Departamento de Matemática **Universidade de Aveiro**

Matemática Discreta

Exame final **20/06/2014**

Justifique devidamente todas as suas respostas.

Duração da prova: 2 horas e 30 minutos

(3 val.) **1)** Considere as seguintes fórmulas bem formadas:

F1: $\forall x[G(x) \Rightarrow \forall y(P(y) \Rightarrow L(x,y))]$
F2: $\exists x\, G(x)$
F3: $\exists x\, \forall y(P(y) \Rightarrow L(x,y))$

Usando o princípio da resolução mostre que F3 é consequência de F1 e F2.

(3 val.) **2)** Sejam X e Y conjuntos finitos não vazios e f uma função de X em Y. Considere a relação binária definida em X por

$$xRy \text{ se } f(x) = f(y), \text{ para todos } x, y \in X.$$

(a) Mostre que R é uma relação de equivalência.

(b) Determine o cardinal do conjunto quociente definido por R, X/R, se f é injetiva.

(2 val.) **3)** Mostre, por indução sobre n, que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$, para $n \in \mathbb{N}$.

(1,5 val.) **4)** Um teste de Matemática Discreta é formado por 40 perguntas com respostas do tipo Verdadeiro ou Falso. Sabendo que existem exactamente 17 respostas Verdadeiras, quantas chaves distintas podem existir?

(2 val.) **5)** Determine os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais $105x^{-5}$ é um dos termos do desenvolvimento de $(\frac{a}{x^2} + \frac{x}{3})^7$.

(2,5 val.) **6)** Resolva a equação de recorrência $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^n$, com $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$.

(4,5 val.) **7)** Seja G um grafo simples não orientado com conjunto de vértices $V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ e matriz de custos

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 5 & 0 & 8 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & 8 & 0 & 1 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 3 & 0 & 3 & 8 \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Verifique se G é um grafo bipartido.

b) Aplique o algoritmo de Dijkstra para determinar um caminho de custo mínimo entre os vértices 1 e 4 e indique o seu custo.

(1,5 val.) **8)** Seja G um grafo simples não orientado com 20 vértices e 62 arestas. Sabendo que os vértices de G têm grau 3 ou 7, determine o número de vértices de grau 7.

(ver verso)

Formulário:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x};$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x;$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\begin{array}{c} n-k+1 \\ k \end{array} \right) x^k = \frac{1}{(1-x)^n}, \text{ para } n \in \mathbb{N};$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} x^k = (1+x)^\alpha, \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}.$$