

Matemática Discreta

Ano Lectivo 2014/2015

Soluções da folha de exercícios nº6

Recorrência e funções geradoras

1. $a_n = \frac{3}{2}a_{n-1}$, para $n \geq 1$, com $a_0 = 1200$.
2. $a_n = a_{n-1} + (n-1) \times 3^n$, para $n \geq 1$, com $a_0 = 0$.
3. (a) $a_1 = 3$ e $a_2 = 8$.
(b) $a_n = 2a_{n-2} + 2a_{n-1}$, $n \geq 3$.
4. $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$, para $n \geq 3$, com $c_1 = 1$ e $c_2 = 2$.
5. (a) $a_n = 5 + 2n(n+1)(2n+1)$, para $n \geq 0$.
(b) $a_n = 5 + n - 7 \times 2^{n+1} - 5n2^{n-1} + n^22^{n-1} + 3^{n+2}$, para todo $n \geq 0$.
(c) $a_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\frac{n\pi}{3})$, para todo $n \geq 0$.
6. Relação de recorrência: $S_n = S_{n-1} + 2n^2 + n$, para todo $n \geq 2$, com $S_1 = 3$.
Fórmula fechada: $S_n = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$, para todo $n \geq 1$.
7. $p = -5$, $q = 6$ e $r = 8$.
8. Relação de recorrência: $a_n = 2a_{n-1} + 1$, para todo $n \geq 2$, com $a_1 = 0$.
Fórmula fechada: $a_n = 2^{n-1} - 1$, para todo $n \geq 1$.
9. (a) Substituição: $a_n = b_n \times n!$.
Fórmula fechada: $b_n = n + 2$ e $a_n = (n+2) \cdot n!$, para todo $n \geq 0$.
(b) Substituição: $a_n = b_n/n$.
Fórmula fechada: $b_n = 2 \times 5^n$ e $a_n = 2 \times 5^n/n$, para todo $n \geq 1$.
(c) Substituição: $b_n = a_n^2$.
Fórmula fechada: $b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 4k \\ 1 & \text{se } n = 1 + 4k \\ 3 & \text{se } n = 2 + 4k \\ 2 & \text{se } n = 3 + 4k \end{cases}$ e $a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 4k \\ 1 & \text{se } n = 1 + 4k \\ \sqrt{3} & \text{se } n = 2 + 4k \\ \sqrt{2} & \text{se } n = 3 + 4k \end{cases}$, para todo $n \geq 0$.
(d) Substituição: $b_n = \log_2 a_n$.
Fórmula fechada: $b_n = (\frac{2}{3})^{n-1}$ e $a_n = 2^{(\frac{2}{3})^{n-1}}$, para todo $n \geq 1$.
(e) Substituição: $b_n = \log_2 a_n$.
Fórmula fechada: $b_n = 2^{n+2} - 3$ e $a_n = 2^{2^{n+2}-3}$ para $n \geq 0$.
10. $h(k, n) = h(k, n-1) + kh(k-1, n-2)$, para todos $k \geq 1$ e $n \geq 2$.
11. (a) $f(x) = (1+x+\dots+x^5)(1+x+x^2+x^3)(x^2+x^3+\dots+x^8)(1+x+\dots+x^4)$.
(b) $f(x) = (1+x^2+x^4+x^6+x^8)(x+x^3+x^5+x^7)(1+x+x^2+x^3+\dots+x^8)^2$.
12. (a) $f(x) = (1+x+x^2+\dots+x^{27})^4$, coeficiente de x^{27} .
(b) $f(x) = (x+x^2+\dots+x^{24})^4$, coeficiente de x^{27} .
(c) $f(x) = (1+x+x^2+\dots+x^{13})^4$, coeficiente de x^{27} .
13. 55.
14. Coeficiente de x^r na série de potências da função g definida por
 $g(x) = (1+x^3+x^6+x^9+\dots)(1+x^2+x^4+x^6+\dots)^2(1+x^4+x^8+x^{12}+\dots) = \frac{1}{(1-x^3)(1-x^2)^2(1-x^4)}$.

15. (a) $a_n = n!$, para todo $n \geq 1$.
 (b) $a_n = 1 + \binom{n+1}{2}$, para todo $n \geq 0$.
16. Determine as funções geradoras das seguintes sucessões:
- (a) $B(x) = \frac{kx}{(1-kx)^2}$.
 (b) $C(x) = \frac{kx}{(1-x)(1-kx)^2}$.
 (c) $A(x) = \frac{-1+(2+C_1)x}{1-C_1x-C_2x^2}$.
17. (a) $a_0 = 16, a_1 = 32, a_2 = 24, a_3 = 8, a_4 = 1, a_n = 0$, para todo $n \geq 5$.
 (b) $a_n = -2 + 2^{n+2}$, para todo $n \geq 0$.
18. (a)
 (b) $u_n = 2^{2n+1} - 2^n$, para todo $n \geq 0$.
19. (a) $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.
 (b)
 (c) $f(x) = (\alpha + 1) \frac{x}{1-x^2} - \frac{x}{(1-x)^4}$.
 (d) $a_n = \frac{\alpha+1}{2} - \frac{\alpha+1}{2}(-1)^n - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para todo $n \geq 0$.
20. $a_n = n3^n + 1$, para todo $n \geq 0$.
21. (a) $a_n - 8a_{n-1} + 23a_{n-2} - 28a_{n-3} + 12a_{n-4} = 0$.
 (b) $a_n = A + B3^n + C2^n + Dn2^n$, para todo $n \geq 0$, com A, B, C e D constantes.
22. $a_n = 2 \times 3^n$, para todo $n \geq 0$.
23. $a_n = \frac{3+\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^n$ e $b_n = \frac{\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n - \frac{\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^n$, para todo $n \geq 0$.
24. $u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2$, para todo $n \geq 0$.
25. $u_n = \frac{1+3^n}{2}$, para todo $n \geq 0$.
26. $a_n = -(n+1)^2$, para todo $n \geq 0$.