Matemática Discreta

8^a AULA

Universidade de Aveiro 2014/2015

http://moodle.ua.pt

Termos, predicados e quantificadores

Variáveis e quantificadores (variáveis livres e ligadas)

Fórmulas bem formadas da lógica de primeira ordem

Sistema lógico que estende a lógica proposicional.

Exemplo

Considerando as proposições:

- p : “todo o homem é mortal"
- q : “Confúcio é homem"
- r : “Confúcio é mortal"

• A metodologia da lógica proposicional não nos permite concluir que r é consequência lógica de p e de q.

• Além das proposições atómicas e das fórmulas da lógica proposicional, a lógica de primeira ordem conta com:

termos;
predicados;
quantificadores.

Termos

Definição (de termo)

Um termo define-se recursivamente da seguinte forma:

1) uma constante é um termo;
2) uma variável é um termo;
3) se f é um símbolo de uma função com n argumentos e $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos, então $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é um termo;

- os termos são gerados somente por aplicação de 1), 2) e 3).

Exemplos

1) 12;
2) y;
4) pai_de(Luisa).

Predicados e átomos

Definição (de predicado)

Um predicado é uma função que a uma dada lista de constantes faz corresponder um valor lógico.

Exemplo

$\text{maior}(x, y)$ é um predicado que traduz a relação “x é maior do que y".

Definição (de átomo)

Se P é um predicado com n argumentos e $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos, então $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é um átomo. Nenhuma outra expressão é um átomo.

Quantificadores

átomos + conectivos lógicos + quantificadores $\rightarrow$ fórmulas da lógica de primeira ordem.

- Quantificador universal ($\forall$) $\rightarrow$ traduz "para todos os elementos...."

Exemplo de aplicação do quantificador universal

$(\forall x)\ (\text{maior}(x, 1))$.

- Quantificador existencial ($\exists$) $\rightarrow$ traduz "existe pelo menos um elemento...."

Exemplo de aplicação do quantificador existencial

$(\exists x)\ (\text{maior}(x, 1))$.

Alcance de um quantificador

Definição (de alcance de um quantificador)

Designa-se por alcance de um quantificador a parte da fórmula sobre a qual o quantificador actua.

Exemplo

Vamos determinar os alcance dos quantificadores na fórmula $(\forall\, x)\ (\exists\, y)\ (P(x, y))$.

alcance de $\forall$: $(\exists\, y)\ (P(x, y))$.
alcance de $\exists$: $P(x, y)$.

Ocorrências ligadas e livres

Definição (de ocorrência livre e ocorrência ligada)

Uma ocorrência de uma variável numa fórmula diz-se ligada se a ocorrência da variável está dentro do alcance de um quantificador utilizado para essa variável. Uma ocorrência de uma variável numa fórmula diz-se livre se essa ocorrência não é ligada.

Exemplos

1) $\forall\, x\ (P(x, y))$;
2) $\forall\, x\ (P(x, y) \vee \forall\, y\ (Q(y)))$;
3) $\forall\, x\ (P(x)) \Rightarrow Q(x)$.

Variáveis ligadas e livres

Definição (de variável livre e ligada)

Uma variável diz-se livre numa fórmula se no mínimo uma sua ocorrência é livre. Uma variável diz-se ligada numa fórmula se no mínimo uma sua ocorrência é ligada.

Exemplos

1) $\forall x\,(P(x,y)) \rightarrow x$ é ligada e y é livre;
2) $\forall x\,(P(x,y) \vee \forall y\,(Q(y))) \rightarrow x$ é ligada e y é livre e ligada:
3) $\forall x\,(P(x)) \Rightarrow Q(x) \rightarrow x$ é livre e ligada.

Observação

Uma fórmula sem variáveis livres é uma proposição.

Fórmulas bem formadas da lógica de primeira ordem

Definição (de fórmula bem formada)

As fórmulas bem formadas (fbf's) da lógica de primeira ordem são definidas sucessivamente da seguinte forma:

1) um átomo é uma fbf;
2) se F e G são fbf's, então $\neg(F)$, $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \Rightarrow G)$ e $(F \Leftrightarrow G)$ são fbf's;
3) se F é uma fbf e x é uma variável, então $(\forall x)\,(F)$ e $(\exists x)\,(F)$ são fbf's;
4) as fbf's são geradas somente por aplicação de um número finito de vezes de 1), 2) e 3).

Exemplos de determinação de fórmulas da lógica de primeira ordem

Exemplos

Vamos determinar as fórmulas que exprimem as seguintes afirmações:

1) Toda a gente gosta de alguém.
2) Todo o ser vivo que não é animal é vegetal.
3) Todos os números racionais são números reais.
4) Existem números primos.
5) O conjuntos dos números reais é infinito.

Referências bibliográficas

- Referência bibliográfica:
  D. M. Cardoso, P. Carvalho, *Noções de Lógica Matemática*, Universidade de Aveiro, 2007 (disponível na página da disciplina).