Aproximações e Erros

Andréa M. P. Valli

Laboratório de Computação de Alto Desempenho (LCAD)
Departamento de Informática
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Vitória, ES, Brasil

Aproximações e Erros

- Programação e Software: neste curso serão utilizadas as linguagens estruturadas C ou Fortran para a implementação dos métodos estudados. Além disso, será utilizado o software octave (ou MATLAB) para a implementação e resolução de problemas em engenharia.
- Custo Computacional: tempo computacional e memória. O objetivo de uma implementação eficiente de um algoritmo numérico é tentar reduzir, sempre que for possível, o tempo computacional (número de operações de ponto flutuante) e a utilização da memória. Em geral, isto define a escolha do algoritmo numérico a ser implementado.

- Algarismos Significativos [2]: O conceito de um algarismo significativo foi desenvolvido para designar formalmente a confiabilidade de um valor numérico. Os algarismos significativos de um número são aqueles que podem ser usados com confiança. Eles correspondem ao número de algarismos corretos mais um algarismo estimado.

Exemplos:

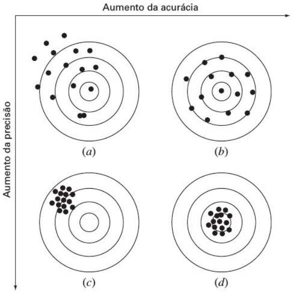
1. 51.5 tem três alg. signif.;
2. 0.0001163, 0.001163 e 0.01163 têm quatro alg. signif.;
3. 3.100 pode ter dois, três ou quatro alg. signif., dependendo de os zeros serem conhecidos com confiança;
4. 4.69×10^4, 4.690×10^4, 4.6900×10^4 designam que o número é conhecido com três, quatro ou cinco algarismos significativos, respectivamente.

O conceito de algarismos significativos tem duas implicações importantes [2]:

1. Como os métodos numéricos fornecem resultados aproximados, é necessário especificar quantos algarismos significativos a aproximação é considerada aceitável.
2. Como os computadores mantêm apenas um número finito de algarismos significativos, números como π ou $\sqrt{7}$ jamais podem ser representados exatamente. A omissão dos algarismos significativos remanescentes é chamada de erro de arredondamento.

- Acurácia e Precisão [2]: Os erros associados tanto aos cálculos quanto às medidas podem ser caracterizados com relação a sua acurácia e precisão. A acurácia se refere a quão próximo o valor calculado ou medido está do valor verdadeiro. A precisão se refere a quão próximos os valores individuais calculados ou medidos estão uns dos outros.

FIGURA 3.2
Um exemplo do tiro ao alvo ilustrando os conceitos de acurácia e precisão. (*a*) Inacurado e impreciso; (*b*) acurados e impreciso; (*c*) inacurado e preciso; (*d*) acurado e preciso.



Tipos de Erros que aparecem na modelagem numérica:

1. Erros na modelagem: erros obtidos pelo uso de dados experimentais errados ou pela própria representação matemática errada de um modelo físico.
2. Erros de truncamento: é o erro devido à aproximação de uma fórmula por outra, ou seja, quando são feitas aproximações para representar procedimentos matemáticos exatos.

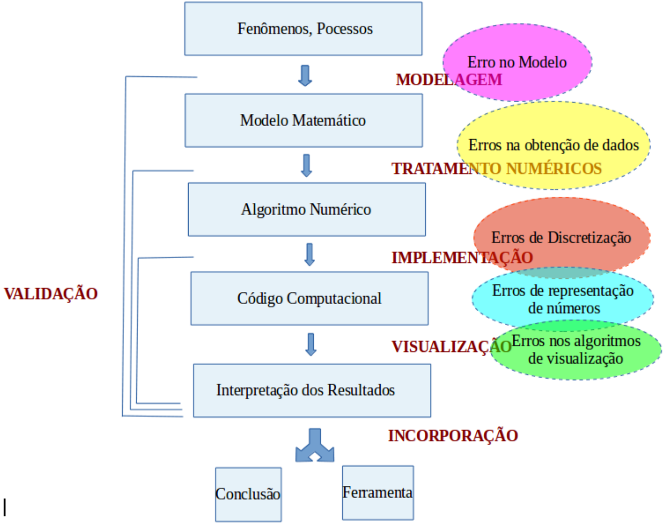
   Exemplo: $sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

