AULA 4

Produto escalar

Produto escalar – definição algébrica

Sejam $\overrightarrow{u} = (x_1 , y_1 , z_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2 , y_2 , z_2)$, chamamos de **produto escalar** o número real:

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Notação: $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$ ou $\left\langle \overrightarrow{u} , \overrightarrow{v} \right\rangle$ e se lê: " $\overrightarrow{u}$ escalar $\overrightarrow{v}$ ".

Exemplos:

1) Dados os vetores $\vec{u} = (1,2,3)$ e $\vec{v} = (-3,4,-1)$, calcular:

a) $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$ = 1 . (-3) + 2 . 4 + 3 . (-1) = –3 + 8 – 3 = 2

b) $\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) \bullet \left(-\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right)$ = (-2 , 6 , 2) • (-4 , 2 , -4) = (-2) . (-4) + 6 . 2 + 2 . (-4) =

= 8 + 12 – 8 = 12

2) Dados os vetores $\vec{u} = (4 , \alpha , -1)$ e $\vec{v} = (\alpha , 2 , 3)$ e os pontos A(4 , -1 , 2) e B(3 , 2 , -1), determinar o valor de α tal que $\overrightarrow{u} \bullet \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{BA}\right) = 5$.

$\overrightarrow{BA} = A - B = (1 , -3 , 3)$

$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{BA}$ = (α + 1 , -1 , 6)

$\overrightarrow{u} \bullet \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{BA}\right) = 5 \Rightarrow (4 , \alpha , -1) \bullet (\alpha + 1, -1, 6) = 5$

4 . (α + 1) + α . (-1) + (-1) . 6 = 5

4α + 4 - α - 6 = 5

3α = 7

$\alpha = \dfrac{7}{3}$

Propriedades do produto escalar:

i) $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$

ii) $\vec{u} \bullet \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$

iii) $\alpha\left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right) = \left(\alpha\,\vec{u}\right) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet \left(\alpha\,\vec{v}\right)$

iv) $\vec{u} \bullet \vec{u} > 0$ se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{u} \bullet \vec{u} = 0$ se $\vec{u} = \vec{0}$

v) $\vec{u} \bullet \vec{u} = \left\|\vec{u}\right\|^2$

Exemplos:

1) Sendo $\vec{u} = \left(x\,,\,y\,,\,z\right)$, demonstre a propriedade **v)**

Resolução:

$$\vec{u} \bullet \vec{u} = \left(x\,,\,y\,,\,z\right) \bullet \left(x\,,\,y\,,\,z\right) = x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \;\Rightarrow\; \left\|\vec{u}\right\|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2 \;\Rightarrow\; \left\|\vec{u}\right\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\therefore\; \vec{u} \bullet \vec{u} = \left\|\vec{u}\right\|^2$$

2) Mostrar que $\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\,\vec{u} \bullet \vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$

Resolução:

$$\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 \overset{(v)}{=} \left(\vec{u} + \vec{v}\right) \bullet \left(\vec{u} + \vec{v}\right) \overset{(ii)}{=} \vec{u} \bullet \vec{u} + \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{v} \bullet \vec{v}$$

$$\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 \overset{(i)}{=} \vec{u} \bullet \vec{u} + 2\,\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{v}$$

$$\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 \overset{(v)}{=} \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\,\vec{u} \bullet \vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$$

Analogamente, $\left\|\vec{u} - \vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 - 2\,\vec{u} \bullet \vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$

Resolva você ...

3) Sendo $\left\|\vec{u}\right\| = 4$, $\left\|\vec{v}\right\| = 2$ e $\vec{u} \bullet \vec{v} = 3$, calcular $\left(3\vec{u} - 2\vec{v}\right) \bullet \left(-\vec{u} + 4\vec{v}\right)$.

