Matemática Discreta

Ano Lectivo 2014/2015

Folha de exercícios nº2

(Conjuntos, relações binárias, funções e cardinalidade)

1. Seja $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ o conjunto universal. Dados os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, defina em extensão os conjuntos

   $A \cap B,\ \ B \cup C,\ \ B \cup C^c,\ \ A \cap (B \cup C),$
   $(A \cap B) \cup (A \cap C),\ \ (A \cap B) \cup C,\ \ A \cup \emptyset,\ \ B \cap \emptyset,\ \ A \cap C,\ \ \mathcal{U}^c.$

2. (a) Mostre que quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C se verifica

   $$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

   (b) Será que para quaisquer conjuntos A, B e C também se verifica

   $$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)?$$

   Justifique.

3. Sejam A, B e C conjuntos definidos num dado universo $\mathcal{U}$.

   (a) Mostre que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

   (b) Represente num diagrama de Venn a diferença simétrica de dois conjuntos A e B quaisquer.

   (c) Se a diferença simétrica entre dois conjuntos A e B for igual ao conjunto A que poderá dizer-se a respeito de A e B?

   (d) Verifique se as igualdades seguintes são verdadeiras ou falsas:

   i. $A\Delta A = A$;

   ii. $A\Delta(A\Delta A) = A$.

   (e) Dados os conjuntos A, B e C, mostre que

   i. $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.

   ii. $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

   Sugestão: Tenha em atenção que sendo χ^X a função característica do conjunto X, ou seja, tal que $\chi^X(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in X \\ 0, & \text{se } x \notin X \end{cases}$, verifica-se que

   $$\begin{aligned} \chi^{X \cap Y} &= \chi^X \chi^Y, & (1) \\ \chi^{X\Delta Y} &= \chi^X + \chi^Y (\mod 2). & (2) \end{aligned}$$

   (f) Sabendo que $A\Delta B = A\Delta C$, pode concluir que $B = C$?

4. Dados três conjuntos A, B e C, verifique se as proposições a seguir indicadas são verdadeiras ou falsas, justificando devidamente.

   (a) $A \backslash B = B^c \backslash A^c$.

   (b) $(A \cap B = A \cap C) \Leftrightarrow B = C$.

   (c) Existem conjuntos A e B tais que $(A \cap B) \cup (A \backslash B) \neq A \cup B$.

   (d) Existem conjuntos A e B tais que $(A \cap B) \cup (A \backslash B) = A \cup B$.

   (e) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.

5. Determine o conjunto das partes de cada um dos seguintes conjuntos:

$$\text{(i) } A = \{\emptyset\}; \quad \text{(ii) } B = \{1\}; \quad \text{(iii) } C = \{1,2\}; \quad \text{(iv) } D = \{1,2,3\}.$$

6. Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Para cada uma das relações binárias $\mathcal{R}$ a seguir indicadas, determine os elementos de $\mathcal{R}$, o seu domínio e contradomínio e, finalmente, verifique se satisfazem as propriedades de reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade.

   (a) $\mathcal{R}$ é a relação $<$ em A.

   (b) $\mathcal{R}$ é a relação $\geq$ em A.

   (c) $\mathcal{R}$ é a relação $\subset$ em $\mathcal{P}(A)$.

7. Considere a relação binária $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z}^2$, tal que $\forall a, b \in \mathbb{Z}$,

$$a \,\mathcal{R}\, b \;\text{ se }\; (a - b) \;\text{ é um número inteiro não negativo par.}$$

   (a) Verifique que $\mathcal{R}$ define uma relação de ordem parcial em $\mathbb{Z}$ e justifique.

   (b) Será que $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem total em $\mathbb{Z}$? Justifique a sua resposta.

8. Considere a relação binária $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z}^2$, tal que $\forall a, b \in \mathbb{Z}$

$$a \,\mathcal{R}\, b \;\text{ se }\; (a - b) \;\text{ é divisível por 2.}$$

   (a) Verifique que $\mathcal{R}$ define uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$ e justifique.

   (b) Determine o conjunto quociente $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

9. Mostre que a relação $|$ definida no conjunto dos números naturais por $x \mid y$ se e só se x divide y, é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{N}$.

10. Considere o conjunto $S = \{a, b, c, d, e\}$.

    (a) Dada a relação de equivalência

    $$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, c), (c, a)\} \subseteq S^2,$$

    determine a classe de equivalência $[a]$ e diga se existem outros representantes para esta mesma classe.

    (b) Indique os pares ordenados da relação de equivalência induzida em S pela partição $\{\{a, b, c\}, \{d, e\}\}$.

11. Em cada uma das alíneas a seguir indicadas diga se a relação binária $\mathcal{R}$ definida no conjunto A é reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva e, nos casos em que define uma relação de equivalência, determine o conjunto quociente $A/\mathcal{R}$.

