



Preditiva.ai

# Probabilidades

## Introdução

Em nossas vidas temos basicamente dois tipos de fenômenos: **Determinísticos** e **Aleatórios**.

### Fenômenos Determinísticos

Quando temos **apenas um resultado** possível como consequência de uma ação.

#### Exemplos:

- Lucro de uma empresa
- Fatura de cartão de crédito
- Água aquecida a 100º C no nível do mar entra em ebulição
- Entre outros...

### Fenômenos Aleatórios

Quando temos **mais de um resultado** possível como consequência de uma ação.

#### Exemplos:

- Previsão do tempo
- Resultado de um campeonato
- Volume de vendas no mês que vem
- Pessoas que pedirão demissão
- Ações que serão julgadas improcedentes
- Efetividade de um tratamento médico
- Entre outros...

Fenômenos **aleatórios** são muito recorrentes na natureza. Logo, estudar técnicas que “quantificam” sua **probabilidade de ocorrência** é fundamental.

A teoria matemática utilizada para se **estudar a incerteza oriunda de fenômenos de caráter aleatório** é denominada **Probabilidade**.

Existem várias abordagens para estudar probabilidades, sendo as 3 principais:

- ☐ Teoria Clássica
- ☐ Teoria Frequentista
- ☐ Teoria Axiomática



Preditiva.ai

# Probabilidades Teoria Clássica

# Probabilidades

## Teoria Clássica



Em 2019 o IBGE divulgou um estudo no qual apresentou a quantidade de **homens** e **mulheres** com e sem **restrição** de acesso à Educação<sup>(1)</sup>. Um resumo desses dados é apresentado abaixo (em milhares).

Gênero	<u>Com</u> Restrição (C)	<u>Sem</u> Restrição (S)	Total
Mulheres (M)	28.708	78.813	<b>107.521</b>
Homens (H)	28.695	71.638	<b>100.333</b>
<b>Total</b>	<b>57.368</b>	<b>150.486</b>	<b>207.854</b>

Sorteando uma pessoa **aleatoriamente**, quais são os **possíveis resultados** que podemos obter considerando **Gênero** e **Restrição à Educação**?

# Probabilidades

## Teoria Clássica – Espaço Amostral



Preditiva.ai

Em 2019 o IBGE divulgou um estudo no qual apresentou a quantidade de **homens** e **mulheres** com e sem **restrição** de acesso à Educação<sup>(1)</sup>. Um resumo desses dados é apresentado abaixo (em milhares).

	Gênero	<u>Com</u> Restrição (C)	<u>Sem</u> Restrição (S)	Total	
Mulher e <u>Com</u> Restrição (M,C)	Mulheres (M)	28.708	78.813	107.521	Mulher e <u>Sem</u> Restrição (M,S)
	Homens (H)	28.695	71.638	100.333	
	Total	57.368	150.486	207.854	

Homem e Com Restrição (H,C)

Homem e Sem Restrição (H,S)

O conjunto de **todos os possíveis resultados** de um fenômeno de caráter aleatório é chamado de **Espaço Amostral**.

O **Espaço Amostral** deste estudo é definido como:  $\{(M,C),(M,S),(H,C),(H,S)\}$

# Probabilidades

## Teoria Clássica – Evento



Podemos estar interessados em subconjuntos do **Espaço Amostral**:

- **Evento A** - Mulher:  $\{(M,C),(M,S)\}$
- **Evento B** - Homem e Com Restrição:  $\{(H,C)\}$

**Espaço Amostral**

$\{(M,C),(M,S),(H,C),(H,S)\}$

Gênero	<u>Com</u> Restrição (C)	<u>Sem</u> Restrição (S)	Total
Mulheres (M)	28.708	78.813	107.521
Homens (H)	28.695	71.638	100.333
Total	57.368	150.486	207.854

Mulher (M)

Homem e Com Restrição (H,C)

Qualquer **subconjunto** do **Espaço Amostral** de um fenômeno de caráter aleatório é chamado de **Evento**.

Em qualquer teoria de probabilidades, deseja-se **atribuir um valor à um evento do espaço amostral**.

Na **teoria clássica**, consideramos que **todos os eventos têm a mesma chance de ocorrência**.

$$P(\text{evento de interesse}) = \frac{\text{Tamanho do evento de interesse}}{\text{Tamanho do espaço amostral}}$$

(Leia-se "Probabilidade do evento de interesse")



# Probabilidades

## Teoria Clássica – Evento



Sorteando uma pessoa **aleatoriamente**, qual a **probabilidade de ocorrência do Evento A**? E do **Evento B**?