Resolução:

$$\left(3\vec{u} - 2\vec{v}\right) \bullet \left(-\vec{u} + 4\vec{v}\right) = -3\vec{u} \bullet \vec{u} + 12\vec{u} \bullet \vec{v} + 2\vec{v} \bullet \vec{u} - 8\vec{v} \bullet \vec{v} =$$

$$= -3\left\|\vec{u}\right\|^2 + 14\vec{u} \bullet \vec{v} - 8\left\|\vec{v}\right\|^2 =$$

$$= -3 \cdot 4^2 + 14 \cdot 3 - 8 \cdot 2^2 =$$

$$= -48 + 42 - 32 = -38$$

Exercício resolvido:

Determinar o vetor $\vec{v}$, paralelo ao vetor $\vec{u}$ = (2 , -1 , 3), tal que $\vec{v} \bullet \vec{u} = -42$.

Resolução:

Seja $\vec{v} = (x\,,\, y\,,\, z)$ o vetor procurado.

Como $\vec{v} \bullet \vec{u} = -42$, temos: $(x\,,\, y\,,\, z) \bullet (2\,,\, -1\,,\, 3) = 2x - y + 3z = -42$ (i)

Como os vetores são paralelos, temos:

$$\vec{v} \;//\; \vec{u} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{3}$$

Ou seja, multiplicando em cruz, temos:

- x = 2y $\Rightarrow$ x = - 2y

- z = 3y $\Rightarrow$ z = - 3y (ii)

Logo, substituindo as equações obtidas em (ii) em (i), obtemos:

2(- 2y) – y + 3(- 3y) = - 42

- 4y – y – 9y = - 42

- 14y = - 42

y = 3

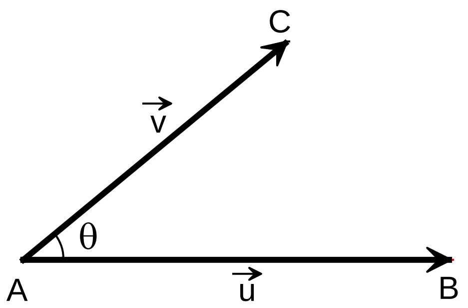
$\therefore$ x = - 2 . 3 $\Rightarrow$ x = - 6

z = -3 . 3 $\Rightarrow$ z = - 9

Logo, $\vec{v} = (-6\,,\, 3\,,\, -9)$

Produto escalar – definição geométrica

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$,vetores não paralelos, e θ o ângulo formado por eles, então temos que:



$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{v}\right\| \cdot \cos\theta; \quad 0 \leq \theta \leq 180^{o}$$

Demonstração:

Exemplo: Sendo $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = 2$, $\left\|\overrightarrow{v}\right\| = 3$ e 120º o ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, calcule $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$.

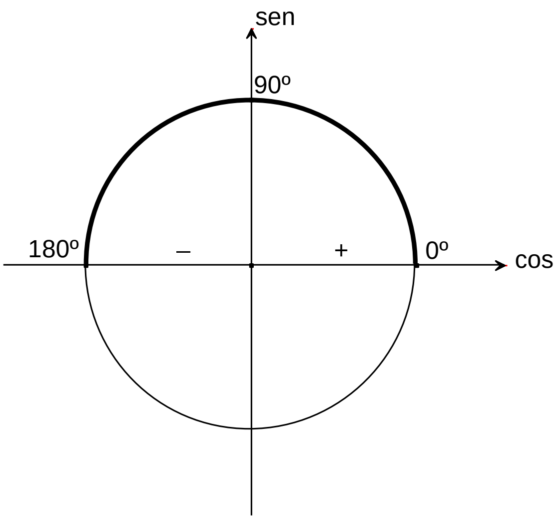
Resolução:

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{v}\right\| \cdot \cos\theta$$

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^{o}$$

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$$

Propriedades:



i) $\vec{u} \bullet \vec{v} > 0 \Leftrightarrow \cos\theta > 0 \Leftrightarrow 0º \leq \theta < 90º$, ou seja, θ é um ângulo agudo.

