Matemática Discreta

7^a AULA

Universidade de Aveiro 2014/2015

http://elearning.ua.pt

Matemática Discreta

Relação de equipotência

Teoremas de Cantor e de Dedekind & Cantor

Teoremas do ponto fixo de Tarski e de Schröder-Bernstein

Referências e bibliografia

Conjuntos equipotentes

Definição (de conjuntos equipotentes)

Dois conjuntos A e B dizem-se equipotentes (ou numericamente equivalentes) se existe uma bijecção $f : A \to B$.

• Quando A e B são equipotentes, dizemos que têm a mesma cardinalidade ou o mesmo número cardinal.
(Notação: $|A|$ denota a cardinalidade de A).

Exemplos de conjuntos

equipotentes:

1) $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_0$, onde $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
2) $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$;

não equipotentes

3) $\{1, 2, 3\}$ e $\{a, b\}$;
4) $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.

Cardinalidade

Cardinalidade finita e infinita

Um conjunto finito diz-se que tem cardinalidade finita. Um conjunto infinito diz-se que tem cardinalidade infinita.

Se o conjunto A é finito e $f : [n] \to A$ é uma bijecção, então $|A| = n$ e a cardinalidade de A é o número de elementos de A.
Nota: $|\emptyset| = 0$.

Observação: $\mathbb{N}$ tem cardinaldade infinita.
$\aleph_0$ denota a cardinalidade de $\mathbb{N}$
e, consequentemente, também a de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}_0$,
ou seja, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}_0| = \aleph_0$.

Relações entre a cardinalidade de conjuntos distintos

- Dados dois conjuntos A e B, diz-se que a cardinalidade de A é não superior à cardinalidade de B (e escreve-se $|A| \leq |B|$) se existe uma função injectiva $f : A \to B$.
- Se $|A| \leq |B|$ e os conjuntos não são equipotentes, então diz-se que a cardinalidade de A é menor que a cardinalidade de B e escreve-se $|A| < |B|$.

Teorema (de Cantor)

Dado um conjunto X, verifica-se a desigualdade $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

Logo,

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \cdots$$

e, consequentemente, existe uma infinidade de números cardinais infinitos.

Conjuntos numeráveis

Definição (de conjunto numerável)

Um conjunto A diz-se numerável (ou enumerável, ou contável) se A é finito ou equipotente ao conjunto $\mathbb{N}$. Caso contrário, diz-se que A é não numerável.

Exemplos

de conjuntos numeráveis:

1) $\{a, b, c, d\}$;
2) $\mathbb{N}$;
3) $\mathbb{Z}$;
4) $\mathbb{N}_0$;

de conjunto não numerável:

5) $\mathbb{R}$.

Teorema de Dedekind e Cantor

Exemplo

Vamos mostrar que qualquer conjunto infinito A contém um subconjunto infinito numerável, ou seja, existe uma função injectiva $f : \mathbb{N} \to A$

- Considerando a função de escolha $\xi : \mathcal{P}(A) \setminus \emptyset \to A$ tal que $a_1 = \xi(A)$, $a_2 = \xi(A \setminus \{a_1\})$, $a_3 = \xi(A \setminus \{a_1, a_2\})$, etc. Uma vez que A é infinito, então $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\} \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. É claro que $a_p \neq a_q$ se $p \neq q$, donde o conjunto $\{a_1, a_2, \ldots\} \subseteq A$ é infinito numerável e a sucessão $(a_1, a_2, \ldots,)$ corresponde à função f pretendida.

Teorema (de Dedekind e Cantor)

Um conjunto é infinito se e só se é equipotente a um subconjunto próprio.

Teorema de Tarski

Teorema (do ponto fixo de Tarski)

Considere-se um conjunto X e uma função $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$. Se, para quaisquer subconjuntos $A, B \subseteq X$, $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$, então existe um conjunto $C \subseteq X$ tal que $f(C) = C$.

Teorema (de Schröder-Bernstein)

Sejam X e Y dois conjuntos. Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ são funções injectivas, então existe uma bijecção $h : X \to Y$.

Referências e bibliografia I

D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.