Gênero	<u>Com</u> Restrição (C)	<u>Sem</u> Restrição (S)	Total
Mulheres (M)	28.708	78.813	107.521
Homens (H)	28.695	71.638	100.333
Total	57.368	150.486	207.854

**Evento A** - Mulher:  $\{(M,C),(M,S)\}$

$$P(\text{Mulher}) = \frac{28.708 + 78.813}{207.854} = 51,7\%$$

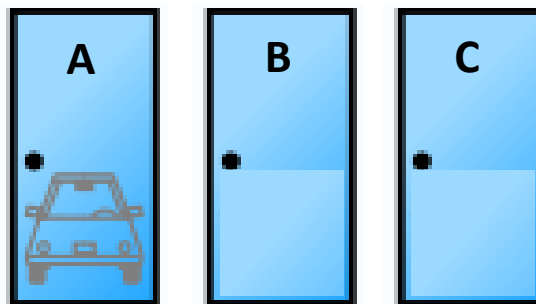
**Evento B** - Homem e Com Restrição:  $\{(H,C)\}$

$$P(\text{Homem e Com Restrição}) = \frac{28.695}{207.854} = 13,8\%$$

# Problema de Monty Hall ou “Porta da Esperança”

Neste famoso jogo, o jogador escolhe uma porta buscando o prêmio por trás dela.

O apresentador abre uma das outras duas portas e pergunta ao jogador: “Você **quer ficar** com a mesma porta ou **quer trocar**?”

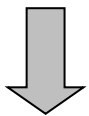
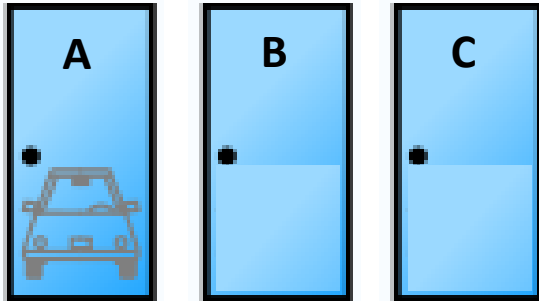


# Probabilidades

## Teoria Clássica



1ª Possibilidade

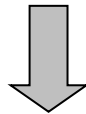
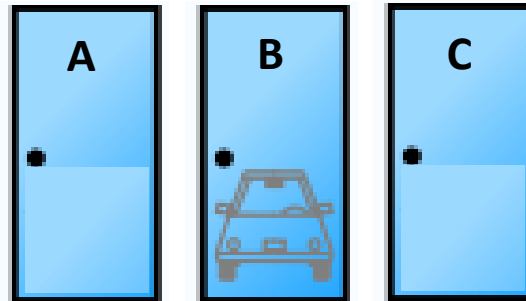


1. O jogador escolhe: **A**
2. O apresentador abre: **B ou C**
3. Se jogador trocar?: **Perde**

1. O jogador escolhe: **B**
2. O apresentador abre: **C**
3. Se jogador trocar?: **Ganha**

1. O jogador escolhe: **C**
2. O apresentador abre: **B**
3. Se jogador trocar?: **Ganha**

2ª Possibilidade

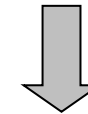
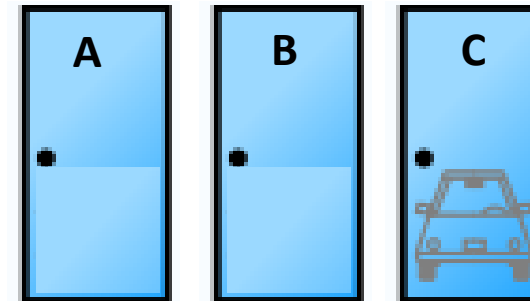


