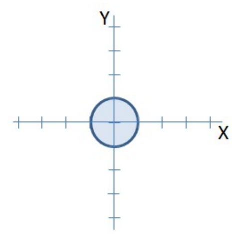
Ficha de Consolidação I

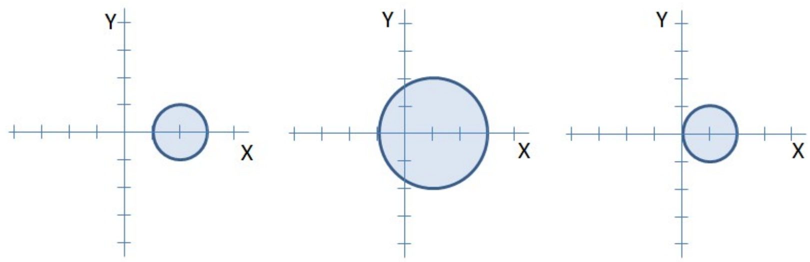
Transformações Geométricas

1. Considere uma primitiva gráfica para desenhar uma esfera com centro na origem e raio unitário, e a aplicação da seguinte sequência de transformações geométricas à esfera:

```
glScale(2,2,2);
glTranslate(1,0,0);
glScale(0.5, 0.5, 0.5);
esfera();
```



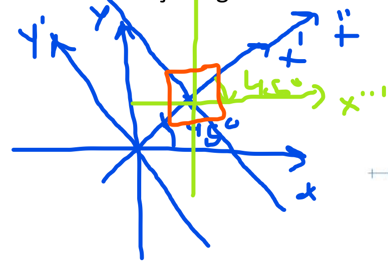
Qual das seguintes opções corresponde à esfera transformada? Justifique, indicando cada um dos passos intermédios.

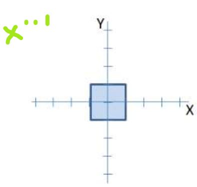


a) b) c)

2. Considere uma primitiva gráfica para desenhar um cubo com centro na origem e lado com dimensão de 2 unidades, e a seguinte sequência de transformações geométricas a aplicar ao cubo:

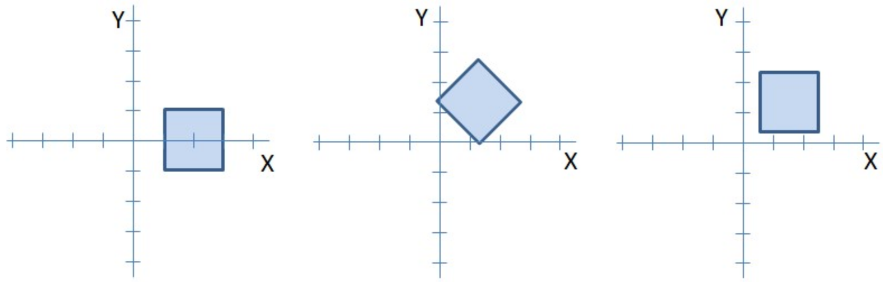
```
glRotate(45, 0.0, 0.0, 1.0);
gltranslate(2.0 , 0.0 , 0.0);
glRotate(-45, 0.0, 0.0, 1.0);
```



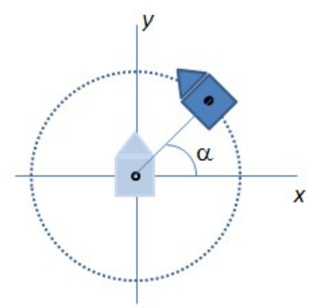


Qual das seguintes opções corresponde ao cubo transformado? Justifique, indicando cada um dos passos intermédios.

Primeiro rodámos o referencial 45º em torno do eixo z; depois efetuamos uma translação do referencial segundo o vetor(2,0,0). Por último rodámos -45º em torno do eixo z. Logo, a opção correta é a última.



3. Considere o objecto “casa” que por omissão é desenhado centrado na origem (casa clara). Considere que se pretende colocar o objecto na circunferência de raio unitário, com centro na origem, como ilustrado na figura (casa escura). Escreva os parâmetros das seguintes alternativas de sequências de transformações geométricas para obter o resultado pretendido:



a) glTranslate(cos(a), sin(a), 0);
glRotate(a , 0 , 0 , 1);
desenhaCasa();

b) glRotate(a , 0 , 0 , 1);
glTranslate(1 , 0 , 0);
desenhaCasa();

4. Considere um conjunto matrizes representativas de transformações geométricas 3D básicas, em que translações são representados por T_i, rotações por R_i, e escalas por S_i. Para cada afirmação que se segue indique se é verdadeira ou falsa. Apresente um contra-exemplo para as afirmações falsas e um exemplo ilustrativo para as verdadeiras.

i. $T_1 \times R_1 = R_1 \times T_1$

i. Falso . T1 = [1001
0100
0010
0001]

R(z)1 = [cos 45 -sin45 0 0
sin 45 cos 45 0 0
0 0 1 0
0 0 0 1]

ii. $T_1 \times S_1 = S_1 \times T_1$

ii. Falso. T1=[1001
0100
0010
0001]

S1 = [2 0 0 0
0 2 0 0
0 0 2 0
0 0 0 1]

iii. $T_1 \times T_2 = T_2 \times T_1$

iii. Verdadeiro. T1= [1 0 0 a
0 1 0 b
0 0 1 c
0 0 0 1]

T2= [1 0 0 d
0 1 0 e
0 0 1 f
0 0 0 1]

T1*T2 = T2*T1

iv. Para cada par (T_1, S_1) existe um par (T_2, S_2), tal que $T_1 \times S_1 = S_2 \times T_2$