ii) $\vec{u} \bullet \vec{v} < 0 \Leftrightarrow \cos\theta < 0 \Leftrightarrow 90º < \theta \leq 180º$, ou seja, θ é um ângulo obtuso.

iii) $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 90º$, ou seja, θ é um ângulo reto:

$\vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$: **condição de ortogonalidade de dois vetores**

Exemplo: Mostrar que os seguintes pares de vetores são ortogonais:

a) $\vec{u} = (1, -2, 3)$ e $\vec{v} = (4, 5, 2)$

$\vec{u} \bullet \vec{v}$ = 1 . 4 + (-2) . 5 + 3 . 2 = 4 – 10 + 6 = 0

$\therefore$ são ortogonais.

b) $\vec{i}$ e $\vec{j}$

$\vec{i} \bullet \vec{j} = (1, 0, 0) \bullet (0, 1, 0)$= 1 . 0 + 0 . 1 + 0 . 0 = 0 + 0 + 0 = 0

$\therefore$ são ortogonais.

Exercícios resolvidos:

1) Qual o valor de α para que os vetores $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ e $\vec{b} = 2\vec{i} + (1 - 2\alpha)\vec{j} + 3\vec{k}$ sejam ortogonais?

Resolução:

$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = 0$

$(\alpha , 2 , -4) \bullet (2 , 1 - 2\alpha , 3) = 0$

$2\alpha + 2 - 4\alpha - 12 = 0$

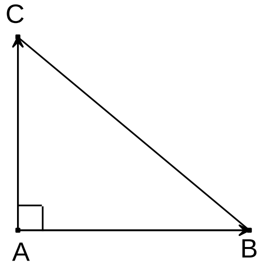
$- 2\alpha = 10$

$\therefore \alpha = - 5$

2) Dados os pontos A(m , 1 , 0); B(m – 1 , 2m , 2) e C(1 , 3 , -1), determinar m de modo que o triângulo ABC seja retângulo em A. Calcular a área do triângulo.

Resolução:

Para que o triângulo ABC seja retângulo em A, precisamos que o vetor $\overrightarrow{AB}$ seja ortogonal ao vetor $\overrightarrow{AC}$:



$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$

$(-1 , 2m – 1 , 2) \bullet (1 – m , 2 , -1) = 0$

$- 1 + m + 4m – 2 – 2 = 0$

$5m = 5$

$m = 1$

Para calcular a área do triângulo, precisamos das medidas de sua base ($\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$) e de sua altura ($\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$):

$\overrightarrow{AB} = (-1 , 2m - 1 , 2) = (-1 , 1 , 2) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

$\overrightarrow{AC} = (1 - m , 2 , -1) = (0 , 2 , -1) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

Logo,

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AC}\right\|}{2} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{2} \text{u.a.}$$

3) Determinar o vetor $\vec{v}$, sabendo que $\|\vec{v}\| = 5$, $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo x, $\vec{v} \bullet \vec{w} = 6$ e $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

Resolução:

Seja $\overrightarrow{v} = (x\ ,\ y\ ,\ z)$ o vetor procurado.

Como $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo x, tomamos o vetor $\overrightarrow{i} = (1\ ,\ 0\ ,\ 0)$ como representante do eixo x. Portanto, temos:

$$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{i} \iff \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{i} = 0$$

$$(x\ ,\ y\ ,\ z) \bullet (1,\ 0\ ,\ 0) = 0 \Rightarrow x + 0 + 0 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Como $\vec{v} \bullet \vec{w} = 6$, temos:

$$(0\ ,\ y\ ,\ z) \bullet (1,\ 2\ ,\ 0) = 6 \Rightarrow 0 + 2y + 0 = 6 \Rightarrow y = 3$$