1. O jogador escolhe: **A**
2. O apresentador abre: **C**
3. Se jogador trocar?: **Ganha**

1. O jogador escolhe: **B**
2. O apresentador abre: **A ou C**
3. Se jogador trocar?: **Perde**

1. O jogador escolhe: **C**
2. O apresentador abre: **A**
3. Se jogador trocar?: **Ganha**

3ª Possibilidade



1. O jogador escolhe: **A**
2. O apresentador abre: **B**
3. Se jogador trocar?: **Ganha**

1. O jogador escolhe: **B**
2. O apresentador abre: **A**
3. Se jogador trocar?: **Ganha**

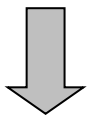
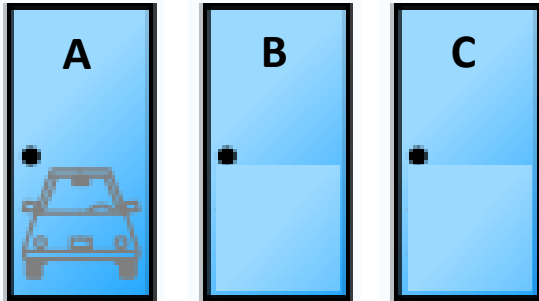
1. O jogador escolhe: **C**
2. O apresentador abre: **A ou B**
3. Se jogador trocar?: **Perde**

$$P(\text{Ganhar}) = 2/3 = 66\%$$

# Probabilidades

## Teoria Clássica

1ª Possibilidade

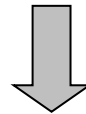
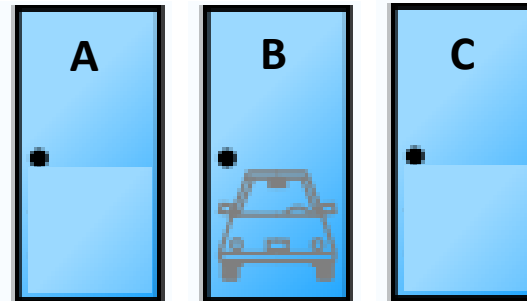


1. O jogador escolhe: **A**
2. O apresentador abre: **B ou C**
3. Se jogador **ficar**?: **Ganha**

1. O jogador escolhe: **B**
2. O apresentador abre: **C**
3. Se jogador **ficar**?: **Perde**

1. O jogador escolhe: **C**
2. O apresentador abre: **B**
3. Se jogador **ficar**?: **Perde**

2ª Possibilidade

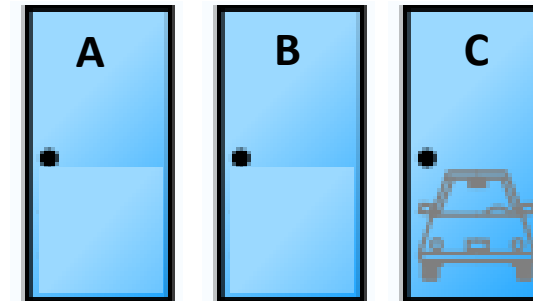


1. O jogador escolhe: **A**
2. O apresentador abre: **C**
3. Se jogador **ficar**?: **Perde**

1. O jogador escolhe: **B**
2. O apresentador abre: **A ou C**
3. Se jogador **ficar**?: **Ganha**

1. O jogador escolhe: **C**
2. O apresentador abre: **A**
3. Se jogador **ficar**?: **Perde**

3ª Possibilidade



1. O jogador escolhe: **A**
2. O apresentador abre: **B**
3. Se jogador **ficar**?: **Perde**

1. O jogador escolhe: **B**
2. O apresentador abre: **A**
3. Se jogador **ficar**?: **Perde**

1. O jogador escolhe: **C**
2. O apresentador abre: **A ou B**
3. Se jogador **ficar**?: **Ganha**

$$P(\text{Ganhar}) = 1/3 = 33\%$$

# Revisão

---

Vimos que a **Teoria Clássica de Probabilidades** tem como características:

- Todos os eventos têm a mesma probabilidade de ocorrência
- A probabilidade do evento de interesse é igual ao tamanho do evento de interesse dividido pelo tamanho do espaço amostral.

Como um exemplo, vimos que é bastante trivial resolver o **Problema de Monty Hall** usando a **Teoria Clássica**.





Preditiva.ai

# Probabilidades

## Teoria Frequentista

# Probabilidades

## Teoria Frequentista



Estudar Probabilidades sob a **teoria frequentista**, significa basear-se em um número suficiente de experimentos e **anotar a frequência de ocorrência** do evento de interesse.

**PEOPLE**  
SHOPPING



Imagine que você gostaria de saber qual é a "**taxa de compradores**" de uma loja.

**Qual experimento poderia ser realizado para verificar?**

# Probabilidades

## Teoria Frequentista



**Experimento:** Observar as pessoas que entram na loja e anotar quantos deles realizam compras.

**Conclusão:** A **probabilidade empírica**, ou seja, a frequência relativa de Compradores é de **cerca de 40%**.

Portanto, podemos dizer que quando uma pessoa entra na loja, a probabilidade dela realizar uma compra é de cerca de **40%**.

