INSTITUTO UNIVERSITÁRIO DE LISBOA

2020/2021
2º Semestre

Optimização Heurística
Professora Maria João Cortinhal

TRABALHO INDIVIDUAL 1

Trabalho Realizado Por:
João Diogo Mendes Martins, n.º 93259

Índice

Questão a)

Quantos kits básicos, avançados e premium deve a organização enviar para o país?

De acordo com o enunciado do problema, os objectivos passam por determinar a quantidade ideal de cada *kit* de ajuda que tem de ser enviado ao país, mediante as diferentes metas e restrições *hard*. Comecemos então por caracterizar as variáveis em jogo:

- x_1 : número de kits do tipo básico;
- x_2 : número de kits do tipo avançado;
- x_3 : número de kits do tipo *premium*.

A determinação de cada uma destas variáveis está condicionada às seguintes restrições *soft* (metas) – restrições em que existe alguma flexibilidade, medida esta pelo desvio *d* em relação ao valor de aspiração:

- Meta 1 – ajudar, pelo menos, 20% dos 11 milhões de habitantes do país (20% corresponde a 2 200 000 habitantes):
    - $0.00003\,x_1+0.000035\,x_2+0.000054\,x_3+d_1^-\geq 2.2\,(\textit{milhões de habitantes})$

      com d_1^- a representar o desvio negativo em relação à meta (milhões de habitantes abaixo da meta)
- Meta 2 – enviar, pelo menos, 3 000 *kits premium*:
    - $x_3+d_2^-\geq 3\,000\,(\textit{número de kits do tipo premium})$

      com d_2^- a representar o desvio negativo em relação à meta (número de *kits premim* abaixo da meta)
- Meta 3 – custo da ajuda humanitária não deve exceder os 20 milhões de Euros:
    - $0.0003\,x_1+0.00035\,x_2+0.00072\,x_3-d_3^+\leq 20\,(\textit{milhões de Euros})$

      com d_3^+ a representar o desvio positivo em relação à meta (milhões de euros acima da meta).

A determinação das variáveis está também condicionada às restrições *hard* do problema – restrições que impõem um limite rígido ao conjunto da solução:

- Restrições relativas ao transporte:
    - Restrição *hard* 1: Número máximo total de *kits* que podem ser enviados:
        - $x_1+x_2+x_3\leq 40\,000\,(\textit{número de kits})$

    Restrição *hard* 2: Número máximo quilos total que podem ser transportados:
        - $120\,x_1+180\,x_2+220\,x_3\leq 6\,000\,000\,(\textit{número de quilos})$

Na definição original do problema existe outra questão a ter em conta: por cada 100 *kits premium* que sejam enviados, existirá um custo extra associado de 33 000€, que corresponde ao envio de 1 médico. Ora, sendo esta uma condição que influencia directamente o custo da operação de ajuda humanitária, a sua consideração terá de ser contemplada na Meta 3. Desta forma, esta será reformulada da seguinte forma:

- Meta 3:

$$0.0003\,x_1+0.00035\,x_2+0.00072\,x_3+\frac{x_3}{100}\times 0.033-d_3^+\leq 20\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.0003\,x_1 + 0.00035\,x_2 + 0.00105\,x_3 - d_3^+ \leq 20$$

(Em que $\frac{x_3}{100} \times 0.033$ representa o custo extra com pessoal médico associado ao envio de cada *kit premium*)

Por fim, teremos de considerar a importância para cada uma das metas, de acordo com o definido no enunciado; ou seja, no fundo os pesos associados a cada tipo de desvio *d*:

- Peso 1 (associado à meta 1):

$$p_1 = \frac{7}{100\,000\ \textit{pessoas abaixo do nível de aspiração}}$$

- Peso 2 (associado à meta 2):

$$p_2 = \frac{1}{1000\ \textit{kits abaixo do nível de aspiração}}$$

- Peso 3 (associado à meta 3):

$$p_3 = \frac{1}{1\,000\,000\ \textit{euros acima do nível de aspiração}}$$

Através dos detalhes enunciados do problema, percebe-se que não existe uma hierarquia de prioridade entre as metas a serem alcançadas. A importância de cada uma das metas e condições é mediada simplesmente por um conjunto de pesos para cada tipo de desvio à respectiva meta. O objectivo será então minimizar a soma ponderada dos desvios não desejados. Estamos perante um problema que será resolvido com recurso a programação linear por metas não preemptiva.

