Matemática Discreta

11^a AULA

Universidade de Aveiro 2014/2015

http://moodle.ua.pt

Cláusulas da lógica de primeira ordem

Forma normal de Skolem

Princípio da resolução

Referências e bibliografia

Cláusulas

Definição (de cláusula)

Uma *r*-cláusula é uma disjunção finita de *r* literais

$$L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_r$$

- Uma 0-cláusula é uma cláusula sem literais que se denota por $\Diamond$.

Exemplos de cláusulas

1) $P(x) \vee Q(a) \vee \neg R(y)$;
2) $\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, f(x), g(x))$;
3) $\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, f(x)) \vee R(y)$.

Conjunto de cláusulas

- O conjunto de cláusulas $S = \{C_1, C_2, ..., C_k\}$ corresponde à conjunção
$$C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k.$$

Exemplo

O conjunto de cláusulas

$$S = \{\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, f(x), g(x)), T(x, f(x)), R(y)\}$$

corresponde à fórmula (na forma normal conjuntiva)

$$(\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, f(x), g(x))) \wedge (T(x, f(x))) \wedge R(y).$$

Formas normais de Skolem

Definição (de forma normal de Skolem)

Uma fórmula diz-se na forma normal de Skolem se é uma conjunção de cláusulas universalmente quantificadas, ou seja, sem variáveis livres e sem quantificadores existenciais.

Exemplos de fórmulas na forma normal de Skolem:

1. $\forall x \forall y (P(x) \vee \neg Q(a, y))$;
2. $\forall y \forall z (\neg Q(g(y, f(z))) \vee \neg P(b))$.

Uma vez que as cláusulas são disjunções de literais que não contêm quantificadores e em qualquer expressão na forma normal de Skolem cada variável está associado a um quantificador universal, nem sequer é necessário que tais quantificadores apareçam.

Demonstração Automática de Teoremas

Procedimento (de refutação)

Consiste em provar que uma fórmula é válida provando que a sua negação é inconsistente.

- Este procedimento tem por base as seguintes propriedades:

1) Qualquer fórmula pode transformar-se na forma normal conjuntiva.

2) É possível eliminar os quantificadores existenciais sem alterar propriedades de inconsistência com recurso às designadas funções de Skolem.

Redução de formas normais prenex à forma normal de Skolem

Procedimento de redução à forma normal de Skolem: Dada a fórmula $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_nx_n)\ M$, aplicar a cada quantificador existencial Q_r as seguintes transformações:

1) Se nenhum quantificador universal aparece à esquerda de Q_r, então

- Escolher uma constante c (que não figure em M).
- Substituir x_r por c.
- Eliminar Q_rx_r.

2) Se $Q_{s_1}\ldots Q_{s_m}$ são quantificadores universais que ocorrem à esquerda de Q_r então

- Escolher um símbolo de função f, diferente dos existentes, com m argumentos.
- Substituir em M, x_r por $f(x_{s_1},\ldots,x_{s_m})$.
- Eliminar Q_rx_r.

Exemplo

Vamos reduzir à forma normal de Skolem a seguinte fórmula:

$$(\forall x)(\exists y)(\exists z)((\neg P(x,y)\vee Q(x,z))$$

- Uma vez que $(\exists y)$ e $(\exists z)$ são precedidos por $(\forall x)$, as variáveis y e z são substituídas, respectivamente, pelas funções de uma variável $f(x)$ e $g(x)$.
- Logo, obtém-se

$$(\forall x)((\neg P(x,f(x))\vee Q(x,g(x))).$$

Princípio da resolução de Robinson

- O princípio da resolução consiste em verificar se um dado conjunto de cláusulas S contém a cláusula vazia, $\Diamond$, ou se ela pode ser deduzida de S.
- O princípio da resolução pode ser visto como uma regra de inferência usada para gerar novas cláusulas de acordo com o seguinte procedimento:

Procedimento de resolução

1. Sejam C_1 e C_2 duas cláusulas de S;
2. Se existe um literal L_1 em C_1 complementar relativamente a um literal L_2 de C_2, então
   - Eliminar L_1 de C_1 e L_2 de C_2;
   - Construir a disjunção do que resta de C_1 e C_2, obtendo-se uma nova cláusula designada por resolvente de C_1 e C_2 (ou consequência lógica de C_1 e C_2).

Exemplos

- $C_1 : \ P \vee \neg R$;
- $C_2 : \ Q \vee R$;
- ▸ ________________
- $C_{12} : \ P \vee Q$ $\quad \rightarrow$ resolvente de C_1 e C_2.

- $C_1 : \ P \vee \neg Q \vee R$;
- $C_2 : \ \neg P \vee S$;
- ▸ ________________
- $C_{12} : \ \neg Q \vee R \vee S \rightarrow$ resolvente de C_1 e C_2.

Dedução (ou resolução)

Definição (de dedução)

Dado um conjunto de cláusulas S, uma dedução (ou resolução) de C a partir de S é uma sequência finita de cláusulas $C_1, C_2, \ldots, C_k$ tais que cada C_i ou é uma cláusula em S ou uma resolvente de cláusulas que precedem C_i e $C_k = C$.

A dedução de $\Diamond$ a partir de S é designada por refutação ou prova da inconsistência de S.

Exemplo

Considerando o conjunto de fórmulas

$$S = \{P \vee Q,\ \neg P \vee Q,\ P \vee \neg Q,\ \neg P \vee \neg Q\}$$

identificam-se as seguintes cláusulas:
$C_1 : P \vee Q$; $C_2 : \neg P \vee Q$;
$C_3 : P \vee \neg Q$; $C_4 : \neg P \vee \neg Q$.

$$\frac{\begin{array}{l} C_1 :\ P \vee Q \\ C_2 :\ \neg P \vee Q \end{array}}{C_{12} :\ Q} \qquad \frac{\begin{array}{l} C_3 : P \vee \neg Q \\ C_4 : \neg P \vee \neg Q \end{array}}{C_{34} :\ \neg Q} \qquad \frac{\begin{array}{l} C_{12} : Q \\ C_{34} : \neg Q \end{array}}{\Diamond}$$

Referências e bibliografia I

D. M. Cardoso, P. Carvalho, *Noções de Lógica Matemática*, Universidade de Aveiro, 2007 (disponível na página da disciplina).