

# Matemática Discreta

## 29<sup>a</sup> AULA

Universidade de Aveiro 2014/2015

<http://moodle.ua.pt>

**Conceitos fundamentais de teoria dos grafos**

**Representação de grafos em computador**

**Referências bibliográficas**

## Grafos orientados e não orientados

### Definição (de grafo não orientado)

Designa-se por **grafo** (não orientado) um terno

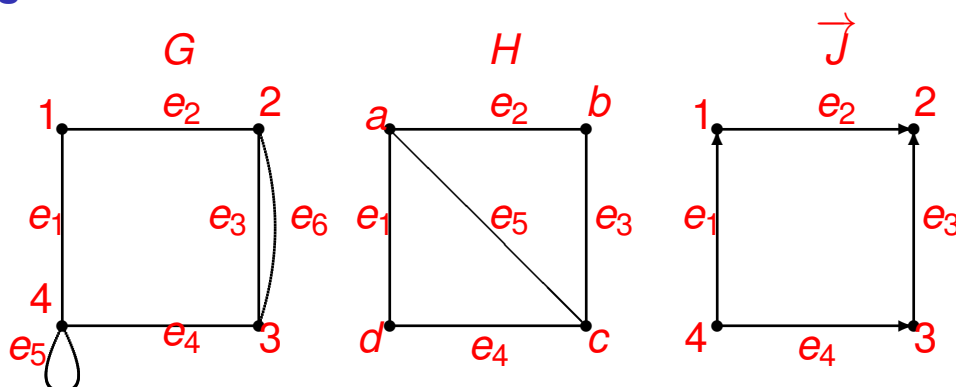
$G = (V(G), E(G), \psi_G)$ , onde  $V = V(G)$  é um conjunto não vazio,  $E = E(G)$  é um conjunto disjunto de  $V$  e  $\psi_G$  é uma função tal que para cada  $e \in E$ ,  $\psi_G(e)$  denota um par não ordenado de elementos (não necessariamente distintos) de  $V$ .

- ▶  $V$  - conjunto de vértices;
  - ▶  $E$  - conjunto de arestas;
  - ▶  $\psi_G$  - função de incidência.
- Se  $\psi_G$  determina, para cada  $e \in E$ , um par ordenado de elementos de  $V$ , o terno  $\vec{G} = (V(\vec{G}), E(\vec{G}), \psi_{\vec{G}})$  designa-se por **grafo orientado** (ou **digrafo**) e o conjunto  $E$  designa-se por conjunto de **arcos**.

## Relação de adjacência

- Dado um grafo  $G$  (digrafo  $\vec{G}$ ), por simplicidade de escrita, denotam-se as arestas (arcos)  $e \in E(G)$  pelas respectivas imagens  $\psi_G(e) = uv$ , onde  $uv$  denota um par não ordenado (ordenado) de vértices. Neste caso  $u$  e  $v$  designam-se por **vértices extremos** da aresta (do arco).
- Se o grafo é orientado o vértice  $u$  designa-se por **cauda** e o vértice  $v$  por **cabeça** do arco  $e$ .
- Uma aresta diz-se **incidente** nos seus vértices extremos. Se uma aresta  $e$  é incidente nos vértices  $u$  e  $v$ , então  $u$  e  $v$  dizem-se **adjacentes**.
- Duas arestas incidentes num mesmo vértice dizem-se **adjacentes**.

## Exemplos



- $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ ,  
 $\psi_G(e_1) = 14$ ,  $\psi_G(e_2) = 12$ ,  $\psi_G(e_3) = 23$ ,  $\psi_G(e_4) = 43$ ,  
 $\psi_G(e_5) = 44$ ,  $\psi_G(e_6) = 23$ .
- $V(H) = \{a, b, c, d\}$ ,  $E(H) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ ,  $\psi_H(e_1) = ad$ ,  
 $\psi_H(e_2) = ab$ ,  $\psi_H(e_3) = bc$ ,  $\psi_H(e_4) = cd$ ,  $\psi_H(e_5) = ac$ .
- $V(\vec{J}) = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $E(\vec{J}) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ,  $\psi_{\vec{J}}(e_1) = 41$ ,  
 $\psi_{\vec{J}}(e_2) = 12$ ,  $\psi_{\vec{J}}(e_3) = 32$ ,  $\psi_{\vec{J}}(e_4) = 43$ .

## O conceito de vizinhança

- Designa-se por **vizinhança** de  $v \in V(G)$ , o conjunto de todos os vértices adjacentes a  $v$ .
- A vizinhança do vértice  $v \in V(G)$  denota-se por  $\mathcal{N}_G(v)$  ou, simplesmente, por  $\mathcal{N}(v)$  quando não há dúvida relativamente ao grafo considerado.
- Uma aresta  $e$  com ambos os extremos no mesmo vértice  $u$ , ou seja, tal que  $\psi_G(e) = uu$  diz-se um **lacete**.
- Duas arestas com os mesmos vértices extremos designam-se por **arestas paralelas**.