Falso. T1(t1x,t1y,t1z) * S1(s1x,s1y,s1z) = S2(s1x,s1y,s1z) * T2(t1x/s1x,t1y/s1y,t1z/s1z) é falsa quando (t1x=0 e s1x !=0) || (t1y=0 e s1y !=0) || (t1z=0 e s1z !=0)

v. $R_1 \times R_2 = R_2 \times R_1$

Falso. As rotações são sempre comutativas quando sobre os mesmos eixos, no entanto quando são em eixos diferentes não é o caso.R1x(45)*R2z(45) =Falso.T1 = [cos 45 -sin45 0
cos45*sin45 cos45*cos45 -sin45
sin45*sin45 sin45*cos45 cos45]

R2z(45)*R1z(45) = [cos 45 -sin45*cos45 sin45*sin45
sin 45 cos45*cos45 -sin45*cos45
0 sin45 cos45]

5. Considere a matriz A, obtida após uma sequência de transformações geométricas. Indique a sequência <u>incorrecta</u> para gerar a matriz A a partir da matriz identidade.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a)
```
glTranslatef(2, 2, 2);
glScalef(2, 2, 2);
```

b)
```
glScalef(2, 2, 2);
glTranslatef(1, 1, 1);
```

c)
```
glScalef(2, 2, 2);
glTranslatef(2, 2, 2);
```

---

6. A composição de transformações geométricas é em certos casos comutativa, embora no caso geral não o seja.

a. Mostre geometricamente que a composição de transformações geométricas compostas exclusivamente por translações é comutativa.

b. Mostre algebricamente que a composição de transformações geométricas compostas exclusivamente por escalas é comutativa.

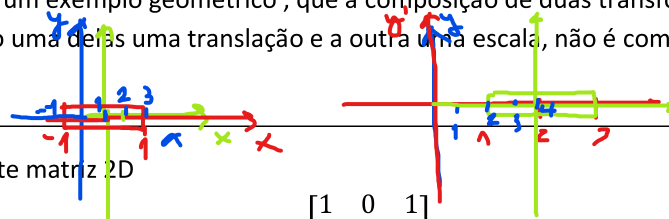
S1 = [a 0 0
0 b 0
0 0 c]

S2 = [d 0 0
0 e 0
0 0 f]

S2S1=S1S2=[ad 0 0
0 be 0
0 0 cf]

c. Mostre, através de um exemplo geométrico , que a composição de duas transformações geométricas, sendo uma delas uma translação e a outra uma escala, não é comutativa.

t1(1,0,0)
s1(2,0,0)

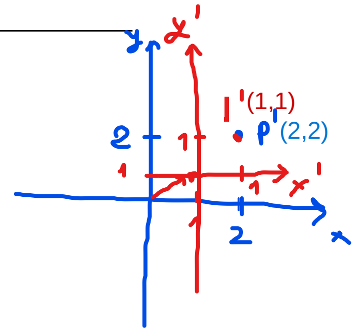


---

7. Considere a seguinte matriz 2D

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

p' = Mp = $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



a) Desenhe o sistema de coordenadas global e local (após transformação)

b) Desenhe o ponto p(1,1) e a sua transformação (p'=Mp). Verifique que o ponto transformado tem coordenadas (1,1) no sistema local de coordenadas.

---

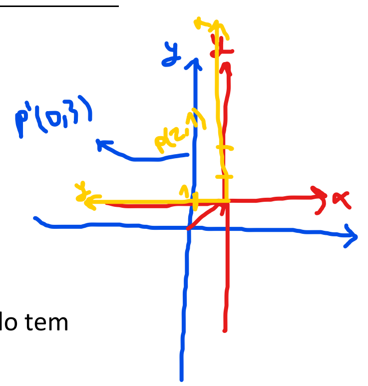
8. Considere a seguinte matriz 2D

-1 = - sin(a) => a = 90º

R.S   T

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$



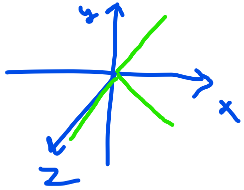
a) Aplique a matrix ao ponto (2,1).

b) Desenhe o sistema de coordenadas global e local (após transformação)

c) Desenhe o ponto (2,1) e a sua transformação. Verifique que o ponto transformado tem coordenadas (2,1) no sistema local de coordenadas.

---

9. Construa a matrix de rotação em torno do eixo do Z com um ângulo de 45º.



$$Rz(45) = \begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$Rz(45) = \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 0 & 0 \\ \sin 45 & \cos 45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 0.707 \\ 0.707 \\ 0.707 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M\text{-}1 = \begin{bmatrix} \cos 45 & \sin 45 & 0 & 0 \\ -\sin 45 & \cos 45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como os vetores da matriz são perpendiculares entre si e as suas normas são iguais a 1, a matriz é ortogonal pelo que M-1 = Mt (inversa é igual à transposta)

a) Aplique a matrix ao ponto (0.707,0.707,0).
b) Sem realizar cálculos, calcule a inversa da matrix construída.
c) Aplique a inversa ao ponto transformado e verifique que o resultado é o ponto original

$$M\text{-}1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.707 \\ 0.707 \\ 0.707 \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

10. Considere o ponto $p(1,2,3)$ e o ponto $q(3,4,3)$.

a) Defina uma matriz de escala S tal que $q = Sp$
b) Defina uma matriz de translação T tal que $q = Tp$

$$q = \begin{pmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} sx = 3 \\ 2 * sy = 4 \iff sy = 2 \\ 3 * sz = 3 \iff sz = 1 \end{cases}$$

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & tx \\ 0 & 1 & 0 & ty \\ 0 & 0 & 1 & tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1+tx = 3 <=> tx=2
2 +ty = 4 <=> ty=2
3 + tz = 3 <=> tz=0

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$