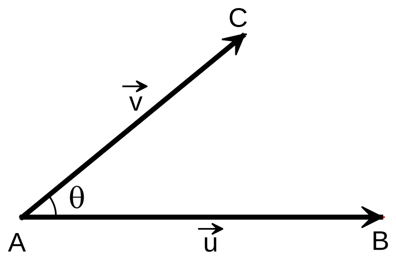
Por ultimo, para determinarmos o valor de z, usamos o fato de que $\|\vec{v}\| = 5$:

$$\sqrt{0^2 + 3^2 + z^2} = 5 \Rightarrow 9 + z^2 = 25 \Rightarrow z^2 = 16 \Rightarrow z = \pm 4$$

Logo, $\overrightarrow{v} = (0\ ,\ 3\ ,\ 4)$ ou $\overrightarrow{v} = (0\ ,\ 3\ ,\ -4)$

Cálculo do ângulo entre dois vetores:

De $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$, temos: $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$



Exemplos:

1) Calcular o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1\ ,\ 1\ \ ,4)$ e $\vec{v} = (-1\ ,\ 2\ ,\ 2)$

Resolução:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = -1 + 2 + 8 = 9$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

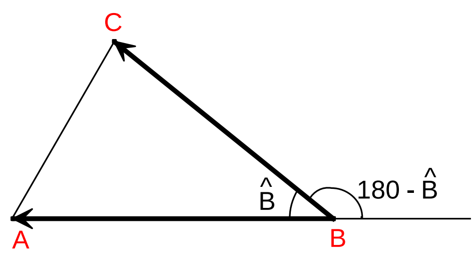
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{9}{3\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, $\theta = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 45^{\circ}$

2) Seja o triângulo de vértices A(2 , 1 , 3); B(1 , 0 , -1) e C(-1 , 2 , 1). Determinar o ângulo interno ao vértice B. Qual o ângulo externo ao vértice B?

Resolução:



$$\cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$$

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (1, 1, 4) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{BC} = (-2, 2, 2) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = -2 + 2 + 8 = 8$$

$$\therefore \cos\hat{B} = \frac{8}{3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{8}{6\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{36} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

Logo, $\hat{B} = \arccos\dfrac{2\sqrt{6}}{9} \cong 57{,}02^{o}$

E, portanto, o ângulo externo ao vértice B, é:

180º - 57,02º = 122,98º

3) Sabendo que o vetor $\vec{v}$ = (2 , 1 , - 1) forma ângulo de 60º com o vetor $\overrightarrow{AB}$ determinado pelos pontos A(3 , 1 , -2) e B(4 , 0 , m),calcular m.

Resolução:

$$\cos 60^{o} = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{v}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{v}\right\|}$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, m+2)$$

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{v} = 2 + (-1) + (-m-2) = 2 - 1 - m - 2 = -m - 1$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (m+2)^2} = \sqrt{1 + 1 + m^2 + 4m + 4} = \sqrt{m^2 + 4m + 6}$$

$$\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \cos 60^{o} = \frac{1}{2} = \frac{-m-1}{\sqrt{m^2 + 4m + 6} \cdot \sqrt{6}}$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, obtemos:

$$\frac{1}{4} = \frac{m^2 + 2m + 1}{6.(m^2 + 4m + 6)} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{m^2 + 2m + 1}{6m^2 + 24m + 36}$$

$$4m^2 + 8m + 4 = 6m^2 + 24m + 36$$
$$2m^2 + 16m + 32 = 0\ (\div 2)$$
$$m^2 + 8m + 16 = 0$$
$$m = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2}$$
$$m = -4$$

4) Um vetor $\vec{v}$ do espaço forma com os vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ ângulos de 60º e 120º respectivamente. Determinar o vetor $\vec{v}$ sabendo que sua norma é 2.

Resolução:

Seja $\overrightarrow{v} = (x\ ,\ y\ ,\ z)$ o vetor procurado.

