

Matemática Discreta

15^a AULA

Universidade de Aveiro 2014/2015

<http://http://moodle.ua.pt>

Princípio da gaiola dos pombos (ou de Dirichlet)

Teorema de Dirichlet

Algumas aplicações de princípio da gaiola dos pombos

Referências e bibliografia

Princípio da gaiola dos pombos (ou de Dirichlet)

Princípio da gaiola dos pombos

O princípio da gaiola dos pombos consiste na conclusão de que, dadas n bolas para serem introduzidas em m caixas, onde $n > m$, pelo menos uma das caixas terá de conter duas ou mais bolas.

- Generalizando, dadas n bolas para serem introduzidas em m caixas, onde $n > km$, pelo menos uma das caixas terá de conter $k + 1$ ou mais bolas.

Teorema de Dirichlet

Teorema (de Dirichlet)

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ e $\forall n \in \mathbb{N} \exists p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $\exists q \in [n]$, tal que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qn} \leq \frac{1}{q^2},$$

onde $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

Princípio da gaiola dos pombos (cont.)

O princípio da gaiola dos pombos pode ainda ser apresentado de dois modos distintos:

I - Seja X um conjunto finito tal que $|X| = n$,

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m,$$

onde $X_i \cap X_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Se $n > m$, então existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $|X_i| > 1$.

II - Sejam X e Y conjuntos arbitrários tais que $|X| = n$ e $|Y| = m$.

Se $n > m$ então não existe uma função $f : X \rightarrow Y$ tal que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y,$$

ou seja, não existe nenhuma função injectiva de X em Y .

Exercícios

- Demonstre que, entre treze pessoas, pelo menos duas têm o seu aniversário no mesmo mês.
 - a) Aplicando o princípio da gaiola dos pombos.
 - b) Por redução ao absurdo.
- Sabendo que num torneio em que participam n equipas de futebol, todas as equipas jogam umas com as outras, demonstre que em cada jornada pelo menos duas equipas jogam o mesmo número de jogos.

Referências e bibliografia I



D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.