Matemática Discreta

Ano Lectivo 2014/2015

Folha de exercícios nº5
Princípios de Enumeração Combinatória.
Permutações, agrupamentos e identidades combinatórias.

1. Sejam A e B dois conjuntos finitos. Mostre que

   (a) se A e B são conjuntos disjuntos então $|A \cup B| = |A| + |B|$;

   (b) $|A \times B| = |A| \times |B|$;

   (c) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

2. Construa uma bijecção entre o conjunto das diferentes partições do número k em n parcelas (não nulas) ordenadas de soma k e o conjunto de sequências binárias de $n-1$ zeros e $k-n$ uns.

3. Sejam A e B conjuntos tais que $|A| = 2$ e $|B| = 3$. Quantas funções podemos definir com conjunto de partida A e conjunto de chegada B? Se $|A|$=3 e $|B| = 2$, qual seria a resposta à pergunta anterior? Indique o princípio combinatório utilizado.

4. Determine o número de números pares compreendidos entre 0 e 100 e o número de números pares compreendidos entre 0 e 100 com dígitos distintos.

5. Com os algarismos 1, 2, 4, 6 e 8 quantos números ímpares de quatro algarismos diferentes se podem formar? E quantos números ímpares de quatro algarismos se podem formar?

6. De entre 100 pessoas que habitam um prédio, algumas separam o lixo para reciclagem. Na sequência de um inquérito realizado pela administração do condomínio, verificou-se que 45 inquilinos fazem separação do vidro, 27 separam papel, 31 separam plástico, 6 separam vidro e plástico, 10 separam vidro e papel, 6 separam papel e plástico e 3 separam vidro, papel e plástico. Utilizando o princípio de inclusão-exclusão, determine o número de inquilinos do prédio que não fazem qualquer separação do lixo para reciclagem.

7. Qual o número de números naturais inferiores a 1000 que não são divisíveis por 4 nem por 6 nem por 9?

8. Num universo de 200 estudantes, 50 estudam Matemática, 140 estudam Economia e 24 estudam ambos os cursos. Dos 200 estudantes, 60 são mulheres, das quais 20 estudam Matemática, 45 estudam Economia e 16 delas estudam ambos os cursos. Determine, para o universo de estudantes considerado, quantos homens é que não estudam nem Matemática nem Economia.

9. Considere as permutações $\rho = (7263145)$ e $\pi = (6325741)$.

   (a) Determine as composições $\pi \circ \rho$ e $\rho \circ \pi$.
   (b) Determine π^{-1} e ρ^{-1}.
   (c) Determine a partição cíclica de π e a partição cíclica de ρ.
   (d) Indique o tipo de permutação de π e o tipo de permutação de ρ.
   (e) Determine o tipo de paridade das permutações π e ρ.
   (f) Dermine o número de permutações do tipo $2^1 3^2 4^1$.

10. Considere as permutações $\pi = (5246731)$ e $\rho = (7326415)$.

   (a) Determine a composição $\pi \circ \rho$.
   (b) Determine π^{-1}.
   (c) Determine a partição cíclica de π.
   (d) Indique o tipo de permutação de π.
   (e) Dermine o número de permutações do tipo $1^2 2^2 4^1$.
   (f) Considere a permutação $\theta = (72618345)$, determine a partição cíclica de θ e indique o tipo de permutação de θ.

11. Considerando um alfabeto de 26 letras, quantas palavras de 5 letras podem ser formadas:

   (a) Sem qualquer restrição.
   (b) Contendo a letra **a**.
   (c) Com todas as letras distintas e contendo as letras **a** e **b**, em posições adjacentes com **a** a preceder **b**.
   (d) Com as vogais **a**, **i** e **u** a ocuparem as posições ímpares e as restantes posições a serem ocupadas por consoantes.

12. Um código é constituído por seis símbolos: três letras do alfabeto (de 26 letras) e três dígitos. Seja **X** o conjunto de todos os códigos possíveis. Determinar o número de elementos de **X** nas seguintes condições:

   (a) tanto as letras como os dígitos podem ser repetidos;
   (b) os dígitos não podem ser repetidos;
   (c) as letras não podem ser repetidas;
   (d) nem as letras nem os dígitos podem ser repetidos.
   (e) as letras são intercaladas com os dígitos (p. ex. $3a1b2c$).

13. A Assembleia da República é composta por 230 deputados dos quais 164 são homens e 66 são mulheres. De quantas maneiras se pode formar uma comissão de 10 deputados com 5 homens e 5 mulheres?

14. Qual o número de possibilidades de se distribuírem 8 presentes por 5 crianças, em cada uma das seguintes condições:

    (a) os presentes são todos iguais,

    (b) os presentes são todos distintos.

