

# **Cálculo II**

## **Cálculo com funções de uma variável**

*2009/10*

**Virgínia Santos**

**Departamento de Matemática**



**Universidade de Aveiro**

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Transformada de Laplace</b>	<b>1</b>
1.1	Definição . . . . .	1
1.2	Propriedades da Transformada de Laplace . . . . .	7
1.3	Transformada de Laplace Inversa . . . . .	17
1.4	Soluções dos exercícios propostos . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Equações Diferenciais</b>	<b>27</b>
2.1	Introdução . . . . .	27
2.2	Definições e terminologia . . . . .	29
2.3	Integração de Equações Diferenciais de 1ª Ordem . . . . .	36
2.3.1	Equações de Variáveis Separáveis . . . . .	36
2.3.2	Equações Diferenciais Homogêneas . . . . .	42
2.4	Equações Diferenciais Lineares de ordem $n \geq 1$ . . . . .	46
2.4.1	Determinação da Solução Geral de uma Equação Diferencial Linear Homogênea . . . . .	49
2.4.2	Determinação da Solução Geral de uma Equação Diferencial Linear Completa . . . . .	58
2.4.3	Resolução de Problemas de Cauchy Usando Transformadas de Laplace . . . . .	82
2.5	Equações Diferenciais não Lineares de Ordem $n > 1$ . . . . .	87
2.6	Soluções dos exercícios propostos . . . . .	95
<b>3</b>	<b>Séries Numéricas</b>	<b>103</b>
3.1	Definições e propriedades . . . . .	103
3.2	Critérios de convergência . . . . .	118
3.2.1	Critérios de convergência para séries de termos não negativos . . . . .	118
3.2.2	Convergência simples e absoluta . . . . .	132
3.3	Séries alternadas . . . . .	143
3.4	Soluções dos exercícios propostos . . . . .	154
<b>4</b>	<b>Sucessões e Séries de Funções</b>	<b>157</b>
4.1	Sucessões de Funções . . . . .	157
4.1.1	Convergência de Sucessões de Funções . . . . .	157
4.2	Séries de Funções . . . . .	170
4.3	Propriedades da Convergência Uniforme . . . . .	180

4.4	Séries de Potências . . . . .	192
4.4.1	Convergência Uniforme de uma Série de Potências . . . . .	213
4.4.2	Série de Taylor e Série de Mac-Laurin . . . . .	220
4.5	Séries de Fourier . . . . .	234
4.5.1	Introdução . . . . .	234
4.5.2	Séries Trigonômicas de Fourier . . . . .	236
4.5.3	Uma abordagem ao estudo da convergência de uma série de Fourier . . . . .	261
4.6	Soluções dos exercícios propostos . . . . .	271

# Capítulo 1

## Transformada de Laplace

Neste capítulo vamos definir a transformada de Laplace de uma função cujo domínio contém  $\mathbb{R}_0^+$  e que, para todo o  $b \in \mathbb{R}^+$ , é integrável no intervalo  $[0, b]$ . Como veremos, nem sempre existe a transformada de Laplace de uma função satisfazendo as condições indicadas, mas é possível estabelecer uma condição suficiente para a existência daquela transformada. Apresentaremos algumas propriedades da transformada de Laplace que são úteis nas aplicações e definiremos a transformada de Laplace inversa.

### 1.1 Definição

**Definição 1.1.** Seja  $f$  uma função cujo domínio contém  $\mathbb{R}_0^+$  e integrável no intervalo  $[0, b]$ , para todo o  $b \in \mathbb{R}^+$ .

Chama-se *integral de Laplace* de  $f$  ao integral impróprio  $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$ , onde  $s \in \mathbb{R}$ <sup>1</sup>.

A existência do integral de Laplace depende da função  $f$  bem como do parâmetro  $s$ . Assim, fixada a função  $f$ , o integral de Laplace de  $f$  é uma função de  $s$ .

**Exemplo 1.2.** Consideremos a função  $f$  definida por  $f(t) = 1$ , para todo o  $t \in \mathbb{R}$ .

Para  $s \neq 0$  temos

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt.$$

Para estudar este integral vamos estudar o limite

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{s} e^{-sb} + \frac{1}{s} \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{-e^{-sb} + 1}{s} = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{se } s > 0 \\ +\infty & \text{se } s < 0 \end{cases}$$

Consequentemente, se  $s > 0$  o integral impróprio considerado é convergente e se  $s < 0$  é divergente.

Para  $s = 0$  temos

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-0t} dt = \int_0^{+\infty} 1 dt$$

e, uma vez que

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_0^b 1 dt \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} b = +\infty,$$

---

<sup>1</sup>Em estudos mais avançados da transformada de Laplace  $s$  pode ser um parâmetro complexo, mas para o estudo que vamos fazer basta considerar  $s$  real.

o integral impróprio que se obtém para  $s = 0$  é divergente.

Consequentemente, o integral de Laplace da função considerada existe e é finito se e só se  $s > 0$ .

Podemos então definir a função

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

que habitualmente se designa transformada de Laplace da função  $f$ .

Formalizando, temos a seguinte definição:

**Definição 1.3.** Seja  $f$  uma função cujo domínio contém  $\mathbb{R}_0^+$  e integrável em  $[0, b]$ , para todo o  $b \in \mathbb{R}^+$ .

Chama-se *transformada de Laplace* de  $f$  e representa-se por  $\mathcal{L}\{f\}$  ou  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  à função definida pelo seu integral de Laplace nos pontos em que este integral é convergente, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f\} : S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

onde  $S$  representa o conjunto dos valores de  $s \in \mathbb{R}$  para os quais o integral de Laplace de  $f$  é convergente.

Seja  $\mathcal{T}$  o conjunto das funções reais de variável real cujo domínio contém  $\mathbb{R}_0^+$  e integráveis em  $[0, b]$ , para todo o  $b \in \mathbb{R}^+$ . A aplicação  $\mathcal{L}$  que a cada função  $f \in \mathcal{T}$  faz corresponder a sua transformada de Laplace  $\mathcal{L}\{f\}$ , sempre que esta transformada exista, chama-se *transformação de Laplace*.

No que se segue, para simplificar a notação, vamos escrever

$$\mathcal{L}\{f\} = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \text{em vez de} \quad \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

ou

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \text{em vez de} \quad \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

**Exemplo 1.4.** 1. Tendo em atenção o Exemplo 1.2 temos

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s},$$

para  $s > 0$ .

2. Seja  $f$  a função definida em  $[0, +\infty[$  por

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0, +\infty[ \setminus \{1, 3\} \\ 2 & \text{se } t = 1 \\ 0 & \text{se } t = 3 \end{cases}$$

e vamos determinar, caso exista, a sua transformada de Laplace,  $\mathcal{L}\{f\}$ .

Para o efeito temos de estudar, em função de  $s \in \mathbb{R}$ , a natureza do integral impróprio  $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$ .

Para  $s = 0$  obtemos o integral impróprio  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ . Para estudar a natureza deste integral impróprio temos de estudar o limite  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_0^b f(t) dt \right)$ . Uma vez que, para todo o  $b > 3$ , a função  $f$  difere da função constante igual a 1 em apenas um número finito de pontos, temos

$$\int_0^b f(t) dt = \int_0^b 1 dt = b,$$

pelo que

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_0^b f(t) dt \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} b = +\infty$$

e, portanto, o integral impróprio que se obtém para  $s = 0$  é divergente.

Se  $s \neq 0$  temos que, para todo o  $b > 3$ , a função  $g$  definida por  $g(t) = f(t)e^{-st}$  difere da função  $h$  definida por  $h(t) = e^{-st}$  em apenas um número finito de pontos. Consequentemente,

$$\int_0^b f(t) e^{-st} dt = \int_0^b e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-sb} + \frac{1}{s}$$

e, portanto,

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_0^b f(t) e^{-st} dt \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{s} e^{-sb} + \frac{1}{s} \right) = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{se } s > 0 \\ +\infty & \text{se } s < 0 \end{cases}$$

Consequentemente, sendo  $s \neq 0$ , o integral impróprio  $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$  é convergente para  $s > 0$  e é divergente para  $s < 0$ .

Atendendo à Definição 1.3, temos  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}$ , para  $s > 0$ .

3. Consideremos a função  $f$  definida por  $f(t) = t$ , para todo o  $t \in \mathbb{R}$  e vamos determinar  $\mathcal{L}\{f\}$ . Para o efeito temos de estudar, em função de  $s \in \mathbb{R}$ , a natureza do integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} t e^{-st} dt.$$

Para  $s = 0$  obtemos o integral impróprio  $\int_0^{+\infty} t dt$ . Para estudar a natureza deste integral impróprio temos de estudar o limite  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_0^b t dt \right)$ . Uma vez que

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_0^b t dt \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^2}{2} = +\infty,$$

o integral impróprio que se obtém para  $s = 0$  é divergente.

Suponha-se  $s \neq 0$ . Para estudar a natureza do integral impróprio  $\int_0^{+\infty} t e^{-st} dt$  temos de estudar o limite  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_0^b t e^{-st} dt \right)$ .

Uma vez que, para todo o  $b > 0$ ,

$$\int_0^b t e^{-st} dt = -\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_0^b + \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} dt = -\frac{b}{s} e^{-sb} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_0^b = -\frac{b}{s} e^{-sb} - \frac{1}{s^2} e^{-sb} + \frac{1}{s^2},$$

temos

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_0^b t e^{-st} dt \right) &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{b}{s} e^{-sb} - \frac{1}{s^2} e^{-sb} + \frac{1}{s^2} \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -e^{-sb} \left( \frac{b}{s} + \frac{1}{s^2} \right) + \frac{1}{s^2} \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{-sb - 1}{s^2 e^{sb}} + \frac{1}{s^2} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{s^2} & \text{se } s > 0 \\ +\infty & \text{se } s < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Consequentemente, sendo  $s \neq 0$ , o integral impróprio  $\int_0^{+\infty} t e^{-st} dt$  é convergente para  $s > 0$  e é divergente para  $s < 0$ .

Utilizando a Definição 1.3 temos

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2},$$

para  $s > 0$ .

4. Consideremos a função  $f$  definida por  $f(t) = e^{at}$ , para todo o  $t \in \mathbb{R}$ , com  $a$  constante, e vamos determinar  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ . Para o efeito temos de estudar, em função de  $s \in \mathbb{R}$ , a natureza do integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt.$$

Como vimos anteriormente este integral integral impróprio converge se e só se

$$a - s < 0 \iff s > a$$

e tem o valor  $-\frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$ .

Podemos então concluir que a transformada de Laplace da função considerada é

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a},$$

para  $s > a$ .

5. Consideremos a função  $f$  definida por  $f(t) = \cos(at)$ , para todo o  $t \in \mathbb{R}$ , com  $a$  constante, e vamos determinar  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ . Para o efeito temos de estudar, em função de  $s \in \mathbb{R}$ , a natureza do integral impróprio  $\int_0^{+\infty} \cos(at) e^{-st} dt$ .

Para  $s = 0$  obtemos o integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} \cos(at) dt$$

que é divergente qualquer que seja  $a \in \mathbb{R}$ .

Suponha-se  $s \neq 0$ . Para estudar a natureza do integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} \cos(at) e^{-st} dt$$

temos de estudar o limite

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_0^b \cos(at) e^{-st} dt \right).$$

Atendendo a que, para todo o  $b > 0$ ,

$$\int_0^b \cos(at) e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{s^2 + a^2} (a \sin(at) - s \cos(at)) \Big|_0^b = \frac{e^{-sb}}{s^2 + a^2} (a \sin(ab) - s \cos(ab)) + \frac{s}{s^2 + a^2}$$

obtemos o limite

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^{-sb}}{s^2 + a^2} (a \sin(ab) - s \cos(ab)) + \frac{s}{s^2 + a^2} \right).$$

Uma vez que este limite não existe se  $s < 0$  e toma o valor  $\frac{s}{s^2 + a^2}$  se  $s > 0$ , temos

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2 + a^2},$$

para  $s > 0$ .

6. A função  $f$  definida por  $f(t) = e^{t^2}$ , para todo o  $t \in \mathbb{R}$ , não admite transformada de Laplace, já que o seu integral de Laplace é divergente, para todo o  $s \in \mathbb{R}$ .

De facto, sendo  $s \in \mathbb{R}$ , temos

$$\int_0^{+\infty} e^{t^2} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2 - st} dt,$$

e uma vez que,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{t^2 - st}}{t^2} = +\infty$$

e o integral impróprio  $\int_0^{+\infty} t^2 dt$  é divergente, concluímos, pelo Critério de Comparação por Passagem ao Limite, que o integral impróprio  $\int_0^{+\infty} e^{t^2 - st} dt$  é divergente.

O teorema que apresentamos a seguir estabelece uma condição suficiente para a existência da transformada de Laplace de uma função.

**Teorema 1.5.** *Seja  $f$  uma função cujo domínio contém  $\mathbb{R}_0^+$ . Se*



i)  $f$  é seccionalmente contínua em  $\mathbb{R}_0^+$ <sup>2</sup>;

ii) existem  $a \in \mathbb{R}$ ,  $M > 0$  e  $K > 0$  tais que, para todo  $t \geq K$ ,  $|f(t)| \leq M e^{at}$ ;

então  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  existe para  $s > a$ .

**Demonstração:** Seja  $b \in \mathbb{R}^+$ , arbitrário. Como, por hipótese,  $f$  é seccionalmente contínua em  $\mathbb{R}_0^+$  temos que  $f$  é seccionalmente contínua em  $[0, b]$  e, portanto,  $f$  é integrável em  $[0, b]$ . Como o produto de duas funções integráveis é uma função integrável, temos que, para todo  $s \in \mathbb{R}$ , a função  $g$  dada por  $g(t) = f(t)e^{-st}$  é integrável em  $[0, b]$ , para todo  $b \in \mathbb{R}^+$  e, portanto, o integral  $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$  é um integral impróprio de primeira espécie.

Vamos mostrar que, para todo  $s > a$ , o integral impróprio de primeira espécie  $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$  é convergente.

Atendendo à hipótese temos, para todo  $t \geq K$ ,

$$|f(t)e^{-st}| = |f(t)|e^{-st} \leq M e^{-st} e^{at}. \quad (1.1)$$

Seja  $s > a$ . Então o integral impróprio  $\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} dt$  é convergente e, pelas propriedades dos integrais impróprios, tem-se que o integral impróprio  $\int_K^{+\infty} M e^{-st} e^{at} dt$  é convergente. A desigualdade (1.1) e o Critério de Comparação permitem então concluir que o integral impróprio  $\int_K^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$  é absolutamente convergente, logo convergente. Consequentemente, o integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

é também convergente, como se pretendia. ■

**Exemplo 1.6.** Consideremos a função  $f$  definida em  $\mathbb{R}$  por  $f(t) = e^{-\beta t} \cos(\alpha t)$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes reais não nulas.

Como  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}_0^+$  temos que  $f$  é seccionalmente contínua em  $\mathbb{R}_0^+$  e, portanto, seccionalmente contínua em  $[0, b]$ , para todo  $b \in \mathbb{R}^+$ .

Por outro lado, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , temos

$$|f(t)| = e^{-\beta t} |\cos(\alpha t)| \leq e^{-\beta t}. \quad (1.2)$$

<sup>2</sup>Seja  $f$  uma função real de domínio  $D_f$  e  $D \subset D_f$ . Dizemos que  $f$  é seccionalmente contínua em  $D$  se  $f$  é contínua em  $D$  excepto possivelmente num número finito de pontos  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  de  $D$  e, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $f(a_i^+) = \lim_{x \rightarrow a_i^+} f(x)$

e  $f(a_i^-) = \lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x)$  são ambos finitos.

Resulta imediatamente da definição que:

- i) se  $f$  é seccionalmente contínua num intervalo  $[a, b]$ , então  $f$  é seccionalmente contínua em qualquer subintervalo de  $[a, b]$ ;
- ii) se  $f$  é seccionalmente contínua num intervalo  $[a, b]$ , então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ ;
- iii) se  $f$  é contínua em  $D$ , então  $f$  é seccionalmente contínua em  $D$ .

Consequentemente, existem  $a \in \mathbb{R}$ ,  $M > 0$  e  $K > 0$  tais que

$$|f(t)| \leq M e^{at},$$

para todo o  $t \geq K$ . De facto, basta tomar na desigualdade (1.2)  $a = -\beta$ ,  $M = 1$  e considerar  $K$  um número real positivo qualquer.

Utilizando o Teorema 1.5 podemos então concluir que a função  $f$  admite transformada de Laplace para  $s > -\beta$ .

**Exercícios 1.1** 1. Mostre que:

(a) para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ , para  $s > 0$ ;

(b)  $\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$ , para  $s > 0$ .

2. Em cada uma das alíneas que se seguem calcule a transformada de Laplace da função  $f$  definida por:

(a)  $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq t < c \\ 1 & \text{se } t \geq c \end{cases}$ , com  $c$  constante positiva;

(b)  $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq t < a \\ 1 & \text{se } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{se } t > b \end{cases}$ , com  $a$  e  $b$  constantes positivas;

(c)  $f(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$

3. Em cada uma das alíneas que se seguem mostre que a função considerada admite transformada de Laplace para os valores de  $s$  indicados.

(a)  $f$  definida por  $f(t) = \frac{1}{1+t}$ , para  $s > 0$ ;

(b)  $f$  definida por  $f(t) = \frac{e^{at}}{1+t}$ , com  $a$  constante, para  $s > a$ .

## 1.2 Propriedades da Transformada de Laplace

A proposição que apresentamos a seguir estabelece que a transformação de Laplace é uma aplicação linear.

**Proposição 1.7.** *Sejam  $f$  e  $g$  duas funções cujo domínio contém  $\mathbb{R}_0^+$  e integráveis em  $[0, b]$ , para todo o  $b \in \mathbb{R}^+$ . Se  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  existe para  $s > s_f$  e  $\mathcal{L}\{g(t)\}$  existe para  $s > s_g$ , então, para todos os  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}$  existe para  $s > \max\{s_f, s_g\}$  e tem-se*

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

**Demonstração:** A hipótese garante que, para todo o  $s > s_f$ , o integral impróprio  $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$  é convergente e, para todo o  $s > s_g$ , o integral impróprio  $\int_0^{+\infty} g(t) e^{-st} dt$  é convergente.

Pelas propriedades dos integrais impróprios concluímos que, para todos os  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e, para todo o  $s > \max\{s_f, s_g\}$ , o integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} (\alpha f(t) e^{-st} + \beta g(t) e^{-st}) dt = \int_0^{+\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-st} dt$$

é convergente.

Podemos então concluir, pela Definição 1.3, que  $\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}$  existe para  $s > \max\{s_f, s_g\}$ , o que prova a primeira parte da proposição.

As propriedades dos integrais impróprios garantem que, para todos os  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , e, para todo o  $s > \max\{s_f, s_g\}$ ,

$$\int_0^{+\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-st} dt = \alpha \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt + \beta \int_0^{+\infty} g(t) e^{-st} dt,$$

o que, pela definição de transformada de Laplace, garante que

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\},$$

como se pretendia. ■

**Exemplo 1.8.** 1. Atendendo a que  $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$ , para  $s > a$  temos, pela Proposição 1.7,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cosh(at)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}e^{at} + \frac{1}{2}e^{-at}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\} \\ &= \frac{1}{2(s-a)} + \frac{1}{2(s+a)} \\ &= \frac{s}{s^2 - a^2} \end{aligned}$$

para todo o  $s \in \mathbb{R}$  tal que  $s > a$  e  $s > -a$ . Uma vez que

$$(s > a \wedge s > -a) \iff \begin{cases} s > a & \text{se } a \geq 0 \\ s > -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

temos

$$\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2 - a^2},$$

para  $s > |a|$ .

Temos também

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\sinh(at)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}e^{at} - \frac{1}{2}e^{-at}\right\} \\
 &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\} \\
 &= \frac{1}{2(s-a)} - \frac{1}{2(s+a)} \\
 &= \frac{a}{s^2 - a^2}
 \end{aligned}$$

para todo o  $s \in \mathbb{R}$  tal que  $s > a$  e  $s > -a$ .

Tal como no caso anterior conclui-se então que

$$\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2 - a^2},$$

para  $s > |a|$ .

2. Utilizando a Proposição 1.7 temos

$$\mathcal{L}\left\{\cosh(2t) - 3t^4 + \frac{2}{5}\sin(-3t)\right\} = \mathcal{L}\{\cosh(2t)\} - 3\mathcal{L}\{t^4\} + \frac{2}{5}\mathcal{L}\{\sin(-3t)\}.$$

Uma vez que:

- $\mathcal{L}\{\cosh(2t)\} = \frac{s}{s^2 - 4}$ , para  $s > 2$ ;
- $\mathcal{L}\{t^4\} = \frac{4!}{s^5}$ , para  $s > 0$ ;
- $\mathcal{L}\{\sin(-3t)\} = \frac{-3}{s^2 + 9}$ , para  $s > 0$ ;

vem

$$\mathcal{L}\left\{\cosh(2t) - 3t^4 + \frac{2}{5}\sin(-3t)\right\} = \frac{s}{s^2 - 4} - \frac{72}{s^5} - \frac{6}{5(s^2 + 9)}$$

para  $s > 2$ .

A propriedade que apresentamos a seguir é habitualmente designada **propriedade do deslocamento da transformada de Laplace** ou simplesmente **propriedade do deslocamento da transformada** e será útil na secção seguinte para a determinação de certas transformadas de Laplace inversas.

**Proposição 1.9.** *Seja  $f$  uma função cujo domínio contém  $\mathbb{R}_0^+$  e integrável em  $[0, b]$ , para todo o  $b \in \mathbb{R}^+$ . Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  existe para  $s > s_f$ , então, para todo o  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}$  existe para  $s > s_f + \lambda$  e tem-se*

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\} = F(s - \lambda).$$

**Demonstração:** Consideremos a função  $h$  definida por  $h(t) = e^{\lambda t} f(t)$ . Uma vez que o domínio de  $h$  coincide com o domínio de  $f$ , tem-se que o domínio de  $h$  contém  $\mathbb{R}_0^+$ .

Por outro lado, sendo  $b \in \mathbb{R}^+$ , arbitrário, tem-se que  $h$  é integrável em  $[0, b]$ , uma vez que, por hipótese,  $f$  é integrável em  $[0, b]$  e a função exponencial é também integrável neste intervalo.

Para todo o  $s \in \mathbb{R}$ , temos

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda t} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(s-\lambda)t} dt.$$

Uma vez que, por hipótese, a transformada de Laplace de  $f$  existe para  $s > s_f$ , conclui-se que o integral impróprio  $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-(\lambda+s)t} dt$  é convergente para  $-\lambda + s > s_f$ , o que permite concluir que  $\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}$  existe para  $s > s_f + \lambda$ .

Atendendo a que, para todo o  $s \in \mathbb{R}$  tal que  $s > s_f + \lambda$ , temos

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-(s-\lambda)t} dt = F(s - \lambda)$$

vem

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\} = F(s - \lambda),$$

como pretendíamos. ■

**Exemplo 1.10.** 1. Consideremos a função  $f$  definida por  $f(t) = e^{2t} \sinh(-\sqrt{3}t)$ .

Para  $s > |-\sqrt{3}|$ , ou seja, para  $s > \sqrt{3}$  temos

$$\mathcal{L}\{\sinh(-\sqrt{3}t)\} = F(s) = \frac{-\sqrt{3}}{s^2 - 3}.$$

Então, pela Proposição 1.9, vem

$$\mathcal{L}\{e^{2t} \sinh(-\sqrt{3}t)\} = F(s - 2) = \frac{-\sqrt{3}}{(s - 2)^2 - 3},$$

para  $s \in \mathbb{R}$  tal que  $s > \sqrt{3} + 2$ .

2. Consideremos a função  $f$  definida por  $f(t) = e^{\beta t} \cosh(\alpha t)$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes reais não nulas.

Para  $s > |\alpha|$  temos

$$\mathcal{L}\{\cosh(\alpha t)\} = F(s) = \frac{s}{s^2 - \alpha^2}.$$

Então, pela Proposição 1.9, vem

$$\mathcal{L}\{e^{\beta t} \cosh(\alpha t)\} = F(s - \beta) = \frac{s - \beta}{(s - \beta)^2 - \alpha^2},$$

para  $s \in \mathbb{R}$  tal que  $s > |\alpha| + \beta$ .

3. Consideremos a função  $f$  definida por  $f(t) = e^{-\beta t} \cos(\alpha t)$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes reais não nulas.

Para  $s > 0$  temos

$$\mathcal{L}\{\cos(\alpha t)\} = F(s) = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}.$$

Então, pela Proposição 1.9, vem

$$\mathcal{L}\{e^{-\beta t} \cos(\alpha t)\} = F(s - (-\beta)) = \frac{s + \beta}{(s + \beta)^2 + \alpha^2},$$

para  $s \in \mathbb{R}$  tal que  $s > -\beta$ .

A proposição que apresentamos a seguir estabelece uma propriedade habitualmente designada **propriedade da derivada da transformada de Laplace** ou simplesmente **propriedade da derivada da transformada**. A demonstração desta propriedade sai fora do âmbito deste curso, pelo que é omitida.

**Proposição 1.11.** *Seja  $f$  uma função cujo domínio contém  $\mathbb{R}_0^+$  e integrável em  $[0, b]$ , para todo o  $b \in \mathbb{R}^+$ . Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  existe para  $s > s_f$ , então, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}$  existe para  $s > s_f$  e tem-se*

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s),$$

onde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F^{(n)}$  representa a derivada de ordem  $n$  da função  $F$ .

**Observação 1.12.** Atendendo à Proposição 1.11 temos que, sendo  $f$  uma função cujo domínio contém  $\mathbb{R}_0^+$  e integrável em  $[0, b]$ , para todo o  $b \in \mathbb{R}^+$ , se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  existe para  $s > s_f$ , então temos

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$$

e

$$\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = F''(s),$$

para  $s > s_f$ .

**Exemplo 1.13.** 1. Uma vez que  $\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = F(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}$ , para  $s > |a|$ , a Proposição 1.11 garante que

$$\mathcal{L}\{t \sinh(at)\} = -F'(s),$$

para  $s > |a|$ .

Uma vez que  $F'(s) = \frac{-2as}{(s^2 - a^2)^2}$  temos

$$\mathcal{L}\{t \sinh(at)\} = \frac{2as}{(s^2 - a^2)^2},$$

para  $s > |a|$ .

2. Uma vez que  $\mathcal{L}\{\cos(3t)\} = F(s) = \frac{s}{s^2 + 9}$ , para  $s > 0$ , a Proposição 1.11 garante que

$$\mathcal{L}\{t^2 \cos(3t)\} = (-1)^2 F''(s),$$

para  $s > 0$ .

Atendendo a que

$$F'(s) = \left( \frac{s}{s^2 + 9} \right)' = \frac{s^2 + 9 - 2s^2}{(s^2 + 9)^2} = \frac{-s^2 + 9}{(s^2 + 9)^2}$$

temos

$$F''(s) = \left( \frac{-s^2 + 9}{(s^2 + 9)^2} \right)' = \frac{2s^3 - 54s}{(s^2 + 9)^3},$$

e, portanto,

$$\mathcal{L}\{t^2 \cos(3t)\} = \frac{2s^3 - 54s}{(s^2 + 9)^3},$$

para  $s > 0$ .

3. Uma vez que  $\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) = \frac{1}{s-a}$ , para  $s > a$ , e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \frac{n!}{(s-a)^{n+1}},$$

a Proposição 1.11 garante que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = (-1)^n F^{(n)}(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}},$$

para  $s > a$ .

As duas proposições que apresentamos a seguir estabelecem propriedades que são úteis para a determinação da transformada de Laplace de certas funções.

**Proposição 1.14.** *Seja  $f$  uma função de domínio  $\mathbb{R}$ , integrável em  $[0, b]$ , para todo o  $b \in \mathbb{R}^+$  e que é nula em  $\mathbb{R}^-$ . Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  existe para  $s > s_f$ , então, para todo o  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $\mathcal{L}\{f(t-a)\}$  existe para  $s > s_f$  e tem-se*

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as} F(s).$$

**Demonstração:** Por hipótese, para todo o  $s > s_f$ , o integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

é convergente, ou seja, o limite

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_0^b f(t) e^{-st} dt \right)$$

existe e é finito.

Para além disso, para  $s > s_f$  tem-se

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Seja  $a \in \mathbb{R}^+$ , arbitrário. Para estudar a natureza do integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} f(t-a) e^{-st} dt$$

temos de estudar o limite

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_0^b f(t-a) e^{-st} dt \right).$$

Se efectuarmos a mudança de variável definida por  $u = t - a$  temos, para todo o  $b > a$ ,

$$\int_0^b f(t-a) e^{-st} dt = \int_{-a}^{b-a} f(u) e^{-s(u+a)} du = \int_{-a}^0 f(u) e^{-s(u+a)} du + \int_0^{b-a} f(u) e^{-s(u+a)} du.$$

Uma vez que, por hipótese,  $f$  é nula em  $\mathbb{R}^-$ , vem

$$\int_0^b f(t-a) e^{-st} dt = \int_0^{b-a} f(u) e^{-s(u+a)} du = e^{-sa} \int_0^{b-a} f(u) e^{-su} du.$$

Atendendo à hipótese temos que, para  $s > s_f$ ,

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_0^{b-a} f(u) e^{-su} du \right) = F(s).$$

Concluimos então que, para  $s > s_f$ ,

$$\int_0^{+\infty} f(t-a) e^{-st} dt = e^{-sa} F(s),$$

o que permite concluir que  $\mathcal{L}\{f(t-a)\}$  existe para  $s > s_f$  tendo-se

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as} F(s),$$

como se pretendia. ■

**Exemplo 1.15.** 1. Consideremos a função  $h$  definida por

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 5 \\ \cos(t-5) & \text{se } t \geq 5 \end{cases}$$

e vamos determinar  $\mathcal{L}\{h(t)\}$ .

Uma vez que, para todo o  $t \in \mathbb{R}$ , temos  $h(t) = f(t-5)$ , sendo  $f$  a função definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \cos t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

e  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{1+s^2}$ , para  $s > 0$ , temos pela Proposição 1.14,

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = e^{-5s} \frac{s}{1+s^2},$$

para  $s > 0$ .



2. Consideremos a função  $h$  definida por

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 1 \\ (t-1)^2 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

e vamos determinar  $\mathcal{L}\{h(t)\}$ .

Uma vez que, para todo o  $t \in \mathbb{R}$ , temos  $h(t) = f(t-1)$ , sendo  $f$  a função definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t^2 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

e

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3} = F(s),$$

para  $s > 0$ , a Proposição 1.14 garante que

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{f(t-1)\} = e^{-s}F(s) = e^{-s} \frac{2}{s^3},$$

para  $s > 0$ .

**Proposição 1.16.** *Seja  $f$  uma função cujo domínio contém  $\mathbb{R}_0^+$  e integrável em  $[0, b]$ , para todo o  $b \in \mathbb{R}^+$ . Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  existe para  $s > s_f$ , então, para todo o  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $\mathcal{L}\{f(at)\}$  existe para  $s > as_f$  e tem-se*

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

**Demonstração:** Por hipótese, para todo o  $s > s_f$ , o integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

é convergente, ou seja, o limite

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_0^b f(t) e^{-st} dt \right)$$

existe e é finito.

Para além disso tem-se, para todo o  $s > s_f$ ,

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Seja  $a \in \mathbb{R}^+$ , arbitrário. Para estudar a natureza do integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} f(at) e^{-st} dt$$

temos de estudar o limite

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_0^b f(at) e^{-st} dt \right).$$

Se efectuarmos a mudança de variável definida por  $u = at$  temos, para todo o  $b \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\int_0^b f(at) e^{-st} dt = \frac{1}{a} \int_0^{ab} f(u) e^{-(s/a)u} du.$$

Uma vez que, para  $\frac{s}{a} > s_f$ ,

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_0^{ab} f(u) e^{-(s/a)u} du \right) = F\left(\frac{s}{a}\right),$$

concluimos que, para  $s > as_f$ ,

$$\int_0^{+\infty} f(at) e^{-st} dt = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right),$$

o que permite concluir que  $\mathcal{L}\{f(at)\}$  existe para  $s > as_f$  tendo-se

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right),$$

como se pretendia. ■

**Exemplo 1.17.** Atendendo a que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{L}\{t^n\} = F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ , para  $s > 0$ , temos, pela Proposição 1.16,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^n}{2^n}\right\} = \mathcal{L}\left\{\left(\frac{t}{2}\right)^n\right\} = 2F(2s) = \frac{2n!}{(2s)^{n+1}},$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , e para  $s > 0$ .

A proposição que apresentamos a seguir estabelece uma fórmula que relaciona a transformada de Laplace da derivada de ordem  $n$  de uma função com a transformada de Laplace dessa função e os valores das derivadas na origem até à ordem  $n - 1$ . Esta propriedade, habitualmente designada **propriedade da transformada de Laplace da derivada** ou simplesmente **propriedade da transformada da derivada**, é, como veremos no capítulo seguinte, muito útil quando se utilizam as transformadas de Laplace para resolver problemas de valor inicial que envolvem equações diferenciais lineares de coeficientes constantes. A demonstração desta proposição sai fora do âmbito deste curso, pelo que é omitida.

**Proposição 1.18.** *Seja  $f$  uma função cujo domínio contém  $\mathbb{R}_0^+$  e integrável em  $[0, b]$ , para todo o  $b \in \mathbb{R}^+$ . Admita-se que as suas primeiras  $n$  derivadas  $f', f'', \dots, f^{(n)}$ , existem em  $\mathbb{R}_0^+$ .*

*Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  existe para  $s > s_f$  e, para todo o  $p \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ,  $\mathcal{L}\{f^{(p)}(t)\}$  existe para  $s > s_{f^{(p)}}$ , então  $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$  existe e tem-se*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j} f^{(j)}(0) \\ &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \end{aligned}$$

para  $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''}, \dots, s_{f^{(n-1)}}\}$ .

**Exemplo 1.19.** 1. Seja  $f$  uma função que satisfaz as condições da Proposição 1.18 e tal que  $f(0) = 1$ ,

$f'(0) = 0$  e  $f''(0) = 3$ . Sendo  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  temos

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - s f'(0) - f''(0) = s^2 F(s) - s$$

e

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3 F(s) - s^2 f'(0) - s f''(0) - f'''(0) = s^3 F(s) - s^2 - 3.$$

2. Seja  $y = f(t)$  uma função que satisfaz as condições da Proposição 1.18 e tal que  $f(0) = 2$  e  $f'(0) = -1$ . Sendo  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' + 3y' - y\} &= \mathcal{L}\{y''\} + 3\mathcal{L}\{y'\} - \mathcal{L}\{y\} \\ &= (s^2 F(s) - s f'(0) - f''(0)) + 3(s F(s) - f(0)) - F(s) \\ &= s^2 F(s) - 2s + 1 + 3s F(s) - 6 - F(s) \\ &= (s^2 + 3s - 1)F(s) - 2s - 5. \end{aligned}$$

**Exercícios 1.2** 1. Em cada uma das alíneas que se seguem, determine a transformada de Laplace da função  $f$  definida pela expressão analítica indicada.

(a)  $f(t) = 5t^6$

(b)  $f(t) = \cos(\sqrt{5}t)$

(c)  $f(t) = \sinh\left(-\frac{3}{2}t\right)$

(d)  $f(t) = \frac{2}{3}e^{5t}$

(e)  $f(t) = \cosh(3t) - \sin(2t)$

(f)  $f(t) = e^{-3t} \sin(2t)$

(g)  $f(t) = 2e^{-t} - 3 \sin(4t)$

(h)  $f(t) = t^2 e^{2t}$

(i)  $f(t) = t^2 \cos t$

(j)  $f(t) = (t^2 - 3t + 2) \sin(3t)$

(k)  $f(t) = e^{-t} \cosh(4t)$

(l)  $f(t) = (1 + t^2) e^{-3t}$

(m)  $f(t) = e^{-3t} t^4$

(n)  $f(t) = \sin(2t) \cos(3t)$

(o)  $f(t) = t \sin(2t) \cos(4t)$

(p)  $f(t) = e^{-6t} \cos(5t) \cos(2t)$

(q)  $f(t) = \cos^2(3t)$

(r)  $f(t) = (\sin t - \cos t)^2$

(s)  $f(t) = t^3 e^{-3t} + e^{-t} \cos(2t)$

(t)  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 2 \\ 1 & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$

$$(u) \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \pi \\ \sin(t - \pi) & \text{se } t \geq \pi \end{cases}$$

2. Em cada uma das alíneas que se seguem, determine a transformada de Laplace da função considerada, supondo que a função  $f$  e as suas derivadas satisfazem as condições da Proposição 1.18 e que  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ .

(a)  $f''(t)$  sabendo que  $f(0) = 1$  e  $f'(0) = 2$ ;

(b)  $f'''(t)$  sabendo que  $f(0) = -2$ ,  $f'(0) = 0$  e  $f''(0) = 1$ .

### 1.3 Transformada de Laplace Inversa

Como vimos, sendo  $f$  uma função cujo domínio contém  $\mathbb{R}_0^+$ , seccionalmente contínua em  $\mathbb{R}_0^+$  e tal que existem constantes  $a \in \mathbb{R}$ ,  $M > 0$  e  $K > 0$  tais que  $|f(t)| \leq M e^{at}$ , para todo o  $t \geq K$ , podemos associar-lhe a sua transformada de Laplace  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  definida para  $s > a$ .

Dada uma função  $F$  definida para  $s > \alpha$ , a determinação da transformada de Laplace inversa de  $F$  consiste em encontrar uma função  $f$  definida em  $[0, +\infty[$  tal que  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ .

Temos a seguinte definição:

**Definição 1.20.** Seja  $F$  uma função definida para  $s > \alpha$ . Chama-se *transformada de Laplace inversa* de  $F$  e representa-se por  $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$  ou  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  à função  $f$ , caso exista, definida em  $\mathbb{R}_0^+$  e integrável em  $[0, b]$ , para todo o  $b \in \mathbb{R}^+$ , tal que  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , para  $s > \alpha$ .

Temos então, para todo o  $t \in \mathbb{R}_0^+$ ,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad \text{ou} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F\},$$

onde, tal como no caso da transformada de Laplace, e para simplificar a notação, se escreve  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  em lugar de  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$  ou  $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$  em lugar de  $\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t)$ .

**Observação 1.21.** Observe-se que, dada uma função  $F$  definida para  $s > \alpha$ , nem sempre existe  $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ .

Por outro lado, supondo que  $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$  existe, põe-se ainda a questão de saber se esta função é única. Como vimos no Exemplo 1.4 temos, para  $s > 0$ ,  $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$  e, sendo  $f$  a função definida em  $[0, +\infty[$  por

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0, +\infty[ \setminus \{1, 3\} \\ 2 & \text{se } t = 1 \\ 0 & \text{se } t = 3 \end{cases}$$

temos também  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}$ .

Neste caso, escolhemos para transformada de Laplace inversa da função  $F$  a função que é contínua.

Então, a transformada de Laplace inversa da função  $F$  definida em  $\mathbb{R}^+$  por  $F(s) = \frac{1}{s}$  é a restrição a  $\mathbb{R}_0^+$  da função constante igual a 1. Podemos então escrever

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) = 1,$$

para todo o  $t \geq 0$ .

A escolha que acabámos de fazer é justificada pelo teorema que a seguir se enuncia. Este teorema, cuja demonstração é omitida, garante que existe uma única função contínua em  $\mathbb{R}_0^+$  cuja transformada de Laplace é a função  $F$ .

**Teorema 1.22.** *Sejam  $f$  e  $g$  duas funções cujo domínio contém  $\mathbb{R}_0^+$  e seccionalmente contínuas em  $\mathbb{R}_0^+$  tais que*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \mathcal{L}\{g(t)\},$$

para  $s > \alpha$ .

*Se  $f$  e  $g$  são contínuas em  $t \in \mathbb{R}_0^+$ , então  $f(t) = g(t)$ .*

*Em particular, se  $f$  e  $g$  são ambas contínuas em  $\mathbb{R}_0^+$ , temos  $f(t) = g(t)$ , para todo o  $t \in \mathbb{R}_0^+$ .*

A transformada de Laplace inversa goza de propriedades análogas às que foram estabelecidas na secção anterior para a transformada de Laplace. Em particular, podemos estabelecer as proposições seguintes cujas demonstrações são deixadas como exercício.

**Proposição 1.23.** *Se  $F$  e  $G$  admitem transformadas de Laplace inversas então, para todos os  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha F(s) + \beta G(s)$  admite transformada de Laplace inversa e tem-se*

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

**Proposição 1.24.** *Se  $F$  admite transformada de Laplace inversa então, para todo o  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $F(s - \lambda)$  admite transformada de Laplace inversa e tem-se*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s - \lambda)\} = e^{\lambda t} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Há vários métodos para efectuar a inversão da transformação de Laplace. Utilizaremos aqui apenas aquele que se baseia no uso das tabelas de transformadas de Laplace <sup>3</sup> lidas em sentido inverso e as propriedades da transformada de Laplace inversa. <sup>4</sup>

**Exemplo 1.25.** 1. Consideremos a função  $F$  definida num intervalo adequado <sup>5</sup> por

$$F(s) = \frac{2s}{s^2 + 1},$$

e vamos determinar a sua transformada de Laplace inversa.

<sup>3</sup>No final do capítulo apresenta-se uma tabela de transformadas de Laplace.

<sup>4</sup>Observe-se que algumas das transformadas de Laplace incluídas na tabela apresentada (em particular as transformadas de Laplace das funções exponencial, seno e coseno), bem como as que destas se obtêm por aplicação da propriedade do deslocamento da transformada, são dadas por fracções cujo denominador é um polinómio irredutível. É então natural que, para a determinação da transformada de Laplace inversa, se utilizem as técnicas de decomposição de uma fracção própria em fracções simples já descritas para a primitivação de funções racionais.

<sup>5</sup>Na generalidade dos casos este intervalo pode ser indicado depois de se determinar a transformada de Laplace inversa.

Temos, para  $s > 0$ ,  $\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2 + 1}$ , o que significa que  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 1}\right\} = \cos t$ , para todo o  $t \geq 0$ . Atendendo à Proposição 1.23 vem

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2 + 1}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 1}\right\} = 2\cos t,$$

para todo o  $t \in \mathbb{R}_0^+$ .

Podemos agora concluir que a função  $F$  está definida em  $\mathbb{R}^+$ .

2. Consideremos a função  $F$  definida num intervalo adequado por

$$F(s) = \frac{3s}{s^2 + 4s + 5},$$

e vamos determinar a sua transformada de Laplace inversa.

Uma vez que

$$\frac{3s}{s^2 + 4s + 5} = \frac{3s}{(s+2)^2 + 1} = \frac{3(s+2) - 6}{(s+2)^2 + 1} = \frac{3(s+2)}{(s+2)^2 + 1} - \frac{6}{(s+2)^2 + 1}$$

temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2 + 4s + 5}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s+2)}{(s+2)^2 + 1} - \frac{6}{(s+2)^2 + 1}\right\} \\ &= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2 + 1}\right\} - 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2 + 1}\right\} \\ &= 3e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 1}\right\} - 6e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} \\ &= 3e^{-2t}\cos t - 6e^{-2t}\sin t \\ &= 3e^{-2t}(\cos t - 2\sin t) \end{aligned}$$

para  $t \geq 0$ .

Podemos agora concluir que a função  $F$  está definida em  $]-2, +\infty[$ .

3. Consideremos a função  $F$  definida em num intervalo adequado por

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 6s + 13},$$

e vamos determinar a sua transformada de Laplace inversa.

Uma vez que

$$\frac{s}{s^2 + 6s + 13} = \frac{s}{(s+3)^2 + 4} = \frac{s+3-3}{(s+3)^2 + 4} = \frac{s+3}{(s+3)^2 + 4} - \frac{3}{(s+3)^2 + 4}$$

temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6s+13}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+4} - \frac{3}{(s+3)^2+4}\right\} \\
 &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+4}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2+4}\right\} \\
 &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+4}\right\} - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+3)^2+4}\right\} \\
 &= e^{-3t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \frac{3}{2}e^{-3t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} \\
 &= e^{-3t}\cos(2t) - \frac{3}{2}e^{-3t}\sin(2t) \\
 &= e^{-3t}\left(\cos(2t) - \frac{3}{2}\sin(2t)\right)
 \end{aligned}$$

para  $t \geq 0$ .

Podemos agora concluir que a função  $F$  está definida em  $]-3, +\infty[$ .

4. Consideremos a função  $F$  definida em num intervalo adequado por

$$F(s) = \frac{3s-8}{s^2-5s+6},$$

e vamos determinar a sua transformada de Laplace inversa.

Observe-se que  $s^2-5s+6 = (s-2)(s-3)$  e, portanto, temos

$$\frac{3s-8}{s^2-5s+6} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3}$$

com  $A$  e  $B$  constantes reais a determinar. Utilizando o método dos coeficientes indeterminados obtemos

$$\frac{3s-8}{s^2-5s+6} = \frac{2}{s-2} + \frac{1}{s-3}.$$

Uma vez que para  $s > 2$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}$$

e para  $s > 3$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = e^{3t}$$

podemos associar a função considerada às transformadas de Laplace das funções  $f(t) = e^{2t}$  e  $g(t) = e^{3t}$ .

Temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-8}{s^2-5s+6}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-2} + \frac{1}{s-3}\right\} \\
 &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \\
 &= 2e^{2t} + e^{3t},
 \end{aligned}$$

para  $t \geq 0$ .

Podemos agora concluir que a função considerada está definida para  $s > 3$ .

5. Consideremos a função  $F$  definida em num intervalo adequado por

$$F(s) = \frac{s+5}{(s-1)(s^2+2s+3)},$$

e vamos determinar a sua transformada de Laplace inversa.

Observe-se que o denominador da fracção considerada é um produto de polinómios irredutíveis temos

$$\frac{s+5}{(s-1)(s^2+2s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+3}$$

com  $A$ ,  $B$  e  $C$  constantes reais a determinar. Utilizando o método dos coeficientes indeterminados obtemos

$$\frac{s+5}{(s-1)(s^2+2s+3)} = \frac{1}{s-1} + \frac{-s-2}{s^2+2s+3} = \frac{1}{s-1} - \frac{s+2}{(s+1)^2+2}.$$

Temos então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+5}{(s-1)(s^2+2s+3)} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} - \frac{s+2}{(s+1)^2+2} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+2} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{(s+1)^2+2} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2+2} \right\} \\ &= e^t - e^{-t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+2} \right\} - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{(s+1)^2+2} \right\} \\ &= e^t - e^{-t} \cos(\sqrt{2}t) - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{s^2+2} \right\} \\ &= e^t - e^{-t} \cos(\sqrt{2}t) - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin(\sqrt{2}t) \\ &= e^t - e^{-t} \left( \cos(\sqrt{2}t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) \right) \end{aligned}$$

para  $t \geq 0$ .

Podemos agora concluir que a função considerada está definida para  $s > 1$ .

6. Consideremos a função  $F$  definida em  $\mathbb{R}^+$  por  $F(s) = e^{-2s} \frac{1}{s^2}$ .

Como

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = t,$$

temos, pela Proposição 1.14,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-2s} \frac{1}{s^2} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < 2 \\ t-2 & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$$



**Exercícios 1.3:** Em cada uma das alíneas que se seguem, determine  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  sendo  $F$  definida por

a)  $F(s) = \frac{5}{s^2 + 25}$

b)  $F(s) = \frac{3}{s - 4}$

c)  $F(s) = \frac{2s}{s^2 - 9}$

d)  $F(s) = \frac{4}{s^7}$

e)  $F(s) = \frac{7}{s}$

f)  $F(s) = \frac{s}{s^2 + 2}$

g)  $F(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 4s + 40}$

h)  $F(s) = \frac{5}{s^2 - 6s - 7}$

i)  $F(s) = \frac{3s - 5}{s(s - 2)(s + 3)}$

j)  $F(s) = \frac{1}{(s + 1)^2}$

k)  $F(s) = \frac{1}{s^2 - 3s}$

l)  $F(s) = e^{-s} \frac{1}{(s - 2)^2}$

m)  $F(s) = \frac{s^2 + 20s + 9}{(s - 1)^2(s^2 + 9)}$

**Tabela de Transformadas de Laplace**

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, \quad s > s_f$
1	$\frac{1}{s}, s > 0$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, n \in \mathbb{N}, s > 0$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}, s > a$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$
$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, s >  a $
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, s >  a $

## 1.4 Soluções dos exercícios propostos

### Exercícios 1.1

- Use o princípio da indução matemática sobre  $n$ . Para provar a tese use a definição de Transformada de Laplace.
  - Use a definição de T.L. calculando  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \sin(at) e^{-st} dt$ , discutindo o limite quando  $a$  e  $s$  tomam valores em  $\mathbb{R}$ .
- $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{2 - e^{-sc}}{s}, s > 0.$
  - $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \begin{cases} a + b & \text{se } s = 0 \\ \frac{2 - e^{-sa} - e^{-sb}}{s} & \text{se } s \neq 0 \end{cases}.$
  - $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s^2}, s > 0.$
- A função está definida e é contínua em  $\mathbb{R}_0^+$ . Além disso, para todo o  $t \in \mathbb{R}_0^+$  tem-se  $|f(t)| \leq 1 \leq e^{\alpha t}$ , se  $\alpha = 0$ . Ficam satisfeitas as condições suficientes de existência de  $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$  para  $s > \alpha = 0$ .
  - A função está definida e é contínua em  $\mathbb{R}_0^+$ . Além disso, para todo o  $t \in \mathbb{R}_0^+$  tem-se  $|f(t)| \leq e^{\alpha t}$ , se  $\alpha = a$ . Ficam satisfeitas as condições suficientes de existência de  $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$  para  $s > \alpha = a$ .

### Exercícios 1.2

- $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{3600}{s^7}, s > 0.$
  - $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{s}{s^2 + 5}, s > 0.$
  - $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{-6}{4s^2 - 9}, s > \frac{3}{2}.$
  - $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{2}{3s - 15}, s > 5.$
  - $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{s}{s^2 - 9} - \frac{2}{s^2 + 4}, s > 3.$
  - $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{2}{(s + 3)^2 + 4}, s > -3.$
  - $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = 2\frac{1}{s + 1} - \frac{12}{s^2 + 16}, s > 0.$
  - $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{2}{(s - 2)^3}, s > 2.$
  - $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{2s^3 - 6s}{(s^2 + 1)^3}, s > 0.$
  - $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{6s^4 - 18s^3 + 66s^2 - 162s + 432}{(s^2 + 9)^3}, s > 0.$
  - $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{s + 1}{(s + 1)^2 - 16}, s > 3.$

$$(l) \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{2}{(s+3)^3}, s > -3.$$

$$(m) \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{4!}{(s+3)^5}, s > -3.$$

$$(n) \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{2} \frac{5}{s^2+25} - \frac{1}{2} \frac{1}{s^2+1}, s > 0.$$

**Sugestão:** Some ordenadamente as fórmulas trigonométricas:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

para obter a decomposição:

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]. \quad (1.3)$$

$$(o) \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = -\frac{2s}{(s^2+4)^2} + \frac{6s}{(s^2+36)^2}, s > 0.$$

**Sugestão:** Aplique a Fórmula (1.3) tomando  $a = 2t$  e  $b = 4t$ .

$$(p) \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{2} \frac{s+6}{(s+6)^2+49} + \frac{1}{2} \frac{s+6}{(s+6)^2+9}, s > -6.$$

**Sugestão:** Some ordenadamente as fórmulas trigonométricas:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\text{para obter a decomposição: } \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)].$$

$$(q) \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+36} + \frac{1}{2s}, s > 0.$$

**Sugestão:** Some ordenadamente  $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos(2a)$  e  $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$  para obter a decomposição  $\cos^2 a = \frac{1}{2} \cos(2a) + \frac{1}{2}$ .

$$(r) \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2+4}, s > 0.$$

**Sugestão:** Aplique as fórmulas trigonométricas:  $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$  e  $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$  para obter a decomposição  $(\sin a - \cos a)^2 = 1 - \sin(2a)$ .

$$(s) \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{6}{(s+3)^4} + \frac{s+1}{(s+1)^2+4}, s > -1.$$

$$(t) \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = e^{-2s} \frac{1}{s}, s > 0.$$

$$(u) \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = e^{-\pi s} \frac{1}{s^2+1}, s > 0.$$

$$2. (a) \mathcal{L}\{f''(t)\}(s) = s^2 F(s) - s - 2.$$

$$(b) \mathcal{L}\{f'''(t)\}(s) = s^3 F(s) + 2s^2 - 1.$$

### Exercícios 1.3

$$1. (a) \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \sin(5t), t \geq 0.$$

(b)  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = 3e^{4t}, t \geq 0.$

(c)  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = 2 \cosh(3t), t \geq 0.$

(d)  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{t^6}{180}, t \geq 0.$

(e)  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = 7, t \geq 0.$

(f)  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \cos(\sqrt{2}t), t \geq 0.$

(g)  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = e^{-2t} \cos(6t), t \geq 0.$

(h)  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{5}{8}e^{7t} - \frac{5}{8}e^{-t}, t \geq 0.$

**Sugestão:** Calcule  $A, B \in \mathbb{R}$  na decomposição:  $F(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-7}.$

(i)  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{5}{6} + \frac{1}{10}e^{2t} - \frac{14}{15}e^{-3t}, t \geq 0.$

**Sugestão:** Calcule  $A, B, C \in \mathbb{R}$  na decomposição:  $F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+3}.$

(j)  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = te^{-t}, t \geq 0.$

(k)  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{3t}, t \geq 0.$

**Sugestão:** Calcule  $A, B \in \mathbb{R}$  na decomposição:  $F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3}.$

(l)  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ (t-1)e^{2(t-1)} & \text{se } t \geq 1 \end{cases}.$

(m)  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{8}{5}e^t + 3te^t - \frac{8}{5}\cos(3t) - \frac{6}{5}\sin(3t), t \geq 0.$

**Sugestão:** Calcule os valores de  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  na decomposição:

$$F(s) = \frac{s^2 + 20s + 9}{(s-1)^2(s^2+9)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+9}.$$

## Capítulo 2

# Equações Diferenciais

### 2.1 Introdução

Muitos problemas de diversas áreas científicas quando formulados em termos matemáticos requerem a determinação de uma função que satisfaça uma equação contendo derivadas da função a determinar. Uma equação deste tipo designa-se **equação diferencial** e, no caso em que a equação expressa uma relação entre uma variável independente, uma variável dependente e uma ou mais derivadas da variável dependente relativamente à única variável independente, dizemos que se trata de uma **equação diferencial ordinária**. Neste capítulo vamos estudar algumas equações diferenciais ordinárias que designaremos simplesmente equações diferenciais.

Começemos por apresentar alguns exemplos de equações diferenciais:

- O caso mais simples de uma equação diferencial ordinária, já estudado anteriormente, é o de uma equação do tipo

$$y' - f(x) = 0 \iff y' = f(x),$$

onde  $f$  é uma função dada definida num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Resolver esta equação é procurar as funções diferenciáveis  $y = F(x)$  definidas e diferenciáveis em  $I$  para as quais a igualdade

$$F'(x) = f(x)$$

se verifique para todo o  $x \in I$ . Como vimos, uma tal função  $F$  é designada por primitiva de  $f$  em  $I$ . Para certos tipos de funções  $f$ , a determinação de uma primitiva  $F$  é feita pelos métodos de primitivação já estudados anteriormente. Note-se, no entanto, que aqueles métodos só em casos bastante particulares, embora importantes, se podem aplicar. Nenhum dos métodos acima referidos, por exemplo, permite sair do âmbito das chamadas funções elementares;<sup>1</sup> e sucede que muitas funções elementares têm primitivas que o não são, não podendo por isso ser determinadas por aqueles métodos. É o caso, por exemplo, das funções definidas (em domínios adequados) pelas

---

<sup>1</sup>Chamam-se **funções elementares** às funções que podem obter-se mediante um número finito de operações de adição, multiplicação, divisão e composição efectuadas a partir de funções racionais e funções transcendentais elementares (a função exponencial e sua inversa e as funções trigonométricas e respectivas inversas).

expressões

$$e^{x^2}, \frac{\sin x}{x}, \frac{1}{\ln x}$$

que são elementares, mas não admitem uma primitiva definida à custa de funções elementares.

Como também vimos, sendo  $F$  uma primitiva de  $f$  no intervalo  $I$ , a família de todas as primitivas de  $f$  em  $I$  é o conjunto

$$\{F(x) + C, C \in \mathbb{R}\}.$$

Esta família é também designada por **integral geral** da equação diferencial  $y' - f(x) = 0$  em  $I$ , o que significa que qualquer solução daquela equação diferencial se obtém a partir da expressão  $F(x) + C$  atribuindo à constante  $C$  um valor conveniente.

- Uma partícula de massa  $m$  desloca-se sobre o eixo  $Ox$  sob a acção de uma *força elástica*  $-kx\vec{i}$  ( $k > 0$ ) e de uma *força de amortecimento* proporcional à velocidade e dada por  $-cv\vec{i}$ , ( $c > 0$ ), onde  $v$  designa a velocidade da partícula e  $k$  e  $c$  são constantes. A determinação da equação que rege o movimento é feita por aplicação da Segunda Lei de Newton (da Dinâmica) que é dada por

$$m\vec{a} = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j,$$

onde  $\vec{a}$  denota a aceleração da partícula material e  $\sum_{j=1}^n \vec{F}_j$  é o somatório de todas as forças que actuam sobre ela. Como  $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}$  e  $v = \frac{dx}{dt}$ , obtém-se a relação

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} = -kx\vec{i} - c \frac{dx}{dt} \vec{i}$$

ou,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Esta é a equação diferencial que governa o movimento da partícula material e que resultou de considerações físicas. O problema matemático que se põe agora é o da determinação da lei do movimento, isto é, a determinação de uma função  $x = x(t)$ , com  $t \geq 0$  que satisfaça aquela equação.

- No estudo do decaimento radioactivo, o número de átomos que se desintegram por unidade de tempo é proporcional ao número de átomos presentes nesse instante. A equação que traduz esta relação é a equação diferencial

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

onde  $N$  é o número de átomos presentes no instante  $t$  e  $\lambda$  é uma constante designada *constante de decaimento*.

- Um modelo matemático para o crescimento de uma população  $P$  é dado pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = KP,$$

onde  $K$  é uma constante.

- A *lei do arrefecimento de Newton* estabelece que o coeficiente de variação da temperatura de um objecto é proporcional à diferença entre a sua temperatura  $T$  e a temperatura  $T_m$  do meio ambiente e é dada pela equação diferencial

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m),$$

onde  $k$  é uma constante positiva.

## 2.2 Definições e terminologia

**Definição 2.1.** Chama-se *equação diferencial ordinária* (EDO) a toda a equação que estabelece uma relação entre uma variável independente, uma função desconhecida que depende desta variável e uma ou mais derivadas da função desconhecida relativamente à variável independente.

**Observação 2.2.** Se  $x$  for a variável independente e  $y = f(x)$  for a função desconhecida que depende da variável  $x$ , uma EDO é uma equação da forma

$$E(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

onde, como habitualmente,  $y^{(k)}$  denota, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , a derivada de ordem  $k$  de  $y$  em ordem a  $x$  que, para  $k = 1, 2, 3$  se escreve  $y'$ ,  $y''$  e  $y'''$ , respectivamente.

Se, para cada que  $k \in \mathbb{N}$ , representarmos a derivada de ordem  $k$  de  $y$  em ordem a  $x$  por  $\frac{d^k y}{dx^k}$ , a equação diferencial ordinária pode também ser escrita na forma

$$E\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

No que se segue, e por uma questão de simplificação de linguagem, utilizaremos a designação equação diferencial em vez de equação diferencial ordinária.

**Exemplo 2.3.** As equações

$$xy' + y = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + 2xy = x^2 \sin(x), \quad (y')^2 + y'' = y, \quad \frac{dy}{dt} = t^2 \quad \text{e} \quad (y')^2 + y = \cos(x)$$

são equações diferenciais.

**Definição 2.4.** Chama-se *ordem* de uma equação diferencial à maior ordem da derivada da função desconhecida.

**Exemplo 2.5.** As equações

$$xy' + y = 0, \quad \frac{dy}{dt} = t^2, \quad y' = \frac{4y}{x(y-3)} \quad \text{e} \quad (y')^2 + y = \cos(x)$$



são equações diferenciais de primeira ordem.

As equações

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2xy = x^2 \sin(x) \quad \text{e} \quad (y')^2 + y'' = y$$

são equações diferenciais de ordem 2 ou de segunda ordem.

**Definição 2.6.** Dizemos que uma equação diferencial está na *forma normal* quando se encontra explicitada em relação à derivada de maior ordem que nela figura, isto é, está escrita na forma

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

ou na forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

Caso contrário, dizemos que está na *forma implícita*.

**Exemplo 2.7.** As equações

$$y'' = -y, \quad y^{(4)} = \cos x - y'' - y, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2xy + x^2 \sin(x), \quad \text{e} \quad y' = \frac{4y}{x(y-3)}$$

estão na forma normal.

As equações

$$(y')^2 + y'' - y = 0 \quad \text{e} \quad t \frac{ds}{dt} = s + 1$$

estão na forma implícita e, uma vez que,

$$(y')^2 + y'' - y = 0 \iff y'' = -(y')^2 + y$$

e

$$t \frac{ds}{dt} = s + 1 \iff \left( \frac{ds}{dt} = \frac{s+1}{t} \wedge t \neq 0 \right),$$

estas equações podem ser postas na forma normal.

No entanto a equação

$$(y')^4 - (x + 2y + 1)(y')^3 + (y')^2 = 2xyy'$$

está na forma implícita e não pode ser explicitada em relação a  $y'$ , pelo que não pode ser posta na forma normal.

**Definição 2.8.** Chama-se *solução* ou *integral* da equação diferencial  $E(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  a toda a função  $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$  que admite derivadas finitas até à ordem  $n$  em  $I$  e tal que

$$E(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0,$$

para todo o  $x \in I$ .

Utilizando técnicas de integração adequadas surgem, na resolução de uma equação diferencial de

ordem  $n$ ,  $n$  constantes arbitrárias <sup>2</sup>.

Ao conjunto das soluções que se obtêm por este processo chamamos *integral geral* da equação diferencial.

Assim, *integrar* uma equação diferencial de ordem  $n$  consiste em determinar uma família de funções que dependem de  $n$  constantes arbitrárias.

Atribuindo a cada uma das constantes arbitrárias um valor particular obtém-se uma relação entre a variável dependente e a variável independente que se chama *solução particular* ou *integral particular* da equação diferencial.

Eventualmente, existem soluções que não podem ser obtidas a partir do integral geral por concretização das constantes. Estas soluções são designadas *soluções singulares*.

Chama-se *solução geral* de uma equação diferencial ao conjunto de todas as suas soluções.

**Exemplo 2.9.** 1. Suponhamos que  $f$  é uma função primitivável em  $I$  e que  $F$  é uma primitiva de  $f$  em  $I$ . Então

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

é a família de todas as funções que satisfazem a equação diferencial

$$y' = f(x). \quad (2.1)$$

Podemos então concluir que o integral indefinido de  $f$  é a solução geral da equação diferencial (2.1).

