Departamento de Matemática **Universidade de Aveiro**

Matemática Discreta

2ª Prova de Avaliação Discreta **09/05/2014** ⊤

Nome: ____

N.º mecanográfico: ____________ **Curso** ______________________________

Espaço reservado aos docentes

$E \backslash C$	0	1	2	3	4	5
0	00	16	32	48	64	80
1	-04	12	28	44	60	
2	-08	08	24	40		
3	-12	04	20			
4	-16	00				
5	-20					

Questões	Grupo I	Grupo II - 1	Grupo II - 2	Total
Classificação				

Grupo I

Este grupo é constituído por 5 questões de escolha múltipla. Cada questão tem uma só opção correta que deve assinalar com uma × no ☐ correspondente.
Uma resposta correta é cotada com 16 pontos, uma resposta em branco com 0 pontos e uma resposta errada com -4 pontos.

1. Num grupo de 60 portugueses, 25 falam inglês, 23 falam espanhol, 17 falam francês, 10 falam inglês e espanhol, 5 falam francês e inglês, 7 falam francês e espanhol e 3 falam as três línguas estrangeiras. Quantas pessoas deste grupo não fala nenhuma língua estrangeira?

   ☐ 46;

   ☐ 10;

   ☐ 14;

   ☐ nenhuma das anteriores.

2. Considere um sistema computacional onde se usam endereços de 16 dígitos binários (zeros e uns). O número de endereços que se podem formar com 12 zeros e 4 uns, que começam por 1000 são:

   ☐ $\frac{16!}{4!12!}$;

   ☐ $\frac{12!}{9!3!}$;

   ☐ $\frac{11!}{8!3!}$;

   ☐ $\frac{16!}{4!12!} \times \frac{16!}{12!4!}$.

3. Um leitor de CD é programado para tocar 20 canções de um total de 60 canções disponíveis. De quantas maneiras diferentes pode esta programação ser feita? Considere que uma canção pode ser tocada no máximo uma vez.

   - ☐ $\frac{60!}{40!}$;
   - ☐ $\frac{60!}{20!}$;
   - ☐ $20!$;
   - ☐ $\frac{60!}{20!40!}$.

4. De quantas maneiras se podem distribuir 10 livros iguais e 7 livros diferentes por 5 bibliotecas em cidades diferentes?

   - ☐ $\binom{17}{10} \times 7^5$;
   - ☐ $\binom{14}{10} \times 5^7$;
   - ☐ $\binom{17}{10} \times 5^7$;
   - ☐ $\binom{14}{10} \times 7^5$.

5. Numa certa universidade cada estudante vem de um dos 18 distritos de Portugal. Qual o número menor de estudantes a considerar de modo que se possa garantir que haja pelo menos 31 estudantes de um dos distritos?

   - ☐ 31;
   - ☐ 558;
   - ☐ 559;
   - ☐ 541.

Grupo II

Justifique devidamente todas as respostas

(50 val.) **1)** (a) Considere a sucessão definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 1/2 \\ a_n = a_{n-1} + 3^n, \ n \geq 1 \end{cases}$$

Prove, por indução sobre n, que $a_n = -1 + \frac{3^{n+1}}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

*(70 val.)***2)** (a) Calcule o desenvolvimento de $(a+b)^5$ e use-o para determinar $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{N}$ tais que

$$4^5 = c_0 3^0 + c_1 3^1 + c_2 3^2 + c_3 3^3 + c_4 3^4 + c_5 3^5.$$

(b) Determine $n \in \mathbb{N}$ de modo a que $21\, x^{9/2}$ seja um termo do desenvolvimento de $(x + \sqrt{x})^n$.
Sugestão: recorra ao triângulo de Pascal.

(c) Determine o coeficiente de $x^5 y^2 z^2$ no desenvolvimento de $(x - xy + 3z)^7$.