15. Suponha que tem 20 cartas idênticas e 12 envelopes. De quantas maneiras pode colocar as cartas nos envelopes admitindo que deve haver pelo menos uma carta em cada envelope?

16. (a) Estabeleça uma bijecção entre as sequências binárias de r uns e $n-1$ zeros e o conjunto das soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r \in \mathbb{N}$, com $x_i \in \mathbb{N}_0$ ($i \in \{1, \ldots, n\}$).

    (b) Obtenha, em termos de combinações com repetição, o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, com $x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{N}_0$. Qual o número de soluções se x_1, x_2, x_3 são inteiros não negativos tais que $x_1 \geq 1$ e $x_2 \geq 2$?

17. Sabendo que uma semana tem 7 dias e um semestre 15 semanas, de quantas maneiras pode telefonar aos pais se

    (a) telefonar uma vez?

    (b) telefonar 5 vezes ao longo do semestre?

    (c) telefonar uma vez por semana em todas as 15 semanas?

    Nota: Supõe-se que no máximo é feito um telefonema por dia.

18. Qual o número de possibilidades de colocar 4 laranjas iguais e 6 maçãs diferentes em cinco caixas numeradas?

19. O Departamento de Codificação dos Serviços Secretos foi encarregado de encriptar uma mensagem que será enviada ao seu agente secreto 007. A mensagem que vai ser transmitida através de um dos seus canais de comunicação, é constituída por 12 símbolos diferentes e 45 espaços em branco iguais.

    (a) Quantas mensagens diferentes podem ser formadas a partir dos 12 símbolos e dos 45 espaços em branco?

    (b) Pretende-se que na mensagem a enviar existam pelo menos 3 espaços em branco entre cada dois símbolos consecutivos. Quantas mensagens com estas características podem ser enviadas?

20. (a) De quantas maneiras podemos dispôr as letras da palavra PARALELEPÍPEDO em sequências com ou sem significado?

    (b) Nas sequências anteriores, em quantas não aparecem os três P's seguidos ?

21. Sabendo que um *byte* é uma cadeia binária (sequência de 0's ou 1's) com 8 dígitos (*bits*), determine o número de *bytes* com 3 zeros e 5 uns tais que cada zero é seguido imediatamente por um 1.

22. Um homem tem no seu armário 12 t-shirts diferentes, 3 pares de calças diferentes, 2 pares de sapatos diferentes, 10 pares (diferentes) de meias e 10 camisolas diferentes.

    (a) Quando se veste diariamente ele escolhe uma t-shirt, um par de calças, um par de sapatos, um par de meias e uma camisola. De quantas maneiras diferentes pode ele fazer a escolha da sua indumentária?

    (b) Para uma pequena viagem de fim de semana ele colocou dentro de um saco (sem nenhuma ordem) 2 t-shirts, 2 pares de meias e 2 camisolas. De quantas maneiras diferentes pode ter sido feita a sua escolha?

    (c) Na sua viagem ele adquiriu 2 livros diferentes numa livraria que tinha 1000 livros diferentes para venda. De quantas maneiras diferentes pode ele ter feito a escolha dos dois livros? Justifique.

23. Recorrendo às fórmulas binomial e multinomial mostre que

    (a) $3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$;

    (b) $k^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ onde a soma se estende a todas as sequências de inteiros não negativos $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tais que $n_1+n_2+\cdots+n_k = n$.

24. No desenvolvimento de

    (a) $(a-2b)^{13}$ determine o termo que contém $a^7\, b^6$;

    (b) $(2x+y^2-1/z)^6$ determine o coeficiente de xy^6z^{-2};

    (c) $(x_1-x_2+2x_3-2x_4)^8$ determine o coeficiente do termo em $x_1^2\, x_2^3\, x_3\, x_4^2$.

25. Sabendo que a soma dos coeficientes no desenvolvimento do binómio $(a+b)^n$ é 256 calcule $(n/2)!$.

26. Sabendo que o coeficiente de a^2b^{n-2} no desenvolvimento do binómio $(a+b)^n$ é igual a 28, determine o coeficiente de $a^{n-3}b^3$.

27. Determine uma fórmula para o coeficiente de x^k na expansão de $(x-\frac{1}{x})^{100}$, sendo $k \in \mathbb{Z}$.

28. Prove as seguintes igualdades:

    (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

    (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(n+1-k) = \binom{n+2}{3}$.

    (c) $\binom{n}{0}\binom{n}{k} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{n-k}{0} = \binom{n}{k}2^k$.
    Sugestão: Conte (por dois modos distintos) o número de colocações de k bolas escolhidas de um conjunto de n bolas, utilizando apenas duas cores.