# Sistemas Lineares - Métodos Iterativos Estacionários

Andréa Maria Pedrosa Valli

Laboratório de Computação de Alto Desempenho (LCAD)
Departamento de Informática
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Vitória, ES, Brasil

# Métodos Iterativos Estacionários

1. Idéia dos métodos
2. Método de Gauss-Jacobi
3. Método de Gauss-Seidel
4. Convergência dos métodos
5. Método SOR

$$A\,x = b \tag{1}$$

Isolar $x$, reescrevendo o sistema (1) da seguinte forma:

$$x = M\,x + c \tag{2}$$

onde

$$\begin{aligned} M &= \text{matriz } n \times n \\ c &= \text{sistema } n \times 1 \end{aligned}$$

$M$ é chamada matriz de iteração.

Defina o processo iterativo com $k = 0, 1, 2, \cdots$

$$x^{(k+1)} = M\,x^{(k)} + c \tag{3}$$

Dado $x^{(0)}$, usar (3) para calcular

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= M\,x^{(0)} + c \\ x^{(2)} &= M\,x^{(1)} + c \\ &\vdots \end{aligned}$$

até que $e_{rel} = \frac{||x^{(k+1)} - x^{(k)}||}{||x^{(k+1)}||} < \epsilon$ ou $k \geq k_{max}$ (critério de parada)
onde

$$\begin{aligned} \epsilon &= \text{tolerância dada} \\ k_{max} &= \text{número máximo de iterações dado} \\ ||x||_\infty &= \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \quad \text{(norma do máximo)} \end{aligned}$$

Outro critério de parada: $||res^{k+1}|| = ||b - Ax^{(k+1)}|| < \epsilon ||b||$

Seja $A$ um sistema $n \times n$

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
. \quad . \quad . & & . \\
. \quad . \quad . & & . \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

onde estamos assumindo que $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n)\right]$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n)\right]$$

$$\vdots$$

## Método de Gauss-Jacobi

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + a_{14}x_4^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)})\right] \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + a_{24}x_4^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)})\right] \\
&\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + a_{n3}x_3^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})\right]
\end{aligned}
$$

Para $k \geq 0$,

$$
x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right], \qquad i = 1, 2, \cdots, n
$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = E + D + F$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A\,x &= (E + D + F)\,x = b \\ \Rightarrow D\,x &= -(E + F)\,x + b \\ \Rightarrow D\,x^{(k+1)} &= -(E + F)\,x^{(k)} + b \end{aligned}$$

Gauss-Jacobi:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= -D^{-1}(E + F)\,x^{(k)} + D^{-1}b \\ &= M\,x^{(k)} + c \end{aligned}$$

Exemplo: Resolver o sistema a seguir pelo método iterativo de Gauss-Jacobi, usando 5 casas decimais,

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0.4 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 10^{-2}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{0.5}\left(0.2 - 0.6x_2^{(k)} - 0.3x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{-1}\left(0.0 - 1.0x_1^{(k)} - 1.0x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{1}\left(-0.6 - 0.4x_1^{(k)} + 0.4x_2^{(k)}\right) \end{aligned}$$

# Método de Gauss-Seidel

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + a_{14}x_4^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)})\right] \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + a_{24}x_4^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)})\right] \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - (a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{34}x_4^{(k)} + \cdots + a_{3n}x_n^{(k)})\right] \\
&\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})\right]
\end{aligned}
$$

Para $k \geq 0$,

$$
x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right], \quad i = 1, 2, \cdots, n
$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = E + D + F$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A\,x &= (E + D + F)\,x = b \\ \Rightarrow (E + D)\,x &= -F\,x + b \\ \Rightarrow (E + D)\,x^{(k+1)} &= -F\,x^{(k)} + b \end{aligned}$$

Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= -(E + D)^{-1} F\,x^{(k)} + (E + D)^{-1}\,b \\ &= M\,x^{(k)} + c \end{aligned}$$

Exemplo: Resolver o sistema a seguir pelo método iterativo de Gauss-Seidel, usando 5 casas decimais,

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0.4 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 10^{-2}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{0.5}\left(0.2 - 0.6x_2^{(k)} - 0.3x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{1}\left(0.0 - 1.0x_1^{(k+1)} - 1.0x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{1}\left(-0.6 - 0.4x_1^{(k+1)} + 0.4x_2^{(k+1)}\right) \end{aligned}$$

A convergência da sequência gerada pelo método iterativo estacionário, $x^{k+1} = M\,x^k + c$, é dada pelo Teorema 1, onde são fornecidas condições necessárias e suficientes de convergência.

Teorema 1: O método iterativo $x^{k+1} = M\,x^k + c$ converge com qualquer $x^0$ se, e somente se, $\rho(M) < 1$, sendo $\rho(M)$ o raio espectral (maior autovalor em módulo) da matriz de iteração $M$.

Observações:

- A taxa de convergência será controlada pela magnitude do raio espectral. Quanto menor o raio espectral, mais rápida a convergência.
- A determinação do raio espectral da matriz de iteração $\rho(M)$ pode requerer maior esforço computacional que a própria solução do sistema $Ax = b$.