Função objectivo: minimizar a soma ponderada dos desvios às metas:

$$\min Z = p_1 \frac{d_1^-}{t_1} + p_2 \frac{d_2^-}{t_2} + p_3 \frac{d_3^+}{t_3}, \textit{com}\ d_1^-, d_2^-, d_3^+ \geq 0$$

Em que:

- t_1: nível de aspiração da meta 1 = $2.2\ \textit{milhões de habitantes}$
- t_2: nível de aspiração da meta 2 = $3\,000\ \textit{kits premium}$
- t_3: nível de aspiração da meta 3 = $20\ \textit{milhões de euros}$
- p_1: penalização por cada desvio percentual de d_1^- = 0.007
- p_2: penalização por cada desvio percentual de d_2^- = 0.1
- p_3: penalização por cada desvio percentual de d_3^+ = 0.0001

Sendo que p_1, p_2 e p_3 foram traduzidos da sua expressão original no enunciado para uma percentagem, de forma a ficarem na mesma unidade que os desvios da meta respectiva.

Resumindo a informação sobre o problema, temos então o seguinte:

$$\min Z = 0.007 \frac{d_1^-}{2.2} + 0.1 \frac{d_2^-}{3000} + 0.0001 \frac{d_3^+}{20}, \textit{com}\ d_1^-, d_2^-, d_3^+ \geq 0$$

sujeito a:

$$0.00003\,x_1 + 0.000035\,x_2 + 0.000054\,x_3 + d_1^- \geq 2.2$$

$$x_3 + d_2^- \geq 3\,000$$

$$0.0003\,x_1 + 0.00035\,x_2 + 0.00105\,x_3 - d_3^+ \leq 20$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 40\,000$$

$120\,x_1 + 180\,x_2 + 220\,x_3 \leq 6\,000\,000$

$x_1, x_2, x_3, d_1^-, d_2^-, d_3^+ \geq 0$

$x_1, x_2, x_3\, inteiros$

Na resolução do problema recorreu-se ao package lpSolveAPI no *software* RStudio, tendo-se definido o problema da seguinte forma:

Model name: Modelo a)

	x1	x2	x3	d1-	d2-	d3+		
Minimize	0	0	0	0.00318181818181641	3.3333333333313e-05	5e-06		
Meta 1	3e-05	3.5e-05	5.4e-05	1	0	0	>=	2.2
Meta 2	0	0	1	0	1	0	>=	3000
Meta 3	3e-04	0.00035	0.00105	0	0	-1	<=	20
Restrição Hard 1	1	1	1	0	0	0	<=	40000
Restrição Hard 2	120	180	220	0	0	0	<=	6e+06
Kind	Std	Std	Std	Std	Std	Std		
Type	Int	Int	Int	Real	Real	Real		
Upper	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf		
Lower	0	0	0	0	0	0		

A solução óptima obtida foi a seguinte:

- $x_1^* = 28\,000\, kits$
- $x_2^* = 0\, kits$
- $x_3^* = 12\,000\, kits$

Com os sequintes desvios associados:

- $d_1^- = 0.712\, milhões\, de\, habitantes$
- $d_2^- = 0\, quilos$
- $d_3^+ = 1\, milhões\, de\ euros$

Significa isto que deverão ser enviados 28 000 *kits* básicos, 12 000 *kits premium* e nenhum *kit* avançado. Esta solução óptima implica que:

- nível de aspiração mínimo definido na Meta 1 não é cumprido: é possível ajudar $2.2 - 0.712 = 1.488\, milhões\, habitantes$, ou seja menos 712 000 habitantes que o nível mínimo de aspiração definido;
- o nível de aspiração mínimo de 3 000 *kits* enviados é cumprido (são enviados 12 000);
- o nível de aspiração máximo definido na Meta 3 não é cumprido, sendo gastos 21 milhões de euros; ou seja, mais 1 milhão que o definido como ideal;
- o peso total dos *kits* enviados é de $120 * 28000 + 180 * 0 + 220 * 12000 = 6\,000\,000\, quilos$, ou seja, o limite rígido máximo definido;
- o número total de *kits* enviados é de $28\,000 + 12\,000 = 30\,000\, kits$, ou seja, o limite rígido máximo de 40 000 kits não chegou a ser alcançado.

Questão b)

A organização reavaliou os níveis de importância atribuídos a cada uma das três metas.
Em consequência, foi decidido dar mais importância à Meta 3: 15 pontos por cada €1 milhão acima do nível de aspiração (€20 milhões).
Em relação às restantes metas, manteve as mesmas penalidades. Sob este cenário, quantos kits básicos, avançados e premium deve a organização enviar para o país?

