Matemática Discreta

19^a AULA

Universidade de Aveiro 2014/2015

http://moodle.ua.pt

Número de arranjos com repetição de n elementos k a k

Número de configurações de k objectos (escolhidos de entre n tipos de objectos) que dependem da ordem e podem conter mais do que um objecto do mesmo tipo.

Notação $\longrightarrow A_n^{(k)}$.

Pelo princípio da multiplicação tem-se que $A_n^{(k)} = n^k$ (verificar!).

Exemplo: Supondo que se encontra disponível um número não limitado de bolas vermelhas, azuis e pretas e sabendo que as bolas da mesma cor são indistinguíveis, determine o número de sequências de $k = 5$ bolas que é possível formar.

Resposta: $A_3^{(5)} = 3^5 = 243$.

Arranjos simples (ou sem repetição) de n elementos k a k

Número de configurações de k objectos (escolhidos de entre n objectos distintos) que dependem da ordem.

Notação $\longrightarrow A_{n,k}$.

Usando o princípio da multiplicação generalizada mostra-se que (prove!)

$$A_{n,k} = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1).$$

Permutações (simples) de n elementos:

$$P_n = A_{n,n} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

Por convenção, $P_0 = 0! = 1$.

Arranjos simples:

$$\boxed{A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Observação: Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, o coeficiente factorial $(\alpha)_k$ é definido por

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - k + 1).$$

Consequentemente, $A_{n,k} = (n)_k$.

Exemplo

Quantas sequências podemos formar com uma bola azul, uma bola vermelha e uma bola preta?
Resposta: $P_3 = 3! = 6$.

De quantas maneiras se podem sentar 5 pessoas em 3 cadeiras distintas (sentando-se uma pessoa em cada cadeira)?
Resposta: $A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

Qual o número de alinhamentos possíveis de 12 escuteiros de tal modo que dois deles (fixos) sejam sempre vizinhos um do outro?
Resposta: $2! \times 11! = 79833600$ (o produto $\times$ vem do princípio da multiplicação).

Combinações simples (ou sem repetição) de n elementos k a k

Número de subconjuntos de k elementos (sem repetição) de um conjunto com n elementos distintos (sem que a ordem pela qual os elementos são enumerados seja considerada)

$$\text{Notação} \longrightarrow \binom{n}{k}.$$

Algumas propriedades básicas

1. $\binom{n}{k} = \frac{A_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
3. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1}$.

Exemplo

Com 20 jogadores de futebol quantas equipas de 11 jogadores é possível formar?

Resposta: $\binom{20}{11} = \frac{20!}{9!11!} = 167960$.

Exercício: Sabendo que num departamento trabalham 4 mulheres e 9 homens, determine:

(a) o número de comissões que se podem formar com 2 mulheres e 3 homens;

(b) o número de comissões de 5 elementos com, pelo menos, 2 mulheres e 2 homens.

Referências e bibliografia I

D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.