

# Matemática Discreta

## 1<sup>a</sup> AULA

Universidade de Aveiro 2014/2015

<http://moodle.ua.pt>

## Apresentação

## Linguagem Matemática e Lógica Informal

## Programa da disciplina

1. Linguagem Matemática e Lógica Informal
  - 1.1 Lógica proposicional
  - 1.2 Relações
  - 1.3 Lógica de primeira ordem
2. Contextos e Estratégias de Demonstração
  - 2.1 Estratégias de demonstração da implicação
  - 2.2 Princípios de indução e de indução completa
  - 2.3 Princípio da gaiola dos pombos
3. Princípios de Enumeração Combinatória.
  - 3.1 Princípio da bijecção.
  - 3.2 Princípios da adição e da multiplicação.
  - 3.3 Princípio de inclusão-exclusão.
4. Agrupamentos e Identidades Combinatórias.
  - 4.1 Arranjos com repetição e arranjos e combinações simples.
  - 4.2 Combinações e permutações (com e sem repetição).
  - 4.3 Identidades combinatórias.

## Programa da disciplina (cont.)

5. Recorrência e Funções geradoras.
  - 5.1 Relações de recorrência.
  - 5.2 Funções geradoras
6. Números Combinatórios.
  - 6.1 Factoriais e número binomiais.
  - 6.2 Números de Fibonacci e número de ouro.
  - 6.3 Números de Stirling
  - 6.4 Números Euler e Bell.
7. Elementos de Teoria dos Grafos.
  - 7.1 Conceitos e Resultados Fundamentais
  - 7.2 Conexidade, caminhos e árvores.

## Bibliografia principal

- *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*; D. M. Cardoso, J. Szymanski, M. Rostami; Escolar Editora, 2009.
- *Noções de Lógica Matemática*; D.M. Cardoso, P. Carvalho; Universidade de Aveiro; 2007 (disponível na página da disciplina).

## Bibliografia complementar

- *Tópicos de Matemática Discreta*; J.S. Pinto; Universidade de Aveiro; 1999 (disponível na página da disciplina).
- *Discrete Mathematics*; N.L. Biggs; Oxford University Press, 2nd Ed; 2002.
- *Concrete Mathematics*; R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik; Addison-Wesley; 2nd Ed; 2005.
- *A Walk Through Combinatorics - an introduction to enumeration and graph theory*; M. Bóna; World Scientific; 2003.
- *Matemática Discreta: Tópicos de Combinatória*; J. M. S. Simões Pereira; Editora Luz da Vida, 2006.
- *Matemática Discreta: Grafos, Redes e Aplicações*; J. M. S. Simões Pereira; Editora Luz da Vida, 2009.

## Avaliação Discreta

- O modelo de avaliação adoptado é o modelo discreto, com exame final como alternativa. A avaliação discreta é constituída por dois testes, a realizar nas seguintes datas:
  1. 17 de Abril de 2015 (sexta-feira);
  2. Dia do exame final.
- A matéria a abordar no primeiro teste será leccionada até ao dia 10 de Abril de 2015.
- A matéria a abordar no segundo teste é a matéria leccionada depois de 10 de Abril.

## Alfabeto grego

$\alpha$	$A$	alfa	$\nu$	$N$	niu
$\beta$	$B$	beta	$\xi$	$\Xi$	xi
$\gamma$	$\Gamma$	gama	$\omicron$	$O$	omicrom
$\delta$	$\Delta$	delta	$\pi$	$\Pi$	pi
$\epsilon(\varepsilon)$	$E$	epsilon	$\rho(\varrho)$	$P$	ró
$\zeta$	$Z$	zeta	$\sigma(\varsigma)$	$\Sigma$	sigma
$\eta$	$H$	eta	$\tau$	$T$	tau
$\theta(\vartheta)$	$\Theta$	teta	$\upsilon$	$\Upsilon$	upsilon
$\iota$	$I$	iota	$\phi(\varphi)$	$\Phi$	fi
$\kappa$	$K$	kapa	$\chi$	$X$	chi
$\lambda$	$\Lambda$	lambda	$\psi$	$\Psi$	psi
$\mu$	$M$	miu	$\omega$	$\Omega$	ómega

