Matemática Discreta

5^a AULA

Universidade de Aveiro 2014/2015

http://moodle.ua.pt

Relações de equivalência

Partições

Funções

Relações de equivalência

Definição (de relação de equivalência)

Uma relação binária diz-se uma relação de equivalência se é reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplos:

- A relação $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$ é uma relação de equivalência em $A = \{a, b, c\}$.
- A relação $\mathcal{R}$ definida por $x \,\mathcal{R}\, y$ se $x - y$ é divisível por 2 é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.

Definição (de classe de equivalência)

Se $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência definida em A e $x \in A$, então o subconjunto $[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in A : (x, y) \in \mathcal{R}\}$ diz-se a classe de equivalência de x e x um seu representante (quando não existem dúvidas em relação a $\mathcal{R}$, essa classe denota-se, simplesmente, por $[x]$).

Propriedades

Teorema

Se $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência definida num conjunto A, então

1) $[a] \neq \emptyset$, para todo $a \in A$;
2) $a \,\mathcal{R}\, b \Leftrightarrow [a] = [b]$, para todos $a, b \in A$;
3) $A = \bigcup_{a \in A} [a]$.

Definição (de conjunto quociente)

Sendo $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência definida num conjunto A, o conjunto das classes de equivalência de A designa-se por conjunto quociente e denota-se por $A/\mathcal{R}$, ou seja,

$$A/\mathcal{R} = \{[x] : x \in A\}$$

Partições

Definição (de partição de um conjunto)

Se A é um conjunto não vazio, então uma colecção de subconjuntos $P \subseteq \mathcal{P}(A)$ tal que

1) $S \neq \emptyset$, para todo $S \in P$;
2) $S_1 \neq S_2 \Rightarrow S_1 \bigcap S_2 = \emptyset$, quaisquer que sejam $S_1, S_2 \in P$;
3) $A = \bigcup_{S \in P} S$.

diz-se uma partição de A.

Nota: os elementos de uma partição P designam-se por blocos de P.

Partições e conjuntos quociente

Teorema

Se $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência definida num conjunto não vazio A, então o conjunto quociente $A/\mathcal{R}$ é uma partição de A.

Teorema

Seja P uma partição de um conjunto não vazio A e $\mathcal{R}$ a relação definida por $x \mathcal{R} y$ se e só se x e y pertencem ao mesmo bloco de P. Então $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em A.

Nas condições do teorema anterior, diz-se que $\mathcal{R}$ é a relação induzida pela partição P.

Função, conjunto de partida e conjunto de chegada

Definição (de função)

Sejam A e B dois conjuntos e $f \subseteq A \times B$ uma relação entre A e B. Se, para todo $x \in A$ existe um e um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, diz-se que f é uma função definida em A e imagem em B. Nestas condições A designa-se conjunto de partida e B conjunto de chegada.

- Usualmente escreve-se: $f(x) = y$, em vez de $(x, y) \in f$.
- Também se escreve $f : A \to B$ ou

$$\begin{array}{rcl} f : A & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

para significar que f é uma uma função definida em A e com imagem em B.

Exemplo

Exemplo: De entre as relações binárias entre $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$ a seguir indicadas, vamos determinar as que são funções.

1) $f = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$.
2) $g = \{(1, a), (2, c), (3, d), (2, b)\}$.
3) $h = \{(1, a), (2, b)\}$.

Funções injectivas, sobrejectivas e bijectivas

Uma função $f : A \to B$ diz-se

injectiva se

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y, \quad \text{quaisquer que sejam } x, y \in A;$$

sobrejectiva se

$$\text{para todo } y \in B \text{ existe } x \in A \text{ tal que } f(x) = y;$$

bijectiva se é injectiva e sobrejectiva.

Exemplos

Vamos classificar as funções a seguir indicadas quanto à injectividade e sobrejectividade.

1) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$

2) $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2 \end{array}$

3) $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$

4) $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definido por $i(n) = \begin{cases} 2n+1 & se \quad n \geq 0 \\ -2n & se \quad n < 0 \end{cases}$

Funções iguais

Definição (de igualdade de funções)

Duas funções f e g dizem-se iguais (e escreve-se $f = g$) se

1) dom(f) =dom$(g) = D$;
2) $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$.

Exercício

De entre as funções a seguir indicadas, quais as que são iguais?

1) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1, \ \ x \in \mathbb{Z}$;
2) $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1, \ \ x \in \mathbb{R}$;
3) $h(x) = (x^2 - 1)(x + 1), \ \ x \in \mathbb{R}$.

Imagem e imagem recíproca

Definição (de imagem e imagem recíproca)

Considere a função $f : A \to B$ e os subconjuntos $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$.

- Designa-se imagem de X por f, o conjunto

$$f(X) = \{b \in B : f(x) = b, \text{ para algum } x \in X\}.$$

  Por sua vez, img$(f) = f(A)$.

- Designa-se imagem recíproca de Y por f, o conjunto

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A : f(a) \in Y\}.$$

Nota: quando $Y = \{y\}$, escreve-se $f^{-1}(y)$ em vez de $f^{-1}(\{y\})$.

Imagem e imagem recíproca

Exercício

Considerando a função

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & n^2 \end{array}$$

e os conjuntos $X_1 = \{-4, -3, -2, -1\}$ e $X_2 = \{1, 2, 3, 4\}$, determine:

1) $g(X_1)$;
2) $g(X_2)$;
3) $g^{-1}(X_2)$.

Referências bibliográficas

- Referência bibliográfica:
  D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.

- Referências bibliográficas complementares:
  N. L. Biggs, *Discrete Mathematics*, Oxford University Press, 2nd Ed. (2002).
  J. S. Pinto, *Tópicos de Matemática Discreta*, Universidade de Aveiro 1999 (disponível na página da disciplina).