2. Consideremos a equação diferencial

$$y = xy' - (y')^2. \quad (2.2)$$

Consideremos a função definida em  $\mathbb{R}$  por  $y = Cx - C^2$  com  $C$  constante real. Uma vez que  $y' = C$  obtemos

$$xy' - (y')^2 = Cx - C^2 = y,$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$ , e, portanto, temos que a função considerada é uma solução em  $\mathbb{R}$  da equação diferencial (2.2).

A família de funções

$$y = Cx - C^2$$

parametrizada pela constante arbitrária  $C \in \mathbb{R}$  é o integral geral da equação diferencial (2.2).

Tomando  $C = -1$  obtém-se a função definida em  $\mathbb{R}$  por  $y = -x - 1$  que é uma solução particular em  $\mathbb{R}$  da equação diferencial considerada.

A função definida em  $\mathbb{R}$  por  $y = \frac{x^2}{4}$  é uma solução singular em  $\mathbb{R}$  da equação diferencial (2.2). De

---

<sup>2</sup>sempre que a equação diferencial em estudo satisfaça as condições do chamado Teorema de Existência e Unicidade de soluções (locais).

facto, temos, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$xy' - (y')^2 = x \left( \frac{1}{2}x \right) - \left( \frac{1}{2}x \right)^2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2 = y.$$

e, não existe  $C \in \mathbb{R}$  tal que a igualdade

$$Cx - C^2 = \frac{x^2}{4} \iff x^2 - 4Cx + 4C^2 = 0$$

se verifique para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

**Observação 2.10.** Muitas vezes as soluções de uma equação diferencial são dadas na forma implícita e não podem ser explicitadas em ordem à variável dependente.

Por exemplo, a função definida implicitamente pela equação  $ye^y = x$  é solução da equação diferencial  $y' \left( 1 - \ln \frac{y}{x} \right) = \frac{y}{x}$ .

De facto, derivando em ordem a  $x$  ambos os membros da igualdade  $ye^y = x$  e, atendendo a que  $y$  é função de  $x$ , obtemos

$$y' e^y + y y' e^y = 1 \iff (e^y + y e^y) y' = 1$$

donde resulta que, para  $y \neq -1$ , temos

$$y' = \frac{1}{e^y + y e^y}$$

e, portanto, supondo  $y \neq 0$ ,

$$y' \left( 1 - \ln \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{e^y + y e^y} - \frac{1}{e^y + y e^y} \ln \frac{y}{y e^y} = \frac{1+y}{e^y + y e^y} = \frac{1}{e^y} = \frac{y}{x}.$$

No entanto, esta solução não pode ser explicitada em ordem a  $y$ .

Nas aplicações, o que se pretende normalmente, é a determinação de uma solução particular de uma dada equação diferencial que satisfaz determinadas restrições adicionais, as quais permitem obter valores adequados para as constantes arbitrárias que fazem parte do integral geral. No exemplo seguinte apresenta-se um problema de aplicação deste tipo.

**Exemplo 2.11.** Determinar a distância (medida na vertical a partir de um ponto inicial) a que se situa um objecto em queda livre ao fim de  $t \geq 0$  segundos, supondo que à partida o objecto está em repouso.

Seja  $x = x(t)$ ,  $t \geq 0$  a distância do objecto ao ponto inicial ao fim de  $t$  segundos. Designando por  $g$  a aceleração da gravidade (que é constante) então  $x$  deverá satisfazer a equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g.$$

Integrando em ordem a  $t$  obtém-se, da igualdade anterior,

$$\frac{dx}{dt} = gt + v_0,$$

onde  $v_0$  é uma constante real arbitrária.

Integrando, de novo em ordem a  $t$  obtemos

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0,$$

onde  $x_0$  e  $v_0$  são constantes reais arbitrárias.

Esta última equação é o integral geral da equação diferencial considerada e, para o problema que estamos a considerar,  $x_0$  e  $v_0$  representam, respectivamente, a distância ao ponto inicial e a velocidade na origem dos tempos. Como  $x_0 = x(0) = 0$  e  $v_0 = \frac{dx}{dt}(0) = 0$ , então a solução particular procurada é

$$x = \frac{1}{2}gt^2, \quad t \geq 0.$$

**Definição 2.12.** Chamamos *condições iniciais* às condições adicionais requeridas para a determinação de uma dada solução particular de uma equação diferencial quando estas condições se referem todas a um dado ponto inicial, ou seja, às condições sobre a função e as suas derivadas num ponto  $x_0$ .

Ao sistema

$$\begin{cases} E(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)} \end{cases}$$

constituído por uma equação diferencial de ordem  $n$  e  $n$  condições iniciais chamamos *problema de Cauchy* ou *problema de valores iniciais*.

Quando as condições sobre a função e/ou as suas derivadas envolvem um ponto inicial e um ponto terminal chamam-se *condições de fronteira*; os problemas que envolvem uma equação diferencial com condições de fronteira designam-se por *problemas de valores de fronteira*.

**Exemplo 2.13.** 1. Sendo  $g$  a aceleração da gravidade, o sistema

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = g \\ x'(0) = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

que representa o problema considerado no Exemplo 2.11 é um problema de Cauchy. Como vimos este problema tem uma única solução dada por  $x = \frac{1}{2}gt^2$  com  $t \geq 0$ .

2. O sistema

$$\begin{cases} |y'| + |y| = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

é um problema de Cauchy que não admite solução, uma vez que a equação diferencial considerada só admite a solução singular  $y = 0$ .

## 3. A família de funções

$$y = (x + C)^2,$$

com  $C$  constante real arbitrária, é o integral geral da equação diferencial

$$(y')^2 - 4y = 0.$$

O sistema

$$\begin{cases} (y')^2 - 4y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

é um problema de Cauchy que admite a solução  $y = x^2$ , obtida a partir do integral geral para  $C = 0$ .

A função definida por  $y = 0$  é uma solução singular da equação diferencial considerada e, portanto, é também solução do problema de Cauchy considerado.

## 4. A equação diferencial

$$mx''(t) = F(t),$$

permite determinar a equação do movimento de uma partícula de massa  $m$  sujeita a uma força  $F(t)$  conhecidas a sua posição no instante  $t_0$ ,  $x_0 = x(t_0)$  e a sua velocidade no instante  $t_0$ ,  $v_0 = x'(t_0)$ .

O sistema

$$\begin{cases} mx''(t) = -\frac{12}{t^3} \\ x'(2) = 3 \\ x(2) = -1 \end{cases}$$

é um problema de Cauchy e permite determinar a equação do movimento de uma partícula sujeita a uma força  $F(t) = -\frac{12}{t^3}$  conhecidas a sua posição e a sua velocidade no instante  $t = 2$ .

Como exercício, determine a solução do problema de Cauchy considerado e calcule a posição da partícula considerada no instante  $t = 3$ .

O sistema

$$\begin{cases} mx''(t) = -\frac{12}{t^3} \\ x(4) = 2 \\ x(2) = -1 \end{cases}$$

é um problema de valores de fronteira e permite determinar a equação do movimento de uma partícula sujeita a uma força  $F(t) = -\frac{12}{t^3}$  conhecidas as suas posições nos instantes  $t = 4$  e  $t = 2$ , respectivamente.

**Observação 2.14.** Uma questão que se pode colocar é a de saber se todo o problema de Cauchy tem solução e, caso exista solução, se ela é única. Os exemplos anteriores permitem concluir que nem todos os problemas de Cauchy têm solução e que a solução de um problema de Cauchy pode não ser única. No entanto, como veremos posteriormente, existem teoremas que garantem a existência e unicidade de solução para alguns problemas de Cauchy específicos.

**Exercícios 2.1** 1. Classifique quanto à forma e à ordem as seguintes equações diferenciais:

- (a)  $y'' + 3y' - 3y = 0$   
 (b)  $\frac{dy}{dx} - 3y^2 = x$   
 (c)  $ts'' - ts' = 1 - \cos t$   
 (d)  $\frac{dt}{dx} = \sqrt{12 + \left(\frac{d^2t}{dx^2}\right)^3}$   
 (e)  $\frac{d^3x}{dt^3} + 4\frac{dx}{dt} - 4x = 0$   
 (f)  $\left(\frac{db}{dp}\right)^7 = 3p$   
 (g)  $(y')^2 + xyy' = \sin x$   
 (h)  $y'' + ye^x = \tan x$   
 (i)  $(y')^2 + y'' = y$   
 (j)  $(y')^2 + y = \cos x$
2. Verifique se as funções  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  definidas em  $\mathbb{R}$  por  $\varphi_1(x) = \sin x$  e  $\varphi_2(x) = \cos x$ , respectivamente, são soluções em  $\mathbb{R}$  da equação diferencial  $y'' + y = 0$ .
3. Verifique se as funções  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  definidas em  $\mathbb{R}$  por  $\varphi_1(x) = 1 + \sin x + \frac{1}{2}e^x$  e  $\varphi_2(x) = \cos x$ , respectivamente, são soluções em  $\mathbb{R}$  da equação diferencial  $y'' + y' = e^x$ .
4. Mostre que:
- (a) a função  $\varphi$  definida em  $\mathbb{R}$  por  $\varphi(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x} + 2xe^{2x}$  satisfaz, para quaisquer valores de  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ , a equação diferencial  $y'' + 2y' - 8y = 12e^{2x}$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ ;
- (b) a função  $\varphi$  definida em  $\mathbb{R}$  por  $\varphi(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$  satisfaz, para quaisquer valores das constantes  $C_1, C_2$ , a equação diferencial  $y'' + y = 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
5. Em cada uma das alíneas que se seguem, determine  $s \in \mathbb{R}$  por forma que a função definida por  $y = e^{st}$  seja uma solução em  $\mathbb{R}$  da equação diferencial considerada.
- (a)  $y'' - 9y = 0$   
 (b)  $y''' + 2y'' + y' = 0$
6. Encontre a solução geral, em  $\mathbb{R}$ , da equação diferencial  $y'' = \sin x$  e mostre que a função definida em  $\mathbb{R}$  por  $y = 2x - \sin x$  é uma solução que satisfaz as condições  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1$ .
7. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:
- (a)  $y' - \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1} = 0$ ;  
 (b)  $y' - \arctg x = 0$ ;  
 (c)  $y' - x^2 e^{ax} = 0$ , com  $a$  constante real não nula;  
 (d)  $y' - \frac{1}{(1+x^2)\arctg x} = 0$ , com  $x > 0$ .
8. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:
- (a)  $y' - e^{ax} = 0$  e  $y(0) = 0$ , com  $a$  constante real não nula;  
 (b)  $y' - \sqrt{1-x^2} = 0$  e  $y(0) = 1/2$ .
9. Considere a equação diferencial ordinária  $y' + y^2 = 0$ .

- (a) Mostre que, para todo o  $C \in \mathbb{R}$ , a função definida por  $y = \frac{1}{x+C}$  é solução da equação considerada.
- (b) Determine a solução particular tal que  $y(1) = -1$  e indique o seu domínio.
- (c) Verifique se existe uma solução particular tal que  $y(1) = 0$  e, em caso afirmativo, determine o seu domínio.

## 2.3 Integração de Equações Diferenciais de 1ª Ordem

Tendo em atenção a Definição 2.1 e a Definição 2.4, a forma geral de uma equação diferencial de primeira ordem é uma equação do tipo

$$E(x, y, y') = 0, \quad (2.3)$$

onde  $E$  designa uma função de três variáveis definida num subconjunto apropriado de  $\mathbb{R}^3$ .

Se for possível explicitar  $y'$  como função de  $x$  e de  $y$ , a equação (2.4) poderá escrever-se na forma normal

$$y' = f(x, y), \quad (2.4)$$

onde  $f$  é uma função definida num subconjunto apropriado de  $\mathbb{R}^2$ .

Se a função  $f$  não depender da variável  $y$ , então a equação diferencial obtida é da forma

$$y' = f(x)$$

e, como vimos, a solução geral de uma equação diferencial deste tipo é a família das primitivas da função  $f$ .

Nesta secção vamos considerar equações diferenciais de primeira ordem que se podem escrever na forma normal e para as quais podemos apresentar métodos de resolução analíticos. Consideraremos as **equações de variáveis separáveis** e as **equações diferenciais homogêneas**. O estudo das equações diferenciais lineares de primeira ordem será incluído no caso mais geral das equações diferenciais lineares de ordem  $n \geq 1$ .

### 2.3.1 Equações de Variáveis Separáveis

Seja  $f$  uma função definida por uma expressão do tipo <sup>3</sup>

$$f(x, y) = -\frac{P(x)}{Q(y)}$$

onde  $P$  é uma função que depende só de  $x$  e  $Q$  é uma função que depende só de  $y$ .

Obtemos então de (2.4) a equação diferencial de primeira ordem

$$y' = -\frac{P(x)}{Q(y)}$$

<sup>3</sup>Observe-se que a função  $f$  está definida no subconjunto de pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $x \in D_P$ ,  $y \in D_Q$  e  $Q(y) \neq 0$ .

que é habitualmente designada *equação diferencial de primeira ordem de variáveis separáveis* ou, simplesmente, *equações de variáveis separáveis*.

**Exemplo 2.15.** A equação

$$y' = 2xy$$

é uma equação de variáveis separáveis, onde se tem  $P(x) = -2x$ , com  $x \in \mathbb{R}$  e  $Q(y) = \frac{1}{y}$ , com  $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Observe-se que toda a equação de variáveis separáveis é equivalente a uma equação da forma

$$Q(y)y' + P(x) = 0 \quad (2.5)$$

a que habitualmente chamamos *equação diferencial de primeira ordem de variáveis separadas* ou simplesmente *equações de variáveis separadas*.

**Exemplo 2.16.** A equação

$$\frac{1}{y}y' - 2x = 0$$

é uma equação de variáveis separadas equivalente à equação considerada no Exemplo 2.15.

**Observação 2.17.** Multiplicando ambos os membros da equação (2.5) pela diferencial  $dx$ <sup>4</sup> e tendo em conta que  $y' dx = dy$ , então esta equação pode também tomar a forma (diferencial)

$$P(x) dx + Q(y) dy = 0$$

que aparece frequentemente na literatura.

Se  $G$  e  $H$  forem primitivas de  $P$  e  $Q$ , respectivamente, isto é, funções de  $x$  e de  $y$ , respectivamente, tais que

$$\frac{d}{dx}G(x) = P(x) \text{ e } \frac{d}{dy}H(y) = Q(y),$$

onde  $\frac{d}{dx}G(x)$  representa a derivada da função  $G$  em ordem a  $x$  e  $\frac{d}{dy}H(y)$  representa a derivada da função  $H$  em ordem a  $y$ , então substituindo  $P$  e  $Q$  na equação (2.5) vem

$$\frac{d}{dx}G(x) + \frac{d}{dy}H(y)y' = 0. \quad (2.6)$$

Tendo em conta a regra da derivada da função composta e não esquecendo que  $y$  é função de  $x$ , temos

$$\frac{d}{dx}H(y) = \frac{d}{dy}H(y)y'. \quad (2.7)$$

Substituindo (2.7) em (2.6) obtemos

$$\frac{d}{dx}G(x) + \frac{d}{dx}H(y) = 0$$

<sup>4</sup>Seja  $f$  uma função definida por  $y = f(x)$  que admite derivada  $f'(x)$  num ponto  $x$ .

Chama-se *diferencial de  $f$*  e representa-se por  $dy$  ao produto  $dy = f'(x)dx$ , onde  $dx$  representa um acréscimo da variável  $x$  a que se chama *diferencial da variável independente  $x$* .



ou, de forma equivalente, atendendo a que a derivada da soma é igual à soma das derivadas,

$$\frac{d}{dx}(G(x) + H(y)) = 0.$$

Desta igualdade, por integração imediata, resulta a equação

$$G(x) + H(y) = C \quad (2.8)$$

onde  $C$  é uma constante real arbitrária que é o integral geral da equação diferencial (2.5).

Observe-se que, na equação (2.8),  $G$  e  $H$  representam duas quaisquer primitivas das funções  $P$  e  $Q$ , respectivamente.

Se conhecermos a família das primitivas de  $P$ ,

$$\int P(x) dx, \quad (2.9)$$

e a família das primitivas de  $Q$ ,

$$\int Q(y) dy, \quad (2.10)$$

podemos tomar para  $G$  e  $H$  as primitivas que se obtêm de (2.9) e (2.10), respectivamente, considerando a constante nula.

Se representarmos estas primitivas, simbolicamente, por  $\int^x P(x) dx$  e por  $\int^y Q(y) dy$ , respectivamente, então a equação

$$\int^x P(x) dx + \int^y Q(y) dy = C,$$

com  $C$  constante arbitrária, é o integral geral da equação diferencial (2.5).

**Exemplo 2.18.** 1. Consideremos a equação diferencial de variáveis separadas

$$x + yy' = 0.$$

O seu integral geral é dado pela equação

$$\int^x x dx + \int^y y dy = C_1.$$

Uma vez que

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

e

$$\int y dy = \frac{y^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

temos

$$\int^x x dx = \frac{x^2}{2} \quad \text{e} \quad \int^y y dy = \frac{y^2}{2}.$$

Então, o integral geral da equação diferencial considerada é dado pela equação

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1, \iff x^2 + y^2 = 2C_1,$$

com  $C_1$  constante real arbitrária.

Designando por  $C$  a constante  $2C_1$  tem-se que a equação

$$x^2 + y^2 = C,$$

com  $C$  constante real arbitrária, é o integral geral da equação diferencial considerada.

2. Consideremos a equação diferencial de primeira ordem de variáveis separáveis

$$xy' - y = 0.$$

Desde que se tenha  $xy \neq 0$  esta equação é equivalente à equação

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{y}y' = 0$$

que é uma equação de variáveis separadas.

O seu integral geral é dado pela equação

$$-\int^x \frac{1}{x} dx + \int^y \frac{1}{y} dy = C_1,$$

ou seja,

$$-\ln|x| + \ln|y| = C_1, \iff \ln\left|\frac{y}{x}\right| = C_1,$$

com  $C_1$  constante real arbitrária.

Temos então

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right| = C_1 \iff \left|\frac{y}{x}\right| = e^{C_1} \iff \left|\frac{y}{x}\right| = C_2$$

com  $C_2 = e^{C_1}$  constante real positiva.

Uma vez que

$$\left|\frac{y}{x}\right| = C_2 \iff \left(\frac{y}{x} = C_2 \vee \frac{y}{x} = -C_2\right)$$

podemos escrever a equação única

$$\frac{y}{x} = C_3 \iff (y = C_3x \wedge x \neq 0)$$

com  $C_3$  constante real não nula.

No entanto, como  $y = 0$  é também solução da equação diferencial considerada que pode ser escrita na forma  $y = 0x$ , o integral geral desta equação diferencial é

$$y = Cx,$$

com  $C \in \mathbb{R}$ .

3. Consideremos a equação diferencial

$$y' = 2xy. \quad (2.11)$$

Desde que se verifique a condição  $y \neq 0$ , podemos dividir ambos os membros da igualdade por  $y$  e, portanto, a equação (2.11) pode escrever-se na forma

$$-2x + \frac{1}{y}y' = 0. \quad (2.12)$$

Trata-se, portanto, de uma equação de variáveis separadas, pelo que o seu integral geral é dado pela igualdade

$$\int^x (-2x) dx + \int^y \frac{1}{y} dy = C_1,$$

ou seja,

$$-x^2 + \ln|y| = C_1$$

ou, de forma equivalente,

$$\ln|y| = x^2 + C_1 \iff |y| = C_2 e^{x^2}$$

com  $C_2 = e^{C_1} \in \mathbb{R}^+$ .

Obtém-se então

$$y = C_2 e^{x^2} \vee y = -C_2 e^{x^2},$$

com  $C_2 \in \mathbb{R}^+$ .

Podemos então considerar a equação única

$$y = C_3 e^{x^2},$$

com  $C_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

No entanto, como  $y = 0$  é também solução da equação (2.11) e pode ser escrita na forma  $y = 0e^{x^2}$ , o integral geral desta equação diferencial é

$$y = C e^{x^2},$$

com  $C \in \mathbb{R}$ .

**Exercícios 2.2** 1. Em cada uma das alíneas que se seguem, determine o integral geral da equação diferencial considerada.

(a)  $y + y' \operatorname{cosec} x = 0$ ;

(b)  $y' = \cos x \operatorname{sen} y$ ;

(c)  $y^2 + y = (x^2 - x)y'$ ;

(d)  $y' = (1 + x)^2$ ;

- (e)  $y' \sin x + y \cos x = 0$ ;
- (f)  $(1 + y^2) dx + (1 + x^2) dy = 0$ ;
- (g)  $(1 + y^2) dx = x dy$ ;
- (h)  $(1 + y^2) dx + xy dy = 0, x \neq 0$ ;
- (i)  $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$ ;
- (j)  $e^{-y}(1 + y') = 1$ ;
- (k)  $e^x y y' = e^{-y} + e^{-2x-y}$ ;
- (l)  $x^2(y + a)^2 y' = (x^2 + 1)(y^2 + a^2)$ , com  $a$  constante;
- (m)  $\sec^2 \theta \operatorname{tg} \phi d\phi + \sec^2 \phi \operatorname{tg} \theta d\theta = 0$ ;
- (n)  $(v - u^2 v) dv - (v^2 u - u) du = 0$

2. Em cada uma das alíneas que se seguem, determine a solução para o problema de Cauchy indicado.

- (a)  $y' \cotg x + y = 2$  e  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ ;
- (b)  $xy' + y = y^2$  e  $y(1) = \frac{1}{2}$ ;
- (c)  $x\sqrt{1 - y^2} dx + y\sqrt{1 - x^2} dy = 0$  e  $y(0) = 1$ .

3. Considere a equação diferencial

$$y' = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1},$$

onde  $a, b, c, a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$  são tais que  $ab_1 - a_1b \neq 0$  e  $a_1 \neq 0$  e  $b_1 \neq 0$ .

(a) Mostre que:

i. a equação diferencial dada é equivalente à equação diferencial

$$y' = \frac{\alpha(a_1x + b_1y) + c}{a_1x + b_1y + c_1},$$

$$\text{com } \alpha = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1};$$

ii. a substituição de variável definida por  $z = a_1x + b_1y$  transforma a equação diferencial obtida na alínea anterior numa equação de variáveis separáveis.

(b) Considere a equação diferencial

$$y' = \frac{-3x - 3y + 1}{x + y + 1}.$$

- i. Utilizando o processo descrito na alínea anterior converta a equação diferencial dada numa equação de variáveis separáveis.
- ii. Determine o integral geral da equação de variáveis separáveis obtida na alínea anterior e, a partir desta solução, obtenha o integral geral da equação diferencial dada.

### 2.3.2 Equações Diferenciais Homogêneas

Uma equação diferencial de primeira ordem na forma normal

$$y' = f(x, y) \quad (2.13)$$

diz-se *equação diferencial homogênea* se a função  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  for uma *função homogênea de grau zero*<sup>5</sup>, isto é, se para todo o  $(x, y) \in D$  e para todo o  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $(\lambda x, \lambda y) \in D$  se verificar a igualdade  $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ .

Suponha-se que a equação (2.13) é uma equação diferencial homogênea. Fazendo  $\lambda = \frac{1}{x}$ , com  $x \neq 0$ , tem-se

$$f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

onde  $\varphi$  designa uma função de uma só variável. Portanto, a equação diferencial (2.13) toma a forma

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2.14)$$

Substituindo a variável  $y$  pela variável  $z$  definida pela relação  $y = zx$  e, tendo em conta que  $y' = z + xz'$ , a equação (2.14) toma a forma

$$z + xz' = \varphi(z)$$

que é uma equação de variáveis separáveis em  $x$  e  $z$ .

Esta equação pode agora integrar-se pelo método descrito na secção anterior. Em seguida efectua-se a substituição inversa  $z = \frac{y}{x}$  e obtém-se o integral geral da equação diferencial (2.13).

**Exemplo 2.19.** Consideremos a equação diferencial

$$x^2 + y^2 - 2x^2y' = 0.$$

Para todo o  $x \neq 0$ , temos

$$x^2 + y^2 - 2x^2y' = 0 \iff y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}.$$

Consideremos a função  $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$ . Para todo o  $(x, y) \in D_f$  e, para todo o  $\lambda \in \mathbb{R}$  tais que  $(\lambda x, \lambda y) \in D_f$  temos

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{2(\lambda x)^2} = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}{2\lambda^2 x^2} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} = f(x, y)$$

o que permite concluir que  $f$  é uma função homogênea de grau zero.

A equação diferencial considerada é, portanto, uma equação diferencial homogênea.

Efectuando a substituição de variável definida por  $y = xz$  e, atendendo a que  $y' = z + xz'$ , obtém-se

$$z + xz' = \frac{x^2 + (xz)^2}{2x^2}.$$

<sup>5</sup>Seja  $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função nas variáveis  $x$  e  $y$ . Dizemos que  $f$  é *homogênea de grau  $k \geq 0$*  se, para todo o  $(x, y) \in D_f$  e, para todo o  $\lambda \in \mathbb{R}$  tais que  $(\lambda x, \lambda y) \in D_f$ , temos  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$ .

Uma vez que  $x \neq 0$  temos

$$z + xz' = \frac{x^2 + x^2 z^2}{2x^2} \iff xz' = \frac{1 + z^2}{2} - z \iff xz' = \frac{1}{2}(z^2 - 2z + 1),$$

ou seja

$$xz' = \frac{1}{2}(z - 1)^2$$

que é uma equação de variáveis separáveis em  $z$  e  $x$ .

Supondo  $x \neq 0$  e  $z \neq 1$  podemos escrever esta equação na forma

$$-\frac{1}{x} + \frac{2}{(z-1)^2} z' = 0.$$

O integral geral desta equação é dado por

$$-\int^x \frac{1}{x} dx + \int^z \frac{2}{(z-1)^2} dz = C,$$

ou seja,

$$-\ln|x| - \frac{2}{z-1} = C,$$

com  $C$  constante real arbitrária.

Efectuando agora a substituição inversa definida por  $z = \frac{y}{x}$  obtemos

$$-\ln|x| - \frac{2}{\frac{y}{x}-1} = C \iff \frac{-2x}{y-x} = C + \ln|x|.$$

Resolvendo em ordem a  $y$  vem,

$$y - x = \frac{-2x}{C + \ln|x|} \iff y = x - \frac{2x}{C + \ln|x|},$$

onde  $C$  é uma constante real arbitrária.

Observe-se que fazendo  $C$  tender para  $+\infty$  obtém-se  $y = x$  que é solução singular da mesma equação diferencial.

**Observação 2.20.** Há algumas equações diferenciais de primeira ordem que, através de uma substituição de variável adequada, podem ser convertidas em equações diferenciais homogêneas. Essas equações diferenciais designam-se *equações diferenciais de primeira ordem redutíveis a equações diferenciais homogêneas* ou, simplesmente, *equações redutíveis a equações diferenciais homogêneas*.

Vamos ver que as equações diferenciais do tipo

$$y' = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} \quad (2.15)$$

onde  $a, b, c, a_1, b_1, c_1$  são constantes reais dadas tais que  $ab_1 - a_1b \neq 0$  são equações redutíveis a equações

diferenciais homogêneas <sup>6</sup>.

A mudança de variáveis definida por

$$\begin{cases} x = z + h \\ y = w + k \end{cases}$$

onde  $h$  e  $k$  são constantes a determinar por forma que se verifique o sistema <sup>7</sup>

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases}$$

converte a equação (2.15) numa equação homogênea que pode ser resolvida pelo processo indicado.

**Exemplo 2.21.** Consideremos a equação diferencial

$$y' = \frac{x+y-1}{x-2y+1}. \quad (2.16)$$

Consideremos a mudança de variáveis definida por

$$\begin{cases} x = z + h \\ y = w + k \end{cases}$$

onde  $h$  e  $k$  são constantes a determinar por forma que se verifique o sistema

$$\begin{cases} h + k - 1 = 0 \\ h - 2k + 1 = 0 \end{cases}$$

Uma vez que

$$\begin{cases} h + k - 1 = 0 \\ h - 2k + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} h + k = 1 \\ h - 2k = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} h = 1/3 \\ k = 2/3 \end{cases}$$

temos

$$\begin{cases} x = z + 1/3 \\ y = w + 2/3 \end{cases}$$

Substituindo na equação (2.16) temos

$$w' = \frac{z + 1/3 + w + 2/3 - 1}{z + 1/3 - 2w - 4/3 + 1} = \frac{z + w}{z - 2w}$$

que é uma equação diferencial homogênea nas variáveis  $z$  e  $w$ .

Efectuando a mudança de variável definida por  $w = zu$  e, atendendo a que  $w' = u + zu'$ , obtém-se a

---

<sup>6</sup>Mais geralmente, temos que as equações do tipo  $y' = \phi\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ , onde  $a, b, c, a_1, b_1, c_1$  são constantes reais dadas tais que  $ab_1 - a_1b \neq 0$  e  $\phi$  é uma função de uma variável são equações redutíveis a equações diferenciais homogêneas.

A técnica de resolução destas equações diferenciais é análoga à que é apresentada para a resolução da equação (2.15).

<sup>7</sup>Note-se que, uma vez que se verifica a condição  $ab_1 - a_1b \neq 0$ , o sistema considerado é um sistema de Cramer, logo possível e determinado.

equação diferencial

$$u + zu' = \frac{z + zu}{z - 2zu}$$

donde resulta que

$$zu' = \frac{1 + u}{1 - 2u} - u = \frac{1 + 2u^2}{1 - 2u}$$

que é uma equação de variáveis separáveis.

Supondo  $z \neq 0$  e  $u \neq 1/2$  obtemos

$$-\frac{1}{z} + \frac{1 - 2u}{1 + 2u^2} u' = 0$$

que é uma equação de variáveis separadas cujo integral geral é dado por

$$-\int^z \frac{1}{z} dz + \int^u \frac{1 - 2u}{1 + 2u^2} du = C$$

ou seja

$$-\ln|z| + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}u) - \frac{1}{2} \ln|1 + 2u^2| = C,$$

com  $C$  constante real arbitrária.

Atendendo a que  $u = \frac{w}{z}$  obtemos

$$-\ln|z| + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\frac{w}{z}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{2w^2}{z^2}\right) = C,$$

ou seja,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\frac{w}{z}\right) - \ln\left(|z|\sqrt{1 + \frac{2w^2}{z^2}}\right) = C.$$

Uma vez que  $z = x - \frac{1}{3}$  e  $w = y - \frac{2}{3}$ , vem

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\frac{3y-2}{3x-1}\right) - \ln\left(\left|x - \frac{1}{3}\right|\sqrt{1 + \frac{2(3y-2)^2}{(3x-1)^2}}\right) = C,$$

ou seja

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\frac{3y-2}{3x-1}\right) - \ln\left(\frac{1}{3}\sqrt{(3x-1)^2 + 2(3y-2)^2}\right) = C,$$

com  $C$  constante real arbitrária, que é o integral geral da equação diferencial (2.16).

**Exercícios 2.3** 1. Em cada uma das alíneas que se seguem, mostre que a equação diferencial considerada é uma equação diferencial homogênea e determine o seu integral geral.

- (a)  $(x^2 + y^2)y' = xy$ ;
- (b)  $xe^{y/x}y' = ye^{y/x} + x$
- (c)  $(x^3 + y^3)dx - 3y^2x dy = 0$ ;
- (d)  $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$ ;



$$(e) \ y' = \frac{2x^2 - xy}{y^2};$$

$$(f) \ x \operatorname{sen} \frac{y}{x} y' = y \operatorname{sen} \frac{y}{x} + x.$$

2. Em cada uma das alíneas que se seguem, determine a solução do problema de Cauchy considerado.

$$(a) \ 2xyy' = x^2 - y^2 \text{ e } y(-1) = 1/2;$$

$$(b) \ y + \left( y \cos \frac{x}{y} - x \right) y' = 0 \text{ e } y(1) = 2.$$

3. Determine o integral geral das equações diferenciais de primeira ordem seguintes:

$$(a) \ x^2 + y^2 + xyy' = 0$$

$$(b) \ (3x + 2y + 1) - (3x + 2y - 1)y' = 0, \text{ a substituição de variável definida por } z = 3x + 2y.$$

$$(c) \ (32x^3y + 16y^3x)y' + 3x^4 - 12y^4 - 32x^2y^2 = 0$$

$$(d) \ y' = \frac{y}{x}(1 + \ln(y) - \ln(x)), \ x > 0$$

$$(e) \ (x - 4y + 5)y' = x - 2y + 3;$$

$$(f) \ (3y - 7x + 7) + (7y - 3x + 3)y' = 0;$$

$$(g) \ y' = \frac{x + y + 4}{x - y - 6}.$$

## 2.4 Equações Diferenciais Lineares de ordem $n \geq 1$ .

Nesta secção vamos estudar um certo tipo de equações diferenciais, designadas *equações diferenciais lineares*. Como veremos, para este tipo de equações diferenciais podemos enunciar resultados que podem ser utilizados para estabelecer metodologias de construção da sua solução geral.

**Definição 2.22.** Chama-se *equação diferencial linear de ordem  $n \geq 1$*  a uma equação do tipo

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x), \quad (2.17)$$

ou, de forma condensada,

$$\sum_{j=0}^n a_j(x)y^{(n-j)} = b(x),$$

onde  $a_j$ , com  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ , e  $b$  são funções definidas num intervalo  $I$  de  $\mathbb{R}$  e  $a_0(x) \neq 0$ , para todo o  $x \in I$ .

Se o segundo membro da equação (2.17) for a função nula, a equação diferencial linear diz-se *equação diferencial linear homogénea*; no caso contrário dir-se-á *equação diferencial linear completa* ou *não-homogénea*.

No caso em que  $a_j$ , com  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ , são funções constantes em  $I$  obtemos uma equação diferencial linear a que chamamos *equação diferencial linear de coeficientes constantes* e que é da forma

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j y^{(n-j)} = b(x),$$

onde, para todo o  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{R}$  e  $\alpha_0 \neq 0$ .

À equação diferencial linear  $\sum_{j=0}^n a_j(x)y^{(n-j)} = 0$  chamamos *equação diferencial linear homogênea* associada à equação diferencial linear (2.17).

**Exemplo 2.23.** 1. As equações diferenciais

$$(\ln x)y' + y = \cos x, \quad 2y' = \frac{1}{x}, \quad 3y' + y = 0 \quad \text{e} \quad e^x y' - (\ln x)y = 0$$

são equações diferenciais lineares de primeira ordem. Temos que:

- $(\ln x)y' + y = \cos x$  é uma equação linear de primeira ordem completa;
  - $2y' = \frac{1}{x}$  é uma equação linear de primeira ordem de coeficientes constantes completa;
  - $3y' + y = 0$  é uma equação linear de primeira ordem homogênea de coeficientes constantes ;
  - $e^x y' - (\ln x)y = 0$  é uma equação linear de primeira ordem homogênea;
  - a equação diferencial linear  $(\ln x)y' + y = 0$  é a equação diferencial linear homogênea associada à equação diferencial linear  $(\ln x)y' + y = \cos x$ .
2. A equação diferencial  $yy' - \cos x = \ln x$  não é uma equação diferencial linear, uma vez que o coeficiente de  $y'$  é uma função de  $y$ .
3. A equação diferencial  $(\ln x)y'' - 3y' = 0$  é uma equação diferencial linear de segunda ordem homogênea.
4. A equação diferencial  $y^{(4)} + 3y'' - 2y = 0$  é a equação diferencial linear de ordem 4 homogênea associada à equação diferencial linear completa  $y^{(4)} + 3y'' - 2y = \cosh x$ .

No caso das equações diferenciais lineares, um problema de valores iniciais pode ter a seguinte formulação:

Determinar uma função  $y = y(x)$  com  $x \in I$  tal que

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^n a_j(x)y^{(n-j)} = b(x) \\ y(x_0) = \beta_0 \\ y'(x_0) = \beta_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \beta_{n-1} \end{cases} \quad (2.18)$$

onde  $x_0 \in I$  e  $\beta_j$ , com  $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , são  $n$  números reais dados.

Relativamente a este problema de valores iniciais apresentamos, sem demonstração, o seguinte teorema que garante a existência e unicidade de solução.

**Teorema 2.24.** *Se todas as funções  $a_j$ , com  $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , forem contínuas em  $I$  e  $a_0(x) \neq 0$ , para todo o  $x \in I$ , então existe uma e uma só solução em  $I$  para o problema de valor inicial (2.18).*

O teorema seguinte, cuja demonstração é omitida, serve de base para estabelecer algumas metodologias de construção da solução geral de equações diferenciais lineares completas de qualquer ordem. No âmbito deste curso vamos apresentar metodologias de construção da solução geral de uma equação diferencial linear de primeira ordem com coeficientes quaisquer e da solução geral das equações lineares de ordem  $n > 1$  de coeficientes constantes.

**Teorema 2.25.** *A solução geral da equação diferencial linear completa (2.17) é igual à soma da solução geral da equação diferencial linear homogénea que lhe está associada com uma solução particular<sup>8</sup> da equação completa.*

**Observação 2.26.** Com base no Teorema 2.25, pode obter-se a solução geral da equação diferencial linear (2.17) a partir da solução geral da equação diferencial linear homogénea que lhe está associada, desde que seja possível obter uma solução particular da equação completa.

**Exemplo 2.27.** Consideremos a equação diferencial linear de primeira ordem

$$y' + ay = b, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.19)$$

onde  $a, b$  são constantes reais dadas e  $a \neq 0$ .

Não é difícil verificar que a função  $y_*$  definida por  $y_* = \frac{b}{a}$  é uma solução da equação dada. A equação diferencial linear homogénea associada a (2.19) é a equação diferencial

$$y' + ay = 0$$

que é uma equação de variáveis separáveis cuja solução geral é

$$y = C e^{-ax},$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária.

Pelo Teorema 2.25, a função definida por

$$y = C e^{-ax} + \frac{b}{a} \quad x \in \mathbb{R}$$

é a solução geral da equação diferencial linear completa considerada.

Resulta do Teorema 2.25 que, no contexto das equações diferenciais lineares, há dois problemas a resolver:

- determinar a solução geral de uma equação diferencial linear homogénea;
- determinar uma solução particular de uma equação diferencial linear completa.

<sup>8</sup>Esta designação, frequentemente utilizada na literatura, não é muito feliz já que no enunciado deste teorema não utilizamos a designação solução particular para designar uma solução que se obtém da solução geral por concretização das constantes, mas sim para designar uma solução (qualquer) da equação diferencial linear. No entanto, em cada caso, o contexto permitirá distinguir se nos referimos a solução particular no sentido da definição ou a solução particular no sentido mais lato de solução da equação diferencial.

Nas duas sub-seções que se seguem apresentamos metodologias para a resolução destes dois problemas.

### 2.4.1 Determinação da Solução Geral de uma Equação Diferencial Linear Homogénea

O teorema que a seguir se enuncia e cuja demonstração é omitida, estabelece que é possível determinar qualquer solução de uma equação diferencial linear homogénea de ordem  $n$  a partir de um conjunto de  $n$  soluções linearmente independentes <sup>9</sup>.

**Teorema 2.28.** *Uma equação diferencial linear homogénea de ordem  $n$  admite um conjunto  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  de  $n$  soluções linearmente independentes e, qualquer outra solução é combinação linear destas.*

Resulta deste teorema que se  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  é um conjunto de soluções linearmente independentes duma equação diferencial linear homogénea de ordem  $n$ , então a função definida por

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

com  $C_1, C_2, \dots, C_n$  constantes reais arbitrárias, é a sua solução geral.

**Definição 2.29.** A todo o conjunto de  $n$  soluções linearmente independentes de uma equação diferencial linear homogénea de ordem  $n$  chamamos *sistema fundamental de soluções*.

Atendendo ao Teorema 2.28, para obter a solução geral de uma equação diferencial linear homogénea basta determinar um sistema fundamental de soluções.

**Exemplo 2.30.** Vamos verificar que o conjunto

$$\{y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{2x}, y_3(x) = e^{-2x}\}$$

é um sistema fundamental de soluções da equação diferencial linear homogénea

$$y''' - y'' - 4y' + 4y = 0.$$

A verificação de que cada uma das funções indicadas é solução da equação diferencial considerada é deixada como exercício. Vamos apenas provar que aquelas funções são linearmente independentes.

<sup>9</sup>**Definição 1:** Chama-se *combinação linear* das  $n$  funções  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  definidas em  $I$  a toda a função  $\phi$  definida em  $I$  por

$$\phi(x) = A_1 \phi_1(x) + A_2 \phi_2(x) + \dots + A_n \phi_n(x),$$

com  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ .

**Definição 2:** Dizemos que as  $n$  funções  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  definidas em  $I$  são *linearmente independentes* se nenhuma delas se puder escrever como combinação linear das restantes.

O teorema que enunciamos a seguir estabelece uma condição necessária e suficiente para que as funções  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  definidas em  $I$  sejam linearmente independentes.

**Teorema:** As funções  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  definidas em  $I$  são linearmente independentes se e só se se, para todos os  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ , se

$$A_1 \phi_1(x) + A_2 \phi_2(x) + \dots + A_n \phi_n(x) = 0,$$

para todo  $x \in I$ , então

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0.$$

Sejam  $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$  tais que

$$A_1 e^x + A_2 e^{2x} + A_3 e^{-2x} = 0,$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

Tomando então  $x = 0$ ,  $x = 1$  e  $x = -1$  obtemos o sistema

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 &= 0 \\ eA_1 + e^2A_2 + e^{-2}A_3 &= 0 \\ e^{-1}A_1 + e^{-2}A_2 + e^2A_3 &= 0 \end{cases}$$

que admite apenas a solução  $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ .

Está então provado que, para todos os  $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$ , se

$$A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) + A_3 y_3(x) = 0,$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$ , então

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0.$$

o que garante que as funções consideradas são linearmente independentes.

Do que foi dito, podemos então concluir que o conjunto dado é um sistema fundamental de soluções da equação diferencial considerada.

Consequentemente, a solução geral da equação diferencial  $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$  é a função definida por

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x},$$

com  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  constantes reais arbitrárias.

Apresentamos em primeiro lugar uma metodologia para determinar a solução geral de uma equação diferencial linear de primeira ordem com coeficientes quaisquer e, em seguida, uma metodologia para determinar a solução geral de uma equação diferencial linear de ordem  $n$  com coeficientes constantes.

### Solução Geral de uma Equação Diferencial Linear Homogénea de Primeira Ordem

A equação diferencial linear homogénea

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = 0, \tag{2.20}$$

onde  $a_0$  e  $a_1$  são funções definidas num intervalo  $I$  tais que  $a_0$  é não nula em  $I$  é uma equação de variáveis separáveis.

Uma vez que, por hipótese,  $a_0(x) \neq 0$ , para todo o  $x \in I$ , obtemos, se  $y \neq 0$ , a equação de variáveis separadas

$$\frac{1}{y} y' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} = 0$$

cujas soluções gerais são dadas por

$$\int^y \frac{1}{y} dy + \int^x \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx = C_1,$$

com  $C_1$  constante real arbitrária, ou seja,

$$\ln |y| + \int^x \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx = C_1$$

donde resulta

$$|y| = C_2 e^{A(x)} \iff \left( y = C_2 e^{A(x)} \vee y = -C_2 e^{A(x)} \right)$$

onde  $C_2 = e^{C_1}$  é uma constante positiva e  $A(x) = - \int^x \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx$ .

Uma vez que  $y = 0$  é também solução da equação diferencial linear homogénea (2.20) que pode ser escrita na forma  $y = 0 e^{A(x)}$  tem-se que a solução geral desta equação é

$$y = C e^{A(x)},$$

onde  $C$  é uma constante real arbitrária.

**Exemplo 2.31.** 1. A solução geral da equação diferencial linear homogénea de primeira ordem

$$\alpha y' + \beta y = 0$$

com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \neq 0$  é dada por

$$y = C e^{-(\beta/\alpha)x},$$

onde  $C$  é uma constante real arbitrária.

2. Consideremos a equação diferencial linear homogénea de primeira ordem

$$\frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2 + 1} y = 0, \quad x \neq 0 \tag{2.21}$$

e vamos determinar a sua solução geral.

Uma vez que  $x \neq 0$ , obtemos, se  $y \neq 0$ , a equação de variáveis separadas

$$\frac{1}{y} y' - \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

cujas soluções gerais são dadas por

$$\int^y \frac{1}{y} dy - \int^x \frac{x}{x^2 + 1} dx = C_1,$$

ou seja,

$$\ln |y| - \ln(x^2 + 1) = C_1$$

com  $C_1$  constante real arbitrária, a qual pode tomar a forma

$$y = C(x^2 + 1),$$

com  $C$  constante real arbitrária.

### Solução Geral de uma Equação Diferencial Linear Homogénea de Coeficientes Constantes

Como vimos no Exemplo 2.31, sendo  $\alpha y' + \beta y = 0$ , com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \neq 0$  uma equação diferencial linear homogénea de primeira ordem de coeficientes constantes, a sua solução geral é da forma  $y = C e^{(-\beta/\alpha)x}$ , com  $C$  constante real arbitrária.

Isto sugere que, no caso geral de uma equação diferencial linear de coeficientes constantes de ordem  $n > 1$ ,

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j y^{(n-j)}(x) = 0 \quad (2.22)$$

se procurem soluções do tipo  $y = e^{sx}$ , com  $s$  constante.

Uma vez que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos  $y^{(n)}(x) = s^n e^{sx}$ , substituindo na equação (2.22) obtemos

$$\alpha_0 s^n e^{sx} + \alpha_1 s^{n-1} e^{sx} + \cdots + \alpha_{n-1} s e^{sx} + \alpha_n e^{sx} = 0 \iff (\alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n) e^{sx} = 0$$

Atendendo a que  $e^{sx} \neq 0$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ , obtemos

$$\alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \quad (2.23)$$

e, portanto, a determinação de um sistema fundamental de soluções da equação diferencial (2.22) passa pela resolução da equação (2.23) que é habitualmente designada *equação característica* da equação diferencial (2.22). Ao polinómio  $\alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$  chamamos *polinómio característico* da equação diferencial (2.22).

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra<sup>10</sup> o polinómio característico da equação diferencial linear (2.22) tem  $n$  raízes em  $\mathbb{C}$ .

Veremos em seguida que o sistema fundamental de soluções de uma equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes é determinado pelas raízes do seu polinómio característico.

Temos então quatro casos a considerar:

#### Primeiro caso: o polinómio característico tem $n$ raízes reais simples

Sejam  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , com  $r_i \neq r_j$ , para todos os  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  tais que  $i \neq j$  as  $n$  raízes reais simples do polinómio característico da equação diferencial (2.22).

<sup>10</sup>**Teorema:** Todo o polinómio de grau  $n$  de coeficientes reais tem exactamente  $n$  raízes em  $\mathbb{C}$ .

Observe-se que sendo  $p(x)$  um polinómio de grau  $n$  de coeficientes reais verificam-se as condições seguintes:

1. as  $n$  raízes de  $p(x)$ , cuja existência está garantida pelo Teorema Fundamental da Álgebra, podem ser reais ou complexas e ter multiplicidade igual a 1 ou maior do que 1;
2. se  $a + ib$  é raiz de  $p(x)$ , então  $a - ib$  é também raiz de  $p(x)$ , tendo as duas raízes, que se designam habitualmente *raízes conjugadas*, a mesma multiplicidade.

A estas  $n$  raízes correspondem as  $n$  soluções

$$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$$

que são linearmente independentes e que, portanto, constituem um sistema fundamental de soluções da equação diferencial (2.22).

Consequentemente, a solução geral da equação diferencial (2.22) é a família de funções definidas por

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}$$

com  $C_1, C_2, \dots, C_n$  constantes reais arbitrárias.

**Exemplo 2.32.** 1. Consideremos a equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes

$$2y''' - 9y'' + 10y' - 3y = 0.$$

A equação característica desta equação diferencial é a equação

$$2s^3 - 9s^2 + 10s - 3 = 0 \iff (s-1)(2s-1)(s-3) = 0$$

pelo que admite as raízes

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 3, \quad r_3 = \frac{1}{2}.$$

Consequentemente, a solução geral da equação diferencial considerada é

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + C_3 e^{(1/2)x},$$

com  $C_1, C_2, C_3$  constantes reais arbitrárias.

2. Consideremos a equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes

$$y^{(4)} - 2y''' - y'' + 2y' = 0.$$

A equação característica desta equação diferencial é a equação

$$s^4 - 2s^3 - s^2 + 2s = 0 \iff s(s-1)(s-2)(s+1) = 0$$

pelo que admite as raízes

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 0, \quad r_4 = -1.$$

Consequentemente, a solução geral da equação diferencial considerada é

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x} + C_4,$$

com  $C_1, C_2, C_3, C_4$  constantes reais arbitrárias.



**Segundo caso: o polinómio característico tem  $n$  raízes reais e uma das raízes, pelo menos, tem multiplicidade  $k > 1$**

Sejam  $r_1, r_2, \dots, r_n$  as  $n$  raízes reais do polinómio característico da equação diferencial (2.22) e admitamos, sem perda de generalidade, que se tem  $r_1 = r_2 = \dots = r_k = r$ . Prova-se que as  $k$  funções

$$e^{rx}, \quad xe^{rx}, \quad x^2e^{rx}, \dots, \quad x^{k-2}e^{rx}, \quad x^{k-1}e^{rx}$$

são soluções da equação (2.22) e são linearmente independentes.

O sistema fundamental de soluções da equação diferencial (2.22) é constituído pelas funções do tipo  $e^{sx}$  para cada raiz real simples  $s$  e pelas funções construídas do modo referido para cada raiz real  $r$  de multiplicidade  $k > 1$ .

**Exemplo 2.33.** 1. Consideremos a equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes

$$y''' + 3y'' - 4y = 0.$$

A equação característica desta equação diferencial é a equação

$$s^3 + 3s^2 - 4 = 0 \iff (s-1)(s+2)^2 = 0$$

pelo que admite as raízes

$$r_1 = 1, \quad r_2 = -2, \quad r_3 = -2.$$

Então  $r = -2$  é uma raiz de multiplicidade 2 à qual correspondem as soluções linearmente independentes

$$e^{-2x}, \quad xe^{-2x}.$$

Uma vez que à raiz real simples  $r_1 = 1$  corresponde a solução  $e^x$ , a solução geral da equação diferencial considerada é

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3xe^{-2x},$$

ou seja,

$$y(x) = C_1e^x + (C_2 + C_3x)e^{-2x},$$

com  $C_1, C_2, C_3$  constantes reais arbitrárias.

2. Consideremos a equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes

$$y^{(6)} - y^{(5)} - 8y^{(4)} + 12y^{(3)} = 0.$$

A equação característica desta equação diferencial é a equação

$$s^6 - s^5 - 8s^4 + 12s^3 = 0 \iff s^3(s+3)(s-2)^2 = 0$$

pelo que admite uma raiz simples,  $r_1 = -3$ , uma raiz de multiplicidade 2,  $r_2 = 2$  e uma raiz de multiplicidade 3,  $r_3 = 0$ .

À raiz real simples  $r_1 = -3$  corresponde a solução  $e^{-3x}$ .

À raiz  $r_2 = 2$  de multiplicidade 2 correspondem as soluções linearmente independentes

$$e^{2x}, \quad xe^{2x}$$

e à raiz  $r_3 = 0$  de multiplicidade 3 correspondem as soluções linearmente independentes

$$1, \quad x, \quad x^2.$$

Consequentemente, a solução geral da equação diferencial considerada é

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x} + C_4 x^2 + C_5 x + C_6,$$

ou seja,

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + (C_2 + C_3 x) e^{2x} + C_4 x^2 + C_5 x + C_6,$$

com  $C_1, C_2, \dots, C_6$  constantes reais arbitrárias.

### 3. Consideremos a equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0.$$

A equação característica desta equação diferencial é a equação

$$s^4 - 2s^2 + 1 = 0 \iff (s+1)^2(s-1)^2 = 0$$

pelo que admite duas raízes de multiplicidade 2,  $r_1 = 1$  e  $r_2 = -1$ .

À raiz  $r_1 = 1$  de multiplicidade 2 correspondem as soluções linearmente independentes

$$e^x, \quad xe^x$$

e à raiz  $r_2 = -1$  também de multiplicidade 2 correspondem as soluções linearmente independentes

$$e^{-x}, \quad xe^{-x}$$

Consequentemente, a solução geral da equação diferencial considerada é

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x},$$

ou seja,

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^x + (C_3 + C_4 x) e^{-x},$$

com  $C_1, C_2, C_3, C_4$  constantes reais arbitrárias.

### Terceiro caso: o polinómio característico tem pelo menos uma raiz complexa simples

Suponhamos que  $r = \alpha + i\beta$  é raiz simples do polinómio característico. Então  $\bar{r} = \alpha - i\beta$  também é raiz simples do polinómio característico.

À raiz  $r$  está associada uma função da forma  $e^{(\alpha+i\beta)x}$  e à raiz  $\bar{r}$  está associada uma função da forma  $e^{(\alpha-i\beta)x}$ , ambas funções complexas.

O que procuramos são funções reais que sejam elementos do sistema fundamental de soluções da equação diferencial (2.22) e, portanto, estas duas funções não podem ser consideradas para esse efeito. No entanto, podemos construir as soluções que procuramos à custa destas.

Qualquer função da forma

$$Ae^{(\alpha+i\beta)x} + Be^{(\alpha-i\beta)x}$$

com  $A, B$  constantes reais arbitrárias é solução da equação (2.22).

Uma vez que

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x))$$

e

$$e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i \operatorname{sen}(\beta x))$$

temos

$$\begin{aligned} Ae^{(\alpha+i\beta)x} + Be^{(\alpha-i\beta)x} &= Ae^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x)) + Be^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i \operatorname{sen}(\beta x)) \\ &= e^{\alpha x}((A+B)\cos(\beta x) + (A-B)i \operatorname{sen}(\beta x)) \\ &= (A+B)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + (A-B)i e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \end{aligned}$$

que é uma combinação linear complexa das funções reais

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x) \quad \text{e} \quad e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x).$$

Uma vez que estas duas funções são soluções da equação (2.22) e são linearmente independentes, temos que toda a função da forma

$$e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta x))$$

com  $C_1, C_2$  constantes reais arbitrárias é solução daquela equação diferencial.

**Exemplo 2.34.** 1. Consideremos a equação diferencial linear homogénea

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

A sua equação característica é

$$s^2 + 2s + 5 = 0 \iff (s = -1 + 2i \vee s = -1 - 2i)$$

e, portanto, o polinómio característico desta equação diferencial tem duas raízes complexas simples  $r = -1 + 2i$  e  $\bar{r} = -1 - 2i$ .

Consequentemente, a solução geral da equação diferencial linear homogénea considerada é

$$y(x) = e^{-x}(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)),$$

com  $C_1, C_2$  constantes reais arbitrárias.

2. Consideremos a equação diferencial linear homogénea

$$y''' - 4y'' + 6y' - 4y = 0.$$

A sua equação característica é

$$s^3 - 4s^2 + 6s - 4 = 0 \iff (s^2 - 2s + 2)(s - 2) = 0$$

e, portanto o polinómio característico desta equação diferencial tem duas raízes complexas simples  $r_1 = 1 + i$  e  $\bar{r}_1 = 1 - i$  e uma raiz real simples  $r_2 = 2$ .

Consequentemente, a solução geral da equação diferencial linear homogénea considerada é

$$y(x) = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + C_3 e^{2x},$$

com  $C_1, C_2, C_3$  constantes reais arbitrárias.

**Quarto caso: o polinómio característico tem pelo menos uma raiz complexa de multiplicidade  $k > 1$**

Suponhamos que  $r = \alpha + i\beta$  é raiz de multiplicidade  $k > 1$  do polinómio característico da equação diferencial (2.22). Então  $\bar{r} = \alpha - i\beta$  também é raiz de multiplicidade  $k > 1$  do polinómio característico daquela equação diferencial.

Neste caso prova-se que a função da forma

$$e^{\alpha x}((A_1 + A_2 x + \dots + A_k x^{k-1}) \cos(\beta x) + (B_1 + B_2 x + \dots + B_k x^{k-1}) \sin(\beta x)),$$

com  $A_j$  e  $B_j$ , para  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$  constantes reais arbitrárias, é um elemento do sistema fundamental de soluções da equação diferencial (2.22).

**Exemplo 2.35.** Consideremos a equação diferencial linear homogénea

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

A sua equação característica é

$$s^4 + 2s^2 + 1 = 0 \iff (s^2 + 1)^2 = 0 \iff (s - i)^2 (s + i)^2 = 0$$

e, portanto o polinómio característico tem as raízes complexas conjugadas  $r = i$  e  $\bar{r} = -i$  de multiplicidade  $k = 2$ .

Consequentemente, a solução geral da equação diferencial linear homogénea considerada é

$$y(x) = ((A_1 + A_2x) \cos x + (B_1 + B_2x) \sin x),$$

com  $A_1, A_2, B_1, B_2$  constantes reais arbitrárias.

**Exercícios 2.4:** 1. Em cada uma das alíneas seguintes escreva a equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes correspondente à equação característica considerada e determine a sua solução geral.

(a)  $9s^2 - 6s + 1 = 0$

(b)  $s(s+1)(s+2) = 0$

(c)  $s^3 = 0$

(d)  $(s^2 + 2s + 2)^2(s+1)^2 = 0$

(e)  $(s^2 + 9)(s^2 + 2s + 5) = 0$

2. Em cada uma das alíneas que se seguem determine a solução geral da equação diferencial linear homogénea considerada.

(a)  $y'' + 4y' + 3y = 0$

(b)  $y^{(4)} + y'' = 0$

(c)  $y^{(4)} - 3y''' - y'' + 3y' = 0$

(d)  $2y^{(5)} - 8y^{(4)} + 8y''' = 0$

(e)  $y^{(4)} - 8y''' = 0$

(f)  $y'' - 2y' + y = 0$

(g)  $y'' + 2y' + 5y = 0$

(h)  $y'' - 2y' + 26y = 0$

(i)  $y'' + y' - 2y = 0$

## 2.4.2 Determinação da Solução Geral de uma Equação Diferencial Linear Completa

O Teorema 2.25 estabelece que a solução geral de uma equação diferencial linear completa de ordem  $n \geq 1$  se obtém somando uma solução particular da equação completa à solução geral da equação diferencial linear homogénea.

No parágrafo anterior vimos como obter a solução geral de uma equação diferencial linear homogénea de primeira ordem com coeficientes quaisquer e de uma equação diferencial linear homogénea de ordem  $n > 1$  de coeficientes constantes.

Nesta secção vamos apresentar dois métodos, o **Método da Variação das Constantes**<sup>11</sup> e o **Método dos Coeficientes Indeterminados**, que permitem determinar uma solução particular da equação completa.

<sup>11</sup>No caso das equações diferenciais lineares de primeira ordem a designação mais correcta para este método é **Método da Variação da Constante**.

**Método da Variação das Constantes**

Consideremos a equação diferencial linear completa de ordem  $n \geq 1$

$$\sum_{j=0}^n a_j(x)y^{(n-j)} = b(x), \quad (2.24)$$

onde  $a_j$ , com  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$  e  $b$  são funções definidas num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  e  $a_0(x) \neq 0$ , para todo o  $x \in I$ .

Uma vez que, para todo o  $x \in I$ ,  $a_0(x) \neq 0$ , a equação (2.24) pode ser escrita na forma

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = q(x), \quad (2.25)$$

onde  $p_j$ , com  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  e  $q$  são funções definidas em  $I$  por  $p_j(x) = \frac{a_j(x)}{a_0(x)}$  e  $q(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)}$ , respectivamente.

Admitamos que

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

com  $C_1, C_2, \dots, C_n$  constantes reais arbitrárias é a solução geral da equação diferencial linear homogénea associada à equação diferencial (2.25).

Prova-se que existem funções  $F_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , definidas em  $I$  tais que a função  $y_P$  definida em  $I$  por

$$y_P(x) = F_1(x)y_1(x) + F_2(x)y_2(x) + \dots + F_n(x)y_n(x) \quad (2.26)$$

é uma solução particular da equação diferencial (2.24).

Observe-se que, no caso em que  $n = 1$ , vimos que a solução geral da equação diferencial linear homogénea associada a (2.24) é a função definida por  $y(x) = Ce^{A(x)}$ , com  $C$  constante real arbitrária e  $A(x) = -\int^x \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx$  e, portanto, temos  $y_P(x) = \phi(x)e^{A(x)}$  com  $\phi$  função a determinar por forma que esta função seja solução da equação completa.

Temos então que, sendo

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x) \quad (2.27)$$

uma equação diferencial linear de primeira ordem, o Método da Variação da Constante permite obter a solução geral desta equação diferencial utilizando o procedimento seguinte:

1. determinamos a solução geral da equação diferencial linear homogénea associada à equação diferencial (2.27);
2. substituímos a constante que figura na solução geral da equação homogénea associada a (2.27) por uma função desconhecida  $\phi$ ;
3. determinamos a função  $\phi$  por forma que a função obtida em 2. seja solução da equação (2.27).

Tendo em atenção o processo descrito, para a determinação de  $\phi$  substituímos  $y_P = \phi(x)e^{A(x)}$  e  $y'_P$  na

equação (2.27) e, atendendo a que

$$y'_P = \phi'(x)e^{A(x)} + \phi(x)A'(x)e^{A(x)} = \left(\phi'(x) - \phi(x)\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right)e^{A(x)},$$

vem

$$a_0(x) \left(\phi'(x) - \phi(x)\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right)e^{A(x)} + a_1(x)\phi(x)e^{A(x)} = b(x) \iff \phi'(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)}e^{-A(x)}$$

donde obtemos

$$\phi(x) = \int \frac{b(x)}{a_0(x)}e^{-A(x)} dx.$$

A solução geral da equação (2.27) será então da forma

$$y = e^{A(x)} \int \frac{b(x)}{a_0(x)}e^{-A(x)} dx.$$

**Exemplo 2.36.** 1. Consideremos a equação diferencial linear

$$xy' - y = x - 1, \quad x > 0 \tag{2.28}$$

e vamos determinar a sua solução geral utilizando o Método da Variação da Constante.

A equação diferencial linear homogénea associada à equação diferencial linear (2.28) é a equação de variáveis separáveis

$$xy' - y = 0.$$

Uma vez que  $x > 0$ , logo  $x \neq 0$ , obtemos, se  $y \neq 0$ , a equação de variáveis separadas

$$\frac{1}{y}y' - \frac{1}{x} = 0$$

cujas solução geral é dada por

$$\int^y \frac{1}{y} dy - \int^x \frac{1}{x} dx = C_1$$

com  $C_1$  constante real arbitrária, a qual pode tomar a forma

$$y = Cx,$$

com  $C$  constante real arbitrária.

Para a equação diferencial linear completa procurar-se agora uma solução do tipo

$$y = \phi(x)x, \tag{2.29}$$

onde  $\phi$  é uma função a determinar de modo que a equação (2.29) seja solução da equação diferencial linear completa (2.28).