   $$\hat{u}_h : \text{solução aproximada}, \quad u : \text{solução exata}$$

   $$|u - \hat{u}_h| \leq \epsilon \text{ (Erro Absoluto)} \quad \text{e} \quad \frac{|u - \hat{u}_h|}{|u|} \leq \epsilon \text{ (Erro Relativo)}$$

3. Erros de arredondamento (ou de ponto flutuante): é o erro causado pela imperfeição na representação de um número, ou seja, quando uma quantidade limitada de algarismos significativos são usados para representar números.

Erros no Processo de Solução



Aritmética de ponto flutuante é a aritmética usada nos computadores, ou seja, como os números são representados, armazenados e operados em um computador (ou um sistema de ponto flutuante).

Definição: um número $x \in \Re$ é um número de ponto flutuante se

$$x = \pm .d_1 d_2 \cdots d_p \times B^e$$

where

$$\begin{aligned} B &= \text{valor da base (geralmente 2,8,10 ou 16)} \\ d_{i's} &= \text{dígitos da parte fracionária (ou mantissa)} \\ p &= \text{número de dígitos na mantissa,} \\ & \quad d_1 \neq 0,\ 0 \leq d_i \leq B-1,\ i = 2, \cdots, p \\ e &= \text{expoente inteiro} \\ \pm &= \text{sinal do número} \end{aligned}$$

Um sistema de ponto flutuante pode ser representado por

$$F = F(B, p, e_1, e_2),$$

onde $e_1, e_2 =$ menor e maior expoente.

A quantidade de elementos no sistema de ponto flutuante $F(B, p, e_1, e_2)$ pode ser calculada e é dada por:

$$\#F = 2(B-1)(B^{p-1})(e_2 - e_1 + 1) + 1$$

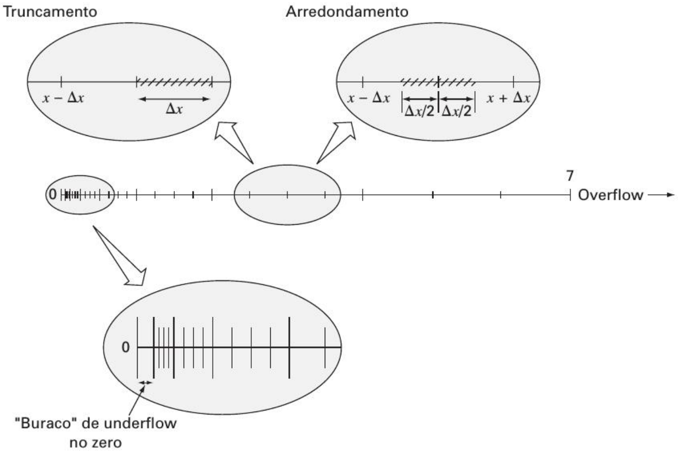
Observação: a quantidade de números que um sistema de ponto flutuante (ou um computador) consegue representar é sempre finita.

