Departamento de Matemática **Universidade de Aveiro**

Matemática Discreta

3ª Prova de Avaliação Discreta **20/06/2014**

Justifique devidamente todas as suas respostas.

Duração da prova: 2 horas

(4,5 val.) **1)** Resolva a equação de recorrência $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^n$, com $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$.

(4 val.) **2)** Considere a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, cuja função geradora é $g(x) = \frac{1}{1-2x}$ e a sucessão $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida por

$$\begin{cases} b_n = b_{n-1} + a_n, & n \geq 1 \\ b_0 = 0 \end{cases}.$$

a) Mostre que a função geradora de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ é $f(x) = \frac{2x}{(1-x)(1-2x)}$.

b) Determine uma fórmula fechada para a sucessão $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ usando a função geradora $f(x)$ dada na alínea anterior.

(1,5 val.) **3)** Determine todos os números reais para os quais o número binomial generalizado $\binom{x}{2}$ é 28.

(7 val.) **4)** Seja G um grafo simples não orientado com conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e matriz de custos

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 5 & 0 & 8 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & 8 & 0 & 1 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 3 & 0 & 3 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Verifique se G é um grafo bipartido.

b) Aplique o algoritmo de Dijkstra para determinar um caminho de custo mínimo entre os vértices 1 e 4 e indique o seu custo.

c) Determine uma árvore abrangente de G de custo mínimo aplicando o algoritmo de Kruskal ou o algoritmo de Prim, indicando o algoritmo que usou.

(3 val.) **5)** Seja G um grafo simples não orientado com 20 vértices e 62 arestas.

a) Verifique se G pode ser isomorfo ao seu complementar.

b) Sabendo que os vértices de G têm grau 3 ou 7, determine o número de vértices de grau 7.

Formulário:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x};$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x;$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n-k+1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^n}, \text{ para } n \in \mathbb{N};$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} x^k = (1+x)^\alpha, \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}.$$