Matemática Discreta

Ano Lectivo 2014/2015

Folha de exercícios nº3 (Lógica de primeira ordem)

1. Indique quais as ocorrências livres e ligadas de cada uma das variáveis das seguintes fórmulas:
   (a) $\exists y P(x,y)$;
   (b) $(\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))) \Rightarrow (\neg P(x) \vee Q(y))$;
   (c) $\exists x(P(y,z) \wedge \forall y(\neg Q(x,y) \vee P(y,z)))$;
   (d) $P(a, f(a,b))$;
   (e) $\exists x(P(x) \Rightarrow \neg Q(x))$;
   (f) $\forall x((P(x) \wedge C(x)) \Rightarrow \exists y L(x,y))$.

2. Escreva, justificando, a negação de cada uma das afirmações:
   (a) Algumas pessoas gostam de matemática;
   (b) Todas as pessoas gostam de gelados;
   (c) Algumas pessoas são altas e magras.

3. Exprima por meio de fórmulas as seguintes afirmações:
   (a) Todas as aves têm penas.
   (b) Todas as crianças são mais novas que os seus pais.
   (c) Todos os insectos são mais leves do que algum mamífero.
   (d) Para todo número x, existe um número y tal que $x < y$.
   (e) Nenhum número é menor do que zero.
   (f) Zero é menor do que qualquer número.
   (g) Alguns números primos não são pares.
   (h) Todo o número par é número primo.

4. Considere $j(x)$ e $t(x)$ os predicados "x ouve o jogo de futebol" e "x vai à aula de MD", respectivamente. Usando lógica de primeira ordem, exprima de forma conveniente as seguintes afirmações:
   (a) Nem todos vão à aula de MD.
   (b) Nem todos os que ouvem o jogo faltam à aula.
   (c) Todos os que faltam à aula ouvem o jogo.

5. Sejam $c(x)$, $s(x)$ e $d(x)$, as afirmações "x é uma explicação clara", "x é satisfatória" e "x é uma desculpa", respectivamente. Admita que o domínio para x é o conjunto de todos os textos em Português. Usando a lógica de predicados exprima as seguintes frases:
   (a) Todas as explicações claras são satisfatórias;
   (b) Algumas desculpas não são satisfatórias;
6. Seja Π o conjunto dos subconjuntos dos pontos dum certo plano. Tomando Π para domínio e utilizando apenas os três predicados
   $r(x) \equiv$ "x é uma recta",
   $c(x) \equiv$ "x é uma circunferência",
   $i(x, y) \equiv$ "a intersecção de x e y é não vazia",

   traduza em lógica de predicados cada uma das afirmações seguintes:
   (a) Toda a recta intersecta alguma circunferência.
   (b) Alguma recta não intersecta alguma circunferência.
   (c) Nenhuma recta intersecta todas as circunferências.
7. Obtenha, na forma mais simplificada, a negação da seguinte proposição
   $$\forall y\ \exists x\ (\ (\ q(x) \Rightarrow p(y)\ )\ \vee\ (\ p(y) \wedge q(x)\ )\ ) \quad .$$
8. Traduza em lógica de 1ª ordem as proposições que se seguem, indicando as escolhas que são apropriadas para os domínios correspondentes.
   (a) $x^2 - 4 = 0$ tem uma raíz positiva.
   (b) Toda a solução da equação $x^2 - 4 = 0$ é positiva.
   (c) Nenhuma solução da equação $x^2 - 4 = 0$ é positiva.
   (d) Todos os estudantes que entendem Lógica gostam dela.
9. Para cada uma das fórmulas seguintes, determine, se possível, um modelo e uma interpretação em que sejam avaliadas com valor lógico 0.
   (a) $\forall x(P(x, a) \Rightarrow \neg Q(x, a))$;
   (b) $\exists x\ \exists y((P(x, y) \wedge \forall z(\neg Q(x, y) \vee P(y, z)))$.

   Nas fórmulas acima a denota uma constante.