    (a) $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$; $A = \{a, b\}$.
    (b) $\mathcal{R} = \emptyset$; $A \neq \emptyset$.
    (c) $x\mathcal{R}y$ se e só se $x - y = 1$; $A = \mathbb{R}$.
    (d) $x\mathcal{R}y$ se e só se $x \cdot y \geqslant 0$; $A = \mathbb{Q}$.
    (e) $x\mathcal{R}y$ se e só se $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$; $A = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
    (f) $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ se e só se $ad = bc$; $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.
    (g) $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ se e só se $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$; $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

12. Das relações binárias definidas no exercício anterior diga quais são:

    (a) funções de A em A;
    (b) relações de equivalência e para essas determine o conjunto $A/\mathcal{R}$ das classes de equivalência;
    (c) relações de ordem parcial;
    (d) relações de ordem total.

13. Sejam R_1 e R_2 relações binárias definidas num conjunto não vazio E. Chamamos interseção de R_1 com R_2 e denota-se por $R_1 \cap R_2$ à relação binária definida em E do modo seguinte:

    $$x(R_1 \cap R_2)y \text{ sse } xR_1y \text{ e } xR_2y, \text{ para todos } x, y \in E.$$

    Chamamos recíproca de R_1 e representa-se por R_1^{-1} à relação binária definida em E por:

    $$xR_1^{-1}y \text{ sse } yR_1x, \text{ para todos } x, y \in E.$$

    Chamamos relação identidade em E e denota-se por I à relação definida por:

    $$xIy \text{ sse } x = y, \text{ para todos } x, y \in E.$$

    Mostre que R_1 é anti-simétrica se e só se $R_1 \cap R_1^{-1} \subseteq I$.

14. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$, e seja $\mathcal{R}$ uma relação binária definida em A por

$$(x_1, y_1)\ \mathcal{R}\ (x_2, y_2) \ \Leftrightarrow \ x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \ .$$

   (a) Verifique que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em A.

   (b) Determine as classes de equivalência $[(1, 3)], [(2, 4)]$ e $[(1, 1)]$.

   (c) Determine a partição de A induzida por $\mathcal{R}$.

15. Em cada caso, diga se $\mathcal{R}$ é ou não uma relação de equivalência e, em caso afirmativo, explicite as classes de equivalência determinadas por $\mathcal{R}$. No que se segue D denota o conjunto das palavras do Dicionário Português.

   (a) i. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in D \times D$: as palavras x e y começam pela mesma letra$\}$

   ii. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in D \times D$: as palavras x e y têm pelo menos uma letra em comum$\}$

   iii. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in D \times D$: a palavra x aparece antes da palavra y em D, por ordem alfabética$\}$

   (b) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : \ |x| \leq |y|\}$, onde $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais.

16. (a) Exiba todas as relações binárias distintas que se podem definir no conjunto $\{0, 1\}$, explicitando cada uma delas numa tabela adequada, e, em cada caso, diga se é reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva.

   (b) Uma relação binária, $\mathcal{R}$, definida num conjunto A diz-se anti-reflexiva se para todo $x \in A$, $(x, x) \notin \mathcal{R}$.

   A relação complementar de uma relação $\mathcal{R}$, denota-se por $\overline{\mathcal{R}}$, e $\overline{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in A \times A \ : \ (x, y) \notin \mathcal{R}\}$.

   Mostre que uma relação $\mathcal{R}$ num conjunto A é reflexiva se e só se a relação complementar $\overline{\mathcal{R}}$ é anti-reflexiva.

17. Seja $\mathcal{A} = \{A_r \mid r \in \mathbb{R}\}$ onde

$$A_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x + r\},$$

   uma família de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Prove que $\mathcal{A}$ é uma partição de $\mathbb{R}^2$ e descreva-a geometricamente. Indique também a relação de equivalência correspondente.

18. Sendo A um conjunto, existe alguma relação binária definida em A que seja reflexiva e uma função? Existe mais do que uma?

19. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $f : A \to A$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \neq 6 \\ 1 & \text{se } x = 6 \end{cases}$$

   (a) Determine $f(3), f(6), (f \circ f)(3)$ e $f(f(2))$.

   (b) Mostre que f é injectiva.

20. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ é injectiva e sobrejectiva enquanto que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2 - 1$ não é injectiva nem sobrejectiva.

21. Determine a cardinalidade de cada um dos seguintes conjuntos

$$\{1, 2, \emptyset\}, \quad \{1, \{1, \emptyset\}\}, \quad \{\emptyset\}, \quad \{1\}, \quad \{\{1\}\} \ .$$

22. Determine a cardinalidade do conjunto

$$S \ = \ \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{N} \land p, q \leq 10 \right\} \ .$$

23. Demonstre que os pares de conjuntos a seguir indicados são equipotentes:

   (a) $\{1, \{1, 2\}\}$ e $\{1, 2\}$;

   (b) $\mathbb{N}$ e $2\mathbb{N}$, onde $2\mathbb{N}$ denota o conjunto de números naturais pares;

   (c) $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$.

24. Sejam A e B conjuntos infinitos numeráveis, ou seja, tais que existem funções bijectivas $f : \mathbb{N} \to A$ e $g : \mathbb{N} \to B$. Caso exista determine uma função bijectiva entre A e B. No caso afirmativo, defina explicitamente a sua inversa. Podemos concluir que $|A| = |B|$?

25. Seja A um conjunto finito e $\mathcal{P}(A)$ o conjunto das partes de A, mostre que $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

26. Mostre que $]0, 1[$ não é numerável. Conclua que $\mathbb{R}$ não é numerável.