

UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Departamento de Matemática

Exame Final de Matemática Discreta (2012/2013)

28 de Junho de 2013

Justifique devidamente as suas respostas.

(Duração: 2 horas e 30 minutos)

1- Considere a seguinte relação binária definida no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

xRy se e apenas se $x - y$ é múltiplo de 2.

(1) **1.1** Mostre que R é uma relação de equivalência definida no conjunto A .

(1) **1.2** Determine as classes de equivalência $[1]_R$ e $[2]_R$ e o conjunto quociente A/R .

2- Considere as seguintes afirmações:

(i) Os militares não choram.

(ii) O Manuel é sentimental.

(iii) Quem é sentimental chora.

(1) **2.1** Exprima as afirmações em linguagem simbólica.

(2) **2.2** Usando o princípio da resolução mostre que o Manuel não é militar.

(2)**3-** Sabendo que de entre os estudantes de um dado colégio, 65 estudam francês, 45 estudam alemão, 42 estudam russo, 20 estudam francês e alemão, 25 estudam francês e russo, 15 estudam alemão e russo e 8 estudam as 3 línguas, determine o número de estudantes que estudam pelo menos uma destas três línguas utilizando o princípio de Inclusão-Exclusão.

4- Considere a permutação $\pi = (2\ 3\ 7\ 5\ 4\ 8\ 1\ 6)$.

(1) **4.1** Determine a partição cíclica de π .

(1) **4.2** Indique o tipo de permutação de π .

(3)**5-** Sabendo que o coeficiente de a^2b^{n-2} no desenvolvimento do binómio $(a + b)^n$ é igual a 28, determine o coeficiente de $a^{n-3}b^3$.

(3)6- Resolva a equação de recorrência $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 4$, com $a_0 = 1$, $a_1 = 4$.

(3)7- Considere a sucessão dos números de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Prove que para todo o inteiro positivo $n > 2$ se verifica a igualdade $\sum_{j=1}^n F_j^2 = F_n F_{n+1}$

Sugestão: ter em atenção que para $j > 1$, $F_j^2 = F_j(F_{j+1} - F_{j-1})$.

8- Considere o grafo G representado pela seguinte matriz de adjacência.

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1)8.1 Faça uma representação pictórica de G .

(1)8.2 Determine o diâmetro, o raio e a cintura deste grafo.