Matemática Discreta

Ano Lectivo 2014/2015

Folha de exercícios Nº8
Elementos da teoria dos grafos

---

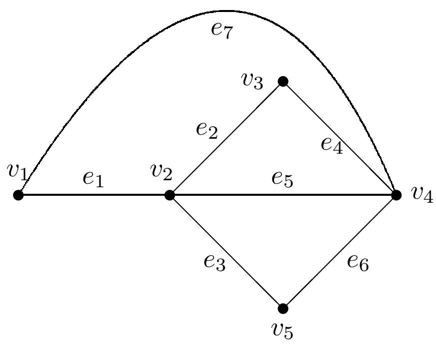
1. Represente graficamente exemplos de grafos G_1, G_2, G_3 e G_4, cada um dos quais com 5 vértices e 8 arestas tais que G_1 é um grafo simples, G_2 não é simples e não contém lacetes, G_3 não é simples e não contém arestas paralelas, G_4 não é simples, contém lacetes e arestas paralelas.

2. Sabendo que a matriz de incidência, M_G, de um grafo G, é tal que

$$M_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   represente graficamente G.

3. Determine as matrizes de incidência e de adjacência do grafo representado na figura a seguir:



4. Considere o digrafo $\overrightarrow{D}$ que traduz a seguinte relação: as cobras comem sapos e pássaros, os pássaros e aranhas comem insetos, os sapos comem aranhas e insetos.
   (a) Represente graficamente $\overrightarrow{D}$.
   (b) Obtenha as matrizes de adjacência e de incidência de $\overrightarrow{D}$.

5. (a) Prove que um grafo regular de grau r com p vértices tem $\frac{p \times r}{2}$ arestas.
   (b) Mostre que o grafo completo K_p tem $\binom{p}{2}$ arestas.
   (c) Seja q um inteiro tal que $0 \leq q \leq \binom{p}{2}$.
      i. Determine o número de grafos com vértices $\{1, 2, \ldots, p\}$ e exactamente q arestas.
   (d) Qual o número de grafos com vértices $\{1, 2, \ldots, p\}$?

6. Mostre que se G é um grafo de ordem n e dimensão m então

$$\delta(G) \leq \frac{2m}{n} \leq \Delta(G).$$

7. Encontre o menor número de vértices necessários para construir um grafo completo com pelo menos 1000 arestas.

8. Qual o número de arestas de um grafo simples G, sabendo que $\nu(G) = 56$ e $\varepsilon(G^c) = 80$?

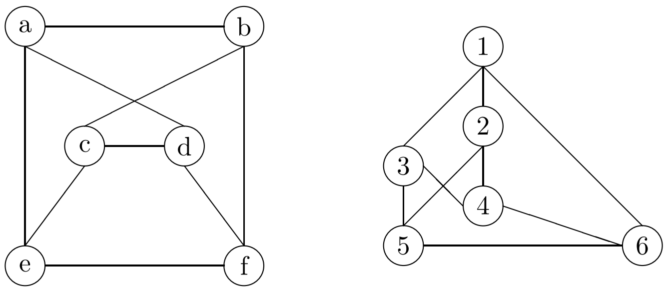
9. Quantos vértices poderá ter um grafo regular com 24 arestas?

10. Mostre que, existem:

    (a) quatro grafos simples não isomorfos de ordem 3;

    (b) onze grafos simples não isomorfos de ordem 4.

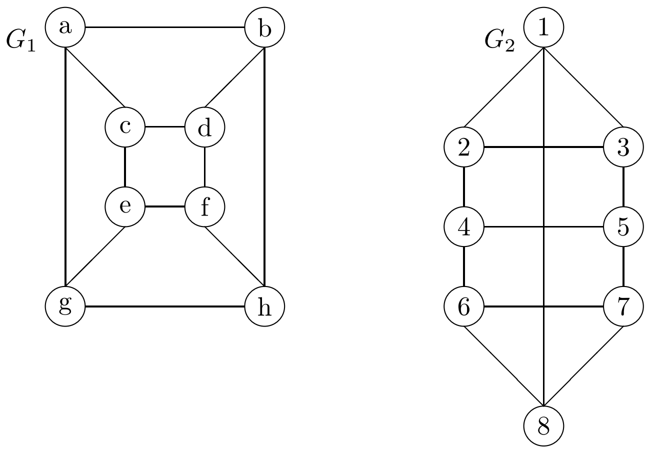
11. Diga, justificando, se os grafos representados a seguir são isomorfos.



12. Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ grafos simples e $G_1^c = (V_1, \overline{E_1})$, $G_2^c = (V_2, \overline{E_2})$ os respectivos grafos complementares. Mostre que $G_1 \cong G_2$ se e só se $G_1^c \cong G_2^c$.

13. Mostre que nenhum grafo com 14 vértices é isomorfo ao seu complementar.

14. Considere os seguintes grafos G_1 e G_2:



Diga se G_1 ou G_2 são grafos bipartidos. E isomorfos? Justifique.

