# Matemática Discreta

$16^a$ AULA

Universidade de Aveiro 2014/2015

http://moodle.ua.pt



## Princípios combinatórios básicos:

## Princípio da bijecção

## Princípio da multiplicação

## Princípio da adição

## Referências e bibliografia

## Alguns exemplos de problemas de contagem

1. Quantos números de 4 algarismos se podem escrever com os dígitos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

2. De quantas maneiras é possível escolher uma equipa de 11 jogadores de futebol de um conjunto de 20 jogadores?

3. Qual é a probabilidade de ganhar o Euromilhões?



## Princípio da bijecção

### Descrição do princípio da bijecção

O princípio da bijecção consiste na identificação dos objectos de um conjunto $A$ com os elementos de outro conjunto $B$ com o qual, em princípio, é mais fácil trabalhar.

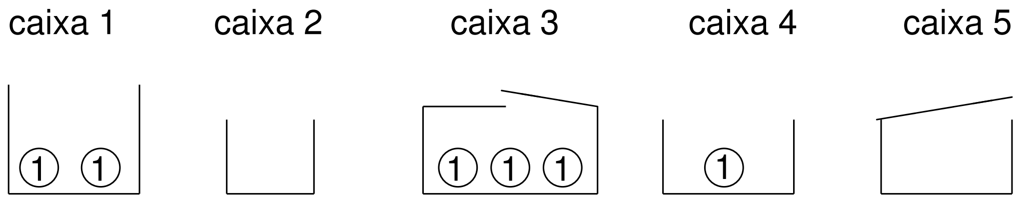
$$f: \ A \to B.$$

Note-se que se existe uma bijecção entrea $A$ e $B$, então podemos concluir a igualdade $|A| = |B|$.

Exemplo. Se $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, então $|\mathcal{P}(X)| = |B^n|$. Com efeito, a função $f : \mathcal{P}(X) \to B^n$, definida por $f(A) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ tal que $\begin{cases} a_i = 1, & \text{se } x_i \in A \\ a_i = 0, & \text{se } x_i \notin A \end{cases}$ é uma bijecção (verificar).

## Exemplo

O número de possibilidades de colocar $k$ bolas iguais em $n$ caixas distintas é igual ao número de sequências binárias com $n-1$ zeros e $k$ uns.




1 1 0 0 1 1 1 0 1 0

$\hookrightarrow$ 1100111010



## Princípio da multiplicação

### Teorema

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos não vazios finitos, então o conjunto dos $n$-uplos $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ é tal que $|A_1 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \ldots \cdot |A_n|$.

Exemplo. Vamos determinar quantos números de 4 algarismos se podem escrever com os dígitos em $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$?
Denotando por $C$ o conjunto dos números de $4$ algarismos pertencentes a $A$, então $f : A^4 \to C$ tal que

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_{k=1}^{4} a_k \times 10^{k-1}$$

é uma bijecção entre $A^4$ e $C$ (verificar). Logo, pelos princípios da bijecção e multiplicação, $|C| = |A^4| = |A|^4 = 9^4 = 6561$.

## Princípio da multiplicação generalizada

### Teorema

Admitindo que um processo de escolha das componentes de um n-uplo se pode fazer em $n$ passos sucessivos, de tal forma que existem

- $p_1$ escolhas possíveis para a $1^{\underline{a}}$ componente,
- $p_2$ escolhas possíveis para a $2^{\underline{a}}$ componente,

...

- $p_n$ escolhas possíveis para a $n$-ésima componente,

então podemos escolher $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$ $n$-uplos distintos.



## Exemplo

Vamos determinar de quantas maneiras é possível escolher uma equipa de 11 jogadores de futebol de um conjunto de 20 jogadores?

Interessa a ordem pela qual vão sendo feitas as escolhas.

- Para a $1^{\underline{a}}$ escolha existem 20 jogadores disponíveis,
- para a $2^{\underline{a}}$ escolha existem 19 jogadores disponíveis,

...

- para a última escolha restam $20 - 10 = 10$ jogadores disponíveis.

Pelo princípio da multiplicação generalizada, existem $20 \times 19 \times \cdots \times 10 = 6.704425728 \times 10^{11}$ maneiras de escolher uma equipa de 11 jogadores de futebol de um conjunto de 20 jogadores.

## Princípio da adição

Observação. Note-se que, relativamente ao exemplo anterior, o problema da determinação do número de maneiras (sequências de decisões) de escolher uma equipa é distinto do problema da determinação do número de equipas que se podem formar.

### Descrição do princípio da adição

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos, dois a dois disjuntos (ou seja, tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$), então

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$



## Exemplo

Vamos determinar quantos números de telefone fixo podem ser atribuídos (de acordo com a actual numeração) na zona de Coimbra, Aveiro e Porto? Note-se que

- os números de telefone fixo da zona de Coimbra são da forma $2\,3\,9\,-\,-\,-\,-\,-\,-$,
- os números de telefone fixo da zona de Aveiro são da forma $2\,3\,4\,-\,-\,-\,-\,-\,-$,
- e os números de telefone fixo da zona do Porto são da forma $2\,2\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$.

Sejam $C$, $A$ e $P$, respectivamente, os conjuntos das sequências de números com este formato. Então, pelo princípio da adição, o número máximo de telefones que podem ser atribuídos nestas $3$ zonas é: $|C| + |A| + |P| = 10^6 + 10^6 + 10^7 = 12 \times 10^6$ (a primeira igualdade vem do princípio da multiplicação).

## Referências e bibliografia I

D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.