Matemática Discreta

3ª AULA

Universidade de Aveiro 2014/2015

http://moodle.ua.pt

Conjuntos e operações sobre conjuntos

Propriedades

Famílias de conjuntos

A noção de conjunto

Definição (de conjunto)

Um conjunto é uma coleção de objectos (que se designam por elementos do conjunto).

•$x \in A$ (x pertence a A): x é um elemento de A.

•$x \notin A$ (x não pertence a A): x não é um elemento de A.

• Consideramos os elementos dos conjuntos que estamos a estudar como pertencentes a um universo (ou conjunto universal) fixado, $\mathcal{U}$.

• Conjunto vazio ($\emptyset$): conjunto sem elementos.

Conjuntos finitos e infinitos

Conjuntos finitos e infinitos

Um conjunto é finito quando é possível contar os elementos, ou seja, quando é o conjunto vazio ou um conjunto onde é possível estabelecer uma correspondência bijetiva entre os seus elementos e os elementos do conjunto $\{1, \ldots, n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Um conjunto é infinito quando não é finito.

Definição em extensão e em compreensão

- Em extensão: indicação exaustiva de todos os seus elementos (se o conjunto é finito).
- Em compreensão: indicação das propriedades a satisfazer por todos os seus elementos (estas propriedades são usualmente formalizadas por um predicado).

Descrição de conjuntos e igualdade de conjuntos

- $A = \{1, 3, 5, 7\}$ (descrição em extensão);
- $A = \{x : x \text{ é um inteiro positivo ímpar menor que } 8\}$ (descrição em compreensão).

Definição (igualdade de conjuntos)

Dados dois conjuntos A e B de elementos do conjunto universal $\mathcal{U}$, diz-se que A é igual a B ($A = B$) se A e B têm exactamente os mesmos elementos.

Exercício

Sejam $\mathcal{U} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ e $A = \{x : x \text{ é ímpar}\}$ e $B = \{x : x \text{ é primo}\}$. Mostre que $A = B$.

Descrição de conjuntos e igualdade de conjuntos

Definição (inclusão de conjuntos)

Sejam A e B dois conjuntos.

- Diz-se que A é um subconjunto de B (ou que A está contido em B) e escreve-se $A \subseteq B$, se todos os elementos de A pertencem a B.
- Diz-se que A é um subconjunto próprio de B (ou que A está contido estritamente em B) e escreve-se $A \subset B$, se A é um subconjunto de B e $A \neq B$.

Sejam $A = \{x : P(x)\}$ e $B = \{x : Q(x)\}$ subconjuntos de $\mathcal{U}$.
Se, para todo $x \in \mathcal{U}$, $P(x) \Rightarrow Q(x)$, então $A \subseteq B$.
Se, para todo $x \in \mathcal{U}$, $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$, então $A = B$.

Exercício: Sejam $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $A = \{x : x \text{ é múltiplo de } 4\}$ e $B = \{x : x \text{ é par}\}$. Mostre que $A \subseteq B$.

União e interseção de conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos de um dado universo $\mathcal{U}$.
União de A e B:

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Intersecção de A e B:

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Exercício: Considere mais velho jogador de xadrez de entre os matemáticos e o mais velho matemático de entre os jogadores de xadrez. Será que podem ser pessoas diferentes?

Diferença e diferença simétrica de conjuntos e complementar de um conjunto

Sejam A e B dois conjuntos de um dado universo $\mathcal{U}$.

Diferença entre A e B:

$$A \backslash B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Exercício: Existem três conjuntos A, B e C tais que $A \cap B \neq \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$ e $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$?

Diferença simétrica entre A e B:

$$A \triangle B = \{x : (x \in A) \dot{\vee} (x \in B)\}.$$

Complementar de A:

$$A^c = \{x : x \notin A\}.$$

Propriedades

Sejam A e B dois conjuntos de um dado universo $\mathcal{U}$.

1) Princípio de inclusão mútua:
$$A = B \text{ se e só se } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A;$$
2) $\emptyset \subseteq A$;
3) $A \cap A^c = \emptyset$;
4) $A \backslash B = A \cap B^c$;
5) $(A \backslash B) \cap (B \backslash A) = \emptyset$;
6) Distributividade:
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Propriedades (cont.)

7) $A \backslash A = \emptyset = \emptyset \backslash A$;
8) $A \backslash \emptyset = A$;
9) $A \backslash B = B \backslash A \Leftrightarrow A = B$;
10) $\emptyset^c = \mathcal{U}$ e $\mathcal{U}^c = \emptyset$;
11) Dupla complementaridade: $(A^c)^c = A$;
12) Comutatividade: $A \cap B = B \cap A$ e $A \cup B = B \cup A$;
13) Associatividade: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ e $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
14) Leis de De Morgan: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ e $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Famílias de conjuntos

Seja

$$\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I},$$

onde, para cada índice i do conjunto I (o qual pode ser ser finito ou infinito), A_i é um conjunto.

União e interseção generalizadas

- $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i, \text{ para todo } i \in I\}$;
- $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i, \text{ para algum } i \in I\}$.

Famílias disjuntas e dois a dois disjuntas

Uma família de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ diz-se:

disjunta se $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$;

dois a dois disjunta se $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

A união e interseção generalizadas gozam de propriedades análogas às propriedades da união e interseção de dois conjuntos.

Exemplos de propriedades da união e interseção generalizadas

Leis de De Morgan generalizadas:

$$A \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i) \text{ e } A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i).$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} B_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} B_i^c \text{ e } \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} B_i^c.$$

Referências bibliográficas

- Referência bibliográfica principal:
  D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2009.

- Referências bibliográficas complementares:
  N. L. Biggs, *Discrete Mathematics*, Oxford University Press, 2nd Ed. (2002).
  J. S. Pinto, *Tópicos de Matemática Discreta*, Universidade de Aveiro 1999 (disponível na página da disciplina).