Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2024/2025 - UC 47166 (1^o Ano/2^o Sem)

Exame Final - 13/06/2025 **Duração: 2h 30m**

1. Uma câmara de vídeo regista a passagem de veículos num túnel e um programa de processamento de imagem extrai diversos parâmetros de cada objeto filmado enviando-os a um sistema de classificação baseado em conhecimento. Considere uma linguagem de primeira ordem onde o universo do discurso são os objetos de vídeo filmados, $obv1$ e $obv2$ são símbolos de constantes (objetos de vídeo) e x é uma variável.

   A partir de predicados adequados obtiveram-se, na lógica de primeira ordem considerada, as seguintes cláusulas (representativas do sistema de classificação):

   $C_1: \ \neg CompMed(x) \vee \neg LargMed(x) \vee Carro(x)$;
   $C_2: \ \neg CompPeq(x) \vee \neg LargPeq(x) \vee Mota(x) \vee Bicicleta(x)$;
   $C_3: \ \neg Bicicleta(x)$;
   $C_4: \ CompGrande(obv1)$;
   $C_5: \ LargMed(obv1)$;
   $C_6: \ CompPeq(obv2)$;
   $C_7: \ LargPeq(obv2)$.

   (a) Obtenha, justificando, fórmulas fechadas da lógica de primeira ordem, $F_1, \ F_2, \ F_3$, a partir das quais se podem obter as cláusulas $C_1, \ C_2$ e C_3.

   (b) Aplique o princípio da resolução para mostrar que o objeto $obv2$ é uma $Mota$, ou seja, que se pode deduzir $Mota(obv2)$, tendo em conta as cláusulas dadas, $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$.

2. Numa escola, 12 alunos vão receber um conjunto de 3 canetas, de cores diferentes, escolhidas entre 5 cores disponíveis.

   (a) Mostre que existem pelo menos dois alunos que receberam exatamente o mesmo conjunto de canetas.

   (b) Quantos alunos seriam necessários para garantir que pelo menos três recebem exatamente o mesmo conjunto de canetas? Justifique.

3. Na Feira de Março, há 3 roletas idênticas, cada uma com 5 cores, $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$, correspondentes a um prémio. O feirante gira as 3 roletas simultaneamente até pararem. O jogador só terá direito a prémio se sair a mesma cor nas 3 roletas. Sem considerar a ordem das roletas, quantas possibilidades de resultados podem ocorrer? Justifique devidamente.

   [Por exemplo, após as 3 roletas girarem um resultado sem prémio pode ser representado por $\{c_1, c_4, c_5\}$, enquanto $\{c_3, c_3, c_3\}$ é um resultado premiado.]

4. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão definida por

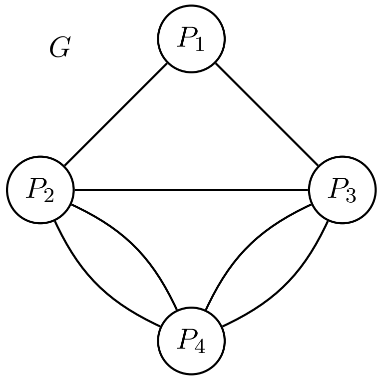
$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2(n-1), \ n \geq 2, \\ a_1 = 2 \ . \end{cases}$$

   Resolva a equação de recorrência dada, de modo a obter uma fórmula fechada para $a_n, \ n \geq 1$.

5. Seja a_n o número de sequências ternárias de comprimento n, $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, onde $t_i \in \{0, 1, 2\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, **não contendo zeros consecutivos**. Por exemplo, para $n = 4$, as sequências $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$, $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ e $(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{2})$ não são válidas, mas $(\mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$, $(\mathbf{2}, \mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ e $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$ são válidas.

   Obtenha uma relação de recorrência para a_n com as respetivas condições iniciais. Justifique.

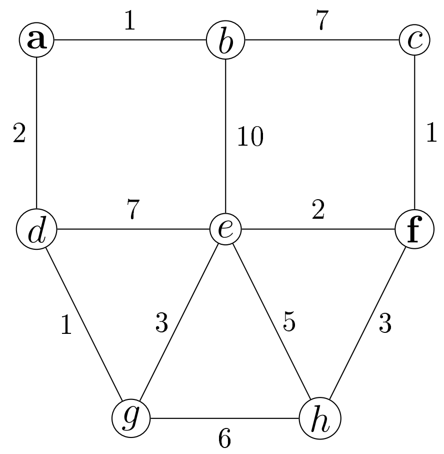
6. Um cortejo académico deve percorrer **uma só vez todas as ruas** da área representada pelo grafo G, partindo de uma das praças P_1, P_2, P_3 ou P_4 e regressando à mesma praça (de onde parte).



(a) Diga, justificando, se é possível encontrar um percurso nas condições referidas e, no caso afirmativo, copie o grafo G para a sua folha de respostas e represente esse percurso.

(b) Desenhe um grafo H com a mesma sequência dos graus dos vértices de G, $(2, 4, 4, 4)$, mas que não seja isomorfo a G. Justifique devidamente.

7. Considere o grafo G com custos associados às arestas representado por:



Aplicando o algoritmo de Dijkstra determine um caminho de menor custo entre os vértices **a** e **f**, apresentando todos os passos do algoritmo através de uma tabela adequada e indique o caminho determinado, bem como o respetivo custo.

