Matemática Discreta

9^a AULA

Universidade de Aveiro 2014/2015

http://moodle.ua.pt

Interpretação na lógica de primeira ordem

Fórmulas consistentes e fórmulas inconsistentes

Fórmulas válidas e fórmulas não válidas

Fórmulas equivalentes

Interpretação na lógica de primeira ordem

Definição (de interpretação)

Seja F uma fórmula. Uma interpretação de F consiste num domínio não vazio D e nas seguintes associações de valores:

1) para cada constante associamos um elementos de D;
2) para cada símbolo de função com n argumentos associamos uma função de D^n em D;
3) para cada símbolo de predicado com n argumentos associamos uma função de D^n em $\{0,1\}$ ($\{V,F\}$).

- Trata-se de uma interpretação da fórmula F sobre D.

Exemplos

Considerando a fórmula $F:\ \forall x\,(P(x,a))$, onde a denota uma constante,

1) $D=\{1,2,3\}$, $a=1$, $P(x,a)$: “x maior ou igual que a", é uma interpretação de F;
2) $D=\{$Maria, Luísa, Antónia $\}$, $a=$ Maria, $P(x,a)$: “x é amiga de a", é uma interpretação de F.

Considerando a fórmula $F:\ \forall x\,(x\geq a)$, onde a é uma constante,

1) $D=\{1,2,3\}$, $a=1$, é uma interpretação de F;
2) $D=\mathbb{Z}$, $a=0$, é uma interpretação de F.

Nota: no último exemplo não é necessário definir o predicado na interpretação, uma vez que está definido na fórmula.

Avaliação de fórmulas da lógica de primeira ordem

Para qualquer interpretação de uma fórmula sobre um domínio D, a fórmula pode ser avaliada em 1 (V) ou 0 (F), segundo as seguintes regras:

1. se os valores verdadeiros ou falsos das fórmulas G e H estão avaliados, então os valores verdadeiros ou falsos das fórmulas $\neg(G)$, $(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $(G \Rightarrow H)$ e $(G \Leftrightarrow H)$ ficam também avaliados;
2. $(\forall\, x)\,(G)$ é avaliada em 1 (V) se G é avaliada em 1 (V) para todas as concretizações possíveis de x em D. Caso contrário, o seu valor é 0 (F).
3. $(\exists\, x)\,(G)$ é avaliada em 1 (V) se G é avaliada em 1 (V) para pelo menos uma concretização de x em D. Caso contrário, o seu valor é 0 (F).

Exemplo

Dadas as fórmulas

1) $(\forall x)\,(P(x, a))$;
2) $(\exists x)\,(P(x, a))$.

onde a é uma constante, vamos utilizar a seguinte interpretação I:

domínio $D = \mathbb{Z}$;
$P(x, a)$ é o predicado "x é maior do que a";
$a = 1$.

Vamos avaliar as fórmulas 1) e 2) para a interpretação I.

Fórmulas que não podem ser avaliadas

Nota: nenhuma fórmula com variáveis livres pode ser avaliada, a menos que se introduza uma função que atribui valores em D às variáveis livres.

Exemplo

Se considerarmos a fórmula

$$(\forall x)\ (P(x,y)),$$

e a interpretação $D = \mathbb{Z}$ e $P(x,y)$: “x é maior do que y",

então a fórmula não pode ser avaliada.

Fórmulas consistentes

Definição (de fórmula consistente)

Uma fórmula F diz-se consistente se existe uma interpretação I tal que F é avaliada em 1 (V) para I. Se uma fórmula toma o valor 1 (V) numa interpretação I dizemos que I é um modelo de F e que I satisfaz F.

Exemplo: Vamos verificar a consistência das fórmulas

1. $(\forall x)\ (P(x,a))$,
2. $(\exists x)\ (P(x,a))$.

Para isso vamos determinar uma interpretação que seja um modelo para as duas fórmulas.

Fórmulas inconsistentes

Definição (de fórmula inconsistente)

Uma fórmula F diz-se inconsistente (ou uma contradição) se não existe uma interpretação de F que satisfaça F.

Exemplo

A fórmula $(\exists x)\ (P(x) \wedge \neg(P(x)))$ é inconsistente.

Fórmulas válidas

Definição (de fórmula válida)

Uma fórmula F diz-se válida (ou uma tautologia) se toda a interpretação satisfaz a fórmula F.

Exemplo

A fórmula $(\forall x)\ (P(x) \Rightarrow P(x))$ é válida.

Consequência lógica

Definição (de consequência lógica)

Uma fórmula G é consequência lógica das fórmulas $F_1, F_2, \ldots, F_n$ se para toda a interpretação I, se a fórmula $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \cdots \wedge F_n$ é verdadeira para I então G também é verdadeira para I.

Teorema

Dadas as fórmulas $F_1, F_2, \ldots, F_n$ e uma fórmula G, G é consequência lógica de $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sse

$$(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \cdots \wedge F_n) \Rightarrow G$$

é uma fórmula válida.

Fórmulas equivalentes

Definição (de fórmulas equivalentes)

Duas fórmulas F e G são equivalentes (e escreve-se $F \equiv G$) sse $F \Leftrightarrow G$ é um teorema (ou seja, uma tautologia).

Exemplos de fórmulas equivalentes:

1. $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ e $\forall x\ (\neg P(x) \vee Q(x))$;
2. $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ e $\forall y\ (\neg P(y) \vee Q(y))$;
3. $\forall x\ \forall y\ (P(x) \Rightarrow Q(x, y))$ e $\forall x\ (P(x) \Rightarrow \forall y\ Q(x, y))$;
4. $\neg(\forall x\ (P(x)))$ e $\exists x\ \neg(P(x))$.

Exemplos de fórmulas não equivalentes:

1. $\forall x\ (P(x))$ e $\exists x\ (P(x))$;
2. $\forall x(P(x, a))$ e $\forall x(P(x, b))$ onde a e b são constantes.

Referências bibliográficas

- Referência bibliográfica:
  D. M. Cardoso, P. Carvalho, *Noções de Lógica Matemática*, Universidade de Aveiro, 2007 (disponível na página da disciplina).