UNIVERSIDADE DE AVEIRO
Departamento de Matemática

Matemática Discreta

Exame de recurso — 6 Julho de 2012

Responda de uma forma cuidada a cada uma das questões.

(2 horas e 30 minutos)

1- Considere a relação binária $\mathcal{R}$ definida no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ tal que $x\mathcal{R}y$ se e só se x é potência de y, i.e., $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $x = y^k$.

*(2)***a)** Verifique que $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem parcial.

*(1)***b)** Verifique se $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem total.

*(2)***2-** Prove, por indução sobre n, que $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ é um múltiplo de 13, qualquer que seja $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

*(3)***3-** Determine uma fórmula para o coeficiente de x^k na expansão de $(x - \frac{1}{x})^{100}$, sendo $k \in \mathbb{Z}$.

*(3)***4-** Resolva a equação de recorrência $a_n = na_{n-1}$, tal que $a_0 = 1$, com recurso à utilização da função geradora exponencial $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

*(3)***5-** Prove que o número de funções sobrejectivas cujo domínio é o conjunto $\{1, \ldots, n\}$ e o contradomínio é o conjunto $\{1, \ldots, k\}$ é igual a $k! \left\{ {n \atop k} \right\}$, onde $\left\{ {n \atop k} \right\}$ denota o número de Stirling de segunda espécie com parâmetros n e k.

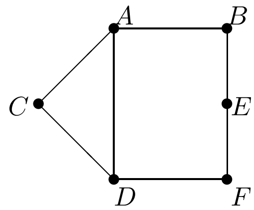
*(3)***6-** Determine o número de árvores abrangentes $\tau(G)$ do grafo G a seguir representado, utilizando a fórmula recursiva $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G//e)$, onde e denota uma aresta de G, tendo em conta o seguinte:

i) se G é desconexo, então $\tau(G) = 0$;

ii) se G é uma árvore, então $\tau(G) = 1$;

iii) se G é constituído por dois vértices ligados por k arestas, então $\tau(G) = k$.

iv) se G é um ciclo, com k arestas, então $\tau(G) = k$.



*(3)***7-** Construa uma árvore abrangente de custo mínimo do grafo G definido pela matriz de custos nas arestas

$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\infty & 35 & 40 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
35 & \infty & 25 & 10 & \infty & \infty & \infty \\
40 & 25 & \infty & 20 & 15 & \infty & \infty \\
\infty & 10 & 20 & \infty & 30 & 8 & 21 \\
\infty & \infty & 15 & 30 & \infty & 15 & 11 \\
\infty & \infty & \infty & 8 & 15 & \infty & 17 \\
\infty & \infty & \infty & 21 & 11 & 17 & \infty
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

com recurso ao algoritmo de Kruskal.