UNIVERSIDADE DE AVEIRO
Departamento de Matemática

Exame Final de Matemática Discreta (2007/2008) 19 de Junho de 2008

Justifique devidamente as suas respostas.

(Duração: 2,5 horas)

1- Considere as seguintes afirmações:

a) Todos os cães ladram à noite.

b) Todos os que têm gatos não têm ratos.

c) Quem tem insónias não tem nada que ladre à noite.

d) O João tem um cão ou um gato.

(2) **1.1** Exprima as afirmações das alíneas a), b), c) e d) como fbf's do cálculo de predicados.

(2) **1.2** Prove, por refutação, que se o João tem insónias então não tem nenhum rato.

2- Sejam A e B dois conjuntos.

(1) **2.1** Mostre que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$ e verifique que a inclusão recíproca não é verdadeira, através de um contra-exemplo.

(2) **2.2** Considere $A = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e a relação R definida em A por $a\ R\ b \ \Leftrightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Verifique se R é uma relação de equivalência em A e, no caso afirmativo, determine a classe de equivalência $[1]$.

3-

(2) **3.1** Para subir uma certa escada, o *Pedro* consegue, com um único passo, avançar um, dois ou três degraus. Encontre uma relação de recorrência para a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde a_n é o número de maneiras possíveis em que o *Pedro* consegue subir n degraus. Apresente as condições iniciais.

(2) **3.2** Determine a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, associada à função geradora $f(x) = \frac{6x}{(1+2x)^2} + 2 - x^2$.

4- Considere a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, onde a_n é o número de possibilidades para os resultados da eleição do delegado de uma turma com n alunos, dos quais 4 são candidatos ao cargo.

(1) **4.1** Determine a função geradora ordinária associada a a_n, considerando uma turma com 27 alunos.

(1) **4.2** Indique o coeficiente da função geradora determinada em 4.1 que nos dá o número de resultados eleitorais possíveis?

(1) **4.3** Repita a alínea 4.1 supondo que nenhum candidato recebe a maioria dos votos.

*(3)***5-** Determine o número de árvores abrangentes do grafo que se obtém unindo um vértice de K_5 a um vértice de C_5 (ciclo de comprimento 5) por uma aresta.

6- Seja G o grafo definido pela matriz de adjacência

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(1,5) **6.1** Verifique, justificando, se o grafo G é bipartido.

(1,5) **6.2** Verifique, justificando, se o grafo G é hamiltoniano.

Formulário:

$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$, para $n \in \mathbb{N}$

$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} x^k = (1+x)^\alpha, \quad$ com $(\alpha)_k = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$