

UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Departamento de Matemática

Matemática Discreta

Exame Final

21 de Junho de 2011

Responda de uma forma cuidada a cada uma das questões.

(2 horas e 30 minutos)

1- Considere os conjuntos de expressões:

(1,5)**a)** $\{P(f(f(x)), x, a), P(f(y), g(z), z)\}$, onde a é uma constante e x, y e z são variáveis.

(1,5)**b)** $\{P(y, g(f(x)), f(z)), P(f(x), g(r(z)), y)\}$, onde x, y e z são variáveis.

Verifique se cada um dos conjuntos de expressões indicado é unificável e, no caso afirmativo, indique o respectivo unificador mais geral.

2- Considere a relação \mathcal{R} definida em \mathbb{Z} por $x \mathcal{R} y$ se $x - y$ é múltiplo de 3.

(1)**a)** Mostre que \mathcal{R} é uma relação de equivalência.

(1)**b)** Determine as classes de equivalência $[0]$, $[1]$ e $[2]$.

(1)**c)** Determine o conjunto quociente \mathbb{Z}/\mathcal{R} .

(3)**3-** Demonstre, por indução, a veracidade da seguinte igualdade:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n.$$

4- Considere a relação de recorrência $u_n = 2u_{n-1} + 4^n$, para $n \geq 1$, com $u_0 = 1$.

(2)**a)** Mostre que a função geradora da sucessão (u_n) é $f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1-4x)}$.

(2)**b)** Determine uma fórmula não recursiva para u_n , com $n \geq 0$.

(2)**5-** Determine o coeficiente de $x^4 y z^{-2}$ na expansão de $(2x^2 - y + 1/z)^5$.

(2)**6-** Supondo que uma árvore T tem 2 vértices de grau 5, 3 vértices de grau 4, 6 vértices de grau 3, 8 vértices de grau 2 e f vértices de grau 1, determine f .

(3)**7-** Considere a matriz de custos a seguir indicada, associada ao grafo G e determine o caminho mais curto entre o vértice 3 e cada um dos restantes vértices de G , recorrendo ao algoritmo de Dijkstra.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 35 & 40 & \infty & \infty & \infty & 20 \\ 35 & 0 & 25 & 10 & \infty & 10 & \infty \\ 40 & 25 & 0 & 20 & 15 & \infty & \infty \\ \infty & 10 & 20 & 0 & 30 & 8 & 21 \\ \infty & \infty & 15 & 30 & 0 & 15 & 11 \\ \infty & 10 & \infty & 8 & 15 & 0 & 17 \\ 20 & \infty & \infty & 21 & 11 & 17 & 0 \end{array} \right) \end{array} \end{array}$$