

Universidade de Aveiro

T1.1 – Movimento de Projéteis

Guilherme Goulart, Martim Pinheiro, Paulo Lacerda

(119255) [guilhermegoulart@ua.pt](mailto:guilhermegoulart@ua.pt) ,(112938) [martim@ua.pt](mailto:martim@ua.pt), (120202) [paulolacerda@ua.pt](mailto:paulolacerda@ua.pt)

# Índice

- Resumo 3

- Introdução 4

- Procedimento Experimental

- Parte A 6

- Parte B 7

- Parte C 8

- Análise dos Resultados 9

# Resumo

Este relatório tem como objetivo aprofundar a compreensão da Cinemática, com especial enfoque no lançamento oblíquo. Procuramos, ainda, assimilar ou recordar as principais equações associadas ao movimento de um projétil, como a sua posição e alcance máximo, entre outras. Através da análise e observação do comportamento do projétil durante o lançamento, será possível determinar a velocidade inicial, aplicando as equações de movimento (Parte A). Pretendemos também explorar a relação entre o alcance e as variações no ângulo de lançamento (Parte B) e, por fim, calcular novamente a velocidade inicial do projétil, desta vez recorrendo ao uso de um pêndulo balístico (Parte C).

# Introdução

Este relatório procura aprofundar a compreensão da Cinemática. As principais equações relacionadas ao movimento e à posição de um projétil e à conservação de energia serão aplicadas para esclarecer os diferentes aspetos da trajetória.

A posição de um projétil de massa M e velocidade inicial v0, que se move no plano x,y é dada pelas equações:

onde g representa a aceleração da gravidade, t o tempo, x0​ e y0 as coordenadas iniciais do projétil, e ​ o ângulo inicial em relação ao eixo dos x. Eliminando t entre as equações, obtém-se uma expressão para o alcance x em função de θ0​, o que permite determinar o ângulo θamax ​que maximiza o alcance. Quando o projétil é lançado de uma altura yi​ e atinge uma altura final yf, θamax é calculado por:

**Pêndulo Balístico**

Para determinar a velocidade inicial v0​ de um projétil através de um pêndulo balístico, consideramos uma massa M suspensa. Quando um projétil de massa m (onde m≪M) colide com M e fixa-se nela, o sistema adquire uma energia cinética Ec que é convertida em energia potencial Ep à medida que o pêndulo sobe. A altura máxima h alcançada pelo conjunto é tal que a energia potencial máxima iguala a energia cinética inicial, pela conservação da energia mecânica:

onde v2​ é a velocidade do conjunto massa + projétil logo após a colisão. A conservação do momento linear implica:

Daqui, deduz-se a relação entre a velocidade inicial v0​ e a altura h:

**Dependência do Alcance com o Ângulo de Disparo**

Na abordagem laboratorial, foram realizados disparos com diferentes ângulos para estudar a dependência do alcance com o ângulo de lançamento, assumindo que a resistência do ar é desprezável e que a aceleração da gravidade é constante e vertical. Estas premissas indicam que a trajetória do projétil é parabólica e que a sua velocidade no eixo x mantém-se constante até à queda. Consequentemente, o alcance máximo, a altura máxima, o tempo de voo e a posição podem ser calculados usando as seguintes equações:

Eliminando t das equações, obtém-se uma expressão para o alcance x em função de θ0 ​. O ângulo θMAX ​ para o qual o alcance é máximo é dado por:

)

onde Δy=yf−yi ​. Quando Δy=0 (ou seja, yi=yf ​), então θMAX=45∘.

Este estudo fornece uma compreensão abrangente da trajetória de um projétil, abrangendo desde as equações de movimento básicas até a análise de conservação de energia e momento em sistemas de colisão, como no pêndulo balístico, permitindo-nos verificar teorias fundamentais da cinemática e da dinâmica de projéteis.

# Diagram of a machine with a wire Description automatically generatedProcedimento Experimental

Parte A

Material necessário:

– Esfera

- Fita métrica

- Lançador de projéteis

- Sensores de passagem

- Sensor de impacto

Começamos por montar todos os materiais necessários para realizar a atividade experimental. Fixámos a base do lançador de projéteis na posição horizontal sobre a mesa e verificámos se o sistema de controlo estava devidamente ligado à fonte de alimentação. Para completar a montagem, colocámos um sensor na saída do lançador de projéteis e confirmámos a ligação do outro sensor ao sistema de controlo.

