

# Matemática Discreta

## 13<sup>a</sup> AULA

Universidade de Aveiro 2014/2015

<http://moodle.ua.pt>

### **Resolventes de cláusulas**

### **Aplicação do princípio da resolução à lógica de primeira ordem**

### **Formulação geral da implementação do princípio da resolução**

### **Implementação em excel do algoritmo de resolução**

### **Referências e bibliografia**

## Unificador mais geral de dois ou mais literais e factores

### Definição (factor)

Se  $\sigma$  é o unificador mais geral de dois ou mais literais (com o mesmo sinal) de uma cláusula  $C$ , então  $C\sigma$  é um factor de  $C$ .

Exemplo: Considerando a cláusula

$$C = P(x) \vee P(f(y)) \vee Q(x),$$

verifica-se que os literais  $L_1 : P(x)$  e  $L_2 : P(f(y))$  têm o unificador mais geral  $\sigma = \{f(y)/x\}$ . Então

$$C\sigma = P(f(y)) \vee Q(f(y))$$

é um factor de  $C$ .

## Resolvente binária

### Definição (de resolvente binária)

Sejam  $L_1$  e  $L_2$  literais das cláusulas  $C_1$  e  $C_2$  as quais não têm qualquer variável em comum. Se  $L_1$  e  $\neg L_2$  têm o mesmo unificador mais geral  $\sigma$ , então  $(C_1\sigma - L_1\sigma) \cup (C_2\sigma - L_2\sigma)$  diz-se resolvente binária de  $C_1$  e  $C_2$ .

Exemplo: Considerando as cláusulas

$$C_1 : P(x) \vee Q(x) \text{ e } C_2 : \neg P(a) \vee R(y),$$

onde  $a$  é uma constante. Os literais  $L_1 : P(x)$  e  $\neg L_2 : P(a)$  têm o unificador mais geral  $\sigma = \{a/x\}$ . Assim,

$$(C_1\sigma - L_1\sigma) \cup (C_2\sigma - L_2\sigma) = Q(a) \vee R(y).$$

Logo,  $Q(a) \vee R(y)$  é a resolvente binária de  $C_1$  e  $C_2$ .

## Resolventes de cláusulas

### Definição (de resolvente de cláusulas)

Designa-se por resolvente das cláusulas  $C_1$  e  $C_2$ , uma das seguintes resolventes:

1. uma resolvente binária de  $C_1$  e  $C_2$ ;
2. uma resolvente binária de  $C_1$  e um factor de  $C_2$ ;
3. uma resolvente binária de um factor de  $C_1$  e  $C_2$ ;
4. uma resolvente binária de um factor de  $C_1$  e de um factor de  $C_2$ .

### Exemplo

Vamos considerar as cláusulas

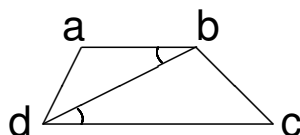
$$C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y)) \text{ e } C_2 = \neg P(f(g(a))) \vee Q(b).$$

- $C_1' = P(f(y)) \vee R(g(y))$  é um factor de  $C_1$ ;
- $R(g(g(a))) \vee Q(b)$  é uma resolvente binária de um factor de  $C_1'$  e  $C_2$
- $R(g(g(a))) \vee Q(b)$  é uma resolvente de  $C_1$  e  $C_2$ .

## Aplicação do princípio de resolução à lógica de primeira ordem

### Exemplo de aplicação

Vamos provar, utilizando o princípio da resolução, que os ângulos internos alternos formados pelas diagonais de um trapézio  $T(a, b, c, d)$  são iguais.



- $A_1: (\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v) T(x, y, u, v) \Rightarrow P(x, y, u, v)$  (a recta que contém o segmento  $xy$  é paralela à recta que contém o segmento  $uv$ );
- $A_2: (\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v) P(x, y, u, v) \Rightarrow E(x, y, v, u, v, y)$  (os ângulos  $xyv$  e  $uvy$  são iguais);
- $A_3: T(a, b, c, d)$ .

