

UFFS - Ciência da Computação - Matemática Discreta
Trabalho 3 - Peso: 1,0 - Data de entrega: até o dia 07/06/2023

Recados: O trabalho poderá ser entregue individualmente ou em dupla. Não serão aceitos trabalhos digitados e nem trabalhos entregues fora do prazo.

1ª Questão

(1) Quais destas relações em $A = \{0, 1, 2, 3\}$ são relações de equivalência (isto é, relação reflexiva, simétrica e transitiva)? Justifique sua resposta.

(i) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

(ii) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

(2) Quais são as classes de equivalência da (das) relação (relações) de equivalência do Exercício 1?

2ª Questão

Por definição, a congruência módulo 5 é dada por:

$$a \equiv b \pmod{5} \iff 5 \text{ divide } a - b \iff a - b = 5 \cdot k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \iff a = 5 \cdot k + b.$$

Exercício 1: Use que a congruência módulo 5 é uma relação de equivalência em \mathbb{Z} para calcular as cinco classes de equivalência distintas desta relação, que formam uma partição de \mathbb{Z} .

Aplicação: Aritmética Inteira de um Computador

Um número inteiro é armazenado como uma sequência de bits (0 e 1) em um único local de memória. Cada computador aloca um número fixo de bits para um único local de memória (dependendo de sua arquitetura). Quanto maior o inteiro mais bits são necessários para representá-lo. Cada máquina tem uma limitação sobre o tamanho dos inteiros que pode armazenar.

Suponha que $n - 1$ é o tamanho máximo e que $x, y \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq x \leq n - 1$ e $0 \leq y \leq n - 1$.

Se $x + y$ for maior que o tamanho máximo ela não pode ser armazenada. Como alternativa o computador pode efetuar uma soma módulo n e encontrar o resto

r quando $x + y$ for dividido por n . Assim,

$$x + y = qn + r \quad \text{com} \quad 0 \leq r < n \quad \text{ou} \\ (x + y) - r = qn \quad \text{que é} \quad x + y \equiv r \pmod{n}.$$

Observamos que $x + y$ e r são sequências de bits diferentes mas estão na mesma classe de equivalência $[x + y]$ e, como $0 \leq r < n$, r também pode ser armazenado no computador, enquanto $x + y$ não.

O sistema pode dar ou não uma mensagem do tipo *integer overflow* se $x + y$ for grande demais para ser armazenado e é necessário usar a soma módulo n .

Exercício 2: Se 4 é o maior inteiro que pode ser armazenado em um (micro) computador, que valor será armazenado para $3+4$ se for utilizada a soma congruência módulo 5?

3ª Questão

Seja x_n é o número de cadeias de bits $\{0, 1\}$ de extensão n que não tem dois 0s consecutivos.

(1) Calcule x_1 , x_2 e x_3 .

(2) Mostre que uma relação de recorrência para o número de cadeias de bits de extensão n que não tem dois 0s consecutivos é

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n,$$

onde x_n é o número de cadeias de bits de extensão n que não tem dois 0s consecutivos.

(3) Resolva a recorrência

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0.$$

4ª Questão Determine se as funções dadas na sequência são bijetoras. Justifique sua resposta.

(i) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 2x + 1$.

(ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 1$.

BOM TRABALHO!!!!!!