

Sistemas Lineares - Decomposição LU

Andréa Maria Pedrosa Valli

Laboratório de Computação de Alto Desempenho (LCAD)
Departamento de Informática
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Vitória, ES, Brasil

Decomposição LU

- ① Idéia do método
- ② Aplicações
- ③ Forma matricial da fatoração LU
- ④ Algoritmo

- Fatoração LU da matriz A **permutada**:

$$\Rightarrow PA = LU$$

onde

P é uma matriz de **permutação** de linhas

L é uma matriz **triangular inferior** unitária ($l_{ii} = 1, \forall i$)

U é uma matriz **triangular superior**

Exemplo 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} L_1 \longleftrightarrow L_2 \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - (4/8)L_1 \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4/8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = LU$$



• Processo de **Substituição**:

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow LUX = Pb$$

$$Ux = y, \text{ então } Ly = Pb$$

- ① $Ly = Pb$, Substituição **Progressiva** e determino y ;
- ② $Ux = y$, Substituição **Regressiva** e determino a solução x .

Exemplo 2×2 : $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix}$, solução exata = $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4/8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 1/2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Cálculo do **determinante**: $PA = LU \rightarrow \det(PA) = \det(LU)$,
então, pela propriedade de determinantes,

$$\det(A) = \frac{\det(L)\det(U)}{\det(P)},$$

onde

$$\det(L) = 1$$

$$\det(U) = \prod_{i=1}^n u_{ii} \quad (\text{produto dos pivôs})$$

$$\det(P) = (-1)^t \quad \text{onde } t \text{ é o número de permutações}$$

$$\Rightarrow \det(A) = (-1)^t \prod_{i=1}^n u_{ii}$$

- Cálculo da **inversa**: $[A] [A]^{-1} = [A]^{-1} [A] = [I]$

Exemplo 3×3 : $[A] [A]^{-1} = [I] = \text{matriz identidade}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 1 Fatoração LU de A : $PA = LU$
- 2 Resolve $LU \vec{x}_j = P I_j$, $j = 1, 2, 3$, onde

$$\vec{x}_j = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ x_{3j} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_j = j\text{-ésima coluna de } [I]$$

- Estudo da deformação de uma viga em balanço carregada por uma força F .

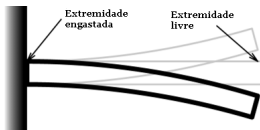


Figura: Viga em balanço (autor:Lechatjaune)

O problema discretizado por um método de aproximação produz um sistema de equações lineares do tipo $Ax = b$, onde b depende do valor da força F aplicada. No estudo da deformação temos que resolver n sistemas do tipo $Ax = b_i$ para $i = 1, \dots, n$. Solução:

- 1 Fatoração LU de A: $PA = LU$
- 2 Resolve $LUx = Pb_i$, $i = 1, \dots, n$

$$\text{Exemplo } 3 \times 3: A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} L_1 \longleftrightarrow L_2 \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 - (3/5)L_1 \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 7/5 & -18/5 \\ 0 & -16/5 & 19/5 \end{bmatrix} L_2 \longleftrightarrow L_3$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - (1/5)L_1$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -16/5 & 19/5 \\ 0 & 7/5 & -18/5 \end{bmatrix} \Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - (-7/16)L_2 \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -16/5 & 19/5 \\ 0 & 0 & -31/16 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & -7/16 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -16/5 & 19/5 \\ 0 & 0 & -31/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} = P A$$

- $L_1 \longleftrightarrow L_2$: $P_1 A = A_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

- $L_2 \leftarrow L_2 - (3/5)L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - (1/5)L_1$: $M_1 A_1 = A_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 7/5 & -18/5 \\ 0 & -16/5 & 19/5 \end{bmatrix}$$

- $L_2 \longleftrightarrow L_3$: $P_2 A_2 = A_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 7/5 & -18/5 \\ 0 & -16/5 & 19/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -16/5 & 19/5 \\ 0 & 7/5 & -18/5 \end{bmatrix}$$



$$\bullet L_3 \leftarrow L_3 - (-7/16)L_2 : M_2 A_3 = U$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7/16 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -16/5 & 19/5 \\ 0 & 7/5 & -18/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -16/5 & 19/5 \\ 0 & 0 & -31/16 \end{bmatrix}$$

