Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2024/2025 - UC 47166 (1º Ano/2º Sem)

Teste T1 (Avaliação Discreta) - 11/04/2025 **Duração: 2h**

1. Considere as seguintes afirmações:

   (a) Quem saiu do DMat sem guarda-chuva molhou-se.

   (b) O António saiu do DMat e molhou-se.

   (c) O António foi o único que se molhou.

   Exprima cada uma das afirmações anteriores na linguagem de primeira ordem munida do símbolo $=$ (com a interpretação usual) e usando os seguintes predicados com a respetiva interpretação no domínio (universo) dos alunos da UA:

   $S(x)$: x saiu do DMat; $M(x)$: x molhou-se; $G(x)$: x leva guarda chuva.

2. Considere uma linguagem de primeira ordem com os símbolos de predicado C de dois argumentos, P, Q e R de um argumento, sendo x, y, z, símbolos de variáveis, com as seguintes fórmulas:

   $F_1 \equiv \forall x \Big(\big(\forall y \, (C(y,x) \to P(y)) \big) \to R(x) \Big)$

   $F_2 \equiv \forall x \Big(Q(x) \to P(x) \Big)$

   $F_3 \equiv \forall x \Big(\big(\exists y \, (C(x,y) \wedge Q(y)) \big) \to Q(x) \Big)$

   $F_4 \equiv \forall z \Big(Q(z) \to R(z) \Big)$

   (a) Partindo de $\{F_1, F_2, F_3, \neg F_4\}$ mostre que se obtém o conjunto de cláusulas

   $$\{C(f(x),x) \vee R(x),\ \neg P(f(x)) \vee R(x),\ \neg Q(x) \vee P(x),\ \neg C(x,y) \vee \neg Q(y) \vee Q(x),\ Q(a),\ \neg R(a)\},$$

   onde f e a são símbolos de função de um argumento e constante de Skolem, respetivamente.

   (b) Use o método de resolução para mostrar que $F_1, F_2, F_3 \models F_4$.

3. Considere a interpretação $(\mathcal{M}, V)$ com uma estrutura $\mathcal{M}$ de domínio $D = \{1, 3, 5, 15\}$, predicados $L(x,y)$: "$x < y$" e $M(y,x)$: "y é um múltiplo de x" (isto é, $y = kx$, $k \in \mathbb{N}$) e valoração V definida por $V(x) = 1$ e $V(y) = 15$, sendo x e y, símbolos de variáveis. Justificando, avalie se a interpretação $(\mathcal{M}, V)$ é um modelo para a fórmula φ (ou seja, se $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$), onde

   $$\varphi \equiv \exists y \, \forall x \, \Big(M(y,x) \to L(x,y) \Big).$$

4. Um inquérito feito aos alunos de uma escola secundária revelou que 220 alunos gostam da área da saúde, 240 gostam da área das ciências exatas e 180 gostam de humanidades, 35 gostam de ciências exatas e humanidades, 30 gostam de saúde e humanidades, 15 gostam de saúde e ciências exatas e 5 gostam das três áreas. Supondo que todos os alunos da escola responderam ao inquérito e indicaram pelo menos uma das três áreas nas suas preferências, determine

   (a) o número de alunos da escola;

   (b) o número de alunos da escola que gostam apenas de uma das três áreas.

5. Num saco opaco encontram-se as peças de um puzzle. As peças têm quatro formatos diferentes e cada peça está numerada com um número de 1 a 5. Determine o menor número de peças que devem ser retiradas do saco para garantir que se retiram pelo menos 4 peças com o mesmo formato e 3 peças com o mesmo número.

6. Uma pastelaria oferece 5 tipos diferentes de doces: brigadeiro, pastel de nata, ovo mole, queijada e bolo de arroz. Um cliente deseja comprar uma caixa com 8 doces, podendo escolher livremente entre os diferentes 5 tipos, inclusive podendo repetir os mesmos doces. De quantas formas diferentes o cliente pode compor a sua caixa de doces? Justifique devidamente.

7. Sabendo que no desenvolvimento de $\left(x^2 + y + \frac{1}{y}\right)^n$ a soma de todos os coeficientes é 3^6, determine o coeficiente de x^4y^2 nesse desenvolvimento.