15. Um grafo G tem vértices a, b, c, d, e, f, g, h, i e j e arestas ih, ia, hf, hb, ab, fe, fd, be, bd, bc, bj, dg e cg.

    (a) Mostre que G é um grafo bipartido e indique uma partição do conjunto dos seus vértices.

    (b) De quantas maneiras distintas poderia ter efectuado a partição da alínea anterior?

    (c) O grafo G é também tripartido? Justifique.

16. Sabendo que numa festa estão 20 convidados:

    (a) É possível que cada um destes convidados conheça número diferente de convidados?

    (b) É possível que 10 convidados conheçam todos os convidados e os restantes 10 não se conheçam entre si?

17. Num mapa de estradas de uma região, aparecem 25 estradas que unem diferentes pares de cidades. Tendo em conta que de cada cidade saem, pelo menos, quatro estradas, quantas cidades aparecem no mapa, sabendo que o seu número é o máximo possível.

18. Sete participantes num congresso vão comer juntos numa mesa circular durante os três dias de duração do congresso. Para se conhecerem melhor, decidem sentar-se de modo que cada um deles tenha de ambos os lados uma pessoa diferente todos os dias. É possível levar esta operação a cabo? No caso afirmativo, utilize um grafo para representar a distribuição diária dos lugares na mesa.

19. Considere o digrafo $\overrightarrow{D} = (V, E)$ onde

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{e} \quad E = \{12, 23, 34, 45, 56, 16, 26, 52\}.$$

    (a) Determine um passeio de 1 a 6 de comprimento 6.

    (b) Determine um trajecto de 1 a 6 com 5 arcos.

    (c) Determine um ciclo orientado com 4 arcos.

    (d) Use a matriz de adjacência de $\overrightarrow{D}$ para determinar o número de passeios orientados de comprimento 2 entre os vértices 2 e 4.

20. Seja G uma floresta com n vértices, m arestas e k componentes. Determine m em função de n e k.

21. Suponha que uma árvore tem 2 vértices de grau 5, 3 vértices de grau 4, 6 vértices de grau 3, 8 vértices de grau 2 e r vértices de grau 1. Determine r.

22. Determine o número máximo de vértices que um grafo com 4 componentes conexas e 20 arestas pode ter.

23. Diga o que pode concluir relativamente a uma aresta e que pertence a todas as árvores abrangentes de um grafo conexo G.

24. Uma rede rodoviária entre 6 povoações A, B, C, D, E e F é constituída por 8 estradas tal como se descreve a seguir:
- entre A e B com 30 Km;
- entre B e E com 20 Km;
- entre E e F com 40 Km;
- entre A e C com 22 Km;
- entre C e E com 12 Km;
- entre D e F com 18 Km;
- entre A e D com 30 Km;
- entre C e D com 36 Km;

    (a) Represente esta rede rodoviária por um grafo com pesos nas arestas.

    (b) Aplique o algoritmo de Dijkstra ao grafo para determinar o caminho mais curto entre a povoação D e a povoação B e a respectiva distância.

25. Seja G um grafo simples não orientado com conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e matriz de custos

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 5 & 0 & 8 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & 8 & 0 & 1 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 3 & 0 & 3 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

    a) Verifique se G é um grafo bipartido.

    b) Aplique o algoritmo de Dijkstra para determinar um caminho de custo mínimo entre os vértices 1 e 4.

    c) Determine uma árvore abrangente de G de custo mínimo aplicando o algoritmo de Kruskal.

26. Determine o número de árvores abrangentes do grafo G, para o qual $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $E(G) = \{13, 25, 34, 35, 46, 47, 58, 78\}$.

27. Determine o número de árvores abrangentes do grafo que se obtém unindo um vértice do grafo completo de ordem 6, K_6, a um vértice de C_6 (ciclo de comprimento 6) por uma aresta.

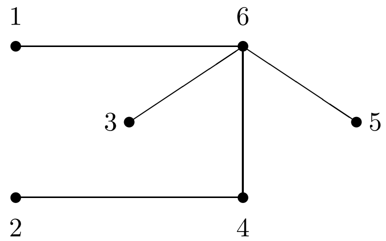
28. Considere um grafo G definido pela matriz de custos nas arestas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 35 & 40 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 35 & 0 & 25 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ 40 & 25 & 0 & 20 & 15 & \infty & \infty \\ \infty & 10 & 20 & 0 & 30 & 8 & 21 \\ \infty & \infty & 15 & 30 & 0 & 15 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & 8 & 15 & 0 & 17 \\ \infty & \infty & \infty & 21 & 11 & 17 & 0 \end{bmatrix}$$

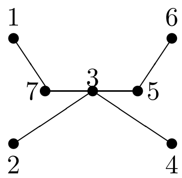
    Construa uma árvore abrangente de custo mínimo de G com recurso aos algoritmos de Kruskal e de Prim.

29. Determine os códigos de Prüfer que correspondem às árvores:

(a)



(b)



30. Represente graficamente as árvores definidas pelos códigos de Prüfer:

(a) $(1, 2, 3, 4, 5)$;

(b) $(3, 3, 3, 3, 3)$;

(c) $(2, 8, 6, 3, 1, 2)$.