Matemática Discreta

Ano Lectivo 2014/2015

Folha de exercícios nº4 (Estratégias de demonstração)

1. Mostre que

   (a) $\left(1+\frac{1}{3}\right)^n \geq 1+\frac{n}{3}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

   (b) $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$, para todo o inteiro $n \geq 2$;

   (c) n^3+2n é divisível por 3 para todo $n \in \mathbb{N}$;

   (d) 3^n+7^n-2 é divisível por 8, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (e) $\sum_{i=1}^{n} r^i = \frac{(r^n-1)r}{r-1}$, para todos os inteiros $n \geq 1$ e para todos os números reais $r \neq 1$.

   (f) $H_{2^n} \geq 1+\frac{n}{2}$, para $n \geq 0$, onde $H_j = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{j}$, para $j \in \mathbb{N}$.

2. A sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definida por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 8n \end{cases}$$

   Descubra uma fórmula fechada para a_n e prove a sua validade por indução.

3. Descubra e mostre por indução uma fórmula para $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$, para $n \in \mathbb{N}$.

4. Mostre que os termos de uma sucessão que satisfaça $a_1 = a_2 = 1$ e $a_n = 4a_{n-1}+5a_{n-2}$ para $n \geq 3$, são dados por $a_n = \dfrac{5^{n-1}+2(-1)^{n-1}}{3}$.

5. Considere a seguinte sucessão definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 1 \text{ e } a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1}+a_{n-3},\ n \geq 3 \end{cases}$$

   Prove que se tem $a_{n+2} \geq \left(\sqrt{2}\right)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

6. Considere a seguinte função definida para os números naturais

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 4f(\frac{n}{2}) & \text{se } n \text{ for par e } n > 0 \\ f(n-1)+2n-1 & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

   Mostre que $f(n) = n^2$ para todo $n \geq 0$.

7. Prove que qualquer inteiro maior do que 1 é divisível por um número primo.

8. Resolva, aplicando o princípio das gaiolas de pombos (princípio de Dirichelet):

   (a) Num grupo de 100 pessoas quantas, pelo menos, nasceram no mesmo mês?

   (b) Numa reunião magna de estudantes universitários quantos devem estar presentes para garantir que pelo menos 3 fazem anos no mesmo dia?

   (c) Qual o número mínimo de estudantes de uma disciplina para garantir que pelo menos 6 terão a mesma nota numa escala inteira de 1 a 5?

9. Mostre que num grupo de 20 pessoas escolhidas ao acaso existem pelo menos 2 pessoas que têm o mesmo número de amigos dentro do grupo. Note que duas pessoas são consideradas amigas se houver uma relação de amizade recíproca estabelecida entre elas.

10. Mostre que dados 11 números no intervalo $]0, 1[$, haverá pelo menos dois deles cuja diferença é menor que 0.1.

11. Aplicando o princípio das gaiolas de pombos (princípio de Dirichelet), mostre que escolhendo $n + 1$ inteiros entre os inteiros $1, 2, \ldots, 2n$ há dois (entre os escolhidos) tais que um é divisor do outro.

12. Admita que num grupo de 6 pessoas, cada par de indivíduos consiste em dois amigos ou dois inimigos. Mostre que então existem três amigos mútuos ou três inimigos mútuos no grupo.

13. (a) Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ inteiros positivos. Mostre que se $p_1 + p_2 + \cdots + p_n - n + 1$ objectos são colocados em n caixas, então existe um inteiro i entre 1 e n tal que a i-ésima caixa contém pelo menos p_i objectos.

    (b) Fazendo $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = r \in \mathbb{N}$ o que se pode afirmar?

14. Sejam $q_1, q_2, \ldots, q_n$ inteiros positivos. Mostre que se a sua média aritmética é superior a $r - 1$ ($r \in \mathbb{N}$), então pelo menos um desses inteiros é maior ou igual a r.

15. Durante um mês com 30 dias uma equipa de "baseball" joga pelo menos um jogo por dia, mas não mais do que 45 jogos no total dos 30 dias. Usando o princípio da gaiola dos pombos, prove que tem que existir um certo período de dias consecutivos durante os quais a equipa joga exactamente 14 jogos.