Concluída a preparação, medimos a distância s entre os dois sensores (3 e 4) com uma fita métrica. Em seguida, iniciámos a execução da atividade. Primeiro, carregámos o lançador de projéteis (1) na posição “SHORT RANGE” e inserimos a esfera, empurrando-a até que o indicador amarelo no lançador estivesse na posição desejada. Depois, ajustámos o sistema de controlo para o modo “TWO GATES” e pressionámos “START/STOP” para preparar o sistema para o disparo. Para lançar a esfera, puxámos o fio do disparador verticalmente e registámos o tempo indicado pelo sistema de controlo após o disparo. Este procedimento foi repetido três vezes para garantir uma maior precisão nos resultados obtidos.

# Procedimento Experimental

A diagram of a curved line

Description automatically generatedParte B

Material necessário:

- Alvo (papel milimétrico e papel químico)

- Esfera

- Fita métrica

- Lançador de projéteis

Na segunda parte da atividade experimental, iniciámos fixando a base do lançador de projéteis à mesa e inclinámos o lançador de forma a criar um ângulo de 30° com a horizontal. Após essa configuração inicial, posicionámos o alvo, composto por um conjunto de papel químico sobre papel milimétrico, a uma distância tal que a esfera, ao ser disparada, atinja a superfície do alvo.

Com todos os materiais prontos, carregámos o lançador no modo “SHORT RANGE”, introduzimos a esfera e efetuámos o disparo, registando o alcance x e o ângulo de lançamento θ.

Este procedimento foi repetido três vezes para cada um dos ângulos seguintes: 34°, 38°, 40° e 43°. Por fim, medimos cuidadosamente a altura yi​ em relação à bancada, correspondente à posição inicial de lançamento da esfera.

# Procedimento Experimental

A diagram of a mechanical engineering

Description automatically generatedParte C

Material necessário:

- Balança

- Esfera

- Fita métrica

- Lançador de projéteis

- Pêndulo

Começámos por medir a massa m da esfera e a massa do pêndulo M, utilizando uma balança, bem como o comprimento do pêndulo l com uma fita métrica. Após obtermos todas as medidas necessárias, carregámos o lançador de projéteis na posição “SHORT RANGE” e efetuámos o disparo, de modo que a esfera fosse capturada pelo pêndulo balístico, fazendo com que este se movesse e descrevesse um ângulo α, que registámos.

Para garantir maior precisão nos resultados, repetimos o procedimento mais quatro vezes.

# Análise dos Resultados

Findos os trabalhos de recolha de dados experimentais, passamos à análise dos mesmos, para posteriores conclusões.

**Parte A**

Distancia entre os sensores

A distância medida entre os dois sensores de movimento é de 0.1m com um erro de medida associado de 0.001 m.

Tempo

O tempo foi medida através de um aparelho eletrónico com um sistema de controlo dos sensores com um erro associado de 0.0001s.

|  |  |
| --- | --- |
| Lançamento | Tempo(s) |
| 1 | 0.0444 |
| 2 | 0.0437 |
| 3 | 0.0438 |
| 4 | 0.0425 |
| 5 | 0.0449 |

O tempo média calculado é de 0,0439 s.

O desvio máximo é 0.00104s.

Velocidade

Para o cálculo da velocidade utilizamos a seguinte fórmula:

Sendo – distância (m) e – tempo médio (s).

A velocidade média é 2,2799 m/s com um erro de medição associado de 0.0001m/s.

∆𝑣0 = ∆𝑥 ( 𝑑𝑣/𝑑𝑥) + ∆𝑡 ( 𝑑𝑣/𝑑𝑡) = 0.001 \* (1 / 0.0439) + 0.0001 \* (1 / 0.1) = 0.0247 (m/s)

𝑣0 = é 2,2799 ± 0.0247 (m/s)

De seguida, com os resultados obtidos através dos cálculos, realizou-se o seguinte cálculo para obter o valor da precisão desta experiência:

𝑃𝑟𝑒𝑐𝑖𝑠ã𝑜 = (1 − ∆𝑣0 / 𝑣0 ) ∗ 100 = (1 − 0.02 / 2.27) ∗ 100 ≈ 99.11%

Como a precisão calculada está acima de 90%, concluímos que os resultados são precisos.

Discussão- Estratégias para melhorar o resultado

Com o objetivo de melhorar o resultado obtido pode-se praticar as seguintes medidas:

1. Verificação constante do equipamento
2. Minimizar influencias externas, como por exemplo: correntes de ar, vibrações da mesa.
3. Verificação da consistência dos dados.

**Parte B**

Ângulo de lançamento

Este ângulo sofre variações entre diferentes lançamentos e é medido com base nas marcações do equipamento de lançamento. A incerteza associada a esta medição é de 0,5º. Os ângulos considerados foram 30º, 34º, 38º, 40º e 43º.

Altura

A altura será constante e medida verticalmente, desde o nível do alvo até ao ponto de lançamento. Nesta experiência, a altura registada foi de 0.27 com um erro de leitura de 0.05cm.