Qte de Pessoas que visitaram a loja	Comprou	Número de Compradores	Frequência Relativa de Compradores
1	Não	0	0,0%
2	Não	0	0,0%
3	Não	0	0,0%
4	Sim	1	25,0%
5	Não	1	20,0%
...	...	...	...
30	Sim	9	30,0%
...	...	...	...
50	Não	14	28,0%
...	...	...	...
100	Sim	35	35,0%
...	...	...	...
500	Não	202	40,4%
...	...	...	...
998	Não	404	40,5%
999	Não	404	40,4%
1000	Sim	405	40,5%



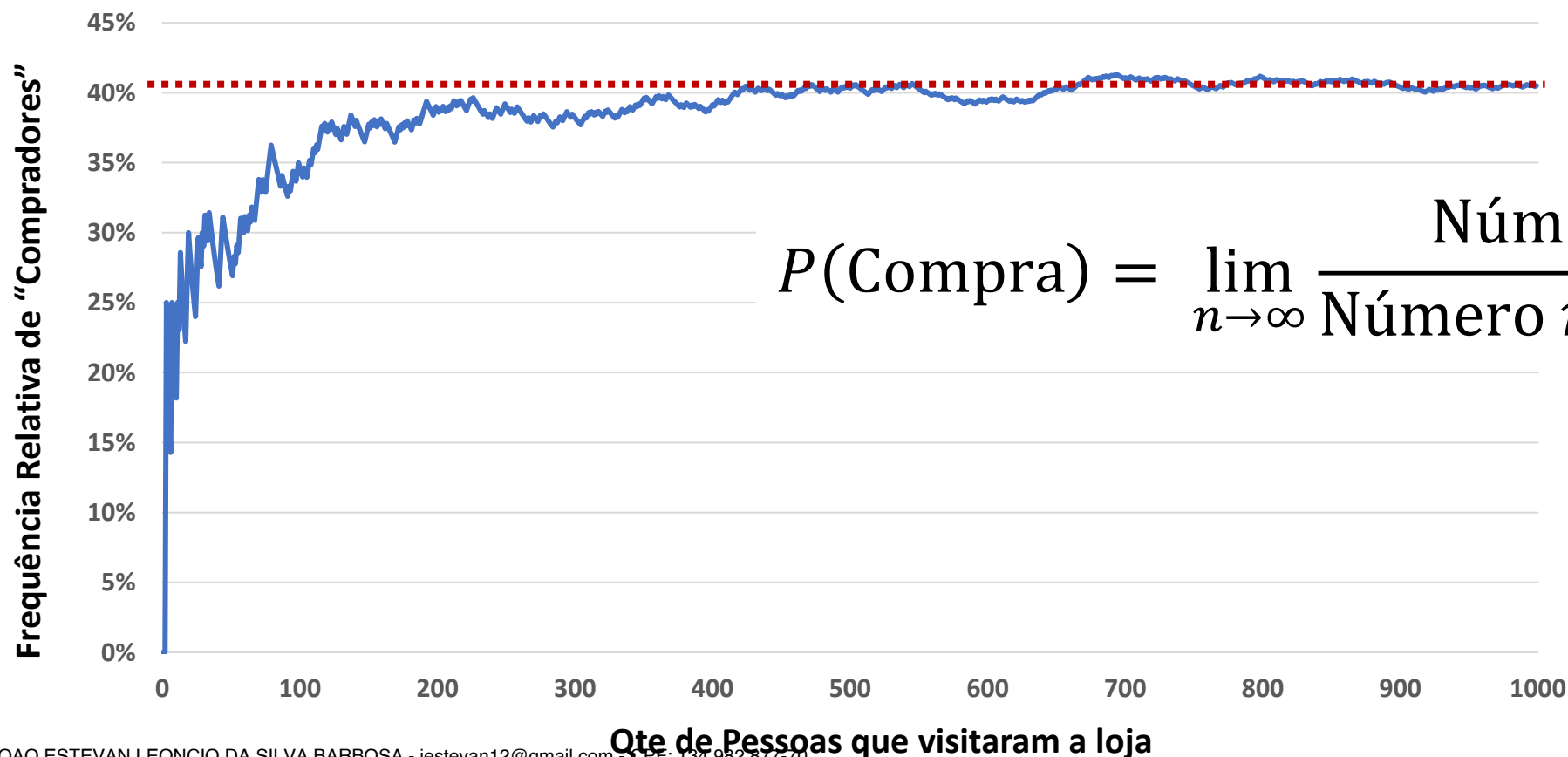
# Probabilidades

## Teoria Frequentista



Preditiva.ai

O ponto central da **Teoria Frequentista** é que a **Probabilidade** do evento de interesse é **confiável** ao se obter um **número suficiente de experimentos**.



