

# Matemática Discreta

## 18<sup>a</sup> AULA

Universidade de Aveiro 2014/2015

<http://moodle.ua.pt>

### Permutações

#### Composição de permutações e permutações inversas

#### Partição cíclica de uma permutação

#### Tipos de permutações

#### Transposições, inversões e sinal de uma permutação

#### Referências bibliográficas

## Permutações

- Uma permutação  $\pi$  dos elementos do conjunto  $[n]$  pode ser interpretada como uma bijecção

$$\pi : [n] \rightarrow [n].$$

Neste caso, usualmente, escreve-se  $\pi_i$  em vez de  $\pi(i)$ .

- É muito comum denotar uma permutação  $\pi$  por

$$\pi = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & z \\ \pi_a & \pi_b & \cdots & \pi_z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

onde na primeira linha aparecem os elementos de  $[n]$ , segundo uma ordem arbitrária, e na segunda aparecem as correspondentes imagens por  $\pi$ .

- Note-se que  $\pi(a) = \pi_a$ ,  $\pi(b) = \pi_b$ ,  $\dots$ ,  $\pi(z) = \pi_z$ .

## Permutações (cont.)

- No caso particular em que os elementos de  $[n]$  aparecem na primeira linha de (1) segundo a ordem natural, ou seja,

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix}, \quad (2)$$

esta permutação pode escrever-se na forma mais compacta

$$\pi = (\pi_1 \ \pi_2 \ \dots \ \pi_n)$$

ou, simplesmente  $(\pi_1 \ \pi_2 \ \dots \ \pi_n)$ .

- Vamos denotar por  $S_n$  o conjunto de permutações de elementos do conjunto  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ .

## Permutação identidade

### Definição (de permutação identidade)

Para cada inteiro  $n \geq 1$ , a permutação  $\pi \in S_n$  tal que  $\forall i \in [n] \pi(i) = i$  designa-se por permutação identidade e denota-se por  $\pi_{id}$ .

- Tendo em conta as observações anteriores, podemos ainda representar a permutação identidade por

$$\pi_{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \text{ ou } \pi_{id} = (1 \ 2 \ \dots \ n).$$

## Composição de permutações

- Uma vez que as permutações são bijecções, a composição de permutações define-se em coerência com a composição de bijecções.
- Como consequência, se  $\pi, \rho \in S_n$ , então  $\pi \circ \rho \in S_n$  e  $\rho \circ \pi \in S_n$ .

### Exemplo

Vamos determinar as composições  $\pi \circ \rho$  e  $\rho \circ \pi$  das permutações  $\pi = (3 \ 4 \ 1 \ 5 \ 2)$  e  $\rho = (4 \ 3 \ 2 \ 5 \ 1)$  (do conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ).

**Solução.** Uma vez que

$\pi \circ \rho(1) = \pi(\rho(1)) = \pi(4) = 5, \pi \circ \rho(2) = \pi(\rho(2)) = \pi(3) = 1, \dots$ , vem  $\pi \circ \rho = (5 \ 1 \ 4 \ 2 \ 3)$ . Analogamente  $\rho \circ \pi(1) = \rho(\pi(1)) = \rho(3) = 2, \rho \circ \pi(2) = \rho(\pi(2)) = \rho(4) = 5, \dots$ , logo  $\rho \circ \pi = (2 \ 5 \ 4 \ 1 \ 3)$ .

## Permutações inversas

- Dada uma permutação  $\pi = (\pi_1 \ \pi_2 \ \dots \ \pi_n)$ , existe a respectiva permutação inversa  $\pi^{-1}$ , a qual podemos determinar trocando as linhas da notação (1), isto é,

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

- Observe-se que  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$\pi^{-1} \circ \pi(i) = \pi^{-1}(\pi(i)) = \pi^{-1}(\pi_i) = i.$$

## Partição cíclica de uma permutação

- Para cada permutação  $\pi \in S_n$  existe uma única partição do conjunto  $[n]$  em subconjuntos não vazios  $X_1, \dots, X_k$  tal que

$$\forall j \in \{1, \dots, k\} \ \forall x \in \{1, \dots, n\} \quad x \in X_j \Rightarrow \pi(x) \in X_j$$

e nenhum  $X_j$  se pode partir em dois subconjuntos não vazios com a mesma propriedade. Uma tal partição é única para cada permutação  $\pi$  e designa-se por **partição cíclica** de  $\pi$ .