Substituindo (2.29) na equação diferencial linear completa (2.28) e, atendendo a que

$y' = \phi'(x)x + \phi(x)$  obtemos,

$$x(\phi'(x)x + \phi(x)) - \phi(x)x = x - 1 \iff x^2\phi'(x) = x - 1$$

donde obtemos, uma vez que  $x > 0$ ,

$$\phi'(x) = \frac{x-1}{x^2} \iff \phi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

Desta última igualdade obtemos, uma vez que  $x > 0$ ,

$$\phi(x) = \ln x + \frac{1}{x} + C, \quad (2.30)$$

onde  $C$  é uma constante real arbitrária.

Substituindo (2.30) em (2.29) temos

$$y = Cx + 1 + x \ln x$$

que é a solução geral da equação diferencial dada.

Observe-se que a solução obtida é igual à soma da solução geral da equação diferencial linear homogénea associada a (2.28) com uma função  $y_*$  definida por  $y_*(x) = 1 + x \ln x$  que, como facilmente se verifica, é uma solução particular da equação diferencial linear completa, o que confirma o Teorema 2.25.

## 2. Consideremos a equação diferencial linear de primeira ordem

$$\alpha y' + \beta y = b(x), \quad x \in I \quad (2.31)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes reais não nulas.

Para obter uma solução geral desta equação diferencial podemos utilizar o método da variação da constante e obtemos

$$y = C e^{(-\beta/\alpha)x} + \frac{1}{\alpha} e^{(-\beta/\alpha)x} \int^x b(x) e^{(\beta/\alpha)x} dx,$$

com  $C$  constante real arbitrária.

Para  $n > 1$  prova-se que as funções  $F_1, F_2, \dots, F_n$  da igualdade (2.26) se obtêm por integração directa a partir das soluções do sistema

$$\begin{cases} F_1'(x)y_1(x) + F_2'(x)y_2(x) + \dots + F_n'(x)y_n(x) & = 0 \\ F_1'(x)y_1'(x) + F_2'(x)y_2'(x) + \dots + F_n'(x)y_n'(x) & = 0 \\ \vdots & \\ F_1'(x)y_1^{n-2}(x) + F_2'(x)y_2^{n-2}(x) + \dots + F_n'(x)y_n^{n-2}(x) & = 0 \\ F_1'(x)y_1^{n-1}(x) + F_2'(x)y_2^{n-1}(x) + \dots + F_n'(x)y_n^{n-1}(x) & = b(x) \end{cases} \quad (2.32)$$



Neste caso, o Método da Variação das Constantes permite obter a solução geral da equação diferencial (2.24) utilizando o procedimento seguinte:

1. determinamos a solução geral,  $y_H$ , da equação diferencial linear homogénea associada à equação diferencial (2.24);
2. determinamos uma solução particular,  $y_P$ , da forma (2.26) utilizando as soluções do sistema (2.32);
3. a solução geral da equação diferencial (2.24) é então dada por  $y = y_H + y_P$ .

No que se segue vamos deduzir o sistema (2.32) para os casos particulares de  $n = 2, 3$ .

Consideremos a equação diferencial linear completa de ordem 2

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x), \quad (2.33)$$

onde  $a_1, a_2$  e  $b$  são funções definidas e contínuas num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ .

Admitamos que  $\{y_1, y_2\}$  é um sistema fundamental de soluções da equação diferencial linear homogénea associada à equação diferencial (2.33). Então, uma solução particular da equação diferencial (2.33) é definida em  $I$  por

$$y_P(x) = F_1(x)y_1(x) + F_2(x)y_2(x) \quad (2.34)$$

com  $F_1$  e  $F_2$  funções a determinar pelo Método da Variação das Constantes.

Temos

$$y'_P(x) = F'_1(x)y_1(x) + F'_2(x)y_2(x) + F_1(x)y'_1(x) + F_2(x)y'_2(x)$$

e, se assumirmos

$$F'_1(x)y_1(x) + F'_2(x)y_2(x) = 0,$$

obtemos

$$y'_P(x) = F_1(x)y'_1(x) + F_2(x)y'_2(x).$$

Consequentemente,

$$y''_P(x) = F'_1(x)y'_1(x) + F_1(x)y''_1(x) + F'_2(x)y'_2(x) + F_2(x)y''_2(x)$$

e, substituindo na equação (2.33), obtemos

$$\begin{aligned} & (F'_1(x)y'_1(x) + F_1(x)y''_1(x) + F'_2(x)y'_2(x) + F_2(x)y''_2(x)) + a_1(x)(F_1(x)y'_1(x) + F_2(x)y'_2(x)) + \\ & + a_2(x)(F_1(x)y_1(x) + F_2(x)y_2(x)) = b(x), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & F_1(x)(y''_1(x) + a_1(x)y'_1(x) + a_2(x)y_1(x)) + F_2(x)(y''_2(x) + a_1(x)y'_2(x) + a_2(x)y_2(x)) + \\ & + F'_1(x)y'_1(x) + F'_2(x)y'_2(x) = b(x). \end{aligned}$$

Uma vez que  $y_1$  e  $y_2$  são soluções da equação diferencial linear homogénea associada à equação diferencial (2.33) temos  $y''_1(x) + a_1(x)y'_1(x) + a_2(x)y_1(x) = 0$  e  $y''_2(x) + a_1(x)y'_2(x) + a_2(x)y_2(x) = 0$  e,

portanto, obtemos

$$F_1'(x)y_1'(x) + F_2'(x)y_2'(x) = b(x).$$

Consequentemente, as funções  $F_1'$  e  $F_2'$  são as soluções do sistema

$$\begin{cases} F_1'(x)y_1(x) + F_2'(x)y_2(x) = 0 \\ F_1'(x)y_1'(x) + F_2'(x)y_2'(x) = b(x) \end{cases}$$

As funções  $F_1$  e  $F_2$  determinam-se por integração directa das soluções obtidas. Substituindo em (2.34) obtemos uma solução particular da equação diferencial (2.33).

**Exemplo 2.37.** Consideremos a equação diferencial linear de coeficientes constantes

$$y'' + y = \operatorname{tg} x,$$

com  $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .

A equação diferencial linear homogénea associada a esta equação diferencial é a equação

$$y'' + y = 0$$

cujas equação característica é

$$s^2 + 1 = 0.$$

Uma vez que o polinómio característico associado a esta equação diferencial linear homogénea tem as raízes complexas simples  $r = i$  e  $\bar{r} = -i$ , a solução geral desta equação diferencial linear homogénea é

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

com  $C_1, C_2$  constantes reais arbitrárias.

Vamos determinar uma solução particular da equação diferencial considerada utilizando o Método da Variação das Constantes.

Uma solução particular da equação diferencial considerada é dada por

$$y_P(x) = F_1(x) \cos x + F_2(x) \sin x,$$

onde  $F_1$  e  $F_2$  são obtidas a partir das soluções do sistema

$$\begin{aligned} \begin{cases} F_1'(x) \cos x + F_2'(x) \sin x &= 0 \\ -F_1'(x) \sin x + F_2'(x) \cos x &= \operatorname{tg} x \end{cases} &\iff \begin{cases} F_1'(x) \cos x \sin x + F_2'(x) \sin^2 x &= 0 \\ -F_1'(x) \cos x \sin x + F_2'(x) \cos^2 x &= \sin x \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} F_1'(x) \cos x + F_2'(x) \sin x &= 0 \\ (\sin^2 x + \cos^2 x) F_2'(x) &= \sin x \end{cases} \iff \begin{cases} F_1'(x) &= -\operatorname{tg} x \sin x \\ F_2'(x) &= \sin x \end{cases} \end{aligned}$$

Por integração directa obtemos então

$$\begin{cases} F_1(x) &= -\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + \operatorname{sen} x \\ F_2(x) &= -\cos x \end{cases}$$

e, portanto,

$$y_P(x) = -\cos x \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + \operatorname{sen} x \cos x - \cos x \operatorname{sen} x = -\cos x \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|.$$

Consequentemente, a solução geral da equação diferencial linear considerada é

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - \cos x \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|,$$

com  $C_1, C_2$  constantes reais arbitrárias.

Consideremos a equação diferencial linear completa de ordem 3

$$y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = b(x), \quad (2.35)$$

onde  $a_1, a_2, a_3$  e  $b$  são funções definidas e contínuas num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ .

Admitamos que  $\{y_1, y_2, y_3\}$  é um sistema fundamental de soluções da equação diferencial linear homogénea associada à equação diferencial (2.35). Então uma solução particular da equação diferencial (2.35) é definida em  $I$  por

$$y_P(x) = F_1(x)y_1(x) + F_2(x)y_2(x) + F_3(x)y_3(x) \quad (2.36)$$

com  $F_1, F_2$  e  $F_3$  funções a determinar pelo Método da Variação das Constantes.

Temos

$$y'_P(x) = F'_1(x)y_1(x) + F'_2(x)y_2(x) + F_1(x)y'_1(x) + F_2(x)y'_2(x) + F'_3(x)y_3(x) + F_3(x)y'_3(x)$$

e, se assumirmos

$$F'_1(x)y_1(x) + F'_2(x)y_2(x) + F'_3(x)y_3(x) = 0,$$

obtemos

$$y'_P(x) = F_1(x)y'_1(x) + F_2(x)y'_2(x) + F_3(x)y'_3(x).$$

Consequentemente,

$$y''_P(x) = F'_1(x)y'_1(x) + F_1(x)y''_1(x) + F'_2(x)y'_2(x) + F_2(x)y''_2(x) + F'_3(x)y'_3(x) + F_3(x)y''_3(x)$$

e, se assumirmos

$$F'_1(x)y'_1(x) + F'_2(x)y'_2(x) + F'_3(x)y'_3(x) = 0$$

obtemos

$$y''_P(x) = F_1(x)y''_1(x) + F_2(x)y''_2(x) + F_3(x)y''_3(x)$$

donde resulta

$$y_P'''(x) = F_1'(x)y_1''(x) + F_1(x)y_1'''(x) + F_2'(x)y_2''(x) + F_2(x)y_2'''(x) + F_3'(x)y_3''(x) + F_3(x)y_3'''(x)$$

e, substituindo na equação (2.35), obtemos

$$\begin{aligned} & (F_1'(x)y_1''(x) + F_1(x)y_1'''(x) + F_2'(x)y_2''(x) + F_2(x)y_2'''(x) + F_3'(x)y_3''(x) + F_3(x)y_3'''(x)) + \\ & + a_1(x)(F_1(x)y_1''(x) + F_2(x)y_2''(x) + F_3(x)y_3''(x)) + a_2(x)(F_1(x)y_1'(x) + F_2(x)y_2'(x) + F_3(x)y_3'(x)) + \\ & + a_3(x)(F_1(x)y_1(x) + F_2(x)y_2(x) + F_3(x)y_3(x)) = b(x), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & F_1(x)(y_1'''(x) + a_1(x)y_1''(x) + a_2(x)y_1'(x) + a_3(x)y_1(x)) + F_2(x)(y_2'''(x) + a_1(x)y_2''(x) + a_2(x)y_2'(x) + a_3(x)y_2(x)) + \\ & + F_3(x)(y_3'''(x) + a_1(x)y_3''(x) + a_2(x)y_3'(x) + a_3(x)y_3(x)) + F_1'(x)y_1''(x) + F_2'(x)y_2''(x) + F_3'(x)y_3''(x) = b(x). \end{aligned}$$

Uma vez que  $y_1, y_2$  e  $y_3$  são soluções da equação diferencial linear homogénea associada à equação diferencial (2.35) temos

$$y_1'''(x) + a_1(x)y_1''(x) + a_2(x)y_1'(x) + a_3(x)y_1(x) = 0$$

e

$$y_2'''(x) + a_1(x)y_2''(x) + a_2(x)y_2'(x) + a_3(x)y_2(x) = 0$$

e

$$y_3'''(x) + a_1(x)y_3''(x) + a_2(x)y_3'(x) + a_3(x)y_3(x) = 0$$

e, portanto, obtemos

$$F_1'(x)y_1''(x) + F_2'(x)y_2''(x) + F_3'(x)y_3''(x) = b(x).$$

Consequentemente, as funções  $F_1', F_2'$  e  $F_3'$  são as soluções do sistema

$$\begin{cases} F_1'(x)y_1(x) + F_2'(x)y_2(x) + F_3'(x)y_3(x) &= 0 \\ F_1'(x)y_1'(x) + F_2'(x)y_2'(x) + F_3'(x)y_3'(x) &= 0 \\ F_1'(x)y_1''(x) + F_2'(x)y_2''(x) + F_3'(x)y_3''(x) &= b(x) \end{cases}$$

As funções  $F_1, F_2$  e  $F_3$  determinam-se por integração directa das soluções obtidas. Substituindo em (2.36) obtemos uma solução particular da equação diferencial (2.35).

**Exemplo 2.38.** Consideremos a equação diferencial linear de coeficientes constantes

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^{4x}.$$

A equação diferencial linear homogénea associada a esta equação diferencial é a equação

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

cujas equações características são

$$s^3 - 6s^2 + 11s - 6 = 0.$$

Uma vez que o polinómio característico associado a esta equação diferencial linear homogénea tem as raízes reais simples  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 2$  e  $r_3 = 3$ , a solução geral desta equação diferencial linear homogénea é

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x},$$

com  $C_1, C_2, C_3$  constantes reais arbitrárias.

Vamos determinar uma solução particular da equação diferencial considerada utilizando o Método da Variação das Constantes.

Uma solução particular da equação diferencial considerada é dada por

$$y_P(x) = F_1(x) e^x + F_2(x) e^{2x} + F_3(x) e^{3x},$$

onde  $F_1, F_2$  e  $F_3$  são obtidas a partir das soluções do sistema

$$\begin{cases} F_1'(x) e^x + F_2'(x) e^{2x} + F_3'(x) e^{3x} = 0 \\ F_1'(x) e^x + 2F_2'(x) e^{2x} + 3F_3'(x) e^{3x} = 0 \\ F_1'(x) e^x + 4F_2'(x) e^{2x} + 9F_3'(x) e^{3x} = e^{4x} \end{cases} \iff \begin{cases} F_1'(x) = \frac{1}{2} e^{3x} \\ F_2'(x) = -e^{2x} \\ F_3'(x) = \frac{1}{2} e^x \end{cases}$$

Por integração directa obtemos então

$$\begin{cases} F_1(x) = \frac{1}{6} e^{3x} \\ F_2(x) = -\frac{1}{2} e^{2x} \\ F_3(x) = \frac{1}{2} e^x \end{cases}$$

e, portanto,

$$y_P(x) = \frac{1}{6} e^{3x} e^x - \frac{1}{2} e^{2x} e^{2x} + \frac{1}{2} e^x e^{3x} = \frac{1}{6} e^{4x}.$$

Consequentemente, a solução geral da equação diferencial linear considerada é

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} + \frac{1}{6} e^{4x},$$

com  $C_1, C_2, C_3$  constantes reais arbitrárias.

No caso geral da equação diferencial linear completa de ordem  $n$ , (2.25), uma solução particular é da forma

$$y_P(x) = F_1(x)y_1(x) + F_2(x)y_2(x) + \cdots + F_n(x)y_n(x),$$

onde  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  é um sistema fundamental de soluções da equação diferencial linear homogénea que

lhe está associada e  $F_1, F_2, \dots, F_n$  se obtêm por integração directa a partir das soluções do sistema

$$\begin{cases} F_1'(x)y_1(x) + F_2'(x)y_2(x) + \dots + F_n'(x)y_n(x) & = 0 \\ F_1'(x)y_1'(x) + F_2'(x)y_2'(x) + \dots + F_n'(x)y_n'(x) & = 0 \\ \vdots & \\ F_1'(x)y_1^{n-2}(x) + F_2'(x)y_2^{n-2}(x) + \dots + F_n'(x)y_n^{n-2}(x) & = 0 \\ F_1'(x)y_1^{n-1}(x) + F_2'(x)y_2^{n-1}(x) + \dots + F_n'(x)y_n^{n-1}(x) & = b(x) \end{cases}$$

### Método dos Coeficientes Indeterminados

Vimos que, para determinar uma solução particular de uma equação diferencial linear, podemos utilizar o Método da Variação das Constantes. Este método pode ser aplicado sempre que se conheça a solução geral da equação diferencial linear homogénea associada mas revela-se, em muitos casos, de difícil aplicação.

O método mais simples, quando aplicável, para determinar uma solução particular duma equação diferencial linear é o **Método dos Coeficientes Indeterminados**. Este método consiste em admitir que a solução particular procurada é de uma certa forma que, em geral, envolve coeficientes desconhecidos a determinar de modo que aquela função satisfaça a equação diferencial considerada e, para que o método funcione, devemos ser capazes de determinar os coeficientes desconhecidos.

Para que este método seja aplicável as duas condições seguintes devem ser verificadas:

- a equação diferencial a resolver é uma equação diferencial linear de coeficientes constantes;
- o segundo membro da equação completa tem de ser solução de alguma equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes, ou seja, tem de ser combinação linear de funções do tipo

$$x^j \quad \text{ou} \quad x^j e^{\alpha x} \quad \text{ou} \quad x^j e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad \text{ou} \quad x^j e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

com  $j$  não negativo e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Antes de indicarmos o procedimento a adoptar no caso geral, vamos começar por apresentar alguns exemplos em que tentaremos, de uma forma intuitiva, determinar uma solução particular de uma equação diferencial linear com coeficientes constantes. Como veremos em alguns destes exemplos, a forma da solução particular procurada não depende apenas do segundo membro da equação.

**Exemplo 2.39.** 1. Consideremos a equação diferencial linear

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \sin x.$$

Pretendemos determinar uma função  $y_P$  que verifique a equação diferencial considerada. Não faz sentido considerar funções como, por exemplo,  $e^x$ ,  $\ln x$  ou  $x^2$ , já que, independentemente da forma como estas funções e as suas duas primeiras derivadas sejam combinadas, nunca obteremos  $\sin x$ . As funções óbvias a considerar são  $\sin x$  e  $\cos x$ . Então admitamos que  $y_P$  é da forma

$$y_P(x) = A \sin x + B \cos x$$

com  $A$  e  $B$  constantes a determinar por forma que esta função seja uma solução da equação considerada. Uma vez que

$$y_P'(x) = A \cos x - B \sin x$$

e

$$y_P''(x) = -A \sin x - B \cos x$$

obtemos

$$\begin{aligned} (-A \sin x - B \cos x) - 3(A \cos x - B \sin x) - 4(A \sin x + B \cos x) &= 2 \sin x \iff \\ \iff (-A + 3B - 4A) \sin x + (-B - 3A - 4B) \cos x &= 2 \sin x \iff \\ \iff (-5A + 3B) \sin x + (-3A - 5B) \cos x &= 2 \sin x \end{aligned}$$

donde resulta o sistema

$$\begin{cases} -5A + 3B = 2 \\ -3A - 5B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\frac{5}{17} \\ B = \frac{3}{17} \end{cases}$$

Então a função  $y_P$  definida por

$$y_P(x) = -\frac{5}{17} \sin x + \frac{3}{17} \cos x$$

é uma solução particular da equação diferencial considerada.

2. Vamos determinar uma solução particular da equação diferencial linear

$$y'' - 3y' - 4y = 4x^2.$$

Pretendemos determinar uma função  $y_P$  que verifique a equação diferencial considerada. Uma vez que o segundo membro da equação é um polinómio do segundo grau, uma possibilidade óbvia é considerar a função  $y_P$  da forma

$$y_P(x) = Ax^2 + Bx + C$$

com  $A$ ,  $B$  e  $C$  constantes a determinar por forma que esta função seja uma solução da equação considerada. Uma vez que

$$y_P'(x) = 2Ax + B$$

e

$$y_P''(x) = 2A$$

obtemos

$$2A - 6Ax - 3B - 4Ax^2 - 4Bx - 4C = 4x^2 \iff -4Ax^2 + (-6A - 4B)x + 2A - 3B - 4C = 4x^2$$

donde resulta o sistema

$$\begin{cases} -4A = 4 \\ -6A - 4B = 0 \\ 2A - 3B - 4C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -1 \\ B = 3/2 \\ C = -\frac{13}{8} \end{cases}$$

Então a função  $y_P$  definida por

$$y_P(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$$

é uma solução particular da equação diferencial considerada.

3. Vamos determinar uma solução particular da equação diferencial linear

$$y''' - y'' = 6x.$$

Pretendemos determinar uma função  $y_P$  que verifique a equação diferencial considerada. Uma vez que o segundo membro da equação é um polinómio do primeiro grau, uma possibilidade óbvia a considerar é a função  $y_P$  da forma

$$y_P(x) = Ax + B$$

com  $A$  e  $B$  constantes a determinar por forma que esta função seja uma solução da equação considerada. Uma vez que

$$y'_P(x) = A,$$

$$y''_P(x) = y'''_P(x) = 0$$

obtemos a igualdade

$$0 = 6x.$$

Então a função  $y_P$  que procuramos não pode ser um polinómio do primeiro grau.

Vamos então supor que  $y_P$  é da forma

$$y_P(x) = Ax^2 + Bx + C$$

com  $A$ ,  $B$  e  $C$  constantes a determinar.

Calculando  $y'''_P$  e  $y''_P$  e substituindo na equação diferencial considerada obtemos

$$2A = 6x^2$$

donde resulta o sistema

$$\begin{cases} 0 = 6 \\ 2A = 0 \end{cases}$$

que é um sistema impossível.

Então a solução particular procurada não pode ser um polinómio de grau 2.



Suponhamos então que  $y_P$  é da forma

$$y_P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + Dx,$$

com  $A, B, C$  e  $D$  constantes a determinar.

Calculando  $y_P'''$  e  $y_P''$  e substituindo na equação diferencial considerada obtemos

$$-6Ax + 6A - 2B = 6x$$

donde resulta o sistema

$$\begin{cases} -6A = 6 \\ 6A - 2B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -1 \\ B = -3 \end{cases}$$

Consequentemente, a função  $y_P$  definida por

$$y_P(x) = -x^3 - 3x^2$$

é uma solução particular da equação diferencial considerada.

Observe-se que, neste caso, o segundo membro da equação diferencial considerada é um polinómio do primeiro grau,  $r = 0$  é uma raiz de multiplicidade  $k = 2$  do polinómio característico da equação diferencial linear homogénea que está associada à equação diferencial considerada e a solução particular obtida é um polinómio de grau  $3 = 2 + 1$  da forma  $x^2(-x - 3)$ .

4. Consideremos a equação diferencial linear de coeficientes constantes

$$y' - y = xe^{3x}.$$

Pretendemos determinar uma função  $y_P$  que verifique a equação diferencial considerada. Uma possibilidade óbvia a considerar é a função  $y_P$  da forma

$$y_P(x) = (a_0x + a_1)e^{3x}.$$

com  $a_0$  e  $a_1$  constantes reais a determinar por forma que esta função seja uma solução da equação considerada. Uma vez que

$$y_P'(x) = a_0e^{3x} + (3a_0x + 3a_1)e^{3x} = (3a_0x + 3a_1 + a_0)e^{3x},$$

obtemos a igualdade

$$(3a_0x + 3a_1 + a_0)e^{3x} - (a_0x + a_1)e^{3x} = xe^{3x},$$

ou seja,

$$((2a_0 - 1)x + 2a_1 + a_0)e^{3x} = 0.$$

Desta igualdade resulta o sistema

$$\begin{cases} 2a_0 - 1 = 0 \\ 2a_1 + a_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 1/2 \\ a_1 = -1/4 \end{cases}$$

pelo que a função  $y_P$  definida por

$$y_P(x) = \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) e^{3x}$$

é uma solução particular da equação diferencial considerada.

5. Consideremos a equação diferencial

$$y' - 3y = e^{3x}.$$

Pretendemos determinar uma função  $y_P$  que verifique a equação diferencial considerada. Uma possibilidade óbvia a considerar é a função  $y_P$  da forma

$$y_P(x) = A e^{3x}.$$

com  $A$  constante a determinar por forma que esta função seja uma solução da equação considerada. Uma vez que

$$y'_P(x) = 3A e^{3x},$$

obtemos a igualdade

$$0 = e^{3x}.$$

Então a função  $y_P$  que procuramos não pode ser da forma  $y_P(x) = A e^{3x}$ .

Observe-se que, neste caso, temos que  $\alpha = 3$  é raiz de multiplicidade  $k = 1$  do polinómio característico da equação diferencial linear homogénea associada à equação diferencial considerada.

Tomemos

$$y_P(x) = xA e^{3x}.$$

com  $A$  constante a determinar por forma que esta função seja uma solução da equação considerada. Uma vez que

$$y'_P(x) = A e^{3x} + 3xA e^{3x} = (3Ax + A) e^{3x},$$

obtemos a igualdade

$$(3Ax + A) e^{3x} - 3xA e^{3x} = e^{3x} \iff (A - 1) e^{3x} = 0,$$

donde resulta que  $A = 1$ .

Consequentemente, a função  $y_P$  definida por

$$y_P(x) = x e^{3x}$$

é uma solução particular da equação diferencial considerada.

Vamos então indicar, para efeitos de aplicação do Método dos Coeficientes Indeterminados, a forma adequada da solução particular a ser procurada em três dos casos em que este método é aplicável. Sempre que o Método dos Coeficientes Indeterminados seja aplicável, a determinação de uma solução particular de uma equação diferencial linear de coeficientes constantes é feita utilizando um ou mais destes três casos.

Consideremos a equação diferencial linear de coeficientes constantes

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j y^{(j)} = b(x). \quad (2.37)$$

**Primeiro Caso:** Suponhamos que o segundo membro da equação (2.37) é um polinómio de grau  $m$ , isto é,

$$b(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m,$$

com  $b_0, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$  e  $b_0 \neq 0$ .

Neste caso a solução particular adequada é da forma

$$y_P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m$$

se  $r = 0$  não é raiz do polinómio característico da equação diferencial linear homogénea associada à equação diferencial (2.37) e é da forma

$$y_P(x) = x^k (a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m)$$

se  $r = 0$  é raiz de multiplicidade  $k$  do polinómio característico da equação diferencial linear homogénea associada à equação diferencial (2.37).

**Exemplo 2.40.** 1. Consideremos a equação diferencial

$$y' + 2y = x^3 + 3x + 1.$$

O polinómio característico da equação diferencial linear homogénea que lhe está associada é o polinómio  $p(s) = s + 2$ , pelo que  $r = 0$  não é raiz deste polinómio.

Consequentemente, uma solução particular desta equação é a função  $y_P$  definida por

$$y_P(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3,$$

com  $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$  a determinar por forma que esta função seja solução da equação considerada.

Uma vez que  $y'_P(x) = 3a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2$ , obtemos

$$3a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 + 2a_0 x^3 + 2a_1 x^2 + 2a_2 x + 2a_3 = x^3 + 3x + 1,$$

ou seja,

$$2a_0x^3 + (2a_1 + 3a_0)x^2 + (2a_2 + 2a_1)x + 2a_3 + a_2 = x^3 + 3x + 1.$$

Desta igualdade resulta o sistema

$$\begin{cases} 2a_0 = 1 \\ 2a_1 + 3a_0 = 0 \\ 2a_2 + 2a_1 = 3 \\ 2a_3 + a_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 1/2 \\ a_1 = -3/4 \\ a_2 = 9/4 \\ a_3 = -5/8 \end{cases}$$

Então  $y_p$  definida por

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{5}{8}$$

é uma solução particular da equação diferencial considerada.

2. Consideremos a equação diferencial

$$y^{(4)} - 2y'' = x^2 + 1.$$

O polinómio característico da equação diferencial linear homogénea que lhe está associada é o polinómio  $p(s) = s^4 - 2s^2$  pelo que  $r = 0$  é raiz de multiplicidade  $k = 2$  deste polinómio.

Consequentemente, uma solução particular desta equação é a função  $y_p$  definida por

$$y_p(x) = x^2(a_0x^2 + a_1x + a_2) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2,$$

com  $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  a determinar por forma que esta função seja solução da equação considerada.

Uma vez que

$$y_p''(x) = 12a_0x^2 + 6a_1x + 2a_2$$

e

$$y_p^{(4)}(x) = 24a_0$$

obtemos, substituindo na equação diferencial considerada,

$$24a_0 - 2(12a_0x^2 + 6a_1x + 2a_2) = x^2 + 1,$$

ou seja,

$$-24a_0x^2 - 12a_1x + 24a_0 - 4a_2 = x^2 + 1.$$

Desta igualdade resulta o sistema

$$\begin{cases} -24a_0 = 1 \\ -12a_1 = 0 \\ 24a_0 - 4a_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = -1/24 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -1/2 \end{cases}$$

Consequentemente, uma solução particular da equação diferencial dada é a função  $y_P$  definida por

$$y_P(x) = -\frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2}.$$

**Segundo Caso:** Suponhamos que o segundo membro da equação (2.37) tem a forma

$$b(x) = (b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m) e^{\alpha x},$$

com  $b_0, b_1, \dots, b_m, \alpha \in \mathbb{R}$ .

Neste caso a solução particular adequada é da forma

$$y_P(x) = (a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m) e^{\alpha x}$$

se  $r = \alpha$  não é raiz do polinómio característico da equação diferencial linear homogénea associada à equação diferencial (2.37) e é da forma

$$y_P(x) = x^k (a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m) e^{\alpha x}$$

se  $r = \alpha$  é raiz de multiplicidade  $k$  do polinómio característico da equação diferencial linear homogénea associada à equação diferencial (2.37).

**Exemplo 2.41.** 1. Consideremos a equação diferencial

$$y' - y = (x^2 + 1) e^{3x}.$$

O polinómio característico da equação diferencial linear homogénea que lhe está associada é o polinómio  $p(s) = s - 1$  pelo que  $\alpha = 3$  não é raiz deste polinómio.

Consequentemente, uma solução particular desta equação é a função  $y_P$  definida por

$$y_P(x) = (a_0x^2 + a_1x + a_2) e^{3x},$$

com  $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  a determinar por forma que esta função seja solução da equação considerada.

Uma vez que

$$\begin{aligned} y'_P(x) &= (2a_0x + a_1) e^{3x} + (3a_0x^2 + 3a_1x + 3a_2) e^{3x} \\ &= (3a_0x^2 + (2a_0 + 3a_1)x + a_1 + 3a_2) e^{3x} \end{aligned}$$

obtemos

$$(3a_0x^2 + (2a_0 + 3a_1)x + a_1 + 3a_2) e^{3x} - (a_0x^2 + a_1x + a_2) e^{3x} = (x^2 + 1) e^{3x},$$

ou seja,

$$(2a_0x^2 + (2a_0 + 2a_1)x + a_1 + 2a_2) e^{3x} = (x^2 + 1) e^{3x}.$$

Uma vez que  $e^{3x} \neq 0$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ , esta igualdade é equivalente a

$$2a_0x^2 + (2a_0 + 2a_1)x + a_1 + 2a_2 = x^2 + 1.$$

Desta igualdade resulta o sistema

$$\begin{cases} 2a_0 &= 1 \\ 2a_0 + 2a_1 &= 0 \\ a_1 + 2a_2 &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 &= 1/2 \\ a_1 &= -1/2 \\ a_2 &= 1/4 \end{cases}$$

Então  $y_P$  definida por

$$y_P(x) = \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) e^{3x}$$

é uma solução particular da equação diferencial considerada.

2. Consideremos a equação diferencial

$$y' - y = (x^2 + 1)e^x.$$

O polinómio característico da equação diferencial linear homogénea que lhe está associada é o polinómio  $p(s) = s - 1$  pelo que  $\alpha = 1$  é raiz de multiplicidade  $k = 1$  deste polinómio.

Consequentemente, uma solução particular desta equação é a função  $y_P$  definida por

$$y_P(x) = x(a_0x^2 + a_1x + a_2)e^x = (a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x)e^x,$$

com  $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  a determinar por forma que esta função seja solução da equação considerada.

Uma vez que

$$\begin{aligned} y'_P(x) &= (3a_0x^2 + 2a_1x + a_2)e^x + (a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x)e^x \\ &= (a_0x^3 + (3a_0 + a_1)x^2 + (2a_1 + a_2)x + a_2)e^x \end{aligned}$$

obtemos

$$(a_0x^3 + (3a_0 + a_1)x^2 + (2a_1 + a_2)x + a_2)e^x - (a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x)e^x = (x^2 + 1)e^x,$$

ou seja,

$$(3a_0x^2 + 2a_1x + a_2)e^x = (x^2 + 1)e^x.$$

Uma vez que  $e^x \neq 0$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ , esta igualdade é equivalente a

$$3a_0x^2 + 2a_1x + a_2 = x^2 + 1.$$

Desta igualdade resulta o sistema

$$\begin{cases} 3a_0 = 1 \\ 2a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 1/3 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

Consequentemente, uma solução particular da equação diferencial dada é a função  $y_P$  definida por

$$y_P(x) = \left( \frac{x^3}{3} + x \right) e^x.$$

3. Consideremos a equação diferencial

$$y''' - 2y'' + y' = (x+1)e^x.$$

O polinómio característico da equação diferencial linear homogénea que lhe está associada é o polinómio  $p(s) = s^3 - 2s + s$  pelo que  $\alpha = 1$  é raiz de multiplicidade  $k = 2$  deste polinómio.

Consequentemente, uma solução particular desta equação é a função  $y_P$  definida por

$$y_P(x) = x^2(a_0x + a_1)e^x = (a_0x^3 + a_1x^2)e^x,$$

com  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$  a determinar por forma que esta função seja solução da equação considerada.

Uma vez que

$$\begin{aligned} y'_P(x) &= (3a_0x^2 + 2a_1x)e^x + (a_0x^3 + a_1x^2)e^x \\ &= (a_0x^3 + (3a_0 + a_1)x^2 + 2a_1x)e^x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y''_P(x) &= (3a_0x^2 + (6a_0 + 2a_1)x + 2a_1)e^x + (a_0x^3 + (3a_0 + a_1)x^2 + 2a_1x)e^x \\ &= (a_0x^3 + (6a_0 + a_1)x^2 + (6a_0 + 4a_1)x + 2a_1)e^x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y'''_P(x) &= (3a_0x^2 + (12a_0 + 2a_1)x + (6a_0 + 4a_1))e^x + (a_0x^3 + (6a_0 + a_1)x^2 + (6a_0 + 4a_1)x + 2a_1)e^x \\ &= (a_0x^3 + (9a_0 + a_1)x^2 + (18a_0 + 6a_1)x + 6a_0 + 6a_1)e^x \end{aligned}$$

obtemos, substituindo na equação diferencial considerada,

$$(-2a_1x^2 + 6a_0x + 6a_0 + 2a_1)e^x = (x+1)e^x.$$

Uma vez que  $e^x \neq 0$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ , esta igualdade é equivalente a

$$-2a_1x^2 + 6a_0x + 6a_0 + 2a_1 = x + 1.$$

Desta igualdade resulta o sistema

$$\begin{cases} -2a_1 = 0 \\ 6a_0 = 1 \\ 6a_0 + 2a_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 1/6 \\ a_1 = 0 \\ 1 + 0 = 1 \end{cases}$$

Consequentemente, uma solução particular da equação diferencial dada é a função  $y_P$  definida por

$$y_P(x) = \frac{x^3}{6} e^x.$$

**Terceiro Caso:** Suponhamos que o segundo membro da equação (2.37) tem a forma

$$b(x) = (b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m) e^{\alpha x} \cos(\beta x),$$

ou tem a forma

$$b(x) = (b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m) e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

com  $b_0, b_1, \dots, b_m, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Em cada um destes casos a solução particular adequada é da forma

$$y_P(x) = (P(x) \cos(\beta x) + Q(x) \sin(\beta x)) e^{\alpha x}$$

com  $P$  e  $Q$  polinómios de grau  $m$  a determinar, se  $r = \alpha + i\beta$  não é raiz do polinómio característico da equação diferencial linear homogénea associada à equação diferencial (2.37) e é da forma

$$y_P(x) = x^k (P(x) \cos(\beta x) + Q(x) \sin(\beta x)) e^{\alpha x}$$

com  $P$  e  $Q$  polinómios de grau  $m$  a determinar, se  $r = \alpha + i\beta$  é raiz de multiplicidade  $k$  do polinómio característico da equação diferencial linear homogénea associada à equação diferencial (2.37).

**Exemplo 2.42.** 1. Consideremos a equação diferencial

$$2y' + y = 3 \cos(2x).$$

O polinómio característico da equação diferencial linear homogénea que lhe está associada é o polinómio  $p(s) = 2s + 1$  pelo que  $\alpha + i\beta = 2i$  não é raiz deste polinómio.

Consequentemente, uma solução particular desta equação diferencial é a função  $y_P$  definida por uma expressão da forma

$$y_P(x) = C \sin(2x) + D \cos(2x),$$



onde  $C$  e  $D$  são constantes reais a determinar. (Note-se que, uma vez que o coeficiente de  $\cos(2x)$  é um polinómio de grau zero,  $C$  e  $D$  são polinómios de grau zero.)

Substituindo na equação diferencial dada e, atendendo a que  $y'_p(x) = 2C \cos(2x) - 2D \sin(2x)$ , obtemos

$$4C \cos(2x) - 4D \sin(2x) + C \sin(2x) + D \cos(2x) = 3 \cos(2x),$$

ou seja,

$$(4C + D - 3) \cos(2x) + (-4D + C) \sin(2x) = 0.$$

Desta igualdade resulta o sistema

$$\begin{cases} 4C + D = 3 \\ C - 4D = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C = \frac{12}{17} \\ D = \frac{3}{17} \end{cases}$$

Consequentemente, a função  $y_p$  definida por

$$y_p(x) = \frac{12}{17} \sin(2x) + \frac{3}{17} \cos(2x)$$

é uma solução particular da equação diferencial considerada.

## 2. Consideremos a equação diferencial

$$y'' + y = x \sin x.$$

O polinómio característico da equação diferencial linear homogénea que lhe está associada é o polinómio  $p(s) = s^2 + 1$  pelo que  $\alpha + i\beta = i$  é raiz de multiplicidade  $k = 1$  deste polinómio.

Consequentemente, uma solução particular desta equação diferencial é a função  $y_p$  definida por uma expressão da forma

$$\begin{aligned} y_p(x) &= x((p_0x + p_1) \sin x + (q_0x + q_1) \cos x) \\ &= (p_0x^2 + p_1x) \sin x + (q_0x^2 + q_1x) \cos x, \end{aligned}$$

onde  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $q_0$  e  $q_1$  são constantes reais a determinar. (Note-se que, uma vez que o coeficiente de  $\sin x$  é um polinómio de grau um,  $P(x)$  e  $Q(x)$  são polinómios de grau um.)

Substituindo na equação diferencial dada e, atendendo a que

$$\begin{aligned} y''_p(x) &= (p_0x^2 + (-4q_0 - p_1)x + 2p_0 - 2q_1) \sin x + \\ &\quad + (-q_0x^2 + (4p_0 - q_1)x + 2q_0 + 2p_1) \cos x, \end{aligned}$$

obtemos

$$(2p_0x^2 - 4q_0x + 2p_0 - 2q_1) \sin x + (4p_0x + 2q_0 + 2p_1) \cos x = x \sin x,$$

ou seja

$$(2p_0x^2 + (-4q_0 - 1)x + 2p_0 - 2q_1) \sin x + (4p_0x + 2q_0 + 2p_1) \cos x = 0,$$

o que implica

$$2p_0x^2 + (-4q_0 - 1)x + 2p_0 - 2q_1 = 0$$

e

$$4p_0x + 2q_0 + 2p_1 = 0.$$

Destas duas últimas igualdades resulta o sistema

$$\begin{cases} 4p_0 = 0 \\ -4q_0 - 1 = 0 \\ 2p_0 - 2q_1 = 0 \\ 4p_0 = 0 \\ 2q_0 + 2p_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p_0 = 0 \\ q_0 = -1/4 \\ q_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ p_1 = 1/4 \end{cases}$$

Consequentemente, a função  $y_P$  definida por

$$y_P(x) = \frac{x}{4} \sin x - \frac{x^2}{4} \cos x$$

é uma solução particular da equação diferencial considerada.

**Observação 2.43.** Observe-se que na discussão que acabámos de apresentar:

- o primeiro caso pode obter-se do segundo tomando  $\alpha = 0$  e pode obter-se do terceiro tomando  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ ;
- o segundo caso pode obter-se do terceiro tomando  $\beta = 0$ .

Consequentemente, nos casos em que o Método dos Coeficientes Indeterminados é aplicável, a determinação de uma solução particular de uma equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes pode sempre fazer-se recorrendo apenas ao terceiro caso apresentado na discussão anterior.

Na determinação de uma solução particular de uma equação diferencial linear de coeficientes constantes utilizando o Método dos Coeficientes Indeterminados torna-se útil o resultado seguinte que é habitualmente designado **Princípio da Sobreposição dos Efeitos**.

**Teorema 2.44.** Consideremos a equação diferencial linear ordem  $n$

$$\sum_{j=0}^n a_j(x)y^{(n-j)} = b_1(x) + b_2(x) + \dots + b_m(x), \quad x \in I$$

onde, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $b_i$  é uma função contínua em  $I$ , para cada  $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ,  $a_j$  é uma função contínua em  $I$  e  $a_0(x)$  é não nula em  $I$ .

Se, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $y_i$  for uma solução particular da equação  $\sum_{j=0}^n a_j(x)y^{(n-j)} = b_i(x)$ , então  $y_P$  definida por

$$y_P(x) = y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_m(x)$$

é uma solução particular da equação dada.

**Demonstração:** Seja  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , arbitrário. Como, por hipótese,  $y_i$  é solução particular da equação diferencial linear  $\sum_{j=0}^n a_j(x)y^{(n-j)} = b_i(x)$  temos, para todo o  $x \in I$ ,

$$\sum_{j=0}^n a_j(x)y_i^{(n-j)} = b_i(x),$$

ou seja,

$$a_0(x)y_i^{(n)} + a_1(x)y_i^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y_i = b_i(x).$$

Somando membro a membro as  $m$  igualdades obtidas temos, para todo o  $x \in I$ ,

$$a_0(x) \sum_{i=1}^m y_i^{(n)} + a_1(x) \sum_{i=1}^m y_i^{(n-1)} + \dots + a_n(x) \sum_{i=1}^m y_i = \sum_{i=1}^m b_i(x)$$

o que permite concluir que  $y_P = \sum_{i=1}^m y_i$  é uma solução particular da equação

$$\sum_{j=0}^n a_j(x)y^{(n-j)} = \sum_{i=1}^m b_i(x)$$

como pretendíamos. ■

**Exemplo 2.45.** Consideremos a equação diferencial

$$y' - y = (x^2 + 1)e^{3x} + (x^2 + 1)e^x.$$

Uma solução particular desta equação diferencial é a função  $y_P$  definida por

$$y_P(x) = y_1(x) + y_2(x),$$

onde  $y_1$  é uma solução particular da equação diferencial

$$y' - y = (x^2 + 1)e^{3x}$$

e  $y_2$  é uma solução particular da equação diferencial

$$y' - y = (x^2 + 1)e^x$$

Tendo em atenção o Exemplo 2.41 temos

$$y_1(x) = \left( \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) e^{3x}$$

e

$$y_2(x) = \left( \frac{x^3}{3} + x \right) e^x$$

pelo que a função  $y_P$  definida por

$$y_P(x) = \left( \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) e^{3x} + \left( \frac{x^3}{3} + x \right) e^x$$

é uma solução particular da equação diferencial considerada.

**Exercícios 2.5:** 1. Determine a solução geral das seguintes equações lineares de primeira ordem:

(a)  $y' - \frac{2}{x}y = \frac{x-1}{x}$

(b)  $y' \sin x + y \cos x = \sin^2 x$

(c)  $xy' + y - e^x = 0, x > 0$

(d)  $y' + \frac{2}{x}y = e^x x^{-2}$

2. Calcule a solução particular que satisfaz as condições

(a)  $y'x \ln x + y - \ln x = 0$  e  $y(e) = 0$ ;

(b)  $y' - y = \sin x$  e  $y(0) = 0$ .

3. Determine a função  $f$  que satisfaz a seguinte equação diferencial

$$(xf(x))' = e^{-x} - f(x), x \neq 0$$

sabendo que  $f(1) = 0$ .

4. Em cada uma das alíneas seguintes determine, utilizando o Método da Variação das Constantes, a solução geral da equação diferencial linear considerada.

(a)  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

(b)  $y'' + y = \operatorname{cosec} x$

(c)  $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = \frac{e^x}{\cos x}$

(d)  $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$

(e)  $y' + y \cos x = \sin x \cos x$

5. Em cada uma das alíneas que se seguem determine a solução geral da equação diferencial linear de coeficientes constantes considerada.

(a)  $y''' + y' = \sin x$

(b)  $x + y + y' = 0$

(c)  $y + y' = e^{3x}$

(d)  $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$

(e)  $y'' + 2y' = 4 \operatorname{sen}(2x)$

(f)  $y' + y = (x+1)e^{2x}$

(g)  $y' + 2y = x^2 e^{-2x}$

(h)  $y' + y = \operatorname{sen} x$

(i)  $y' + y = -3 \cos(2x)$

(j)  $y' + y = \cos(3x) + \operatorname{sen}(3x)$

(k)  $y'' - y' - 2y = \cosh(2x)$

(l)  $y'' + y' + 4y = 2 \operatorname{senh} x$

(m)  $y''' + 4y' = x$

(n)  $y''' - y'' - y' + y = 2e^x$

(o)  $y''' + y'' + y' + y = e^{-x} + 4x$

(p)  $y''' - y = 2 \operatorname{sen} x$

(q)  $y^{(4)} - y'' = x^2 + e^x$

(r)  $y^{(4)} - y = 3x + \cos x$

(s)  $y'' = y - 2 \cos x$

### 2.4.3 Resolução de Problemas de Cauchy Usando Transformadas de Laplace

Consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \alpha y' + \beta y = b(t) \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

onde  $y_0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \neq 0$ .

Admitamos que conhecemos a transformada de Laplace da função  $b$  (que existe para  $s > s_b$ ) e que  $y$  e  $y'$  admitem transformada de Laplace para  $s > a$ . Temos então

$$\mathcal{L}\{\alpha y' + \beta y\} = \mathcal{L}\{b(t)\}$$

donde resulta, pela linearidade da transformada de Laplace,

$$\alpha \mathcal{L}\{y'\} + \beta \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{b(t)\},$$

para  $s > \max\{a, s_b\}$ .

Sendo  $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$  temos, pela propriedade da transformada da derivada,  $\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$  e, portanto, obtemos

$$\alpha(sY(s) - y(0)) + \beta Y(s) = \mathcal{L}\{b(x)\} \iff (\alpha s + \beta)Y(s) = \alpha y_0 + \mathcal{L}\{b(x)\}$$

donde se obtém, para  $\alpha s + \beta \neq 0$ ,

$$Y(s) = \frac{\alpha y_0 + \mathcal{L}\{b(x)\}}{\alpha s + \beta},$$

para  $s > \max\{a, s_b\}$ .

A determinação de  $y$  reduz-se agora à determinação da transformada de Laplace inversa de  $Y(s)$ .

**Exemplo 2.46.** 1. Consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} -y' + 2y = t e^t \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

e vamos determinar a sua solução usando a transformada de Laplace, supondo que  $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$  e  $\mathcal{L}\{y'\}$  existem para  $s > a$ , sendo o valor de  $a$  determinado posteriormente.

Desta igualdade resulta, atendendo a que  $\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - 1$  e à linearidade da transformada de Laplace,

$$-sY(s) - 1 + 2Y(s) = \mathcal{L}\{t e^t\}$$

donde resulta, atendendo a que  $\mathcal{L}\{t e^t\} = \frac{1}{(s-1)^2}$  para  $s > 1$ ,

$$(-s+2)Y(s) - 1 = \frac{1}{(s-1)^2} \iff Y(s) = \frac{-s^2+2s-2}{(s-2)(s-1)^2}$$

para  $s \neq 2$ .

Temos então

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2-2s+2}{(-s+2)(s-1)^2} \right\}.$$

Uma vez que

$$\frac{-s^2+2s-2}{(s-2)(s-1)^2} = \frac{-2}{s-2} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2-2s+2}{(-s+2)(s-1)^2} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2}{s-2} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} \right\} \\ &= -2\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)^2} \right\} \\ &= -2e^{2t} + e^t + t e^t \\ &= -2e^{2t} + (1+t)e^t \end{aligned}$$

Consequentemente, a solução do problema de Cauchy considerado é a função  $y$  definida por

$$y(t) = -2e^{2t} + (1+t)e^t.$$

Observe-se que podemos agora afirmar que  $Y(s)$  está definida para  $s > 2$ .

2. Consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' - 2y = t e^t \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Para determinar a solução deste problema de Cauchy não podemos utilizar directamente a transformada de Laplace, uma vez que não nos é dado o valor de  $y$  na origem.

No entanto se efectuarmos a substituição de variável definida por  $z(t) = y(t+1)$  obtemos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} z' - 2z = (t+1)e^{t+1} \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

cujas soluções podem ser obtidas usando a transformada de Laplace, supondo que  $\mathcal{L}\{z\} = Z(s)$  e  $\mathcal{L}\{z'\}$  existem para  $s > a$ .

Atendendo a que  $\mathcal{L}\{z'\} = sZ(s) - z(0) = sZ(s)$  e à linearidade da transformada de Laplace, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{z' - 2z\} &= \mathcal{L}\{z'\} - 2\mathcal{L}\{z\} \\ &= sZ(s) - 2Z(s) \\ &= (s-2)Z(s) \end{aligned}$$

e, atendendo a que  $\mathcal{L}\{z' - 2z\} = \mathcal{L}\{(t+1)e^{t+1}\}$  e

$$\mathcal{L}\{(t+1)e^{t+1}\} = e\mathcal{L}\{(t+1)e^t\} = \frac{e}{(s-1)^2} + \frac{e}{s-1},$$

para  $s > 1$ , vem, para  $s \neq 2$ ,

$$(s-2)Z(s) = \frac{e}{(s-1)^2} + \frac{e}{s-1} \iff Z(s) = \frac{es}{(s-2)(s-1)^2}.$$

Uma vez que

$$\frac{es}{(s-2)(s-1)^2} = \frac{2e}{s-2} - \frac{2e}{s-1} - \frac{e}{(s-1)^2}$$

temos então

$$\begin{aligned} z(t) &= 2e\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - 2e\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - e\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} \\ &= 2ee^{2t} - 2ee^t - te^t. \end{aligned}$$

Consequentemente, a solução do problema de Cauchy considerado é a função  $y$  definida por

$$y(t) = 2ee^{2t-2} - 2ee^{t-1} - e(t-1)e^{t-1} = 2e^{2t-1} - (t+1)e^t.$$

Utilizando um raciocínio análogo, podemos utilizar a transformada de Laplace e as suas propriedades para determinar a solução de um problema de Cauchy que envolva equações diferenciais lineares de coeficientes constantes de qualquer ordem, desde que se conheça a transformada de Laplace da função que figura no segundo membro da equação.

**Exemplo 2.47.** 1. Consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 8y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$

e vamos determinar a sua solução usando a transformada de Laplace supondo que  $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$ ,  $\mathcal{L}\{y'\}$  e  $\mathcal{L}\{y''\}$  existem para  $s > a$ . O valor de  $a$  será determinado em função da solução obtida.

Atendendo a que

- $\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 3$ ,
- $\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 3s - 6$

e à linearidade da transformada de Laplace, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' - 2y' - 8y\} &= \mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} - 8\mathcal{L}\{y\} \\ &= s^2Y(s) - 3s - 6 - 2sY(s) + 6 - 8Y(s) \\ &= (s^2 - 2s - 8)Y(s) - 3s \end{aligned}$$

e, atendendo a que  $\mathcal{L}\{y'' - 2y' - 8y\} = \mathcal{L}\{0\}$  e  $\mathcal{L}\{0\} = 0$  vem, para  $s^2 - 2s - 8 \neq 0$ ,

$$(s^2 - 2s - 8)Y(s) - 3s = 0 \iff Y(s) = \frac{3s}{s^2 - 2s - 8}.$$

Temos então

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s}{s^2 - 2s - 8} \right\}.$$

Uma vez que

$$\frac{3s}{s^2 - 2s - 8} = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s-4}$$

temos

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s}{s^2 - 2s - 8} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s-4} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} + 2\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s-4} \right\} = e^{-2t} + 2e^{4t}.$$

Consequentemente, a solução do problema de Cauchy considerado é a função  $y$  definida por

$$y(t) = e^{-2t} + 2e^{4t}.$$

Podemos agora afirmar que a transformada  $Y(s)$  está definida para  $s > 4$ .

2. Consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = 5\cos(3t) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$



e vamos determinar a sua solução usando a transformada de Laplace supondo que  $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$ ,  $\mathcal{L}\{y'\}$  e  $\mathcal{L}\{y''\}$  existem para  $s > a$ . O valor de  $a$  será determinado em função da solução obtida. Atendendo a que  $\mathcal{L}\{y''\} = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - 2s - 2$  e à linearidade da transformada de Laplace, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y'' + 4y\} &= \mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y\} \\ &= s^2 Y(s) - 2s - 2 + 4Y(s) \\ &= (s^2 + 4)Y(s) - 2s - 2\end{aligned}$$

e, atendendo a que  $\mathcal{L}\{y'' - 2y' - 8y\} = \mathcal{L}\{5 \cos(3t)\}$  e  $\mathcal{L}\{5 \cos(3t)\} = \frac{5s}{s^2 + 9}$ , para  $s > 0$ , vem

$$(s^2 + 4)Y(s) - 2s - 2 = \frac{5s}{s^2 + 9} \iff Y(s) = \frac{5s}{(s^2 + 9)(s^2 + 4)} + \frac{2s + 2}{s^2 + 4}.$$

Temos então

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5s}{(s^2 + 9)(s^2 + 4)} + \frac{2s + 2}{s^2 + 4} \right\}.$$

Uma vez que

$$\frac{5s}{(s^2 + 9)(s^2 + 4)} + \frac{2s + 2}{s^2 + 4} = \frac{2}{s^2 + 4} + \frac{3s}{s^2 + 4} - \frac{1}{s^2 + 9}$$

temos

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2 + 4} + \frac{3s}{s^2 + 4} - \frac{1}{s^2 + 9} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2 + 4} \right\} + 3\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 4} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 9} \right\} \\ &= \sin(2t) + 3 \cos(2t) - \frac{1}{9} \sin(3t).\end{aligned}$$

Consequentemente, a solução do problema de Cauchy considerado é a função  $y$  definida por

$$y(t) = \sin(2t) + 3 \cos(2t) - \frac{1}{9} \sin(3t).$$

Podemos agora afirmar que a transformada  $Y(s)$  está definida para  $s > 0$ .

**Exercícios 2.6** Em cada um dos exercícios que se seguem resolva, utilizando transformadas de Laplace, o problema de Cauchy considerado.

1.  $\begin{cases} y' + 2y = e^t \\ y(0) = 2 \end{cases}$
2.  $\begin{cases} 3y' - y = \cos t \\ y(0) = -1 \end{cases}$
3.  $\begin{cases} -y' + y = \sinh(2t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$$4. \begin{cases} 2y' + 3y = e^{4t} \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3y' - 4y = \operatorname{sen} t \\ y(0) = 1/3 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} y' + 3y = t e^{2t} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x' - x = 1 \\ x(0) = -1 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} y'' - y = 5e^t \operatorname{sen} t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} y'' + 4y' + 5y = e^{-3t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} y'' - y' = e^t \cos t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

## 2.5 Equações Diferenciais não Lineares de Ordem $n > 1$ .

Nesta secção consideramos equações diferenciais de ordem  $n > 1$  da forma

$$G(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (2.38)$$

Em certos casos, efectuando uma adequada mudança de variável, é possível baixar a ordem desta equação reduzindo o problema da integração da equação diferencial original ao da integração de uma equação diferencial de ordem mais baixa. Apresentam-se seguidamente alguns exemplos deste tipo de equações, bem como as correspondentes mudanças de variável aconselháveis em cada caso.

**1. Equações da forma  $G(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$**  (onde não aparece a variável dependente,  $y$ , nem as suas primeiras  $k - 1$  derivadas).

Efectuando a substituição de variável definida por  $y^{(k)} = z$  obtém-se a seguinte equação diferencial de ordem  $n - k$  em  $z$  e  $x$

$$G(x, z, \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Supondo conhecido o integral geral desta equação  $z = z(x, C_1, \dots, C_{n-k})$ , onde  $C_1, \dots, C_{n-k}$  são constantes reais arbitrárias, determina-se o integral geral da equação original efectuando  $k$  primitivações sucessivas na equação

$$y^{(k)} = z(x, C_1, \dots, C_{n-k}).$$

**Exemplo 2.48.** Vamos determinar o integral geral da equação diferencial de ordem 5

$$y^{(5)} - \frac{1}{x}y^{(4)} = 0.$$

Efectuando a mudança de variável definida por  $y^{(4)} = z$ , com  $z$  função de  $x$ , vem

$$z' - \frac{1}{x}z = 0$$

que é uma equação de primeira ordem de variáveis separáveis e cuja solução geral é

$$z = Cx,$$

com  $C$  constante real arbitrária.

Temos então

$$y^{(4)} = Cx$$

e, integrando sucessivamente quatro vezes, obtemos

$$y = C_1x^5 + C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + C_5,$$

onde  $C_1 = \frac{C}{5!}$ ,  $C_2, C_3, C_4$  e  $C_5$  são constantes reais arbitrárias.

**Observação 2.49.** 1. Em particular, consideremos a equação de segunda ordem

$$y'' = f(x, y') \tag{2.39}$$

onde não aparece a variável dependente  $y$ .

Efectuando a substituição definida por  $y' = z$  obtemos a equação

$$z' = f(x, z)$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem em  $z$  e  $x$ .

Suponhamos que é possível determinar o integral geral desta equação e escrevê-lo na forma  $z = F(x, C_1)$ , onde  $C_1$  é uma constante real arbitrária.

Obtemos então

$$y' = F(x, C_1),$$

e, portanto,

$$y = \int^x F(x, C_1) dx + C_2,$$

com  $C_2$  constante real arbitrária, é a solução geral da equação (2.39).

**Exemplo 2.50.** Consideremos a equação diferencial de segunda ordem

$$y'' + \frac{1}{x}y' = 0.$$

Efectuando a substituição  $y' = z$  obtemos a equação diferencial de primeira ordem

$$z' + \frac{1}{x}z = 0$$

cujo integral geral é da forma

$$z = \frac{C_1}{x},$$

com  $C_1$  constante real arbitrária.

Substituindo agora  $z$  por  $y'$  obtemos a equação diferencial de primeira ordem

$$y' = \frac{C_1}{x},$$

cuja solução geral

$$y = C_1 \ln |x| + C_2$$

com  $C_1$  e  $C_2$  constantes reais arbitrárias se obtém por integração directa.

2. Suponha-se que na equação diferencial (2.39) a função  $f$  não depende da variável independente. Neste caso aquela equação diferencial toma a forma

$$y'' = f(y').$$

Efectuando a substituição definida por  $y' = z$ , obtemos a equação de variáveis separáveis

$$z' = f(z)$$

cujo integral geral se pode sempre determinar pelo método já atrás exposto.

**Exemplo 2.51.** Consideremos a equação diferencial de segunda ordem

$$y'' + (y')^2 = 0.$$

Efectuando a substituição definida por  $y' = z$  obtemos a equação diferencial de variáveis separáveis

$$z' + z^2 = 0.$$

Supondo  $z \neq 0$  obtemos a equação diferencial de variáveis separadas

$$\frac{1}{z^2}z' + 1 = 0$$

cujo integral geral é da forma

$$-\frac{1}{z} + x = C_1,$$

com  $C_1$  constante real arbitrária.

Substituindo  $z$  por  $y'$  obtemos

$$-\frac{1}{y'} + x = C_1,$$

ou seja

$$y' = \frac{1}{x - C_1}$$

cujas solução geral é dada por

$$y = \ln|x - C_1| + C_2$$

com  $C_1$  e  $C_2$  constantes reais arbitrárias.

**2. Equações da forma  $G(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$**  (onde não aparece, explicitamente, a variável independente  $x$ ).

Neste caso a ordem da equação pode ser reduzida de uma unidade mediante a substituição definida por  $y' = z$  sendo  $z$  considerado como função de  $y$ ,  $z = z(y)$ . Consequentemente  $z$  é função (composta) de  $x$ .

Pelo Teorema da Derivada da Função Composta temos

$$y'' = z'(y)y'(x) = z'(y)z(y)$$

donde resulta, atendendo a que  $z(y) = y'(x)$ ,

$$y''' = z''(y)y'(x)z(y) + z'(y)z'(y)y'(x) = z''(y)(z(y))^2 + (z'(y))^2z(y)$$

e, assim sucessivamente, para as derivadas de ordem superior.

A substituição indicada conduz a uma equação da forma

$$H(y, z, z'(y), \dots, z^{(n-1)}(y)) = 0$$

de ordem inferior uma unidade relativamente à primeira.

Consideremos, em particular, o caso da equação diferencial de segunda ordem

$$y'' = f(y, y').$$

Efectuando a substituição definida por  $y' = z$ , com  $z$  função de  $y$ , vem

$$z'z = f(y, z).$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem em  $z$  e  $y$ , com  $z$  função de  $y$ .

Suponhamos que é possível determinar a solução geral desta equação  $z = F(y, C_1)$ , com  $C_1$  constante real arbitrária. Temos então

$$y' = F(y, C_1)$$

ou, analogamente,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{F(y, C_1)}$$

sempre que  $F(y, C_1)$  seja diferente de zero.

Consequentemente

$$x = \int^y \frac{1}{F(y, C_1)} dy + C_2,$$

com  $C_2$  constante real arbitrária, será a solução geral da equação diferencial dada.

**Exemplo 2.52.** Integrar a equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{1}{y} y'' = 2(y')^3, \quad y \neq 0.$$

Efectuando a substituição de variável definida por  $y' = z$ , com  $z$  função de  $y$ , temos  $y'' = zz'$ , pelo que a equação dada toma a forma

$$\frac{1}{y} zz' = 2z^3, \quad (2.40)$$

que é uma equação em  $z$  e  $y$  de variáveis separáveis.

Supondo  $z \neq 0$  obtemos a equação de variáveis separadas

$$\frac{1}{z^2} z' - 2y = 0$$

cujo integral geral é dado por

$$\int^z \frac{1}{z^2} dz - \int^y 2y dy = C_1,$$

ou seja,

$$-\frac{1}{z} - y^2 = C_1 \iff \frac{1}{z} = -y^2 - C_1$$

onde  $C_1$  é uma constante real arbitrária.

Temos então

$$z = -\frac{1}{y^2 + C_1},$$

ou seja,

$$y' = -\frac{1}{y^2 + C_1}.$$

Por integração imediata, supondo  $C_1 > 0$ , temos

$$y = -\frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg} \frac{y}{C_1} + C_2,$$

com  $C_1$  constante real arbitrária.

Obtemos então a equação

$$y + \frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg} \frac{y}{C_1} + C_2 = 0,$$

com  $C_1$  constante real positiva e  $C_2$  constante real arbitrária, que é o integral geral, na forma implícita, da equação diferencial considerada.

Se a função  $f$  não depender de  $y'$  a equação a considerar é da forma

$$y'' = f(y)$$

e, portanto, após a substituição  $z = y'$ , vem

$$zz' = f(y)$$

que é uma equação em  $z$  e  $y$  de variáveis separáveis.

