Matemática Discreta

4^a AULA

Universidade de Aveiro 2014/2015

http://moodle.ua.pt

Relações binárias

Propriedades

Relações de ordem

Pares ordenados e produto cartesiano

Definição (de par ordenado)

Dados x e y, designa-se por par ordenado e denota-se por (x, y) o conjunto $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, ou seja, $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Adicionalmente, dizemos que x é o primeiro elemento e y o segundo.

- Mais geralmente, temos o n-uplo ordenado:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= (x_1, (x_2, x_3, \ldots, x_n)), \quad n \geq 3\\ &= \{\{x_1\}, \{x_1, (x_2, x_3, \ldots, x_n)\}\}\\ &= \{\{x_1\}, \{x_1, \{\{x_2\}, \{x_2, (x_3, \ldots, x_n)\}\}\}\}.\end{aligned}$$

Produto cartesiano

Definição (produto cartesiano)

Sejam A e B dois conjuntos. Designa-se por produto cartesiano de A e B e denota-se por $A \times B$, o conjunto

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \ \wedge \ y \in B\}.$$

- Se $A = B$, então $A^2 = A \times A = \{(x, y) : x \in A \wedge \ y \in A\}$.

Relações binárias

Definição de relação binária (relação)

Uma relação binária (ou relação) $\mathcal{R}$ entre os conjuntos A e B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

- Notação: escreve-se $x\mathcal{R}y$ para indicar $(x, y) \in \mathcal{R}$.
- Exemplo: Sendo $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$, então

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\},$$

e

$$\mathcal{R} = \{(1, a), (1, c), (2, a)\} \subseteq A \times B$$

é uma relação entre A e B.

Casos particulares

- Se $A = B$, designamos $\mathcal{R} \subseteq A^2$ por relação binária definida em A (ou sobre A).
- Exemplo 1: a relação $\leq$ definida em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ é o subconjunto de A^2:

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}.$$

- Nota: usualmente, $(x, y) \in \leq$ denota-se por $x \leq y$.
- Exemplo 2: igualmente se conclui que sendo $\leq$ uma relação binária definida em $\mathbb{N}$,

$$\leq = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \leq y\} \subseteq \mathbb{N}^2.$$

- A relação $I = \{(x, x) : x \in A\}$ designa-se por relação identidade de A ou definida em A.

Conjunto das partes

Definição (de conjunto das partes ou conjunto potência)

Dado um conjunto A, designa-se por conjunto das partes ou conjunto potência (ou, simplesmente, potência) de A e denota-se por $\mathcal{P}(A)$, o conjunto

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

Nota: $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.

Exemplo: considerando o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, obtém-se

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Domínio e imagem

Definição (de domínio e imagem)

Sejam A e B dois conjuntos e $\mathcal{R}$ uma relação binária entre A e B.

- Designa-se por domínio de $\mathcal{R}$ e denota-se por $\mathrm{dom}(\mathcal{R})$, o conjunto

$$\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \{x \in A : (x, y) \in \mathcal{R} \text{ para algum } y \in B\}.$$

- Designa-se por imagem (ou contradomínio) de $\mathcal{R}$ e denota-se por $\mathrm{img}(\mathcal{R})$, o conjunto

$$\mathrm{img}(\mathcal{R}) = \{y \in B : (x, y) \in \mathcal{R} \text{ para algum } x \in A\}.$$

Imagem e imagem recíproca

Definição (de imagem e imagem recíproca de um elemento)

Considere a relação binária $\mathcal{R} \subseteq A \times B$.

- Designa-se por imagem de x por $\mathcal{R}$ e denota-se por $\mathcal{R}(x)$, o conjunto
$$\mathcal{R}(x) = \{y \in B : (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

- Designa-se por imagem recíproca de y por $\mathcal{R}$ e denota-se por $\mathcal{R}^{-1}(y)$, o conjunto
$$\mathcal{R}^{-1}(y) = \{x \in A : (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

Relação inversa de $\mathcal{R}$: $\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in B \times A : (x, y) \in \mathcal{R}\}$.

Composição

Definição (de composição de relações)

Dadas duas relações $\mathcal{R}_1$ entre A e B e $\mathcal{R}_2$ entre B e C designa-se por composição de $\mathcal{R}_1$ com $\mathcal{R}_2$ (e escreve-se $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$), a relação entre A e C definida por

$$\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1 = \{(a, c) \in A \times C : \text{ existe } b \in B \quad \text{tal que} \quad \begin{array}{rl} & (a, b) \in \mathcal{R}_1 \\ \wedge & (b, c) \in \mathcal{R}_2\}. \end{array}$$

Exemplo: sendo $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ e $C = \{\alpha, \beta\}$ e considerando as relações $\mathcal{R}_1 = \{(1, a), (1, b), (2, b)\} \subseteq A \times B$ e $\mathcal{R}_2 = \{(b, \beta), (c, \alpha)\} \subseteq B \times C$, vamos determinar

$$\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1.$$

Propriedades das relações binárias

Dada uma relação binária $\mathcal{R}$ definida num conjunto A, dizemos que $\mathcal{R}$ é

- reflexiva: se $(x, x) \in \mathcal{R}$ para todo $x \in A$ ou, de modo equivalente, se $I \subseteq \mathcal{R}$, onde I denota a relação identidade;
- simétrica: se $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$, para todos $x, y \in A$ ou, de modo equivalente, se $\mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{R}$;
- Anti-simétrica: se $[(x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, x) \in \mathcal{R}] \Rightarrow x = y$, para todos $x, y \in A$ ou, de modo equivalente, se $\mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{R} \subseteq I$;
- Transitiva: se $[(x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{R}] \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$, para todos $x, y, z \in A$ ou, de modo equivalente, se $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$.

Relação de ordem parcial e conjunto parcialmente ordenado

Definição (de ordem parcial)

Uma relação binária diz-se uma relação de ordem parcial se é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

- Exemplos de relações de ordem parcial:
  - A relação $\leq$ definida em $\mathbb{N}$.
  - A relação $|$ (divide) definida no conjunto $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

Definição (de conjunto parcialmente ordenado)

Se $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem parcial sobre o conjunto A, o par $(A, \mathcal{R})$ define um conjunto parcialmente ordenado (cpo).

Relação de ordem total e conjunto totalmente ordenado

Definição (de relação de ordem total ou linear)

Uma relação de ordem parcial, $\mathcal{R}$, definida num conjunto A diz-se uma relação de ordem total (ou relação de ordem linear) se quaisquer que sejam $a, b \in A$ se verifica $(a, b) \in \mathcal{R}$ ou $(b, a) \in \mathcal{R}$.

Definição (de conjunto totalmente ordenado)

Diz-se que o par $(A, \mathcal{R})$ define um conjunto totalmente ordenado quando $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem total sobre A.

Nota: a proposição $(a, b) \in \mathcal{R} \vee (b, a) \in \mathcal{R}$, quaisquer que sejam $a, b \in A$, designa-se por dicotomia.

Exemplos: 1) $(\mathbb{N}, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado;
2) a relação $|$ não é uma relação de ordem total no conjunto $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

Referências bibliográficas

- Referência bibliográfica:
  D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.

- Referências bibliográficas complementares:
  N. L. Biggs, *Discrete Mathematics*, Oxford University Press, 2nd Ed. (2002).
  J. S. Pinto, *Tópicos de Matemática Discreta*, Universidade de Aveiro 1999 (disponível na página da disciplina).