

# Matemática Discreta

## 24<sup>a</sup> AULA

Universidade de Aveiro 2014/2015

<http://moodle.ua.pt>

**Equações de recorrência não lineares**

**Exemplos**

**Referências bibliográficas**

## Mudança de variáveis

### Definição

As equações de recorrência que não são lineares (homogêneas ou não homogêneas) designam-se por equações de recorrência não lineares.

- Um dos métodos muito utilizados para a resolução de equações de recorrência não lineares consiste na mudança adequada de variáveis, tendo em vista a simplificação da respectiva equação.
- Seguem-se alguns exemplos de aplicação deste método.

## Exemplo 1

### Exemplo

Vamos resolver a equação de recorrência não linear

$$a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1, \quad (1)$$

com a condição inicial  $a_0 = 2$  ( $a_n \geq 0$ , para todo o  $n$ ).

- Procedendo à substituição de variáveis  $b_n = a_n^2$ , a equação de recorrência não linear (1) transforma-se na equação de recorrência linear não homogênea definida pela equação

$$b_n = 2b_{n-1} + 1, \quad (2)$$

com condição inicial  $b_0 = a_0^2 = 4$ .

## Exemplo 1 (cont.)

- Resolvendo a equação homogênea associada  $b_n^{(1)} = 2b_{n-1}^{(1)}$ , obtém-se a solução:

$$b_n^{(1)} = C_1 2^n.$$

- Uma vez que o segundo membro da equação de recorrência linear não homogênea correspondente a (2) é polinómio de grau 0, 1, podemos concluir que existe uma solução particular da forma  $b_n^{(2)} = A$ . Logo, tendo em conta a equação (2), vem

$$A = 2A + 1 \Leftrightarrow A = -1.$$

Consequentemente, a solução geral de (2) tem a forma  $b_n = C_1 2^n - 1$ , a partir da qual, tendo em conta que a condição inicial implica  $C_1 = 5$ , se obtém a solução final

$$a_n = \sqrt{5 \cdot 2^n - 1}.$$

## Exemplo 2

### Exemplo

Vamos resolver a equação de recorrência não linear

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_{n-2} + \sqrt{a_{n-3} + \sqrt{\dots \sqrt{a_0}}}}, \quad (3)$$

com condição inicial  $a_0 = 4$ .

## Resolução

- Elevando ao quadrado ambos os membros da equação (3), para  $n \geq 2$ , obtém-se

$$a_n^2 = a_{n-1} + \sqrt{a_{n-2} + \sqrt{a_{n-3} + \sqrt{\dots \sqrt{a_0}}} = a_{n-1} + a_{n-1} = 2a_{n-1}$$

e, para  $n = 1$ , obtém-se  $a_1^2 = a_0$ .

- Uma vez que é imediato concluir que  $a_1 = 2$ , vamos considerar apenas os casos em que  $n \geq 2$ , para os quais se obtém a equação de recorrência

$$a_n^2 = 2a_{n-1},$$

com condição inicial  $a_1 = 2$ .

## Resolução (cont.)

- Efectuando a mudança de variável  $b_n = \log_2 a_n$ , obtém-se a equação de recorrência linear  $2b_n = b_{n-1} + 1$ , com condição inicial  $b_1 = \log_2 a_1 = 1$ , cuja solução geral vem dada por

$$b_n = C_1 2^{-n} + 1.$$

- Uma vez que a condição inicial implica  $C_1 = 0$ , conclui-se que  $b_n = 1$ , ou seja, voltando às variáveis iniciais,

$$a_n = 2^{b_n} = 2.$$

- Como consequência, para todos os valores de  $n \geq 0$ , a solução final é  $a_0 = 4$  e  $a_n = 2$ , para  $n \geq 1$ .

## Referências bibliográficas I



D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.



J. S. Pinto, *Tópicos de Matemática Discreta*, Universidade de Aveiro 1999 (disponível na página da disciplina).