Exemplo: $F(10, 5, -2, 3)$,
$\Rightarrow B = 10, p = 5, e_1 = -2, e_2 = 3, \Rightarrow e = -2, -1, 0, 1, 2, 3$

45.327	representação de ponto fixo
$+.45327 \times 10^2$	representação de ponto flutuante
178.235	representação de ponto fixo
$+.17824 \times 10^3$	representação de ponto flutuante, arredondamento
$+.17823 \times 10^3$	representação de ponto flutuante, truncamento

$$\begin{aligned}
|\text{menor número}| &= +.10000 \times 10^{-2} = 0.001 = 10^{-3} \\
|\text{maior número}| &= +.99999 \times 10^{3} = 999.99 \\
\text{região de overflow} &= (-\infty, -999.99) \cup (999.99, +\infty) \\
\text{região de underflow} &= (-10^{-3}, 0) \cup (0, +10^{-3}) \\
\#F &= 2(10-1)(10^{5-1})(3-(-2)+1)+1 \\
&= 1,080,001
\end{aligned}$$

Sistema de Ponto Flutuante [2]: apenas os números positivos estão mostrados; existe um conjunto idêntico na direção negativa.



Seja maior = maior valor positivo e menor = menor valor positivo de um sistema de ponto flutuante $F(B, p, e_1, e_2)$.

- Intervalo limitado: (-maior,-menor) $\cup$ $\{0\}$ $\cup$ (menor,maior).
- Região de underflow = (-menor,0) $\cup$ (0,+menor) e região de overflow = (-∞,-maior) $\cup$ (maior,+∞). Mensagem de erro = NAN (*not a number*).
- *Existe apenas um número finito de valores que podem ser representados dentro do intervalo.*
- *Fontes de erros: arredondamento e truncamento, operações de ponto flutuante. No curso, usaremos arredondamento.*
- *Para melhorar a precisão precisamos aumentar o número de algarismos significativos, ou seja, o número de algarismos na matissa.*

Mudança de Base:

- $2 \rightarrow 10$:

$$
\begin{aligned}
(11.001)_2 &= 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^{-3} \\
&= 1 + 2 + \frac{1}{8} = \frac{25}{8} \\
(0.1101)_2 &= 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-4} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{13}{16} \\
(0.1 \times 2^{-3})_2 &= (0.0001)_2 = 1 \times 2^{-4} = \frac{1}{16} \\
(1.11 \times 2^2)_2 &= (111.)_2 = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^2 \\
&= 1 + 2 + 4 = 7
\end{aligned}
$$

- $10 \rightarrow 2$:

Exemplo: $21.78125 = (10101.11001)_2$

$$
\begin{aligned}
21/2 &= 10 \times 2 + 1 \\
10/2 &= 5 \times 2 + 0 \\
5/2 &= 2 \times 2 + 1 \\
2/2 &= 1 \times 2 + 0 \\
&\rightarrow (10101.)_2 \\
&\quad \text{verificando} \\
&= 1 \times 2^0 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^4 \\
&= 1 + 4 + 16 = 21
\end{aligned}
$$

- $10 \to 2$:

$$21.78125 = (10101.11001)_2 = +.1010111001 \times 2^5$$

$$\begin{aligned}
0.78125 \times 2 &= 1.56250 \\
0.56250 \times 2 &= 1.12500 \\
0.12500 \times 2 &= 0.25000 \\
0.25000 \times 2 &= 0.50000 \\
0.50000 \times 2 &= 1.00000 \\
&\to (.11001)_2 \\
&\ \text{verificando} \\
&= 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-5} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} = \frac{25}{32} = .78125
\end{aligned}$$

$$0.6 = (0.1001100110011\cdots)_2$$

Exemplo de um computador (sistema de ponto flutuante):

$$F(2,2,-1,2), \Rightarrow B=2, p=2, e_1=-1, e_2=2 \Rightarrow e=-1,0,1,2$$

$$\begin{aligned}
& (.10\times 2^{-1})_2, (.10\times 2^{0})_2, (.10\times 2^{1})_2, (.10\times 2^{2})_2 \\
& (.11\times 2^{-1})_2, (.11\times 2^{0})_2, (.11\times 2^{1})_2, (.11\times 2^{2})_2 \\
= \;& \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\text{menor número}| &= (.10\times 2^{-1})_2 = (0.01)_2 = 1\times 2^{-2} = \frac{1}{4} \\
|\text{maior número}| &= (.11\times 2^{2})_2 = (11.)_2 = 1\times 2^{0} + 1\times 2^{1} = 3 \\
\text{região de overflow} &= (-\infty,-3)\cup(3,+\infty) \\
\text{região de underflow} &= (-\frac{1}{4},0)\cup(0,\frac{1}{4}) \\
\#F &= 2(2-1)(2^{2-1})(2-(-1)+1)+1 \\
&= 2(1)(2)(4)+1 = 17
\end{aligned}$$