**3. Equações da forma**  $G(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$  (onde  $G$  é a derivada de uma expressão diferencial dada  $\Phi(x, y, \dots, y^{(n-1)})$  de ordem  $n - 1$ ).

Neste caso facilmente se determina o que se designa por *primeiro integral* da equação diferencial dada que é uma equação de ordem  $n - 1$  contendo uma constante arbitrária e que é equivalente <sup>12</sup> à equação original. De facto, a equação diferencial dada pode tomar a forma

$$\frac{d\Phi}{dx} = 0,$$

o que significa que terá de ser

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C_1,$$

onde  $C_1$  é uma constante de integração.

**Exemplo 2.53.** Integrar a equação diferencial

$$yy'' + (y')^2 = 0.$$

Esta equação pode tomar a forma

$$(yy')' = 0$$

e, portanto, virá

$$yy' = C_1$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem de variáveis separadas cujo integral geral é dado por

$$\frac{y^2}{2} - C_1 x = C_2,$$

onde  $C_2$  é uma constante real arbitrária.

Consequentemente

$$y^2 = Cx + C',$$

com  $C = 2C_1$  e  $C' = 2C_2$  constantes reais arbitrárias é o integral geral da equação dada.

<sup>12</sup>no sentido de que as soluções da primeira são soluções da segunda e vice versa

**Exercícios 2.7:** 1. Determine o integral geral das seguintes equações diferenciais.

(a)  $y'' - 4y' = 0$

(b)  $y'' - yy' = 0$

(c)  $y'' - 9y' = 0$

(d)  $y''' + \frac{(y'')^2}{y} = 0$

(e)  $xy''' + y'' = 1 + x$

(f)  $y^{(4)} + y^{(3)} = \cos(4x)$

2. A equação diferencial de segunda ordem

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad (2.41)$$

diz-se *exacta* se puder ser escrita na seguinte forma

$$(P(x)y')' + (f(x)y)' = 0 \quad (2.42)$$

onde  $f$  é uma função determinada pelos coeficientes  $P(x)$ ,  $Q(x)$  e  $R(x)$  que supomos serem "suficientemente diferenciáveis".

A equação (2.42) pode então ser imediatamente integrada obtendo-se a equação diferencial linear de primeira ordem  $P(x)y' + f(x)y = C$ , com  $C$  constante real arbitrária.

(a) Determine as condições a que devem obedecer os coeficientes  $P(x)$ ,  $Q(x)$  e  $R(x)$  por forma que a equação (2.41) seja exacta.

(b) Verifique que é exacta a equação

$$x^2y'' + xy' - y = 0$$

e integre-a pelo método atrás proposto.

3. Em cada uma das alíneas que se seguem, verifique se a função apresentada é solução da equação diferencial dada.

(a)  $xy' - 4y = 0$  tem solução  $y = Cx^4$ , com  $C \in \mathbb{R}$  arbitrário;

(b)  $(y')^2 - yy' + e^x = 0$  tem solução  $y = Ce^x + \frac{1}{C}$ , com  $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  arbitrário;

(c)  $y = (y')^2 - xy' + \frac{x^2}{2}$  tem solução  $y = Cx + C^2 + \frac{x^2}{2}$ , com  $C \in \mathbb{R}$  arbitrário;

(d)  $y^2 + (y')^2y^2 = 1$  tem solução definida implicitamente por  $(x - C)^2 + y^2 = 1$ , com  $C \in \mathbb{R}$  arbitrário.

4. Resolva os problemas de Cauchy seguintes:

(a)  $\begin{cases} y' + 2ty^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(b)  $\begin{cases} y' - y \operatorname{tg} x = \sec x \\ y(0) = 1 \end{cases}$



$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & \begin{cases} xy' - \frac{y}{x+1} = x \\ y(1) = 0 \end{cases} \\ \text{(d)} \quad & \begin{cases} y' = \left( \frac{2y+13}{x-1} \right)^3 \\ y(2) = -\frac{13}{2} \end{cases} \\ \text{(e)} \quad & \begin{cases} y' + \frac{x}{1+x}y = \frac{e^{-x}}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

5. Em cada uma das alíneas que se seguem determine a solução geral da equação diferencial considerada.

- (a)  $y' = e^{x+2y}$
- (b)  $y'' - 9y = 0$
- (c)  $y''' + 2y'' + 2y' = 0$
- (d)  $(xy^2 + x)dx + (y + x^2y)dy = 0$
- (e)  $y^2y' + x^2 = 1$
- (f)  $y''' + y = x$
- (g)  $y^{(4)} + y'' = x^2 + x$
- (h)  $x^2 + xy' = 3x + y'$
- (i)  $xy' = xe^{y/x} + y$
- (j)  $xy'' + 2y' + xy = 0$ , efectuando a substituição definida por  $z = xy$ ;
- (k)  $y'' - y' - 2y = 4e^{3x}$
- (l)  $y''' - y = \sin x$
- (m)  $x(x^2 + 1)y' + 2y = 0$
- (n)  $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 2$ , efectuando a substituição definida por  $y = xz$ ;
- (o)  $2xyy' = x^2 + 3y^2$
- (p)  $(x + y + 1)dx = (2x + 2y - 1)dy$ , efectuando a substituição definida por  $y = z - x$ ;
- (q)  $y'' + y = x^2 \sin x$
- (r)  $y'' - ky = 0$ , com  $k$  parâmetro real;
- (s)  $y' + xy = x + \ln x$
- (t)  $x' = \frac{-x^2 + tx^2}{xt^2 + t^2}$
- (u)  $y' = \frac{x + y - 2}{-x + y - 4}$

## 2.6 Soluções dos exercícios propostos

### Exercícios 2.1

1. (a) forma implícita; segunda ordem;  
 (b) forma implícita; primeira ordem;  
 (c) forma implícita; segunda ordem;  
 (d) forma implícita; segunda ordem;  
 (e) forma implícita; terceira ordem;  
 (f) forma implícita; primeira ordem;  
 (g) forma implícita; primeira ordem;  
 (h) forma implícita; segunda ordem;  
 (i) forma implícita; segunda ordem;  
 (j) forma implícita; primeira ordem.
2.  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são soluções.
3. Nenhuma das funções é solução da equação considerada.
4. (a) Basta substituir  $\varphi$ ,  $\varphi'$  definida por  $\varphi'(x) = (2C_1 + 2 + 4x)e^{2x} - 4C_2e^{-4x}$  e  $\varphi''$  definida por  $\varphi''(x) = (4C_1 + 8 + 8x)e^{2x} + 16C_2e^{-4x}$  na equação dada.  
 (b) Basta substituir  $\varphi$  e  $\varphi''$  definida por  $\varphi''(x) = -C_1 \cos x - C_2 \sin x$  na equação dada.
5. (a)  $s = 3$  ou  $s = -3$ .  
 (b)  $s = 0$  ou  $s = -1$ .
6. solução geral:  $y = -\sin x + C_1x + C_2$ , com  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .  
 Uma vez que  $y(0) = 0$  implica  $C_2 = 0$  e  $y'(0) = 1$  implica  $C_1 = 2$  obtemos a solução  $y = 2x - \sin x$ .
7. (a)  $y = \frac{x^3}{3} + \arctg x + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ;  
 (b)  $y = x \arctg x - \ln \sqrt{1+x^2} + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ;  
 (c)  $y = \frac{x^2}{a} e^{ax} - \frac{2x}{a^2} e^{ax} + \frac{2}{a^3} e^{ax} + C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;  
 (d)  $y = \ln(\arctg x) + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .
8. (a)  $y = \frac{1}{a} e^{ax} - \frac{1}{a}$ ;  
 (b)  $y = \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsen x + \frac{1}{2}$ .
9. (a) Basta substituir  $y$  e  $y'$  definida por  $y' = \frac{-1}{(x+C)^2}$  na equação considerada.  
 (b) Uma vez que  $y(1) = -1$  implica  $C = -2$  temos a solução  $y = \frac{1}{x-2}$  com  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

- (c) Uma vez que  $y(1) = 0$  implica  $\frac{1}{1+C} = 0$  e esta equação é impossível, não existe uma solução particular satisfazendo a condição indicada. Observe-se, no entanto, que  $y = 0$  é uma solução singular que satisfaz a condição indicada

**Exercícios 2.2**

1. (a)  $y = Ce^{\cos x}$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;  
 (b)  $\operatorname{cosec} y + \cotg y = Ce^{-\sin x}$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;  
 (c)  $\frac{y}{y+1} = C \frac{x-1}{x}$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;  
 (d)  $y = \frac{(1+x)^3}{3} + C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;  
 (e)  $y = C \operatorname{cosec} x$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;  
 (f)  $y = \operatorname{tg}(-\operatorname{arctg} x + C)$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;  
 (g)  $y = \operatorname{tg}(\ln|x| + C)$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;  
 (h)  $1 + y^2 = \frac{C}{x^2}$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;  
 (i)  $y = \frac{1}{\ln|x^2 - 1| - C}$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;  
 (j)  $y = \ln \left| \frac{1}{1 - Ce^x} \right|$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;  
 (k)  $(y-1)e^y + e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-3x} = C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;  
 (l)  $y + a \ln(y^2 + a^2) - x + \frac{1}{x} = C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;  
 (m)  $\frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{1}{2} \cos(2\phi) = C$ , com  $C \in \mathbb{R}$  que se pode escrever na forma  $\cos(2\theta) + \cos(2\phi) = K$ , com  $K \in \mathbb{R}$ ;  
 (n)  $\ln \sqrt{|v^2 - 1|} + \ln \sqrt{|1 - u^2|} = C$ , com  $C \in \mathbb{R}$  que pode ser escrita na forma  $1 - v^2 = C(1 - u^2)$ , com  $C \in \mathbb{R}$ .
2. (a)  $y = 2 - 3\sqrt{2} \cos x$ ;  
 (b)  $y = \frac{1}{1+x}$ ;  
 (c)  $\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2} = 1$ .
3. (a) i. –  
 ii. –  
 (b) i.  $z' = \frac{2-2z}{z+1}$ .  
 ii.  $3x + y + 2 \ln|x+y-1| = C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ .

**Exercícios 2.3**

1. (a)  $\frac{x^2}{2y^2} - \ln|y| = C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;  
 (b)  $y = x \ln(C + \ln|x|)$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;

- (c)  $\frac{1}{2} \ln \left| 2 \frac{y^3}{x^3} - 1 \right| + \ln |x| = C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;
- (d)  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x|x|} = C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;
- (e)  $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{y}{x} - 1 \right| + \frac{3}{8} \ln \left| \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 2 \right| + \frac{\sqrt{7}}{28} \operatorname{arctg} \frac{2y+x}{\sqrt{7}x} + \ln |x| = C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;
- (f)  $\cos \frac{y}{x} + \ln |x| = C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ .
2. (a)  $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{3y^2 - x^2}{x^2} \right| + \ln |x| + \frac{\ln 4}{3} = 0$ ;
- (b)  $y \left( 1 + \operatorname{sen} \frac{x}{y} \right) = \frac{2(1 + \operatorname{sen}(1/2))}{\cos(1/2)} \cos \frac{x}{y}$ .
3. (a)  $\ln \sqrt[4]{\frac{x^2 + 2y^2}{x^2}} + \ln |x| = C$ , com  $C \in \mathbb{R}$  que pode ser escrita na forma  $\ln \sqrt[4]{x^2 + 2y^2} = C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;
- (b)  $5y - 5x - \ln((15x + 10y - 1)^2) = C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;
- (c)  $\frac{8}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{y^2}{x^2} \right) + \ln \left( \frac{4y^4 + 3x^4}{x^4} \right) + \ln |x| = C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;
- (d)  $\ln \left| \ln \frac{y}{x} \right| - \ln |x| = C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ .
- (e)  $\ln \sqrt{|-4(y-1)^2 + 3(y-1)(x+1) - (x+1)^2|} + \frac{\sqrt{7}}{7} \operatorname{arctg} \frac{8y-3x-11}{\sqrt{7}(x+1)} = C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;
- (f)  $\frac{2}{7} \ln |y-x+1| + \frac{5}{7} \ln |y+x-1| = C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;
- (g)  $\operatorname{arctg} \frac{y+5}{x-1} - \ln \sqrt{(y+5)^2 + (x-1)^2} = C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ .

**Exercícios 2.4**

1. (a) equação diferencial:  $9y'' - 6y' + y = 0$ ;  
solução geral:  $y = C_1 e^{x/3} + C_2 x e^{x/3}$ , com  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;
- (b) equação diferencial:  $y''' + 3y'' + 2y' = 0$ ;  
solução geral:  $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$ , com  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ ;
- (c) equação diferencial:  $y''' = 0$ ;  
solução geral:  $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2$ , com  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ ;
- (d) equação diferencial:  $y^{(6)} + 6y^{(5)} + 17y^{(4)} + 28y''' + 28y'' + 16y' + 4y = 0$ ;  
solução geral:  $y = e^{-x}((C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \operatorname{sen} x + C_5 + C_6 x)$ , com  $C_i \in \mathbb{R}$  para  $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ ;
- (e) equação diferencial:  $y^{(4)} + 2y''' + 14y'' + 18y' + 45y = 0$ ;  
solução geral:  $y = e^{-x}(C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x)) + C_3 \cos(3x) + C_4 \operatorname{sen}(3x)$ , com  $C_i \in \mathbb{R}$  para  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ;
2. (a)  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$ , com  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;

- (b)  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 + C_4 x$ , com  $C_i \in \mathbb{R}$ , para  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ;
- (c)  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{3x} + C_4$ , com  $C_i \in \mathbb{R}$ , para  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ;
- (d)  $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{2x} + C_5 x e^{2x}$ , com  $C_i \in \mathbb{R}$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ ;
- (e)  $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{8x}$ , com  $C_i \in \mathbb{R}$ , para  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ;
- (f)  $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$ , com  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;
- (g)  $y = e^{-x}(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$ , com  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;
- (h)  $y = e^x(C_1 \cos(5x) + C_2 \sin(5x))$ , com  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;
- (i)  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ , com  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

**Exercícios 2.5**

1. (a)  $y = -x + \frac{1}{2} + Cx^2$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;
- (b)  $y = \frac{x}{2 \sin x} - \frac{\cos x}{2} + \frac{C}{\sin x}$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;
- (c)  $y = \frac{e^x}{x} + \frac{C}{x}$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;
- (d)  $y = \frac{e^x + C}{x^2}$ , com  $C \in \mathbb{R}$ .
2. (a)  $y = \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2 \ln x}$ ;
- (b)  $y = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} e^x$ .
3.  $f(x) = -\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + \frac{2}{e x^2}$ .
4. (a)  $y = e^x(C_1 + C_2 x - x + x \ln |x|)$ , com  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;
- (b)  $y = (C_1 - x) \cos x + (C_2 + \ln |\sin x|) \sin x$ , com  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;
- (c)  $y = e^x(C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \ln |\sec x + \tan x| - x \cos x + \sin x \ln |\cos x|)$ , com  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ ;
- (d)  $y = e^x \left( C_1 + \ln \frac{1}{e^x + 1} \right) + (C_2 + x - \ln(e^x + 1)) e^{2x}$ , com  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;
- (e)  $y = \sin x - 1 + C e^{-\sin x}$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;
5. (a)  $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \frac{1}{2} x \sin x$ , com  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ ;
- (b)  $y = C_1 e^{-x} - x + 1$ , com  $C_1 \in \mathbb{R}$ ;
- (c)  $y = C_1 e^{-x} + \frac{1}{4} e^{3x}$ , com  $C_1 \in \mathbb{R}$ ;
- (d)  $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} e^{2x}$ , com  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;
- (e)  $y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{1}{2} \cos(2x)$ , com  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;
- (f)  $y = C_1 e^{-x} + \left( \frac{1}{3} x + \frac{2}{9} \right) e^{2x}$ , com  $C_1 \in \mathbb{R}$ ;
- (g)  $y = \left( C_1 + \frac{1}{3} x^3 \right) e^{-2x}$ , com  $C_1 \in \mathbb{R}$ ;

- (h)  $y = C_1 e^{-x} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \cos x$ , com  $C_1 \in \mathbb{R}$ ;
- (i)  $y = C_1 e^{-x} - \frac{6}{5} \operatorname{sen}(2x) - \frac{3}{5} \cos(2x)$ , com  $C_1 \in \mathbb{R}$ ;
- (j)  $y = C_1 e^{-x} + \frac{2}{5} \operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{5} \cos(3x)$ , com  $C_1 \in \mathbb{R}$ ;
- (k)  $y = \left(C_1 + \frac{1}{6}x\right) e^{2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{8} e^{-2x}$ , com  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;
- (l)  $y = e^{-x/2} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}x\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}x\right)\right) + \frac{1}{6} e^x - \frac{1}{4} e^{-x}$ , com  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;
- (m)  $y = C_1 + C_2 \cos(2x) + C_3 \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{8} x^2$ , com  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ ;
- (n)  $y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2} x^2\right) e^x + C_3 e^{-x}$ , com  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ ;
- (o)  $y = \left(C_1 + \frac{1}{2}x\right) e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x + 4x - 4$ , com  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ ;
- (p)  $y = e^{-x/2} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + C_3 e^x - \operatorname{sen} x + \cos x$ , com  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ ;
- (q)  $y = C_1 + C_2 x + \left(C_3 + \frac{1}{2}x\right) e^x + C_4 e^{-x} - \frac{1}{12} x^4 - x^2$ , com  $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ ;
- (r)  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \operatorname{sen} x + C_4 \cos x - 3x - \frac{1}{4} x \operatorname{sen} x$ , com  $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ .

**Exercícios 2.6**

1.  $y = \frac{5}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t$ ;
2.  $y = -\frac{9}{10} e^{t/3} - \frac{1}{10} \cos t + \frac{3}{10} \operatorname{sen} t$ ;
3.  $y = -\frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{2}{3} e^t$
4.  $y = \frac{1}{11} e^{4t} + \frac{54}{11} e^{-3t/2}$ ;
5.  $y = \frac{34}{75} e^{-4t/3} - \frac{4}{25} \operatorname{sen} t - \frac{3}{25} \cos t$ ;
6.  $y = -\frac{1}{25} e^{2t} + \frac{1}{5} t e^{2t} + \frac{1}{25} e^{-3t}$ .
7.  $x(t) = -1$
8.  $y(t) = 3e^t - e^{-t} - 2e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t$
9.  $y(t) = \frac{1}{2} e^{-3t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \cos t + \frac{5}{2} e^{-2t} \operatorname{sen} t$
10.  $y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^t \cos t + \frac{1}{2} e^t \operatorname{sen} t$

**Exercícios 2.7**

1. (a) substituição:  $y' = z$ ;  
solução geral:  $y = C_1 e^{4x} + C_2$ , com  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;
  - (b) substituição:  $y' = z$ , com  $z$  função de  $y$ ;  
solução geral:  $C_1 y + \frac{1}{6} y^3 + C_2 = 0$ , com  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;
  - (c) substituição:  $y' = z$ ;  
solução geral:  $y = C_1 e^{9x} + C_2$ , com  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;
  - (d) substituição:  $y'' = z$ , com  $z$  função de  $y$ ;  
solução geral:  $C_1 y \ln y + C_2 y + C_3 = 0$ , com  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ ;
  - (e) substituição:  $y'' = z$ ;  
solução geral:  $y = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{12} x^3 + C_1 x \ln x + C_2 x + C_3$ , com  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ ;
  - (f) substituição:  $y^{(3)} = z$ ;  
solução geral:  $y = -\frac{1}{4^3 \cdot 17} \sin(4x) + \frac{1}{4^2 \cdot 17} \cos(4x) - C_1 e^{-x} + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$ , com  $C_i \in \mathbb{R}$ , para todo o  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .
2. (a)  $P$  deve ser uma função duas vezes diferenciável,  $Q$  deve ser uma função diferenciável e deve verificar-se a igualdade  $R(x) = Q'(x) - P''(x)$ .
  - (b)  $y = -\frac{C_1}{2x} + x C_2$ , com  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  que pode ser escrita na forma  $y = K_1 x^{-1} + x K_2$ , com  $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ .
3. –
4. (a)  $y = \frac{1}{1+t^2}$ ;
  - (b)  $y = \frac{1+x}{\cos x}$ ;
  - (c)  $y = \frac{x(x-1+\ln x)}{x+1}$ ;
  - (d)  $y = -\frac{13}{2}$ ;
  - (e)  $y = (x+1)e^{-x} \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)$ .
5. (a)  $y = -\frac{1}{2} \ln(C - 2e^x)$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;
  - (b)  $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$ , com  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ;
  - (c)  $y = C_1 + e^{-x}(C_2 \cos x + C_3 \sin x)$ , com  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ ;
  - (d)  $y^2 = \frac{C}{1+x^2} - 1$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;
  - (e)  $y = \sqrt[3]{3x-x^3+C}$ , com  $C \in \mathbb{R}$ ;
  - (f)  $y = e^{x/2} \left( C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) + C_3 e^{-x} + x$ , com  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ ;

$$(g) \ y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 + C_4 x - x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12}, \text{ com } C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R};$$

$$(h) \ y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln(x-1)^2 + C, \text{ com } C \in \mathbb{R};$$

$$(i) \ y = -x \ln \left( \ln \left| \frac{C}{x} \right| \right), \text{ com } C \in \mathbb{R};$$

$$(j) \ y = \frac{C_1 \cos x + C_2 \sin x}{x}, \text{ com } C_1, C_2 \in \mathbb{R};$$

$$(k) \ y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + e^{3x}, \text{ com } C_1, C_2 \in \mathbb{R};$$

$$(l) \ y = e^{-x/2} \left( C_1 \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + C_2 \sin \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \right) + C_3 e^x + \frac{\cos x - \sin x}{2}, \text{ com } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R};$$

$$(m) \ y = C \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right), \text{ com } C \in \mathbb{R};$$

$$(n) \ y = 1 + C_1 x + C_2 (x^2 - 1), \text{ com } C_1, C_2 \in \mathbb{R};$$

$$(o) \ y^2 = -x^2 + Cx^3, \text{ com } C \in \mathbb{R};$$

$$(p) \ 2y - x - \ln|x+y| = C, \text{ com } C \in \mathbb{R};$$

$$(q) \ y = \left( C_1 + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{6} \right) \cos x + \left( C_2 + \frac{x^2}{4} \right) \sin x, \text{ com } C_1, C_2 \in \mathbb{R};$$

$$(r) \ y = \begin{cases} C_1 \cos(\sqrt{k}x) + C_2 \sin(\sqrt{k}x), & \text{com } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad \text{se } k < 0 \\ C_1 x + C_2, & \text{com } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad \text{se } k = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x}, & \text{com } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad \text{se } k > 0 \end{cases}$$

$$(s) \ y = x^2 + \frac{1}{2}x \ln^2 x + Cx, \text{ com } C \in \mathbb{R};$$

$$(t) \ \ln \left| \frac{x}{t} \right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{t} = C, \text{ com } C \in \mathbb{R};$$

$$(u) \ \ln \sqrt{(y-3)^2 + (x+1)^2} - \operatorname{arctg} \frac{y-3}{x+1} = C, \text{ com } C \in \mathbb{R}.$$



## Capítulo 3

# Séries Numéricas

### 3.1 Definições e propriedades

Seja  $(a_n)$  uma sucessão de números reais.

**Definição 3.1.** Chama-se *série numérica de termo geral*  $a_n$  ao par  $((a_n), (s_n))$  constituído pela sucessão  $(a_n)$  e pela sucessão  $(s_n)$ , onde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= \sum_{k=1}^n a_k. \end{aligned}$$

Aos números reais  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  chamamos *termos* da série de termo geral  $a_n$  e aos números reais  $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$  chamamos *somas parciais* da série de termo geral  $a_n$ .

À sucessão de termo geral  $s_n$  chamamos *sucessão das somas parciais* da série de termo geral  $a_n$ .

Para representar a série de termo geral  $a_n$  é habitual utilizar uma das simbologias

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

ou

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

ou

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

Se a sucessão das somas parciais  $(s_n)$  for convergente, isto é, se o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

existir e for finito dizemos que a série de termo geral  $a_n$  é *convergente* e que o valor do limite é a sua *soma*. Neste caso escrevemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$$

onde  $s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ .

Se a sucessão das somas parciais é divergente, isto é, se o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

não existir ou for infinito dizemos que a série de termo geral  $a_n$  é *divergente*.

**Observação 3.2.** 1. Em muitos dos exemplos que apresentaremos vamos considerar o caso em que a sucessão dos termos da série é a sucessão  $(a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_{p+n}, \dots)$ , para algum  $p \in \mathbb{N}_0$ . Neste caso a série é representada por

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$$

e a sucessão das somas parciais é a sucessão  $(s_n)_{n \geq p} = (s_p, s_{p+1}, \dots)$ , onde, para cada  $n \geq p$ ,

$$s_n = \sum_{k=p}^n a_k$$

é a soma dos termos até à ordem  $n$ .

2. No que se segue, para exprimir que vamos averiguar se uma série é convergente ou divergente utilizaremos a expressão *estudar a natureza da série*.

**Exemplo 3.3.** 1. Consideremos a série de termo geral  $a_n = (-1)^n$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ . A sucessão das somas parciais desta série é a sucessão  $(s_n)$  onde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se tem

$$s_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Uma vez que não existe o limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ , a série dada é divergente.

2. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

O termo geral da sucessão das suas somas parciais é

$$\begin{aligned} s_n &= \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

e, portanto, a série considerada é convergente e tem soma 1. Podemos então escrever

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

3. Consideremos a série de termo geral  $a_n = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1).$$

A sucessão das somas parciais desta série é a sucessão  $(s_n)$ , onde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^n (k+1) \\ &= \frac{2+n+1}{2} \cdot n \\ &= \frac{3n+n^2}{2} \end{aligned}$$

já que  $s_n$  é a soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão aritmética de primeiro termo 2 e razão 1.

Como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+n^2}{2} = +\infty$$

concluimos que a série dada é divergente.

4. Estudar, em função de  $\alpha \in \mathbb{R}$ , a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha.$$

Seja  $(s_n)$  a sucessão das somas parciais desta série, onde

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \alpha \\ &= n\alpha. \end{aligned}$$

Se  $\alpha > 0$ , então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n\alpha) = +\infty$$

e a série considerada é, neste caso, divergente.

Se  $\alpha < 0$ , então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n\alpha) = -\infty$$

e a série considerada é, neste caso, divergente.

Se  $\alpha = 0$ , então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n\alpha) = 0$$

e a série considerada é, neste caso, convergente.

Consideremos as séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad (3.1)$$

e

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n \quad (3.2)$$

com  $p > 1$ .

Vamos ver que as duas séries têm a mesma natureza, isto é, ou são ambas convergentes, ou são ambas divergentes.

Seja  $(s_n)$  a sucessão das somas parciais da série (3.1) e seja  $(s'_n)_{n \geq p}$  a sucessão das somas parciais da série (3.2). Temos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

e, para cada  $n \in \{p, p+1, \dots, n, \dots\}$ ,

$$s'_n = \sum_{k=p}^n a_k.$$

Então, para cada  $n \in \{p, p+1, \dots, n, \dots\}$ ,

$$s'_n = s_n - s_{p-1} \iff s_n = s'_n + s_{p-1}$$

onde resulta que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s'_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - s_{p-1})$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (s'_n + s_{p-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

e, portanto, as sucessões  $(s_n)$  e  $(s'_n)_{n \geq p}$  ou são ambas convergentes ou são ambas divergentes.

Acabámos de provar que a natureza de uma série não depende dos seus  $p-1$  primeiros termos, isto é, que a natureza de uma série não se altera se suprimirmos os seus  $p-1$  primeiros termos.

Consequentemente, a maioria dos resultados que se estabelecem para uma série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

podem ser estabelecidos para a série

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$$

que da primeira se obtém suprimindo os  $p-1$  primeiros termos.

Note-se que no caso em que as séries (3.1) e (3.2) são ambas convergentes é possível concluir, pelas propriedades dos limites, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s'_n + s_{p-1}) = s_{p-1} + \lim_{n \rightarrow +\infty} s'_n.$$

Podemos então escrever, em caso de convergência,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s_{p-1} + \sum_{n=p}^{+\infty} a_n .$$

A série apresentada no Exemplo 3.3-2 é um exemplo de um certo tipo de séries que são usualmente designadas por **séries telescópicas** ou **séries de Mengoli**.

De um modo geral uma *série de Mengoli* é uma série cujo termo geral se pode escrever como diferença de dois termos de uma sucessão distinta da sucessão das suas somas parciais.

Seja

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

uma série de Mengoli. Então existem uma sucessão  $(u_n)$  e um número natural  $p$  tais que ou

$$a_n = u_n - u_{n+p}$$

ou

$$a_n = u_{n+p} - u_n .$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que se tem  $a_n = u_n - u_{n+p}$ . O termo geral da sucessão das somas parciais desta série é

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+p}) \\ &= \sum_{k=1}^n u_k - \sum_{k=1}^n u_{k+p} \\ &= \sum_{k=1}^n u_k - \sum_{k=p+1}^{n+p} u_k \\ &= \sum_{k=1}^p u_k + \sum_{k=p+1}^n u_k - \sum_{k=p+1}^n u_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \\ &= \sum_{k=1}^p u_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \end{aligned}$$

pelo que  $(s_n)$  converge se e só se a sucessão de termo geral

$$v_n = u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}$$

é convergente. Neste caso, temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = u_1 + \cdots + u_p - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n .$$

Se a sucessão  $(u_n)$  for convergente temos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = p \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  e podemos escrever

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = u_1 + \cdots + u_p - p \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

**Observação 3.4.** 1. No caso em que  $a_n = u_{n+p} - u_n$  temos

$$s_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k - \sum_{k=1}^p u_k.$$

2. No caso em que  $p = 1$ , isto é, no caso em que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n$  é a diferença de dois termos consecutivos de uma sucessão temos

$$s_n = \begin{cases} u_1 - u_{n+1} & \text{se } a_n = u_n - u_{n+1} \\ u_{n+1} - u_1 & \text{se } a_n = u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

**Exemplo 3.5.** 1. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n}{n+1}.$$

Atendendo a que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\ln \frac{n}{n+1} = \ln n - \ln(n+1)$$

tem-se que a série considerada é uma série de Mengoli.

Consequentemente

$$\begin{aligned} s_n &= \ln 1 - \ln(n+1) \\ &= -\ln(n+1) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (-\ln(n+1)) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

o que permite concluir que a série considerada é divergente.

2. Consideremos a série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4}{(n-1)(n+3)}.$$

Como é sabido podemos escrever

$$\frac{4}{(n-1)(n+3)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+3} \quad (3.3)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes reais a determinar.

Para determinar estas constantes atenda-se a que de (3.3) resulta  $4 = A(n+3) + B(n-1)$ , donde resulta o sistema,

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ 3A-B = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ 4A = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ A = 1 \end{cases}$$

Então

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4}{(n-1)(n+3)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+3} \right)$$

donde se conclui que a série considerada é uma série de Mengoli. Note-se que o termo geral desta série é da forma  $u_n - u_{n+4}$  com  $u_n = \frac{1}{n-1}$ . Consequentemente

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+3} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=6}^{n+4} \frac{1}{k-1} \\ &= \sum_{k=2}^5 \frac{1}{k-1} + \sum_{k=6}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=6}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=n+1}^{n+4} \frac{1}{k-1} \\ &= \sum_{k=2}^5 \frac{1}{k-1} - \sum_{k=n+1}^{n+4} \frac{1}{k-1} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \\ &= +\frac{25}{12} - \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{25}{12}$$

o que permite concluir que a série considerada é convergente e tem soma  $\frac{25}{12}$ . Podemos então escrever

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4}{(n-1)(n+3)} = \frac{25}{12}.$$

A proposição que apresentamos a seguir dá-nos uma **condição necessária** para que uma série numérica seja convergente.

**Proposição 3.6.** Se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

**Demonstração:** Seja  $(s_n)$  a sucessão das somas parciais da série considerada.

Por hipótese existe  $s \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$$

Consideremos a sucessão de termo geral  $s_{n+1}$  que é uma subsucessão da sucessão  $(s_n)$ . Então a sucessão  $(s_{n+1})$  é também convergente e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{n+1} = s.$$

Consequentemente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_{n+1} - s_n) = 0$$

e, uma vez que  $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$ , obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = 0$$

o que equivale a afirmar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

como pretendíamos. ■

É consequência imediata da Proposição 3.6 que se não existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

ou se este limite existe mas é diferente de zero, então a série de termo geral  $a_n$  é divergente.

Como já foi referido, a Proposição 3.6 é apenas uma condição necessária para que a série de termo geral  $a_n$  seja convergente. Assim, no caso em que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

nada se pode concluir sobre a natureza da série, podendo esta ser convergente ou divergente.

**Exemplo 3.7.** 1. Consideremos a série

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n}{n-2}.$$

Como

$$(-1)^n \frac{2n}{n-2} = \begin{cases} \frac{2n}{n-2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{2n}{2-n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$



temos que não existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( (-1)^n \frac{2n}{n-2} \right)$$

já que a subsucessão dos termos pares converge para 2 e a subsucessão dos termos ímpares converge para  $-2$ .

Concluimos então, pela condição necessária de convergência de uma série, que a série dada é divergente.

2. Consideremos a série de termo geral

$$a_n = n \operatorname{sen} \frac{1}{n}.$$

Esta série é divergente porque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( n \operatorname{sen} \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0.$$

3. Atendendo a que, para todo o  $p < 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$$

concluimos que, para todo o  $p < 0$ , a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

é divergente.

4. Consideremos a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$$

pelo que não podemos usar a condição necessária de convergência para determinar a natureza desta série.

Vamos então estudar a sucessão  $(s_n)$  das suas somas parciais cujo termo geral é

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Uma vez que, para todo o  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , se tem  $\sqrt{k+1} \leq \sqrt{n+1}$  concluimos que, para todo o  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Consequentemente

$$s_n \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{n+1 \text{ vezes}}$$

donde se conclui que

$$s_n \geq \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$$

e, portanto, o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

se existir é  $+\infty$ .

Então a série dada é divergente.

5. Consideremos a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}.$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = 0$$

a análise do termo geral desta série nada nos permite concluir sobre a sua natureza. Vamos então fazer o estudo da sucessão  $(s_n)$  das suas somas parciais.

O termo geral da sucessão das somas parciais desta série é

$$s_n = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

que é a soma dos  $n+1$  primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão  $1/3$ . Então

$$s_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$$

donde resulta que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{3}{2}$$

Concluimos então que a série dada é convergente e tem soma  $3/2$  podendo escrever-se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}.$$

A série que acabámos de estudar é um exemplo de um certo tipo de séries que se designam habitualmente por *séries geométricas*.

Uma *série geométrica de razão*  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  é uma série do tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n.$$

Uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |r| < 1 \\ +\infty & \text{se } r > 1 \\ 1 & \text{se } r = 1 \\ \text{não existe} & \text{se } r \leq -1 \end{cases}$$

concluimos, pela condição necessária de convergência de uma série que, no caso em que  $|r| \geq 1$ , a série geométrica de razão  $r$  é divergente.

Vamos ver que nos outros casos a série geométrica de razão  $r$  é convergente.

Seja  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que  $|r| < 1$ . O termo geral da sucessão das somas parciais da série em estudo é

$$s_n = \sum_{k=0}^n r^k$$

que é a soma dos  $n+1$  primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão  $r$ .

Consequentemente

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}$$

pelo que, se  $|r| < 1$ , a série geométrica de razão  $r$  converge e tem soma  $\frac{1}{1-r}$ .

**Observação 3.8.** Poder-se-ia também ter definido uma série geométrica como uma série do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$$

com  $r \in \mathbb{R}$ .

O estudo deste tipo de séries é feito de modo análogo ao apresentado concluindo-se também que se  $|r| \geq 1$  a série é divergente e se  $|r| < 1$  a série é convergente. Convém no entanto notar que, no caso em que  $|r| < 1$ , a soma da série é dada por  $\frac{r}{1-r}$  uma vez que a sucessão das somas parciais desta série tem termo geral

$$s_n = \sum_{k=1}^n r^k = r \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

A proposição que apresentamos a seguir inclui algumas propriedades das séries que são consequência imediata das propriedades algébricas dos limites de sucessões. Vamos demonstrar que é convergente a série cujo termo geral é uma combinação linear (com coeficientes reais quaisquer) dos termos gerais de duas séries convergentes. Demonstramos também que, sempre que o termo geral de uma série é uma combinação linear dos termos gerais de uma série convergente (com coeficiente real qualquer) e de uma série divergente (com coeficiente real não nulo), a série é divergente.

**Proposição 3.9.** Sejam  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  duas séries numéricas. Verificam-se as condições seguintes:

(i) Se as séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  são ambas convergentes, então, para todos os  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$$

é convergente e podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} b_n .$$

(ii) Se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente e a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é divergente, então, para todo o  $\alpha \in \mathbb{R}$  e, para todo o  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$$

é divergente.

**Demonstração:** (i) Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , arbitrários.

Por hipótese existem  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$  tais que

$$s_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k \right)$$

e

$$s_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n b_k \right) .$$

Seja  $(s_n)$  a sucessão das somas parciais da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) .$$

Utilizando as propriedades dos somatórios temos, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n (\alpha a_k + \beta b_k) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k . \end{aligned}$$

Pelas propriedades algébricas dos limites de sucessões concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k \right) = \alpha s_1 + \beta s_2$$

o que prova que a série considerada é convergente e tem soma  $\alpha s_1 + \beta s_2$ . Podemos então escrever

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) &= \alpha s_1 + \beta s_2 \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.\end{aligned}$$

(ii) Sejam  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , arbitrários.

Por hipótese existe  $s \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) = s.$$

A hipótese garante também que o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n b_k \right)$$

ou não existe ou é  $+\infty$  ou é  $-\infty$ .

Atendendo a que o termo geral da sucessão das somas parciais da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$  é

$$s_n = \alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k$$

concluimos, pelas propriedades dos limites de sucessões, que o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k \right)$$

ou não existe ou é  $+\infty$  ou é  $-\infty$ , o que permite concluir que a série em estudo é divergente, como pretendíamos. ■

**Observação 3.10.** Utilizando a Proposição 3.9 podemos obter as propriedades seguintes:

1. Se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente e tem soma  $s$ , então, para todo o  $\alpha \in \mathbb{R}$ , a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n)$  é também convergente e tem soma  $\alpha s$ ;  
(Basta, em (i), tomar  $\beta = 0$ .)
2. Se as séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  são ambas convergentes e têm soma  $s_1$  e  $s_2$ , respectivamente, então a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$  é convergente e tem soma  $s_1 + s_2$ .  
(Basta, em (i) tomar  $\alpha = 1 = \beta$ .)
3. Se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é divergente, então para todo  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (\beta b_n)$  é também divergente;

(Basta, em (ii), tomar  $\alpha = 0$ .)

4. Se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente e a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é divergente, então a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$  é divergente.

(Basta, em (ii) tomar  $\alpha = 1 = \beta$ .)

**Exemplo 3.11.** 1. Para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$  e para cada  $r \in \mathbb{R}$  consideremos a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha r^n) .$$

Se  $\alpha = 0$ , então para todos os  $n$  e  $r$  temos  $\alpha r^n = 0$  pelo que a série dada é, neste caso, convergente e tem soma igual a 0.

Suponhamos  $\alpha \neq 0$ . Então, pela Proposição 3.9, concluímos que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha r^n) \quad \text{é} \quad \begin{cases} \text{convergente se } |r| < 1 \\ \text{divergente se } |r| \geq 1 \end{cases}$$

No caso em que  $|r| < 1$  e  $\alpha \neq 0$  podemos escrever

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha r^n) = \frac{\alpha}{1-r} .$$

2. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

Atendendo a que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1$$

é divergente e a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

é convergente concluímos, pela Proposição 3.9, que a série considerada é divergente.

Note-se que o estudo da natureza da série considerada neste exemplo pode também ser feito usando a condição necessária de convergência de uma série já que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{n(n+1)} \right) = 1 .$$

3. Sejam  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  duas séries de números reais tais que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + 5b_n)$  é divergente e a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente.

Utilizando as propriedades das séries concluímos então que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (5b_n)$  é divergente e, portanto, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é também divergente.

**Observação 3.12.** Note-se que a Proposição 3.9 nada afirma sobre a natureza da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$  no caso em que as séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  são ambas divergentes.

Neste caso, como veremos nos exemplos que se seguem, a série que se obtém tanto pode ser convergente como divergente.

**Exemplo 3.13.** 1. As séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-n)$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} (n+5)$  são ambas divergentes.

A série cujo termo geral é a soma dos termos gerais das duas séries consideradas é  $\sum_{n=1}^{+\infty} 5$  que é uma série divergente.

2. As séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}$  são ambas divergentes. No entanto, a série cujo termo geral é a soma dos termos gerais das duas séries que estamos a considerar é a série cujo termo geral é igual a zero que é uma série convergente.

**Exercícios 3.1:** 1. Em cada uma das alíneas que se seguem averigúe se a série considerada é convergente ou divergente e, caso seja convergente, calcule a sua soma:

- (a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n}$
- (b)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{99}{100}\right)^n$
- (c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{e}\right)^n$
- (d)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n}$
- (e)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \left(\frac{7}{11}\right)^n + \left(\frac{10}{3}\right)^n \right)$
- (f)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$
- (g)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$
- (h)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2^n - \frac{1}{2^n}\right)$
- (i)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{7}{10}\right)^n}$

2. Sejam  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  duas séries numéricas.

Suponha que existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n = b_n$ , para todo o  $n \geq p$ .

Prove que as duas séries consideradas têm a mesma natureza.

## 3.2 Critérios de convergência

Até agora temos considerado séries cuja natureza é simples de determinar analisando a sucessão das suas somas parciais.

No entanto, em muitos casos a natureza de uma série pode ser determinada sem fazer o estudo daquela sucessão. Nesta secção incluímos alguns critérios que permitem determinar a natureza de uma série numérica. Apresentamos, em primeiro lugar, o *Critério do Integral*, o *Critério de Comparação* e o *Critério de Comparação por Passagem ao Limite* que se aplicam a uma classe particular de séries que são as séries de termos não negativos. Em seguida apresentamos o *Critério de Cauchy* e o *Critério de D'Alembert* que podem ser aplicados a séries cujos termos não têm sinal constante. Finalmente apresentamos o *Critério de Leibnitz* que só pode ser aplicado a um certo tipo de séries designadas séries alternadas.

### 3.2.1 Critérios de convergência para séries de termos não negativos

**Definição 3.14.** Dizemos que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

é uma *série de termos não negativos* se, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se tem  $a_n \geq 0$ .

Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  uma série de termos não negativos. Observe-se que, neste caso, a sucessão das somas parciais  $(s_n)$  é monótona crescente. De facto, uma vez que para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} \geq 0$ , tem-se

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Uma vez que uma sucessão monótona crescente é convergente se e só se é limitada superiormente, concluímos que uma série de termos não negativos é convergente se e só se a sucessão das suas somas parciais for limitada superiormente.

Acabámos de demonstrar a seguinte proposição

**Proposição 3.15.** *Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  uma série de termos não negativos.*

*Então a série é convergente se e só se a sua sucessão das somas parciais é limitada superiormente.*

**Exemplo 3.16.** Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Atendendo a que, para todo  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , se tem  $k! \geq 2^{k-1}$ , conclui-se que a sucessão  $(s_n)$  das somas parciais desta série é limitada superiormente.



De facto, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

Concluimos então que a série considerada é convergente.

Um dos processos que pode ser utilizado para estudar a natureza de uma série de termos não negativos consiste em estudar a natureza de um conveniente integral impróprio. Este processo, habitualmente designado **Critério do Integral**, está descrito na proposição que apresentamos a seguir.

**Proposição 3.17.** *Seja  $(a_n)$  uma sucessão de termos não negativos e  $f$  uma função definida no intervalo  $[1, +\infty[$  e tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(n) = a_n$ .*

*Se  $f$  é decrescente no intervalo  $[1, +\infty[$ , então a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

*e o integral impróprio*

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

*têm a mesma natureza.*

**Demonstração:** Para demonstrar que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e o integral impróprio  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  têm a mesma natureza basta provar que a série considerada é convergente se e só se o integral impróprio considerado é também convergente.

Para estudar a natureza da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  temos de estudar a sucessão das somas parciais  $(s_n)$  onde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^n f(k). \end{aligned}$$

Para estudar a natureza do integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

temos de estudar a sucessão  $(I_n)$ , onde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$I_n = \int_1^n f(x) dx .$$

Para cada  $n \geq 2$  a soma

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

dá-nos a soma das áreas dos  $n - 1$  rectângulos de base  $[k, k + 1]$  e altura  $f(k)$ , com  $k \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ .

Consequentemente, para cada  $n \geq 2$ ,

$$I_n = \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) .$$

Por outro lado, para cada  $n \geq 2$ , a soma

$$\sum_{k=2}^n f(k)$$

dá-nos a soma das áreas dos  $n - 1$  rectângulos de base  $[k - 1, k]$  e altura  $f(k)$ , com  $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ , e, portanto,

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx = I_n .$$

Atendendo a que

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k = s_{n-1}$$

e

$$\sum_{k=2}^n f(k) = \sum_{k=2}^n a_k = s_n - a_1$$

tem-se, para todo o  $n \geq 2$ ,

$$s_n - a_1 \leq I_n \leq s_{n-1} .$$

Se o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

é convergente, então o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$$

existe e é finito e, atendendo a que a sucessão  $(I_n)$  é monótona crescente, concluímos que esta sucessão é limitada superiormente.

A desigualdade  $s_n - a_1 \leq I_n$  implica então que a sucessão  $(s_n)$  é limitada superiormente e a Proposição 3.15 permite então concluir que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente.

Reciprocamente admitamos que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente. Então a sucessão  $(s_n)$  é limitada superiormente donde resulta, atendendo à desigualdade  $I_n \leq s_{n-1}$ , que a sucessão  $(I_n)$  é limitada superior-

mente, logo convergente. Consequentemente o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

é convergente, como pretendíamos. ■

**Observação 3.18.** Utilizando um raciocínio análogo ao que foi utilizado na demonstração da proposição anterior, pode demonstrar-se que sendo  $(a_n)_{n \geq q}$ , com  $q > 1$ , uma sucessão de termos não negativos e  $f$  uma função definida no intervalo  $[q, +\infty[$  tal que, para todo o  $n \geq q$ ,  $f(n) = a_n$ , se  $f$  é decrescente no intervalo  $[q, +\infty[$ , então a série

$$\sum_{n=q}^{+\infty} a_n$$

e o integral impróprio

$$\int_q^{+\infty} f(x)dx$$

têm a mesma natureza.

Já vimos que, para todo o  $p \leq 0$ , a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

é divergente.

Vamos usar o Critério do Integral para estudar a natureza desta série no caso em que  $p > 0$ .

Para cada  $p > 0$  consideremos a função  $f$  definida por

$$\begin{aligned} f : [1, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x^p} \end{aligned}$$

Atendendo a que, para todo o  $x \in [1, +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{-p}{x^{p+1}} < 0$$

temos que  $f$  é estritamente decrescente em  $[1, +\infty[$ , logo decrescente neste intervalo.

Estamos nas condições do critério do integral e, portanto, para cada  $p > 0$ , a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

tem a mesma natureza do integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx.$$

Uma vez que, para os valores de  $p$  considerados, este integral impróprio converge se  $p > 1$  e diverge

se  $p \in ]0, 1]$ , concluímos que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p},$$

habitualmente designada *série harmónica de ordem  $p$* , converge se  $p > 1$  e diverge se  $p \leq 1$ .

**Exemplo 3.19.** Estudar a natureza da série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$$

Consideremos a função

$$\begin{aligned} f: [2, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{x \ln^3 x} \end{aligned}$$

Temos, para todo o  $x \in [2, +\infty[$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\ln^3 x - 3 \ln^2 x}{x^2 \ln^6 x} \\ &= \frac{-\ln x - 3}{x^2 \ln^4 x}. \end{aligned}$$

O denominador desta fracção é positivo pelo que o sinal de  $f'$  é o sinal de  $-\ln x - 3$ .

Uma vez que  $\ln x + 3 > 0$  se e só se  $x > e^{-3}$ , concluímos que  $f'(x) < 0$ , para todo o  $x \in [2, +\infty[$ , o que garante que  $f$  é estritamente decrescente, logo decrescente, no seu domínio.

Estamos nas condições do critério do integral e podemos concluir que a série dada tem a mesma natureza do integral impróprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{1}{x \ln^3 x} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{1}{x} (\ln x)^{-3} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{-1}{2 \ln^2 x} \right)_2^t \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{-1}{2 \ln^2 t} + \frac{1}{2 \ln^2 2} \right) \\ &= \frac{1}{2 \ln^2 2} \end{aligned}$$

concluímos que o integral impróprio é convergente e, portanto, a série considerada é também convergente.

Na proposição que apresentamos a seguir estabelece-se um critério para a determinação da natureza de uma série de termos não negativos que é habitualmente designado **Critério de Comparação**.

**Proposição 3.20.** Sejam  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  duas séries de termos não negativos tais que

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Então verificam-se as condições seguintes:

- (i) se  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é convergente, então  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente;
- (ii) se  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente, então  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é divergente.

**Demonstração:** (i) Seja  $(s_n)$  a sucessão das somas parciais da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $(s'_n)$  a sucessão das somas parciais da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ .

Da hipótese resulta que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq s_n \leq s'_n. \quad (3.4)$$

Como  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é convergente, a Proposição 3.15 garante que a sucessão  $(s'_n)$  é limitada superiormente.

Da desigualdade (3.4) deduzimos que a sucessão  $(s_n)$  é também limitada superiormente e, pela Proposição 3.15, concluímos que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é também convergente.

- (ii) Seja  $(s_n)$  a sucessão das somas parciais da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $(s'_n)$  a sucessão das somas parciais da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ .

Da hipótese resulta que a desigualdade (3.4) se verifica para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Uma vez que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente tem-se, pela Proposição 3.15, que a sucessão  $(s_n)$  não é limitada superiormente.

Da desigualdade (3.4) concluímos que a sucessão  $(s'_n)$  também não é limitada superiormente e, portanto, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é divergente, como pretendíamos. ■

**Exemplo 3.21.** 1. Consideremos a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n + 1}.$$

Uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $3^n + 1 > 0$ , a série considerada é uma série de termos positivos.

Uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$3^n + 1 \geq 3^n > 0$$

concluímos que

$$0 \leq \frac{1}{1 + 3^n} \leq \frac{1}{3^n}, \quad (3.5)$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Como a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$$

é uma série geométrica de razão, em módulo, inferior a um, logo convergente, a desigualdade (3.5) e o Critério de Comparação permitem concluir que a série dada é convergente.

2. Consideremos a série de termos positivos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  temos

$$0 < 2\sqrt{n}-1 \leq 2\sqrt{n},$$

donde resulta

$$0 < \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}-1}, \quad (3.6)$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Como a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  é divergente, as propriedades das séries permitem concluir que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

é também divergente. Utilizando a desigualdade (3.6) e o Critério de Comparação podemos concluir que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$$

é também divergente.

3. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n + \cos^2 n}{2^n}.$$

Atendendo a que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se tem  $\cos^2 n \geq 0$  concluímos que

$$0 \leq 7^n \leq \cos^2 n + 7^n.$$

Uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2^n > 0$ , obtem-se desta última desigualdade

$$0 \leq \frac{7^n}{2^n} \leq \frac{\cos^2 n + 7^n}{2^n}$$

donde resulta que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq \left(\frac{7}{2}\right)^n \leq \frac{\cos^2 n + 7^n}{2^n}. \quad (3.7)$$

A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{7}{2}\right)^n$$

é uma série geométrica de razão  $\frac{7}{2}$  e, portanto, é divergente.

Da desigualdade (3.7) e do Critério de Comparação concluímos que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n + \cos^2 n}{2^n}$$

é divergente.

4. Consideremos a série de termos positivos

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^3}{\ln n}.$$

Para todo o  $n \geq 2$  temos  $0 < \ln n \leq n$  donde resulta que

$$\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n} > 0$$

e, portanto, para todo o  $n \geq 2$ ,

$$\frac{n^3}{\ln n} \geq n^2 > 0. \quad (3.8)$$

Como a série  $\sum_{n=2}^{+\infty} n^2$  é divergente, a desigualdade (3.8) e o Critério de Comparação permitem concluir que a série em estudo é divergente.

A proposição que apresentamos a seguir, é habitualmente designada **Critério de Comparação por Passagem ao Limite** ou, simplesmente, **Critério do Limite**, e utiliza na sua demonstração a definição de limite de uma sucessão e a Proposição 3.20.

Observe-se que, sendo  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  uma série de termos não negativos e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  uma série de termos positivos, o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n},$$

quando existe, ou é  $+\infty$  ou é um número real não negativo.

**Proposição 3.22.** *Sejam  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  uma série de termos não negativos e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  uma série de termos positivos.*

*Seja*

$$L := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

*Então verificam-se as condições seguintes:*

- (i) se  $L \in \mathbb{R}^+$ , então as séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  têm a mesma natureza;
- (ii) se  $L = 0$  e a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é convergente, então a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é também convergente;
- (iii) se  $L = +\infty$  e a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é divergente, então a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é também divergente.

**Demonstração:** (i) Para demonstrar que as séries têm a mesma natureza  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  têm a mesma natureza basta demonstrar que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente se e só se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é também convergente.

Resulta da hipótese que, para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \geq p$ ,

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \varepsilon.$$

Tome-se  $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$ . Então existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \geq p$ ,

$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}L$$

ou seja, atendendo a que  $b_n > 0$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\left(\frac{L}{2}\right) b_n < a_n < \left(\frac{3}{2}L\right) b_n.$$

Desta dupla desigualdade resultam, utilizando a hipótese, as desigualdades

$$0 \leq a_n \leq \left(\frac{3}{2}L\right) b_n, \text{ para todo o } n \geq p \quad (3.9)$$

e

$$0 < b_n \leq \left(\frac{2}{L}\right) a_n, \text{ para todo o } n \geq p. \quad (3.10)$$

Admitamos que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é convergente. Então a série  $\sum_{n=p}^{+\infty} b_n$  é também convergente e, portanto, a série

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \left( \left(\frac{3}{2}L\right) b_n \right)$$

é também convergente.

Utilizando a desigualdade (3.9) e o Critério de Comparação concluímos então que a série  $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  é convergente e, portanto, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente.



Admitamos que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente. Então a série  $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  é também convergente o que permite concluir que a série

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \left( \frac{2}{L} a_n \right)$$

é também convergente.

Utilizando a desigualdade (3.10) e o Critério de Comparação concluímos então que a série  $\sum_{n=p}^{+\infty} b_n$

é convergente e, portanto, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é também convergente.

Está então provado que as duas séries consideradas têm a mesma natureza.

- (ii) Admitamos que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é convergente e que  $L = 0$ . Vamos provar que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é também convergente.

Como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

tem-se que existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \geq p$ ,

$$0 \leq \frac{a_n}{b_n} < 1$$

donde resulta, uma vez que  $b_n > 0$ ,

$$0 \leq a_n < b_n, \quad (3.11)$$

para todo o  $n \geq p$ .

Uma vez que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é convergente, tem-se que a série  $\sum_{n=p}^{+\infty} b_n$  é também convergente. Atendendo à desigualdade (3.11) e ao Critério de Comparação podemos então concluir que a série  $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  é também convergente e, portanto, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente.

- (iii) Admitamos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty.$$

Então, para todo o  $M > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \geq p$ , se tem

$$\frac{a_n}{b_n} > M.$$

Tome-se  $M = 1$ . Então existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \geq p$ ,  $\frac{a_n}{b_n} > 1$ , donde resulta, atendendo a que  $b_n > 0$ ,

$$0 \leq b_n < a_n. \quad (3.12)$$

Se supusermos que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é divergente, concluímos que a série  $\sum_{n=p}^{+\infty} b_n$  é também diver-

gente. A desigualdade (3.12) e o Critério de Comparação permitem concluir que a série  $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  é divergente e, portanto, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é também divergente, como pretendíamos. ■

**Exemplo 3.23.** 1. Consideremos a série de termos não negativos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{1 + \sqrt{n}}.$$

Não é difícil verificar que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se tem

$$0 \leq \frac{5}{1 + \sqrt{n}} \leq \frac{5}{\sqrt{n}}.$$

Uma vez que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{\sqrt{n}}$  é divergente, o Critério de Comparação nada permite concluir a partir da desigualdade estabelecida.

Para estudar a natureza da série considerada vamos utilizar o Critério de Comparação por Passagem ao Limite tomando como referência a série harmónica de ordem  $\alpha$ , com  $\alpha$  convenientemente escolhido.

Vamos determinar, se possível,  $\alpha \in \mathbb{R}$  por forma que o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{1 + \sqrt{n}}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^\alpha}{1 + \sqrt{n}}$$

seja finito e não nulo.

Uma vez que para  $\alpha = 1/2$  se tem <sup>1</sup>

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}} = 5$$

tem-se que a série dada e a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  têm a mesma natureza.

Como a série harmónica de ordem  $\frac{1}{2}$  é divergente, concluímos que a série dada é divergente.

2. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 3}.$$

Trata-se de uma série de termos não negativos já que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{\sqrt{n}}{n^2 + 3}$  é o quociente de dois números reais positivos.

<sup>1</sup>Note que o limite considerado é igual a zero se  $\alpha < 1/2$  e é igual a  $+\infty$  se  $\alpha > 1/2$ .

Para estudar a natureza desta série vamos usar o Critério de Comparação por Passagem ao Limite utilizando como referência a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Vamos então estudar o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2+3}}{\frac{1}{n^\alpha}}$$

em função de  $\alpha \in \mathbb{R}$  escolhendo, se possível,  $\alpha$  por forma que o limite considerado seja uma constante não nula. Temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2+3}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\alpha+1/2}}{n^2+3}$$

e, se  $\alpha + \frac{1}{2} = 2$ , ou seja, se  $\alpha = \frac{3}{2}$  temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\alpha+1/2}}{n^2+3} = 1$$

e, portanto, a série dada tem a mesma natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Como esta última é uma série convergente, concluímos que a série dada é convergente.

3. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2 \operatorname{arctg} n}{n^3+1}.$$

Temos, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{-2 \operatorname{arctg} n}{n^3+1} \leq 0$$

pelo que, para estudar a natureza desta série, não podemos aplicar os critérios apresentados. No entanto, atendendo a que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \operatorname{arctg} n}{n^3+1}$$

é uma série de termos não negativos que tem a mesma natureza da série dada, já que o seu termo geral se obtém multiplicando por  $-1$  o termo geral da série dada, vamos estudar a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \operatorname{arctg} n}{n^3+1}.$$

Atendendo a que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2 \operatorname{arctg} n}{n^3 + 1}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n^3}{n^3 + 1} 2 \operatorname{arctg} n \right) = \pi$$

e a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

é convergente concluímos, pelo Critério de Comparação por Passagem ao Limite, que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \operatorname{arctg} n}{n^3 + 1}$$

é convergente. Do que foi dito anteriormente podemos então concluir que a série dada é convergente.

4. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}.$$

Como, para todo o  $n \in \mathbb{N}$  se tem  $\frac{1}{n} \in ]0, 1] \subset ]0, \frac{\pi}{2}]$ , e a função seno é positiva neste intervalo, temos que a série considerada é uma série de termos positivos.

Atendendo a que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

e a que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  é divergente concluímos, pelo Critério de Comparação por Passagem ao Limite, que a série dada é divergente.

Os critérios apresentados nesta secção destinam-se a estudar a natureza de séries de termos não negativos. No entanto, tal como vimos num dos exemplos anteriores, se os termos da série são não positivos, podemos estudar a série de termos não negativos cujo termo geral se obtém multiplicando por  $-1$  o termo geral da série dada.

Os critérios que apresentámos nesta secção podem então ser aplicados a séries cujos termos têm sinal constante ou a séries cujos termos têm sinal constante a partir de certa ordem.

Na secção seguinte vamos apresentar critérios que permitem estudar a natureza de séries cujos termos não têm necessariamente sinal constante.

**Exercícios 3.2** 1. Utilize o Critério do Integral para estudar a natureza das séries seguintes:

(a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$

(b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( \frac{n+1}{n} \right)$

$$(c) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{17n-13}$$

2. Utilize o Critério de Comparação ou o Critério de Comparação por Passagem ao Limite para estudar a natureza de cada uma das séries seguintes:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

**Sugestão:** Atenda a que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se tem  $n! \geq 2^{n-1}$ .

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n^3}}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10n^2}{n^6 + 1}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{37n^3 + 2}}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(1/n)}{n^2}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + n}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 + \sin n}{n^2}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{e^n(n+1)^2}$$

$$(i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2n^4 + 1}}$$

$$(j) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$$

$$(k) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$$

3. Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  uma série de termos positivos.

- (a) Prove que se a série considerada é convergente, então a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$$

é também convergente.

- (b) Prove que se a série considerada é convergente e  $(c_n)$  é uma sucessão de números reais positivos tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0,$$

então a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n c_n)$$

é também convergente.

### 3.2.2 Convergência simples e absoluta

**Definição 3.24.** Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  uma série de números reais. Chama-se *série dos módulos* associada à série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  à série cujo termo geral é  $|a_n|$ .

**Exemplo 3.25.** 1. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^3}.$$

A série dos módulos associada a esta série é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\cos n}{n^3} \right|.$$

Uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq \left| \frac{\cos n}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$$

e a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$  é convergente, concluímos pelo Critério de Comparação, que a série dos módulos é convergente.

2. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

A série dos módulos associada a esta série é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

que, como vimos anteriormente, é uma série divergente.

Como vimos nos exemplos considerados a série dos módulos associada a uma série pode ser convergente ou divergente. A proposição que apresentamos a seguir estabelece que a convergência da série dos módulos estabelece uma condição suficiente para que uma série seja convergente.

**Proposição 3.26.** Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  uma série de números reais. Se a série dos módulos  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  é convergente, então a série dada é também convergente.

**Demonstração:** Atendendo a que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se tem

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

conclui-se que

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|,$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Como a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2|a_n|$$

é convergente concluímos, pelo Critério de Comparação, que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$$

é convergente.

Atendendo à Proposição 3.9 concluímos que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} ((a_n + |a_n|) - |a_n|)$$

é convergente, como pretendíamos. ■

É consequência imediata da Proposição 3.26 que se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente, então a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  é também divergente.

**Definição 3.27.** Dizemos que uma série numérica é *absolutamente convergente* se a série dos módulos que lhe está associada é convergente e dizemos que uma série numérica é *simplesmente convergente* se é convergente e a série dos módulos que lhe está associada é divergente.

A Proposição 3.26 garante que toda a série absolutamente convergente é convergente.

O Critério de Comparação e o Critério de Comparação por Passagem ao Limite apenas permitem estudar a natureza das séries de termos não negativos. A proposição que apresentamos a seguir estabelece um critério, habitualmente designado **Critério de Cauchy** ou **Critério da Raiz**, que permite estudar a natureza de algumas séries numéricas, independentemente do sinal dos seus termos.

