

Matemática Discreta

Ano Lectivo 2014/2015

Soluções da folha de exercícios nº2

(Conjuntos, relações binárias, funções e cardinalidade)

1.

$$A \cap B = \{3, 5\}, \quad B \cup C = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}, \quad B \cup C^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}, \\ A \cap (B \cup C) = \{3, 5\}, \quad (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{3, 5\}, \quad (A \cap B) \cup C = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}, \\ A \cup \emptyset = A, \quad B \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad \mathcal{U}^c = \emptyset.$$

2. (b) Não.

3. (c) A pode ser qualquer conjunto e $B = \emptyset$.

(d) i. Falsa;

ii. Verdadeira.

(f) Sim.

4. (a) Verdadeira;

(b) Falsa;

(c) Verdadeira;

(d) Verdadeira;

(e) Falsa.

5.

(i) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$; (ii) $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}\}$; (iii) $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$;

(iv) $\mathcal{P}(D) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

6. (a) Não é reflexiva, é anti-simétrica e transitiva;

(b) É reflexiva, anti-simétrica e transitiva;

(c) Não é reflexiva, é anti-simétrica e transitiva.

7. (b) Não é relação de ordem total.

8. (b) Conjunto quociente

$$\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\{x \in \mathbb{Z} : x = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}, \{x \in \mathbb{Z} : x = 2k + 1, \\ \text{para algum } k \in \mathbb{Z}\}\}.$$

10. (a) $[a]_{\mathcal{R}} = [c]_{\mathcal{R}} = \{a, c\}$;

- (b) $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (d, d), (d, e), (e, e), (e, d)\}$, sendo \mathcal{R} a relação de equivalência induzida em S pela partição dada.
11. (a) É reflexiva, anti-simétrica e transitiva;
 (b) Não é reflexiva, é anti-simétrica e transitiva;
 (c) Não é reflexiva, é anti-simétrica, não é transitiva;
 (d) É reflexiva, simétrica, não é transitiva;
 (e) É reflexiva, simétrica, transitiva;
 (f) É reflexiva, simétrica, transitiva;
 (g) É reflexiva, simétrica, transitiva.
12. (a) (b),(c)
 (b) (e), $A/\mathcal{R} = \mathbb{Q} \setminus \{0\} \cup \{xq : q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$;
 (f), $A/\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \frac{x}{y} = \frac{a}{b}\}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$;
 (g), $A/\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}, r^2 = a^2 + b^2, r \geq 0\}$, o conjunto das circunferências de raio $r \geq 0$.
 (c) (a)
 (d) (a)
14. (b) $[(1, 3)] = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}; [(2, 4)] = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}; [(1, 1)] = \{(1, 1)\}$.
 (c) $A/\mathcal{R} = \{[(1, 1)], [(1, 2)], [(1, 3)], [(1, 4)], [(1, 5)], [(2, 5)], [(3, 5)], [(4, 5)], [(5, 5)]\}$
15. (a) i. É relação de equivalência. Há 26 classes de equivalência, tantas quantas as letra do alfabeto Português.
 ii. Não é transitiva.
 iii. Não é reflexiva.
 (b) Não é simétrica
18. Sim. Não.
19. (a) $f(3) = 4, f(6) = 1, (f \circ f)(3) = 5, f(f(2)) = 4$
21. 3; 2; 1; 1; 1.
22. 63.
23. (c) Sugestão de resolução: determine funções injetivas $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ e $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$.
 Para obter g determine:
 i) uma função injetiva $g_1 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
 ii) uma função injetiva $g_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
 iii) uma função injetiva $g_3 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$;
 e considere $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1$.