Como $\vec{v}$ forma ângulo de 60º com o vetor $\overrightarrow{i} = (1,\ 0\ ,\ 0)$, temos:

$$\cos 60^{o} = \frac{\overrightarrow{i} \bullet \overrightarrow{v}}{\left\|\overrightarrow{i}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{v}\right\|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{(1,\ 0\ ,\ 0) \bullet (x\ ,\ y\ ,\ z)}{1 \cdot 2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 1$$

Como $\vec{v}$ forma ângulo de 120º com o vetor $\overrightarrow{j} = (0\ ,1,\ 0)$, temos:

$$\cos 120^{o} = \frac{\overrightarrow{j} \bullet \overrightarrow{v}}{\left\|\overrightarrow{j}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{v}\right\|} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{(0\ ,1,\ 0) \bullet (x\ ,\ y\ ,\ z)}{1 \cdot 2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = -1$$

Por ultimo, para determinarmos o valor de z, usamos o fato de que $\left\|\overrightarrow{v}\right\| = 2$:

$$\sqrt{1^2 + (-1)^2 + z^2} = 2 \Rightarrow 1 + 1 + z^2 = 4 \Rightarrow z^2 = 2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{2}$$

Logo, $\overrightarrow{v} = \left(1,\ -1,\ \sqrt{2}\right)$ ou $\overrightarrow{v} = \left(1,\ -1,\ -\sqrt{2}\right)$

Obs.: Os ângulos formados entre um vetor e os eixos coordenados são chamados **ângulos diretores.**

5) Determinar o vetor $\vec{v}$, tal que: $\|\vec{v}\| = 4$; $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Oz e forma ângulo de 60º com o vetor $\vec{i}$ e ângulo obtuso com $\vec{j}$.

Resolução:

Seja $\vec{v} = (x\ ,\ y\ ,\ z)$ o vetor procurado.

Como $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo z, tomamos o vetor $\vec{k} = (0\ ,\ 0\ ,\ 1)$ como representante do eixo z. Portanto, temos:

$$\vec{v} \perp \vec{k} \iff \vec{v} \bullet \vec{k} = 0$$

$$(x\ ,\ y\ ,\ z) \bullet (0\ ,\ 0\ ,\ 1) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + z = 0 \Rightarrow z = 0$$

Como $\vec{v}$ forma ângulo de 60º com o vetor $\vec{i} = (1\ ,\ 0\ ,\ 0)$, temos:

$$\cos 60º = \frac{\vec{i} \bullet \vec{v}}{\|\vec{i}\| \cdot \|\vec{v}\|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{(1\ ,\ 0\ ,\ 0) \bullet (x\ ,\ y\ ,\ z)}{1 \cdot 4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 2$$

Como $\vec{v}$ forma ângulo obtuso (maior que 90º) com o vetor $\vec{j} = (0\ ,\ 1\ ,\ 0)$, temos:

$$\cos\theta < 0 \iff \vec{j} \bullet \vec{v} < 0 \iff (0\ ,\ 1\ ,\ 0) \bullet (2\ ,\ y\ ,\ 0) < 0 \iff y < 0 \quad (*)$$

Por ultimo, para determinarmos o valor de y, usamos o fato de que $\|\vec{v}\| = 4$:

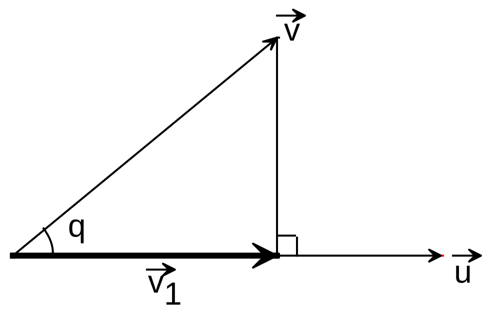
$$\sqrt{2^2 + y^2 + 0^2} = 4 \Rightarrow 4 + y^2 = 16 \Rightarrow y^2 = 12 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{3}$$

De $(*)$, temos que $y = -2\sqrt{3}$

Logo, $\vec{v} = \left(2\ ,\ -2\sqrt{3}\ ,\ 0\right)$

Projeção de um vetor sobre outro

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores não nulos e θ o ângulo entre eles:



Seja $\overrightarrow{v_1}$ é a **projeção ortogonal** de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{u}$.