**Proposição 3.28.** Sejam  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  uma série de números reais e

$$L := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Se o limite  $L$  existir <sup>2</sup>, verificam-se as condições seguintes:

- (i) se  $0 \leq L < 1$ , então a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é absolutamente convergente, logo convergente;
- (ii) se  $L > 1$  ou  $L = +\infty$ , então a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente.

<sup>2</sup>Uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se tem  $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 0$ , temos que, se o limite  $L$  existir, então  $L \in \mathbb{R}_0^+$  ou  $L = +\infty$ .

**Demonstração:** (i) Admitamos que

$$L := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

e  $L \in [0, 1[$ .

Então, para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \geq p$ ,

$$|\sqrt[n]{|a_n|} - L| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$-\varepsilon + L < \sqrt[n]{|a_n|} < \varepsilon + L,$$

para todo o  $n \geq p$ .

Como  $L \in [0, 1[$ , existe  $r \in ]0, 1[$  tal que  $r - L > 0$ .

Considere-se  $\varepsilon := r - L$ . Então existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \geq p$

$$0 \leq \sqrt[n]{|a_n|} < r.$$

Desta desigualdade resulta que, para todo o  $n \geq p$ , se tem

$$0 \leq |a_n| < r^n. \quad (3.13)$$

Como  $r \in ]0, 1[$  tem-se que a série geométrica de razão  $r$  é uma série convergente. Consequentemente, a série  $\sum_{n=p}^{+\infty} r^n$  é também convergente.

A desigualdade (3.13) e o Critério de Comparação permitem então concluir que a série

$$\sum_{n=p}^{+\infty} |a_n|$$

é convergente, o que implica que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  é convergente.

Então a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é absolutamente convergente, logo convergente, pela Proposição 3.26.

(ii) Seja

$$L := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Suponhamos que  $L > 1$ .

Por um raciocínio análogo ao anterior e, atendendo a que  $L - 1 > 0$ , temos que existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \geq p$  se tem

$$1 - L + L < \sqrt[n]{|a_n|}$$

donde resulta que

$$|a_n| > 1,$$



para todo o  $n \geq p$ .

Esta desigualdade permite concluir que o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

caso exista, é não nulo. A condição necessária de convergência de uma série permite então concluir que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente.

Suponhamos que  $L = +\infty$ . Então existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq p$  se tem  $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ , o que implica, como acabámos de demonstrar, que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente, o que completa a demonstração da proposição. ■

Vamos agora apresentar alguns exemplos de aplicação do Critério de Cauchy.

**Exemplo 3.29.** 1. Consideremos a série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

Temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{(\ln n)^n} \right|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

o que permite concluir, pelo Critério de Cauchy, que a série dada é absolutamente convergente, logo convergente.

2. Consideremos a série de termo geral

$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Como

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \right|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right) \\ &= \frac{e}{2} > 1, \end{aligned}$$

concluimos, pelo Critério de Cauchy, que a série considerada é divergente.

3. Consideremos a série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{k! + 2}.$$

Para todo o  $k \in \mathbb{N}$  temos

$$0 \leq \frac{3^k}{k! + 2} \leq \frac{3^k}{k!}. \quad (3.14)$$

Vamos estudar a natureza da série de termos positivos

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{k!}.$$

Temos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\frac{3^k}{k!}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt[k]{k!}}$$

Como

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)!}{k!} = +\infty$$

concluimos <sup>3</sup> que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{k!} = +\infty$  e, portanto,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\frac{3^k}{k!}} = 0$$

Pelo Critério de Cauchy, a série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{k!}$$

é convergente.

Utilizando a desigualdade (3.14) e o Critério de Comparação podemos então concluir que a série dada é convergente.

**Observação 3.30.** Note-se que no caso em que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$  a Proposição 3.28 nada afirma sobre a natureza da série de termo geral  $a_n$ .

Temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

e, como sabemos, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  é divergente.

Por outro lado, temos também

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$$

e a série de termo geral  $\frac{1}{n^2}$  é convergente.

---

<sup>3</sup>Seja  $(u_n)$  uma sucessão de termos positivos. Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$  (podendo  $l$  ser  $+\infty$ ), então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ .

A proposição que apresentamos a seguir estabelece um critério que permite estudar a natureza de algumas séries numéricas de termos não nulos, independentemente do sinal dos seus termos. Este critério é habitualmente designado **Critério de D'Alembert** ou **Critério do Quociente**.

**Proposição 3.31.** *Sejam  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  uma série de números reais não nulos e*

$$L := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

*Se o limite  $L$  existir<sup>4</sup>, verificam-se as condições seguintes:*

(i) *se  $0 \leq L < 1$ , então a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é absolutamente convergente, logo convergente;*

(ii) *se  $L > 1$  ou  $L = +\infty$ , então a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente.*

**Demonstração:** (i) Admitamos que  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in [0, 1[$  e vamos provar que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é absolutamente convergente.

Seja  $\varepsilon := r - L$  com  $r \in ]L, 1[$ . Então  $\varepsilon > 0$  e, por definição de limite de uma sucessão, existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \geq p$ ,

$$\left| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - L \right| < r - L,$$

ou seja,

$$L - r < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - L < r - L,$$

donde resulta

$$2L - r < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < r,$$

para todo o  $n \geq p$ .

Uma vez que, para todo o  $n$ ,  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 0$  temos

$$0 \leq \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < r, \quad (3.15)$$

para todo o  $n \geq p$ .

Por outro lado, uma vez que, por hipótese,  $a_n \neq 0$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , resulta da desigualdade (3.15)

$$0 \leq |a_{n+1}| < r|a_n|, \quad (3.16)$$

para todo o  $n \geq p$ .

---

<sup>4</sup>Uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 0$ , temos que, se o limite  $L$  existir, então  $L \in \mathbb{R}_0^+$  ou  $L = +\infty$ .

Utilizando a desigualdade (3.16) e o Princípio da Indução Matemática vamos provar que

$$0 \leq |a_{n+p}| < r^n |a_p|, \quad (3.17)$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

A desigualdade (3.17) verifica-se para  $n = 1$  já que coincide com a desigualdade (3.16) quando tomamos  $n = p$ .

Admitamos que a desigualdade (3.17) se verifica para  $n = k$ , ou seja, que

$$0 \leq |a_{k+p}| < r^k |a_p|. \quad (3.18)$$

Da desigualdade (3.16) resulta, para  $n = p + k$ ,

$$|a_{p+k+1}| < r |a_{p+k}|$$

donde resulta, atendendo a (3.18),

$$|a_{p+k+1}| < r(r^k |a_p|) = r^{k+1} |a_p|.$$

Acabámos de provar que a desigualdade (3.17) se verifica para  $n = 1$  e que se verifica para  $n = k + 1$  sempre que se verifica para  $n = k$ . Pelo Princípio da Indução Matemática podemos então concluir que a desigualdade (3.17) se verifica para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , como pretendíamos.

A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$$

é uma série geométrica de razão  $r \in ]0, 1[$ , logo convergente.

Pela Proposição 3.9 a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (r^n |a_p|)$$

é também convergente.

Atendendo à desigualdade (3.17) podemos concluir, pelo Critério de Comparação, que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{p+n}|$$

é convergente.

Uma vez que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{p+n}| = \sum_{n=p+1}^{+\infty} |a_n|$$

concluimos que a série

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} |a_n|$$

é convergente.

Uma vez que a natureza de uma série não depende dos seus  $p$  primeiros termos podemos concluir que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

é convergente, como pretendíamos.

(ii) Admitamos que  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$  e vamos provar que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente.

Seja  $\varepsilon := L - 1$ . Então  $\varepsilon > 0$  e, por definição de limite de uma sucessão, existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \geq p$ ,

$$\left| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - L \right| < L - 1 ,$$

ou seja,

$$1 - L < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - L < L - 1 ,$$

donde resulta, para todo o  $n \geq p$ ,

$$1 < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 2L - 1 .$$

Temos então, para todo o  $n \geq p$ ,

$$|a_{n+1}| > |a_n| ,$$

o que significa que, a partir da ordem  $p$  a sucessão de termos positivos  $(|a_n|)$  é monótona crescente, logo não é um infinitésimo. Consequentemente, a sucessão  $(a_n)$  também não é um infinitésimo. Pela condição necessária de convergência de uma série, concluímos que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente, como pretendíamos.

Admitamos que  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = +\infty$  e vamos provar que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente.

Seja  $\varepsilon := 1$ . Então  $\varepsilon > 0$  e, por definição de limite de uma sucessão, existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \geq p$ ,

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 .$$

Utilizando um raciocínio análogo ao utilizado na demonstração do caso em que  $L > 1$ , concluímos que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente, como pretendíamos. ■

**Exemplo 3.32.** 1. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} .$$

Temos  $\frac{n!}{n^n} \neq 0$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . Vamos estudar a natureza desta série utilizando o Critério de D'Alembert.

Temos de estudar o limite

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \right|}{\left| \frac{n!}{n^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)n!n^n}{n!(n+1)(n+1)^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{-n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} \\
 &= \frac{1}{e}.
 \end{aligned}$$

Como  $L \in [0, 1[$ , o Critério de D'Alembert permite concluir que a série considerada é absolutamente convergente, logo convergente.

2. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( (-2)^n \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \right).$$

Temos  $(-2)^n \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \neq 0$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , e vamos estudar a natureza desta série utilizando o Critério de D'Alembert.

Temos de estudar o limite

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| (-2)^{n+1} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(2n+2)^{n+1}} \right|}{\left| (-2)^n \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \right|} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|(-2)^{n+1}| (2n+2)! n! (2n)^n}{|(-2)^n| (2n)! (n+1)! (2n+2)^{n+1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(2n+2)(2n+1)(2n)! n! (2n)^n}{(2n)! (n+1)n! (2n+2)(2n+2)^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(2n+1)(2n)^n}{(n+1)(2n+2)^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{4n+2}{n+1} \left( \frac{2n}{2n+2} \right)^n \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{4n+2}{n+1} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{4n+2}{n+1} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} \right) \\
 &= \frac{4}{e}.
 \end{aligned}$$

Como  $L > 1$  o Critério de D'Alembert permite concluir que a série considerada é divergente.

3. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(-3)^n}.$$

Temos  $\frac{n!}{(-3)^n} \neq 0$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , pelo que vamos estudar a sua natureza utilizando o Critério de D'Alembert.

Temos de estudar o limite

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{(n+1)!}{(-3)^{n+1}} \right|}{\left| \frac{n!}{(-3)^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)! |(-3)^n|}{n! |(-3)^{n+1}|} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{3} \\
 &= +\infty.
 \end{aligned}$$

Como  $L = +\infty$  o Critério de D'Alembert permite concluir que a série considerada é divergente.

4. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \pi^n n!}{n^n}.$$

Temos, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{1 + \pi^n n!}{n^n} \geq \frac{\pi^n n!}{n^n} \geq 0, \quad (3.19)$$

pelo que vamos estudar a natureza da série dada utilizando o Critério de Comparação.

Consideremos então a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n}.$$

Temos  $\frac{\pi^n n!}{n^n} \neq 0$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , e vamos estudar a natureza desta série utilizando o Critério de D'Alembert.

Temos de estudar o limite

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{\pi^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \right|}{\left| \frac{\pi^n n!}{n^n} \right|} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^{n+1} (n+1)! n^n}{\pi^n n! (n+1)^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi (n+1) n! n^n}{n! (n+1) (n+1)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi n^n}{(n+1)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \pi \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \right) \\ &= \frac{\pi}{e} \end{aligned}$$

Como  $L > 1$  o Critério de D'Alembert permite concluir que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n}$  é divergente.

Atendendo à desigualdade (3.19) podemos concluir, pelo Critério de Comparação, que a série dada é divergente.

**Observação 3.33.** Note-se que no caso em que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$ , a Proposição 3.31 nada permite concluir sobre a natureza da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .

Por exemplo temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{1}{n+1} \right|}{\left| \frac{1}{n} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

e a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  é divergente e temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{1}{(n+1)^2} \right|}{\left| \frac{1}{n^2} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$



e a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  é convergente.

**Exercícios 3.3:** 1. Utilize o Critério de Cauchy para estudar a natureza da série considerada em cada uma das alíneas seguintes:

(a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^n$

(b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\ln n}{n} \right)^n$

(c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{7^n}$

(d)  $\sum_{n=1}^{+\infty} n \left( \frac{3}{4} \right)^n$

(e)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^n}{3^{n^2}}$

2. Utilize o Critério de D'Alembert para estudar a natureza de cada uma das séries seguintes:

(a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^n}$

(b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! n^2}{(2n)!}$

(c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)!}{3^n (n!)^2}$

(d)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

3. Estude a natureza de cada uma das séries seguintes:

(a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n + n}$

(b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n! + 1}{n^n}$

### 3.3 Séries alternadas

Nesta secção vamos estudar as séries cujos termos são alternadamente positivos e negativos.

**Definição 3.34.** A série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  diz-se uma *série alternada* se os seus termos se podem escrever na forma

$$a_n = (-1)^n z_n,$$

com  $z_n$  de sinal constante, isto é, ou  $z_n > 0$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$  ou  $z_n < 0$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 3.35.** 1. A série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  é uma série alternada já que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{n} > 0$ .

2. A série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^n$  é uma série alternada já que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(-1)^{n+1} e^n = (-1)^n (-e^n)$$

com  $-e^n < 0$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

3. A série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cos n$  não é uma série alternada já que, por exemplo,  $\cos 1 > 0$  e  $\cos 4 < 0$ .

**Observação 3.36.** Toda a série do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n$$

com  $b_n$  de sinal constante é uma série alternada já que pode ser escrita na forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (-b_n)$$

onde  $-b_n$  tem sinal constante.

A proposição que apresentamos a seguir é uma condição suficiente para a convergência de uma série alternada e é habitualmente designada *Crítério de Leibniz*.

**Proposição 3.37.** *Seja  $(a_n)$  uma sucessão de números reais positivos, monótona decrescente e tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .*

*Então a série alternada  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$  é convergente.*

**Demonstração:** As séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$  têm a mesma natureza já que o termo geral da primeira se obtém multiplicando por  $-1$  o termo geral da segunda.

Vamos ver que, nas condições do enunciado da proposição a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n \tag{3.20}$$

é convergente. Podemos então concluir que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$  é convergente e a proposição fica demonstrada.

Sejam  $(s_n)$  a sucessão das somas parciais da série (3.20) e  $(s_{2n})$  a sua subsucessão dos termos de ordem par.

Para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\begin{aligned} s_{2n+2} - s_{2n} &= s_{2n} + (-1)^{2n+2} a_{2n+1} + (-1)^{2n+3} a_{2n+2} - s_{2n} \\ &= a_{2n+1} - a_{2n+2} . \end{aligned}$$

Uma vez que, por hipótese, a sucessão  $(a_n)$  é monótona decrescente, tem-se que  $a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0$  e, portanto, a sucessão  $(s_{2n})$  é monótona crescente.

Por outro lado, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$s_{2n} = a_1 - a_{2n} + (a_3 - a_2) + (a_5 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n-2}) .$$

Uma vez que a sucessão  $(a_n)$  é monótona decrescente, as parcelas

$$(a_3 - a_2), (a_5 - a_4), \dots, (a_{2n-1} - a_{2n-2})$$

são todas não positivas e, portanto,

$$s_{2n} - (a_1 - a_{2n}) \leq 0 \iff s_{2n} \leq a_1 - a_{2n}.$$

Uma vez que, por hipótese, a sucessão  $(a_n)$  é uma sucessão de termos positivos, temos que  $a_1 - a_{2n} \leq a_1$  o que implica que

$$s_{2n} \leq a_1.$$

Consequentemente, a sucessão  $(s_{2n})$  é monótona crescente e limitada superiormente pelo que é convergente.

Consideremos a subsucessão  $(s_{2n-1})$  dos termos ímpares.

Para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\begin{aligned} s_{2n+1} - s_{2n-1} &= s_{2n-1} + (-1)^{2n+1}a_{2n} + (-1)^{2n+2}a_{2n+1} - s_{2n-1} \\ &= a_{2n+1} - a_{2n}. \end{aligned}$$

Uma vez que, por hipótese, a sucessão  $(a_n)$  é monótona decrescente, tem-se que  $a_{2n+1} - a_{2n} \leq 0$  e, portanto, a sucessão  $(s_{2n-1})$  é monótona decrescente.

Por outro lado, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$s_{2n-1} = a_1 - a_2 + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \dots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) + a_{2n-1}.$$

Atendendo a que a sucessão  $(a_n)$  é monótona decrescente, as parcelas

$$(a_3 - a_4), (a_5 - a_6), \dots, (a_{2n-3} - a_{2n-2})$$

são todas não negativas e, atendendo a que a sucessão  $(a_n)$  é uma sucessão de termos positivos, temos  $a_{2n-1} > 0$ .

Consequentemente,

$$s_{2n-1} \geq a_1 - a_2.$$

Concluimos então que a sucessão  $(s_{2n-1})$  é monótona decrescente e limitada inferiormente, logo convergente.

Vamos provar que as sucessões  $(s_{2n})$  e  $(s_{2n-1})$  têm o mesmo limite, o que permite concluir que a sucessão  $(s_n)$  é convergente e, portanto, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$  é convergente.

Uma vez que, por hipótese,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = 0.$$

Atendendo a que

$$s_{2n} - s_{2n-1} = -a_{2n}$$

temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_{2n} - s_{2n-1}) = 0$$

o que permite concluir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n-1} ,$$

como pretendíamos. ■

**Observação 3.38.** 1. Vale, com uma demonstração análoga, uma proposição do mesmo tipo para uma série que seja alternada a partir de uma ordem  $p > 1$ .

2. Muitas vezes, quando se pretende estudar a natureza de uma série alternada, há toda a vantagem em estudar em primeiro lugar a natureza da série dos módulos que lhe está associada já que, se esta for convergente, então a série alternada é absolutamente convergente, logo convergente. Se a série dos módulos que está associada for divergente, então nada podemos concluir sobre a natureza da série alternada e teremos de averiguar se podemos aplicar o Critério de Leibniz.

No entanto, não podemos utilizar este procedimento como regra porque, como veremos num dos exemplos que apresentamos a seguir, a condição necessária de convergência de uma série permite em alguns casos concluir imediatamente que a série alternada em estudo é divergente.

No caso em que a série dos módulos é divergente e a série alternada não satisfaz as condições do Critério de Leibniz, o estudo da natureza da série alternada deverá ser feito recorrendo à definição.

**Exemplo 3.39.** 1. Consideremos a série numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} .$$

Uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{1}{2n+1} > 0$$

a série considerada é uma série alternada.

A série dos módulos que lhe está associada é a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{2n+1} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} .$$

Utilizando o Critério de Comparação por Passagem ao Limite e utilizando como referência a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ , podemos concluir que a série dos módulos é divergente.

Consequentemente, nada podemos concluir sobre a natureza da série alternada dada.

Vamos então averiguar se estamos nas condições do Critério de Leibniz.

Temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

onde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_n = \frac{1}{2n+1}.$$

Uma vez que

i. para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{2n+1} > 0$  e, portanto, a sucessão  $\left(\frac{1}{2n+1}\right)$  é uma sucessão de números reais positivos;

ii. para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{2n+1 - 2n-3}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{-2}{(2n+1)(2n+3)} < 0 \end{aligned}$$

o que permite concluir que a sucessão  $\left(\frac{1}{2n+1}\right)$  é monótona decrescente;

iii.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ ;

a série alternada considerada satisfaz as condições do Critério de Leibniz e, portanto, é convergente.

2. Consideremos a série numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{5n+2}.$$

Uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{3n+1}{5n+2} > 0$$

a série considerada é uma série alternada.

Atendendo a que

$$(-1)^n \frac{3n+1}{5n+2} = \begin{cases} \frac{3n+1}{5n+2} & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{3n+1}{5n+2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

temos que não existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{5n+2}.$$

Pela condição necessária de convergência de uma série concluímos que a série alternada dada é divergente.

3. Consideremos a série numérica

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

Uma vez que, para todo o  $n \geq 2$ ,

$$\frac{\ln n}{n} > 0$$

a série considerada é uma série alternada.

A série dos módulos que lhe está associada é a série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{\ln n}{n} \right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

Utilizando o Critério de Comparação por Passagem ao Limite e utilizando como referência a série

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  podemos concluir que a série dos módulos é divergente uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$$

e a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  é divergente.

Consequentemente, utilizando a natureza da série dos módulos, nada podemos concluir sobre a natureza da série alternada dada.

Vamos então averiguar se estamos nas condições do Critério de Leibniz.

Temos

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

onde, para todo o  $n \geq 2$ ,

$$a_n = \frac{\ln n}{n}.$$

i. Uma vez que, para todo o  $n \geq 2$ , temos  $\frac{\ln n}{n} > 0$  podemos concluir que a sucessão  $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n \geq 2}$  é uma sucessão de números reais positivos.

ii. Para averiguar se a sucessão  $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n \geq 2}$  é monótona decrescente consideremos a função auxiliar

$$\begin{array}{ccc} f: [2, +\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln x}{x} \end{array}$$

Temos, para todo o  $x \in [2, +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

pelo que  $f'(x) \leq 0$  se  $x \in [e, +\infty[$  e  $f'(x) > 0$  se  $x \in [2, e[$ .

Consequentemente a função  $f$  é decrescente no intervalo  $[e, +\infty[$  o que permite concluir que a sucessão

$$\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n \geq 3}$$

é monótona decrescente.

$$\text{iii. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Atendendo a i., ii. e iii. podemos concluir que a série alternada

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

satisfaz as condições do Critério de Leibniz e, portanto, é convergente.

Uma vez que a natureza de uma série não depende dos seus primeiros termos, podemos concluir que a série alternada dada é convergente e, uma vez que a série dos módulos que lhe está associada é divergente, podemos concluir que ela é simplesmente convergente.

4. Consideremos a série numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$$

onde  $p$  é um parâmetro real.

Vamos estudar, em função de  $p \in \mathbb{R}$ , a natureza desta série.

Uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{1}{n^p} > 0$$

a série considerada é uma série alternada que habitualmente se designa *série harmónica alternada de ordem  $p$* .

A série dos módulos que lhe está associada é a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

que, como vimos, converge se  $p > 1$  e diverge se  $p \leq 1$ .

Podemos então concluir que se  $p > 1$  a série alternada considerada é absolutamente convergente, logo convergente.

Se  $p = 0$  obtemos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$$

que, como vimos anteriormente, é uma série divergente.

Se  $p < 0$ , então não existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$$

e a condição necessária de convergência de uma série permite concluir que, neste caso, a série alternada considerada é divergente.

Falta então estudar a natureza da série dada no caso em que  $p \in ]0, 1]$ .

Note-se que, neste caso,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p} = 0$$

pelo que a condição necessária de convergência de uma série nada permite concluir sobre a sua natureza.

Vamos então averiguar se estamos nas condições do Critério de Leibniz.

- i. Uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{n^p} > 0$  podemos concluir que a sucessão  $\left(\frac{1}{n^p}\right)$  é uma sucessão de números reais positivos.
- ii. Para averiguar se a sucessão  $\left(\frac{1}{n^p}\right)$  é monótona decrescente consideremos a função auxiliar

$$\begin{aligned} f: [1, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x^p} \end{aligned}$$

Temos, para todo o  $x \in [1, +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{-p}{x^{p+1}}$$

pelo que  $f'(x) < 0$ , para todo o  $x \in [1, +\infty[$  e, para todo o  $p \in ]0, 1]$ .

Consequentemente, para todo o  $p \in ]0, 1]$ , a função  $f$  é decrescente o que permite concluir que, para os valores de  $p$  que estamos a considerar, a sucessão  $\left(\frac{1}{n^p}\right)$  é monótona decrescente.

- iii. Para todo o  $p \in ]0, 1]$  temos  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ .

Atendendo a i., ii. e iii. podemos concluir que, para todo o  $p \in ]0, 1]$ , a série alternada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$$

satisfaz as condições do Critério de Leibniz e, portanto, é convergente.

Uma vez que a série dos módulos que lhe está associada é divergente, podemos concluir que ela é simplesmente convergente.

Resumindo, temos que a série harmónica alternada de ordem  $p$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p} \quad \text{é} \quad \begin{cases} \text{divergente se } p \leq 0 \\ \text{simplesmente convergente se } p \in ]0, 1] \\ \text{absolutamente convergente se } p > 1 \end{cases}$$

**Exercícios 3.4:** 1. Estude a natureza da série considerada em cada uma das alíneas seguintes:



$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n} \\ \text{(b)} \quad & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \\ \text{(c)} \quad & \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \\ \text{(d)} \quad & \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2n^2 + 1} \end{aligned}$$

2. Estude quanto à sua natureza cada uma das séries alternadas seguintes e, em caso de convergência, indique se se trata de convergência simples ou absoluta.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \\ \text{(b)} \quad & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-10)^n}{n!} \\ \text{(c)} \quad & \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \\ \text{(d)} \quad & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}} \\ \text{(e)} \quad & \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^{10}} \\ \text{(f)} \quad & \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \operatorname{sen} \left( \frac{1}{k} \right) \end{aligned}$$

3. Em cada uma das alíneas que se seguem determine a natureza da série indicada e, em caso de convergência, indique se se trata de convergência simples ou absoluta.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n - \sqrt{n}}{(n + \sqrt{n})^2} \\ \text{(b)} \quad & \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n - \sqrt{n}} \\ \text{(c)} \quad & \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ \text{(d)} \quad & \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right) \\ \text{(e)} \quad & \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \\ \text{(f)} \quad & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{(n!)^2} \\ \text{(g)} \quad & \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1+3^k}{5^k} \\ \text{(h)} \quad & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(3k+2)^3} \\ \text{(i)} \quad & \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{k+1} \right)^k \end{aligned}$$

$$(j) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^{10}}$$

$$(k) \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \operatorname{sen} \left( \frac{1}{k} \right)$$

$$(l) \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left( 1 - \frac{1}{k} \right)^k$$

$$(m) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 + 1}$$

$$(n) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)e^{-k}}{2k+3}$$

$$(o) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$(p) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{n+1}}$$

$$(q) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2}{k^2 - 1}$$

$$(r) \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{k}{k+1} \right)^{k^2}$$

$$(s) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$$

$$(t) \sum_{k=1}^{+\infty} \ln \left( \frac{k+1}{k} \right)$$

$$(u) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{5^n} \right)$$

$$(v) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{4^n}$$

$$(w) \sum_{n=1}^{+\infty} (1 + (-1)^n)$$

$$(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{2}{n} \right)$$

$$(y) \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \operatorname{tg} \left( \frac{1}{k} \right)$$

$$(z) \sum_{k=1}^{+\infty} (\cos^2 k + k^2) k^{-4}$$

$$(\alpha) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} k}{k^2 + 1}$$

$$(\beta) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-(n+1)}}{3}$$

$$(\gamma) \sum_{k=1}^{+\infty} (2k)$$

$$(\delta) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left( \frac{2}{3} \right)^n$$

4. Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  uma série de termos positivos convergente. Mostre que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3u_n}{2+u_n}$  é convergente.
5. Sendo  $(a_n)$  uma sucessão de termos positivos, limitada e convergente, indique, justificando, a natureza das séries seguintes:
- (a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a_n}$
- (b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n)$

### 3.4 Soluções dos exercícios propostos

#### Exercícios 3.1

1. (a) Divergente, porque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \neq 0$ .
  - (b) Série geométrica de razão  $r = \frac{99}{100}$ . Como  $|r| = \frac{99}{100} < 1$ , a série é convergente. Soma:  $S = 100$ .
  - (c) Série geométrica de razão  $r = -\frac{3}{e}$ . Como  $|r| = \frac{3}{e} > 1$ , a série é divergente.
  - (d) Convergente, porque o seu termo geral é a diferença dos termos gerais de duas séries convergentes. Soma:  $S = 2$ .
  - (e) Divergente, porque o seu termo geral é a soma do termo geral de uma série divergente com o termo geral de uma série convergente.
  - (f) Convergente. Soma:  $S = \frac{3}{2}$ .
  - (g) Convergente, porque o seu termo geral é o produto do termo geral de uma série convergente pela constante  $\frac{1}{2}$ . Soma:  $S = 1$ .
  - (h) Divergente, porque o seu termo geral é a diferença entre o termo geral de uma série divergente e o termo geral de uma série convergente.
  - (i) Divergente, porque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + (\frac{7}{10})^n} = 1 \neq 0$ .
2. Sugestão: Basta atender a que a natureza de uma série não depende dos  $p - 1$  primeiros termos.

#### Exercícios 3.2

1. (a) Convergente.
  - (b) Divergente.
  - (c) Divergente.
  - (d) Divergente.
2. (a) Convergente.
- (b) Convergente. Sugestão: Utilize como referência a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ .
- (c) Convergente. Sugestão: Utilize como referência a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ .
- (d) Convergente. Sugestão: Utilize como referência a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ .
- (e) Convergente. Sugestão: Utilize como referência a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .
- (f) Convergente. Sugestão: Utilize como referência a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ .
- (g) Convergente. Sugestão: Utilize como referência a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n^2}$ .

- (h) Convergente. Sugestão: Utilize como referência a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^n}$ .
- (i) Convergente. Sugestão: Utilize como referência a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ .
- (j) Convergente. Sugestão: Utilize como referência a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$  ou a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ .
- (k) Divergente. Sugestão: Utilize como referência a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ .
3. (a) Sugestão: Utilize o Critério do Limite tomando como referência a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .
- (b) —

**Exercícios 3.3**

1. (a) Neste caso o Critério de Cauchy não é aplicável porque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right|} = 1$ . Para estudar a natureza desta série pode utilizar-se a Condição Necessária de Convergência.
- (b) Absolutamente convergente, logo convergente.
- (c) Divergente.
- (d) Absolutamente convergente, logo convergente.
- (e) Absolutamente convergente, logo convergente.
2. (a) Absolutamente convergente, logo convergente.
- (b) Absolutamente convergente, logo convergente.
- (c) Absolutamente convergente, logo convergente.
- (d) Absolutamente convergente, logo convergente.
3. (a) Convergente.
- (b) Divergente.

**Exercícios 3.4**

1. (a) Simplesmente convergente.
- (b) Absolutamente convergente.
- (c) Divergente.
- (d) Divergente.
2. (a) Absolutamente convergente.
- (b) Absolutamente convergente.
- (c) Divergente.
- (d) Simplesmente convergente.

3. (a) Divergente.  
(b) Divergente.  
(c) Absolutamente convergente.  
(d) Divergente.  
(e) Absolutamente convergente.  
(f) Absolutamente convergente.  
(g) Absolutamente convergente.  
(h) Absolutamente convergente.  
(i) Absolutamente convergente.  
(j) Divergente.  
(k) Simplesmente convergente.  
(l) Divergente.  
(m) Absolutamente convergente.  
(n) Absolutamente convergente.  
(o) Simplesmente convergente.  
(p) Absolutamente convergente.  
(q) Absolutamente convergente.  
(r) Absolutamente convergente.  
(s) Absolutamente convergente.  
(t) Divergente.  
(u) Divergente.  
(v) Absolutamente convergente.  
(w) Divergente.  
(x) Divergente.  
(y) Simplesmente convergente.  
(z) Absolutamente convergente.  
( $\alpha$ ) Absolutamente convergente.  
( $\beta$ ) Absolutamente convergente.  
( $\gamma$ ) Divergente.  
( $\delta$ ) Absolutamente convergente.
4. Sugestão: Utilize o Critério de Comparação.
5. (a) Absolutamente convergente, logo convergente.  
(b) Divergente, pela Condição Necessária de Convergência.

## Capítulo 4

# Sucessões e Séries de Funções

### 4.1 Sucessões de Funções

Seja  $D \subset \mathbb{R}$  um conjunto que, ao longo de todo o capítulo, suporemos não vazio. Denotamos por  $\mathcal{F}(D)$  o conjunto das funções reais de variável real definidas em  $D$ . Uma sucessão de funções  $(f_n)$  definidas em  $D$  é uma aplicação

$$\begin{aligned}(f_n): \mathbb{N} &\longrightarrow \mathcal{F}(D) \\ n &\longmapsto f_n\end{aligned}$$

onde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\begin{aligned}f_n: D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x)\end{aligned}$$

**Exemplo 4.1.** A sucessão  $(f_n)$ , onde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\begin{aligned}f_n: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x) = x^n\end{aligned}$$

é uma sucessão de funções definidas em  $[0, 1]$ .

#### 4.1.1 Convergência de Sucessões de Funções

Suponhamos que, para cada  $x \in D$ , a sucessão numérica  $(f_n(x))$  é uma sucessão convergente. Podemos então considerar a função

$$\begin{aligned}f: D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)\end{aligned}$$

**Definição 4.2.** Sejam  $D \subset \mathbb{R}$  um conjunto,  $(f_n)$  uma sucessão de funções definidas em  $D$  e  $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função.

Dizemos que a sucessão  $(f_n)$  *converge pontualmente* para a função  $f$  em  $D$  e escrevemos

$$f_n \xrightarrow{p} f$$

se, para todo o  $x \in D$ ,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ .

Neste caso dizemos que a função  $f$  é o limite pontual da sucessão  $(f_n)$  em  $D$ .

**Exemplo 4.3.** 1. Sejam  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $(a_n)$  uma sucessão de números reais convergente para  $a \in \mathbb{R}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  seja

$$\begin{aligned} f_n: D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_n(x) = a_n g(x) \end{aligned}$$

Para cada  $x \in D$  temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n g(x)) \\ &= a g(x) \end{aligned}$$

e, portanto, a função

$$\begin{aligned} f: D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = a g(x) \end{aligned}$$

é o limite pontual em  $D$  da sucessão de funções considerada.

2. Seja  $D = [0, 1]$  e, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos a função

$$\begin{aligned} f_n: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_n(x) = x^n \end{aligned}$$

Para cada  $x \in [0, 1[$  temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$$

e

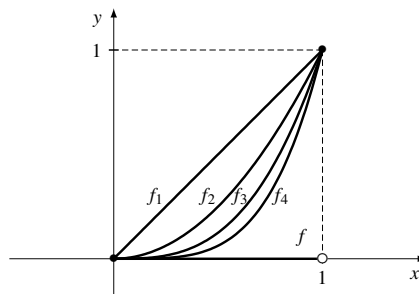
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1^n = 1.$$

Portanto a sucessão de funções considerada converge pontualmente em  $[0, 1]$  para a função

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1[ \end{cases}$$

No gráfico que apresentamos a seguir estão representadas as funções  $f_1, f_2, f_3, f_4$  e  $f$ .





3. Consideremos a sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $[0, 1]$  por

$$f_n(x) = \frac{x}{n},$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Note-se que, para todo o  $x \in [0, 1]$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n}.$$

O Teorema das Sucessões Enquadradas permite então concluir que, para todo o  $x \in [0, 1]$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

Então a sucessão de funções considerada converge pontualmente para a função nula em  $[0, 1]$ .

4. Consideremos a sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $[0, 1]$  por

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n},$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Temos, para todo o  $x \in [0, 1]$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq \frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

O Teorema das Sucessões Enquadradas permite então concluir que, para todo o  $x \in [0, 1]$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n} = 0.$$

Então a sucessão de funções considerada converge pontualmente para a função nula em  $[0, 1]$ .

5. Consideremos a sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $[0, \pi]$  tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} f_n : [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x) = \cos(nx) \end{aligned}$$

Para  $x = \pi$  temos, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f_n(\pi) = (-1)^n.$$

Consequentemente, não existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\pi)$$

e, portanto, a sucessão de funções considerada não converge pontualmente para nenhuma função em  $[0, \pi]$ .

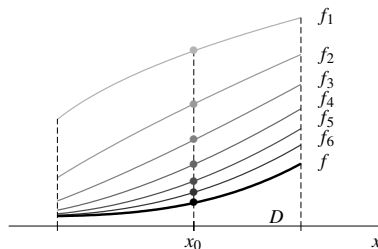
**Observação 4.4.** 1. Tendo em atenção a definição de limite de uma sucessão de números reais, temos que  $f$  é o limite pontual em  $D$  da sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $D$  se e só se, para todo o  $x \in D$ , e, para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p$ , então

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Consequentemente, se pretendermos provar que a função  $f$  não é o limite pontual em  $D$  da sucessão de funções  $(f_n)$  basta provar que existe  $x_0 \in D$  e existe  $\varepsilon > 0$  tais que, para todo o  $p \in \mathbb{N}$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq p$  e

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

2. Geometricamente, dizer que a sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $D \subset \mathbb{R}$  converge pontualmente para a função  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  em  $D$  significa que, para todo o  $x_0 \in D$ , a recta de equação  $x = x_0$  intersecta os gráficos das funções  $f_n$  numa sucessão de pontos,  $(f_n(x_0))$ , que converge para o ponto  $f(x_0)$ .



Suponhamos que  $(f_n)$  é uma sucessão de funções definidas num conjunto  $D \subset \mathbb{R}$  que converge pontualmente em  $D$  para a função  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ .

Desde já podemos colocar quatro questões que pretendem relacionar algumas propriedades das funções  $f_n$  com propriedades do mesmo tipo da função  $f$ .

**Q1:** Seja  $a \in \mathbb{R}$  um ponto de acumulação de  $D$ . Suponhamos que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$  existe e é finito.

Então, também existe e é finito o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ?

E, se esta condição se verificar, vale a igualdade

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)?$$

**Q2:** Se, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  é uma função contínua em  $x_0 \in D$ , a função  $f$  é também contínua em  $x_0$ ?

**Q3:** Se, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  é uma função diferenciável em  $x_0 \in D$ , a função  $f$  é também diferenciável em  $x_0$ ?

E, se esta condição se verificar, vale a igualdade

$$f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x_0)?$$

**Q4:** Suponha-se que se tem  $D = [a, b]$ , com  $a < b$ . Se, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  é uma função integrável em  $[a, b]$ , a função  $f$  é também integrável em  $[a, b]$ ?

E, se esta condição se verificar, vale a igualdade

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right)?$$

Os exemplos que apresentamos a seguir permitem concluir que, em cada caso, a Definição 4.2 não garante que a resposta à questão colocada seja afirmativa.

**Exemplo 4.5.** 1. Sejam  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $(a_n)$  uma sucessão de números reais convergente para  $a \in \mathbb{R}$  e  $g$  uma função definida em  $D$ . Consideremos a sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $D$  por  $f_n(x) = a_n g(x)$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Como vimos no Exemplo 4.3, esta sucessão de funções converge pontualmente em  $D$  para a função  $f$  definida em  $D$  por  $f(x) = ag(x)$ . Admitamos que a função  $g$  é contínua em  $x_0 \in D$ . Então, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  é contínua em  $x_0$  e a função  $f$  é também contínua em  $x_0$ .

Neste caso a sucessão de funções considerada verifica as propriedades referidas nas questões **Q1** e **Q2**.

2. Consideremos a sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $[0, 1]$  por  $f_n(x) = x^n$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . Como vimos no Exemplo 4.3 esta sucessão converge pontualmente em  $[0, 1]$  para a função  $f$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1[ \end{cases}$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  é uma função contínua em  $x_0 = 1$  e, no entanto, a função  $f$  não é contínua neste ponto.

Observe-se que, neste caso, as funções  $f_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , são diferenciáveis em  $x_0 = 1$  e, no entanto, a função  $f$  não é diferenciável neste ponto.

Com este exemplo podemos concluir que a convergência pontual não garante que a resposta às questões **Q1** e **Q2** e a uma das partes da questão **Q3** seja afirmativa.

3. A sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $[0, 1]$  por  $f_n(x) = \frac{x}{n}$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , converge pontualmente para a função nula em  $[0, 1]$  (ver Exemplo 4.3). Neste caso, tanto as funções  $f_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , como a função  $f$  são diferenciáveis em todo o ponto de  $[0, 1]$ .

Consideremos a sucessão  $(f'_n)$  de funções definidas em  $[0, 1]$ , onde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f'_n$  denota, como habitualmente, a derivada da função  $f_n$ . Temos, para todo o  $x \in [0, 1]$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f'_n(x) = \frac{1}{n}$  e, portanto, a sucessão das derivadas converge pontualmente para a função nula em  $[0, 1]$ .

Consequentemente, verifica-se a igualdade

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x),$$

para todo o  $x \in [0, 1]$ .

Neste exemplo apresenta-se uma sucessão de funções que verifica as propriedades referidas na questão **Q3**.

4. A sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $[0, 1]$  por  $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$  converge pontualmente para a função nula em  $[0, 1]$  (ver Exemplo 4.3). Neste caso, tanto as funções  $f_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , como a função  $f$  são diferenciáveis em todo o ponto de  $[0, 1]$ .

Consideremos a sucessão  $(f'_n)$  das derivadas das funções  $f_n$ . Temos, para todo o  $x \in [0, 1]$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f'_n(x) = x^{n-1}$  e, portanto, a sucessão das derivadas converge pontualmente em  $[0, 1]$  para a função  $F$  definida em  $[0, 1]$  por

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1[ \end{cases}$$

Temos então, neste caso,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(1) = F(1) = 1$  e  $f'(1) = 0$ , pelo que

$$f'(1) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(1).$$

Consequentemente, a igualdade

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x),$$

não se verifica em pelo menos um ponto do intervalo  $[0, 1]$ .

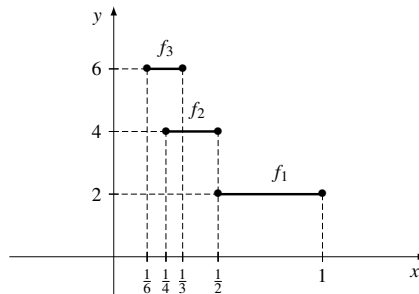
Este exemplo permite concluir que a questão **Q3** nem sempre tem resposta afirmativa.

5. Consideremos a sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $[0, 1]$  por

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Na figura seguinte está representado o gráfico das funções  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$ .



A sucessão de funções considerada converge pontualmente para a função nula em  $[0, 1]$ .

Neste caso tem-se que, tanto as funções  $f_n$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , como a função limite pontual são integráveis em  $[0, 1]$  tendo-se

$$\int_0^1 \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

No entanto, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} 2n dx \\ &= 2nx \Big|_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \\ &= 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_0^1 f_n(x) dx \right) = 1,$$

o que permite concluir que, neste caso,

$$\int_0^1 f(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_0^1 f_n(x) dx \right).$$

Com este exemplo pode concluir-se que a questão colocada em **Q4** nem sempre tem resposta afirmativa.

Os exemplos que apresentámos permitem concluir que a convergência pontual não garante que a resposta às questões colocadas seja sempre afirmativa. Para que estas questões tenham resposta afirmativa temos de introduzir uma outra noção de convergência de uma sucessão de funções que se designa **convergência uniforme**.

Como vimos, sendo  $(f_n)$  uma sucessão de funções definidas em  $D$  e  $f$  uma função definida em  $D$ , dizer que  $f_n \xrightarrow{p} f$  significa que, fixados  $\varepsilon > 0$  e  $x \in D$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p$ , então  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ . Note-se que nesta definição exigimos que  $p \in \mathbb{N}$  seja dependente de  $\varepsilon$  e de  $x$ . Na definição de convergência uniforme exigimos que  $p$  seja apenas dependente de  $\varepsilon$ .

**Definição 4.6.** Sejam  $D \subset \mathbb{R}$  um conjunto,  $(f_n)$  uma sucessão de funções definidas em  $D$  e  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função.

Dizemos que a sucessão  $(f_n)$  converge uniformemente para a função  $f$  em  $D$  e escrevemos

$$f_n \xrightarrow{u} f$$

se, para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p$ , então

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

para todo o  $x \in D$ .

**Observação 4.7.** Sejam  $(f_n)$  uma sucessão de funções definidas em  $D \subset \mathbb{R}$  e  $f$  uma função definida em  $D$ .

Resulta da Definição 4.6 que se  $f_n \xrightarrow{u} f$ , então  $f_n \xrightarrow{p} f$ .

Consequentemente, para averiguar se existe o limite uniforme de uma sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $D$ , basta determinar o limite pontual desta sucessão em  $D$  e verificar se a convergência é uniforme.

**Exemplo 4.8.** Consideremos a sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $[0, 1]$  por  $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . Já vimos que esta sucessão converge pontualmente para a função nula em  $[0, 1]$ .

Vamos averiguar se esta sucessão de funções também converge uniformemente para a função nula em  $[0, 1]$ .

Seja  $\varepsilon > 0$ , arbitrário.

Vamos provar que existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p$ , então

$$|f_n(x) - 0| < \varepsilon \iff \left| \frac{x^n}{n} \right| < \varepsilon,$$

para todo o  $x \in [0, 1]$ .

Observemos em primeiro lugar que, para todo o  $x \in [0, 1]$ , temos

$$\left| \frac{x^n}{n} \right| = \frac{|x|^n}{n} = \frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Tome-se  $p > \frac{1}{\varepsilon}$ . Então, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p$ , então

$$\begin{aligned} |f_n(x) - 0| &= \left| \frac{x^n}{n} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{p} < \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo o  $x \in [0, 1]$ .

Acabámos de provar que, para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p$ , então

$$|f_n(x) - 0| < \varepsilon,$$

para todo o  $x \in [0, 1]$ , o que prova que a sucessão de funções considerada converge uniformemente para a função nula em  $[0, 1]$ .

Resulta imediatamente da Definição 4.6 que uma sucessão  $(f_n)$  de funções definidas num conjunto  $D$  não converge uniformemente em  $D$  para uma função  $f$  definida em  $D$  se existe  $\varepsilon > 0$  tal que, para todo o  $p \in \mathbb{N}$ , existem  $n \in \mathbb{N}$  e  $x_0 \in D$  tais que  $n \geq p$  e  $|f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ .

**Exemplo 4.9.** 1. Consideremos a sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $[0, 1]$  por  $f_n(x) = x^n$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . Como vimos no Exemplo 4.3, esta sucessão converge pontualmente em  $[0, 1]$  para a

função  $f$  definida em  $[0, 1]$  por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1[ \end{cases}$$

Vamos ver que esta sucessão não converge uniformemente em  $[0, 1]$  para a função  $f$ .

Para tal basta provar que existe  $\varepsilon > 0$  tal que, para todo o  $p \in \mathbb{N}$ , existem  $n \in \mathbb{N}$  e  $x_0 \in [0, 1]$  tais que  $n \geq p$  e  $|f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ .

Tome-se  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ .

Observemos em primeiro lugar que, para todo o  $x \in [0, 1[$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = |x^n| = x^n.$$

Por outro lado, para todo o  $x \in [0, 1[$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|x^n| \geq \frac{1}{2} \iff \left( x \geq \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \wedge x \in [0, 1[ \right).$$

Consequentemente, sendo  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  e  $x_0 = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ , temos, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = |(x_0)^n| = \left( \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \right)^n = \frac{1}{2}.$$

Temos então que existe  $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$  tal que, para todo o  $p \in \mathbb{N}$ , existem  $n \in \mathbb{N}$ , ( $n = p$ ) e  $x_0 = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in [0, 1]$  tais que  $n \geq p$  e  $|f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ .

2. Consideremos a sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $\mathbb{R}$  por  $f_n(x) = \frac{x}{n}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Esta sucessão converge pontualmente em  $\mathbb{R}$  para a função nula. No entanto, como veremos a seguir, esta convergência em não é uniforme.

De facto, se tomarmos  $\varepsilon = 1$  e  $p \in \mathbb{N}$  temos, para  $x_0 = p \in \mathbb{R}$ , e  $n = p$

$$|f_n(x_0) - 0| = \left| \frac{x_0}{p} \right| = \left| \frac{p}{p} \right| = 1.$$

Acabámos de provar que existe  $\varepsilon = 1 > 0$  tal que, para todo o  $p \in \mathbb{N}$ , existem  $n \in \mathbb{N}$ , ( $n = p$ ), e  $x_0 = p \in \mathbb{R}$  tais que  $n \geq p$  e  $|f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ , o que garante que a sucessão de funções considerada não converge uniformemente em  $\mathbb{R}$  para a função nula.

A proposição que vamos apresentar a seguir estabelece uma condição necessária e suficiente para que uma sucessão de funções convirja uniformemente para uma função. Esta condição é, por alguns autores, apresentada como definição de convergência uniforme. Em muitas das demonstrações de resultados que envolvem convergência uniforme, esta condição é utilizada em alternativa à Definição 4.6.

**Proposição 4.10.** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}$  um conjunto,  $(f_n)$  uma sucessão de funções definidas em  $D$  e  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. As condições seguintes são equivalentes:*

i)  $f_n \xrightarrow{u} f$ ;

ii) para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p$ , então

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in D\} < \varepsilon.$$

**Demonstração:**  $i) \implies ii)$

Queremos provar que, para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p$ , então

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in D\} < \varepsilon.$$

Seja  $\varepsilon > 0$ , arbitrário.

Então  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ . Atendendo à Definição 4.6, existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p$ , então

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (4.1)$$

para todo o  $x \in D$ .

Atendendo a que a desigualdade (4.1) se verifica para todo o  $x \in D$  tem-se, por definição de supremo, que, para todo o  $n \geq p$ ,

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in D\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

como se pretendia.

$ii) \implies i)$

Seja  $\varepsilon > 0$ , arbitrário. Queremos provar que existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p$ , então

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

para todo o  $x \in D$ .

Atendendo à hipótese, existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p$ , então

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in D\} < \varepsilon.$$

Consequentemente temos, para todo o  $x \in D$ ,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

como se pretendia. ■

**Observação 4.11.** Sejam  $D \subset \mathbb{R}$  um conjunto e  $(f_n)$  uma sucessão de funções definidas em  $D$ . A condição ii) da Proposição 4.10 é equivalente a afirmar que a sucessão numérica  $(\sigma_n)$ , onde, para cada



$n \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in D\}$  é um infinitésimo. Consequentemente, resulta daquela proposição que as condições seguintes são equivalentes:

- a)  $f_n \xrightarrow{u} f$ ;
- b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in D\}) = 0$ .

**Exemplo 4.12.** Consideremos a sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $[1, 2]$  por  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Esta sucessão converge pontualmente em  $[1, 2]$  para a função nula.

Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in [1, 2]$ , arbitrários. Temos então

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} \right| = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

Uma vez que  $n^2x^2 + 1 \geq n^2x^2 > 0$ , temos  $\frac{1}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{n^2x^2}$  donde resulta, atendendo a que  $nx > 0$ ,  $\frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx}$ . Uma vez que  $x \in [1, 2]$  temos  $\frac{1}{x} \leq 1$  e, portanto,  $\frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n}$ .

Conclui-se então que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e, para todo o  $x \in [1, 2]$ ,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$$

donde resulta que

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [1, 2]\} \leq \frac{1}{n}.$$

Como  $n \in \mathbb{N}$  é arbitrário e  $\sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [1, 2]\} > 0$  temos, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [1, 2]\} \leq \frac{1}{n}. \quad (4.2)$$

Atendendo à dupla desigualdade (4.2) e ao Teorema das Sucessões Enquadradas, podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [1, 2]\}) = 0.$$

Pela Observação 4.11, temos que a sucessão de funções considerada converge uniformemente em  $[1, 2]$  para a função nula.

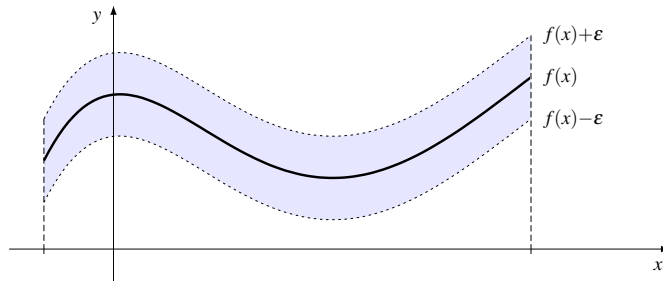
Vamos agora interpretar geometricamente a definição de convergência uniforme.

Seja  $(f_n)$  uma sucessão de funções definidas num intervalo  $[a, b]$ , com  $a < b$ . Admitamos que esta sucessão converge uniformemente em  $[a, b]$  para a função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Então, para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p$ , então  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ , para todo o  $x \in D$ .

Atendendo a que, para todo o  $x \in [a, b]$ ,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

temos que se  $f_n \xrightarrow{u} f$ , então, para todo o  $\varepsilon > 0$  e, para valores de  $n$  suficientemente grandes, os gráficos das funções  $f_n$  estão contidos na faixa do plano limitada pelos gráficos das funções definidas, respectivamente, por  $y = f(x) + \varepsilon$  e  $y = f(x) - \varepsilon$ .



O teorema que apresentamos a seguir, habitualmente designado **Crítério de Cauchy para a Convergência Uniforme**, estabelece uma condição necessária e suficiente para que uma sucessão de funções seja uniformemente convergente, independentemente de se conhecer o limite uniforme da sucessão.

**Teorema 4.13.** *Seja  $(f_n)$  uma sucessão de funções definidas em  $D \subset \mathbb{R}$ . Então a sucessão  $(f_n)$  é uniformemente convergente em  $D$  se e só se, para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todos os  $m, n \in \mathbb{N}$ , se  $m \geq p$  e  $n \geq p$ , então*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

para todo o  $x \in D$ .

**Demonstração:** " $\implies$ "

Admitamos que a sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $D$  é uniformemente convergente em  $D$ . Então, existe uma função  $f$  definida em  $D$  que é o limite uniforme da sucessão considerada.

Seja  $\varepsilon > 0$ , arbitrário.

Observe-se em primeiro lugar que, para todos os  $m, n \in \mathbb{N}$  e, para todo o  $x \in D$ , temos, pelas propriedades da função módulo,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \\ &= |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

Se provarmos que cada uma das parcelas de  $|f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)|$  é inferior a  $\frac{\varepsilon}{2}$  garantimos que  $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ .

Como  $\varepsilon > 0$  temos  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$  e, atendendo à Definição 4.6, existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $k \in \mathbb{N}$ , se  $k \geq p$ , então

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (4.3)$$

para todo o  $x \in D$ .

Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$  tais que  $m \geq p$  e  $n \geq p$ . Utilizando as propriedades da função módulo e a desigualdade

(4.3), temos, para todo o  $x \in D$ ,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Provámos então que, para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todos os  $m, n \in \mathbb{N}$ , se  $m \geq p$  e  $n \geq p$ , então  $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ , para todo o  $x \in D$ , como pretendíamos.

”  $\Leftarrow$  ”

Admitamos que a sucessão  $(f_n)$  satisfaz a condição

para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todos os  $m, n \in \mathbb{N}$ , se  $m \geq p$  e  $n \geq p$ , então  $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ , para todo o  $x \in D$ .

Seja  $x \in D$ , arbitrário. Então a sucessão  $(f_n(x))$  é uma sucessão de Cauchy <sup>1</sup> de números reais, logo convergente. Consequentemente, existe  $\alpha_x \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \alpha_x.$$

Consideremos a função

$$\begin{aligned} f: D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \alpha_x \end{aligned}$$

Vamos provar que  $f$  é o limite uniforme em  $D$  da sucessão de funções considerada.

Seja  $\varepsilon > 0$ , arbitrário. A hipótese garante que existe  $p \in \mathbb{N}$ , tal que, para todos os  $m, n \in \mathbb{N}$ , se  $m \geq p$  e  $n \geq p$ , então

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad (4.4)$$

para todo o  $x \in D$ .

Na desigualdade (4.4) fixemos  $n$  e  $x$  e façamos  $m$  tender para  $+\infty$ . Temos então

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (|f_n(x) - f_m(x)|) < \varepsilon. \quad (4.5)$$

Atendendo à continuidade da função módulo, temos

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (|f_n(x) - f_m(x)|) = |f_n(x) - f(x)|$$

e, portanto, da desigualdade (4.5), resulta

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Provámos que, para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p$ , então  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ , para todo o  $x \in D$ , o que garante que  $f_n \xrightarrow{u} f$ . ■

<sup>1</sup>Seja  $(a_n)$  uma sucessão de números reais. Dizemos que  $(a_n)$  é uma *sucessão de Cauchy* se, para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todos os  $m, n \in \mathbb{N}$ , se  $m \geq p$  e  $n \geq p$ , então  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ .

Temos o seguinte resultado:

**Teorema:** Seja  $(a_n)$  uma sucessão de números reais. Então  $(a_n)$  é convergente se e só se é uma sucessão de Cauchy.

Temos a seguinte definição:

**Definição 4.14.** Dizemos que a sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $D \subset \mathbb{R}$  é uma *sucessão uniformemente de Cauchy em  $D$*  se, para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todos os  $m, n \in \mathbb{N}$ , se  $m \geq p$  e  $n \geq p$ , então

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

para todo o  $x \in D$ .

Tendo em atenção a Definição 4.14, o Teorema 4.13 estabelece que uma sucessão de funções definidas em  $D$  é uniformemente convergente em  $D$  se e só se é uma sucessão uniformemente de Cauchy em  $D$ .

**Exercícios 4.1** 1. Considere a sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $\mathbb{R}_0^+$  por

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx},$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . Mostre que a sucessão considerada converge uniformemente para a função nula em  $\mathbb{R}_0^+$ .

2. Sejam  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $g$  uma função definida em  $D$ ,  $(a_n)$  uma sucessão de números reais e  $(f_n)$  uma sucessão de funções definidas em  $D$  por

$$f_n(x) = a_n g(x),$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

- Mostre que, se existem  $a \in \mathbb{R}$  e  $p \in \mathbb{N}$  tais que  $a_n = a$ , para todo o  $n \geq p$ , então a sucessão  $(f_n)$  converge uniformemente em  $D$  para a função  $f$  definida em  $D$  por  $f(x) = a g(x)$ .
- Mostre que se a sucessão  $(a_n)$  converge para  $a \in \mathbb{R}$  e a função  $g$  é limitada em  $D$ , então a sucessão  $(f_n)$  converge uniformemente em  $D$  para a função  $f$  definida em  $D$  por  $f(x) = a g(x)$ .

3. Considere a sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $[0, 1]$  por

$$f_n(x) = x^n(1 - x^n),$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . Mostre que a sucessão considerada converge pontualmente para a função nula em  $[0, 1]$  mas que esta convergência não é uniforme.

## 4.2 Séries de Funções

A definição de série de funções que vamos apresentar é análoga à definição de série numérica que apresentámos no capítulo anterior.

**Definição 4.15.** Seja  $(f_n)$  uma sucessão de funções definidas em  $D \subset \mathbb{R}$ . Chama-se *série de funções de termo geral*  $f_n$  e representa-se por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

ao par  $((f_n), (s_n))$  de sucessões de funções definidas em  $D$ , onde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n = \sum_{k=1}^n f_k.$$

À sucessão  $(s_n)$  chama-se *sucessão das somas parciais* da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ .

Se existe o limite pontual ou uniforme da sucessão das somas parciais dizemos que a série é *convergente*. À função  $f$  limite da sucessão das somas parciais chamamos *função soma* da série e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = f.$$

Note-se que, à semelhança do que foi estabelecido para uma série numérica, pode provar-se sem dificuldade que a convergência de uma série de funções não depende dos  $p - 1$  primeiros termos da série.

Atendendo à Definição 4.15 e ao que foi estabelecido na secção anterior, podemos também, para as séries de funções, definir dois tipos de convergência, a convergência pontual e a convergência uniforme, que estudaremos na secção seguinte.

**Observação 4.16.** Seja  $(f_n)$  uma sucessão de funções definidas em  $D \subset \mathbb{R}$ . A série de termo geral  $f_n$  pode também ser representada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Neste caso, sendo  $f$  a função soma da série podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x).$$

**Exemplo 4.17.** 1. A série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^4}$  é uma série de funções definidas em  $\mathbb{R}$  cujo termo geral é a

$$\text{função } f_n \text{ definida em } \mathbb{R} \text{ por } f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^4}.$$

2. Sendo  $(a_n)$  uma sucessão de números reais, consideremos a sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $\mathbb{R}$  por  $f_n(x) = a_n x^n$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . A série de funções de termo geral  $f_n$  pode ser representada por  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ .

**Convergência de Séries de Funções** Como já foi dito, podemos, para as séries de funções, definir convergência pontual e convergência uniforme. Tal como no caso das sucessões de funções, podem também colocar-se algumas questões que pretendem relacionar o comportamento dos termos de uma série de funções com o comportamento da função soma da série.

De facto, sendo  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  uma série de funções definidas em  $D$  e  $f: I \subset D \rightarrow \mathbb{R}$  a função soma da série, podemos colocar as questões seguintes:

**Q1:** Seja  $a \in \mathbb{R}$  um ponto de acumulação de  $D$ . Suponhamos que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$  existe e é finito.

Então também existe e é finito o  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ?

E, se esta condição se verificar, vale a igualdade

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) ?$$

**Q2:** Se, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  é uma função contínua em  $x_0 \in I$ , a função  $f$  é também contínua em  $x_0$ ?

**Q3:** Se, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  é uma função diferenciável em  $x_0 \in I$ , a função  $f$  é também diferenciável em  $x_0$ ?

E, se esta condição se verificar, vale a igualdade

$$f'(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x_0) ?$$

**Q4:** Suponha-se que  $I = [a, b]$ , com  $a < b$ . Se, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  é uma função integrável em  $[a, b]$ , a função  $f$  é também integrável em  $[a, b]$ ?

E, se esta condição se verificar, vale a igualdade

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right) ?$$

Como veremos na secção seguinte, a definição de convergência uniforme é a que permite responder a algumas das questões colocadas.

**Definição 4.18.** Seja  $(f_n)$  uma sucessão de funções definidas em  $D \subset \mathbb{R}$ . Dizemos que a série de termo geral  $f_n$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ ,

- *converge pontualmente* em  $D$  se a sucessão das suas somas parciais converge pontualmente em  $D$ ;
- *converge uniformemente* em  $D$  se a sucessão das suas somas parciais converge uniformemente em  $D$ .

**Observação 4.19.** Sejam  $(f_n)$  uma sucessão de funções definidas em  $D \subset \mathbb{R}$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  a série de funções de termo geral  $f_n$ .

Admitamos que esta série converge pontualmente em  $D$  para a função  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ .

Atendendo à Definição 4.18, tem-se que a sucessão de funções  $(s_n)$  converge pontualmente em  $D$  para a função  $f$ , o que significa que, para todo o  $x_0 \in D$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x_0) = f(x_0)$$

e, portanto a série numérica,  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$  é convergente e tem soma  $f(x_0)$ .

Reciprocamente, se, para todo o  $x_0 \in D$ , a série numérica  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$  é convergente e tem soma  $s_{x_0}$ , temos que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  de funções definidas em  $D$  converge pontualmente em  $D$  para a função  $f$  definida por

$$\begin{aligned} f: D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = s_x. \end{aligned}$$

Consequentemente, a convergência pontual em  $D$  é equivalente à convergência de todas as séries numéricas que se obtêm para cada concretização de  $x \in D$ .

**Exemplo 4.20.** Consideremos a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$  de funções definidas em  $\mathbb{R}$ , onde se convencionou que é igual a 1 o primeiro termo da série que se obtém tomando  $x = 0$ .

Tomando  $x = 0$  obtém-se a série que, à excepção do primeiro termo que é igual a 1, tem todos os termos nulos. Esta série é convergente e tem soma  $s_0 = 1$ .

