

UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Departamento de Matemática

Matemática Discreta

Exame de recurso

08 de Julho de 2011

Responda de uma forma cuidada a cada uma das questões.

(2 horas e 30 minutos)

- 1-** Considere as seguintes afirmações: (i) "Todo o múltiplo de 4 é par"; (ii) "Todo o múltiplo de 12 é múltiplo de 4 e de 3; (iii) "24 é múltiplo de 12".

(1)a) Exprima as afirmações anteriores como fbf's do cálculo de predicados.

(2)b) Mostre, usando o Princípio da Resolução, que 24 é par.

- 2-** Sendo A , B e C subconjuntos finitos arbitrários de um dado universo \mathcal{U} , demonstre:

(1,5)a) $A^c \cup B^c \cup (A \cap B \cap C^c) = (A \cap B \cap C)^c$.

(1,5)b) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$.

- 3-** Considere as sequências de 5 letras escolhidas de entre as letras A, B, C, D, E, F, G, H (cada letra só pode ser escolhida uma vez).

(1)a) Quantas destas sequências têm as letras A e B juntas?

(1)b) Quantas sequências pode formar com as 18 letras das palavras MATEMATICA DISCRETA?

(1)c) Considere a permutação $\pi = (72618345)$, determine a partição cíclica de π e indique o tipo de permutação de π .

- (2)4- Prove que o número de subconjuntos do conjunto $[n] = \{1, \dots, n\}$ que não contêm dois inteiros consecutivos é F_{n+2} , onde F_k denota o k -ésimo número de Fibonacci.

- (3)5- Resolva a relação de recorrência

$$a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 3^n, \quad n \geq 2, \quad a_0 = a_1 = \frac{1}{2}.$$

- (2)6- Sendo $G = (X, Y, E)$ um grafo bipartido, para o qual se verifica a desigualdade

$$\min_{x \in X} d_G(x) \geq \max_{y \in Y} d_G(y),$$

prove que $|X| \leq |Y|$, onde $d_G(v)$ denota o grau do vértice v em G .

- (4)7- Construa uma árvore abrangente de custo mínimo do grafo G definido pela matriz de custos nas arestas:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \begin{pmatrix} \infty & 35 & 40 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 35 & \infty & 25 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ 40 & 25 & \infty & 20 & 15 & \infty & \infty \\ \infty & 10 & 20 & \infty & 30 & 8 & 21 \\ \infty & \infty & 15 & 30 & \infty & 15 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & 8 & 15 & \infty & 17 \\ \infty & \infty & \infty & 21 & 11 & 17 & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

com recurso ao algoritmo de Prim.