Notação: $\overrightarrow{v_1} = \text{proj}_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}$

$$\text{proj}_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v} = \left(\frac{\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u}}\right)\overrightarrow{u}$$

Observação: veja a demonstração dessa fórmula em WINTERLE (2000).

Exemplos:

1) Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (3\,,0\,,1)$ e $\overrightarrow{v} = (-2\,,1\,,2)$, determinar $\text{proj}_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}$ e $\text{proj}_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}$.

Resolução:

$$\text{proj}_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v} = \left(\frac{\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u}}\right)\overrightarrow{u} = \left(\frac{(-2)\cdot 3 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1}{3\cdot 3 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1}\right)(3\,,0\,,1) = \left(\frac{-4}{10}\right)(3\,,0\,,1) =$$
$$= \left(-\frac{2}{5}\right)(3\,,0\,,1) = \left(-\frac{6}{5}\,,0\,,-\frac{2}{5}\right)$$

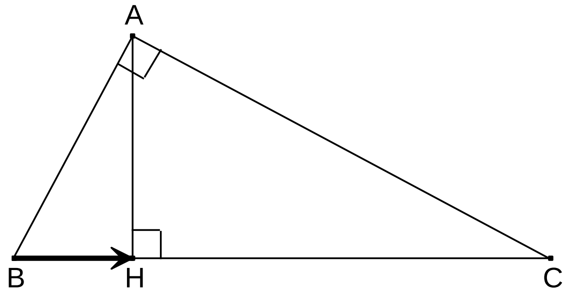
$$\text{proj}_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \left(\frac{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{v}}\right)\overrightarrow{v} = \left(\frac{-4}{(-2)\cdot(-2) + 1\cdot 1 + 2\cdot 2}\right)(-2\,,1\,,2) = \left(\frac{-4}{9}\right)(-2\,,1\,,2) =$$
$$= \left(-\frac{4}{9}\right)(-2\,,1\,,2) = \left(\frac{8}{9}\,,-\frac{4}{9}\,,-\frac{8}{9}\right)$$

2) Sejam os pontos A(-1 , -1 , 2); B(2 , 1 , 1) e C(m , -5 , 3).

a) Para que valor de m o triângulo ABC é retângulo em A?

b) Determinar o ponto H, pé da altura relativa ao vértice A.

Resolução:



a) Para que o triângulo ABC seja retângulo em A, precisamos que o vetor $\overrightarrow{AB}$ seja ortogonal ao vetor $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$$

(3 , 2 , -1) • (m + 1 , - 4 , 1) = 0

3m + 3 – 8 – 1 = 0

3m = 6

m = 2

b) Para determinarmos o ponto H, precisamos, em primeiro lugar, determinar o vetor $\overrightarrow{BH}$ que é a projeção do vetor $\overrightarrow{BA}$ sobre o vetor $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (-3 , -2 , 1)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (0 , -6 , 2)$$

$$\overrightarrow{BH} = \text{proj}_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{BA} = \left(\frac{\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BC}} \right) \overrightarrow{BC} = \left(\frac{(-3)\cdot 0 + (-2)\cdot(-6) + 1\cdot 2}{0\cdot 0 + (-6)\cdot(-6) + 2\cdot 2} \right) (0 , -6 , 2) =$$

$$= \left(\frac{14}{40} \right) (0 , -6 , 2) = \left(\frac{7}{20} \right) (0 , -6 , 2) = \left(0 , -\frac{42}{20} , \frac{14}{20} \right) = \left(0 , -\frac{21}{10} , \frac{7}{10} \right)$$