**Observação:** um grafo admite várias representações gráficas mas cada representação gráfica determina um único grafo.

## Grafos e digrafos simples

### Definição

Um grafo (digrafo) diz-se **simples** se não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes.

**Observação:** Num grafo simples uma aresta é completamente determinada pelos seus vértices extremos e, nesse caso, um grafo  $G$  pode definir-se, unicamente, pelo par de conjuntos  $G = (V(G), E(G))$ .

- É comum designar um grafo (digrafo) com lacetes e/ou arestas paralelas por **multigrafo** (**multidigrafo**).
- De agora em diante, introduzimos os conceitos comuns a grafos e digrafos utilizando apenas o contexto dos grafos (chamando a atenção para os conceitos específicos).

## Ordem e dimensão de um grafo

- Designa-se por grafo trivial um grafo simples com um único vértice, ou seja, tal que  $|V(G)| = 1$  e  $|E(G)| = 0$ .
- Um grafo diz-se finito se  $V(G)$  e  $E(G)$  são ambos finitos. Caso contrário, diz-se infinito.

### Definição (de ordem de um grafo)

Designa-se por ordem do grafo  $G$  e denota-se por  $\nu(G)$  (ou  $\nu$  se não houver dúvidas quanto ao grafo considerado), o número de vértices de  $G$ .

### Definição (de dimensão de um grafo)

Designa-se por dimensão do grafo  $G$  e denota-se por  $\varepsilon(G)$  (ou  $\varepsilon$  se não houver dúvidas quanto ao grafo considerado), o número de arestas de  $G$ .

## Igualdade de grafos e grafos complementares

### Definição

Dois grafos  $G$  e  $H$  dizem-se iguais, escrevendo-se  $G = H$  se

$$V(G) = V(H), E(G) = E(H), \psi_G = \psi_H.$$

### Definição

Dado um grafo  $G$  simples, designa-se por grafo complementar de  $G$  e denota-se por  $G^c$ , um grafo simples cujo conjunto de vértices é  $V(G)$  e no qual dois vértices são adjacentes se e só se não são adjacentes em  $G$ .

Observação:  $(G^c)^c = G$ .

## Grau de um vértice

Exemplo de grafos complementares:



### Definição (de grau)

Dado um grafo  $G$  e um vértice  $v \in V(G)$  designa-se por grau de  $v$  e denota-se por  $d_G(v)$  (ou, simplesmente,  $d(v)$ ) o número de arestas incidentes em  $v$  (onde os lacetes, caso existam, contam duas vezes).

## Maior e menor grau

- O maior grau dos vértices do grafo  $G$  denota-se por  $\Delta(G)$ , ou seja,  $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} \{d_G(v)\}$ .
- O menor grau dos vértices de  $G$  denota-se por  $\delta(G)$ , ou seja,  $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} \{d_G(v)\}$ .
- No caso de um digrafo,  $\vec{G}$ , podemos dividir o grau de um vértice  $v \in V(\vec{G})$  em
  - ▶ semigrau de entrada  $d_{\vec{G}}^-(v) = |\{xv \in E(\vec{G})\}|$ ;
  - ▶ semigrau de saída  $d_{\vec{G}}^+(v) = |\{vx \in E(\vec{G})\}|$ .
- Verifica-se a igualdade:  $d_{\vec{G}}(v) = d_{\vec{G}}^-(v) + d_{\vec{G}}^+(v)$ .

## Exercício

### Utilizando um grafo resolva o seguinte problema:

O Sr. e a Sra. Silva convidaram quatro casais para jantar em casa. Alguns são amigos do Sr. Silva e outros amigos da Sra. Silva. Em casa do casal Silva os convidados que já se conheciam cumprimentaram-se com um aperto de mão e os restantes apenas se saudaram.

Depois de todos terem chegado o Sr. Silva observou

- ▶ se me excluir a mim todos deram um número diferente de apertos de mão.

Quantos apertos de mão deu o Sr. Silva?

## Resolução do exercício

É claro que os membros de um mesmo casal não se cumprimentaram um ao outro, pelo que o número de cumprimentos variou entre 0 e 8.

Por outro lado, uma vez que, excluindo o Sr. Silva, todas as restantes 9 pessoas deram um número diferente de apertos de mão, podemos atribuir a cada uma delas exactamente um índice  $j$  entre 0 e 8 que corresponde ao número de apertos de mão que deu.

Ou seja, a pessoa  $n_j$  deu  $j$  apertos de mão.