## Sistemas matemáticos

- ▶ **Proposição:** afirmação que ou é verdadeira ou é falsa.
- ▶ **Axioma:** proposição evidente ou que, no contexto matemático em que se está a trabalhar, aceitamos como verdadeira.
- ▶ **Teorema:** proposição verdadeira que decorre dos axiomas por aplicação de certas regras, designadas por regras de inferência, ou dos desenvolvimentos determinados pela lógica.
- ▶ **Lema:** teorema “considerado” mais simples, que usualmente é utilizado para facilitar a demonstração de teoremas mais difíceis.
- ▶ **Corolário:** consequência imediata de outros teoremas.
- ▶ **Teoria ou sistema matemático:** conjunto de axiomas, regras de inferência e teoremas (onde se incluem lemas e corolários).

## Exemplo de sistema matemático

As proposições deste sistema matemático são palavras do alfabeto  $\{x, y, z\}$

- ▶ **Axioma:**  $xyz$ .
- ▶ **Regras de inferência:**
  1. Proposições obtidas a partir de uma proposição verdadeira, substituindo  $x$  por  $xyz$ , são proposições verdadeiras.
  2. Proposições obtidas a partir de uma proposição verdadeira, substituindo  $xyz$  por  $yxz$  são proposições verdadeiras.

### Exercício

Mostrar que  $yyxzz$  é um teorema do sistema matemático considerado no exemplo anterior.

## Propriedades dos sistemas de axiomas

Um sistema de axiomas deve ser consistente e independente:

**Consistente:** i.e. não permite a dedução de um teorema e da sua negação.

**Independente:** não inclui axiomas que são consequência de outros axiomas.

**Saturado:** a adição de um qualquer axioma que não é consequência dos axiomas do sistema, torna o sistema não consistente.

**Completo:** se para toda a proposição  $p$ , correctamente formulada no contexto desta teoria, " $p$ " ou "não  $p$ " é um teorema. A teoria diz-se incompleta no caso contrário.

## Exemplo de sistema saturado

### Axiomas da geometria euclidiana:

- 1 Dados dois pontos existe uma recta que os contém.
- 2 Todo o segmento de recta está contido numa recta.
- 3 Dado um ponto  $C$  e um real  $r > 0$ , existe uma única circunferência de centro  $C$  e raio  $r$ .
- 4 Todos os ângulos rectos são iguais.
- 5 *Axioma das paralelas:* dada uma recta e um ponto não pertencente a essa recta, existe uma única recta que contém o ponto e é paralela à recta dada.

## Exemplo de sistema saturado (cont.)

### Axiomas da geometria euclidiana:

- 6** Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais.
- 7** Se a quantidades iguais adicionarmos a mesma quantidade, as somas obtidas são iguais.
- 8** Se a quantidades iguais subtrairmos a mesma quantidade, as diferenças obtidas são iguais.
- 9** Objectos coincidentes são iguais.
- 10** O todo é maior do que a parte.

## Exemplo de uma conjectura

Trata-se de uma afirmação não provada, para a qual existe a expectativa de se vir a encontrar uma prova.

### Conjectura de Goldbach

Todo o inteiro par superior a **2** é a soma de dois primos

Por exemplo,  $4 = 2 + 2$ ,  $6 = 3 + 3$ ,  $8 = 3 + 5$ ,  $10 = 3 + 7$ , ...

## Referências bibliográficas

- ▶ **Referência bibliográfica principal:**  
D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2009.
- ▶ **Referência bibliográfica complementar:**  
N. L. Biggs, *Discrete Mathematics*, Oxford University Press, 2nd Ed. (2002).