UNIVERSIDADE DE AVEIRO
Departamento de Matemática

Exame Final de Matemática Discreta (2008/2009) 3 de Julho de 2009

Justifique devidamente as suas respostas.

(Duração: 2,5 horas)

*(2)***1-** Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$$

2- Verificar se cada um dos conjuntos de expressões a seguir é unificável e, para os que são unificáveis, indique a respectiva substituição unificadora mais geral. Deve observar que nos argumentos, as letras maiúsculas denotam variáveis e as minúsculas constantes.

(1.5) **2.1** $\{P(X,g(Y),a), P(Z,M,N), P(c,K,T), P(X1,X2,X3)\}$;

(1.5) **2.2** $\{Q(a,b), Q(M,Z), Q(T,A), Q(a,N)\}$.

*(3)***3-** Seja $f(x)=\frac{x}{(1-2x)(1-x)}$ a função geradora da sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Determine uma fórmula não recursiva para o termo geral a_n.

*(3)***4-** De quantas maneiras distintas podem ter sido marcados os golos num jogo de futebol entre o Boavista e o Porto se:

*(1.5)***4.1** o Boavista ganhou por 8-2.

*(1.5)***4.2** o Boavista ganhou por 8-2 e ao intervalo estava a ganhar por 5-1.

*(3)***5-** Seja $\mathcal{R}$ a relação binária definida em $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ por

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2+d^2.$$

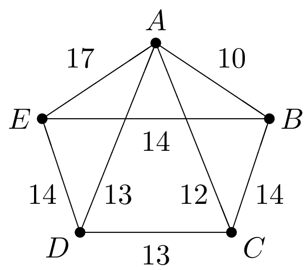
Averigúe se $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

6- Um grafo $G=(V,E)$ simples e bipartido, tal que $V=X\cup Y$, com $X\cap Y=\varnothing$, $|X|=m$, $|Y|=n$ e $\forall x\in X \forall y\in Y, xy\in E$, designa-se por *grafo bipartido completo*. Denotamos este grafo, único a menos de isomorfismo, por $K_{m,n}$. Para que valores de m e n

*(1.5)***6.1** $K_{m,n}$ é euleriano.

*(1.5)***6.2** $K_{m,n}$ é hamiltoniano.

*(3)***7-** Considere o grafo



Encontre uma sua árvore abrangente de peso mínimo, utilizando o algoritmo de Kruskal e apresentando todos os passos resultantes da sua aplicação.

Formulário:

$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array} \right) x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$, para $n \in \mathbb{N}$

$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} x^k = (1+x)^\alpha, \quad$ com $(\alpha)_k = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$