## Aplicação do princípio de resolução à lógica de primeira ordem (cont.)

- Vamos provar que os ângulos internos alternos formados pelas diagonais de um trapézio são iguais, provando que
- $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \neg E(a, b, d, c, d, b)$  é inconsistente.
- Ou seja, que o conjunto de cláusulas:

$$S = \{ \neg T(x, y, u, v) \vee P(x, y, u, v), \\ \neg P(x, y, u, v) \vee E(x, y, v, u, v, y), \\ T(a, b, c, d), \\ \neg E(a, b, d, c, d, b) \}$$

é inconsistente.

## Procedimento de aplicação do princípio da resolução

A implementação da aplicação do princípio da resolução a um conjunto de cláusulas,  $S$ , pode fazer-se de acordo com os seguintes passos:

- 1) Determinar as resolventes dos pares das cláusulas de  $S$ .
- 2) Juntar as resolventes determinadas em 1) ao conjunto  $S$ .
- 3) Determinar, as resolventes que decorrem do conjunto anteriormente obtido e repetir este procedimento, até que se obtenha a cláusula vazia  $\diamond$ .

Sendo  $S^0, S^1, \dots, S^n$  os conjuntos de resolventes, obtém-se

$$S^0 = S;$$

$$S^n = \{ \text{resolvente de } C_1 \text{ e } C_2 : C_1 \in S^0 \cup S^1 \cup \dots \cup S^{n-1} \text{ e } C_2 \in S^{n-1} \},$$

$$n = 1, 2, \dots$$

## Implementação em Excel

- **INPUT:**  $S$  (conjunto de cláusulas)
  1.  $k = 0$ ;
  2.  $S^0 = S$ ;
  3. Criar um número de colunas igual ao número de literais de  $S^0$  e identificá-las pelos respectivos literais;
  4. Criar um número de linhas igual ao número de cláusulas de  $S^0$  e identificá-las pelas respectivas cláusulas;
  4. Para cada linha e coluna:
    - se o correspondente literal aparece em  $S^0$  não negado atribuir o valor  $1$ ;
    - se aparece negado atribuir o valor  $-1$ ;
    - se não faz parte da cláusula atribuir o valor  $0$ .

## Implementação em Excel (cont.)

- Enquanto existirem pelo menos duas linhas que contenham duas células, associadas à mesma coluna, com sinais contrários, obter  $S^{k+1}$  pela "adição",  $\oplus$ , dos respectivos pares de linhas, onde:

$\oplus$	-1	0	1
-1	-1	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	1

- Se resultar uma linha de zeros (correspondente à cláusula vazia) então STOP (conclui-se que  $S$  é inconsistente); senão fazer  $k = k + 1$ ;

## Implementação em Excel (cont.)

- Exemplo: Seja  $S^0 = \{P, \neg U, \neg S \vee U, \neg P \vee S\}$

	Número da cláusula	$P$	$S$	$U$
$S^0$	(1ª): $P$	1	0	0
	(2ª): $\neg U$	0	0	-1
	(3ª): $\neg S \vee U$	0	-1	1
	(4ª): $\neg P \vee S$	-1	1	0
$S^1$	(5ª): $(1^a) \oplus (4^a)$	0	1	0
	(6ª): $(2^a) \oplus (3^a)$	0	-1	0
	(7ª): $(3^a) \oplus (4^a)$	-1	0	1
$S^2$	(8ª): $(1^a) \oplus (7^a)$	0	0	1
	(9ª): $(2^a) \oplus (7^a)$	-1	0	0
	(10ª): $(3^a) \oplus (5^a)$	0	0	1
	(11ª): $(4^a) \oplus (6^a)$	-1	0	0
	(12ª): $(5^a) \oplus (6^a)$	0	0	0

## Referências e bibliografia I



D. M. Cardoso, P. Carvalho, *Noções de Lógica Matemática*, Universidade de Aveiro, 2007 (disponível na página da disciplina).