Para cada concretização de  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , obtém-se uma série geométrica de razão  $x$ . Como vimos, se  $|x| < 1$ , a série geométrica obtida é convergente e tem soma  $s_x = \frac{1}{1-x}$  e, se  $|x| \geq 1$ , a série geométrica obtida é divergente.

Consequentemente, a série de funções considerada converge pontualmente no intervalo  $] -1, 1[$  para a função  $f$  definida por

$$\begin{aligned} f: ] -1, 1[ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Podemos então escrever, no intervalo  $] -1, 1[$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

O exemplo que acabámos de apresentar justifica a definição seguinte:

**Definição 4.21.** Sejam  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $(f_n)$  uma sucessão de funções definidas em  $D$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  a série de funções de termo geral  $f_n$ . Chama-se *domínio de convergência* da série de termo geral  $f_n$  ao conjunto de pontos

$x \in D$  para os quais a série numérica  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  é convergente.

**Exemplo 4.22.** 1. Consideremos a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx}$  de funções definidas em  $\mathbb{R}$ .

Uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n e^{-nx}) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

concluimos, pela condição necessária de convergência de uma série numérica, que, para todo o  $x \in \mathbb{R}_0^-$ , a série numérica obtida é uma série divergente.

Seja  $x > 0$ . Com vista à aplicação do Critério de Cauchy, consideremos o limite

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n e^{-nx}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} e^{-x} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-x} \sqrt[n]{n}) \\ &= e^{-x}. \end{aligned}$$

Utilizando o Critério de Cauchy temos que a série considerada é absolutamente convergente, logo convergente, para todo o  $x \in \mathbb{R}^+$  que verifica a condição  $|e^{-x}| < 1$ . Uma vez que

$$|e^{-x}| < 1 \iff e^x > 1 \iff x > 0$$

temos que a série considerada é absolutamente convergente, logo convergente, em  $\mathbb{R}^+$ .

Do que foi dito, podemos concluir que o domínio de convergência da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx}$  é o conjunto  $\mathbb{R}^+$ .

2. Consideremos a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$  de funções definidas em  $\mathbb{R}$ .

Para todo o  $x \in \mathbb{R}$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$0 \leq \left| 2^n \sin \frac{x}{3^n} \right| \leq \left| 2^n \frac{x}{3^n} \right| = |x| \left( \frac{2}{3} \right)^n.$$

Atendendo a que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2}{3} \right)^n$  é uma série geométrica de razão  $r = \frac{2}{3}$ , logo convergente, as propriedades das séries numéricas garantem que, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ , a série numérica  $\sum_{n=1}^{+\infty} |x| \left( \frac{2}{3} \right)^n$  é uma série convergente.

Seja  $x \in \mathbb{R}$ , arbitrário.

Uma vez que se tem, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq \left| 2^n \sin \frac{x}{3^n} \right| \leq |x| \left( \frac{2}{3} \right)^n$$



e a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} |x| \left(\frac{2}{3}\right)^n$  é convergente podemos concluir, pelo Critério de Comparação, que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| 2^n \operatorname{sen} \frac{x}{3^n} \right|$$

é convergente. Consequentemente, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \operatorname{sen} \frac{x}{3^n}$  é absolutamente convergente, logo convergente.

Podemos então concluir que a série considerada tem domínio de convergência  $\mathbb{R}$ .

3. Consideremos a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^n(x-5)}{n}$  de funções definidas em  $]5, +\infty[$ .

Se  $x = 6$  obtém-se a série nula que é (absolutamente) convergente.

Para todo o  $x \in ]5, +\infty[ \setminus \{6\}$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , temos  $\frac{\ln^n(x-5)}{n} \neq 0$ . Com vista à aplicação do Critério de D'Alembert consideremos o limite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{\ln^{n+1}(x-5)}{n+1} \right|}{\left| \frac{\ln^n(x-5)}{n} \right|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\ln(x-5)|n}{n+1} \\ &= |\ln(x-5)|. \end{aligned}$$

Utilizando o Critério de D'Alembert temos que:

- se  $|\ln(x-5)| < 1$  e  $x \in ]5, +\infty[ \setminus \{6\}$ , então a série é absolutamente convergente, logo convergente;
- se  $|\ln(x-5)| > 1$  e  $x \in ]5, +\infty[ \setminus \{6\}$ , então a série é divergente.

Uma vez que

$$\begin{aligned} (|\ln(x-5)| < 1 \wedge x \in ]5, +\infty[ \setminus \{6\}) &\iff (-1 < \ln(x-5) < 1 \wedge x \in ]5, +\infty[ \setminus \{6\}) \\ &\iff \left( x \in \left] 5 + \frac{1}{e}, 5 + e \right[ \setminus \{6\} \right) \end{aligned}$$

e

$$(|\ln(x-5)| < 1 \wedge x \in ]5, +\infty[ \setminus \{6\}) \iff \left( x \in \left] 5, 5 + \frac{1}{e} \right[ \cup ]5 + e, +\infty[ \right)$$

podemos desde já concluir que a série considerada converge absolutamente em  $\left] 5 + \frac{1}{e}, 5 + e \right[$  e diverge em  $\left] 5, 5 + \frac{1}{e} \right[ \cup ]5 + e, +\infty[$ .

Falta estudar a natureza das séries numéricas que se obtêm tomando  $x = 5 + \frac{1}{e}$  e  $x = 5 + e$ .

Se  $x = 5 + \frac{1}{e}$ , obtemos a série numérica  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  que, como vimos anteriormente, é uma série convergente.

Se  $x = 5 + e$ , obtemos a série numérica  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  que, como vimos anteriormente, é uma série divergente.

Do que foi dito pode então concluir-se que o domínio de convergência da série dada é o intervalo  $\left[5 + \frac{1}{e}, 5 + e\right]$ .

A proposição que apresentamos a seguir e que é habitualmente designada **Crítério de Weierstrass**, estabelece uma condição suficiente para a convergência uniforme de uma série de funções.

**Teorema 4.23.** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}$  e  $(f_n)$  uma sucessão de funções definidas em  $D$ . Suponhamos que:*

i) *existe uma sucessão  $(a_n)$  de números reais não negativos tal que a série numérica  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente;*

ii) *para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e, para todo o  $x \in D$ ,  $|f_n(x)| \leq a_n$ .*

*Então a série de funções  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  converge uniformemente em  $D$ .*

**Demonstração:** Para demonstrar que a série de funções considerada converge uniformemente em  $D$  temos de demonstrar que a sucessão  $(s_n)$  das somas parciais da série é uniformemente convergente em  $D$ . Vamos verificar que esta sucessão está nas condições do Critério de Cauchy para a Convergência Uniforme, ou seja, para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todos os  $m, n \in \mathbb{N}$ , se  $m \geq p$  e  $n \geq p$ , então

$$|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon,$$

para todo o  $x \in D$ .

Comecemos por observar em primeiro lugar que, sendo  $x \in D$  e  $m, n \in \mathbb{N}$ , arbitrários, e admitindo, sem perda de generalidade, que  $m \geq n$ , temos, atendendo às propriedades da função módulo,

$$\begin{aligned} |s_n(x) - s_m(x)| &= \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) - \sum_{k=1}^m f_k(x) \right| \\ &= |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_m(x)| \\ &\leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_m(x)|. \end{aligned}$$

Atendendo à condição ii) da hipótese, a desigualdade anterior é equivalente a

$$|s_n(x) - s_m(x)| \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m. \quad (4.6)$$

Seja então  $\varepsilon > 0$ , arbitrário.

Vamos provar que existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todos os  $m, n \in \mathbb{N}$ , se  $m \geq p$  e  $n \geq p$ , então

$$|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon,$$

para todo o  $x \in D$ .

Como, por hipótese, a série numérica  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente, temos que a sucessão das suas somas parciais é também convergente e, portanto, é uma sucessão de Cauchy. Consequentemente, fixado  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todos os  $m, n \in \mathbb{N}$ , se  $m \geq p$  e  $n \geq p$ , então

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^m a_k \right| < \varepsilon.$$

Vamos supor, sem perda de generalidade, que se tem  $m \geq n$ . Temos então de provar que

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon. \quad (4.7)$$

Como, por hipótese, a sucessão  $(a_n)$  é uma sucessão de números reais não negativos, a desigualdade (4.7) é equivalente a

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m < \varepsilon. \quad (4.8)$$

Resulta de (4.6) e de (4.8) que, para todos os  $m, n \in \mathbb{N}$ , se  $m \geq p$  e  $n \geq p$ , então

$$|s_n(x) - s_m(x)| \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m < \varepsilon,$$

para todo o  $x \in D$ , como pretendíamos. ■

**Exemplo 4.24.** 1. Consideremos a série de funções definidas em  $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

Vamos averiguar se esta série de funções satisfaz as condições do Critério de Weierstrass.

Para todo o  $x \in \mathbb{R}$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

A sucessão  $\left(\frac{1}{n^2}\right)$  é uma sucessão de números reais não negativos tal que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  é convergente.

Então, pelo Critério de Weierstrass, a série de funções considerada é uniformemente convergente em  $\mathbb{R}$ .

2. Consideremos a série de funções

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{xn^4}.$$

Uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e, para todo o  $x \in [1, +\infty[$ ,

$$\left| \frac{1}{xn^4} \right| = \frac{1}{xn^4} \leq \frac{1}{n^4}$$

e a sucessão  $\left(\frac{1}{n^4}\right)$  é uma sucessão de números reais não negativos tal que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$  é convergente, o Critério de Weierstrass permite concluir que a série de funções considerada é uniformemente convergente em  $[1, +\infty[$ .

**Observação 4.25.** O Critério de Weierstrass é uma condição suficiente mas não necessária para a convergência uniforme de uma série de funções, isto é, existem séries de funções que são uniformemente convergentes num conjunto  $D \subset \mathbb{R}$ , mas não satisfazem alguma das condições do Critério de Weierstrass.

**Exemplo 4.26.** Consideremos a sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $[1, +\infty[$  por

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \in [n, n+1[ \\ 0 & \text{se } x \in [1, +\infty[ \setminus [n, n+1[ \end{cases}$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Consideremos a função  $f$  definida em  $[1, +\infty[$  por

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Utilizando a Definição 4.15, vamos provar que a série de funções de termo geral  $f_n$  converge uniformemente para a função  $f$  em  $[1, +\infty[$ .

Seja  $\varepsilon > 0$ , arbitrário.

Seja  $(s_n)$  a sucessão das somas parciais da série considerada. Observe-se que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e, para todo o  $x \in [1, +\infty[$ , temos

$$f(x) - s_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \in ]n+1, +\infty[ \\ 0 & \text{se } x \in [1, n+1] \end{cases}$$

donde resulta que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e, para todo o  $x \in [1, +\infty[$ ,

$$0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{n}.$$

Consequentemente, sendo  $p > \frac{1}{\varepsilon}$ , temos que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p$ , então

$$0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{p} < \varepsilon,$$

para todo o  $x \in [1, +\infty[$ .

Está então provado que, para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p$ , então

$$|s_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

para todo o  $x \in [1, +\infty[$ , como pretendíamos.

No entanto, esta série de funções não satisfaz o Critério de Weierstrass.

Admitamos que existe uma sucessão  $(a_n)$  de números reais não negativos tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad (4.9)$$

para todo o  $x \in [1, +\infty[$ .

Temos então, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 < \frac{1}{n} \leq a_n.$$

Utilizando o Critério de Comparação, concluímos que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente.

Podemos então concluir que não existe nenhuma sucessão  $(a_n)$  de números reais não negativos tal que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  seja convergente e a desigualdade (4.9) seja verificada, para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e, para todo o  $x \in [1, +\infty[$ , o que significa que a série de funções considerada não satisfaz o Critério de Weierstrass em  $[1, +\infty[$ .

**Exercícios 4.2** 1. Em cada uma das alíneas que se seguem, determine o domínio de convergência da série de funções considerada:

- (a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^{-x}$
- (b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n}}$
- (c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^n x}{n^n}$
- (d)  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^x$
- (e)  $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$
- (f)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{e^{nx}}$
- (g)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \left( \frac{x}{2x+1} \right)^n$
- (h)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{x(x+n)}{n} \right)^n$

2. Em cada uma das alíneas que se seguem, utilize o Critério de Weierstrass para mostrar que a série considerada é uniformemente convergente no intervalo indicado.

- (a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$  em  $[0, 1]$
- (b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$  em  $[0, 2\pi]$
- (c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 4 + x^4}$  em  $\mathbb{R}$

- (d)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$  em  $] -2, +\infty[$   
 (e)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(x+2)^n}$  em  $[0, +\infty[$

### 4.3 Propriedades da Convergência Uniforme

Nesta secção vamos estabelecer resultados que permitem responder a algumas das questões anteriormente colocadas e que pretendem relacionar o comportamento dos termos de uma sucessão [resp. série] de funções com o comportamento da função limite [resp. soma].

**Teorema 4.27.** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}$  um conjunto,  $a$  um ponto de acumulação de  $D$ , e  $(f_n)$  uma sucessão de funções definidas em  $D$ .*

*Se a sucessão  $(f_n)$  converge uniformemente para a função  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  e, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$  existe e é finito, então verificam-se as condições seguintes:*

- i) o limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$  existe e é finito;  
 ii) vale a igualdade

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right).$$

**Demonstração:** i) Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $L_n = \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ .

Temos de demonstrar que a sucessão  $(L_n)$  é convergente. Para tal, basta provar que se trata de uma sucessão de Cauchy, ou seja, que, para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todos os  $m, n \in \mathbb{N}$ , se  $m \geq p$  e  $n \geq p$ , então

$$|L_n - L_m| < \varepsilon.$$

Observemos em primeiro lugar que, para todo o  $x \in D$ , e, para todos os  $m, n \in \mathbb{N}$ , temos

$$|L_n - L_m| = |L_n - f_n(x) + f_n(x) - f_m(x) + f_m(x) - L_m|$$

donde resulta, pelas propriedades da função módulo,

$$|L_n - L_m| \leq |L_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - L_m|. \quad (4.10)$$

Se provarmos que cada uma das parcelas de  $|L_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - L_m|$  é inferior a  $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ , concluímos, atendendo à desigualdade (4.10), que  $|L_n - L_m| < \varepsilon$ .

Seja  $\varepsilon > 0$ , arbitrário. Então  $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ .

A hipótese garante que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o limite  $L_n = \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$  existe e é finito. Consequentemente temos, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , que fixado  $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para todo o  $x \in D$ , se  $0 < |x - a| < \delta$ , então

$$|L_n - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.11)$$

Por outro lado como, por hipótese, a sucessão  $(f_n)$  é uniformemente convergente temos, pelo Teorema 4.13, que ela é uniformemente de Cauchy. Consequentemente, fixado  $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todos os  $m, n \in \mathbb{N}$ , se  $m \geq p$  e  $n \geq p$ , então

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (4.12)$$

para todo o  $x \in D$ .

Atendendo a (4.11) temos que, para todos os  $m, n \in \mathbb{N}$  tais que  $n \geq p$  e  $m \geq p$  é possível determinar  $x_0 \in D$  tal que

$$|L_n - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.13)$$

e

$$|L_m - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.14)$$

Para o valor de  $x_0 \in D$  que verifica as desigualdades (4.13) e (4.14) temos, atendendo a (4.12),

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.15)$$

Consequentemente, para todos os  $n, m \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p$  e  $m \geq p$  temos

$$\begin{aligned} |L_n - L_m| &\leq |L_n - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - L_m| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{por (4.13), (4.14) e (4.15)} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Provámos então que, para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todos os  $m, n \in \mathbb{N}$ , se  $m \geq p$  e  $n \geq p$ , então  $|L_n - L_m| < \varepsilon$ , como pretendíamos.

ii) Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $L_n = \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ . Queremos provar que

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Temos então de provar que, para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para todo o  $x \in D$ , se

$$0 < |x - a| < \delta,$$

então

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Observemos em primeiro lugar que, para todo o  $x \in D$ , temos, pelas propriedades da função módulo,

$$|f(x) - L| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - L_n + L_n - L| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L_n| + |L_n - L|,$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Se provarmos que cada uma das parcelas de  $|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L_n| + |L_n - L|$  é inferior a  $\frac{\varepsilon}{3} > 0$  e utilizarmos a desigualdade  $|f(x) - L| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L_n| + |L_n - L|$  obtemos a desigualdade pretendida.

Seja  $\varepsilon > 0$ , arbitrário. Então  $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ .

Como, por hipótese, a sucessão  $(f_n)$  converge uniformemente para  $f$  em  $D$  temos que existe  $p_1 \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p_1$ , então

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (4.16)$$

para todo o  $x \in D$ .

Atendendo a que  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n$  temos que, fixado  $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ , existe  $p_2 \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p_2$ , então

$$|L_n - L| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.17)$$

Por outro lado, sendo  $n \in \mathbb{N}$ , uma vez que  $L_n = \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ , temos que, fixado  $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para todo o  $x \in D$ , se  $0 < |x - a| < \delta$ , então

$$|f_n(x) - L_n| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.18)$$

Seja  $p = \max\{p_1, p_2\}$ . Para todo o  $n \geq p$  e, para todo o  $x \in D$  tal que  $0 < |x - a| < \delta$  temos, atendendo às propriedades dos módulos e às desigualdades (4.16), (4.17) e (4.18),

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L_n| + |L_n - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Está então provado que, para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para todo o  $x \in D$ , se

$$0 < |x - a| < \delta,$$

então

$$|f(x) - L| < \varepsilon,$$

como pretendíamos. ■

Desta propriedade dos limites de uma sucessão (de funções) uniformemente convergente resulta uma propriedade análoga para uma série (de funções) uniformemente convergente.

**Corolário 4.28.** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}$  um conjunto,  $a$  um ponto de acumulação de  $D$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  uma série de funções definidas em  $D$ .*



Se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  converge uniformemente em  $D$  para a função  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  e, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$  existe e é finito, então verificam-se as condições seguintes:

- i) a série numérica  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$  é convergente;
- ii) vale a igualdade

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right).$$

**Demonstração:** A hipótese garante que:

- a sucessão  $(s_n) = \left( \sum_{k=1}^n f_k \right)$  das somas parciais da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  converge uniformemente em  $D$  para a função  $f$ ;
- para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o limite  $\lim_{x \rightarrow a} s_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \sum_{k=1}^n f_k(x) \right)$  existe e é finito, ou seja, pelas propriedades dos limites de funções, o limite  $\lim_{x \rightarrow a} s_n(x) = \sum_{k=1}^n \left( \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) \right)$  existe e é finito.

Utilizando o Teorema 4.27, podemos garantir que se verificam as condições seguintes:

- (a) o limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} s_n(x) \right)$  existe e é finito;
- (b) vale a igualdade  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} s_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) \right)$ .

Atendendo a que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} s_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n \left( \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) \right) \right)$$

a condição (a) garante que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$$

é convergente, o que prova i).

Por outro lado, a igualdade

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} s_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) \right)$$

é equivalente à igualdade

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n \left( \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) \right) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) \right)$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right),$$

o que prova *ii*). ■

**Observação 4.29.** O Corolário 4.28 estabelece que, em caso de convergência uniforme, podemos estender às séries a propriedade dos limites que estabelece que o limite da soma é igual à soma dos limites.

O teorema que apresentamos a seguir estabelece que o limite uniforme de uma sucessão de funções contínuas num ponto é uma função contínua nesse ponto.

**Teorema 4.30.** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}$  um conjunto e  $(f_n)$  uma sucessão de funções definidas em  $D$ .*

*Se a sucessão  $(f_n)$  converge uniformemente em  $D$  para a função  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  e, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  é contínua em  $x_0 \in D$ , então a função  $f$  é também contínua em  $x_0$ .*

**Demonstração:** Por hipótese temos que a sucessão  $(f_n)$  converge uniformemente em  $D$  para a função  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  e, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  é contínua em  $x_0$  o que garante que, para cada  $n \in \mathbb{N}$  o limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$  existe e é finito.

Estamos nas condições do Teorema 4.27 que garante que vale a igualdade

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right).$$

Atendendo a que, por hipótese, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  é contínua em  $x_0$ , ou seja,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$  e a sucessão  $(f_n(x_0))$  converge para  $f(x_0)$ , temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x_0)) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

Está então provado que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  e, portanto a função  $f$  é contínua em  $x_0$ , como pretendíamos. ■

Utilizando o Teorema 4.30 podemos estabelecer que a função soma de uma série uniformemente convergente de funções contínuas num ponto é também uma função contínua nesse ponto.

**Corolário 4.31.** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}$  um conjunto e  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  uma série de funções definidas em  $D$ .*

*Se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  converge uniformemente em  $D$  para a função  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  e, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  é contínua em  $x_0 \in D$ , então a função  $f$  é também contínua em  $x_0$ .*

**Demonstração:** Seja  $(s_n)$  a sucessão das somas parciais da série considerada. A hipótese garante que a sucessão  $(s_n)$  converge uniformemente em  $D$  para a função  $f$  e que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$  é contínua em  $x_0$ .

Estamos nas condições do Teorema 4.30 que garante que a função  $f$  é também contínua em  $x_0$ , como pretendíamos. ■

**Observação 4.32.** 1. Resulta imediatamente do Teorema 4.30, que o limite uniforme em  $D$  de uma sucessão de funções contínuas em  $D$  é uma função contínua em  $D$ .

2. Analogamente, tem-se, pelo Corolário 4.31, que a função soma de uma série de funções contínuas em  $D$ , uniformemente convergente em  $D$ , é uma função contínua em  $D$ .

3. O Teorema 4.30 pode ser utilizado para justificar, em alguns casos, que a convergência pontual de uma sucessão de funções não é uniforme.

De facto, admitamos que a sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $D$  converge pontualmente para a função  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Admitamos que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  é contínua em  $x_0 \in D$  e que a função  $f$  não é contínua em  $x_0$ . Pelo Teorema 4.30, conclui-se então que a sucessão  $(f_n)$  não converge uniformemente para  $f$ .

4. Analogamente, podemos utilizar o Corolário 4.31 para justificar que a convergência pontual de uma série de funções não é uniforme.

**Exemplo 4.33.** 1. Consideremos a sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $\mathbb{R}_0^+$  por  $f_n(x) = e^{-nx}$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nx} = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \in ]0, +\infty[ \end{cases}$$

e, portanto, a sucessão  $(f_n)$  converge pontualmente em  $\mathbb{R}_0^+$  para a função  $f$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \in ]0, +\infty[ \end{cases}$$

Uma vez que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  é contínua em  $x = 0$  e a função  $f$  não é contínua neste ponto, concluímos que  $f$  não é limite uniforme de  $(f_n)$  em  $\mathbb{R}_0^+$ .

2. Consideremos a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{x^4 + n^4}$  de funções definidas em  $\mathbb{R}$ .

Para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e para todo o  $x \in \mathbb{R}$ , temos

$$\left| \frac{\sin(nx)}{x^4 + n^4} \right| \leq \frac{1}{x^4 + n^4} \leq \frac{1}{n^4}.$$

Como a sucessão  $\left(\frac{1}{n^4}\right)$  é uma sucessão de termos não negativos tal que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$  é convergente, o Critério de Weierstrass garante que a série de funções considerada é uniformemente convergente em  $\mathbb{R}$ .

Uma vez que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  definida por  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x^4 + n^4}$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , o Corolário 4.31 garante que a função  $f$  definida por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{x^4 + n^4}$$

é contínua em  $\mathbb{R}$ .

O Teorema 4.30 estabelece que o limite uniforme em  $[a, b]$  de uma sucessão de funções contínuas em  $[a, b]$  é uma função contínua em  $[a, b]$ . O teorema que apresentamos a seguir estabelece que uma sucessão uniformemente convergente de funções contínuas em  $[a, b]$  é integrável em  $[a, b]$  e dá-nos uma fórmula que permite calcular o integral da função limite em  $[a, b]$ . Como consequência deste teorema demonstra-se que uma série uniformemente convergente de funções contínuas em  $[a, b]$  é integrável termo a termo em  $[a, b]$ .

**Teorema 4.34.** *Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $a < b$  e  $(f_n)$  uma sucessão de funções contínuas em  $[a, b]$ .*

*Se a sucessão  $(f_n)$  converge uniformemente em  $[a, b]$  para a função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , então a função  $f$  é integrável em  $[a, b]$  e tem-se*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right).$$

**Demonstração:** Uma vez que a sucessão  $(f_n)$  converge uniformemente em  $[a, b]$  para a função  $f$  e, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  é contínua em  $[a, b]$ , o Teorema 4.30 garante que a função  $f$  é contínua em  $[a, b]$ , logo integrável em  $[a, b]$ .

Para provar que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right).$$

temos de provar que, para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p$ , então

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Observe-se em primeiro lugar que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , temos, pelas propriedades dos integrais definidos,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \end{aligned}$$

Seja  $\varepsilon > 0$ , arbitrário. Então  $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ .

Como, por hipótese, a sucessão  $(f_n)$  converge uniformemente em  $[a, b]$  para a função  $f$ , fixado  $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p$ , então

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

para todo o  $x \in [a, b]$ .

Consequentemente temos, para todo o  $n \geq p$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon, \end{aligned}$$

como pretendíamos. ■

**Corolário 4.35.** *Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $a < b$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  uma série de funções contínuas em  $[a, b]$ .*

*Se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  converge uniformemente em  $[a, b]$  para a função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , então a função  $f$  é integrável em  $[a, b]$  e tem-se*

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right).$$

**Demonstração:** Uma vez que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  converge uniformemente em  $[a, b]$  para a função  $f$  e, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  é contínua em  $[a, b]$ , o Corolário 4.31 garante que a função  $f$  é contínua em  $[a, b]$ , logo integrável em  $[a, b]$ .

Seja  $(s_n)$  a sucessão das somas parciais da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ . A hipótese garante que a sucessão  $(s_n)$  converge uniformemente em  $[a, b]$  para a função  $f$  e que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$  é contínua em  $[a, b]$ .

Estamos nas condições do Teorema 4.34 que garante que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b s_n(x) dx \right).$$

Para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , temos, pelas propriedades das funções integráveis,

$$\begin{aligned} \int_a^b s_n(x) dx &= \int_a^b \left( \sum_{k=1}^n f_k(x) \right) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \int_a^b f_k(x) dx \right) \end{aligned}$$

pelo que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n \left( \int_a^b f_k(x) dx \right) \right),$$

ou seja,

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right),$$

como se pretendia. ■

**Exemplo 4.36.** Consideremos a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$  de funções definidas em  $\mathbb{R}$ .

Para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e para todo o  $x \in \mathbb{R}$ , temos  $x^2 + n^2 \geq n^2 > 0$  e, portanto,

$$\left| \frac{1}{x^2 + n^2} \right| = \frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Como a sucessão  $\left(\frac{1}{n^2}\right)$  é uma sucessão de termos não negativos tal que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  é convergente, o Critério de Weierstrass garante que a série de funções considerada é uniformemente convergente em  $\mathbb{R}$ .

Uma vez que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  definida por  $f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n^2}$  é contínua em  $[0, 1]$ , o Corolário 4.35 garante que a função  $f$  definida por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$$

é integrável em  $[0, 1]$  e que

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_0^1 \frac{1}{x^2 + n^2} dx \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{x}{n} \right) \Big|_0^1 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

O teorema que apresentamos a seguir estabelece uma condição suficiente para que o limite de uma sucessão  $(f_n)$  de funções diferenciáveis seja uma função diferenciável. Como veremos, neste caso, é a sucessão  $(f'_n)$  das derivadas dos termos da sucessão  $(f_n)$  que deve ser uniformemente convergente.

**Teorema 4.37.** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}$  um conjunto aberto e  $(f_n)$  uma sucessão de funções definidas em  $D$  que converge pontualmente para a função  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ .*

*Suponhamos que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  é diferenciável em  $D$  e a função  $f'_n$  é contínua em  $D$ .*

*Se a sucessão  $(f'_n)$  é uniformemente convergente em  $D$ , então a função  $f$  é diferenciável em  $D$  e, para todo o  $x \in D$ , temos*

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x),$$

ou seja,

$$\left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x).$$

**Demonstração:** Por hipótese a sucessão  $(f'_n)$  é uniformemente convergente em  $D$ . Seja  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  o limite uniforme da sucessão  $(f'_n)$ .

Seja  $x \in D$ , arbitrário. Então existe  $a \in D$  tal que  $[a, x] \subset D$ .

Como  $[a, x] \subset D$  tem-se que a restrição de  $g$  a  $[a, x]$  é o limite uniforme no intervalo  $[a, x]$  da sucessão  $(f'_n)$  e, uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f'_n$  é contínua em  $[a, x]$ , o Teorema 4.34 garante que

$$\int_a^x g(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_a^x f'_n(t) dt \right).$$

Uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_a^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(a)$$

e, para todo o  $x \in D$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

vem

$$\int_a^x g(t) dt = f(x) - f(a). \quad (4.19)$$

Por hipótese  $g$  é o limite uniforme em  $D$  de uma sucessão de funções contínuas em  $D$ . Pelo Teorema 4.30,  $g$  é uma função contínua em  $D$ , logo contínua em  $[a, x]$ .

Então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral, temos que

$$\left( \int_a^x g(t) dt \right)' = g(x). \quad (4.20)$$

Das igualdades (4.19) e (4.20) resulta que

$$g(x) = f'(x).$$

Está então provado que  $f$  é diferenciável em  $D$  e que, para todo o  $x \in D$ , se tem

$$\left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x).$$

■

Como consequência do Teorema 4.37 resulta, como veremos no corolário seguinte, que uma série pontualmente convergente de funções com derivadas contínuas é diferenciável termo a termo, desde que a série das derivadas seja uniformemente convergente.

**Corolário 4.38.** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}$  um conjunto aberto e  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  uma série de funções definidas em  $D$  que converge pontualmente em  $D$  para a função  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ .*

*Suponhamos que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  é diferenciável em  $D$  e a função  $f'_n$  é contínua em  $D$ .*

*Se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$  é uniformemente convergente em  $D$ , então a função  $f$  é diferenciável em  $D$  e temos, para todo o  $x \in D$ ,*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x),$$

ou seja,

$$\left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x).$$

**Demonstração:** Sejam  $(s_n) = \left( \sum_{k=1}^n f_k \right)$  a sucessão das somas parciais da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  e  $(s'_n) = \left( \sum_{k=1}^n f'_k \right)$  a sucessão das somas parciais da série das derivadas  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$ .

Da hipótese resulta que:

- a sucessão  $(s_n)$  converge pontualmente para a função  $f$ ;
- para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $s_n$  é diferenciável em  $D$  e a função  $s'_n$  é contínua em  $D$ ;
- a sucessão  $(s'_n)$  é uniformemente convergente em  $D$ .

Estamos nas condições do Teorema 4.37 que garante que a função  $f$  é diferenciável em  $D$  e, para todo  $x \in D$ , temos

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s'_n(x),$$

ou seja, atendendo a que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$  e a que  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ ,

$$\left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x).$$

■

**Observação 4.39.** Observe-se que o Corolário 4.38 permite estender a uma série pontualmente convergente de funções com derivadas contínuas, a propriedade que estabelece que a derivada da soma é a soma das derivadas, desde que a série das derivadas seja uniformemente convergente.

**Exemplo 4.40.** 1. Consideremos a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \cos(nx)$  de funções definidas em  $\mathbb{R}$ . Temos que:

- i) a série considerada converge pontualmente em  $\mathbb{R}$ ;
- ii) para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  definida por  $f_n(x) = \frac{1}{n^3} \cos(nx)$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  tendo-se  $f'_n(x) = -\frac{1}{n^2} \sin(nx)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ ;
- iii) para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f'_n$  é contínua em  $\mathbb{R}$ ;
- iv) a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n^2} \sin(nx)$  é uniformemente convergente em  $\mathbb{R}$ , como se pode verificar, utilizando o Critério de Weierstrass.

Podemos então aplicar o Corolário 4.38 que permite concluir que a função  $f$  definida por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \cos(nx)$$



é diferenciável em  $\mathbb{R}$  tendo-se, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n^3} \cos(nx) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n^2} \sin(nx).$$

2. Consideremos a sucessão  $(f_n)$  de funções definidas em  $[0, 1]$  por  $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Uma vez que:

- i) para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  é diferenciável em  $[0, 1]$ ;
- ii) para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f'_n$  é contínua em  $[0, 1]$ ;
- iii) como vimos no Exemplo 4.5, esta sucessão converge pontualmente para a função nula em  $[0, 1]$  e a sucessão  $(f'_n)$  das derivadas converge pontualmente em  $[0, 1]$  para a função  $F$  definida em  $[0, 1]$  por

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1[ \end{cases}$$

- iv) a igualdade

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x),$$

não se verifica em pelo menos um ponto do intervalo  $[0, 1]$ ;

o Teorema 4.37 permite concluir que a sucessão das derivadas não converge uniformemente no intervalo  $[0, 1]$ .

**Exercícios 4.3** 1. Calcule, caso exista,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^x}$ .

2. Considere a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^3 + nx^2}$  de funções definidas em  $\mathbb{R}_0^+$ . Mostre que a função soma desta série é contínua em  $\mathbb{R}_0^+$ .

3. Considere a função  $S$  definida por  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$ .

- (a) Mostre que  $S$  é uma função contínua em  $\mathbb{R}$ .
- (b) Mostre que  $S$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e que  $S'$  é uma função contínua em  $\mathbb{R}$ .

4. Considere a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}$  de funções definidas em  $\mathbb{R}$ .

- (a) Mostre que a série considerada é uniformemente convergente em  $[1, +\infty[$ .
- (b) Determine, no intervalo  $]1, +\infty[$ , a derivada da função soma da série considerada.

5. Considere a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx}$  de funções definidas em  $\mathbb{R}$ .

- (a) Mostre que a função soma da série considerada é contínua em  $[1, +\infty[$ .
- (b) Justifique que a função soma da série considerada é integrável no intervalo  $[\ln 3, \ln 4]$  e

calcule  $\int_{\ln 3}^{\ln 4} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx} \right) dx$ .

6. Considere a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{x}{n}$  de funções definidas em  $\mathbb{R}$ .

Verifique se a função soma da série considerada é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e, em caso afirmativo, escreva a derivada dessa função sob a forma de uma série de funções.

7. Considere a série  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{nx^{n-1} \cos(x^n)}{2^n}$  de funções definidas em  $\mathbb{R}$ .

(a) Mostre que a função soma da série considerada é integrável no intervalo  $[0, 1]$ .

(b) Calcule  $\int_0^1 \left( \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{nx^{n-1} \cos(x^n)}{2^n} \right) dx$ .

## 4.4 Séries de Potências

Nesta secção vamos estudar um caso particular de séries de funções que são habitualmente designadas **séries de potências** e que incluem como caso particular as **séries de Taylor** e as **séries de Mac-Laurin**. O estudo destas séries reveste-se de particular importância, dado que algumas funções importantes do Cálculo podem ser representadas por uma série deste tipo. As propriedades dessas funções podem então ser estudadas a partir das propriedades das séries de potências que as representam.

Consideremos a série seguinte

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \quad (4.21)$$

cujo termo geral é uma função real na variável real  $x$ .

Para cada concretização de  $x$  em (4.21) obtemos uma série numérica cuja natureza pode ser estudada utilizando os processos descritos no capítulo anterior.

Vamos determinar os valores de  $x \in \mathbb{R}$  para os quais a série numérica que se obtém de (4.21) é uma série convergente.

Se  $x = 0$  obtemos a série nula que, como vimos, é convergente.

Admitamos que temos  $x \neq 0$ . Então  $\frac{(-1)^n}{n+1} x^n \neq 0$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Uma vez que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} x^{n+1} \right|}{\left| \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \right|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|(-1)^{n+1}| |x|^{n+1} (n+1)}{|(-1)^n| |x|^n (n+2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|(n+1)}{n+2} \\ &= |x| \end{aligned}$$

o Critério de D'Alembert permite concluir que, para  $x \neq 0$ , se  $|x| < 1$ , então a série considerada é absolutamente convergente, logo convergente, e se  $|x| > 1$ , então a série considerada é divergente.

Do que foi dito podemos concluir que se  $x \in ]-1, 1[$ , então a série dada é convergente e se  $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ , então a série dada é divergente.

Uma vez que para  $|x| = 1$ , ou seja, para  $x \in \{-1, 1\}$ , o Critério de D'Alembert nada permite concluir sobre a natureza da série (4.21), vamos estudar separadamente as séries que se obtêm em cada um destes

casos.

Para  $x = -1$  obtemos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{1}{n+1} > 0$$

a série considerada é uma série alternada.

A série dos módulos que lhe está associada é a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n+1} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}.$$

Utilizando o Critério de Comparação por Passagem ao Limite e, utilizando como referência a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ , podemos concluir que a série dos módulos é divergente.

Consequentemente, o estudo da série dos módulos nada permite concluir sobre a natureza da série alternada em estudo.

Vamos então averiguar se estamos nas condições do Critério de Leibniz.

Temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

onde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_n = \frac{1}{n+1}.$$

Uma vez que

i. para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{n+1} > 0$  e, portanto, a sucessão  $\left( \frac{1}{n+1} \right)$  é uma sucessão de números reais positivos;

ii. para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0 \end{aligned}$$

o que permite concluir que a sucessão  $\left( \frac{1}{n+1} \right)$  é monótona decrescente;

iii.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ ;

podemos concluir que a série alternada em estudo satisfaz as condições do Critério de Leibniz e, portanto, é convergente. Como a série dos módulos que lhe está associada é divergente, esta série alternada é simplesmente convergente.

Para  $x = -1$  obtemos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

que, como vimos, é divergente.

Resumindo temos que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \quad \text{é} \quad \begin{cases} \text{absolutamente convergente se } x \in ]-1, 1[ \\ \text{simplesmente convergente se } x = 1 \\ \text{divergente se } x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[ \end{cases}$$

A série que acabámos de estudar é um exemplo das séries que vamos estudar neste capítulo e que se designam **séries de potências**.

**Definição 4.41.** Chama-se *série de potências centrada em*  $c \in \mathbb{R}$  a toda a série da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - c)^n, \quad (4.22)$$

onde  $(a_n)$  é uma sucessão de números reais.

Convencionamos que  $(x - c)^0 = 1$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$  incluindo  $x = c$ .

Com esta convenção, a série que se obtém de (4.22) fazendo  $x = c$  é a série numérica

$$a_0 + 0 + 0 + 0 + \dots$$

com o primeiro termo igual a  $a_0$  e os restantes termos nulos que é uma série convergente de soma  $a_0$ . Logo, para  $x = c$ , a série (4.22) é uma série convergente. Uma vez que a sua série dos módulos é também convergente, podemos concluir que, para  $x = c$ , a série (4.22) é uma série absolutamente convergente.

No caso em que  $c = 0$ , isto é, no caso em que a série está centrada na origem, temos uma série do tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Observemos que qualquer série de potências centrada em  $c \neq 0$  pode ser convertida numa série de potências centrada na origem mediante uma conveniente substituição de variável.

De facto, se em (4.22) fizermos  $x - c = z$  obtemos a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

que é uma série de potências centrada na origem.

Consequentemente, o estudo das séries de potências pode reduzir-se ao estudo das séries de potências centradas na origem.

A determinação dos valores de  $x \in \mathbb{R}$  para os quais a série numérica que se obtém de (4.22) é uma série convergente, ou seja, a determinação do domínio de convergência de uma série de potências, é uma tarefa relativamente simples que se pode realizar recorrendo aos critérios estabelecidos no capítulo anterior. Do que foi dito anteriormente pode desde já afirmar-se que o domínio de convergência de uma série de potências é sempre um conjunto não vazio, dado que contém o ponto  $c$ .

**Definição 4.42.** Chama-se *intervalo de convergência* da série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$  ao interior do seu domínio de convergência.

O domínio de convergência da série apresentada no início desta secção é o intervalo  $] -1, 1]$  e o seu intervalo de convergência é  $] -1, 1[$ . Para além disso, a série converge absolutamente em todos os pontos do seu intervalo de convergência.

Consideremos a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n. \quad (4.23)$$

Se  $x = 0$  obtemos a série numérica

$$1 + 0 + 0 + 0 + \dots$$

de primeiro termo igual a 1 e com os restantes termos iguais a zero que é convergente. Como se trata de uma série de termos não negativos ela é absolutamente convergente.

Seja  $x \neq 0$  arbitrário. Então, para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ , temos  $n!x^n \neq 0$ . Tendo em vista a aplicação do Critério de D'Alembert, consideremos o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|(n+1)!x^{n+1}|}{|n!x^n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} ((n+1)|x|).$$

Uma vez que, para todo o  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ((n+1)|x|) = +\infty,$$

o Critério de D'Alembert permite concluir que, para todo o  $x \neq 0$ , a série (4.23) é divergente.

Concluimos então que a série (4.23) converge absolutamente se e só se  $x = 0$  e diverge se  $x \neq 0$  sendo o seu domínio de convergência o conjunto singular  $\{0\}$ .

Consideremos a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (4.24)$$

Se  $x = 0$  obtemos a série numérica

$$1 + 0 + 0 + 0 + \dots$$

de primeiro termo igual a 1 e com os restantes termos iguais a zero que é convergente. Como se trata de uma série de termos não negativos ela é absolutamente convergente.

Se  $x \neq 0$  temos, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{x^n}{n!} \neq 0$ , e para efeitos de aplicação do Critério de D'Alembert

consideremos o limite

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!|x|^{n+1}}{(n+1)!|x|^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!|x|}{(n+1)n!} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{n+1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Pelo Critério de D'Alembert, concluímos que, para todo o  $x \neq 0$ , a série (4.24) é absolutamente convergente, logo convergente.

Podemos então concluir que a série (4.24) é absolutamente convergente para todo o  $x \in \mathbb{R}$  sendo o seu domínio de convergência o conjunto  $\mathbb{R}$ .

Notemos que nos três exemplos apresentados os domínios de convergência das séries de potências consideradas são de três tipos: um intervalo limitado, um conjunto singular ou o conjunto dos números reais.

O teorema que apresentamos a seguir dá-nos informação sobre os tipos de conjuntos que podemos esperar para domínio de convergência de uma série de potências. De acordo com este teorema, o domínio de convergência de uma série de potências ou é um intervalo limitado, ou é um conjunto singular ou é o conjunto dos números reais.

Na demonstração deste teorema utilizamos a proposição seguinte:

**Proposição 4.43.** *Seja  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  uma série de potências centrada na origem. Então verificam-se as condições seguintes:*

- i) *se a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  converge em  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , então converge absolutamente em todo o ponto de  $] -|x_0|, |x_0|[$ ;*
- ii) *se a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  diverge em  $x_1 \in \mathbb{R}$ , então diverge em todo o ponto de  $] -\infty, -|x_1| \cup ]x_1|, +\infty[$ .*

**Demonstração:** i) Admitamos que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  converge em  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e vamos então provar

que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  é absolutamente convergente para todo o  $x \in ] -|x_0|, |x_0|[$ .

Uma vez que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x_0)^n$  é convergente, a condição necessária de convergência de uma série garante que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n (x_0)^n) = 0.$$

Atendendo à definição de limite, se tomarmos  $\varepsilon = 1$ , temos que existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o

$n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p$ , então

$$|a_n(x_0)^n| < 1. \quad (4.25)$$

Observe-se que, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ , temos, uma vez que  $x_0 \neq 0$ ,

$$|a_n x^n| = \left| a_n(x_0)^n \frac{x^n}{(x_0)^n} \right| = |a_n(x_0)^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

Consequentemente, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p$ , temos, atendendo à desigualdade (4.25),

$$0 \leq |a_n x^n| < \left| \frac{x}{x_0} \right|^n, \quad (4.26)$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

Seja  $x \in ]-|x_0|, |x_0|[$ , arbitrário. Então  $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$  e, portanto, a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$  é uma série geométrica de razão, em módulo, inferior a 1, logo convergente. Atendendo à desigualdade (4.26), podemos então concluir, pelo Critério de Comparação, que a série  $\sum_{n=p}^{+\infty} |a_n x^n|$  é convergente e, portanto, a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$  é também convergente. Portanto, a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  é absolutamente convergente.

Acabámos de provar que, para todo o  $x \in ]-|x_0|, |x_0|[$ , a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  é absolutamente convergente, como pretendíamos.

ii) Admitamos que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  diverge em  $x_1 \in \mathbb{R}$  e vamos agora provar que, para todo o  $x \in ]-\infty, -|x_1| \cup ]|x_1|, +\infty[$ , a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  é divergente.

Observemos em primeiro lugar que  $x_1 \neq 0$ , uma vez que, como vimos, qualquer série de potências centrada na origem converge para  $x = 0$ .

Admitamos, por redução ao absurdo, que existe  $\tilde{x} \in ]-\infty, -|x_1| \cup ]|x_1|, +\infty[$  tal que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\tilde{x})^n$  é convergente. Então, por i), temos que, para todo o  $x \in ]-\tilde{x}|, \tilde{x}|[$ , a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  é absolutamente convergente, logo convergente.

Uma vez que, por construção de  $\tilde{x}$ ,  $x_1 \in ]-\tilde{x}|, \tilde{x}|[$ , temos que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x_1)^n$  é convergente, o que é absurdo, dado que, por hipótese, esta série é divergente.

O absurdo resulta de supor que existe  $\tilde{x} \in ]-\infty, -|x_1| \cup ]|x_1|, +\infty[$  tal que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\tilde{x})^n$  é convergente, pelo que, para todo o  $x \in ]-\infty, -|x_1| \cup ]|x_1|, +\infty[$ , a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  é divergente, como pretendíamos.

■

**Exemplo 4.44.** Consideremos a série de potências  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ .

Para  $x = 1$  obtemos a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  que, como vimos, é uma série convergente. Pela Proposição 4.43, concluímos que a série de potências considerada é absolutamente convergente no intervalo  $] - 1, 1[$ .

Para  $x = -1$  obtemos a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  que, como vimos, é uma série divergente. Pela Proposição 4.43, concluímos que a série de potências considerada é divergente em  $] - \infty, -1[ \cup ] 1, +\infty[$ .

Observe-se que, neste caso, a Proposição 4.43 conjuntamente com o estudo das séries numéricas obtidas nos pontos  $x = 1$  e  $x = -1$  permite concluir que o domínio de convergência da série de potências considerada é o intervalo  $] - 1, 1[$ .

**Observação 4.45.** É consequência imediata da Proposição 4.43 que, dada uma série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$  centrada em  $c \neq 0$ , verificam-se as condições seguintes:

- i) se a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$  converge em  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$ , então converge absolutamente em todo o ponto de  $] - |x_0| + c, |x_0| + c[$ ;
- ii) se a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$  diverge em  $x_1 \in \mathbb{R}$ , então diverge em todo o ponto de  $] - \infty, -|x_1| + c[ \cup ] |x_1| + c, +\infty[$ .

Vamos então utilizar a Proposição 4.43 para demonstrar o resultado anteriormente referido.

**Teorema 4.46.** *Seja  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  uma série de potências centrada na origem. Então verifica-se uma e uma só das condições seguintes:*

- (i) a série converge absolutamente apenas em  $x = 0$  e diverge se  $x \neq 0$ ;
- (ii) a série converge absolutamente para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ;
- (iii) existe  $R > 0$  tal que a série converge absolutamente para todo o  $x \in ] - R, R[$  e diverge para todo o  $x \in ] - \infty, -R[ \cup ] R, +\infty[$ .

**Demonstração:** O teorema fica demonstrado se provarmos que se nem (i) nem (ii) se verificam, então verifica-se (iii).

Admitamos então que existe  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x_0)^n$  é absolutamente convergente e existe  $x_1 \in \mathbb{R}$  tal que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x_1)^n$  é divergente.

Pela Proposição 4.43, a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  é absolutamente convergente para todo o  $x \in ] - |x_0|, |x_0|[$  e é divergente para todo o  $x \in ] - \infty, -|x_1|[ \cup ] |x_1|, +\infty[$ .

Seja  $\mathcal{C}$  o conjunto de pontos onde a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  é convergente. Como  $x_0 \in \mathcal{C}$ , temos que  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ .

Atendendo à Proposição 4.43, temos que, para todo o  $x \in \mathcal{C}$ ,  $|x| \leq |x_1|$  e, portanto, o conjunto  $\mathcal{C}$  é limitado superiormente. Uma vez que, pelo Axioma do Supremo, todo o subconjunto de  $\mathbb{R}$  não vazio



e limitado superiormente admite supremo, tem-se que  $\mathcal{C}$  admite supremo que é um número positivo. Designemos este supremo por  $R$ .

Vamos demonstrar que, se  $|x| < R$ , então a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  é absolutamente convergente e, se  $|x| > R$ , então a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  é divergente.

Se  $|x| < R$ , então o número real  $|x|$  não é um majorante de  $\mathcal{C}$  e, portanto, existe  $\bar{x} \in \mathcal{C}$  tal que  $\bar{x} > |x|$ . Uma vez que  $\bar{x} \in \mathcal{C}$  temos que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\bar{x})^n$  é convergente. Pela Proposição 4.43, a série dada é absolutamente convergente em  $] -\bar{x}, \bar{x}[$ , donde resulta que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (|x|)^n$  é absolutamente convergente. Uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|a_n (|x|)^n| = |a_n x^n|$  temos  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n (|x|)^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$  e podemos concluir que também a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  é absolutamente convergente.

Se  $|x| > R$ , então  $x \notin \mathcal{C}$  e, portanto, a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  é divergente, como pretendíamos. ■

Observemos que o Teorema 4.46 nada afirma sobre a natureza da série de potências centrada na origem nos casos em que  $x = -R$  ou  $x = R$ . Nestes pontos o estudo tem de ser feito caso a caso.

Ao número real  $R$  referido no enunciado do Teorema 4.46 chamamos **raio de convergência** da série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

No caso em que a série de potências centrada na origem converge apenas em  $x = 0$  dizemos que tem **raio de convergência nulo** e no caso em que converge em  $\mathbb{R}$  dizemos que tem **raio de convergência**  $+\infty$ .

**Observação 4.47.** É consequência imediata do Teorema 4.46 que dada a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$  centrada em  $c \neq 0$  verifica-se uma e uma só das condições seguintes:

- (i) a série converge absolutamente apenas em  $x - c = 0$ , isto é, converge absolutamente apenas em  $x = c$  e diverge se  $x \neq c$ ;
- (ii) a série converge absolutamente para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ;
- (iii) existe  $R > 0$  tal que a série converge absolutamente para todo o  $x \in ]-R+c, R+c[$  e diverge para todo o  $x \in ]-\infty, -R+c[ \cup ]R+c, +\infty[$ .

Notemos que as condições enunciadas nada afirmam sobre a natureza da série nos casos em que  $x = -R+c$  ou  $x = R+c$ . Nestes pontos o estudo tem de ser feito caso a caso.

Para uma série de potências centrada em  $c \neq 0$  mantém-se a designação de raio de convergência nulo no caso em que a série converge apenas em  $x = c$  e de raio de convergência  $+\infty$  no caso em que a série converge para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

Uma questão que se pode colocar neste momento é saber como determinar o raio de convergência de uma série de potências.

Consideremos a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ .

Já vimos que se  $x = c$ , então a série é absolutamente convergente e tem soma  $a_0$ .

Admitamos que  $x \neq c$  e que  $a_n \neq 0$ , para todo o  $n$ . Então, para todo o  $n$ ,

$$a_n|x-c|^n \neq 0.$$

Tendo em vista a aplicação do Critério de D'Alembert consideremos o limite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}(x-c)^{n+1}|}{|a_n(x-c)^n|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}| |x-c|^{n+1}}{|a_n| |x-c|^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x-c| \right) \end{aligned}$$

Suponhamos que existe o limite

$$L := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

podendo ser  $+\infty$ .

Uma vez que  $|x-c| \neq 0$  temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}(x-c)^{n+1}|}{|a_n(x-c)^n|} = L|x-c|.$$

- Admitamos que se tem  $L = 0$ .

Uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}(x-c)^{n+1}|}{|a_n(x-c)^n|} = 0,$$

o Critério de D'Alembert permite concluir que a série converge absolutamente para todo o  $x \neq c$ .

Por outro lado, como já vimos, a série converge absolutamente para  $x = c$ .

Concluimos então que se  $L = 0$ , a série tem domínio de convergência  $\mathbb{R}$  e, portanto, o seu raio de convergência é  $+\infty$ .

- Admitamos que se tem  $L = +\infty$ .

Uma vez que  $|x-c| \neq 0$  temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}(x-c)^{n+1}|}{|a_n(x-c)^n|} = +\infty$$

e o Critério de D'Alembert permite concluir que a série diverge para todo o  $x \neq c$ .

Por outro lado, como já vimos, a série converge absolutamente para  $x = c$ .

Concluimos então que se  $L = +\infty$ , a série tem domínio de convergência  $\{c\}$  e, portanto, o seu raio de convergência é nulo.

- Admitamos que  $L$  é finito e não nulo.

Uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}(x-c)^{n+1}|}{|a_n(x-c)^n|} = L|x-c|,$$

o Critério de D'Alembert permite concluir que a série converge absolutamente para todo o  $x \neq c$  tal que

$$L|x-c| < 1 \iff |x-c| < \frac{1}{L}$$

e diverge para todo o  $x \neq c$  tal que

$$|x-c| > \frac{1}{L}.$$

Por outro lado, como já vimos, a série converge absolutamente para  $x = c$ .

Concluimos então que se  $L$  é finito e não nulo a série converge absolutamente em todos os pontos do intervalo

$$\left] -\frac{1}{L} + c, \frac{1}{L} + c \right[$$

e diverge para todo o

$$x \in \left] -\infty, -\frac{1}{L} + c \right[ \cup \left] \frac{1}{L} + c, +\infty \right[ ,$$

o que permite concluir que o seu raio de convergência é  $\frac{1}{L}$ .

Note-se que, neste caso, a determinação do domínio de convergência da série depende do estudo da natureza das séries numéricas que se obtêm para  $x = -\frac{1}{L} + c$  e para  $x = \frac{1}{L} + c$ . O estudo da natureza destas séries tem de ser feito caso a caso.

Convencionando que  $\frac{1}{+\infty} = 0$  e que  $\frac{1}{0} = +\infty$  podemos afirmar que o raio de convergência de uma série de potências que satisfaz a condição  $a_n \neq 0$ , para todo o  $n$ , pode ser dado por

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

sempre que o limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$  exista podendo ser  $+\infty$ .

Utilizando um raciocínio análogo podemos concluir, pelo Critério de Cauchy, que o raio de convergência de uma série de potências que satisfaz a condição  $a_n \neq 0$ , para todo o  $n$ , pode ser dado por

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

sempre que o limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  exista podendo ser  $+\infty$ .

**Exemplo 4.48.** 1. Vamos determinar o domínio de convergência da série de potências centrada na origem

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{5^n} x^n.$$

Atendendo a que se tem, para todo o  $n$ ,

$$\frac{n!}{5^n} \neq 0$$

o raio de convergência desta série pode ser dado pelo limite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{n!}{5^n} \right|}{\left| \frac{(n+1)!}{5^{n+1}} \right|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! 5^{n+1}}{(n+1)! 5^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então a série tem raio de convergência nulo pelo que converge absolutamente se  $x = 0$  e diverge se  $x \neq 0$ .

Consequentemente, o seu domínio de convergência é o conjunto singular  $\{0\}$  sendo absolutamente convergente neste ponto.

2. Vamos determinar o domínio de convergência da série de potências centrada em  $c = 3$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} (x-3)^n.$$

Atendendo a que se tem, para todo o  $n$ ,

$$\frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \neq 0$$

o raio de convergência desta série pode ser dado pelo limite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \right|}{\left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2 + 1} \right|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + 1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Então a série considerada tem raio de convergência  $R = 1$  pelo que converge absolutamente para todo o  $x \in \mathbb{R}$  tal que

$$|x-3| < 1 \iff 2 < x < 4$$

e diverge para todo o  $x \in \mathbb{R}$  tal que

$$|x-3| > 1 \iff (x < 2 \vee x > 4).$$

Temos ainda de estudar a natureza das séries que se obtêm tomando

$$|x - 3| = 1 \iff (x = 2 \vee x = 4) .$$

Para  $x = 4$  obtemos a série numérica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} . \quad (4.27)$$

Uma vez que, para todo o  $n$ ,

$$\frac{1}{n^2 + 1} > 0$$

a série (4.27) é uma série alternada.

A série dos módulos que lhe está associada é a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1} .$$

Utilizando o Critério de Comparação por Passagem ao Limite e tomando como referência a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  podemos concluir que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$  é uma série convergente. Uma vez que a natureza

de uma série não depende dos seus primeiros termos concluímos que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$  é também convergente.

Consequentemente a série (4.27) é uma série absolutamente convergente, logo convergente.

Para  $x = 2$  obtemos a série numérica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} (-1)^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

que, como vimos, é convergente. Uma vez que se trata de uma série de termos positivos ela é absolutamente convergente.

Do que foi dito podemos concluir que o domínio de convergência da série de potências considerada é o intervalo  $[2, 4]$  sendo absolutamente convergente em todos os pontos deste domínio.

3. Consideremos a série de potências centrada em  $c = -2$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n} 5^n} (x + 2)^n .$$

Atendendo a que se tem, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{n} 5^n} \neq 0$$

o raio de convergência desta série pode ser dado pelo limite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{1}{\sqrt{n} 5^n} \right|}{\left| \frac{1}{\sqrt{n+1} 5^{n+1}} \right|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1} 5^{n+1}}{\sqrt{n} 5^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 5 \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \right) \\ &= 5. \end{aligned}$$

Então a série tem raio de convergência  $R = 5$  pelo que converge absolutamente para todo o  $x \in \mathbb{R}$  tal que

$$|x+2| < 5 \iff -7 < x < 3$$

e diverge para todo o  $x \in \mathbb{R}$  tal que

$$|x+2| > 5 \iff (x < -7 \vee x > 3).$$

Temos ainda de estudar a natureza das séries que se obtêm fazendo

$$|x+2| = 5 \iff (x = -7 \vee x = 3).$$

Para  $x = -7$  obtemos a série numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-5)^n}{\sqrt{n} 5^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Trata-se da série harmónica alternada de ordem  $p = \frac{1}{2}$  que, como vimos, é simplesmente convergente.

Para  $x = 3$  obtemos a série numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{\sqrt{n} 5^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Trata-se da série harmónica de ordem  $p = \frac{1}{2}$  que, como vimos, é divergente.

Do que foi dito podemos concluir que o domínio de convergência da série de potências considerada é o intervalo  $[-7, 3[$  sendo absolutamente convergente em todos os pontos do intervalo  $] -7, 3[$  e simplesmente convergente no ponto  $x = -7$ .

4. Consideremos a série de potências centrada na origem

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n} x^n.$$

Atendendo a que se tem, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{n^3}{3^n} \neq 0$$

o raio de convergência desta série pode ser dado pelo limite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left| \frac{n^3}{3^n} \right|}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n^3}} \\ &= 3, \end{aligned}$$

já que, uma vez que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 1$ , temos  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^3} = 1$ .

Então a série tem raio de convergência  $R = 3$  pelo que converge absolutamente para todo o  $x \in \mathbb{R}$  tal que

$$|x| < 3 \iff -3 < x < 3$$

e diverge para todo o  $x \in \mathbb{R}$  tal que

$$|x| > 3 \iff (x < -3 \vee x > 3).$$

Temos ainda de estudar a natureza das séries que se obtêm fazendo

$$|x| = 3 \iff (x = -3 \vee x = 3).$$

Para  $x = -3$  obtemos a série numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n} (-3)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^3.$$

Uma vez que não existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ((-1)^n n^3),$$

a condição necessária de convergência de uma série numérica permite concluir que esta série é divergente.

Se  $x = 3$  obtemos a série numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n} 3^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n^3$$

que é também divergente, uma vez que se tem  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ .

Do que foi dito podemos concluir que a série de potências considerada tem domínio de convergência  $] -3, 3[$  sendo absolutamente convergente em todos os pontos deste intervalo.

5. Consideremos a série de potências centrada em  $c = -4$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 10^n} (x+4)^n.$$

Atendendo a que se tem, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n 10^n} \neq 0$$

o raio de convergência desta série pode ser dado pelo limite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n 10^n} \right|}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (10 \sqrt[n]{n}) \\ &= 10. \end{aligned}$$

Então a série tem raio de convergência  $R = 10$  pelo que converge absolutamente para todo o  $x \in \mathbb{R}$  tal que

$$|x+4| < 10 \iff -14 < x < 6$$

e diverge para todo o  $x \in \mathbb{R}$  tal que

$$|x+4| > 10 \iff (x < -14 \vee x > 6).$$

Temos ainda de estudar a natureza das séries que se obtêm fazendo

$$|x+4| = 10 \iff (x = -14 \vee x = 6).$$

Para  $x = -14$  obtemos a série numérica

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 10^n} (-10)^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n} \end{aligned}$$

que é uma série divergente, já que se obtém da série harmónica de ordem  $p = 1$  (logo divergente) multiplicando os seus termos por  $-1$ .

Para  $x = 6$  obtemos a série numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 10^n} (10)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

que é uma série simplesmente convergente, já que se obtém da série harmónica alternada de ordem  $p = 1$  (logo simplesmente convergente) multiplicando os seus termos por  $-1$ .

Do que foi dito podemos concluir que o domínio de convergência da série de potências considerada



é o intervalo  $] - 14, 6[$  sendo absolutamente convergente em todos os pontos do intervalo  $] - 14, 6[$  e simplesmente convergente no ponto  $x = 6$ .

6. Consideremos a série de potências centrada em  $c = \frac{7}{2}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{10^n}{n!} \left(x - \frac{7}{2}\right)^n.$$

Atendendo a que se tem, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{10^n}{n!} \neq 0$$

o raio de convergência desta série pode ser dado pelo limite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{10^n}{n!} \right|}{\left| \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \right|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)! 10^n}{n! 10^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n+1}{10} \right) \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Então a série tem raio de convergência  $+\infty$  pelo que o seu domínio de convergência é o conjunto dos números reais, sendo absolutamente convergente em todos os pontos do seu domínio.

**Observação 4.49.** A determinação do domínio de convergência de uma série de potências não passa necessariamente pela determinação do seu raio de convergência. Podemos aplicar directamente o Critério de D'Alembert ou o Critério de Cauchy à série dada e fazer a discussão do limite obtido.

Consideremos, por exemplo, a série de potências centrada em  $c = 2$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^5 + 3} (x - 2)^n.$$

Se  $x = 2$  obtemos a série cujo primeiro termo é igual a  $\frac{1}{3}$  e com os restantes termos nulos

$$\frac{1}{3} + 0 + 0 + \dots$$

que é uma série convergente. Dado que se trata de uma série de termos positivos ela é absolutamente convergente.

Suponhamos que se tem  $x \neq 2$  e consideremos o limite

$$\begin{aligned} L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{1}{(n+1)^5 + 3} (x-2)^{n+1} \right|}{\left| \frac{1}{n^5 + 3} (x-2)^n \right|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n^5 + 3) |x-2|^{n+1}}{((n+1)^5 + 3) |x-2|^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( |x-2| \frac{n^5 + 3}{(n+1)^5 + 3} \right) \\ &= |x-2|. \end{aligned}$$

Pelo Critério de D'Alembert temos que, para todo o  $x \neq 2$  tal que  $|x-2| < 1$  a série é absolutamente convergente, logo convergente e, para todo o  $x \neq 2$  tal que  $|x-2| > 1$  a série é divergente.

