Circuitos Lógicos
Álgebra Booleana
Simplificação de circuitos lógicos

Prof.: Daniel D. Silveira

Álgebra de Boole

- Variáveis booleanas são representadas através de letras e podem assumir dois apenas dois valores 0 e 1
- Expressão booleana é uma expressão matemática cujas variáveis são booleanas
- Através de postulados, propriedades, teoremas fundamentais e identidades da álgebra de Boole é possível a simplificação das expressões que representam os circuitos lógicos

Postulados

- Postulado da complementação

Seja $\overline{A}$ o complemento de A:

Se $A=0$, logo $\overline{A}=1$

Se $A=1$, logo $\overline{A}=0$

Através do postulado, estabelecemos a seguinte identidade:

Se $A=0$, logo $\overline{A}=1$, e se $\overline{A}=1$, logo $A=0$

Se $A=1$, logo $\overline{A}=0$, e se $\overline{A}=0$, logo $A=1$

Assim sendo, podemos escrever: $\overline{\overline{A}}=A$

Postulados

- Postulado da adição: As regras da adição na álgebra de Boole são:

  1º) 0+0=0
  2º) 0+1=1
  3º) 1+0=1
  4º) 1+1=1

Através do postulado podemos definir as seguintes identidades:

A+0=A, se A=0=>0+0=0 ; se A=1=>1+0=1

A+1=1, se A=0=>0+1=1 ; se A=1=>1+1=1

A+A=A, se A=0=>0+0=0 ; se A=1=>1+1=1

$A+\overline{A}=1$, se A=0=>0+1=1 ; se A=1=>1+0=1

Postulados

- Postulado da Multiplicação: As regras da multiplicação booleana são

1º) 0.0=0
2º) 0.1=0
3º) 1.0=0
4º) 1.1=1

Através do postulado, podemos estabelecer as identidades:

A.0=0, se A=0=>0.0=0; se A=1=> 0.1=0

A.1=A, se A=0=>0.1=0; se A=1=> 1.1=1

A.A=A, se A=0=>0.0=0; se A=1=> 1.1=1

$A.\overline{A}$=0, se A=0=>0.1=0; se A=1=> 1.0=0

Propriedades

- Propriedade comutativa na adição:

$$A+B=B+A$$

A	B	A + B	B + A
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

- Propriedade comutativa na multiplicação:

$$A.B=B.A$$

A	B	A . B	B . A
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Propriedades

- Propriedade associativa na adição:

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$$

A	B	C	A+(B+C)	(A+B)+C	A+B+C
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Propriedades

- Propriedade associativa na multiplicação:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot B \cdot C$$

A	B	C	A.(B.C)	(A.B).C	A.B.C
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Propriedades

- Propriedade distributiva:

$$A.\,(B + C) = A\,.\,B + A\,.\,C$$

A	B	C	A(B+C)	AB + AC
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Teoremas de De Morgan

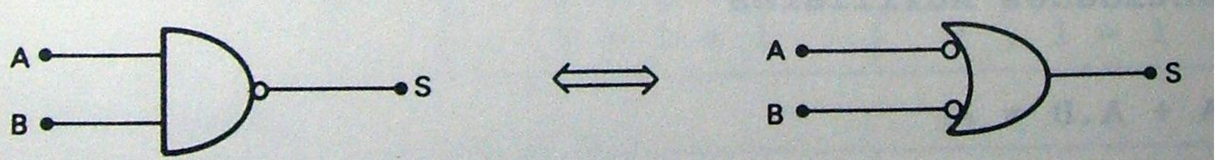
- O complemento do produto é igual a soma dos complementos

$$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$$

A	B	$\overline{A.B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

$\overline{A.B}$ → porta NE

$\overline{A}+\overline{B}$ → porta OU com inversores nas entradas.



$$\overline{A.B.C...N} = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + ... + \overline{N})$$

Teoremas de De Morgan

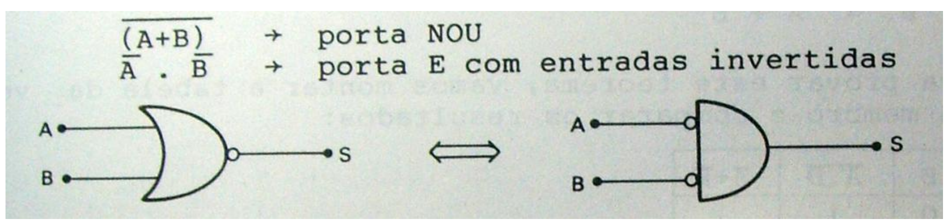
- O complemento do a soma é igual ao produto dos complementos (extensão do primeiro teorema)