Nesta questão, a o problema é em todo semelhante àquele da anterior, excepto no que diz respeito à importância da Meta 3. Aqui, em vez de termos uma penalização de 1 / 1 000 000 euros, temos uma penalização de 15 / 1 000 000. Significa isto que a penalização por cada desvio percentual de d_3^+ será de 0.0015:

p_{3b}: penalização por cada desvio percentual de d_3^+ = 0.0015

A nova função objectivo é a seguinte:

$$minZ = p_1 \frac{d_1^-}{t_1} + p_2 \frac{d_2^-}{t_2} + p_{3b} \frac{d_3^+}{t_3}, com\ d_1^-, d_2^-, d_3^+ \geq 0$$

Em que:

- t_1: nível de aspiração da meta 1 = $2.2\ milhões\ de\ habitantes$
- t_2: nível de aspiração da meta 2 = $3\,000\ kits\ premium$
- t_3: nível de aspiração da meta 3 = $20\ milhões\ de\ euros$
- p_1: penalização por cada desvio percentual de d_1^- = 0.007
- p_2: penalização por cada desvio percentual de d_2^- = 0.1
- p_3: penalização por cada desvio percentual de d_3^+ = 0.0015

Ou seja:

$$minZ = 0.007 \frac{d_1^-}{2.2} + 0.1 \frac{d_2^-}{3000} + 0.0015 \frac{d_3^+}{20}, com\ d_1^-, d_2^-, d_3^+ \geq 0$$

Esta função é sujeita às mesmas restrições (*soft* e *hard*) que as observadas em *a)*:

$$0.00003\, x_1 + 0.000035\, x_2 + 0.000054\, x_3 + d_1^- \geq 2.2$$
$$x_3 + d_2^- \geq 3\,000$$
$$0.0003\, x_1 + 0.00035\, x_2 + 0.00105\, x_3 - d_3^+ \leq 20$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 40\,000$$
$$120\, x_1 + 180\, x_2 + 220\, x_3 \leq 6\,000\,000$$
$$x_1, x_2, x_3, d_1^-, d_2^-, d_3^+ \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3\ inteiros$$

No software RStudio, o modelo é traduzido na seguinte forma:

Model name: Modelo b)

	X1	X2	X3	d1-	d2-	d3+		
Minimize	0	0	0	0.00318181818181641	3.3333333333313e-05	7.5e-05		
Meta 1	3e-05	3.5e-05	5.4e-05	1	0	0	>=	2.2
Meta 2	0	0	1	0	1	0	>=	3000
Meta 3	3e-04	0.00035	0.00105	0	0	-1	<=	20
Restrição Hard 1	1	1	1	0	0	0	<=	40000
Restrição Hard 2	120	180	220	0	0	0	<=	6e+06
Kind	Std	Std	Std	Std	Std	Std		
Type	Int	Int	Int	Real	Real	Real		
Upper	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf		
Lower	0	0	0	0	0	0		

A solução óptima obtida foi a seguinte:

- $x_1^* = 27\,000\, kits$
- $x_2^* = 2\,500\, kits$
- $x_3^* = 10\,500\, kits$

Com os sequintes desvios associados:

- $d_1^- = 0.7355\, milhões\, de\, habitantes$
- $d_2^- = 0\, quilos$
- $d_3^+ = 0\, milhões\, de\, euros$

Significa isto que deverão ser enviados 27 000 *kits* básicos, 2 500 *kits* avançados e 10 500 *kits premium*. Esta solução óptima implica que:

- nível de aspiração mínimo definido na Meta 1 não é cumprido: é possível ajudar $2.2 - 0.7355 = 1.4645\, milhões\, de\, habitantes$, ou seja, menos 735 500 habitantes que o nível mínimo de aspiração definido;
- o nível de aspiração mínimo de 3 000 *kits* enviados é cumprido (são enviados 10 500);
- o nível de aspiração máximo definido na Meta 3 é cumprido, sendo gastos exactamente 20 milhões de euros, o máximo ideal definido; ou seja, o aumento da importância/peso desta meta contribui para um aumento da sua rigidez, permitindo a eliminação do desvio;
- o peso total dos *kits* enviados é de $120 \times 27000 + 180 \times 2500 + 220 \times 10500 = 6\,000\,000\, quilos$, ou seja, o valor do limite rígido máximo definido;
- o número total de *kits* enviados é de $28\,000 + 12\,000 = 40\,000\, kits$, ou seja, exactamente o limite rígido máximo definido.

Questão c)

A organização constatou que seria importante aumentar o rácio de médicos para os kits premium: enviar um médico por cada 75 kits.
Considerando as penalizações para as metas indicadas em b), quantos kits básicos, avançados e premium deve a organização enviar para o país?