Cotações:

1.(a)	**1.(b)**	**1.(c)**	**2.(a)**	**2.(b)**	**3.**	**4.(a)**	**4.(b)**	**5.**	**6.**	**7.**
1.0	1.0	1.0	2.5	2.5	2.0	1.5	2.5	2.0	2.0	2.0

T1-R1

universidade de aveiro departamento de matemática

ano lectivo 2024/2025 época

classificação

nome: EXEMPLO DE RESOLUÇÃO DO TESTE T1

~~n.º:~~ ~~curso:~~

regime:

disciplina: MATEMÁTICA DISCRETA (47166)

melhoria de nota ☐

data 11/04/2025 n.º de folhas suplementares entregues:

(declaro que desisto:)

1. (a) $S(x)$: x saiu do DMat;

$M(x)$: x molhou-se;

$G(x)$: x leva guarda-chuva;

"Quem saiu do DMat sem guarda-chuva molhou-se"

$\forall x\left(\left(S(x) \wedge \neg G(x)\right) \to M(x)\right)$

(b) "O António saiu do DMat e molhou-se."

$S(\text{António}) \wedge M(\text{António})$, sendo António uma constante no domínio considerado (alunos da UA).

(c) "O António foi o único que se molhou."

$\forall x\left(M(x) \to x = \text{António}\right)$

2. (a) $F_1 \equiv \forall x\left(\left(\forall y\left(C(y,x) \to P(y)\right)\right) \to R(x)\right)$

$\overset{(i)}{\equiv} \forall x\left(\neg\left(\forall y\left(\neg C(y,x) \vee P(y)\right)\right) \vee R(x)\right)$

$\overset{(ii)}{\equiv} \forall x\left(\exists y\left(C(y,x) \wedge \neg P(y)\right) \vee R(x)\right)$

$\overset{(iii)}{\equiv} \forall x \exists y\left(\left(C(y,x) \vee R(x)\right) \wedge \left(\neg P(y) \vee R(x)\right)\right)$

(i) $H \to T \equiv \neg H \vee T$, (ii) $\neg\forall \equiv \exists$ e leis de De Morgan, (iii) distribut.

Eliminando o quantificador existencial, tem-se

$$F_1 \equiv \forall x \left(\underbrace{\left(C(f(x),x) \vee R(x) \right)}_{C_1} \wedge \underbrace{\left(\neg P(f(x)) \vee R(x) \right)}_{C_2} \right),$$

cláusulas: C_1, C_2

com $y = f(x)$ função de Skolem, estando F_1 na forma Normal de Skolem (FNS);

$$F_2 \equiv \forall x \left(Q(x) \rightarrow P(x) \right) \overset{(i)}{\equiv} \forall x \left(\underbrace{\neg Q(x) \vee P(x)}_{C_3} \right)$$

com F_2 na FNS, cláusula C_3

$$F_3 \equiv \forall x \left(\left(\exists y \left(C(x,y) \wedge Q(y) \right) \right) \rightarrow Q(x) \right)$$

$$\overset{(i),(ii)}{\equiv} \forall x \forall y \left(\underbrace{\neg C(x,y) \vee \neg Q(y) \vee Q(x)}_{C_4} \right), \text{ FNS}$$

(i), (ii) $\neg \exists \equiv \forall$

$$\neg F_4 \equiv \neg \left(\forall z \left(Q(z) \rightarrow R(z) \right) \right)$$

(i) $\neg\forall \equiv \exists$

$$\equiv \exists z \left(\neg \left(\neg Q(z) \vee R(z) \right) \right)$$

De Morgan e dupla negação

$$\equiv \exists z \left(Q(z) \wedge \neg R(z) \right)$$

$$\equiv \underbrace{Q(a)}_{C_5} \wedge \underbrace{\neg R(a)}_{C_6},$$ com a constante de Skolem; tem-se $\neg F_4$ na FNS

Assim, de $\{F_1, F_2, F_3, \neg F_4\}$ obtém-se o conjunto de cláusulas $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\} = \mathcal{C}$

2.(b) Para mostrar que $F_1, F_2, F_3 \models F_4$, isto é, que F_4 é consequência lógica de F_1, F_2 e F_3, prova-se, usando o método de resolução, que o conjunto de cláusulas $\mathcal{C}$ é inconsistente.