Seja o 1o. Teorema: $\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$

Reescrevendo assim: $A.B = \overline{(\overline{A} + \overline{B})}$

E chamando $\overline{A}$ de *X* e $\overline{B}$ de *Y*

Tem-se o 2o teorema: $\overline{X}.\overline{Y} = \overline{X+Y}$



$$\overline{(A+B+C+...+N)} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}...\overline{N}$$

Identidades auxiliares

- A + AB=A => A(1+B)=A

$$A+\overline{A}.B = A+B$$

$$A+\overline{A}.B = \overline{\overline{A+\overline{A}.B}}$$

Identidade: $\overline{\overline{A}} = A$

$$\overline{\overline{A+\overline{A}.B}} = \overline{\overline{A}.(\overline{\overline{A}.B})}$$

2o Teorema de De Morgan

$$= \overline{\overline{A}.(A+\overline{B})}$$

1o Teorema de De Morgan

$$= \overline{(\overline{A}.A+\overline{A}.\overline{B})}$$

Propriedade distributiva e identidade $A.\overline{A} = 0$

$$= \overline{\overline{A}.\overline{B}}$$

1o Teorema de De Morgan

$$= A+B$$

$$A+\overline{A}.B = A+B$$

Identidades auxiliares

$$(A+B).(A+C)=A+B.C$$

Propriedades utilizadas:

$$(A+B).(A+C)=A(A+B)+C(A+B)$$

Distributiva

$$=A.A+A.B+A.C+B.C$$

Distributiva

$$=A+A.B+A.C+B.C$$

A.A=A

$$=A+A.(B+C)+B.C$$

$$=A.(1+B+C)+C.B$$

1+A=1 e A.1=A

$$=A.1+C.B$$

$$\therefore (A+B).(A+C)=A+BC$$

Quadro Resumo

Postulados		
Complementação	Adição	Multiplicação
A=0 $\bar{A}$=1	0+0=0	0.0=0
A=1 $\bar{A}$=0	0+1=1	0.1=0
	1+0=1	1.0=0
	1+1=1	1.1=1

Identidades		
Complementação	Adição	Multiplicação
$\bar{\bar{A}}=A$	A+0=A	A.0=0
	A+1=1	A.1=A
	A+A=A	A.A=A
	A+$\bar{A}$=1	A.$\bar{A}$=0

Propriedades

Comutativa:
A+B=B+A   A.B=B.A

Associativa:
A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C
A.(B.C)=(A.B).C=A.B.C

Distributiva: A(B+C)= AB + AC

Teoremas de De Morgan
$\overline{A.B} = \bar{A}+\bar{B}$
$\overline{A+B} = \bar{A}.\bar{B}$

Identidades auxiliares
A+AB=A
A+$\bar{A}B = A + B$
(A+B).(A+C)=A+BC

Simplificação de Expressões Booleanas

- Simplificações de expressões implicam em simplificações de circuitos
- São possíveis dois métodos para se realizar simplificações de expressões:

  Álgebra de Boole

  Mapas de Veitch-Karnaugh

Simplificação de expressões booleanas

- Exemplo

Seja simplificar a expressão:

$$S = ABC + A\overline{C} + A\overline{B}$$

$$S = A(BC + \overline{C} + \overline{B})$$ Evidenciando o termo A

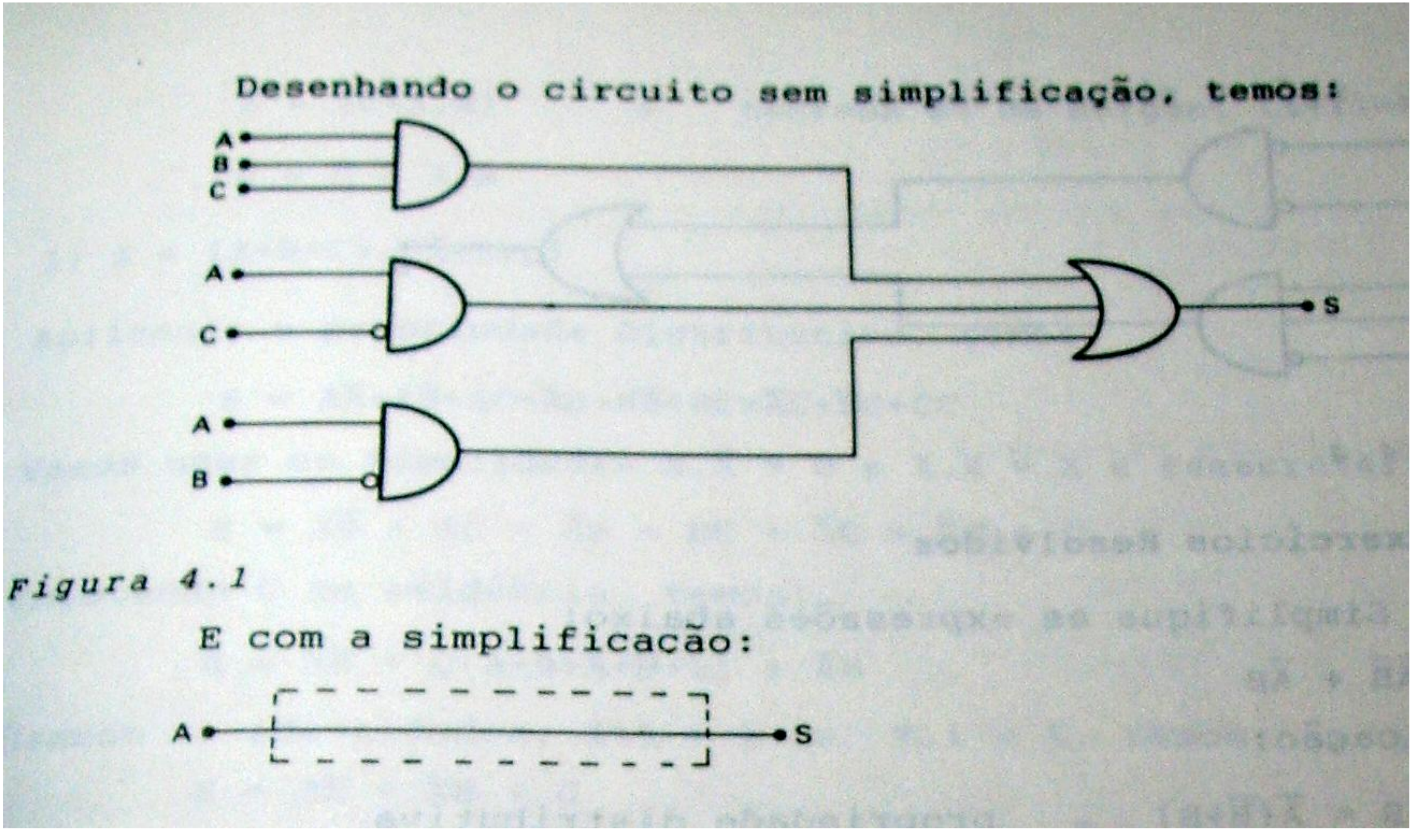
$$S = A[BC + (\overline{C} + \overline{B})]$$ Associativa

$$S = A[BC + \overline{\overline{(\overline{C} + \overline{B})}}]$$ $\overline{\overline{A}} = A$

$$S = A[BC + (\overline{BC})]$$ De Morgan e, chamando BC de Y

$$S = A[Y + \overline{Y}] = A$$

Simplificação de expressões booleanas



Exercícios propostos

Simplifique as expressões abaixo:

$$S1 = (A + B + C).(\overline{A} + \overline{B} + C)$$

$$S2 = \left(\overline{\overline{AC} + B + D}\right) + C\left(\overline{ACD}\right)$$

$$S3 = \left[\overline{(A + B).C}\right] + \left[\overline{D(C + B)}\right]$$

$$S4 = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}).(A + B + \overline{C})$$

$$S5 = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + ABC + AB\overline{C}$$

$$S6 = \{\overline{[\overline{A(B + C)}].D}\}.\left(\overline{A + B}\right)$$