon &= \text{tolerância dada} \\ ||x||_\infty &= \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \quad \text{(norma do máximo)} \end{aligned}$$

Armazenamento de Matrizes (tridiagonal e pentadiagonal)

$$\begin{bmatrix} a & b & & & \\ b & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b & a & b \\ & & & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - bu_0 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n - bu_{n+1} \end{bmatrix}$$

A é tridiagonal

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ b & a & b \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b & a & b \\ b & a & 0 \end{bmatrix}$$

A abaixo é pentadiagonal

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & c_1 & & & & & \\ d_2 & a_2 & b_2 & & c_2 & & & & \\ & d_3 & a_3 & 0 & & c_3 & & & \\ e_4 & & 0 & a_4 & b_4 & & c_4 & & \\ & e_5 & & d_5 & a_5 & b_5 & & c_5 & \\ & & e_6 & & d_6 & a_6 & 0 & & c_6 \\ & & & e_7 & & 0 & a_7 & b_7 & \\ & & & & e_8 & & d_8 & a_8 & b_8 \\ & & & & & e_9 & & d_9 & a_9 \end{bmatrix} \Rightarrow AA = \begin{bmatrix} & & a_1 & b_1 & c_1 \\ & d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ & d_3 & a_3 & 0 & c_3 \\ e_4 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 \\ e_5 & d_5 & a_5 & b_5 & c_5 \\ e_6 & d_6 & a_6 & 0 & c_6 \\ e_7 & 0 & a_7 & b_7 & \\ e_8 & d_8 & a_8 & b_8 & \\ e_9 & d_9 & a_9 & & \end{bmatrix}$$

Armazenamento de Matrizes Esparsas - Formato CSR

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

AA	1	1	5	3	4	6	7	8	9	3	6	2	5
JA	1	2	3	1	2	1	3	4	5	3	4	3	5
IA	1	4	6	10	12	14							

- n - ordem de A
- nnz - número de coeficientes não nulos
- $2nnz + n + 1$ - número de alocações para armazenar A
- $AA(k) = a_{ij}, JA(k) = j, IA(i) \leq k < IA(i+1)$

Bibliografia

[1] Barret, R, et al., "Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods", SIAM, 1994.

[2] C. Chapa e Raymond P. Canale, "Métodos Numéricos para Engenharia", Steven Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

[3] Golub, G. and Van Loan, C., "Matrix Computations", The John Hopkins University Press,1993.

[4] Saad, Y., "Iterative Methods for Sparse Linear Systems", PWS Publishing Company, 1996.

[5] Dongarra, J.J., Duff, I.S., Sorasen, D.C., Van der Vorst, H.A., "Numerical Linear Algebra for High-Performance Computers", SIAM, 1998.