# UNIVERSIDADE DE AVEIRO
## Departamento de Matemática

Exame Final de Matemática Discreta (2009/2010) 9 de Julho de 2010

*Justifique devidamente as suas respostas.*

---

(Duração: 2,5 horas)

**1-**(*3*) Defina *tautologia* e averigue se a fórmula bem formada

$$p \wedge (q \vee r \vee s) \Rightarrow p \vee q \vee \neg r$$

é ou não uma tautologia.

**2-**(*3*) Mostre que dados quaisquer três conjuntos A, B e C,

$$\text{se } A \cup B = A \cup C \text{ e } A \cap B = A \cap C \text{ então } B = C.$$

**3-**(*3*) Com recurso à fórmula multinomial e admitindo que as variáveis $x, y, w$ e $z$ tomam valores reais, determine o coeficiente de $x^5 y w^4 z^2$ no desenvolvimento de $(x + y + w + z)^{12}$.

**4-**(*3*) Considere a relação de recorrência

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 2^n, n \geq 0, a_0 = a_1 = 1$$

e determine uma fórmula não recursiva para $a_n$.

**5-** Sabendo que os números de Stirling de segunda espécie, $\left\{ {n \atop k} \right\}$, com $n, k \geq 0$, correspondem ao o número de partições de um conjunto de cardinalidade $n$ em $k$ subconjuntos não vazios (admitindo-se por convenção que $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$ e que $\left\{ {0 \atop k} \right\} = 0$, para $k > 0$), responda às seguintes questões:

(*2*) **5.1** Demonstre que se $1 \leq k \leq n$, então

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}.$$

(*2*) **5.2** Determine o número de Stirling $\left\{ {6 \atop 4} \right\}$.

**6-**(*4*) Considere um grafo $G$ cuja matriz $W = [w_{ij}]$ relativa aos pesos $w_{ij}$ associados às arestas $ij \in E(G)$ é a indicada

$$W = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & 9 & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 2 & \infty & 10 & \infty \\ \infty & 2 & 0 & 4 & \infty & 1 \\ 9 & \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ \infty & 10 & \infty & 3 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

e determine o caminho de peso mínimo (ou custo mínimo) entre os vértices $v_1$ e $v_5$, utilizando o algoritmo de Dijkstra.