

Matemática Discreta

32^a AULA

Universidade de Aveiro 2014/2015

<http://moodle.ua.pt>

Árvores e florestas

Operações de contracção e fusão de extremos de uma aresta

Determinação do número de árvores abrangentes

Referências bibliográficas

Árvore e florestas

Definição (de floresta)

Um grafo simples G diz-se uma **floresta** se G não contém circuitos. Uma floresta conexa designa-se por **árvore**.

Teorema

Se $G = (V, E)$ é um grafo simples com ν vértices, então são equivalentes seguintes afirmações:

- (a) G é uma árvore.
- (b) G não contém ciclos e tem $\nu - 1$ arestas.
- (c) G é conexo e tem $\nu - 1$ arestas.
- (d) G é conexo e cada aresta é uma ponte.
- (e) $\forall x, y \in V(G)$ existe um único caminho (x, y) .
- (f) G não contém ciclos, mas acrescentando uma aresta obtém-se um ciclo.

Condição necessária e suficiente para um grafo ser uma floresta.

Teorema

Um grafo G é uma floresta se e só se

$$\varepsilon(G) - \nu(G) + cc(G) = 0.$$

Prova:

(\Rightarrow) A prova da condição necessária vai ser feita por indução sobre o número de arestas de G , tendo em conta que o resultado se verifica trivialmente para $\varepsilon(G) = 0$.

Suponha que o resultado se verifica para todas as florestas com menos do que $\varepsilon(G)$ arestas e $\varepsilon(G) > 0$. Seja G' um subgrafo de G obtido por eliminação de uma aresta arbitrária. Logo, G' é uma floresta com $\varepsilon(G) - 1$ arestas, $\nu(G)$ vértices e $cc(G) + 1$ componentes.

Prova da condição necessária e suficiente para um grafo ser uma floresta.

Por hipótese de indução, aplicada a G' ,

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon(G') - \nu(G') + \text{cc}(G') = \varepsilon(G) - 1 - \nu(G) + \text{cc}(G) + 1 \\ &= \varepsilon(G) - \nu(G) + \text{cc}(G). \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Suponhamos que G tem p componentes, G_1, \dots, G_p , pelo que $\varepsilon(G) - \nu(G) + p = \sum_{j=1}^p (\varepsilon(G_j) - \nu(G_j) + 1)$. Então

$$\varepsilon(G) - \nu(G) + p = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^p (\varepsilon(G_j) - \nu(G_j) + 1) = 0.$$

e, uma vez que $\forall j \in [p] \quad \varepsilon(G_j) - \nu(G_j) + 1 \geq 0$,

$$\forall j \in [p] \quad \varepsilon(G_j) - \nu(G_j) + 1 = 0.$$

Consequentemente, de acordo com o teorema anterior, todos os grafos G_j , com $j \in \{1, \dots, p\}$, são árvores.

Árvore abrangentes

Definição (árvores abrangente)

Dado um grafo conexo G , designa-se por árvore abrangente (ou de suporte) de G , todo o subgrafo abrangente de G que é uma árvore, ou seja, todo o subgrafo que é uma árvore e contém todos os vértices de G .

Teorema

Todo o grafo conexo admite uma árvore abrangente.

Prova:

Seja G um grafo conexo e seja T um subgrafo abrangente conexo minimal de G , ou seja, tal que $\text{cc}(T) = 1$ e $\text{cc}(T - e) > 1$, para cada $e \in T$. Então, cada aresta de T é uma ponte e, tendo em conta o primeiro teorema desta aula, T é uma árvore.

Operações de contracção e fusão de extremos de uma aresta

Definição (contracção de arestas)

Dado um grafo G , diz-se que uma aresta e de G é contraída se os seus vértices extremos são fundidos, todas as arestas paralelas e lacetes (eventualmente) produzidos são eliminados. Esta operação designa-se por operação de contracção de arestas de G e, para uma aresta particular $e \in E(G)$, denota-se por G/e .

Definição (fusão de extremos de uma aresta)

Designa-se por fusão de extremos de uma aresta (ou fusão de vértices extremos de uma aresta) $e \in E(G)$ a operação que se denota por $G//e$ e difere da contracção de uma aresta apenas no facto de, com excepção da aresta contraída, todas as restantes arestas se mantem no grafo (incluindo arestas paralelas e lacetes eventualmente produzidos).

Consequências

- Dado um grafo G , após a fusão dos extremos da aresta $e \in E(G)$, o número de arestas decresce uma unidade, ou seja,

$$|E(G//e)| = |E(G)| - 1.$$

- A operação de fusão de extremos de arestas comuta com a operação de eliminação de arestas, ou seja, dadas duas arestas distintas $e, f \in E(G)$, verifica-se que

$$(G//e) - f = (G - f)//e.$$

Fórmula recursiva para a determinação do número de árvores abrangentes

Teorema

Dado um grafo G , se $e \in E(G)$ não é um lacete em G , então

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G // e),$$

onde $\tau(G)$ denota o número de árvores abrangentes de G .

Prova: Sem perda de generalidade, vamos assumir que G é um grafo conexo. Cada árvore abrangente de G que não contém a aresta e é uma árvore abrangente de $G - e$ e reciprocamente, $\tau(G - e)$ é igual ao número das árvores abrangentes de G que não contém a aresta e . Por outro lado, a cada árvore abrangente T de G que contém e corresponde uma árvore abrangente $T // e$ do grafo $G // e$ (e esta correspondência é biunívoca).

Alguns casos particulares

Para simplificar o processo de determinação do número de árvores abrangentes de um grafo, vamos considerar alguns casos especiais:

- se G não é conexo, então $\tau(G) = 0$;
- se G é uma árvore, então $\tau(G) = 1$;
- se G é um ciclo, com k arestas, então $\tau(G) = k$ (uma vez que a eliminação de uma aresta do ciclo produz uma árvore abrangente);
- se G é um grafo, constituído por dois vértices ligados por k arestas, então $\tau(G) = k$ (uma vez que cada aresta constitui uma árvore abrangente).

Referências bibliográficas I



D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.