UNIVERSIDADE DE AVEIRO
Departamento de Matemática

Matemática Discreta

Exame Final 20 de Junho de 2012

Responda de uma forma cuidada a cada uma das questões.

(2 horas e 30 minutos)

1- Considere as seguintes afirmações:

1. "Todo o aluno da Universidade de Aveiro que estuda com afinco passa a Matemática Discreta";
2. "O João é um aluno da Universidade de Aveiro";
3. "O João estuda com afinco".

*(1,5)***a)** Exprima as afirmações anteriores como fbf's do cálculo de predicados.

*(1,5)***b)** Mostre, usando o Princípio da Resolução, que o João passa a Matemática Discreta.

2- Denote o conjunto das partes de um conjunto X por $\mathcal{P}(X)$, considere os conjuntos A e B e demonstre cada uma das seguintes proposições.

*(1,5)***a)** $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

*(1,5)***b)** $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

3- Um grupo de 12 amigos vai ao cinema e compra 12 bilhetes que correspondem a lugares seguidos.

*(1)***a)** Sabendo que dos 12 amigos 6 são homens e 6 são mulheres, de quantas maneiras os 12 amigos se podem sentar de modo que não fiquem dois homens consecutivos?

*(1)***b)** Sabendo que do grupo de amigos fazem parte um casal de namorados e um casal com três filhos, de quantas maneiras os 12 amigos se podem sentar de modo que o casal de namorados fique junto e os 3 filhos do outro casal fiquem sentados entre o pai e a mãe?

*(2)***4-** Determine o coeficiente de xy^6z^{-2} na expansão de $(2x + y^2 - 1/z)^6$.

5- Sabe-se que o determinante D_n da matriz tridiagonal de ordem n

$$A_n = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a^2 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1+a^2 \end{pmatrix},$$

onde $a \in \mathbb{R}$, pode ser obtido pela relação de recorrência $D_n = (1 + a^2)D_{n-1} - a^2 D_{n-2}$, considerando $D_0 = 1$ e $D_1 = 1 + a^2$.

*(1,5)***a)** Supondo $a^2 \neq 1$, resolva esta equação de recorrência indicando uma fórmula não recursiva para D_n.

*(1,5)***b)** Determine uma expressão não recursiva para D_n, supondo $a^2 = 1$.

(3) **6-** Considerando a árvore T cuja matriz de adjacência é

$$A_T = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

e os vértices estão marcados pelos números $1, \ldots, 9$, determine o código de Prüfer de T.

7- Uma rede rodoviária entre 6 povoações A, B, C, D, E e F é constituída por 8 estradas tal como se descreve a seguir:

- entre A e B com 30 Km
- entre B e E com 20 Km
- entre E e F com 40 Km
- entre A e C com 22 Km
- entre C e E com 12 Km
- entre D e F com 18 Km
- entre A e D com 30 Km
- entre C e D com 36 Km.

*(1)***a)** Represente esta rede rodoviária por um grafo com pesos nas arestas.

*(3)***a)** Aplique o algoritmo de Dijkstra ao grafo para determinar o caminho mais curto entre a povoação D e a povoação B e a respetiva distância. Apresente uma tabela para descrever cada um dos passos do algoritmo.