A alteração do rácio de médicos de 1 por 100 *kits* para 1 por 75 *kits* implica uma alteração na meta relacionada com os custos. Desta forma, a Meta 3 terá de ser redefinida da seguinte forma:

Meta 3:

$$0.0003\,x_1+0.00035\,x_2+0.00072\,x_3+\frac{x_3}{75}\times 0.033-d_3^+\leq 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.0003\,x_1+0.00035\,x_2+0.00116\,x_3-d_3^+\leq 20$$

(Em que $\frac{x_3}{75}\times 0.033$ representa o novo custo extra de pessoal médico associado ao envio de cada *kit premium*)

Mantedo-se a função objectivo e as restantes condicionantes, a formulação do problema para esta questão é então a seguinte:

$$minZ=0.007\frac{d_1^-}{2.2}+0.1\frac{d_2^-}{3000}+0.0015\frac{d_3^+}{20}\,,com\ d_1^-,d_2^-,d_3^+\geq 0$$

sujeito a:

$$0.00003\,x_1+0.000035\,x_2+0.000054\,x_3+d_1^-\geq 2.2$$

$$x_3+d_2^-\geq 3\,000$$

$$0.0003\,x_1+0.00035\,x_2+0.00116\,x_3-d_3^+\leq 20$$

$$x_1+x_2+x_3\leq 40\,000$$

$$120\,x_1+180\,x_2+220\,x_3\leq 6\,000\,000$$

$$x_1,x_2,x_3,d_1^-,d_2^-,d_3^+\geq 0$$

$$x_1,x_2,x_3\ inteiros$$

Representação do problema no Rstudio:

Model name: Modelo c)

	X1	X2	X3	d1-	d2-	d3+		
Minimize	0	0	0	0.00318181818181641	3.3333333333313e-05	7.5e-05		
Meta 1	3e-05	3.5e-05	5.4e-05	1	0	0	>=	2.2
Meta 2	0	0	1	0	1	0	>=	3000
Meta 3	3e-04	0.00035	0.00116	0	0	-1	<=	20
Restrição Hard 1	1	1	1	0	0	0	<=	40000
Restrição Hard 2	120	180	220	0	0	0	<=	6e+06
Kind	Std	Std	Std	Std	Std	Std		
Type	Int	Int	Int	Real	Real	Real		
Upper	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf		
Lower	0	0	0	0	0	0		

A solução óptima obtida foi a seguinte:

- $x_1^* = 26\,009\,kits$
- $x_2^* = 4\,978\,kits$
- $x_3^* = 9\,013\,kits$

Com os sequintes desvios associados:

- $d_1^- = 0.758798\,milhões\,de\,habitantes$
- $d_2^- = 0\,quilos$
- $d_3^+ = 0.00008\,milhões\,de\,euros$

Significa isto que deverão ser enviados 26 009 *kits* básicos, 4 978 *kits* avançados e 9 013 *kits premium*. Esta solução óptima implica que :

- nível de aspiração mínimo definido na Meta 1 não é cumprido: é possível ajudar $2.2 - 0.758798 = 1.441202\,milhões\,de\,habitantes$, ou seja, menos 758 798 habitantes que o nível mínimo de aspiração definido;
- o nível de aspiração mínimo de 3 000 *kits* enviados é cumprido (são enviados 9 013);
- o nível de aspiração máximo definido na Meta 3 não é cumprido, sendo gastos 20.00008 milhões de euros, ou seja, mais 80 € que o máximo ideal definido;
- o peso total dos *kits* enviados é de $120 \times 26009 + 180 \times 4978 + 220 \times 9013 = 5\,999\,980\,quilos$, ou seja, 20kg abaixo do limite rígido máximo definido;
- o número total de *kits* enviados é de $26\,009 + 4\,978 + 9\,013 = 40\,000\,kits$, ou seja, exactamente o limite rígido máximo definido.

Questão d)

O orçamento que a organização tem disponível para a ajuda humanitária sofreu uma redução. Por essa razão, a organização não poderá mesmo ultrapassar os 20 milhões de euros em ajuda a este país. Devido a este corte orçamental, a organização decidiu manter a sua política original de enviar um médico por cada 100 kits premium. Quantos kits básicos, avançados e premium deve a organização enviar para o país, assumindo que as penalizações por não cumprimento das restantes duas metas continuam a ser as mesmas que em a)?

