Matemática Discreta

21^a AULA

Universidade de Aveiro 2014/2015

http://moodle.ua.pt

Fórmula multinomial

Teorema (fórmula multinomial)

Se $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n = \sum_{t_1+\cdots+t_r=n} \binom{n}{t_1, \ldots, t_r} a_1^{t_1} \cdots a_r^{t_r}$$

onde $t_1,\ t_2,\ ,t_r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- Com efeito, desenvolvendo o produto de n factores

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)(a_1 + a_2 + \ldots + a_r) \ldots (a_1 + a_2 + \ldots + a_r)$$

obtêm-se termos da forma $a_1^{t_1} \cdots a_r^{t_r}$, com $t_1 + \cdots + t_r = n$, que correspondem à escolha de a_1 em t_1 dos factores, a_2 em t_2 dos restantes factores, etc. Logo, existem $\binom{n}{t_1,\ldots,t_r}$ termos da forma $a_1^{t_1} \cdots a_r^{t_r}$.

Método recursivo para a determinação de números binomiais

Tendo em conta que para $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{n+k} = 0, \quad \text{e} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

convencionando que $\binom{0}{0} = 1$, então a igualdade

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

estabelece um método recursivo para a determinação dos números binomiais.

Para $n \geq 2$ e $0 < k < n$ vem: $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$

Identidades combinatórias diversas

Exemplo

Vamos mostrar que para cada inteiro positivo n se verifica a igualdade

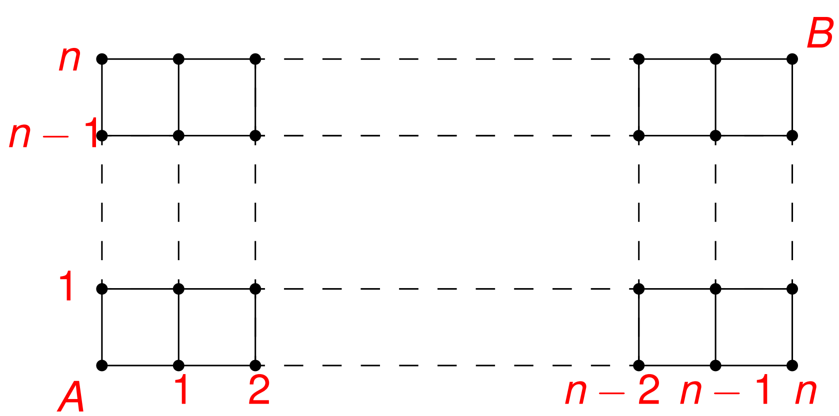
$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Considerando a grelha $n \times n$, sabemos que existem

$$\binom{n+n}{n}$$

caminhos mais curtos entre A e B.

Identidades combinatórias diversas (cont.)



Podemos partir o conjunto de todos os caminhos mais curtos entre A e B nos $n+1$ subconjuntos disjuntos $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_k, \ldots, \mathcal{A}_n$, onde $\mathcal{A}_k$ (para $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$) é o conjunto de todos caminhos mais curtos entre A e B que passam no ponto $(k, n-k)$.

Identidades combinatórias diversas (cont.)

Por aplicação do princípio da adição,

$$|\mathcal{A}_0| + \cdots + |\mathcal{A}_k| + \cdots + |\mathcal{A}_n| = \binom{2n}{n}.$$

Basta provar a igualdade $|\mathcal{A}_k| = \binom{n}{k}^2$.
Esta igualdade é consequência do facto de cada caminho de $\mathcal{A}_k$ ser a concatenação de um caminho mais curto entre A e $(k, n-k)$ na grelha $k \times (n-k)$, cujo número é

$$\binom{n-k+k}{k}$$

com um caminho mais curto entre $(k, n-k)$ e B na grelha $(n-k) \times k$, cujo número é

$$\binom{k+n-k}{n-k}.$$

Identidades combinatórias diversas (cont.)

Exemplo

Vamos mostrar a igualdade

$$\binom{n}{t_1, t_2, \ldots, t_r} = \sum_{i=1}^{r} \binom{n-1}{t_1, \ldots, t_i - 1, \ldots, t_r},$$

que é uma generalização da igualdade $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, uma vez que $\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}$.
A parte esquerda da igualdade é o número multinomial que corresponde ao número de partições de $\{1, 2, \ldots, n\}$ nos subconjuntos $A_1, \ldots, A_r$, com cardinalidade $t_1, \ldots, t_r$, respectivamente.

Identidades combinatórias diversas (cont.)

Podemos dividir estas partições nos seguinte r tipos de partições distintas:

(1) aquelas em que $n \in A_1$, cuja cardinalidade corresponde ao número de partições de $n-1$ elementos em r subconjuntos, com cardinalidades $t_1 - 1, t_2, \ldots, t_r$, respectivamente;

(2) aquelas em que $n \in A_2$, cuja cardinalidade corresponde ao número de partições de $n-1$ elementos em r subconjuntos, com cardinalidades $t_1, t_2 - 1, \ldots, t_r$, respectivamente;

$(\cdot)$ etc;

(r) aquelas em que $n \in A_r$, cuja cardinalidade corresponde ao número de partições de $n-1$ elementos em r subconjuntos, com cardinalidades $t_1, t_2, \ldots, t_r - 1$, respectivamente.

Identidades combinatórias diversas (cont.)

Logo, para $i = 1, \ldots, r$, o número de partições do tipo i é igual a

$$\binom{n-1}{t_1, \ldots, t_i - 1, \ldots, t_r}$$

e, aplicando o princípio da adição, obtém-s a identidade pretendida.

Referências e bibliografia I

D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.