UNIVERSIDADE DE AVEIRO
Departamento de Matemática

Exame Final de Matemática Discreta (2009/2010) 25 de Junho de 2010

Justifique devidamente as suas respostas.

(Duração: 2,5 horas)

1- Considere a relação $\mathfrak{R}$ definida em $\{1, 2, 3, \ldots\}$ por

$$a\mathfrak{R}b \text{ se e só se } b \text{ é múltiplo de } a.$$

Indique, justificando, se a relação é

(0.5) **1.1** Reflexiva.

(0.5) **1.2** Simétrica.

(0.5) **1.3** Anti-simétrica.

(0.5) **1.4** Transitiva.

(2.0) **1.5** Verifique se se trata de uma relação de ordem parcial ou de uma relação de equivalência.

2- Num grupo de 13 pessoas, 5 têm camisola verde, 4 têm camisola amarela, 2 têm camisola azul e 2 têm camisola branca. Todas as camisolas são diferentes entre si.

(2) **2.1** De quantas maneiras podemos constituir uma comissão de 4 representantes com 2 pessoas de camisola verde e 2 de camisola amarela?.

(2) **2.2** De quantos maneiras podemos sentar estas 13 pessoas num banco corrido com 13 lugares de modo que as pessoas com camisola de mesma cor fiquem juntas?

3-

(2) **3.1** Seja $f(x) = \frac{x}{1-5x+6x^2}$ a função geradora da sucessão $(a_n)_{n\geq 0}$. Determine uma fórmula não recursiva para a_n.

(2) **3.2** Considerando a relação de recorrência $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - 6$, $a_0 = 1$, $a_1 = 6$, determine uma fórmula não recursiva para a_n.

4- Sabendo que os números de Stirling de primeira espécie, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, com $n, k \geq 0$, determinam o número de permutações de de n elementos com exactamente k ciclos (admitindo-se por convenção que $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} = 0$, para $k > 0$), responda às seguintes questões:

(2) **4.1** Demonstre que se $1 \leq k \leq n$, então

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

(2) **4.2** Determine o número de Stirling $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$.

5- *(4)* Considere um grafo G cuja matriz $W = [w_{ij}]$ relativa aos pesos w_{ij} associados às arestas $ij \in E(G)$ é a indicada

$$W = \begin{bmatrix} \infty & 3 & \infty & 4 & \infty & \infty \\ 3 & \infty & 2 & \infty & 2 & \infty \\ \infty & 2 & \infty & 4 & \infty & 1 \\ 4 & \infty & 4 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & 2 & \infty & 3 & \infty & 6 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 6 & \infty \end{bmatrix},$$

e determine a árvore abrangente de custo mínimo, com recurso ao algoritmo de Kruskal.