Cálculo de P e L :

$$\Rightarrow M_2 P_2 M_1 P_1 A = U$$

$$\Rightarrow M_2 P_2 M_1 ((P_2)^{-1} P_2) P_1 A = U$$

$$\Rightarrow (M_2 P_2 M_1 (P_2)^{-1}) (P_2 P_1) A = U$$

$$\Rightarrow (P_2 P_1) A = (M_2 P_2 M_1 (P_2)^{-1})^{-1} U$$

$$\Rightarrow P = P_2 P_1$$

$$\Rightarrow L = (M_2 P_2 M_1 (P_2)^{-1})^{-1}$$

$$\textcircled{1} (P_2)^{-1} = P_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} (M_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ onde } M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \tilde{M}_1 &= P_2 M_1 P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1 & 0 \\ -3/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} L = (M_2 P_2 M_1 P_2)^{-1} = (M_2 \tilde{M}_1)^{-1} = (\tilde{M}_1)^{-1} (M_2)^{-1}$$

Fatores P e L :

$$\bullet P = P_2 P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet L = (\tilde{M}_1)^{-1} (M_2)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7/16 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & -7/16 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Exemplo } 3 \times 3: \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ sol. exata} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolver pelo método de decomposição LU com três casas decimais.

1) **Fatoração LU :**

$$L_1 \longleftrightarrow L_2 \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - (0.6)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (0.2)L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0.6 & 1.4 & -3.6 \\ 0.2 & -3.2 & 3.8 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \longleftrightarrow L_3 \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0.2 & -3.2 & 3.8 \\ 0.6 & 1.4 & -3.6 \end{bmatrix} \Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - (-0.438)L_2$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0.2 & -3.2 & 3.8 \\ 0.6 & -0.438 & -1.938 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0.2 & -3.2 & 3.8 \\ 0.6 & -0.438 & -1.938 \end{bmatrix}$$



Cálculo do **vetor** de permutação:

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad L_1 \longleftrightarrow L_2 \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad L_2 \longleftrightarrow L_3 \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2) Processo de **Substituição**: $PAx = Pb \longrightarrow L U x = Pb$

1) $Ly = Pb$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0.6 & -0.438 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b[p[1]] \\ b[p[2]] \\ b[p[3]] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b[2] \\ b[3] \\ b[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0.6 \\ -1.937 \end{bmatrix}$$

2) $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -3.2 & 3.8 \\ 0 & 0 & -1.938 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0.6 \\ -1.937 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.999 \\ 0.999 \end{bmatrix}$$

Cálculo do resíduo: $r = b - A\tilde{x}$, onde \tilde{x} é a solução aproximada.

$$r = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.999 \\ 0.999 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.001 \\ 0.002 \\ 0.001 \end{bmatrix}$$

Exemplo: sistema 4×4

$$\begin{bmatrix} -3 & 8 & -2 & 3 \\ 7 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}, \text{ sol. exata} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Primeiro Passo: Escolher o pivô (a_{11}), trocar linhas e eliminar os coeficientes da primeira coluna abaixo da diagonal

$$L_1 \longleftrightarrow L_2 \quad \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 8 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - (-3/7)L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - (-2/7)L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - (1/7)L_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ -0.429 & 7.571 & -1.143 & 4.286 \\ -0.286 & 2.714 & 1.571 & 6.857 \\ 0.143 & -1.857 & 5.714 & 1.571 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ -0.429 & 7.571 & -1.143 & 4.286 \\ -0.286 & 2.714 & 1.571 & 6.857 \\ 0.143 & -1.857 & 5.714 & 1.571 \end{bmatrix}$$

Segundo Passo: Escolher o pivô (a_{22}), trocar linhas e eliminar os coeficientes da segunda coluna abaixo da diagonal

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ -0.429 & 7.571 & -1.143 & 4.286 \\ -0.286 & 2.714 & 1.571 & 6.857 \\ 0.143 & -1.857 & 5.714 & 1.571 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} L_3 &\leftarrow L_3 - (2.714/7.571)L_2 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - (-1.857/7.571)L_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ -0.429 & 7.571 & -1.143 & 4.286 \\ -0.286 & 0.358 & 1.981 & 5.321 \\ 0.143 & -0.245 & 5.434 & 2.623 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ -0.429 & 7.571 & -1.143 & 4.286 \\ -0.286 & 0.358 & 1.981 & 5.321 \\ 0.143 & -0.245 & 5.434 & 2.623 \end{bmatrix}$$