Exemplo: $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0.4 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}$

$$M_J = -D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -1.2 & -0.6 \\ -1 & 0 & -1 \\ -0.4 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_J) = 1.12$$

$$M_{GS} = -(E+D)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1.2 & -0.6 \\ 0 & 1.2 & -0.4 \\ 0 & 0.96 & 0.08 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_{GS}) = 0.6928$$

Calculando as sequências dadas pelos métodos de Gauss-Jacobi e Gaus-Seidel podemos confirmar que Gauss-Jacobi diverge e Gauss-Seidel converge [1].

Exemplo: $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0.4 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}$

$$M_J = -D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -1.2 & -0.6 \\ 1 & 0 & 1 \\ -0.4 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_J) = 0.8266$$

$$M_{GS} = -(E+D)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1.2 & -0.6 \\ 0 & -1.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_{GS}) = 1.2$$

Calculando as sequências dadas pelos métodos de Gauss-Jacobi e Gaus-Seidel podemos confirmar que Gauss-Jacobi converge e Gauss-Seidel diverge [1].

Teorema 2 (Critério das Linhas): É condição suficiente para a convergência dos métodos iterativos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel que a matriz dos coeficientes $A$ seja diagonalmente dominante, ou seja,

$$\alpha_i = (\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|)/|a_{ii}| < 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Teorema 3 (Critério de Sassenfeld): É condição suficiente para a convergência do método iterativo de Gauss-Seidel que a matriz dos coeficientes $A$ satisfaça

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 < 1 \\ \beta_i &= \frac{\left[ \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \right]}{|a_{ii}|} < 1, \qquad i = 2, 3, \cdots, n \end{aligned}$$

Observação: O critério de linhas é apenas suficiente, veja os exemplos a seguir. Observe que nos dois exemplos a matriz $A$ não é diagonalmente dominante.

Exemplo 1: $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, sol. exata $= \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -3 + 3x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 3 - x_1^{(k)} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39 \\ 15 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \text{divergindo}$$

Exemplo 2: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$, sol. exata $= \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 3 - x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{3}(3 + x_1^{(k)}) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.6667 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3333 \\ 1.3333 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6667 \\ 1.4444 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5556 \\ 1.5556 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \text{convergindo}$$

Método da sobre-relaxação sucessiva (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$\begin{aligned} Ax = b \qquad & \Rightarrow \omega(D + E + F)x = \omega b \\ & (D - D)x + \omega(D + E + F)x = \omega b \\ & (D + \omega E)x = [(1 - \omega)D - \omega F]x + \omega b \end{aligned}$$

Dado $x^{(0)}$, calcular

$$\begin{aligned} & (D + \omega E)x^{(k+1)} = [(1 - \omega)D - \omega F]x^{(k)} + \omega b \\ & Dx^{(k+1)} = \omega(-Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b) + (1 - \omega)Dx^{(k)} \\ & \Rightarrow x^{(k+1)} = \omega D^{-1}(-Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b) + (1 - \omega)x^{(k)} \end{aligned}$$

Observação: Para $\omega = 1$, temos o método de Gauss-Seidel:

$$x^{(k+1)} = -(E + D)^{-1} F\, x^{(k)} + (E + D)^{-1}\, b \qquad (4)$$

Exemplo: A resolução do problema

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = f(x) \qquad \text{para} \quad x \in (0,1)$$
$$u(0) = 1, \quad u(1) = 20$$

usando discretização por diferenças finitas centrais resulta um sistema linear tridiagonal da forma

$$x_i = x_0 + i\,\Delta x, \qquad 0 = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} = 1$$
$$(1/(\Delta x)^2)u_{i-1} - (2/(\Delta x)^2)u_i + (1/(\Delta x)^2)u_{i+1} = f_i$$
$$\Longrightarrow \quad bu_{i-1} + au_i + bu_{i+1} = f_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

onde

$$a = -2/(\Delta x)^2, \quad b = 1/(\Delta x)^2, \quad f_i = f(x_i)$$

Método SOR:

$$u_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a}\left(f_i - \, b\, u_{i-1}^{(k+1)} - \, b\, u_{i+1}^{(k)}\right) + \frac{1-\omega}{a} u_i^{(k)}$$

Considere $n = 10$, $f(x) = x$
$\Rightarrow \Delta x = 0.1, \quad a = -200, \quad b = 100, \quad x_i = i\,\Delta x, \quad i = 0, 1, \cdots, n$

Escolha $0 < w < 2$ e $u_i^{(0)} = \frac{\omega}{a} f_i$, onde $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \cdots, n$. Calcula os vetores $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $\cdots$ até que algum critério de convergência seja satisfeito.

Observe que a matriz resultante é tridiagonal neste caso.

# Bibliografia

[1] Borse, G.J., "Numerical Methods with MATLAB - A Resource for Scientists and Engineers", PWS PublishingCompany, Boston, 1997.

[2] Barret, R, et al., "Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods", SIAM, 1994.

[3] C. Chapa e Raymond P. Canale, "Métodos Numéricos para Engenharia", Steven Ed. McGraw-Hill, $5^a$ Ed., 2008.

[4] Golub, G. and Van Loan, C., "Matrix Computations", The John Hopkins University Press,1993.

[5] Saad, Y., "Iterative Methods for Sparse Linear Systems", PWS Publishing Company, 1996.

[6] Dongarra, J.J., Duff, I.S., Sorasen, D.C., Van der Vorst, H.A.,"Numerical Linear Algebra for High-Performance Computers", SIAM, 1998.