Como $\overrightarrow{BH}$ = H – B, temos:

H = $\overrightarrow{BH}$ + B

$$H = \left(0 , -\frac{21}{10} , \frac{7}{10} \right) + (2 , 1 , 1) = \left(2 , -\frac{11}{10} , \frac{17}{10} \right)$$

3) Sejam A(2 , 1 , 3); B(m , 3 , 5) e C(0 , 4 , 1) vértices de um triângulo. Determine:

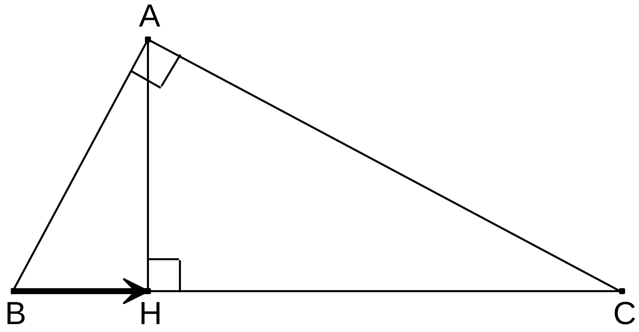
a) O valor de m para que o triângulo ABC seja retângulo em A.

b) Calcular a medida da projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC.

c) Determinar o ponto H, pé da altura relativa ao vértice A.

d) Mostrar que AH $\perp$ BC.

Resolução:



a) Para que o triângulo ABC seja retângulo em A, precisamos que o vetor $\overrightarrow{AB}$ seja ortogonal ao vetor $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$$

(m - 2 , 2 , 2) • (- 2 , 3 , - 2) = 0

- 2m + 4 + 6 – 4 = 0

- 2m = - 6

m = 3

b) A medida da projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC é a norma do vetor $\overrightarrow{BH}$ que é a projeção do vetor $\overrightarrow{BA}$ sobre o vetor $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (-1 , -2 , -2)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (-3 , 1 , -4)$$

$$\overrightarrow{BH} = \text{proj}_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{BA} = \left(\frac{\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BC}} \right) \overrightarrow{BC} = \left(\frac{(-1)\cdot(-3)+(-2)\cdot 1+(-2)\cdot(-4)}{(-3)\cdot(-3)+1\cdot 1+(-4)\cdot(-4)} \right)(-3 , 1 , -4) =$$

$$= \left(\frac{9}{26} \right)(-3 , 1 , -4) = \left(-\frac{27}{26} , \frac{9}{26} , -\frac{36}{26} \right)$$

Logo,

$$\left\|\overrightarrow{BH}\right\| = \sqrt{\left(-\frac{27}{26}\right)^2 + \left(\frac{9}{26}\right)^2 + \left(-\frac{36}{26}\right)^2} = \sqrt{\frac{729+81+1296}{26^2}} = \sqrt{\frac{2106}{26^2}} = \frac{9\sqrt{26}}{26} \text{ u.c.}$$

c) Como $\overrightarrow{BH}$ = H – B, temos:

H = $\overrightarrow{BH}$ + B

H = $\left(-\frac{27}{26}, \frac{9}{26}, -\frac{36}{26}\right) + (3, 3, 5) = \left(\frac{51}{26}, \frac{87}{26}, \frac{94}{26}\right)$

d) $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{BC} = 0$

De fato:

$$\left(-\frac{1}{26}, \frac{61}{26}, \frac{16}{26}\right) \bullet (-3, 1, -4) = \frac{3}{26} + \frac{61}{26} - \frac{64}{26} = 0$$

REFERÊNCIAS

CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*. São Paulo: Pearson, 2010.

STEINBRUCHY, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica.* São Paulo: Makron Books, 1987.

WINTERLE, Paulo. *Vetores e Geometria Analítica*. São Paulo: Makron Books, 2000.