Cotações:

1.(a)	1.(b)	2.(a)	2.(b)	3.	4.	5.	6.(a)	6.(b)	7.
2.5	2.5	1.5	1.5	2.0	2.5	2.0	1.0	1.0	3.5

EF/1

universidade de aveiro — departamento de matemática

ano lectivo 20 24 /20 25 época Normal

nome: EXAME FINAL

~~n.º:~~ ~~curso:~~ EXEMPLO DE RESOLUÇÃO

regime:

disciplina: MATEMÁTICA DISCRETA

melhoria de nota ☐

data 13 / 06 / 2025 n.º de folhas suplementares entregues:

(declaro que desisto:)

classificação

1. (a) Fórmulas fechadas, i.e., sem variáveis livres

$$F_1 \equiv \forall x\big((\text{CompMed}(x) \wedge \text{LargMed}(x)) \to \text{Carro}(x)\big)$$

$$\overset{(i)}{\equiv} \forall x\big(\neg(\text{CompMed}(x) \wedge \text{LargMed}(x)) \vee \text{Carro}(x)\big)$$

$$\overset{(ii)}{\equiv} \forall x\big(\underbrace{\neg \text{CompMed}(x) \vee \neg \text{LargMed}(x) \vee \text{Carro}(x)}_{C_1}\big) \quad \text{FNS}$$

(i) $p \to q \equiv \neg p \vee q$ L. Implicação

(ii) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ L. Morgan

FNS forma Normal de Skolem

$$F_2 \equiv \forall x\big((\text{CompPeq}(x) \wedge \text{LargPeq}(x)) \to (\text{Mota}(x) \vee \text{Bicicleta}(x))\big)$$

$$\overset{(i),(ii)}{\equiv} \forall x\big(\underbrace{\neg \text{CompPeq}(x) \vee \neg \text{LargPeq}(x) \vee \text{Mota}(x) \vee \text{Bicicleta}(x)}_{C_2}\big) \quad \text{FNS}$$

$$F_3 \equiv \neg(\exists x\, \text{Bicicleta}(x)) \equiv \forall x\, (\underbrace{\neg \text{Bicicleta}(x)}_{C_3})$$

ou

$$F_3 \equiv \forall x\, (\neg \text{Bicicleta}(x))$$

1.-(b) Pretende-se deduzir $G \equiv Mota(obvz)$, donde, é necessário usar a cláusula que resulta de $\neg G$, ou seja, $C_8 : \neg Mota(obvz)$; renomeando as variáveis das cláusulas $\underbrace{C_2}_{\text{com } x}$ e $\underbrace{C_3}_{\text{com } y}$, partindo do conjunto de cláusulas $\mathcal{C} = \{C_2, C_3, C_6, C_7, C_8\}$ pode mostrar-se que $\mathcal{C}$ é inconsistente aplicando o princípio da resolução:

$C_2\sigma_1 : \neg CompPeq(obvz) \vee \neg LargPeq(obvz) \vee Mota(obvz) \vee Bicicleta(obvz)$

$C_6 : CompPeq(obvz)$

$C_9 : \neg LargPeq(obvz) \vee Mota(obvz) \vee Bicicleta(obvz)$ faz $R(C_2\sigma_1, C_6)$, com $\sigma_1 = \{obvz/x\}$ umg de $\{CompPeq(x), CompPeq(obvz)\}$

$C_7 : LargPeq(obvz)$

$C_{10} : Mota(obvz) \vee Bicicleta(obvz)$ $\longrightarrow R(C_9, C_7)$

$C_3\sigma_2 : \neg Bicicleta(obvz)$

$C_{11} : Mota(obvz)$ $R(C_{10}, C_3\sigma_2)$ $\sigma_2 = \{obvz/y\}$ umg de $\{Bicicleta(y), Bicicleta(obvz)\}$

$C_8 : \neg Mota(obvz)$

$\perp$ $R(C_{11}, C_8)$

logo, $\mathcal{C}$ é inconsistente, donde, sendo $F_6 \equiv C_6$ e $F_7 \equiv C_7$, conclui-se que $F_2, F_3, F_6, F_7 \models G$.

2.(a) O número de conjuntos possíveis com 3 canetas escolhidas entre 5 cores é dado por

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 = n;$$

Como o número de alunos $m = 12$ é tal que, $m > kn$, com $k = 1$, i.e., $12 > 10$, então pelo Princípio da Gaiola dos Pombos pelo menos $k+1 = 2$ alunos recebem o mesmo conjunto de canetas.

Ou (alternativamente):
Havendo 12 pombos para distribuir por 10 gaiolas, então pelo menos 2 pombos vão para a mesma gaiola.

(b) Neste caso, são necessários m alunos com $m > 2n$, ou seja, $m > 20$, pelo que, $m = 21$ (no mínimo), verificando-se $m > kn$, $k = 2$, $k+1 = 3$ alunos recebem o mesmo conjunto de canetas (pelo menos).

Ou:
São necessários 21 pombos para distribuir por 10 gaiolas, de modo a que pelo menos 3 pombos vão para a mesma gaiola.

3. O número de resultados possíveis coincide com o número de soluções da equação

$$c_1+c_2+c_3+c_4+c_5=3\,,\quad c_i\in\{0,1,2,3\}$$
$$i=1,2,3,4,5$$

dado pelo número de combinações com repetição de $n=5$ elementos (cores) $\underbrace{3}_{k}$ a $\underbrace{3}_{k}$ (roletas), ou seja,

$$\left(\binom{5}{3}\right)=\binom{5+3-1}{3}=\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!\,4!}=\frac{7\times\cancel{6}\times 5}{\cancel{6}}=35.$$

4. (Ver resolução da pergunta 3 do Teste T2)

5. (" " " " 6 " " ")

6. (a) (" " " " 1. (a) " " ")

(b) (" " " " 1. (d) " " ")

7. (" " " " 2 " " ")