Para tal, é necessário ter $\mathcal{C}$ com variáveis distintas em todas as cláusulas:

$$\mathcal{C} = \{ C(f(x),x) \vee R(x),\ \neg P(f(w)) \vee R(w),\ \neg Q(s) \vee P(s),\ \neg C(u,v) \vee \neg Q(v) \vee Q(u),\ Q(a),\ \neg R(a) \}$$

Aplicando as regras de resolução, tem-se:

$C_1\sigma_1: C(f(a),a) \vee R(a)$, $\sigma_1 = \{a/x\}$ umg de $\{R(x), R(a)\}$

$C_6: \neg R(a)$

$R(C_1\sigma_1, C_6) \equiv C_7: C(f(a),a)$, $\sigma_2 = \{f(a)/u, a/v\}$ umg de $\{C(f(a),a), C(u,v)\}$

$C_4\sigma_2: \neg C(f(a),a) \vee \neg Q(a) \vee Q(f(a))$

$R(C_7, C_4\sigma_2) \equiv C_8: \neg Q(a) \vee Q(f(a))$

$C_5: Q(a)$

$R(C_8, C_5) \equiv C_9: Q(f(a))$, $\sigma_3 = \{f(a)/s\}$ umg de $\{Q(s), Q(f(a))\}$

$C_3\sigma_3: \neg Q(f(a)) \vee P(f(a))$

$R(C_9, C_3\sigma_3) \equiv C_{10}: P(f(a))$, $\sigma_4 = \{a/w\}$ umg de $\{P(f(w)), P(f(a))\}$

$C_2\sigma_4: \neg P(f(a)) \vee R(a)$

$R(C_{10}, C_2\sigma_4) \equiv C_{11}: R(a)$

$C_6: \neg R(a)$

$R(C_{11}, C_6) \equiv \perp$ derivando-se a cláusula vazia (Falso), pelo que, $\mathcal{C}$ é inconsistente, ou seja, $F_1, F_2, F_3 \models F_4$ é verdadeira.

3. (M,V): M: $D = \{1, 3, 5, 15\}$

$L(x,y)$: "$x<y$"

$M(y,x)$: "$y = kx,\ k \in \mathbb{N}$"

V: $V(x) = 1$ e $V(y) = 15$

$$\varphi = \exists y \forall x \; \underbrace{\left(M(y,x) \longrightarrow L(x,y) \right)}_{\psi}$$

A interpretação (M,V) é um modelo para φ se φ for válida em (M,V). Como φ não tem variáveis livres (φ é fechada) não é tida em consideração a valoração $V(x)=1$ e $V(y)=15$, por isso, temos de verificar se existe $y \in D$, tal que para todo o $x \in D$ a implicação ψ é verdadeira (1).

Ora, com $y=1$, tem-se $x=1$, tal que

$$V^{y/1,\, x/1} \left(\underbrace{M(1,1)}_{1} \longrightarrow \underbrace{L(1,1)}_{0} \right) \equiv 0 \text{ (Falso)},$$

e

$$V^{y/3,\, x/3} \left(M(3,3) \longrightarrow L(3,3) \right) \equiv 0, \quad (1 \to 0 \equiv 0)$$

$$V^{y/5,\, x/5} \left(M(5,5) \longrightarrow L(5,5) \right) \equiv 0, \quad (1 \to 0 \equiv 0)$$

$$V^{y/15,\, x/15} \left(M(15,15) \longrightarrow L(15,15) \right) \equiv 0, \quad (1 \to 0 \equiv 0),$$

donde, não existe $y \in D$, tal que $(M, V^{x/a})$ para todo o $a \in D$ torne φ válida em (M,V), pelo que (M,V) não é um modelo para φ, ou seja, φ não é válida em (M,V), isto é,

$$(M,V) \not\models \varphi.$$

4. (a) $S = \{$ conjunto dos alunos que gostam de Saúde $\}$

$C = \{$ " " " " " de Ciências $\}$

$H = \{$ conjunto " " " " de Humanidades $\}$

Pelo princípio da inclusão-exclusão o número de alunos da escola é igual a $|S \cup C \cup H|$ com

$$|S \cup C \cup H| = |S| + |C| + |H| - |S \cap C| - |S \cap H| - |C \cap H| + |S \cap C \cap H|$$

$$= 220 + 240 + 180 - (15 + 30 + 35) + 5 = 640 - 80 + 5$$

$$= 565$$

(b)