Atendendo a que, como vimos, a série considerada converge absolutamente em  $x = 2$ , podemos então concluir que, para todo o  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $|x-2| < 1$ , ou seja, para todo o  $x \in ]1, 3[$ , a série considerada é absolutamente convergente e, para todo o  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $|x-2| > 1$ , ou seja, para todo o  $x \in ]-\infty, 1[ \cup ]3, +\infty[$ , a série é divergente.

Se  $|x-2| = 1$ , ou seja, se  $x = 1$  ou  $x = 3$ , nada podemos concluir pelo Critério de D'Alembert. Temos então de estudar as séries numéricas que se obtêm da série dada fazendo  $x = 1$  ou  $x = 3$ .

Se  $x = 3$  obtemos a série numérica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^5 + 1} \quad (4.28)$$

que é uma série de termos positivos. Utilizando o Critério de Comparação por Passagem ao Limite e tomando como referência a série harmónica de ordem  $p = 5$  (logo convergente) podemos concluir que a série (4.28) é convergente.

Se  $x = 1$  obtemos a série numérica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^5 + 1}$$

que é uma série absolutamente convergente, logo convergente, já que a série dos módulos que lhe está associada é a série (4.28).

Podemos então afirmar que a série de potências dada tem como domínio de convergência o intervalo  $[1, 3]$  sendo absolutamente convergente em todos os pontos do seu domínio.

Nos exemplos que apresentamos a seguir consideram-se séries que não estão nas condições da Definição 4.41 mas que, por manipulações algébricas simples ou por uma substituição de variável conveniente, se convertem numa série de potências.

**Exemplo 4.50.** 1. Consideremos a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4 + 16} (2x-1)^n.$$

A determinação do domínio de convergência desta série pode ser feita utilizando um dos três processos seguintes:

- 1º Processo:

Uma vez que  $(2x - 1)^n = 2^n \left(x - \frac{1}{2}\right)^n$  a série dada converte-se na série de potências centrada em  $c = \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n^4 + 16} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n.$$

Atendendo a que se tem, para todo o  $n$ ,

$$\frac{2^n}{n^4 + 16} \neq 0$$

o raio de convergência desta série pode ser dado pelo limite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{2^n}{n^4 + 16} \right|}{\left| \frac{2^{n+1}}{(n+1)^4 + 16} \right|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n((n+1)^4 + 16)}{(n^4 + 16)2^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{(n+1)^4 + 16}{2(n^4 + 16)} \right) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Então a série tem raio de convergência  $R = \frac{1}{2}$  pelo que converge absolutamente para todo o  $x \in \mathbb{R}$  tal que

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} \iff 0 < x < 1$$

e diverge para todo o  $x \in \mathbb{R}$  tal que

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2} \iff (x < 0 \vee x > 1).$$

Temos ainda de estudar a natureza das séries que se obtêm fazendo

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \iff (x = 0 \vee x = 1).$$

Para  $x = 0$  obtemos a série numérica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n^4 + 16} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 + 16}.$$

A série dos módulos associada a esta série é a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4 + 16}.$$

Utilizando o Critério de Comparação e tomando como referência a série harmónica de ordem 4 pode concluir-se que esta série é convergente e, portanto, a série em estudo é absolutamente convergente, logo convergente.

Para  $x = 1$  obtemos a série numérica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n^4 + 16} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4 + 16}$$

que, como vimos, é uma série convergente. Uma vez que se trata de uma série de termos positivos ela é absolutamente convergente.

Do que foi dito podemos concluir que o domínio de convergência da série considerada é o intervalo  $[0, 1]$  sendo absolutamente convergente em todos os pontos deste intervalo.

• 2º Processo:

Efectuando a mudança de variável definida por  $2x - 1 = z$  a série de potências dada converte-se na série de potências centrada na origem

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^4 + 16}.$$

Não é difícil verificar que esta série de potências tem raio de convergência  $R = 1$  pelo que é absolutamente convergente para todo o  $z \in \mathbb{R}$  tal que  $|z| < 1$  e é divergente para todo o  $z \in \mathbb{R}$  tal que  $|z| > 1$ .

Uma vez que se tem  $z = 2x - 1$  concluímos que a série dada é absolutamente convergente para todo o  $x \in \mathbb{R}$  tal que

$$|2x - 1| < 1 \iff 0 < x < 1$$

e é divergente para todo o  $x \in \mathbb{R}$  tal que

$$|2x - 1| > 1 \iff (x < 0 \vee x > 1).$$

Se

$$z = 1 \iff 2x - 1 = 1 \iff x = 1$$

obtemos a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4 + 16}$$

que, como vimos, é uma série absolutamente convergente.

Se

$$z = -1 \iff 2x - 1 = -1 \iff x = 0$$

obtemos a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 + 16}$$

que é também uma série absolutamente convergente.

Como seria de esperar concluímos que o domínio de convergência da série considerada é o intervalo  $[0, 1]$  sendo absolutamente convergente em todos os pontos deste intervalo.

• 3º Processo:

Utilizar, directamente, o Critério de Cauchy ou o Critério de D'Alembert para fazer o estudo da natureza da série considerada em função de  $x \in \mathbb{R}$ .

Se  $2x - 1 = 0$ , ou seja, se  $x = \frac{1}{2}$ , obtemos a série cujos termos são todos nulos excepto o primeiro que é igual a 1, que é uma série absolutamente convergente.

Admitamos que se tem  $2x - 1 \neq 0$ . Então, para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $\frac{1}{n^4 + 16}(2x - 1)^n \neq 0$ . Para efeitos de aplicação do Critério de D'Alembert consideremos o limite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{1}{(n+1)^4 + 16}(2x-1)^{n+1} \right|}{\left| \frac{1}{n^4 + 16}(2x-1)^n \right|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n^4 + 16}{(n+1)^4 + 16}(2x-1) \right| \\ &= |2x-1|. \end{aligned}$$

Pelo Critério de D'Alembert, a série converge absolutamente para todo o  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  tal que  $|2x-1| < 1$  e diverge para todo o  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  tal que  $|2x-1| > 1$ . Uma vez que

$$\left( |2x-1| < 1 \wedge x \neq \frac{1}{2} \right) \iff \left( x \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[ \cup \left] \frac{1}{2}, 1 \right[ \right)$$

e

$$\left( |2x-1| > 1 \wedge x \neq \frac{1}{2} \right) \iff (x \in ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[)$$

e que a série considerada converge para  $x = \frac{1}{2}$ , podemos concluir que a série dada é absolutamente convergente em  $]0, 1[$  e divergente em  $]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$ .

Se  $x = 0$  obtemos a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 + 16}$  que, como vimos, é absolutamente convergente.

Se  $x = 1$  obtemos a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4 + 16}$  que é também uma série absolutamente convergente.

2. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n}.$$

Efectuando a mudança de variável definida por  $x^2 = z$  a série dada converte-se na série de potências centrada na origem

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} z^n.$$

Atendendo a que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \neq 0$$

o raio de convergência desta série pode ser dado pelo limite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \right|}{\left| \frac{(-1)^{n+2}}{2(n+1)-1} \right|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{2n-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Então esta série de potências tem raio de convergência  $R = 1$  pelo que é absolutamente convergente para todo o  $z \in \mathbb{R}$  tal que  $|z| < 1$  e é divergente para todo o  $z \in \mathbb{R}$  tal que  $|z| > 1$ .

Uma vez que se tem  $z = x^2$  concluímos que a série dada é absolutamente convergente para todo o  $x \in \mathbb{R}$  tal que

$$|x^2| < 1 \iff -1 < x < 1$$

e é divergente para todo o  $x \in \mathbb{R}$  tal que

$$|x^2| > 1 \iff (x < -1 \vee x > 1).$$

Se

$$z = 1 \iff x^2 = 1 \iff (x = 1 \vee x = -1)$$

obtemos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}. \quad (4.29)$$

A série dos módulos associada a esta série é a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}$$

que é uma série divergente.

A série (4.29) obtém-se da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}. \quad (4.30)$$

multiplicando todos os seus termos por  $-1$ .

Não é difícil verificar que a série (4.30) satisfaz as condições do Critério de Leibniz e, portanto, é convergente.

Consequentemente a série (4.29) é também convergente e, uma vez que a série dos módulos que lhe está associada é divergente, ela é simplesmente convergente.

Uma vez que a condição

$$z = -1 \iff x^2 = -1$$

é impossível, o estudo está completo.

Podemos então concluir que a série dada tem como domínio de convergência o intervalo  $[-1, 1]$

sendo simplesmente convergente nos pontos  $x = 1$  e  $x = -1$  e absolutamente convergente nos restantes pontos do domínio.

**Exercícios 4.4** 1. Em cada uma das alíneas que se seguem determine o domínio de convergência da série considerada indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

$$(a) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} 3^n x^n$$

$$(b) \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n (x+5)^n$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{9^{n+1} n^2} (x-3)^n$$

$$(d) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n^{2n}} x^n$$

$$(e) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n 2^{n+2}} (x-1)^n$$

$$(f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!} x^n$$

$$(g) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n} (x+2)^n$$

$$(h) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n 6^n} (3x-2)^n$$

$$(i) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n} x^{3n}$$

2. Em cada uma das alíneas que se seguem determine o domínio de convergência da série considerada indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

$$(a) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(-4)^n} x^{2n+1}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-5)^n}{n} x^{n+1}$$

Sugestão: Em cada uma das alíneas consideradas utilize o Critério de Cauchy ou o Critério de D'Alembert para determinar um subconjunto do domínio de convergência da série considerada.

#### 4.4.1 Convergência Uniforme de uma Série de Potências

Utilizando o Critério de Weierstrass podemos demonstrar que uma série de potências converge uniformemente em todo o sub-intervalo fechado e limitado do seu intervalo de convergência.

**Teorema 4.51.** *Sejam  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  uma série de potências de raio de convergência não nulo e  $I$  o seu intervalo de convergência. Então a série converge uniformemente em qualquer sub-intervalo fechado e limitado de  $I$ .*

**Demonstração:** Seja  $[a, b]$  um sub-intervalo fechado e limitado de  $I$ . Então tomando  $r = \max\{|a|, |b|\}$ , temos que  $[-r, r] \subset I$  e  $[a, b] \subset [-r, r]$ . Vamos ver que a série de potências considerada é uniformemente convergente em  $[-r, r]$ .

Pelo Teorema 4.46, a série numérica  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$  é absolutamente convergente, o que significa que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n r^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$  é convergente.

Para todo o  $x \in [-r, r]$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ , temos

$$|a_n x^n| \leq |a_n| r^n.$$

Uma vez que a série numérica  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$  é convergente, concluímos pelo Critério de Weierstrass que a série de funções

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

é uniformemente convergente em  $[-r, r]$  e, portanto, uniformemente convergente em  $[a, b]$ . ■

**Observação 4.52.** Resulta do Teorema 4.51 que uma série de potências centrada em  $c \neq 0$  e com raio de convergência não nulo converge uniformemente em qualquer intervalo fechado contido no seu intervalo de convergência.

**Exemplo 4.53.** Tendo em atenção o Exemplo 4.48, o Teorema 4.51 e a Observação 4.52 temos que:

1. a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} (x - 3)^n$  é uniformemente convergente em qualquer intervalo fechado contido em  $]2, 4[$ ;
2. a série de potências  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n} 5^n} (x + 2)^n$  é uniformemente convergente em qualquer intervalo fechado contido em  $] - 7, 3[$ ;
3. a série de potências  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n} x^n$  é uniformemente convergente em qualquer intervalo fechado contido em  $] - 3, 3[$ ;
4. a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 10^n} (x + 4)^n$  é uniformemente convergente em qualquer intervalo fechado contido em  $] - 14, 6[$ .

Observemos que o Teorema 4.51 nada afirma sobre a convergência uniforme de uma série de potências no seu domínio de convergência. O resultado que apresentamos a seguir, habitualmente designado **Teorema de Abel**, conjugado com o Teorema 4.51 permite concluir que uma série de potências de raio de convergência  $R > 0$  é uniformemente convergente no seu domínio de convergência. Omitiremos a demonstração do Teorema de Abel que pode ser consultada em, por exemplo, E. L. Lima, Curso de Análise, vol. 1, 1996, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro, pág. 309.



**Teorema 4.54.** Seja  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  uma série de potências centrada na origem de raio de convergência  $R > 0$ . Então verificam-se as condições seguintes:

- i) se a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  converge em  $x = R$ , então ela converge uniformemente no intervalo  $[0, R]$  e tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow R^-} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n;$$

- ii) se a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  converge em  $x = -R$ , então ela converge uniformemente no intervalo  $[-R, 0]$  e tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow -R^+} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n.$$

**Observação 4.55.** Utilizando o Teorema de Abel, podemos provar que sendo  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - c)^n$  uma série de potências centrada em  $c \neq 0$  e de raio de convergência  $R > 0$ , então verificam-se as condições seguintes:

- i) se a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - c)^n$  converge em  $x = R + c$ , então ela converge uniformemente no intervalo  $[c, R + c]$  e tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow (R+c)^-} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - c)^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (R + c - c)^n;$$

- ii) se a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - c)^n$  converge em  $x = -R + c$ , então ela converge uniformemente no intervalo  $[-R + c, c]$  e tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow (-R+c)^+} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - c)^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R + c - c)^n.$$

**Exemplo 4.56.** Tendo em atenção o Exemplo 4.48 e a Observação 4.55 temos que:

1. a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} (x - 3)^n$  é uniformemente convergente em  $[2, 4]$ ;
2. a série de potências  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n} 5^n} (x + 2)^n$  é uniformemente convergente em  $[-7, 3[$ ;
3. a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 10^n} (x + 4)^n$  é uniformemente convergente em  $] -14, 6]$ .

O teorema que apresentamos a seguir estabelece que uma série de potências, a série cujos termos são as derivadas dos termos da série dada e a série cujos termos são as primitivas que se anulam na origem dos termos da série dada têm o mesmo intervalo de convergência.

**Teorema 4.57.** *Seja  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  uma série de potências de raio de convergência  $R \neq 0$ . Então as séries de potências  $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$  e  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$  têm raio de convergência  $R$ .*

**Demonstração:** Suponhamos em primeiro lugar que a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  tem raio de convergência  $R > 0$  e vamos demonstrar que a série de potências  $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$  tem também raio de convergência  $R$ .

Seja  $R'$  o raio de convergência da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ .

Então, ou  $R' > R$ , ou  $R > R'$ , ou  $R' = R$ .

Admitamos que se tem  $R' > R$ . Então existe  $x_0 \in \mathbb{R}^+$  tal que  $R' > x_0 > R$ .

Temos então que  $x_0 \in ]-R', R'[$  e, portanto, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x_0)^{n-1}$  é absolutamente convergente, o que significa que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} |n a_n (x_0)^{n-1}|$  é convergente. Por outro lado,  $x_0 \in ]R, +\infty[$  e, portanto, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x_0)^n$  é divergente.

Para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$0 \leq |a_n (x_0)^n| \leq |n a_n (x_0)^{n-1}| = |x_0| |n a_n (x_0)^{n-1}|. \quad (4.31)$$

Como a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} |n a_n (x_0)^{n-1}|$  é convergente, a Proposição 3.9 garante que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (|x_0| |n a_n (x_0)^{n-1}|)$  é também convergente. A desigualdade (4.31) e o Critério de Comparação permitem então concluir que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n (x_0)^n|$  é também convergente e, portanto, a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n (x_0)^n|$  é também convergente. Concluímos então que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x_0)^n$  é convergente, o que é falso.

A contradição resulta de supor  $R' > R$ , pelo que se deve ter  $R' \leq R$ .

Suponhamos agora que se tem  $R' < R$ .

Sejam  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$  tais que  $R' < x_1 < x_2 < R$ .

Então as séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} |n a_n (x_1)^{n-1}|$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} |n a_n (x_2)^{n-1}|$  são ambas divergentes e as séries  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x_1)^n$  e  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x_2)^n$  são ambas absolutamente convergentes, logo convergentes.

Uma vez que se tem  $0 < x_1 < x_2$ , conclui-se que  $\frac{x_1}{x_2} \in ]0, 1[$ . Utilizando o Critério de Cauchy pode concluir-se que a série numérica  $\sum_{n=1}^{+\infty} n \left( \frac{x_1}{x_2} \right)^n$  é convergente. A condição necessária de convergência de uma série numérica permite então afirmar que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( n \left( \frac{x_1}{x_2} \right)^n \right) = 0$ .

Utilizando a definição de limite podemos então concluir que existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \geq p$ , então

$$n \left( \frac{x_1}{x_2} \right)^n < x_1. \quad (4.32)$$

Consequentemente, para todo o  $n \geq p$ , temos

$$|na_n(x_1)^{n-1}| = \left| \frac{1}{x_1} na_n(x_1)^n \right| = \left| \frac{1}{x_1} na_n(x_2)^n \frac{(x_1)^n}{(x_2)^n} \right|,$$

donde resulta, atendendo à desigualdade (4.32),

$$0 \leq |na_n(x_1)^{n-1}| < |a_n(x_2)^n|, \quad (4.33)$$

para todo o  $n \geq p$ .

Uma vez que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(x_2)^n|$  é convergente temos que a série  $\sum_{n=p}^{+\infty} |a_n(x_2)^n|$  é também convergente. Utilizando a desigualdade (4.33) podemos concluir, pelo Critério de Comparação, que a série  $\sum_{n=p}^{+\infty} |na_n(x_1)^{n-1}|$  é convergente e, portanto, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} |na_n(x_1)^{n-1}|$  é também convergente. Consequentemente, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (na_n(x_1)^{n-1})$  é convergente, o que é falso.

A contradição a que chegámos resulta de  $\sup R' < R$ .

Então tem de se ter  $R' = R$ , como pretendíamos.

Admitamos agora que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  tem raio de convergência  $+\infty$  e que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$  tem raio de convergência  $R' > 0$ . Utilizando um raciocínio análogo ao que foi utilizado no caso anterior quando supusemos  $R' < R$  chegamos a uma contradição que resulta de  $\sup R' > 0$ . Conclui-se então que  $R' = +\infty$ , como pretendíamos.

Utilizando argumentos do mesmo tipo podemos provar que a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$  tem também raio de convergência  $R$ . Esta demonstração é deixada como exercício. ■

**Observação 4.58.** Resulta do Teorema 4.57 que se  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$  é uma série de potências centrada em  $c \neq 0$  e de raio de convergência  $R \neq 0$ , então as séries de potências  $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-c)^{n-1}$  e  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$  têm também raio de convergência  $R$ .

O teorema que apresentamos a seguir estabelece algumas propriedades das séries de potências que resultam do Teorema 4.51, do Teorema 4.57 e das propriedades da convergência uniforme. A demonstração deste teorema é deixada como exercício.

**Teorema 4.59.** *Seja  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$  uma série de potências centrada  $x=c$ . Então verificam-se as condições seguintes:*

- i) *a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$  define uma função contínua em todo o intervalo fechado contido no seu intervalo de convergência;*
- ii) *a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$  pode integrar-se termo a termo em todo o intervalo fechado contido no seu intervalo de convergência;*

iii) a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$  pode derivar-se termo a termo em todo o intervalo fechado contido no seu intervalo de convergência.

**Observação 4.60.** Sejam  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$  uma série de potências centrada em  $x=c$  de raio de convergência não nulo  $R$ ,  $I$  o seu intervalo de convergência e  $f$  a sua função soma definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n.$$

1. As propriedades que se apresentam a seguir são consequência do Teorema 4.59 e do Teorema de Abel. Demonstraremos, a título de exemplo, a primeira propriedade. A demonstração das restantes propriedades é deixada como exercício.

(a) A função  $f$  é contínua no domínio de convergência da série considerada.

**Demonstração:**

Vamos demonstrar, em primeiro lugar, que  $f$  é contínua em todo o ponto de  $I$ . Seja  $x \in I$ , arbitrário. Então existe um intervalo fechado  $F_x$  que contém  $x$  e que está contido em  $I$ . Atendendo ao que foi dito na Observação 4.52, a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$  é uniformemente convergente em  $F_x$ . Pelo Corolário 4.31, a função  $f$  é contínua em  $F_x$  e, portanto, contínua em  $x$ .

Acabámos de provar que a função  $f$  é contínua no seu intervalo de convergência que, no caso em que a série tem raio de convergência  $+\infty$ , coincide com o seu domínio de convergência.

Admitamos que a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$  tem raio de convergência  $R > 0$ . Então o seu domínio de convergência,  $D_{conv}$ , é um subconjunto do intervalo  $[-R+c, R+c]$ . Já vimos que  $f$  é contínua em todo o ponto do intervalo  $] -R+c, R+c[$ . Falta agora provar que se  $R+c \in D_{conv}$  [resp.  $-R+c \in D_{conv}$ ], então  $f$  é contínua em  $R+c$  [resp.  $-R+c$ ]. Se a série considerada é convergente em  $x = R+c$ , então, atendendo à Observação 4.55 e ao Corolário 4.31, concluímos que a sua função soma é contínua em  $x = R+c$ . De modo análogo, concluímos que se a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$  é convergente em  $x = -R+c$ , então a sua função soma é contínua em  $x = -R+c$ .

Podemos então concluir que a função  $f$  é contínua no domínio de convergência da série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ , como pretendíamos.

(b) a função  $f$  é diferenciável em  $I$  e temos, para todo o  $x \in I$ ,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(x-c)^{n-1}$$

(c) a função  $F$  definida por

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1}$$

é a primitiva de  $f$  em  $I$  tal que  $F(c) = 0$ ;

- (d) a função  $f$  é integrável em todo o intervalo  $[a, b]$  contido no seu domínio de convergência e tem-se

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b (a_n (x-c)^n) dx$$

donde resulta que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1} \Big|_a^b \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{a_n}{n+1} (b-c)^{n+1} - \frac{a_n}{n+1} (a-c)^{n+1} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{a_n}{n+1} ((b-c)^{n+1} - (a-c)^{n+1}) \right). \end{aligned}$$

2. Utilizando sucessivamente o Teorema 4.59 tem-se que a função  $f$  admite derivadas finitas de todas as ordens em qualquer ponto do intervalo  $I$  e tem-se, para todo  $x \in I$  e, para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (x-c)^{n-k}.$$

**Exemplo 4.61.** 1. Tendo em atenção o Exemplo 4.56 e a Observação 4.60 temos que:

- (a) a função soma da série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} (x-3)^n$  é contínua em  $[2, 4]$ ;
- (b) a função soma da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}5^n} (x+2)^n$  é contínua em  $[-7, 3[$ ;
- (c) a função soma da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n} x^n$  é contínua em  $] -3, 3[$ ;
- (d) a função soma da série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n10^n} (x+4)^n$  é contínua em  $] -14, 6]$ .

2. Como vimos no Exemplo 4.20, a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$  converge pontualmente em  $] -1, 1[$  para a função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ . Temos então, para todo  $x \in ] -1, 1[$ ,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Para além disso, o intervalo  $] -1, 1[$  é o intervalo de convergência da série considerada e, atendendo à Observação 4.60, temos que, para todo  $x \in ] -1, 1[$ ,

$$\left( \frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n.$$

Uma vez que a função  $F$  definida por  $F(x) = -\ln(1-x)$  é a primitiva de  $f$  que se anula em  $x = 0$ , temos, pela Observação 4.60,

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1},$$

para todo o  $x \in ]-1, 1[$ , ou seja, pelas propriedades dos logaritmos,

$$\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n,$$

para todo o  $x \in ]-1, 1[$ .

As funções consideradas no Exemplo 4.61 podem ser representadas por uma série de potências e pertencem a uma classe especial de funções, as **funções analíticas**. Na próxima secção voltaremos a falar deste tipo de funções.

**Exercícios 4.5** Utilizando as propriedades estabelecidas para as séries de potências na Observação 4.60 e as representações

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \text{ para todo o } x \in ]-1, 1[ \\ -\ln(1-x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \text{ para todo o } x \in ]-1, 1[ \\ \frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \text{ para todo o } x \in ]-1, 1[ \end{aligned}$$

obtenha uma representação em série de potências para cada uma das funções consideradas nas alíneas que se seguem e indique o maior intervalo aberto em que a representação indicada é válida.

- a)  $f(x) = \frac{1}{1+2x}$
- b)  $f(x) = \ln(1+2x)$
- c)  $f(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$

#### 4.4.2 Série de Taylor e Série de Mac-Laurin

O Teorema de Taylor estabelece que, sendo  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto, se  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $n+1$  vezes diferenciável em  $I$  e  $a$  é um ponto de  $I$ , então, para todo o  $x \in I \setminus \{a\}$ , existe  $\xi$  entre  $a$  e  $x$  tal que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

onde, como habitualmente, se convencionou que  $f^{(0)}(a) = f(a)$ .

Este teorema garante que, no conjunto  $I \setminus \{a\}$ , podemos escrever  $f$  como soma do seu polinómio de Taylor de ordem  $n$  em torno de  $a$  com o resto de Lagrange de ordem  $n$ .

Se admitirmos que  $f$  admite derivada finita de qualquer ordem em  $a \in I$ , ou seja, se, para todo o  $k \in \mathbb{N}$ , existe e é finita  $f^{(k)}(a)$  podemos obter a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

que é uma série de potências de centro  $a$  e se designa **série de Taylor** de  $f$  no ponto  $a$ .

No caso particular em que  $a = 0$  esta série de potências centrada na origem é designada **série de Mac-Laurin** de  $f$ .

**Exemplo 4.62.** 1. Consideremos a função exponencial definida em  $\mathbb{R}$  por  $f(x) = e^x$ . Como sabemos, esta função admite derivada finita de qualquer ordem em  $x = 0$  tendo-se, para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$f^n(0) = 1.$$

Consequentemente a série de Mac-Laurin de  $f$  é

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

2. Consideremos a função seno definida em  $\mathbb{R}$  por  $f(x) = \sin x$ . Como sabemos esta função admite derivada finita de qualquer ordem em  $\mathbb{R}$  tendo-se, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } n = 4k, k \in \mathbb{N}_0 \\ \cos x & \text{se } n = 4k + 1, k \in \mathbb{N}_0 \\ -\sin x & \text{se } n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}_0 \\ -\cos x & \text{se } n = 4k + 3, k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

pelo que

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k, k \in \mathbb{N}_0 \\ 1 & \text{se } n = 4k + 1, k \in \mathbb{N}_0 \\ -1 & \text{se } n = 4k + 3, k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Consequentemente, a série de Mac-Laurin de  $f$  é

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

Uma questão que se pode colocar imediatamente é a seguinte:

A função soma da série de Taylor de uma função  $f$  coincide sempre com a função  $f$ ?

O exemplo que apresentamos a seguir assegura que a resposta a esta questão nem sempre é afirmativa.

**Exemplo 4.63.** Consideremos a função  $f$  definida em  $\mathbb{R}$  por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Verifique, como exercício, que a função  $f$  admite derivadas finitas de qualquer ordem em qualquer ponto de  $\mathbb{R}$  e que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(0) = 0$ .

Consequentemente, a série de Mac-Laurin da função  $f$  é a série nula.

Uma vez que, por exemplo,  $f(1) \neq 0$ , temos que  $f$  não é a função soma da sua série de Taylor.

A proposição que apresentamos a seguir estabelece uma condição necessária e suficiente para que uma função  $f$  seja a função soma da sua série de Taylor.

**Proposição 4.64.** *Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto de números reais,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com derivadas finitas de qualquer ordem em  $I$ ,  $a \in I$  e*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (4.34)$$

a série de Taylor de  $f$  em torno do ponto  $a$ .

Então, no intervalo  $I$ ,  $f$  coincide com a soma da série (4.34) se e só se, para todo o  $x \in I$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0,$$

onde  $R_n(x)$  denota o resto de ordem  $n$  de  $f$  no ponto  $a$ .

**Demonstração:** Seja  $S$  a função soma da série (4.34).

Por definição de função soma de uma série temos, para todo o  $x \in I$ ,

$$\begin{aligned} S(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x) - R_n(x)) \end{aligned}$$

Sendo  $x \in I$ , arbitrário, temos  $f(x) = S(x)$  se e só se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0.$$

Está então provado que  $f$  coincide com  $S$  em  $I$  se e só se, para todo o  $x \in I$ , temos  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ , como pretendíamos. ■

No exemplo que apresentamos a seguir vamos utilizar esta proposição para garantir que, sendo  $f$  a função exponencial e sendo  $f$  a função definida por  $f(x) = \ln(x+1)$ , a função soma da sua série de Mac-Laurin é exactamente a função  $f$ .

**Exemplo 4.65.** 1. No caso da função exponencial temos que, sendo  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , arbitrário, existe  $\xi$  entre 0 e  $x$  tal que

$$R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Consequentemente, temos

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{e^\xi |x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$



Uma vez que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ <sup>2</sup> temos  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^\xi |x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$  e, pela desigualdade anterior, concluímos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| = 0$  e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0. \quad (4.35)$$

Dada a arbitrariedade de  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  temos  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ , para todo o  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_n(0) = 0$ , podemos então concluir que a igualdade (4.35) se verifica para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

A Proposição 4.64 garante então que, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

2. Consideremos a função  $f$  definida por  $f(x) = \ln(x+1)$ , para todo o  $x \in ]-1, 1[$ .

Utilize o Princípio de Indução para provar que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , temos  $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ .

Consequentemente, temos, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!.$$

A série de Mac-Laurin da função  $f$  é

$$f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e, para todo o  $x \in ]-1, 1[$ ,  $x \neq 0$ , existe  $\theta \in ]0, 1[$  tal que

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \left| \frac{(-1)^n \frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \\ &= \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1} \right| \\ &= \frac{1}{(n+1)|1+\theta x|^{n+1}} |x|^{n+1}. \end{aligned}$$

Como  $x \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$  e  $\theta \in ]0, 1[$ , temos que  $|x|^{n+1} < 1$  e  $\frac{1}{|1+\theta x|^{n+1}} < 1$  e, portanto,

$$0 \leq |R_n(x)| < \frac{1}{n+1}. \quad (4.36)$$

---

<sup>2</sup>Uma vez que a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$  tem domínio de convergência  $\mathbb{R}$  temos que, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ , donde resulta que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ .

A igualdade (4.36) permite concluir que, para todo o  $x \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| = 0$  e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0, \quad (4.37)$$

para todo o  $x \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$ .

Uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_n(0) = 0$ , podemos então concluir que a igualdade (4.37) se verifica para todo o  $x \in ]-1, 1[$ .

A Proposição 4.64 garante então que, para todo o  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

A proposição que apresentamos a seguir e que pode, em alguns casos, ser utilizada como alternativa à Proposição 4.64, estabelece uma condição suficiente para que, num dado intervalo, a função soma da série de Taylor de uma função  $f$  seja exactamente a função  $f$ .

**Proposição 4.66.** *Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que admite derivadas finitas de qualquer ordem em todo o ponto de  $I$  e  $a \in I$ .*

*Suponhamos que existem  $r > 0$  e  $M > 0$  tais que, para todo o  $x \in ]a-r, a+r[ \subset I$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M.$$

*Então, para todo o  $x \in ]a-r, a+r[ \subset I$ , temos*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

**Demonstração:** Vamos provar que, para todo o  $x \in ]a-r, a+r[$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ . A Proposição 4.64 garante então que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n,$$

para todo o  $x \in ]a-r, a+r[$  e a proposição resulta demonstrada.

Seja  $x \in ]a-r, a+r[$ ,  $x \neq a$ , arbitrário. O Teorema de Taylor garante que existe  $\xi$  entre  $a$  e  $x$  tal que

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Como  $\xi \in ]a-r, a+r[$  a hipótese garante que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M$$

e, portanto, tem-se que

$$0 \leq |R_n(x)| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (4.38)$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Uma vez que, para todo o  $x \in \mathbb{R}$  se tem,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ , a desigualdade (4.38) implica que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| = 0$ , ou seja,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ .

Dada a arbitrariedade de  $x \in ]a-r, a+r[ \setminus \{a\}$  temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0, \quad (4.39)$$

para todo o  $x \in ]a-r, a+r[ \setminus \{a\}$ .

Uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_n(a) = 0$ , podemos então concluir que a igualdade (4.39) se verifica para todo o  $x \in ]a-r, a+r[$ , como pretendíamos. ■

**Observação 4.67.** Nas condições da Proposição 4.66, se existe  $M > 0$  tal que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e, para todo o  $x \in I$ , se verifica a desigualdade  $|f^{(n)}(x)| \leq M$ , podemos concluir que, no intervalo  $I$ , a função  $f$  coincide com a função soma da sua série de Taylor.

**Exemplo 4.68.** Como vimos no Exemplo 4.62 sendo  $f$  a função seno, temos que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } n = 4k, k \in \mathbb{N}_0 \\ \cos x & \text{se } n = 4k+1, k \in \mathbb{N}_0 \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } n = 4k+2, k \in \mathbb{N}_0 \\ -\cos x & \text{se } n = 4k+3, k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

pelo que

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1,$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Utilizando a Observação 4.67 podemos então concluir que, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots. \end{aligned}$$

No Exemplo 4.61 apresentam-se três funções que podem ser escritas, no intervalo  $] -1, 1[$ , como soma de uma série de potências centrada na origem. Por outro lado, cada uma destas funções admite, no intervalo  $] -1, 1[$ , derivada finita de qualquer ordem, pelo que é possível determinar a sua série de Mac-Laurin que, como vimos, é uma série de potências centrada na origem. Pode então colocar-se a questão de saber se a série de potências obtida pode ser distinta da série de Mac-Laurin da função considerada. O teorema que apresentamos a seguir responde a esta questão.

**Teorema 4.69.** *Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que admite derivadas finitas de qualquer ordem em  $I$  e  $a$  um ponto de  $I$ .*

Suponhamos que existe uma série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$  com raio de convergência não nulo  $R$  e um número positivo  $r$  tais que  $]a-r, a+r[ \subset I$  e

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n,$$

para todo o  $x \in ]a-r, a+r[$ .

Então a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$  é a série de Taylor de  $f$  em  $a$ .

**Demonstração:** Atendendo à Observação 4.60 e a que  $]a-r, a+r[$  é um subconjunto do intervalo de convergência da série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ , temos que  $f$  admite derivadas finitas de qualquer ordem em  $]a-r, a+r[$  e, para todo o  $x \in ]a-r, a+r[$  e, para todo o  $k \in \mathbb{N}$ , temos

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (x-a)^{n-k}. \quad (4.40)$$

Seja  $k \in \mathbb{N}$ , arbitrário. Tendo em atenção a igualdade (4.40), temos

$$f^{(k)}(a) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (a-a)^{n-k},$$

ou seja,  $f^{(k)}(a)$  é a soma de uma série de potências com todos os termos nulos excepto o primeiro que é igual a  $k(k-1) \cdots 2 \cdot 1 a_k = k! a_k$  e, portanto,

$$f^{(k)}(a) = k! a_k$$

donde resulta que

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Uma vez que temos, por convenção,  $f^{(0)}(a) = f(a)$  e, por hipótese,  $f(a)$  é a soma de uma série com todos os termos nulos excepto o primeiro que é igual a  $a_0$ , temos que

$$a_0 = \frac{f^{(0)}(a)}{0!}.$$

Consequentemente temos, para todo o  $k \in \mathbb{N}_0$ ,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

o que permite concluir que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$  é a série de Taylor de  $f$  em  $a$ . ■

**Exemplo 4.70.** Utilizando o Teorema 4.69 e o Exemplo 4.61 temos que:

1. a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$  é a série de Mac-Laurin da função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ , para todo o  $x \in ]-1, 1[$ ;

2. a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$  é a série de Mac-Laurin da função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ , para todo o  $x \in ]-1, 1[$ ;
3. a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n$  é a série de Mac-Laurin da função  $f$  definida por  $f(x) = \ln \frac{1}{1-x}$ , para todo o  $x \in ]-1, 1[$ .

As funções que satisfazem a propriedade referida no Teorema 4.69, ou seja, as funções que, num dado intervalo, coincidem com a função soma da sua série de Taylor em torno de um ponto desse intervalo são habitualmente designadas **funções analíticas**. Muitas das funções que utilizamos habitualmente como, por exemplo, as funções seno, cosseno, arcotangente, exponencial, seno hiperbólico, cosseno hiperbólico e logaritmo neperiano são funções analíticas.

**Definição 4.71.** Sejam  $I$  um intervalo aberto,  $a \in I$  e  $f$  uma função definida em  $I$  que admite derivadas finitas de todas as ordens em  $a$ . Dizemos que a função  $f$  é *analítica no ponto  $a$*  se existe  $r > 0$  tal que, para todo o  $x \in ]a-r, a+r[ \subset I$ , a série de Taylor de  $f$  em  $a$  converge para  $f(x)$ .

Dizemos que  $f$  é *analítica em  $I$*  se, para todo o  $a \in I$ ,  $f$  é analítica em  $a$ .

**Exemplo 4.72.** Consideremos a função  $f$  definida em  $\mathbb{R}$  por  $f(x) = \cos x$ .

Temos, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } n = 4k, k \in \mathbb{N}_0 \\ -\sin x & \text{se } n = 4k+1, k \in \mathbb{N}_0 \\ -\cos x & \text{se } n = 4k+2, k \in \mathbb{N}_0 \\ \sin x & \text{se } n = 4k+3, k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

pelo que

$$f^{(n)}(\pi) = \begin{cases} -1 & \text{se } n = 4k, k \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{se } n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0 \\ 1 & \text{se } n = 4k+2, k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

A série de Taylor de  $f$  em  $a = \pi$  é dada por

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\pi)}{n!} (x-\pi)^n &= -1 + \frac{1}{2!} (x-\pi)^2 - \frac{1}{4!} (x-\pi)^4 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} (x-\pi)^{2n}. \end{aligned}$$

Uma vez que, para todo o  $x \in \mathbb{R}$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1,$$

a Proposição 4.66 garante que, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} (x - \pi)^{2n}$$

e, portanto, a função  $f$  é analítica em  $\pi$ .

Seja  $f$  uma função analítica em  $a \in I$ . De acordo com a Definição 4.71, existe  $r > 0$  tal que o valor da função  $f$  em cada ponto  $x \in ]a - r, a + r[ \subset I$  é dado por uma série de potências de centro  $a$ . A função  $f$  satisfaz as condições do Teorema 4.69 que garante que a série de Taylor de  $f$  em  $a$  é a única série de potências que representa a função  $f$  no intervalo  $]a - r, a + r[$ .

Podemos então reformular a Definição 4.71 e dizer que uma função  $f$  definida num intervalo aberto  $I$  é analítica em  $a \in I$  se existem um número real  $r > 0$  e uma série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - a)^n$  tais que, para todo o  $x \in ]a - r, a + r[ \subset I$ , temos  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - a)^n$ . Note-se que a série obtida depende do ponto  $a$  considerado, dado que os coeficientes da série de potências que representa a função são calculados em função das derivadas de  $f$  no ponto  $a$ .

**Exemplo 4.73.** Como vimos no Exemplo 4.72 temos, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} (x - \pi)^{2n}.$$

Por outro lado, denotando por  $f$  a função coseno temos,

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 4k, k \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{se } n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}_0 \\ -1 & \text{se } n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

e, portanto, série de Mac-Laurin de  $f$  é dada por

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}. \end{aligned}$$

Uma vez que, para todo o  $x \in \mathbb{R}$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1,$$

a Proposição 4.66 garante que, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

**Representação de uma Função por uma Série de Potências.**

Utilizando a Observação 4.60 e algumas das propriedades estabelecidas para as séries numéricas na Proposição 3.9 podemos obter, para algumas funções, uma representação em série de potências. Sempre que a função considerada satisfaça as condições do Teorema 4.69, a representação obtida é a série de Taylor da função considerada e, portanto, a função em estudo é uma função analítica.

**Exemplo 4.74.** 1. Vamos utilizar a Observação 4.60 para obter uma representação em série de potências para a função coseno a partir de uma representação em série de potências da função seno. O Teorema 4.69 vai permitir concluir que a série obtida é a série de Mac-Laurin da função coseno, confirmando-se o resultado obtido no Exemplo 4.73.

Atendendo a que, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ , se tem

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

temos, pela Observação 4.60,

$$\begin{aligned} \cos x &= \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \right)' \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \end{aligned}$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

Como a função coseno satisfaz as condições do Teorema 4.69, a série obtida é a série de Mac-Laurin da função coseno.

2. Consideremos a função  $f$  definida por  $f(x) = x \cos x$ . Podemos obter uma série de potências que represente a função  $f$  a partir da série de Mac-Laurin obtida para o coseno, utilizando uma das propriedades das séries estabelecidas na Proposição 3.9.

Seja  $x \in \mathbb{R}$ , arbitrário. A série  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$  é convergente e tem soma  $\cos x$ . Pela Proposição

3.9 a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} x(-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$  é também convergente e tem soma  $x \cos x$ . Temos então

$$x \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} x(-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n+1}.$$

Tal como no caso anterior, a série obtida é a série de Mac-Laurin da função  $f$ .

3. Consideremos a função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

Uma vez que  $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$  e, para todo o  $x \in ]-1, 1[$ ,  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ , temos

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad (4.41)$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $|-x^2| < 1$ . Uma vez que  $|-x^2| < 1$  é equivalente a  $|x| < 1$  a representação (4.41) vale para todo o  $x \in ]-1, 1[$ .

Uma vez que a função  $F$  definida por  $F(x) = \operatorname{arctg} x$  é a primitiva da função  $f$  que se anula na origem, a Observação 4.60 permite concluir que se tem

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1},$$

para todo o  $x \in ]-1, 1[$ .

4. Consideremos a função  $f$  definida em  $\mathbb{R}$  por  $f(x) = e^{-x^2}$ . Uma vez que, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

temos, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

5. Vamos obter uma representação em série de potências para a função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{1}{3+4x}$ .

Temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{3+4x} &= \frac{1}{3 \left(1 + \frac{4}{3}x\right)} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{4}{3}x\right)} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{4}{3}x\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3} \left(-\frac{4}{3}x\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3} \left(\frac{4}{3}\right)^n x^n, \end{aligned}$$

para todo o  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{4}{3}\right\}$  tal que  $\left|-\frac{4}{3}x\right| < 1$ .



Temos então

$$\frac{1}{3+4x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{3^{n+1}} x^n,$$

$$\text{para todo } x \in \left] -\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right[.$$

Reciprocamente, podemos determinar a função soma de algumas séries de potências, utilizando a Observação 4.60 e as representações obtidas em alguns dos exemplos anteriormente apresentados.

**Exemplo 4.75.** 1. Vamos determinar a função soma da série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1}$  e o maior intervalo aberto em que a função obtida representa a série considerada.

Temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x}{3} \left(\frac{x}{3}\right)^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{3} (-1)^n \left(\frac{x^2}{9}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{3} \left(-\frac{x^2}{9}\right)^n \\ &= \frac{x}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{x^2}{9}\right)^n \\ &= \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x^2}{9}\right)} \\ &= \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{9}} \\ &= \frac{3x}{9+x^2} \end{aligned}$$

$$\text{para todo } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } \left| -\frac{x^2}{9} \right| < 1.$$

Temos então

$$\frac{3x}{9+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1},$$

$$\text{para todo } x \in ]-3, 3[.$$

2. Vamos determinar a função soma da série de potências  $\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{x}{2}\right)^n$  e o maior intervalo aberto em que a função obtida representa a série considerada.

Temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{x}{2}\right)^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{2} n \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \\
 &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \\
 &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)' \\
 &= x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n\right)' \\
 &= x \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{2}}\right)' \\
 &= x \left(\frac{2}{2-x}\right)' \\
 &= \frac{2x}{(2-x)^2},
 \end{aligned}$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ .

Temos então

$$\frac{2x}{(2-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{x}{2}\right)^n,$$

para todo o  $x \in ]-2, 2[$ .

3. Vamos determinar a função soma da série de potências  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{5}\right)^n$  e o maior intervalo aberto em que a função obtida representa a série considerada.

Temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{5}\right)^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{5}\right)^{n+1} \\
 &= -\ln\left(1 - \frac{x}{5}\right) \\
 &= -\ln\frac{5-x}{5} \\
 &= \ln\frac{5}{5-x},
 \end{aligned}$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\left|\frac{x}{5}\right| < 1$ .

Temos então

$$\ln\frac{5}{5-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{5}\right)^n,$$

para todo o  $x \in ]-5, 5[$ .

**Exercícios 4.6** 1. Em cada uma das alíneas que se apresentam a seguir, determine a série de Taylor da função considerada no ponto indicado e verifique se a função é analítica nesse ponto:

- (a)  $f(x) = e^{2x}$  em  $a = 0$ ;  
 (b)  $f(x) = \frac{1}{x}$  em  $a = 1$ ;  
 (c)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  em  $a = 1$ ;  
 (d)  $f(x) = \sin x$  em  $a = \frac{\pi}{2}$ .

2. Utilizando algumas das propriedades estabelecidas para as séries numéricas na Proposição 3.9, as propriedades estabelecidas para as séries de potências na Observação 4.60 e as representações

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \text{ para todo } x \in ]-1, 1[ \\ -\ln(1-x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \text{ para todo } x \in ]-1, 1[ \end{aligned}$$

obtenha uma representação em série de potências para cada uma das funções consideradas nas alíneas que se seguem e indique o maior intervalo aberto em que a representação indicada é válida.

- (a)  $f(x) = \frac{x}{x-1}$   
 (b)  $f(x) = e^{-x}$   
 (c)  $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$   
 (d)  $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$   
 (e)  $f(x) = \frac{x+1}{1-x}$   
 (f)  $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$   
 (g)  $f(x) = \frac{2}{1-x^2}$   
 (h)  $f(x) = \ln(1-x^2)$   
 (i)  $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$   
 (j)  $f(x) = \sin(x^2)$   
 (k)  $f(x) = xe^x$   
 (l)  $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

**Observação:** Note que  $\int_0^x e^{-t^2} dt$  representa a primitiva da função  $\varphi$  definida por  $\varphi(t) = e^{-t^2}$  que se anula na origem.

- (m)  $f(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$

**Observação:** Note que  $\int_0^x \sin(t^2) dt$  representa a primitiva da função  $\varphi$  definida por  $\varphi(t) = \sin(t^2)$  que se anula na origem.

3. Para cada uma das séries de potências indicadas, determine o domínio de convergência e a sua função soma para os valores de  $x$  onde a série converge.

(a)  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1)x^{2n}$

(b)  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n}$

(c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} x^n$

(d)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$

## 4.5 Séries de Fourier

Nesta secção vamos fazer uma abordagem ao estudo de um tipo particular de séries de funções, as séries de Fourier, debruçando-nos em particular sobre as séries trigonométricas de Fourier que, por sua vez, constituem um caso particular das séries de funções habitualmente designadas séries trigonométricas <sup>3</sup>.

As séries trigonométricas de Fourier constituem um instrumento matemático importante pelas suas aplicações à Física, já que permitem representar funções periódicas descontínuas através de uma série trigonométrica.

### 4.5.1 Introdução

No caso geral, a determinação da série de Fourier associada a uma função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em  $[a, b]$ , consiste em determinar uma série de funções definidas em  $[a, b]$  do tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi_n(x), \quad (4.42)$$

onde:

1. para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $a_n \in \mathbb{R}$ ;
2. as funções  $\varphi_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integráveis em  $[a, b]$  satisfazem as condições:
  - a) para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $\varphi_n$  é não nula;
  - b) para todos os  $n, m \in \mathbb{N}_0$ , se  $n \neq m$ , então

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0;$$

- c) a única função  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz a condição

$$\int_a^b g(x) \varphi_n(x) dx = 0,$$

---

<sup>3</sup>Chama-se *série trigonométrica* a toda a série de funções do tipo  $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ , onde, para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ .

para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ , é a função nula.

Colocam-se então duas questões:

- saber associar à função  $f$  uma série de funções do tipo (4.42);
- estabelecer condições que garantam que a série obtida é convergente e tem soma  $f$ .

Observe-se que, se supusermos que a série (4.42) converge uniformemente em  $[a, b]$  para a função  $f$  temos, para todo o  $k \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx &= \int_a^b \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi_n(x) \varphi_k(x) \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_a^b a_n \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( a_n \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx \right). \end{aligned}$$

Uma vez que, para todo o  $k \in \mathbb{N}_0$

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx = \begin{cases} \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \end{cases}$$

a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left( a_n \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx \right)$  é convergente e tem soma  $a_k \int_a^b \varphi_k^2(x) dx$ .

Obtemos então a igualdade

$$\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = a_k \int_a^b \varphi_k^2(x) dx,$$

donde resulta, atendendo a que  $\int_a^b \varphi_k^2(x) dx \neq 0$ ,

$$a_k = \frac{\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx}{\int_a^b \varphi_k^2(x) dx}, \quad (4.43)$$

para todo o  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Aos números reais obtidos pela fórmula (4.43) chamamos *coeficientes de Fourier* da função  $f$  e à série (4.42) onde, para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $a_n$  é dado pela igualdade (4.43) chamamos *série de Fourier* associada à função  $f$ .

Note-se que, se existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f = \varphi_n$ , temos  $a_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases}$  e, portanto, a série de Fourier associada a  $f$  é a série que tem todos os termos nulos, excepto o termo de ordem  $n$  que coincide com  $f$ . Neste caso, a determinação da série de Fourier associada a  $f$  é um problema sem interesse.

### 4.5.2 Séries Trigonométricas de Fourier

Nesta secção vamos estudar o caso particular em que as funções  $\varphi_n$  são os elementos do conjunto

$$\{\cos(mx), \sin(nx), m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}\} = \{1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \dots\}. \quad (4.44)$$

Consideramos em primeiro lugar o caso em que a função  $f$  ou é uma função integrável definida num intervalo de amplitude  $2\pi$ , ou seja, definida num intervalo do tipo  $[a, a + 2\pi]$ , com  $a \in \mathbb{R}$ , ou é uma função integrável e periódica de período  $2\pi$ .

Observe-se que as funções consideradas no conjunto (4.44) satisfazem, em qualquer intervalo do tipo  $[a, a + 2\pi]$ , com  $a \in \mathbb{R}$ , as condições a), b) e c) anteriormente referidas. De facto:

1. todas as funções consideradas neste conjunto são não nulas em  $[a, a + 2\pi]$  e, portanto, a) verifica-se;
2. verificam-se as condições seguintes:

- i) para todo o  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\int_a^{a+2\pi} \cos(mx) dx = 0$ ;
- ii) para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_a^{a+2\pi} \sin(nx) dx = 0$ ;
- iii) para todos os  $m, m' \in \mathbb{N}$ , se  $m \neq m'$ , então  $\int_a^{a+2\pi} \cos(mx) \cos(m'x) dx = 0$ ;
- iv) para todos os  $n, n' \in \mathbb{N}$ , se  $n \neq n'$ , então  $\int_a^{a+2\pi} \sin(nx) \sin(n'x) dx = 0$ ;
- v) para todos os  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $\int_a^{a+2\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0$ .

Podemos então concluir, a partir das condições i) a v), cuja verificação é deixada como exercício, que b) se verifica;

3. a única função  $g : [a, a + 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz as condições

- $\int_a^{a+2\pi} g(x) dx = 0$ ;
- para todo o  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\int_a^{a+2\pi} g(x) \cos(mx) dx = 0$ ;
- para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_a^{a+2\pi} g(x) \sin(nx) dx = 0$ ;

é a função nula e, portanto, c) verifica-se.

Utilizando as funções do conjunto (4.44) a série de Fourier obtida é do tipo

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (4.45)$$

onde os coeficientes  $a_m$ , com  $m \in \mathbb{N}_0$  e  $b_n$  com  $n \in \mathbb{N}$  se calculam utilizando a fórmula (4.43). Esta série designa-se **série trigonométrica de Fourier associada à função  $f$** . No que se segue e, por uma questão

de simplificação de linguagem, designaremos a série trigonométrica de Fourier associada a uma função  $f$  por **série de Fourier associada à função  $f$** .

Vamos também considerar o caso em que  $f$  é uma função integrável definida num intervalo do tipo  $[a, a+T]$ , com  $a \in \mathbb{R}$  e  $T \in \mathbb{R}^+$  ou é uma função integrável e periódica de período  $T$  e, como veremos, cada um destes dois casos pode ser reduzido a um dos casos anteriores efectuando uma conveniente mudança de variável. Obteremos então, em cada um destes casos, uma série de Fourier do tipo

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi nx}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{T} \right),$$

onde os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ , com  $n \in \mathbb{N}$  se obtêm utilizando a fórmula (4.43), efectuando uma conveniente mudança de variável. Note-se que, por uma questão de simplificação de notação, escrevemos  $\cos \frac{2\pi nx}{T}$  e  $\sin \frac{2\pi nx}{T}$  em lugar de  $\cos \left( \frac{2\pi nx}{T} \right)$  e  $\sin \left( \frac{2\pi nx}{T} \right)$ , respectivamente. Também neste caso a série obtida é designada série de Fourier associada à função  $f$ .

Passamos agora à determinação da série de Fourier associada a cada uma das funções do tipo referido.

• **Série de Fourier associada a uma função definida num intervalo de amplitude  $2\pi$**

Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $f: [a, a+2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em  $[a, a+2\pi]$ . Neste caso, como já foi referido, a série de Fourier associada a  $f$  é uma série do tipo (4.45), cujos coeficientes se obtêm utilizando a fórmula (4.43). Vamos determinar então as expressões para os coeficientes de Fourier da função  $f$ .

Temos, para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$ ,

$$a_m = \frac{\int_a^{a+2\pi} f(x) \cos(mx) dx}{\int_a^{a+2\pi} \cos^2(mx) dx}$$

e, uma vez que,

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(0x) dx = \int_a^{a+2\pi} dx = 2\pi$$

e, para todo o  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} \cos^2(mx) dx &= \int_a^{a+2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos(2mx)) dx \\ &= \left[ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4m} \sin(2mx) \right]_a^{a+2\pi} \\ &= \frac{1}{2}a + \pi + \frac{1}{4m} \sin(2ma + 4\pi) - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4m} \sin(2ma) \\ &= \pi \end{aligned}$$

temos

$$a_m = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos(mx) dx & \text{se } m \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) dx & \text{se } m = 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

Por outro lado, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$b_n = \frac{\int_a^{a+2\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx}{\int_a^{a+2\pi} \operatorname{sen}^2(nx) dx}$$

e, uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} \operatorname{sen}^2(nx) dx &= \int_a^{a+2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos(2nx)) dx \\ &= \left[ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4n} \operatorname{sen}(2nx) \right]_a^{a+2\pi} \\ &= \frac{1}{2}a + \pi - \frac{1}{4n} \operatorname{sen}(2na + 4n\pi) - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4n} \operatorname{sen}(2na) \\ &= \pi \end{aligned}$$

temos, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx. \quad (4.47)$$

Consequentemente, a série de Fourier associada à função  $f$  é a série

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$$

cujos coeficientes são dados pelas expressões (4.46) e (4.47).

Uma vez que

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos(0x) dx,$$

a série de Fourier associada a  $f$  é habitualmente apresentada na forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$$

com  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos(0x) dx$ .

Com esta notação podemos escrever, para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$ ,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos(mx) dx.$$

Formalizando, podemos apresentar a seguinte definição:

**Definição 4.76.** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $f : [a, a + 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em  $[a, a + 2\pi]$ . Chama-se *série de Fourier associada à função  $f$*  à série de funções

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)), \quad (4.48)$$



onde, para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$ ,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos(mx) dx \quad (4.49)$$

e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin(nx) dx. \quad (4.50)$$

Aos coeficientes da série (4.48) dados pelas expressões (4.49) e (4.50) chamamos **coeficientes de Fourier** da função  $f$ .

Para exprimir que a série (4.48) está associada à função  $f$  escrevemos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

para todo o  $x \in [a, a+2\pi]$ .

**Exemplo 4.77.** 1. Consideremos a função  $f$  definida em  $[-\pi, \pi]$  por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \pi] \\ -1 & \text{se } x \in [-\pi, 0[ \end{cases}$$

A função  $f$  é integrável em  $[-\pi, \pi]$  já que é limitada neste intervalo e contínua em todos os pontos deste intervalo excepto num ponto. Vamos determinar a série de Fourier associada à função  $f$ . Temos

– para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$ ,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = 0$$

já que a função integranda é uma função ímpar em  $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$  e o intervalo de integração é simétrico relativamente à origem;

– para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

já que a função integranda é uma função par e o intervalo de integração é simétrico relativamente à origem.

Uma vez que

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x) \operatorname{sen}(nx) dx &= \int_0^\pi \operatorname{sen}(nx) dx \\ &= -\frac{1}{n} \cos(nx) \Big|_0^\pi \\ &= -\frac{1}{n} \cos(n\pi) + \frac{1}{n} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{2}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}\end{aligned}$$

temos

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

A série de Fourier associada à função  $f$  é então

$$\frac{4}{\pi} \operatorname{sen} x + \frac{4}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} + \frac{4}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5} + \dots,$$

que pode ser escrita na forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \frac{\operatorname{sen}((2n-1)x)}{2n-1}.$$

Podemos então escrever, para todo o  $x \in [-\pi, \pi]$ ,

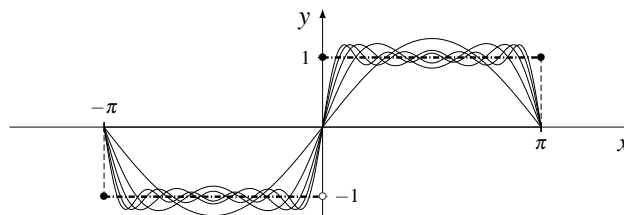
$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \operatorname{sen} x + \frac{4}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} + \frac{4}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5} + \dots,$$

ou seja

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \frac{\operatorname{sen}((2n-1)x)}{2n-1}.$$

Observe-se que, neste caso, a função  $f$  é uma função ímpar e a série de Fourier que lhe está associada é uma série de senos.

Na figura seguinte estão representados os gráficos de  $f$  e de alguns dos primeiros termos da sucessão das somas parciais da série de Fourier obtida.



Observe-se que, à excepção do primeiro termo, os gráficos dos termos da sucessão das somas parciais aproximam-se do gráfico de  $f$  em todos os pontos, excepto nos extremos do intervalo e no ponto em que a função é descontínua.

2. Consideremos a função  $f$  definida em  $[-\pi, \pi]$  por  $f(x) = |x|$ .

A função  $f$  é contínua, logo integrável em  $[-\pi, \pi]$ . Vamos determinar a série de Fourier associada à função  $f$ . Temos

– para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx = 0$$

já que a função integranda é uma função ímpar e o intervalo de integração é simétrico relativamente à origem;

– para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$ ,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(mx) dx$$

já que a função integranda é uma função par e o intervalo de integração é simétrico relativamente à origem.

Temos então

$$a_0 = \frac{x^2}{\pi} \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Uma vez que, para todo o  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x) \cos(mx) dx &= \int_0^{\pi} x \cos(mx) dx \\ &= \left[ \frac{1}{m} x \operatorname{sen}(mx) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{m} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(mx) dx \\ &= \frac{\pi}{m} \operatorname{sen}(m\pi) + \left[ \frac{1}{m^2} \cos(mx) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{m^2} \cos(m\pi) - \frac{1}{m^2} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ é par} \\ -\frac{2}{m^2} & \text{se } m \text{ é ímpar} \end{cases} \end{aligned}$$

temos

$$a_m = \begin{cases} \pi & \text{se } m = 0 \\ 0 & \text{se } m \in \mathbb{N} \text{ é par} \\ -\frac{4}{m^2 \pi} & \text{se } m \in \mathbb{N} \text{ é ímpar} \end{cases}$$

A série de Fourier associada à função  $f$  é então

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{4 \cos(3x)}{\pi 3^2} - \frac{4 \cos(5x)}{\pi 5^2} - \dots$$

que pode ser escrita na forma

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( -\frac{4 \cos((2n-1)x)}{\pi (2n-1)^2} \right)$$

Podemos então escrever

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos(3x)}{3^2} - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos(5x)}{5^2} - \dots$$

para todo o  $x \in [-\pi, \pi]$ .

Observe-se que, neste caso, a função considerada é uma função par e a série de Fourier que lhe está associada é uma série de cossenos.

3. Consideremos a função  $f$  definida em  $[-\pi, \pi]$  por  $f(x) = x$ .

A função  $f$  é contínua, logo integrável em  $[-\pi, \pi]$ . Vamos determinar a série de Fourier associada à função  $f$ . Temos

- para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$ ,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = 0$$

já que a função integranda é uma função ímpar e o intervalo de integração é simétrico relativamente à origem;

- para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

já que a função integranda é uma função par e o intervalo de integração é simétrico relativamente à origem.

Uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx &= \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{n} x \cos(nx) \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \\ &= -\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) + \left[ \frac{1}{n^2} \sin(nx) \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) \\ &= \begin{cases} -\frac{\pi}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{\pi}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

temos

$$b_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n},$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

A série de Fourier associada à função  $f$  é então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \operatorname{sen}(nx)}{n} = 2 \operatorname{sen} x - \frac{2 \operatorname{sen}(2x)}{2} + \frac{2 \operatorname{sen}(3x)}{3} - \frac{2 \operatorname{sen}(4x)}{4} + \frac{2 \operatorname{sen}(5x)}{5} - \dots$$

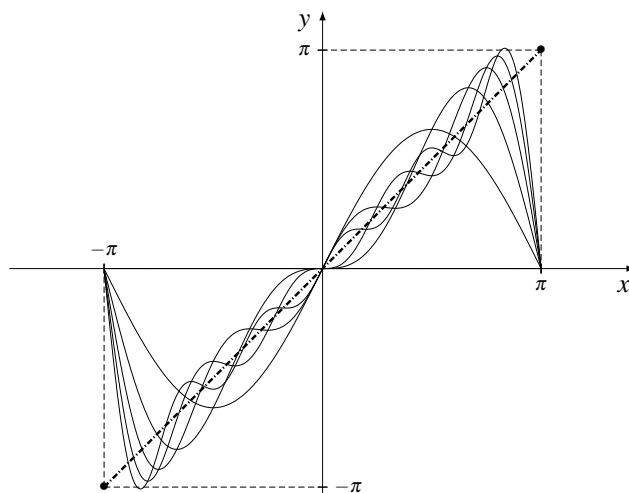
e, portanto, podemos escrever

$$x \sim \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \operatorname{sen}(nx)}{n},$$

para todo o  $x \in [-\pi, \pi]$ .

Observe-se que, neste caso, a função considerada é uma função ímpar e a série de Fourier que lhe está associada é uma série de senos.

Na figura seguinte estão representados os gráficos da função  $f$  e de alguns dos primeiros termos da sucessão das somas parciais da série de Fourier obtida.



Observe-se que, à excepção do primeiro termo, os gráficos dos termos da sucessão das somas parciais da série de Fourier obtida aproximam-se do gráfico de  $f$  em todos os pontos do intervalo em que a função está definida, excepto nos extremos do intervalo.

4. Consideremos a função  $f$  definida em  $[-\pi, \pi]$  por  $f(x) = x + x^2$ .

A função  $f$  é contínua, logo integrável em  $[-\pi, \pi]$ . Vamos determinar a série de Fourier associada à função  $f$ . Temos

– para todo o  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + x^2) \cos(mx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(mx) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(mx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(mx) dx, \end{aligned}$$

já que, no primeiro integral, a função integranda é uma função ímpar e o intervalo de

integração é simétrico relativamente à origem e, no segundo integral, a função integranda é uma função par e o intervalo de integração é simétrico relativamente à origem.