10. Transforme as seguintes fórmulas na forma normal disjuntiva prenex e na forma normal conjuntiva prenex:

    (a) $\forall x S(x) \Rightarrow \exists z P(z)$;
    (b) $\neg(\forall x(S(x) \Rightarrow P(x)))$;
    (c) $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y Q(x,y))$;
    (d) $\exists x(\neg(\exists y P(x,y)) \Rightarrow (\exists z Q(z) \Rightarrow R(x)))$;
    (e) $\forall x \exists y \exists z((\neg P(x,y) \wedge Q(x,z)) \vee R(x,y,z))$;
    (f) $\forall x\,((S(x) \Rightarrow R(x)) \wedge Q(x))$.

11. Encontre a forma standard de Skolem das seguintes fórmulas:

    (a) $\neg((\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists y)P(y))$
    (b) $\neg((\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists y)(\forall z)Q(y,z))$
    (c) $(\forall x)(\exists y)(\exists z)((\neg P(x,y) \wedge Q(x,z)) \vee R(x,y,z))$

12. Mostre que o conjunto

$$S = \{P \vee R, \neg Q \vee R, \neg S \vee Q, \neg P \vee S, \neg Q, \neg R\}$$

    é inconsistente.

13. Calcule $E\Theta$ em cada um dos seguintes casos:

    (a) $\Theta = \{a/x, f(z)/y, g(x)/z\}$, $E = P(h(x), z, f(z))$;
    (b) $\Theta = \{f(y)/x, a/y\}$, $E = F(a, h(a), x, h(y))$;

14. Para cada um dos seguintes conjuntos de fórmulas indique, justificando, se são ou não unificáveis. Em caso afirmativo, encontre um seu unificador mais geral. Tenha em atenção que "a" e "b" denotam constantes.

    (a) $\{P(f(x), z), P(y, a)\}$;
    (b) $\{P(f(x), a), P(y, f(w))\}$;
    (c) $\{P(a, x, f(g(y))), P(b, h(z, w), f(w))\}$;
    (d) $\{S(x, y, z), S(u, g(v, v), v)\}$;
    (e) $\{P(x, x), P(y, f(y))\}$;
    (f) $\{Q(f(a), g(x)), Q(y, y)\}$;
    (g) $\{Q(f(x), y), Q(z, g(w))\}$.

15. Averigúe se as seguintes cláusulas admitem um factor. Em caso afirmativo, determine-o.

    (a) $P(x) \vee P(a) \vee Q(f(x)) \vee Q(f(a))$;
    (b) $P(x) \vee P(f(y)) \vee Q(x, y)$.

16. Encontre as possíveis resolventes (se existirem) dos seguintes pares de cláusulas:

    (a) $C_1 : \neg P(x) \vee Q(x,b)$ e $C_2 : P(a) \vee Q(a,b)$;

    (b) $C_1 : \neg P(x) \vee Q(x,x)$ e $C_2 : \neg Q(a, f(a))$.

17. Considere as seguintes afirmações:

    - Todo o aluno da universidade de Aveiro que estuda com afinco passa a Matemática Discreta.
    - O João é um aluno da Universidade de Aveiro.
    - O João estuda com afinco.

    (a) Exprima as afirmações anteriores como fbf's do cálculo de predicados.

    (b) Prove, usando o Princípio de Resolução, que o João passa a Matemática Discreta.

18. Considere as seguintes afirmações:

    - Todos os cães são bonitos.
    - Os ratos não são bonitos.
    - Alguns ratos são espertos.

    (a) Expresse as afirmações acima sob a forma de fbf's do cálculo de predicados.

    (b) Prove, usando o Princípio de Resolução, que alguns animais que são espertos não são bonitos.

19. Considere as seguintes afirmações:

    - Os guardas fiscais inspeccionam todas as pessoas que entram neste país e que não sejam VIP's.
    - Alguns traficantes de droga que entram neste país só são revistados por traficantes de droga.
    - Nenhum traficante de droga é VIP.

    (a) Traduza estas frases em fórmulas lógicas.

    (b) Prove, usando o Princípio de Resolução que alguns guardas fiscais são traficantes de droga.