### Exercício

Determine a partição cíclica da permutação

$$\pi = (2 \ 8 \ 1 \ 3 \ 9 \ 6 \ 5 \ 4 \ 7).$$

## Ciclo de uma permutação

- Dado um subconjunto  $\{x_1, \dots, x_s\}$  da partição cíclica de uma permutação  $\pi$ , podemos ordenar os respectivos elementos, apresentando-os de acordo com a ordenação definida simbolicamente por  $[x_{i_1}, \dots, x_{i_s}]$ , de tal forma que

$$\begin{aligned}\pi(x_{i_1}) &= x_{i_2}, \\ \pi(x_{i_2}) &= x_{i_3}, \\ &\vdots \\ \pi(x_{i_{s-1}}) &= x_{i_s}, \\ \pi(x_{i_s}) &= x_{i_1}\end{aligned}$$

- A representação desta ordenação não é única. Por exemplo, a ordenação  $[1, 2, 8, 4, 3]$  é idêntica a qualquer das ordenações  $[2, 8, 4, 3, 1]$ ,  $[8, 4, 3, 1, 2]$ ,  $[4, 3, 1, 2, 8]$  e  $[3, 1, 2, 8, 4]$ .

## Ciclo de uma permutação (cont.)

### Definição (de ciclo de uma permutação e comprimento de um ciclo)

Designa-se por *ciclo de uma permutação* cada uma das ordenações associadas a um subconjunto da partição cíclica de uma permutação  $\pi$ ,  $X = [x_{i_1}, \dots, x_{i_s}]$ , a qual se interpreta como sendo uma permutação  $\pi_X$  tal que

$$\pi_X(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \notin X, \\ x_{i_{k+1}}, & \text{se } x = x_{i_k}, \text{ com } k \in \{1, \dots, s-1\}, \\ x_{i_1}, & \text{se } x = x_{i_s}. \end{cases}$$

Por sua vez, o número de elementos do ciclo  $X$  designa-se por *comprimento do ciclo*.

- Observe-se que se o comprimento de um ciclo  $X$  é igual 1, então a permutação  $\pi_X$  é a permutação identidade.

## Decomposição num produto de ciclos

- Como consequência da definição, sendo  $\pi \in S_n$  e  $X_1, \dots, X_k$  os subconjuntos de  $[n]$  da correspondente partição cíclica, verifica-se que

$$\pi = \pi_{X_1} \circ \pi_{X_2} \circ \dots \circ \pi_{X_k}. \quad (3)$$

- Com efeito, se  $x \in \{1, \dots, n\}$ , então existe um único  $j$  tal que  $x \in X_j$  (e também  $\pi_x \in X_j$ ). Por definição,

$$\forall i \in [k] \setminus \{j\} \quad \pi_{X_i}(x) = x \wedge \pi_{X_j}(x) = \pi_x$$

o que implica  $\pi_{X_1} \circ \pi_{X_2} \circ \dots \circ \pi_{X_k}(x) = \pi_{X_j}(x) = \pi(x)$ .

- Dada uma permutação  $\pi \in S_n$ , a factorização (3), designa-se por **decomposição** de  $\pi$  num produto de ciclos.

## Tipos de permutações

### Definição (de tipo de uma permutação)

Se a decomposição de uma permutação  $\pi \in S_n$  num produto de ciclos contém  $\lambda_i$  ciclos de comprimento  $i$ , para  $i = 1, \dots, n$ , então diz-se que a permutação  $\pi$  é do tipo

$$1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}.$$

- Como consequência da definição,  $\sum_{i=1}^n i\lambda_i = n$ .
- Com esta notação, em geral, omitem-se todos os símbolos da forma  $i^{\lambda_i}$ , com  $\lambda_i = 0$ .