Uma vez que

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi x^2 \cos(mx) dx &= \left[ \frac{1}{m} x^2 \sin(mx) \right]_0^\pi - \frac{2}{m} \int_0^\pi x \sin(mx) dx \\
 &= \frac{\pi^2}{m} \sin(m\pi) - \frac{2}{m} \int_0^\pi x \sin(mx) dx \\
 &= \left[ \frac{2}{m^2} x \cos(mx) \right]_0^\pi - \frac{2}{m^2} \int_0^\pi \cos(mx) dx \\
 &= \left[ \frac{2}{m^2} x \cos(mx) - \frac{2}{m^3} \sin(mx) \right]_0^\pi \\
 &= \frac{2\pi}{m^2} \cos(m\pi) - \frac{2}{m^3} \sin(m\pi) \\
 &= \frac{2\pi}{m^2} \cos(m\pi) \\
 &= \begin{cases} \frac{2\pi}{m^2} & \text{se } m \in \mathbb{N} \text{ é par} \\ -\frac{2\pi}{m^2} & \text{se } m \in \mathbb{N} \text{ é ímpar} \end{cases} \\
 &= (-1)^m \frac{2\pi}{m^2}
 \end{aligned}$$

temos, para todo o  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$a_m = (-1)^m \frac{4}{m^2}.$$

Para  $m = 0$  vem

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi (x + x^2) dx \\
 &= \left[ \frac{x^2}{2\pi} + \frac{x^3}{3\pi} \right]_{-\pi}^\pi \\
 &= \frac{2\pi^2}{3}.
 \end{aligned}$$

– para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi (x + x^2) \sin(nx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi x \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi x^2 \sin(nx) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx
 \end{aligned}$$

já que, no primeiro integral, a função integranda é uma função par e o intervalo de integração é simétrico relativamente à origem e, no segundo integral, a função integranda é uma função ímpar e o intervalo de integração é simétrico relativamente à origem.

Uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^\pi x \operatorname{sen}(nx) dx = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n}$$

temos

$$b_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n},$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

A série de Fourier associada à função  $f$  é então

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( (-1)^n \frac{4 \cos(nx)}{n^2} + (-1)^{n+1} \frac{2 \operatorname{sen}(nx)}{n} \right)$$

e, portanto, podemos escrever

$$x + x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( (-1)^n \frac{4 \cos(nx)}{n^2} + (-1)^{n+1} \frac{2 \operatorname{sen}(nx)}{n} \right),$$

para todo o  $x \in [-\pi, \pi]$ .

5. Seja  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em  $[-\pi, \pi]$ . Suponhamos que  $f$  é uma função ímpar e vamos verificar que a série de Fourier associada a esta função é uma série de senos.

Temos

- para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$ ,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = 0$$

já que a função integranda é uma função ímpar e o intervalo de integração é simétrico relativamente à origem;

- para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \operatorname{sen}(nx) dx$$

já que a função integranda é uma função par e o intervalo de integração é simétrico relativamente à origem.

A série de Fourier associada à função  $f$  é uma série do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

e, portanto, é uma série de senos.

6. Seja  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em  $[-\pi, \pi]$ . Suponhamos que  $f$  é uma função par e vamos verificar que a série de Fourier associada a esta função é uma série de cossenos.

Temos

– para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$ ,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(mx) dx$$

já que a função integranda é uma função par e o intervalo de integração é simétrico relativamente à origem;

– para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0,$$

já que a função integranda é uma função ímpar e o intervalo de integração é simétrico relativamente à origem.

A série de Fourier associada à função  $f$  é uma série do tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$$

e, portanto, é uma série de cossenos.

**Observação 4.78.** Seja  $f$  uma função definida em  $[a, a+2\pi]$ , excepto num número finito de pontos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  deste intervalo. Admitamos que  $f$  é limitada em  $[a, a+2\pi] \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

Admita-se que se tem  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq a+2\pi$  e que  $f$  é contínua em todo o intervalo  $]x_{i-1}, x_i[$ , com  $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ , é contínua no intervalo  $]a, x_1[$ , sempre que  $a < x_1$  e é contínua no intervalo  $]x_n, a+2\pi[$  sempre que  $x_n < a+2\pi$ .

Uma vez que  $f$  é limitada temos que, para todo o  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x)$  são ambos finitos. Note-se que, uma vez que a função  $f$  não está definida nos pontos do conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset [a, a+2\pi]$  não podemos definir a série de Fourier associada à função  $f$ . No entanto, como veremos a seguir, podemos construir uma série de Fourier cujos coeficientes dependem da função  $f$  e que convencionaremos designar série de Fourier associada à função  $f$ .

Seja  $g$  uma extensão de  $f$  ao intervalo  $[a, a+2\pi]$ , isto é, seja  $g$  uma função definida em  $[a, a+2\pi]$  tal que, para todo o  $x \in [a, a+2\pi] \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $g(x) = f(x)$ .

Note-se que, para todo o  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , tem-se  $g(x_i) = k_i$ , com  $k_i \in \mathbb{R}$  podendo ter-se, em particular,  $g(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x)$  ou  $g(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x)$ .

Atendendo à forma como  $g$  está definida, temos que  $g$  é contínua em  $[a, a+2\pi]$  excepto possivelmente num número finito de pontos deste intervalo, logo integrável em  $[a, a+2\pi]$  e, portanto, podemos determinar a série de Fourier associada a  $g$ .

Temos

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

onde, para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$ ,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} g(x) \cos(mx) dx$$



e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} g(x) \operatorname{sen}(nx) dx.$$

Sendo  $h$  uma outra restrição de  $f$  a  $[a, a+2\pi]$  temos que  $h$  é integrável em  $[a, a+2\pi]$  e, portanto, podemos também determinar a série de Fourier associada a  $h$ . Obtemos então

$$h(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)),$$

onde, para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$ ,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} h(x) \cos(mx) dx$$

e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} h(x) \operatorname{sen}(nx) dx.$$

Uma vez que  $g$  e  $h$  são duas funções integráveis em  $[a, a+2\pi]$  que coincidem em todos os pontos deste intervalo, excepto num número finito de pontos, podemos concluir que, para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\int_a^{a+2\pi} g(x) \cos(mx) dx = \int_a^{a+2\pi} h(x) \cos(mx) dx$$

e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} g(x) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} h(x) \operatorname{sen}(nx) dx.$$

Consequentemente, a série de Fourier associada à função  $g$  coincide com a série de Fourier associada à função  $h$ .

**Exemplo 4.79.** Consideremos a função  $f$  definida em  $]-\pi, \pi[ \setminus \{0\}$  por  $f(x) = |x|$ .

A função  $g_1$  definida por

$$g_1(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \in ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x \in \{-\pi, \pi\} \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

a função  $g_2$  definida por

$$g_2(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \in ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\} \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x \in \{-\pi, 0, \pi\} \end{cases}$$

e a função  $g_3$  definida por

$$g_3(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\} \\ \pi & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

são extensões de  $f$  a  $[-\pi, \pi]$ .

Não é difícil verificar que, para todo o  $i \in \{1, 2, 3\}$ , os coeficientes de Fourier da função  $g_i$  coincidem com os coeficientes da função módulo no intervalo  $[-\pi, \pi]$  e, portanto, atendendo ao Exemplo 4.77, temos

$$g_i(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( -\frac{4}{\pi} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} \right),$$

para todo o  $x \in [-\pi, \pi]$  e, para todo o  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Observe-se também que, sendo  $g$  uma qualquer extensão de  $f$ , existem  $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$  tais que  $g$  é a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [a, a+2\pi] \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ k_i & \text{se } x = x_i, \text{ para } i \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}$$

Atendendo à forma como  $g$  está definida, temos, para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} g(x) \cos(mx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_a^{x_1} f(x) \cos(mx) dx + \sum_{k=2}^n \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \cos(mx) dx \right) + \int_{x_n}^{a+2\pi} f(x) \cos(mx) dx \right), \end{aligned}$$

e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} g(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_a^{x_1} f(x) \sin(nx) dx + \sum_{k=2}^n \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \sin(nx) dx \right) + \int_{x_n}^{a+2\pi} f(x) \sin(nx) dx \right). \end{aligned}$$

e, portanto, os coeficientes de Fourier da função  $g$  dependem apenas da função  $f$ .

A série de Fourier associada a qualquer extensão de  $f$  é, por convenção, a série de Fourier associada à função  $f$  e, aos coeficientes de Fourier de qualquer extensão da função  $f$  chamamos coeficientes de Fourier da função  $f$ .

Tendo em atenção o que foi dito, podemos afirmar que, por convenção, a série de Fourier associada a uma função  $f$  definida num intervalo  $[a, a+2\pi]$ , excepto num número finito de pontos  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq a+2\pi$  deste intervalo, limitada em  $[a, a+2\pi] \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , contínua em todo o intervalo  $]x_{i-1}, x_i[$ , com  $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ , contínua no intervalo  $]a, x_1[$ , sempre que  $a < x_1$  e contínua no intervalo  $]x_n, a+2\pi[$  sempre que  $x_n < a+2\pi$ , é a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(mx) + b_n \sin(nx)) \quad (4.51)$$

onde

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_a^{x_1} f(x) \cos(mx) dx + \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{\pi} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \cos(mx) dx \right) + \frac{1}{\pi} \int_{x_n}^{a+2\pi} f(x) \cos(mx) dx, \quad (4.52)$$

para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$ , e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{x_1} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx + \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{\pi} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx \right) + \frac{1}{\pi} \int_{x_n}^{a+2\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx, \quad (4.53)$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 4.80.** 1. Consideremos a função  $f$  definida em  $] -\pi, \pi]$  por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Neste caso os coeficientes de Fourier da função  $f$  são dados por

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx,$$

para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$ , e por

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx,$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Atendendo ao Exemplo 4.77, temos que

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \left( -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{sen}((2n-1)x)}{2n-1} \right),$$

para todo o  $x \in ] -\pi, \pi]$ .

2. Consideremos a função  $f$  definida em  $] -\pi, \pi[ \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$  por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\pi < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

Temos

$$- a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi/2} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi/2} dx = \frac{3}{2};$$

– para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi/2} f(x) \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi/2} \cos(nx) dx \\
 &= \left. \frac{1}{n\pi} \sin(nx) \right]_{-\pi}^{\pi/2} \\
 &= \frac{1}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi) \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{se } n \in \mathbb{N} \text{ é par} \\ \frac{1}{n\pi} & \text{se } n \in \{1, 5, 9, \dots\} \\ -\frac{1}{n\pi} & \text{se } n \in \{3, 7, 11, \dots\} \end{cases}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi/2} f(x) \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi/2} \sin(nx) dx \\
 &= \left. -\frac{1}{n\pi} \cos(nx) \right]_{-\pi}^{\pi/2} \\
 &= -\frac{1}{n\pi} \cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) \\
 &= \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{se } n \in \{2, 6, 10, \dots\} \\ 0 & \text{se } n \in \{4, 8, 12, \dots\} \\ -\frac{1}{n\pi} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Então a série de Fourier associada a  $f$  é a série

$$\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( (-1)^{n+1} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos((2n-1)x)}{2n-1} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin((4n-2)x)}{4n-2} \right),$$

ou seja,

$$\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( (-1)^{n+1} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos((2n-1)x)}{2n-1} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin((4n-2)x)}{2n-1} \right).$$

• **Série de Fourier associada a uma função periódica de período  $2\pi$**

Suponhamos que a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função integrável em qualquer intervalo de amplitude  $2\pi$  e periódica <sup>4</sup> de período  $2\pi$ .

<sup>4</sup>Dizemos que uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é *periódica* se existe  $T > 0$  tal que, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(x+T)$ .

Uma vez que, para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , as funções  $g_m$  e  $h_n$  definidas, respectivamente, por  $g_m(x) = f(x) \cos(mx)$  e  $h_n(x) = f(x) \sin(nx)$  são periódicas de período  $2\pi$ , tem-se que

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) \cos(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx,$$

para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$ , e

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx,$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , e, portanto, os coeficientes de Fourier da função  $f$  em qualquer intervalo de amplitude  $2\pi$  coincidem com os seus coeficientes de Fourier no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , o que significa que, qualquer que seja o intervalo  $[a, a+2\pi]$ , com  $a \in \mathbb{R}$ , a série de Fourier associada à função  $f$  neste intervalo coincide com a série de Fourier associada à função  $f$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Consequentemente a série de Fourier associada à função  $f$  em  $\mathbb{R}$  é a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

onde, para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$ ,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx$$

e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

**Exemplo 4.81.** 1. Consideremos a função periódica de período  $2\pi$  definida em  $]-\pi, \pi]$  por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in ]-\pi, 0[ \\ 1 & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Os coeficientes de Fourier da função  $f$  são os coeficientes da sua restrição ao intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Tendo em atenção o Exemplo 4.80 temos  $a_m = 0$ , para todo o  $m \in \mathbb{N}$ , e

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Consequentemente, a série de Fourier associada à função  $f$  é a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$$

---

A  $T$  chamamos o *período* de  $f$  e ao menor valor de  $T$  que verifica a igualdade  $f(x) = f(x+T)$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ , chamamos *período fundamental*.

Prova-se o seguinte

**Teorema:** Se  $f$  é uma função periódica de período  $T$  então, para todo o  $a \in \mathbb{R}$ , temos

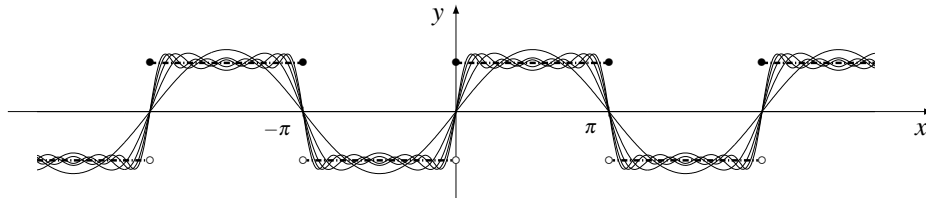
$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx.$$

pelo que

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1},$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

Um esboço de uma porção do gráfico de  $f$  bem como dos gráficos de alguns dos primeiros termos da sucessão das somas parciais estão representados na figura seguinte.



Observe-se que, à excepção do primeiro termo, os gráficos dos termos da sucessão das somas parciais da série de Fourier obtida se aproximam do gráfico de  $f$  em todos os pontos, excepto nos pontos em que a função é descontínua.

2. Consideremos a função periódica de período  $2\pi$  definida em  $]-\pi, \pi]$  por  $f(x) = x^2$ .

Os coeficientes de Fourier da função  $f$  são os coeficientes da sua restrição ao intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Temos então

$$\begin{aligned} - a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = 2\frac{\pi^2}{3}; \\ - \text{para todo o } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \\ &= (-1)^n \frac{4}{n^2}; \end{aligned}$$

– para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(nx) dx = 0$$

já que a função integranda é uma função ímpar e o intervalo de integração é simétrico relativamente à origem.

Consequentemente a série de Fourier associada à função  $f$  é a série

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4 \cos(nx)}{n^2}$$

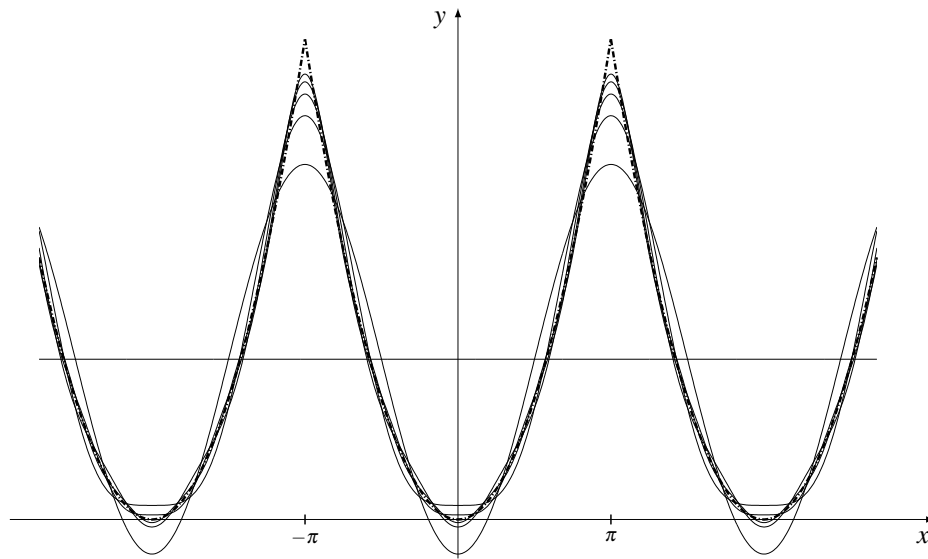
pelo que temos

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + 4 \frac{\cos(2x)}{2^2} - 4 \frac{\cos(3x)}{3^2} + \dots,$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

Na figura seguinte representam-se um esboço de uma porção do gráfico de  $f$ , bem como dos gráficos de alguns dos primeiros termos da sucessão das somas parciais da série de Fourier

associada à função.



Observe-se que, neste caso, a função é contínua em todos os pontos do domínio e, à exceção do primeiro termo, os gráficos dos termos da sucessão das somas parciais da série de Fourier obtida aproximam-se do gráfico de  $f$  em todos os pontos do domínio.

3. Consideremos a função periódica de período  $2\pi$  definida em  $[-\pi, \pi[$  por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, \pi[ \\ 0 & \text{se } x \in [-\pi, 0[ \end{cases}$$

Vamos determinar os coeficientes de Fourier da função  $f$ , ou seja, vamos determinar os coeficientes de Fourier da sua restrição ao intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

– Atendendo a que,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi^2}{2}$$

temos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

– Para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx \\
 &= \left[ \frac{1}{n\pi} x \sin(nx) \right]_0^\pi - \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \sin(nx) dx \\
 &= \left[ \frac{1}{n\pi} x \sin(nx) + \frac{1}{n^2\pi} \cos(nx) \right]_0^\pi \\
 &= \frac{1}{n} \sin(n\pi) + \frac{1}{n^2\pi} \cos(n\pi) - \frac{1}{n^2\pi} \\
 &= \frac{1}{n^2\pi} \cos(n\pi) - \frac{1}{n^2\pi} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{2}{n^2\pi} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}
 \end{aligned}$$

– Para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx \\
 &= \left[ -\frac{1}{n\pi} x \cos(nx) \right]_0^\pi + \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \cos(nx) dx \\
 &= \left[ -\frac{1}{n\pi} x \cos(nx) + \frac{1}{n^2\pi} \sin(nx) \right]_0^\pi \\
 &= -\frac{1}{n} \cos(n\pi) + \frac{1}{n^2\pi} \sin(n\pi) \\
 &= -\frac{1}{n} \cos(n\pi) \\
 &= \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \\
 &= (-1)^{n+1} \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

Consequentemente, a série de Fourier associada à função  $f$  é a série

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin(nx) \right)$$

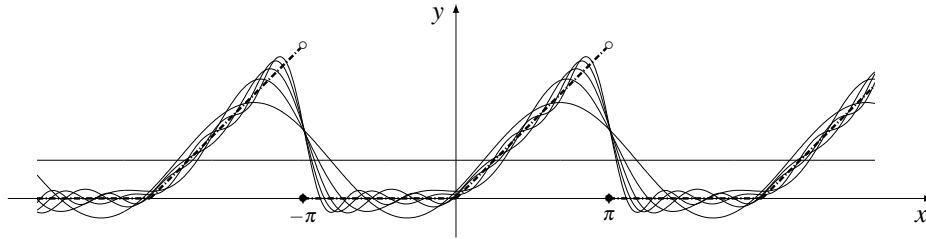
pelo que temos

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin(nx) \right),$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

Na figura seguinte representam-se um esboço de uma porção do gráfico de  $f$ , bem como de alguns dos primeiros termos da sucessão das somas parciais da série de Fourier obtida.





Observe-se que, à exceção do primeiro termo, os gráficos dos termos da sucessão das somas parciais da série de Fourier aproximam-se do gráfico de  $f$  em todos os pontos do domínio, à exceção dos pontos de descontinuidade.

4. Consideremos a função periódica de período  $2\pi$  definida em  $[-\pi, \pi[$  por

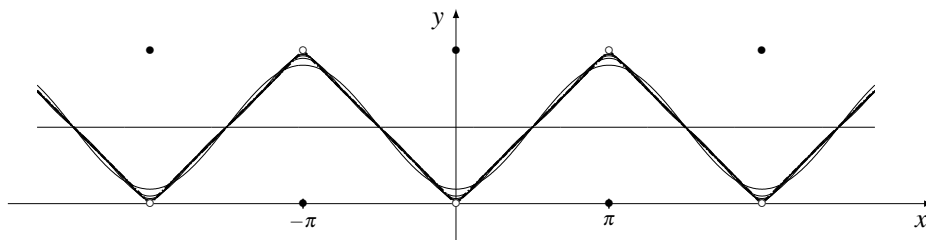
$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \in ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\} \\ \pi & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x = -\pi \end{cases}$$

Os coeficientes de Fourier da função  $f$  coincidem com os coeficientes de Fourier da sua restrição ao intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Pelas propriedades das funções integráveis, os coeficientes de Fourier da restrição de  $f$  ao intervalo  $[-\pi, \pi]$  coincidem com os coeficientes de Fourier da restrição da função módulo ao intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Utilizando o Exemplo 4.77 temos então

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \cos x - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos(3x)}{3^2} - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos(5x)}{5^2} - \dots,$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

Um esboço de uma porção do gráfico de  $f$ , bem como dos gráficos de alguns dos primeiros termos da sucessão das somas parciais da série de Fourier obtida, estão representados na figura seguinte.



Observe-se que, tal como nos casos anteriores, à exceção do primeiro termo, os gráficos dos termos da sucessão das somas parciais da série de Fourier aproximam-se do gráfico de  $f$  em todos os pontos do domínio, à exceção dos pontos de descontinuidade.

• **Série de Fourier associada a uma função definida num intervalo de amplitude  $T$ , com  $T \in \mathbb{R}^+$**

Seja  $f$  uma função definida num intervalo  $[a, a + T]$ , com  $a \in \mathbb{R}$ . Suponhamos que  $f$  é integrável neste intervalo. Utilizando uma substituição de variável adequada, podemos reduzir o problema

da determinação da série de Fourier associada a  $f$  em  $[a, a + T]$  à determinação da série de Fourier associada a uma nova função  $F$  definida num intervalo  $[a', a' + 2\pi]$ , com  $a' \in \mathbb{R}$ .

De facto, consideremos a função  $F$  definida por

$$F(t) = f\left(\frac{T}{2\pi}t\right). \quad (4.54)$$

Note-se que

$$x = a \implies \left(\frac{T}{2\pi}t = a \iff t = \frac{2\pi a}{T}\right)$$

e

$$x = a + T \implies \left(\frac{T}{2\pi}t = a + T \iff t = \frac{2\pi a}{T} + 2\pi\right)$$

pelo que  $F$  está definida no intervalo  $[a', a' + 2\pi]$  com  $a' = \frac{2\pi a}{T} \in \mathbb{R}$ .

Utilizando a Definição (4.76) temos que série de Fourier associada à função  $F$  em  $[a', a' + 2\pi]$  é a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

onde, para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$ ,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{a'}^{a'+2\pi} F(t) \cos(mt) dt \quad (4.55)$$

e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{a'}^{a'+2\pi} F(t) \sin(nt) dt. \quad (4.56)$$

Consequentemente temos

$$F(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

para todo o  $t \in [a', a' + 2\pi]$ .

Considere-se  $t = \frac{2\pi}{T}x$  com  $x \in [a, a + T]$ . Então  $t \in [a', a' + 2\pi]$  e, portanto, temos,

$$F(t) = F\left(\frac{2\pi x}{T}\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{T}\right).$$

Atendendo à igualdade (4.54) temos, para todo o  $x \in [a, a + T]$ ,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{T}\right), \quad (4.57)$$

onde os coeficientes  $a_m$ , com  $m \in \mathbb{N}_0$ , são dados pela expressão (4.55) e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , os coeficientes  $b_n$  são dados pela expressão (4.56).

Vamos ver que é possível obter, para os coeficientes da série de Fourier (4.57), uma expressão que depende da função  $f$  e do intervalo  $[a, a + T]$ .

– Seja  $m \in \mathbb{N}_0$ , arbitrário. Temos

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{a'}^{a'+2\pi} F(t) \cos(mt) dt$$

e, efectuando a mudança de variável definida por  $t = \frac{2\pi}{T}x$ , obtemos

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_a^{a+T} \frac{2\pi}{T} F\left(\frac{2\pi}{T}x\right) \cos \frac{2\pi mx}{T} dx, \\ &= \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \cos \frac{2\pi mx}{T} dx. \end{aligned}$$

– Seja  $n \in \mathbb{N}$ , arbitrário. Temos

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{a'}^{a'+2\pi} F(t) \sin(nt) dt$$

e, efectuando a mudança de variável definida por  $t = \frac{2\pi}{T}x$ , obtemos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_a^{a+T} \frac{2\pi}{T} F\left(\frac{2\pi}{T}x\right) \sin \frac{2\pi nx}{T} dx \\ &= \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \sin \frac{2\pi nx}{T} dx. \end{aligned}$$

Do que foi dito, resulta que a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi nx}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{T} \right) \quad (4.58)$$

onde, para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$ ,

$$a_m = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \cos \frac{2\pi mx}{T} dx \quad (4.59)$$

e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \sin \frac{2\pi nx}{T} dx \quad (4.60)$$

é a série de Fourier associada à função  $f$ .

**Exemplo 4.82.** Consideremos a função  $f$  definida em  $[-2, 2]$  por  $f(x) = x$ . Vamos determinar a série de Fourier associada à função  $f$ . Utilizando a expressão (4.59) temos, para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{4} \int_{-2}^2 x \cos \frac{2\pi mx}{4} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 x \cos \frac{\pi mx}{2} dx = 0 \end{aligned}$$

já que a função integranda é uma função ímpar e o intervalo de integração é simétrico relativamente à origem.

Utilizando a expressão (4.60) temos, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{4} \int_{-2}^2 x \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{4} dx \\ &= \int_0^2 x \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{2} dx \end{aligned}$$

já que a função integranda é uma função par e o intervalo de integração é simétrico relativamente à origem.

Consequentemente temos

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^2 x \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{2} dx \\ &= -\frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 + \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \cos \frac{\pi nx}{2} dx \\ &= -\frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 \\ &= -\frac{4}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}(n\pi) \\ &= -\frac{4}{n\pi} \cos(n\pi) \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{n\pi} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{4}{n\pi}. \end{aligned}$$

A série de Fourier associada a  $f$  é a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}$$

e podemos escrever, para todo o  $x \in [-2, 2]$ ,

$$x \sim \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}.$$

**Observação 4.83.** Suponhamos que a função  $f$  está definida no intervalo  $[a, a+T]$  excepto num número finito de pontos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  tais que  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq a+T$ , é contínua em todo o intervalo  $]x_{i-1}, x_i[$ , com  $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ , é contínua no intervalo  $]a, x_1[$ , sempre que  $a < x_1$  e é contínua no intervalo  $]x_n, a+T[$  sempre que  $x_n < a+T$ . Utilizando argumentos análogos aos que usámos na Observação 4.78, podemos associar a  $f$  a série de Fourier (4.58) com os coeficientes dados pelas expressões

$$a_m = \frac{2}{T} \int_a^{x_1} f(x) \cos \frac{2\pi mx}{T} dx + \sum_{k=2}^n \left( \frac{2}{T} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \cos \frac{2\pi mx}{T} dx \right) + \frac{2}{T} \int_{x_n}^{a+T} f(x) \cos \frac{2\pi mx}{T} dx, \quad (4.61)$$

para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$  e

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{x_1} f(x) \sin \frac{2\pi nx}{T} dx + \sum_{k=2}^n \left( \frac{2}{T} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \sin \frac{2\pi nx}{T} dx \right) + \frac{2}{T} \int_{x_n}^{a+T} f(x) \sin \frac{2\pi nx}{T} dx, \quad (4.62)$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 4.84.** Consideremos a função  $f$  definida em  $] -2, 2[ \setminus \{0\}$  por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in ] -2, 0[ \\ 0 & \text{se } x \in ]0, 2[ \end{cases}$$

Utilizando a expressão (4.61) temos, para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$ ,

$$a_m = \frac{2}{4} \int_{-2}^0 f(x) \cos \frac{2\pi mx}{4} dx + \frac{2}{4} \int_0^2 f(x) \cos \frac{2\pi mx}{4} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 x^2 \cos \frac{\pi mx}{2} dx$$

Se  $m = 0$  obtemos

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 x^2 dx = \frac{1}{2} \left( \frac{0}{3} + \frac{8}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

e, para todo o  $m \in \mathbb{N}$ , vem

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 x^2 \cos \frac{\pi mx}{2} dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{\pi m} \sin \frac{\pi mx}{2} \right]_{-2}^0 - \frac{2}{\pi m} \int_{-2}^0 x \sin \frac{\pi mx}{2} dx \\ &= -\frac{2}{\pi m} \int_{-2}^0 x \sin \frac{\pi mx}{2} dx \\ &= \left[ \frac{4x}{\pi^2 m^2} \cos \frac{\pi mx}{2} \right]_{-2}^0 - \frac{4}{\pi^2 m^2} \int_{-2}^0 \cos \frac{\pi mx}{2} dx \\ &= \frac{8}{\pi^2 m^2} \cos(-\pi m) - \left[ \frac{8}{\pi^3 m^3} \sin \frac{\pi mx}{2} \right]_{-2}^0 \\ &= \frac{8}{\pi^2 m^2} \cos(\pi m) + \frac{8}{\pi^3 m^3} \sin(-\pi m) \\ &= \frac{8}{\pi^2 m^2} \cos(\pi m) \\ &= \begin{cases} \frac{8}{\pi^2 m^2} & \text{se } m \text{ é par} \\ -\frac{8}{\pi^2 m^2} & \text{se } m \text{ é ímpar} \end{cases} \\ &= (-1)^m \frac{8}{\pi^2 m^2} \end{aligned}$$

Utilizando a expressão (4.62) temos, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{4} \int_{-2}^0 f(x) \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{4} dx + \frac{2}{4} \int_0^2 f(x) \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{4} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 x^2 \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{2} dx \\
 &= -\frac{x^2}{\pi n} \cos \frac{\pi nx}{2} \Big|_{-2}^0 + \frac{2}{\pi n} \int_{-2}^0 x \cos \frac{\pi nx}{2} dx \\
 &= \frac{4}{\pi n} \cos(-\pi n) + \left[ \frac{4}{\pi^2 n^2} x \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{2} \right]_{-2}^0 - \frac{4}{\pi^2 n^2} \int_{-2}^0 \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{2} dx \\
 &= \frac{4}{\pi n} \cos(\pi n) + \frac{8}{\pi^2 n^2} \operatorname{sen}(-\pi n) + \left[ \frac{8}{\pi^3 n^3} \cos \frac{\pi nx}{2} \right]_{-2}^0 \\
 &= \frac{4}{\pi n} \cos(\pi n) + \frac{8}{\pi^3 n^3} - \frac{8}{\pi^3 n^3} \cos(\pi n) \\
 &= \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{4}{\pi n} + \frac{16}{\pi^3 n^3} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}
 \end{aligned}$$

A série de Fourier associada à função  $f$  é a série

$$\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( (-1)^n \frac{8}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi nx}{2} + (-1)^n \frac{4}{\pi n} \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{2} + \frac{16}{\pi^3 (2n-1)^3} \operatorname{sen} \frac{\pi(2n-1)x}{2} \right)$$

e, portanto, temos

$$f(x) \sim \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( (-1)^n \frac{8}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi nx}{2} + (-1)^n \frac{4}{\pi n} \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{2} + \frac{16}{\pi^3 (2n-1)^3} \operatorname{sen} \frac{\pi(2n-1)x}{2} \right)$$

para todo o  $x \in ]-2, 2[ \setminus \{0\}$ .

• **Série de Fourier associada a uma função periódica de período  $T \in \mathbb{R}^+$**

Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $T$ . Utilizando argumentos análogos aos que foram utilizados para as funções periódicas de período  $2\pi$  temos que a série de Fourier associada à função  $f$  é a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi nx}{T} + b_n \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{T} \right)$$

com os coeficientes dados pelas expressões

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2\pi mx}{T} dx, \quad (4.63)$$

para todo o  $m \in \mathbb{N}_0$  e

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{T} dx, \quad (4.64)$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 4.85.** Consideremos a função  $f$  periódica de período  $T = 4$  definida em  $[-2, 2[$  por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in ]-2, 2[ \\ 0 & \text{se } x = -2 \end{cases}$$

Tendo em atenção o Exemplo 4.82, temos

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2},$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

### 4.5.3 Uma abordagem ao estudo da convergência de uma série trigonométrica de Fourier

Na subsecção anterior vimos como associar uma série de Fourier a uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica e integrável.

Como já referimos anteriormente, a série obtida pode ser ou não convergente e a sua soma pode coincidir ou não com a função  $f$ .

Consideremos, por exemplo, a função periódica de período  $2\pi$  definida em  $] -\pi, \pi]$  por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in ]-\pi, 0[ \\ 0 & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Temos

- $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 dx = 1$ ;
- para todo o  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos(mx) dx \\ &= \left. \frac{1}{m\pi} \operatorname{sen}(mx) \right]_{-\pi}^0 \\ &= -\frac{1}{m\pi} \operatorname{sen}(-m\pi) = 0; \end{aligned}$$

- para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \operatorname{sen}(nx) dx \\ &= \left. -\frac{1}{n\pi} \cos(nx) \right]_{-\pi}^0 \\ &= -\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n\pi} \cos(-n\pi) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{2}{n\pi} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \end{aligned}$$

Temos então

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} \right),$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

Seja  $S$  a função soma da série considerada.

Note-se que, se  $x = k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , obtemos a série cujos termos são todos nulos, excepto o primeiro que é igual a  $1/2$  que, como sabemos, é uma série convergente e tem soma  $1/2$ .

Temos então, para todo o  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $S(k\pi) = \frac{1}{2} \neq f(k\pi)$ . Observe-se que, para estes pontos, temos

$$f(k\pi^+) = \lim_{x \rightarrow (k\pi)^+} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ é par} \\ 1 & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

e

$$f(k\pi^-) = \lim_{x \rightarrow (k\pi)^-} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ é par} \\ 0 & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Podemos então escrever

$$S(k\pi) = \frac{f(k\pi^+) + f(k\pi^-)}{2}.$$

Se tomarmos  $x = \pi/2$  obtemos a série

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin((2n-1)\pi/2)}{2n-1} \right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \right).$$

Utilizando a série de Mac-Laurin que representa a função arcotangente temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$$

e, pelas propriedades das séries numéricas convergentes, obtemos a igualdade

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 0.$$

Temos então  $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

Se considerarmos, por exemplo, a função periódica de período  $2\pi$  definida em  $] -\pi, \pi]$  por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in ] -\pi, 0[ \\ 1 & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

temos

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$$

Sendo  $S$  a função soma da série de Fourier associada à função  $f$  temos, para todo o  $k \in \mathbb{Z}$ ,



$S(k\pi) = 0 \neq f(k\pi)$ . No entanto, também neste caso, temos

$$S(k\pi) = \frac{f(k\pi^+) + f(k\pi^-)}{2},$$

já que

$$f(k\pi^+) = \lim_{x \rightarrow (k\pi)^+} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ é par} \\ -1 & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

e

$$f(k\pi^-) = \lim_{x \rightarrow (k\pi)^-} f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } k \text{ é par} \\ 1 & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Se considerarmos  $x = \pi/2$  obtemos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin((2n-1)\pi/2)}{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

Uma vez mais, utilizando a série de Mac-Laurin que representa a função arcotangente temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$$

e, portanto,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1.$$

Temos então  $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

Nesta subsecção vamos apresentar, sem demonstração, dois teoremas que, sob certas condições, garantem a convergência pontual ou uniforme de uma série de Fourier. Veremos em particular que, sob certas condições, a série de Fourier associada a uma função  $f$  converge para a função  $f$  nos pontos de continuidade e, em cada ponto de descontinuidade, converge para a semi-soma dos limites laterais à esquerda e à direita do ponto, confirmando os resultados obtidos nos dois exemplos apresentados.

Antes de enunciarmos esses resultados temos de introduzir a seguinte definição.

**Definição 4.86.** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $T$  que é contínua em cada intervalo de amplitude  $T$ , excepto possivelmente num conjunto finito de pontos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  desse intervalo. Dizemos que  $f$  é *parcialmente contínua* se, para todo o  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , os limites laterais à esquerda e à direita de  $x_i$

$$f(x_i^+) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(x_i^-) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x)$$

são ambos finitos.

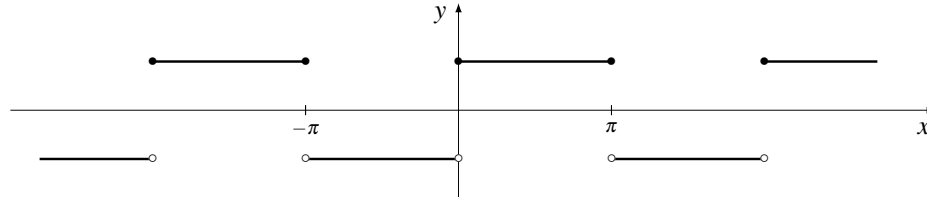
Resulta da Definição 4.86 que:

1. toda a função parcialmente contínua é integrável em qualquer intervalo de amplitude  $T$ ;
2. toda a função contínua é parcialmente contínua.

**Exemplo 4.87.** 1. Consideremos a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2\pi$  definida em  $]-\pi, \pi]$  por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Na figura que se segue apresenta-se um esboço de uma porção do gráfico de  $f$ .

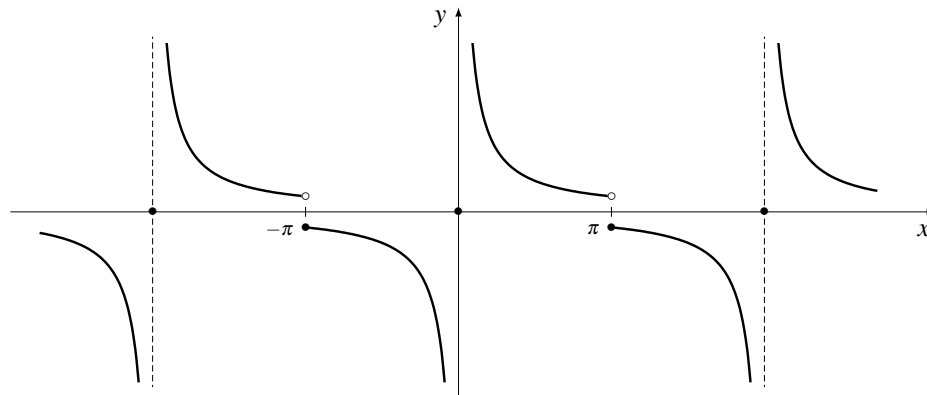


A função  $f$  é contínua em qualquer intervalo de amplitude  $2\pi$ , excepto num número finito de pontos deste intervalo, e os limites laterais à esquerda e à direita de cada um desses pontos são finitos. Então  $f$  é parcialmente contínua.

2. Consideremos a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2\pi$  definida em  $[-\pi, \pi[$  por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Na figura que se segue apresenta-se um esboço do gráfico de  $f$ .



Em qualquer intervalo de amplitude  $2\pi$  a função  $f$  é contínua em todos os pontos, excepto num número finito de pontos desse intervalo mas, atendendo a que, por exemplo,

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty,$$

temos que  $f$  não é parcialmente contínua.

O teorema que apresentamos a seguir vai permitir concluir que, sob certas condições, a série de Fourier associada a uma função periódica de período  $2\pi$  e parcialmente contínua converge pontualmente para uma função que coincide com  $f$  nos pontos de continuidade.

A demonstração deste teorema sai fora do âmbito deste curso, pelo que é omitida.

**Teorema 4.88.** *Sejam  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2\pi$  parcialmente contínua e  $c \in \mathbb{R}$ . Suponha-se que os limites*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c^+)}{h} \quad e \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c^-)}{h}$$

*existem e são finitos.*

*Então a série de Fourier associada à função  $f$  converge no ponto  $c$  para  $\frac{1}{2}(f(c^+) + f(c^-))$ , ou seja,*

$$\frac{1}{2}(f(c^+) + f(c^-)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nc) + b_n \sin(nc)).$$

**Observação 4.89.** 1. Resulta do Teorema 4.88 que, sendo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2\pi$ , parcialmente contínua e  $c \in \mathbb{R}$ , se  $f$  é contínua em  $c$  e os limites

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c^+)}{h} \quad e \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c^-)}{h}$$

existem e são finitos, então a série de Fourier associada a  $f$  converge em  $c$  para  $f(c)$ , ou seja,

$$f(c) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

uma vez que  $f(c^+) = f(c) = f(c^-)$ .

2. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2\pi$  e parcialmente contínua tal que, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ , os limites

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h} \quad e \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x^-)}{h}$$

existem e são finitos. Pelo Teorema 4.88, a série de Fourier associada a  $f$  converge pontualmente para a função  $S$  definida por

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f \text{ é contínua em } x \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{se } f \text{ não é contínua em } x \end{cases}$$

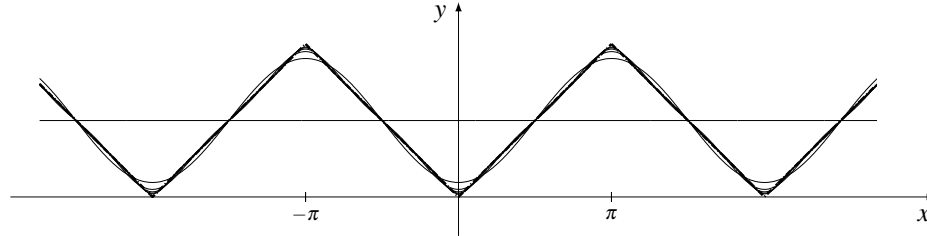
**Exemplo 4.90.** 1. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2\pi$  definida em  $[-\pi, \pi[$  por  $f(x) = |x|$ .

Como  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$  conclui-se, pela Observação 4.89, que a série de Fourier associada à função  $f$  converge pontualmente em  $\mathbb{R}$  para a função  $f$ . Utilizando o Exemplo 4.77 temos então

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} \right),$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

Na figura seguinte estão representadas porções dos gráficos de  $f$  e dos primeiros termos da sucessão das somas parciais da série de Fourier obtida. Observe-se que, à excepção do gráfico do primeiro termo, os gráficos dos termos da sucessão das somas parciais representados aproximam-se do gráfico de  $f$  em todos os pontos do domínio.



Por outro lado, uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} \right| \leq \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2}$$

e a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

é uma série convergente de números reais positivos conclui-se, pelo critério de Weierstrass, que a série de Fourier obtida converge uniformemente em  $\mathbb{R}$  para a função  $f$ .

Observe-se ainda que, para  $x = \pi$ , temos

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos((2n-1)\pi)}{(2n-1)^2} \right),$$

ou seja,

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos((2n-1)\pi)}{(2n-1)^2} \right).$$

Uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\cos((2n-1)\pi) = -1$ , temos

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

donde resulta que

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},$$

e, desta forma, obtemos a soma da série numérica  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ .

2. Consideremos a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2\pi$  definida em  $]-\pi, \pi]$  por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Como vimos no Exemplo 4.85, esta função é parcialmente contínua.

Não é difícil verificar que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , os limites  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h}$  e  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x^-)}{h}$  existem e são finitos.

Por outro lado, a função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  e, para todo  $c = k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$  temos

$$f(c^+) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ é par} \\ -1 & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

e

$$f(c^-) = \begin{cases} -1 & \text{se } k \text{ é par} \\ 1 & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

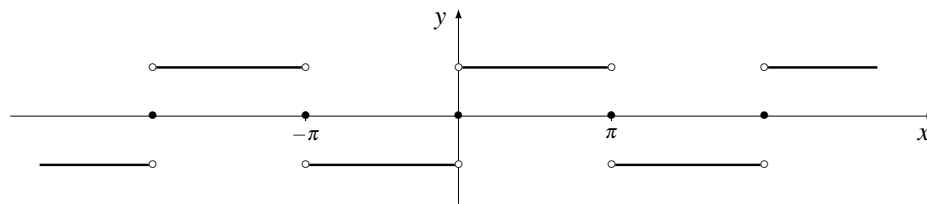
Atendendo à Observação 4.89 e ao Exemplo 4.77 temos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\text{sen}((2n-1)x)}{2n-1} = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{se } x \in \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

pelo que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\text{sen}((2n-1)x)}{2n-1} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in ]2k\pi, \pi + 2k\pi[, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{se } x \in ]-\pi + 2k\pi, 2k\pi[, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{se } x \in \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

Na figura seguinte apresenta-se um esboço do gráfico da função soma da série de Fourier associada à função que estamos a considerar. Observe-se que este gráfico coincide com o gráfico da função  $f$  em  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .



Tomando  $x = \frac{\pi}{2}$  temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\text{sen}((2n-1)\pi/2)}{2n-1} = 1.$$

Uma vez que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sin((2n-1)\pi/2) = (-1)^{n+1}$ , temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

O teorema que apresentamos a seguir estabelece que a série de Fourier associada a uma função periódica de período  $2\pi$  e parcialmente contínua converge uniformemente para a função  $f$ , desde que a sua derivada  $f'$  seja uma função periódica de período  $2\pi$  e parcialmente contínua. A demonstração deste teorema sai fora do âmbito deste curso, pelo que é omitida.

**Teorema 4.91.** *Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2\pi$  contínua tal que a sua derivada  $f'$  é uma função periódica de período  $2\pi$  e parcialmente contínua. Então a série de Fourier associada à função  $f$  converge uniformemente em  $\mathbb{R}$  para a função  $f$ .*

**Exercícios 4.7** 1. Em cada uma das alíneas que se seguem determine a série de Fourier associada à função considerada:

- (a)  $f$  periódica de período  $2\pi$  definida em  $[-\pi, \pi]$  por  $f(x) = \frac{\pi}{4}$ ;
- (b)  $f$  periódica de período  $2\pi$  definida em  $] -\pi, \pi]$  por  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in ] -\pi, 0[ \\ -x^2 & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases}$ ;
- (c)  $f$  periódica de período  $2\pi$  definida em  $] -\pi, \pi]$  por  $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, \pi/2[ \\ \pi - x & \text{se } x \in [\pi/2, \pi] \\ -f(-x) & \text{se } x \in ] -\pi, 0[ \end{cases}$ ;

2. Considere a função  $f$  definida em  $[0, 2\pi]$  por  $f(x) = e^x$ .

- (a) Determine a série de Fourier associada a  $f$ .
- (b) Utilize a série obtida na alínea anterior para determinar a soma da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ .

3. Em cada uma das alíneas que se seguem determine a série de Fourier associada à função indicada.

- (a)  $f$  periódica de período  $T = 2$  definida em  $[-1, 1]$  por  $f(x) = |x|$ ;
- (b)  $f$  periódica de período  $T = 4$  definida em  $[-2, 2[$  por  $f(x) = x$ ;
- (c)  $f$  periódica de período  $T = 6$  definida em  $] -3, 3]$  por  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in ] -3, 0[ \\ 1 & \text{se } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{se } x \in ] 1, 3] \end{cases}$ .

4. Sejam  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função parcialmente contínua e  $f_p$  a função periódica de período  $2\pi$  definida em  $[-\pi, \pi]$  por

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0, \pi] \\ f(-x) & \text{se } x \in [-\pi, 0[ \end{cases}$$

- (a) Mostre que a restrição de  $f_p$  a  $[-\pi, \pi]$  é uma função par.

**Nota:** Esta restrição de  $f_p$  é habitualmente designada **prolongamento par de  $f$** .

- (b) Mostre que a série de Fourier associada a  $f_p$  é dada por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx),$$

onde, para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx.$$

**Nota:** A série aqui obtida é habitualmente designada **série de Fourier de cossenos de  $f$** .

- (c) Seja  $S$  a função soma da série de cossenos de  $f$ . Justifique que:

- sendo  $c \in ]0, \pi[$  tal que os limites  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c^+)}{h}$  e  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c^-)}{h}$  existem e são finitos, então a série de Fourier de cossenos de  $f$  é convergente em  $x = c$  e tem soma  $S(c) = \frac{f(c^+) + f(c^-)}{2}$ ;
- se o limite  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0^+)}{h}$  é finito, então a série de cossenos de  $f$  na origem é convergente e tem soma  $S(0) = f(0^+)$ ;
- se o limite  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\pi+h) - f(\pi^-)}{h}$  é finito, então a série de cossenos de  $f$  em  $x = \pi$  é convergente e tem soma  $S(\pi) = f(\pi^-)$ ;

- (d) Em cada uma das alíneas que se seguem, determine a série de Fourier de cossenos da função considerada e determine também a restrição da função soma desta série ao intervalo  $[0, \pi]$ .

- $f$  definida em  $[0, \pi]$  por  $f(x) = x$ ;
- $f$  definida em  $[0, \pi]$  por  $f(x) = \sin x$ ;
- $f$  definida em  $[0, \pi]$  por  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{se } x \in ]\pi/2, \pi] \end{cases}$ ;
- $f$  definida em  $[0, \pi]$  por  $f(x) = \begin{cases} \pi/2 - x & \text{se } x \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{se } x \in ]\pi/2, \pi] \end{cases}$ ;
- $f$  definida em  $[0, \pi]$  por  $f(x) = x(\pi - x)$

5. Sejam  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função parcialmente contínua e  $f_i$  a função periódica de período  $2\pi$  definida em  $]-\pi, \pi]$  por

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in ]0, \pi] \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -f(-x) & \text{se } x \in ]-\pi, 0[ \end{cases}$$

- (a) Mostre que a restrição de  $f_i$  a  $[-\pi, \pi]$  é uma função ímpar.

**Nota:** Esta restrição da função  $f_i$  é habitualmente designada **prolongamento ímpar de  $f$** .

- (b) Mostre que a série de Fourier associada a  $f_i$  é dada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}(nx),$$

onde, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \operatorname{sen}(nx) dx.$$

**Nota:** A série obtida é habitualmente designada **série de Fourier de senos de  $f$** .

- (c) Seja  $S$  a função soma da série de senos de  $f$ . Justifique que:

- i. sendo  $c \in ]0, \pi[$  tal que os limites  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c^+)}{h}$  e  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c^-)}{h}$  existem e são finitos, então a série de Fourier de senos de  $f$  é convergente em  $x = c$  e tem soma  $S(c) = \frac{f(c^+) + f(c^-)}{2}$ ;
- ii. se o limite  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0^+)}{h}$  é finito, então a série de senos de  $f$  é convergente na origem e tem soma  $S(0) = 0$ ;
- iii. se o limite  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\pi+h) - f(\pi^-)}{h}$  é finito, então a série de senos de  $f$  é convergente em  $x = \pi$  e tem soma  $S(\pi) = 0$ ;

- (d) Em cada uma das alíneas que se seguem, determine a série de Fourier de senos da função considerada e determine também a restrição da sua função soma ao intervalo  $[0, \pi]$ .

- i.  $f$  definida em  $[0, \pi]$  por  $f(x) = 1$ ;
- ii.  $f$  definida em  $[0, \pi]$  por  $f(x) = \cos x$ ;
- iii.  $f$  definida em  $[0, \pi]$  por  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{se } x \in ]\pi/2, \pi] \end{cases}$ ;
- iv.  $f$  definida em  $[0, \pi]$  por  $f(x) = \pi - x$ ;
- v.  $f$  definida em  $[0, \pi]$  por  $f(x) = x(\pi - x)$

6. Considere a função  $f$  definida em  $[0, \pi]$  por  $f(x) = x^2$ .

- (a) Determine a série de Fourier de cossenos de  $f$ .
- (b) Utilize a série obtida na alínea anterior para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$



## 4.6 Soluções dos exercícios propostos

### Exercícios 4.1

1. Sugestão: Atenda a que, para todo o  $x \in \mathbb{R}_0^+$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{x}{1+nx} \leq \frac{1}{n}$ .
2. (a) Sugestão: Utilize a definição.  
(b) Sugestão: Utilize a definição.
3. Sugestão: para justificar que a sucessão  $(f_n)$  não converge uniformemente em  $[0, 1]$  para função nula, mostre que existe  $\varepsilon > 0$  tal que, para todo o  $p \in \mathbb{N}$ , existem  $n \in \mathbb{N}$  e  $x_0 \in [0, 1]$  tais que  $|(x_0)^n(1 - (x_0)^n)| \geq \varepsilon$ .

### Exercícios 4.2

1. (a)  $\mathbb{R}^+$   
(b)  $\mathbb{R}$   
(c)  $\mathbb{R}^+$   
(d)  $] -\infty, -1[$   
(e)  $] -2, 2[$   
(f)  $\mathbb{R}^+ \cup \{k\pi, k \in \mathbb{Z}_0^-\}$   
(g)  $] -\infty, -1[ \cup ] -1/3, +\infty[$   
(h)  $] -1, 1[$
2. (a) Verifique que  $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ , para todo o  $x \in ]0, 1[$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , e utilize o Critério de Weierstrass.  
(b) Verifique que  $\left| \frac{\cos(nx)}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ , para todo o  $x \in [0, 2\pi]$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , e utilize o Critério de Weierstrass.  
(c) Verifique que  $\left| \frac{1}{4n^2 + x^4} \right| \leq \frac{1}{4n^2}$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , e utilize o Critério de Weierstrass.  
(d) Verifique que  $\left| \frac{(-1)^n}{x + 2^n} \right| \leq \frac{1}{-2 + 2^n}$ , para todo o  $x \in ] -2, +\infty[$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , e utilize o Critério de Weierstrass.  
(e) Verifique que  $\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n(x+2)^n} \right| \leq \frac{1}{n2^n}$ , para todo o  $x \in [0, +\infty[$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , e utilize o Critério de Weierstrass.

### Exercícios 4.3

1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^x} \right) = 1.$

- Sugestão: para mostrar que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^x}$  é uniformemente convergente em  $[0, 1]$  atenda a que, para todo o  $x \in [0, 1]$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n^x > 1$ , conclua que  $\left| \frac{1}{2^n n^x} \right| \leq \frac{1}{2^n}$ , para todo o  $x \in [0, 1]$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e utilize o Critério de Weierstrass.
2. Sugestão: em primeiro lugar mostre que a série é uniformemente convergente em qualquer intervalo  $[0, b]$ , com  $b \in \mathbb{R}^+$ , verificando que  $\left| \frac{x}{n^3 + nx^2} \right| \leq \frac{b}{n^3}$ , para todo o  $x \in [0, b]$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e utilizando o Critério de Weierstrass.
3. (a) Sugestão: para mostrar que a série é uniformemente convergente em  $\mathbb{R}$  verifique que  $\left| \frac{\sin(nx)}{n^4} \right| \leq \frac{1}{n^4}$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , e utilize o Critério de Weierstrass.
- (b)  $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .
- Sugestão: para mostrar que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$  é uniformemente convergente em  $\mathbb{R}$  verifique que  $\left| \frac{\cos(nx)}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e utilize o Critério de Weierstrass.
4. (a) Sugestão: verifique que  $|e^{-nx}| \leq e^{-n}$ , para todo o  $x \in [1, +\infty[$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , e utilize o Critério de Weierstrass.
- (b) Sendo  $S$  a função soma da série, temos  $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-ne^{-nx})$ , para todo o  $x \in [1, +\infty[$ .
- Sugestão: para mostrar que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-ne^{-nx})$  é uniformemente convergente em  $[1, +\infty[$  verifique que  $| -ne^{-nx} | \leq n \left(\frac{1}{e}\right)^n$ , para todo o  $x \in [1, +\infty[$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , e utilize o Critério de Weierstrass.
5. (a) Sugestão: para mostrar que a série é uniformemente convergente em  $[1, +\infty[$ , verifique que  $|ne^{-nx}| \leq ne^{-n}$ , para todo o  $x \in [1, +\infty[$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , e utilize o Critério de Weierstrass.
- (b)  $\int_{\ln 3}^{\ln 4} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx} \right) dx = \frac{1}{6}$
- Sugestão: uma vez que  $[\ln 3, \ln 4] \subset [1, +\infty[$ , justifique que a função soma da série considerada é integrável em  $[\ln 3, \ln 4]$ , utilizando o facto de a série ser uniformemente convergente neste intervalo.
6. Sendo  $S$  a função soma da série, temos  $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \cos \frac{x}{n}$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .
- Sugestão: para mostrar que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \cos \frac{x}{n}$  é uniformemente convergente em  $\mathbb{R}$  verifique que  $\left| \frac{1}{n^3} \cos \frac{x}{n} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e utilize o Critério de Weierstrass.
7. (a) Sugestão: para mostrar que a série é uniformemente convergente em  $[0, 1]$ , verifique que  $\left| \frac{nx^{n-1} \cos(x^n)}{2^n} \right| \leq \frac{n}{2^n}$ , para todo o  $x \in [0, 1]$  e, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , e utilize o Critério de Weierstrass.

$$(b) \int_0^1 \left( \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{nx^{n-1} \cos(x^n)}{2^n} \right) dx = \frac{1}{2} \sin 1$$

**Exercícios 4.4**

1. (a)  $[-3, 3[$ , sendo simplesmente convergente em  $x = -3$  e absolutamente convergente nos restantes pontos.
- (b)  $\left] -\frac{16}{3}, -\frac{14}{3} \right]$ , sendo absolutamente convergente em todos os pontos deste intervalo.
- (c)  $[-6, 12]$ , sendo absolutamente convergente em todos os pontos deste intervalo.
- (d)  $\mathbb{R}$ , sendo absolutamente convergente em todos os pontos deste conjunto.
- (e)  $\left[ \frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right]$ , sendo simplesmente convergente em  $x = 1/3$  e absolutamente convergente nos restantes pontos.
- (f)  $\{0\}$ , sendo absolutamente convergente neste ponto.
- (g)  $[-3, -1[$ , sendo simplesmente convergente em  $x = -3$  e absolutamente convergente nos restantes pontos.
- (h)  $\left] -\frac{4}{3}, \frac{8}{3} \right]$ , sendo simplesmente convergente em  $x = 8/3$  e absolutamente convergente nos restantes pontos.
- (i)  $[-1, 1[$ , sendo simplesmente convergente em  $x = -1$  e absolutamente convergente nos restantes pontos.
2. (a)  $] -2, 2[$ , sendo absolutamente convergente em todos os pontos deste intervalo.
- (b)  $\left] -\frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right]$ , sendo simplesmente convergente em  $x = 1/5$  e absolutamente convergente nos restantes pontos.

**Exercícios 4.5**

1.  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n x^n$ , para  $x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$
2.  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{n+1}}{n+1} x^{n+1}$ , para  $x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$
3.  $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$ , para  $x \in ] -1, 1[$

**Exercícios 4.6**

1. (a)  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ; a função é analítica no ponto indicado.
- (b)  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x-1)^n$ , para todo o  $x \in ]0, 2[$ ; a função é analítica no ponto indicado.
- (c)  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n$ , para todo o  $x \in ]0, 2[$ ; a função é analítica no ponto indicado.

- (d)  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ; a função é analítica no ponto indicado.
2. (a)  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-x^{n+1})$ , para  $x \in ]-1, 1[$
- (b)  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$ , para  $x \in \mathbb{R}$
- (c)  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ , para  $x \in \mathbb{R}$
- (d)  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$ , para  $x \in \mathbb{R}$
- (e)  $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2x^n$ , para  $x \in ]-1, 1[$
- (f)  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2}{2n+1} x^{2n+1}$ , para  $x \in ]-1, 1[$
- (g)  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2x^{2n}$ , para  $x \in ]-1, 1[$
- (h)  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{n+1} x^{2n+2}$ , para  $x \in ]-1, 1[$
- (i)  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{4n+2}$ , para  $x \in ]-1, 1[$
- (j)  $\text{sen}(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}$ , para  $x \in \mathbb{R}$
- (k)  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{n+1}$ , para  $x \in \mathbb{R}$
- (l)  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}$ , para  $x \in \mathbb{R}$
- (m)  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!} x^{4n+3}$ , para  $x \in \mathbb{R}$
3. (a)  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^{2n} = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ , para  $x \in ]-1, 1[$
- (b)  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n} = \frac{1}{1+x^4}$ , para  $x \in ]-1, 1[$
- (c)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} x^n = \begin{cases} \frac{e^x(x-1)+1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
- (d)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n = 1 + (1-x) \ln(1-x)$ , para  $x \in ]-1, 1[$

**Exercícios 4.7**

1. (a)  $f(x) \sim \frac{\pi}{4}$ ;  
 (b)  $f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{2}{n^3} (1 - (-1)^n) + (-1)^n \frac{\pi^2}{n} \right] \sin(nx)$ ;  
 (c)  $f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{4}{\pi n^2} \sin \frac{\pi n}{2} - \frac{1}{n} \cos \frac{\pi n}{2} \right] \sin(nx)$ .
2. (a)  $f(x) \sim \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\cos(nx)}{n^2 + 1} - \frac{n \sin(nx)}{n^2 + 1} \right) \right]$ ;  
 (b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{2\pi} + 1}{e^{2\pi} - 1} - \frac{1}{2}$ .
3. (a)  $f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\pi(2n-1)x)}{(2n-1)^2}$ ;  
 (b)  $f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(\frac{n\pi x}{2})}{n}$ ;  
 (c)  $f(x) \sim \frac{1}{6} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) + \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \right]$ .
4. (a)  
 (b)  
 (c)  
 (d) i.  $f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$ ;  $S(x) = f(x), x \in [0, \pi]$ ;  
 ii.  $f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{1 - (2n)^2}$ ;  $S(x) = f(x), x \in [0, \pi]$ ;  
 iii.  $f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\cos((4n-3)x)}{4n-3} - \frac{\cos((4n-1)x)}{4n-1} \right)$ ;  $S(x) = f(x), x \in [0, \pi/2[ \cup ]\pi/2, 1]$   
 e  $S(\pi/2) = 1/2$ ;  
 iv.  $f(x) \sim \frac{\pi}{8} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) \cdot \cos(nx)$ ;  $S(x) = f(x), x \in [0, \pi]$ ;  
 v.  $f(x) \sim \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2}$ ;  $S(x) = f(x), x \in [0, \pi]$ .
5. (a)  
 (b)  
 (c)  
 (d) i.  $f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$ ;  $S(x) = f(x), x \in [0, \pi]$ ;  
 ii.  $f(x) \sim \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin(2nx)$ ;  $S(x) = f(x), x \in [0, \pi]$ ;  
 iii.  $f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) \cdot \sin(nx)$ ;  $S(x) = f(x), x \in [0, \pi/2[ \cup ]\pi/2, 1]$  e  $S(\pi/2) = 1/2$ ;

$$\text{iv. } f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}; S(x) = f(x), x \in [0, \pi];$$

$$\text{v. } f(x) \sim \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^3}; S(x) = f(x), x \in [0, \pi].$$

$$6. \quad (\text{a}) \quad f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx);$$

(b) Fazendo  $x = 0 \dots$