Matemática Discreta

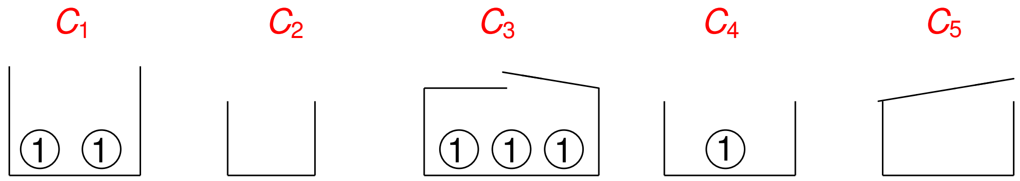
20^a AULA

Universidade de Aveiro 2014/2015

http://moodle.ua.pt

Combinações com repetição

Num exemplo anterior verificou-se que existe uma bijecção entre os diferentes modos de colocar k bolas iguais em n caixas distintas e as sequências binárias com $n - 1$ zeros e k uns.
Cada maneira de colocar k bolas iguais nas n caixas corresponde a uma das combinações com repetição de n elementos (caixas) k a k. Por exemplo



corresponde ao pseudoconjunto $\{C_1, C_1, C_3, C_3, C_3, C_4\}$.

Matemática Discreta
└ Combinações e permutações com repetição

Consequências

O número de combinações com repetição de n elementos k a k coincide com o número de combinações sem repetição de $n - 1 + k$ (comprimento de uma sequência binária) k a k (número de uns na sequência binária), isto é,

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Exemplo: Vamos determinar o número de possibilidades de colocação de 20 bolas iguais em 5 caixas distintas, com pelo menos duas bolas em cada caixa.

Resolução

Distribuindo 2 bolas por cada uma das 5 caixas, conclui-se que o número de possibilidades de colocação das restantes 10 bolas nas 5 caixas corresponde ao número de combinações com repetição de 5 caixas 10 a 10.

$$\binom{5+10-1}{10} = \binom{14}{10} = \frac{14!}{4!10!} = 1001.$$

Permutações com repetição

Exemplo: Quantos números de telefones da rede fixa (portuguesa) podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

n$^{\underline{o}}$ de telefone: $\quad 2 - - - - - - - -$

O problema a resolver consiste em determinar o número de sequências com 8 algarismos onde o 2 surge uma vez, o 3 surge quatro vezes, o 6 surge duas vezes e o 9 uma vez. Se se tiver em conta as repetições dos algarismos então cada sequência de 8 algarismos referida atrás corresponde a $P_1\, P_4\, P_2\, P_1 = 1!4!2!1!$ das $P_8 = 8!$ sequências que existiriam se os dígitos fossem todos distintos. Conclui-se, assim, que é possível atribuir $\frac{8!}{1!1!2!4!} = 840$ números de telefone nas condições referidas.

Permutações com repetição

Considere-se um conjunto de n objectos distribuídos por k ($k \leq n$) classes que têm $n_1, n_2, \ldots, n_k$ objectos ($\sum_{i=1}^{k} n_i = n$). Supondo que os objectos pertencentes à mesma classe são indistinguíveis, o número de sequências que se podem formar com esses n objectos é dado pelo número de permutações com repetição

$$\text{Notação} \longrightarrow \binom{n}{n_1, \ldots, n_k}.$$

Estes números designam-se por números multinomiais.

Identidades combinatórias

Exemplo

Vamos mostrar que o número de possibilidades de partir um conjunto A de cardinalidade n em k subconjuntos, $A_1, \ldots, A_k$, de cardinalidade $n_1, \ldots, n_k$ ($n_1 + \cdots + n_k = n$), respectivamente, é igual a $\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$.

Resolução: Começamos pela escolha dos elementos de A_1, para os quais existem $\binom{n}{n_1}$ possibilidades. Depois escolhemos os elementos de A_2, de entre os $n - n_1$ elementos de A que restam, para os quais existem $\binom{n-n_1}{n_2}$ possibilidades, etc. Como consequência, o número pretendido é

$$\binom{n}{n_1, \ldots n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2} \cdots \binom{n-n_1-\cdots n_{k-1}}{n_k}.$$

Binómio de Newton

$$
\begin{aligned}
(1+x)^n &= \overbrace{(1+x)(1+x)\ldots(1+x)}^{n \text{ factores}} \\
&= \overbrace{1\ldots1}^{n \text{ factores}} + x\overbrace{1\ldots1}^{n-1 \text{ factores}} + 1x\overbrace{1\ldots1}^{n-2 \text{ factores}} + \cdots + \overbrace{x\ldots x}^{n-1 \text{ factores}}1 + \overbrace{x\ldots x}^{n \text{ factores}} \\
&= 1 + nx + \cdots + \binom{n}{k}x^k + \cdots + nx^{n-1} + x^n
\end{aligned}
$$

que é um polinómio em x de grau n. Note-se que o número de parcelas da forma x^k1^{n-k} ($k \in \{0, 1, \ldots, n\}$) é igual ao número de possibilidades de escolher x em k dos n factores e este número é $\binom{n}{k}$.

- Consequentemente, $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k$.

Fórmula do binómio de Newton ou fórmula binomial de Newton

- Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

- Como consequência, $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Exercício

Mostre que o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é dado por 2^n.

Exercício

Mostre que $n, k \in \mathbb{N}$, com $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Triângulo de Pascal

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

- Note-se que a n-ésima linha do triângulo de Pascal, contém os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$.
- Para $n=3$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Referências e bibliografia I

D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.