**Exemplo:** A permutação  $\pi = [1, 2, 8, 4, 3] \circ [5, 9, 7] \circ [6]$  é do tipo  $1^1 3^1 5^1$ .

## Transposições e inversões

### Definição (de transposição)

Uma permutação  $\tau \in S_n$  diz-se uma transposição se é um ciclo de comprimento dois.

- Cada transposição  $\tau$  é igual à sua inversa, isto é,  $\tau^{-1} = \tau$  ou de modo equivalente  $\tau \circ \tau = \pi_{id}$ . Por outro lado, se

$\pi = (\pi_1 \dots \pi_n) \in S_n$  e  $\tau = [i, i+1] \in S_n$ , então

$$\pi \circ \tau = (\pi_1 \pi_2 \dots \pi_{i-1} \pi_{i+1} \pi_i \pi_{i+2} \pi_{i+3} \dots \pi_n).$$

### Definição (de inversão)

Dada a permutação  $\pi = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S_n$ . O par  $(x_i, x_j)$ , com  $i < j$ , designa-se por inversão de  $\pi$  se  $x_i > x_j$ .

- O número de todas as inversões da permutação  $\pi$  denota-se por  $I(\pi)$ . Cada permutação  $\pi \in S_n$  pode representar-se como produto (composição) de  $I(\pi)$  transposições.

## Sinal de uma permutação

### Definição (de sinal de uma permutação)

Dada uma permutação  $\pi \in S_n$ , o número  $(-1)^{I(\pi)}$  designa-se por sinal da permutação  $\pi$  e denota-se por  $\text{sgn}(\pi)$ .

Algumas propriedades:

- Uma vez que  $I(\pi_{id}) = 0$ ,  $\text{sgn}(\pi_{id}) = 1$ .
- Se  $\tau$  é uma transposição, então  $\text{sgn}(\tau) = -1$ .
- Se  $\pi, \rho \in S_n$ , então  $\text{sgn}(\pi \circ \rho) = \text{sgn}(\pi)\text{sgn}(\rho)$ .
- Se uma permutação  $\pi$  é um ciclo de comprimento  $k$ , então  $\text{sgn}(\pi) = (-1)^{k-1}$ .
- Se uma permutação  $\pi$  é do tipo  $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$ , então

$$\text{sgn}(\pi) = (-1)^{\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 + \dots}. \quad (4)$$

## Paridade de uma permutação

### Definição (de paridade de uma permutação)

A permutação  $\pi \in S_n$  diz-se par se  $\text{sgn}(\pi) = 1$  e diz-se ímpar no caso contrário.

- Denotando o conjunto das permutações pares do conjunto  $[n]$  por  $P_n$ , ou seja,  $P_n = \{\pi \in S_n : \text{sgn}(\pi) = 1\}$ , pode concluir-se que se  $\pi, \rho \in P_n$  então  $\pi \circ \rho \in P_n$  e  $\pi^{-1} \in P_n$ .

### Exemplo

Vamos demonstrar que  $|P_n| = \frac{1}{2}n!$ .

**Solução.** Se  $\pi \in P_n$ , então  $\pi \circ [1, 2]$  é ímpar e se  $\rho \in S_n \setminus P_n$ , então  $\rho \circ [1, 2]$  é par. Por outro lado, se  $\pi, \rho \in S_n$  e  $\pi \neq \rho$  então  $\pi \circ [1, 2] \neq \rho \circ [1, 2]$ . Como consequência,  $\Phi : P_n \rightarrow S_n \setminus P_n$  tal que  $\Phi(\pi) = \pi \circ [1, 2]$  é uma bijecção. Logo, pela princípio da bijecção,  $|P_n| = |S_n \setminus P_n| = \frac{1}{2}n!$ .

## Referências e bibliografia I



D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.