Alcance

Média do alcance de cada lançamento:

α = 30 °: 𝑥1 = = 0.753 (m)

α = 34 °: 𝑥2 = = 0.761 (m)

α = 38 °: 𝑥3 = = 0.755 (m)

α = 40 °: 𝑥4 = = 0.757 (m)

α = 43 °: 𝑥5 = = 0.740 (m)

A figura 3.1 mostra o alcance em relação ao ângulo. No eixo x, está representado o ângulo de lançamento, e no eixo y, o alcance médio correspondente a cada ângulo.

Figura 3.1: Gráfico do alcance em função do ângulo

Calculando o valor teórico de qual seria o ângulo de lançamento que lançava o projétil a uma maior distância temos:

𝛼𝑚á𝑥 = 𝑎𝑡𝑎𝑛 ⬄ 𝑎𝑡𝑎𝑛 ≃ 35.14°

Discussão

Com base nos valores obtidos, observa-se uma discrepância mais acentuada entre eles, especialmente nos três primeiros ângulos utilizados (30º, 34º e 38º), com variações de 0,02, 0,01 e 0,02, respetivamente. Na presente experiência, estas variações podem ser explicadas por diversos fatores, tais como:

- A falta de uniformidade na força da mola;  
- A possibilidade de a pessoa que realiza o lançamento não repetir exatamente o mesmo movimento em todos os disparos;  
- Pequenas variações no método de medição do alcance.

**Parte C**

**Pêndulo Balístico: Método alternativo para determinação da Velocidade Inicial de um Projétil**

**Ângulos obtidos nos lançamentos:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Lançamento** | **Ângulo (α ± 0.0025) º** |
| 1 | 16.50 |
| 2 | 17.00 |
| 3 | 16.50 |
| 4 | 17.00 |
| 5 | 16.00 |

Após a realização das 5 medições necessárias, calculamos o valor da média dos ângulos registados, através da expressão:

𝑋𝛼 = = 16.60 ± 0.6º

Com a média dos ângulos, é possível calcular o valor da altura, h, através da fórmula da introdução teórica, tendo como dados a altura do pêndulo, **L**:

**ℎ** = 𝐿 ∗ (1 − 𝑐𝑜𝑠(𝛼)) ⇔ ℎ = 0.305 ∗ (1 − 𝑐𝑜𝑠 (16.6)) = 0.0127𝑚 ± 𝛥ℎ

Em seguida foi calculado o erro associado à altura com a seguinte fórmula:

**𝛥ℎ** = | 𝜕ℎ / 𝜕𝐿| ∗ 𝛥𝐿 + | 𝜕ℎ / 𝜕𝛼| ∗ 𝛥𝛼 ⇔

**𝛥ℎ** = (1 − 𝑐𝑜𝑠(𝛼)) ∗ 𝛥𝐿 + (𝐿 ∗ 𝑠𝑖𝑛(𝛼)) ∗ 𝛥𝛼 ⇔

**𝛥ℎ** = (1 − 𝑐𝑜𝑠 (16.6)) ∗ 0.0005 + (0.305 ∗ 𝑠𝑖𝑛 (16.6)) ∗ 0.010 ⇔

**𝛥ℎ** = 0.00095(𝑚)

Por último foi feito o cálculo da velocidade inicial do projétil através da seguinte expressão:

𝑣𝑖 = ∗ √(2𝑔ℎ) ⇔ 𝑣𝑖 = ∗ √(2 ∗ 9.8 ∗ 0.0127) ⇔ 𝑣𝑖 = 2.290 𝑚/

# Conclusão

Após determinarmos a velocidade de um projétil através das equações de movimento, do pêndulo balístico e analisarmos a dependência do alcance em função do ângulo de lançamento, constatamos que atingimos os objetivos definidos para esta atividade experimental. As medições realizadas apresentaram resultados consistentes e precisos, refletindo uma execução bem-sucedida e minimizando potenciais erros experimentais.

Iniciámos este trabalho com a Parte A, onde calculámos a velocidade inicial do projétil com o auxílio de um lançador de projéteis, obtendo um valor de **2.28** m/s. Na Parte B, focámo-nos na análise do alcance do projétil em função do ângulo de lançamento, efetuando disparos com vários ângulos (30°, 34°, 38°, 40° e 42°) e verificámos que o alcance máximo foi atingido a **35.14**°. Finalizámos com a Parte C, na qual aplicámos o pêndulo balístico para calcular novamente a velocidade inicial do projétil, confirmando a validade dos métodos aplicados ao longo da experiência. Através das várias medições e resultados obtidos, conseguimos perceber que a atividade foi realizada com uma grande precisão, deste modo, não tendo suscitado problemas ao longo da execução desta mesma. A contribuição dos autores deste trabalho foi irmãmente dividida.