## Resolução do exercício (cont.)

- ▶ Uma vez que o número  $n_8$  deu 8 apertos de mão, ele apertou a mão a toda a gente, com excepção dele próprio e da mulher. Logo,  $n_8$  e  $n_0$  são casados.
- ▶ Por sua vez,  $n_7$  só não apertou a mão a ele próprio, a  $n_0$  e  $n_1$  (uma vez que este último só deu um aperto de mão e foi a  $n_8$ ). Logo,  $n_7$  e  $n_1$  são casados.
- ▶ Por sua vez,  $n_6$  só não deu apertos de mão a si próprio, a  $n_0$ ,  $n_1$  e  $n_2$  (note-se que este último deu um aperto de mão a  $n_8$  e  $n_7$ ). Logo,  $n_2$  e  $n_6$  são casados.
- ▶ O  $n_5$  apertou a mão de  $n_8$ ,  $n_7$ ,  $n_6$ ,  $n_4$  e ao Sr. Silva e, consequentemente, é casado com  $n_3$ . Assim,  $n_4$  é a Sra Silva (que, naturalmente, não deu um aperto de mão ao Sr. Silva) e ficam determinados todos os apertos de mão.

Como consequência, o Sr. Silva apertou a mão a 4 convidados ( $n_8$ ,  $n_7$ ,  $n_6$  e  $n_5$ ).

## Resultados básicos

### Teorema

Para todo o grafo  $G$ , a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 |E(G)|$$

### Corolário

O número de vértices de grau ímpar é par.

- No caso de grafos orientados vem:

$$\sum_{v \in V(G)} d_G^+(v) = \sum_{v \in V(G)} d_G^-(v) = |E(G)|$$

## Matriz de adjacência

### Definição (de matriz de adjacência)

Designa-se por matriz de adjacência e denota-se por  $A_G = (a_{ij})$ , a matriz quadrada de dimensão  $\nu \times \nu$ , tal que  $a_{ij}$  é igual ao número de arestas entre os vértices  $v_i$  e  $v_j$  (onde se incluem os lacetes cujo número de incidentes num dado vértice  $v_i$  é dado por  $a_{ii}$ ). Sendo  $\vec{G}$  um grafo orientado, então  $a_{ij}$  é o número de arcos com cauda em  $v_i$  e cabeça em  $v_j$ .

- Esta representação utiliza  $\nu^2$  células de memória.

Exemplo:

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{\vec{J}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



## Matriz de incidência aresta-vértice

### Definição (de matriz de incidência aresta-vértice)

Designa-se por matriz de incidência aresta-vértice ou simplesmente matriz de incidência e denota-se por  $M_G = (m_{ij})$  a matriz de dimensão  $\nu \times \varepsilon$  tal que

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } e_j = v_p v_q \text{ com } i \notin \{p, q\} \\ 1 & \text{se } e_j = v_i v_k, \text{ com } k \neq i \\ 2 & \text{se } e_j = v_i v_i \end{cases}$$

- No caso dos grafos orientados,  $\vec{G}$  sem lacetes as entradas da matriz de incidência  $M_{\vec{G}} = (m_{ij})$  são dadas por

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } e_j = v_p v_q \text{ com } i \notin \{p, q\} \\ -1 & \text{se } e_j = v_k v_i, \text{ para algum vértice } v_k \\ 1 & \text{se } e_j = v_i v_k, \text{ para algum vértice } v_k \end{cases}$$

## Exemplo

- Esta representação utiliza  $\nu \times \varepsilon$  células de memória.

$$M_H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{\vec{H}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Lista de arestas e dois vectores

- A representação por **lista de arestas** consiste precisamente em armazenar numa lista todas as arestas do grafo. No caso do grafo  $H$  vem  $[ad, ab, bc, cd, ac]$ . Esta representação utiliza  $\varepsilon$  células de memória.

**Observação.** Perde-se informação sobre vértices isolados.

- Na representação com dois vectores, a lista de arestas é construída recorrendo a dois vectores:

$$F = (f_1, \dots, f_\varepsilon) \text{ e } T = (t_1, \dots, t_\varepsilon)$$

tais que a aresta  $e_i, i = 1, \dots, \varepsilon$  tem como vértices extremos  $f_i$  e  $t_i$ . No caso de digrafos o arco  $e_i$  tem cauda  $f_i$  e cabeça  $t_i$ .

**Exemplo da representação com dois vectores:** Considerando o digrafo  $\vec{J}$ , obtém-se  $F = (4, 1, 3, 4)$  e  $T = (1, 2, 2, 3)$ .

## Listas de sucessores ou listas de adjacência

- As listas de sucessores (ou listas de adjacência) utilizam  $\nu$  listas (uma por cada vértice). A cada vértice  $v$  faz-se corresponder a lista de todos os vértices que lhe são adjacentes (ou todos os vértices que são cabeça de um arco com cauda em  $v$  se o grafo é orientado), com eventual repetição no caso de multigrafos.

**Exemplo:** no caso do grafo  $\vec{J}$  vem

1 : 2  
2 :  
3 : 2  
4 : 1, 3

- Esta representação utiliza  $\varepsilon + \nu$  células de memória.

## Referências bibliográficas I



D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2009.