Terceiro Passo: Escolher o pivô (a_{33}), trocar linhas e eliminar os coeficientes da terceira coluna abaixo da diagonal

$$L_3 \longleftrightarrow L_4 \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ -0.429 & 7.571 & -1.143 & 4.286 \\ 0.143 & -0.245 & 5.434 & 2.623 \\ -0.286 & 0.358 & 1.981 & 5.321 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - (1.981/5.434)L_3 \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ -0.429 & 7.571 & -1.143 & 4.286 \\ 0.143 & -0.245 & 5.434 & 2.623 \\ -0.286 & 0.358 & 0.365 & 4.365 \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ -0.429 & 7.571 & -1.143 & 4.286 \\ 0.143 & -0.245 & 5.434 & 2.623 \\ -0.286 & 0.358 & 0.365 & 4.365 \end{bmatrix}$$

Cálculo do **vetor** de permutação:

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad L_1 \longleftrightarrow L_2 \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad L_3 \longleftrightarrow L_4 \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow p = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P b = \begin{bmatrix} b[2] \\ b[1] \\ b[4] \\ b[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Processo de **Substituição**: $PAx = Pb \longrightarrow L U x = Pb$

1) $Ly = Pb$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.429 & 1 & 0 & 0 \\ 0.143 & -0.245 & 1 & 0 \\ -0.286 & 0.358 & 0.365 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.000 \\ 10.719 \\ 8.053 \\ 4.369 \end{bmatrix}$$

2) $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 7.571 & -1.143 & 4.286 \\ 0 & 0 & 5.434 & 2.623 \\ 0 & 0 & 0 & 4.365 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.000 \\ 10.719 \\ 8.053 \\ 4.369 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 0.999 \\ 1.001 \end{bmatrix}$$

Cálculo do **Resíduo**: $R = b - Ax$

$$R = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 8 & -2 & 3 \\ 7 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 0.999 \\ 1.001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.005 \\ -0.001 \\ -0.005 \\ 0.004 \end{bmatrix}$$

Observação: Na fatoração LU, como na eliminação de Gauss, todos os multiplicadores são em módulo menores ou iguais a 1 por causa do pivoteamento parcial. Além disso, a solução obtida é exata a menos dos erros de ponto flutuante, ou seja, o resíduo é bem pequeno e da ordem dos número de casas decimais utilizada nos cálculos.

Pseudocódigo para a implementação da decomposição LU [2]:

```

SUB Ludecomp (a, b, n, tol, x, er)
  DIM on, sn
  er = 0
  CALL Decompose(a, n, tol, o, s, er)
  IF er < -1 THEN
    CALL Substitute(a, o, n, b, x)
  END IF
END Ludecomp

SUB Decompose (a, n, tol, o, s, er)
  DOFOR i = 1, n
    oi = i
    si = ABS(ai,1)
    DOFOR j = 2, n
      IF ABS(ai,j) > si THEN si = ABS(ai,j)
    END DO
  END DO
  DOFOR k = 1, n - 1
    CALL Pivot(a, o, s, n, k)
    IF ABS(ao(k),k/so(k)) < tol THEN
      er = -1
      PRINT ao(k),k/so(k)
      EXIT DO
    END IF
    DOFOR i = k + 1, n
      fator = ao(i),k/ao(k),k
      ao(i),k = fator
      DOFOR j = k + 1, n
        ao(i),j = ao(i),j - fator * ao(k),j
      END DO
    END DO
  END DO
  IF ABS(ao(n),n/so(n)) < tol THEN
    er = -1
    PRINT ao(n),n/so(n)
  END IF
END Decompose

SUB Pivot (a, o, s, n, k)
  p = k
  maior = ABS(ao(k),k/so(k))
  DOFOR ii = k + 1, n
    dummy = ABS(ao(ii),k/so(ii))
    IF dummy > maior THEN
      maior = dummy
      p = ii
    END IF
  END DO
  dummy = op
  ok = op
  op = dummy
END Pivot

SUB Substitute (a, o, n, b, x)
  DOFOR i = 2, n
    soma = bo(i)
    DOFOR j = 1, i - 1
      soma = soma - ao(i),j * bo(j)
    END DO
    bo(i) = soma
  END DO
  xn = bo(n)/ao(n),n
  DOFOR i = n - 1, 1, -1
    soma = 0
    DOFOR j = i + 1, n
      soma = soma + ao(i),j * xj
    END DO
    xi = (bo(i) - soma)/ao(i),i
  END DO
END Substitute

```

FIGURA 10.2

Bibliografia Básica

[1] Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.

[2] Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

[3] Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, Márcia A. G. Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, Ed. Pearson Education, 2ª Ed., 1996.