Matemática Discreta

27^a AULA

Universidade de Aveiro 2014/2015

http://moodle.ua.pt

Funções geradoras mais gerais

Exemplos de funções geradoras bidimensionais

Referências bibliográficas

Funções geradoras de duas variáveis

- As funções geradoras podem ser utilizadas nos casos multidimensionais.
- Porém, no contexto deste curso, vamos analisar apenas o caso bidimensional.

Definição (Função geradora ordinária com duas variáveis)

Dada a sucessão bidimensional de números $(a_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}_0}$, designa-se por função geradora (ordinária) bidimensional desta sucessão a série formal de potências

$$\mathcal{A}(x,y) = \sum_{n,k\in\mathbb{N}_0} a_{n,k}x^n y^k. \tag{1}$$

Exemplos

Exemplo 1

Vamos determinar a função geradora para a sucessão de números binomiais $(b_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}_0}$, tal que $b_{n,k} = \binom{n}{k}$.

Solução. Uma vez que $k > n \Rightarrow \binom{n}{k} = 0$, vem $\mathcal{B}(x,y) = \sum_{n,k\in\mathbb{N}_0} b_{n,k}x^n y^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^n y^k$. Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^k\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1+y)^n x^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}((1+y)x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(x+xy)^n\end{aligned}$$

e, consequentemente, $\mathcal{B}(x,y) = \frac{1}{1-x-xy}$.

Exemplos (cont.)

Exemplo 2

Vamos determinar a função geradora para a sucessão $(b_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}_0}$, tal que $b_{n,k} = \frac{n^k}{k!}$, convencionando que $0^0 = 1$.

Solução. Uma vez que

$$\mathcal{B}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}x^n y^k = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}y^k\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ny)^k}{k!}\right)x^n,$$

vem $\mathcal{B}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ny}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(xe^y)^n$.

Logo, $\mathcal{B}(x,y) = \frac{1}{1-xe^y}$.

Referências bibliográficas I

- D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.
- J. S. Pinto, *Tópicos de Matemática Discreta*, Universidade de Aveiro 1999 (disponível na página da disciplina).