- Número de alunos que gostam apenas de Saúde é dado por

$$|S| - |S \cap C| - |S \cap H| + |S \cap C \cap H| = 220 - (15 + 30) + 5$$
$$= 180$$

- Número de alunos que gostam apenas de Ciências é

$$|C| - |S \cap C| - |C \cap H| + |S \cap C \cap H| = 240 - (15 + 35) + 5$$
$$= 195$$

- Número de alunos que gostam apenas de Humanidades

$$|H| - |S \cap H| - |C \cap H| + |S \cap C \cap H| = 180 - (30 + 35) + 5$$
$$= 120$$

Assim, o número de alunos que gostam apenas de uma das três áreas é igual a

$$180 + 195 + 120 = 495$$

5. Usando o princípio da gaiola dos pombos,

- tem-se $m_1 = 4$ gaiolas (caixas, formatos) e pretende-se garantir $k_1+1=4$ pombos (peças) na mesma gaiola (com o mesmo formato), pelo que, devem retirar-se do saco pelo menos n_1 peças, tal que $n_1 > k_1 m_1 = 3\times 4 = 12 \Rightarrow n_1 = 13$

gaiolas/caixas/formatos f_1, f_2, f_3, f_4

pombos/peças p_i, $i=1,2,\dots,13$

$\boxed{f_1}$	$\boxed{f_2}$	$\boxed{f_3}$	$\boxed{f_4}$
p_1	p_2	p_3	p_4
p_5	p_6	p_7	p_8
p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}

p_{13} ou ou ou ;

$n_1 = 3\times4+1$

- além disso, tem-se $m_2 = 5$ números possíveis (1, 2, 3, 4, 5) (gaiolas/caixas) e pretende-se garantir $k_2+1=3$ peças (pombos) com o mesmo número (na mesma gaiola/caixa), pelo que, devemos retirar do saco pelo menos n_2 peças, tal que $n_2 > k_2 m_2 = 2\times5 = 10$, donde, $n_2 = 11 = 2\times5+1$;

logo, para garantir o que se pretende devem ser retiradas pelo menos 13 peças, pois $13 = \max(n_1, n_2)$.

6. Associando uma variável $x_i \in \{0,1,2,\ldots,8\}$, $i=1,2,3,4,5$, a cada doce, por exemplo, x_1 a brigadeiro, x_2 a pastel de nata, x_3 a ovo mole, x_4 queijada e x_5 bolo de arroz, a resposta ao problema é dada pelo número de soluções inteiras não negativas da equação

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8,$$

a qual é calculada como o número de combinações com repetição de $n=5$ elementos 8 a 8, $k=8$, ou seja, $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)=\binom{n+k-1}{k}$,

$$\left(\!\binom{5}{8}\!\right)=\binom{5+8-1}{8}=\binom{12}{8}=\frac{12!}{8!\,4!}=\frac{12\times 11\times 10\times 9}{4!}$$

7. Como $k^n=\displaystyle\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n}\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, ver exercício 12) b) da Folha 3,

$k^n=(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k\text{ vezes } 1})^n$

tem-se,

$$\sum_{n_1+n_2+n_3=\underbrace{6}_{n}}\binom{6}{n_1,n_2,n_3}=\underbrace{3}_{(1+1+1)}{}^n,\ \text{vindo } n=6.$$

Da fórmula multinomial obtém-se

$$\left(x^2+y+\frac{1}{y}\right)^n=\sum_{n_1+n_2+n_3=6}\binom{6}{n_1,n_2,n_3}\underbrace{(x^2)^{n_1}y^{n_2}\left(\frac{1}{y}\right)^{n_3}}_{x^{2n_1}\,y^{n_2-n_3}}$$

$$\begin{cases}2n_1=4\Leftrightarrow n_1=2\\ n_2-n_3=2\\ n_1+n_2+n_3=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{———}\\ n_2=2+n_3\\ 2+2+n_3+n_3=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n_1=2\\ n_2=3\\ n_3=1\end{cases}$$

O coeficiente de x^4y^2 é

$$\binom{6}{2,3,1}=\frac{6!}{2!\,3!\,1!}=\frac{6\times5\times4}{2}=60.$$