

# Matemática Discreta

Ano Lectivo 2014/2015

## Folha de exercícios nº1 (Cálculo Proposicional)

1. Diga, justificando, se as seguintes frases são ou não proposições. Em caso afirmativo, indique o seu valor lógico.
  - (a) 100 é maior do que 10 ou 11 é um número primo.
  - (b) Para todo o número  $x$ , se  $x > 2$ , então  $x^2 + 5 > 3x$ .
  - (c) Entra e fecha a porta.
  - (d) Eu sugeri que entrasses e fechasses a porta.
  - (e) Para algum  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2^n = n^2$ .
  - (f)  $x - y = y - x$ .
  - (g) Para todos os números reais  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x + y = y + x$ .
  - (h) Para todo o número inteiro  $n$ , existe um número inteiro  $k$  tal que  $n + k = 0$ .
  - (i) Há vida em Marte.
2. Construa as tabelas de verdade das seguintes fórmulas lógicas (proposições compostas) e diga, justificando, quais delas correspondem a tautologias:
  - (a)  $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ ,
  - (b)  $p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$ ,
  - (c)  $[p \wedge (\neg p)] \Rightarrow q$ .
3. Supondo que  $p$  é uma proposição verdadeira,  $q$  uma proposição falsa,  $r$  uma proposição falsa e  $s$  uma proposição verdadeira, decida quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas:
  - (a)  $p \vee q$ .
  - (b)  $(r \wedge s) \vee q$ .
  - (c)  $\neg(p \wedge q)$ .
  - (d)  $\neg s \vee \neg r$ .
  - (e)  $r \vee (s \vee (p \wedge q))$ .
4. Escreva em termos de proposições compostas as afirmações seguintes indicando o respectivo valor lógico.
  - (a) Se  $e$  é número racional, então  $\sqrt{2}$  é um número irracional.
  - (b) É falso que  $\pi > 0$  se e só se  $\pi > 1$ .
  - (c) Se Montreal é a capital do Canadá, então o próximo mundial será realizado no Brasil.

5. Mostre que
  - (a)  $(p \wedge \neg p)$  é inconsistente; conclua ainda que é não válida.
  - (b)  $(p \vee \neg p)$  é válida; conclua ainda que é consistente.
  - (c)  $(p \Rightarrow \neg p)$  é não válida, ainda que seja consistente.
6. Usando tautologias apropriadas simplifique as proposições:
  - (a)  $p \vee [q \wedge (\neg p)]$ ;
  - (b)  $\neg[(\neg p) \wedge (\neg q)]$ ;
  - (c)  $[p \wedge q] \vee [p \wedge (\neg q)]$ .
7. Mostre que  $\neg(p \Rightarrow (q \vee r))$  implica logicamente  $\neg(p \Rightarrow q)$ .
8. Sendo  $p$ ,  $q$  e  $r$  três proposições dadas, verifique se as seguintes fórmulas são válidas:
  - (a)  $[(\neg p \vee q) \wedge p] \Rightarrow q$
  - (b)  $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow \neg q)] \Rightarrow [p \Rightarrow \neg r]$
  - (c)  $[(q \vee \neg p) \wedge \neg q] \Rightarrow p$
  - (d)  $[(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow \neg r) \wedge (\neg r \Rightarrow \neg p)] \Rightarrow [\neg(p \wedge q)]$
  - (e)  $[p \Rightarrow \neg p] \Rightarrow \neg p$
9. Mostre que cada uma das proposições
  - (a)  $(\neg p) \vee q$
  - (b)  $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$
  - (c)  $\neg[p \wedge (\neg q)]$
 é equivalente à implicação  $p \Rightarrow q$ .
10. A proposição  $p$  ou  $q$  mas não ambos designa-se por *ou exclusivo* e denota-se por  $p \dot{\vee} q$ .
  - (a) Determine a tabela de verdade de  $p \dot{\vee} q$  e, utilizando apenas os operadores lógicos  $\wedge$ ,  $\vee$  e  $\neg$ , encontre uma fórmula logicamente equivalente a  $p \dot{\vee} q$ .
  - (b) Mostre que  $p \dot{\vee} q$  é equivalente a  $\neg(p \Leftrightarrow q)$ .
  - (c) Averigüe se a fórmula proposicional  $p \dot{\vee} q \Leftrightarrow \neg p \dot{\vee} \neg q$  é ou não uma tautologia.
  - (d) Construa as tabelas de verdade para  $p \dot{\vee} p$ ,  $(p \dot{\vee} q) \dot{\vee} r$  e  $(p \dot{\vee} p) \dot{\vee} p$ .
11. Quatro indivíduos foram jantar a um restaurante, sentaram-se numa mesa quadrada com quatro lugares. Subitamente um deles gritou - Fui envenenado!! e caiu morto. Verificou-se que efectivamente houve assassínio. Os companheiros foram detidos e quando questionados pela polícia, sobre quem cometeu o crime, fizeram as seguintes afirmações. Cada um deles fez *exactamente uma afirmação falsa*.

- Artur:** Eu não o fiz.  
Eu estava sentado junto ao Gabriel.  
Nós fomos servidos pelo empregado de mesa habitual.
- José:** Eu estava sentado em frente ao Tiago.  
Nós fomos servidos por um novo empregado de mesa.  
O empregado de mesa não o fez.
- Gabriel:** O José não o fez.  
Foi o empregado de mesa que o fez.  
Artur mente quando diz que fomos servidos pelo empregado de mesa habitual.

Assumindo que o assassino foi, ou um e só um dos companheiros do Tiago ou o empregado de mesa, quem foi o assassino?

12. É possível que as seguintes afirmações sejam simultaneamente verdadeiras?
- (a) Se a dívida externa aumenta ou as taxas de juro descem, então os impostos são aumentados ou o desemprego diminui.
  - (b) Os impostos são aumentados se e só se a dívida externa aumenta e o desemprego diminui.
  - (c) Se as taxas de juro descem, então os impostos não são aumentados ou a dívida externa não aumenta.
  - (d) O desemprego diminui ou se as taxas de juro descerem os impostos são aumentados.

Das afirmações anteriores pode concluir-se que os impostos são aumentados?

13. Quatro indivíduos são suspeitos de terem cometido um crime. É sabido que um e só um deles cometeu o crime. Quando questionados pela polícia fizeram as seguintes afirmações.

- Artur:** Foi o José que cometeu o crime.  
**José:** Foi o Tiago que cometeu o crime.  
**Gabriel:** Eu não o fiz.  
**Tiago:** José mente quando diz que fui eu.

- (a) Se apenas uma destas afirmações for verdadeira, quem foi o criminoso?
- (b) Por outro lado, se apenas uma destas afirmações for falsa, quem foi o criminoso?

(**Sugestão:** Nas questões 11, 12 e 13 atribua variáveis proposicionais às afirmações envolvidas. Examine uma tabela de verdade com essas variáveis.)