Nesta reformulação, a condição que estava previamente escrita como uma meta relativa aos custos passa agora a ser uma restrição *hard*. Ou seja, Meta 3 é transformada em Restrição *Hard* 3. Isto implica uma alteração também na própria função objectivo, uma vez que passará a contemplar somente a soma ponderada dos desvios em relação às metas 1 e 2. Os restantes pesos e condicionantes são os mesmos que observados em *a)*.

$$minZ = p_1 \frac{d_1^-}{t_1} + p_2 \frac{d_2^-}{t_2}, com\ d_1^-, d_2^- \geq 0$$

Em que:

- t_1: nível de aspiração da meta 1 = $2.2\ milhões\ de\ habitantes$
- t_2: nível de aspiração da meta 2 = $3\,000\ kits\ premium$
- p_1: penalização por cada desvio percentual de d_1^- = 0.007
- p_2: penalização por cada desvio percentual de d_2^- = 0.1

Tendo como metas:

- Meta 1: $0.00003\,x_1 + 0.000035\,x_2 + 0.000054\,x_3 + d_1^- \geq 2.2\,(milhões\ de\ habitantes)$
- Meta 2: $x_3 + d_2^- \geq 3\,000\,(número\ de\ kits\ do\ tipo\ premium)$

E tendo como restrições *hard*:

- Restrições de transporte:
  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 40\,000\,(número\ de\ kits)$
  $120\,x_1 + 180\,x_2 + 220\,x_3 \leq 6\,000\,000\,(número\ de\ quilos)$
- Restrições de custos:
  $0.0003\,x_1 + 0.00035\,x_2 + 0.00105\,x_3 \leq 20\,(milhões\ de\ euros)$

Sendo:

- $x_1, x_2, x_3, d_1^-, d_2^- \geq 0$
- $x_1, x_2, x_3\ inteiros$

Eis a reformulação do problema no Rstudio:

```
Model name: Modelo d)
                          X1          X2          X3                  d1-                  d2-
Minimize                   0           0           0  0.00318181818181641  3.3333333333313e-05
Meta 1                 3e-05     3.5e-05     5.4e-05                    1                    0  >=    2.2
Meta 2                     0           0           1                    0                    1  >=   3000
Restrição Hard 1           1           1           1                    0                    0  <=  40000
Restrição Hard 2         120         180         220                    0                    0  <=  6e+06
Restrição Hard 3       3e-04     0.00035     0.00105                    0                    0  <=     20
Kind                     Std         Std         Std                  Std                  Std
Type                     Int         Int         Int                 Real                 Real
Upper                    Inf         Inf         Inf                  Inf                  Inf
Lower                      0           0           0                    0                    0
```

Neste caso, a solução óptima obtida foi a mesma que aquela observada na questão *b)*:

- $x_1^* = 27\,000\, kits$
- $x_2^* = 2\,500\, kits$
- $x_3^* = 10\,500\, kits$

Os desvios associados foram :

- $d_1^- = 0.7355\, milhões\, de\, habitantes$
- $d_2^- = 0\, quilos$

Ou seja, deverão ser enviados 27 000 *kits* básicos, 2 500 *kits* avançados e 10 500 *kits premium*, com as seguintes implicações:

- nível de aspiração mínimo definido na Meta 1 não é cumprido: são ajudados 1 464 500 habitantes, menos 735 500 habitantes que o nível mínimo de aspiração definido;
- o nível de aspiração mínimo de 3 000 *kits* enviados é cumprido (são enviados 10 500);
- o peso total dos *kits* enviados é de 6 000 000 quilos, o limite rígido máximo definido;
- o número total de *kits* enviados é de 40 000 *kits*, exactamente o limite rígido máximo definido;
- o custo total associado à operação de ajuda humanitária é de: $0.0003 \times 27000 + 0.00035 \times 2500 + 0.00105 \times 10500 = 20\, milhões\, de\, euros$.

A justificação para a obtenção dos mesmos resultados que em *b)* tem que ver com o facto de naquela questão, ao se intruduzir um peso maior à Meta 3 (passando de 1 / 1.000.000 para 15 / 1.000.000), estamos efectivamente a aumentar a sua inflexibilidade, ou seja, fazemos com que tenha o comportamento de uma restrição *hard* em vez de uma restrição *soft*.
Ora, nesta questão *d)* o que fazemos é de certa forma "formalizar" a inflexibilidade em relação aos custos já observadas em *b)*, removendo a possibilidade de desvio *d* e definindo então aquela que era a Meta 3 na Restrição Hard 3.
Este é no fundo o impacto dos pesos associados a cada desvio em relação a uma meta específica: quanto mais próximos de zero, maior a flexibilidade em não cumprir se o valor da meta (diminuido assim a sua importância face às restantes); quanto mais elevados, maior a rigidez (e maior a sua importância) no cumprimento do valor de aspiração, sendo que para valores suficientemente elevados acaba por funcionar efectivamente como uma restrição impossível de não ser cumprida.