Erros de arredondamento (ou ponto flutuante):

$$
\begin{aligned}
0.6 &= (0.1\textcolor{blue}{0011}0011\textcolor{blue}{0011}\cdots)_2 \\
\frac{1}{4}+\frac{3}{2} &= \frac{7}{4} = 1.75 \\
&= (0.10\times 2^{-1})_2 + (0.11\times 2^{1})_2 \\
&= (0.001\times 2^{1})_2 + (0.11\times 2^{1})_2 \\
&= (0.111\times 2^{1})_2 \\
&\rightarrow \text{número entre } (0.11\times 2^{1}) = 1.5 \text{ e } (0.10\times 2^{2})_2 = 2 \\
&\rightarrow Erro = 0.25
\end{aligned}
$$

Formato proposto pela IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) para um computador de 32 *bits* (*precisão simples*)

Definição: a palavra $(b_1, b_2, \cdots, b_{32})$ *pode ser interpretada como o número real*

$$(-1)^{b_1} \times 2^{(b_2, b_3, \cdots, b_9)} \times 2^{-127} \times (1.b_{10} b_{11} \cdots b_{32})$$

Observações:

- *Um (1) bit é reservado para o sinal.*
- *Oito (8) bits são reservados para o expoente.*
  $\rightarrow$ *como* $(11111111.)_2 =$ *255,* $\Rightarrow 0 \leq e \leq 255$
  $\rightarrow -127 \leq e - 127 \leq 128$
  $\rightarrow$ *-127, 128 são reservados* $(0, \infty)$
  $\rightarrow$ *expoente máximo: 127*
  $\rightarrow$ *expoente mínimo: -126*

- Vinte e três (23) *bits são reservados para a mantissa. Como o primeiro bit não precisa ser armazenado porque é sempre 1*
  $\Rightarrow$ *temos 24 dígitos na mantissa*
  $\rightarrow 2^{-24} = 0.596 \times 10^{-7}$
  $\rightarrow$ *sete (7) dígitos decimais*
  $\rightarrow$ *no máximo 7 casas de precisão*
- *Precisão:*

  $\Rightarrow$*simples (float): 7 dígitos significativos*

  $\Rightarrow$*dupla (double): 16 dígitos significativos*

  $\Rightarrow$*estendida (long double): 19 dígitos significativos*

- *Maior e menor números:* 1.18×10^{-38} *e* 3.4×10^{38}

Exemplo: indicar como o número 21.78125 é armazenado em um computador de 32 *bits*

$$
\begin{aligned}
21.78125 &= (10101.11001)_2 = +.1010111001 \times 2^5 \\
&= +1.010111001 \times 2^4 \\
e - 127 = 4 &\Rightarrow e = 131 = (10000011)_2 \\
&\Rightarrow [{\color{blue}0}10000011{\color{red}010111001\cdots}]
\end{aligned}
$$

Tabela: Formatos da IEEE 754-1985.

tipo	bits	intervalo	precisão
single precision	32	$\pm 1.18 \times 10^{-38}$ a $\pm 3.4 \times 10^{38}$	$\simeq 7$
double precision	64	$\pm 2.23 \times 10^{-308}$ a $\pm 1.80 \times 10^{308}$	$\simeq 16$

Bibliografia Básica

[1] Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.

[2] Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

[3] Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, Márcia A. G. Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, Ed. Pearson Education, 2ª Ed., 1996.