Ou seja, em termos formais,

$$P(\text{Compra}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Número de Compras}}{\text{Número } n \text{ de pessoas na loja}}$$

Suponha que você estime a **probabilidade de 0,000001% de defeito** em um processo qualquer.

No entanto, a probabilidade real de defeito é **0,01%**. Você acha que realizou uma boa estimativa?

Nem sempre, pois com essa **diferença** teremos como **resultado**:

- 12 recém nascidos serão entregues para pais errados por dia
- Correio entregaria 30.000 encomendas erroneamente por dia
- 2,5 milhões de livros seriam entregues com as capas erradas ao ano
- Dois voos por dia pousariam mal só no aeroporto de Chicago
- 210 palavras do dicionário Aurélio estariam soletradas incorretamente
- 20.000 prescrições médicas estariam erradas por ano
- 880.000 cartões de crédito estariam com defeito no mundo
- 291 operações de marca-passo seriam feitas de forma errada por ano



Suponha q

No entanto

Nem semp

- 12 re
- Corre
- 2,5 m
- Dois
- 210
- 20.00
- 880.
- 291



Muitas vezes, cometemos o **erro de assumir como verdade uma probabilidade** sem antes verificar o experimento realizado para chegar à essa estimativa.

Como vimos, só podemos ter mais certeza do número quando temos uma quantidade  $N$  de experimentos “suficiente”. Mas qual  $N$  é suficiente? Estudaremos uma técnica adequada para estimar esse valor mais adiante.

Por enquanto, sempre tenha em mente o seguinte:  
**Qualquer probabilidade só é confiável quando temos um número SUFICIENTE de experimentos.**



# Revisão

---

Vimos que a **Teoria Frequentista de Probabilidades** se baseia no fato de que uma **estimativa de probabilidade** só é robusta quando temos um **número suficiente** de experimentos.

Pequenas desvios na estimação da probabilidade pode ter efeitos relevantes, considerando sua **frequência de realização**.





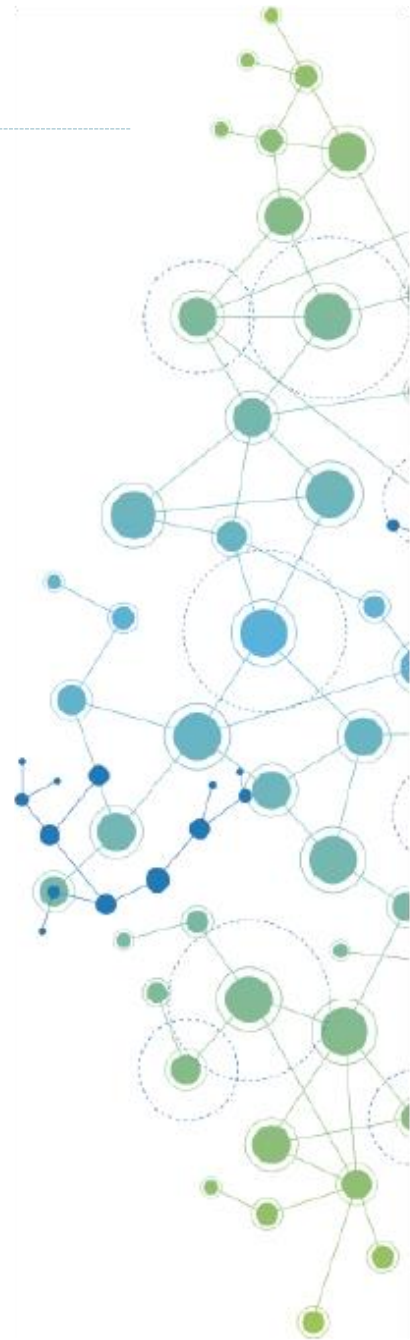
Preditiva.ai

# Probabilidades Teoria Axiomática

# O que você verá nessa aula?

---

- ☐ Introdução a Probabilidade
- ☐ Teoria Clássica
- ☐ Teoria Frequentista
- ☐ Teoria Axiomática
- ☐ Probabilidades: uma arma poderosa



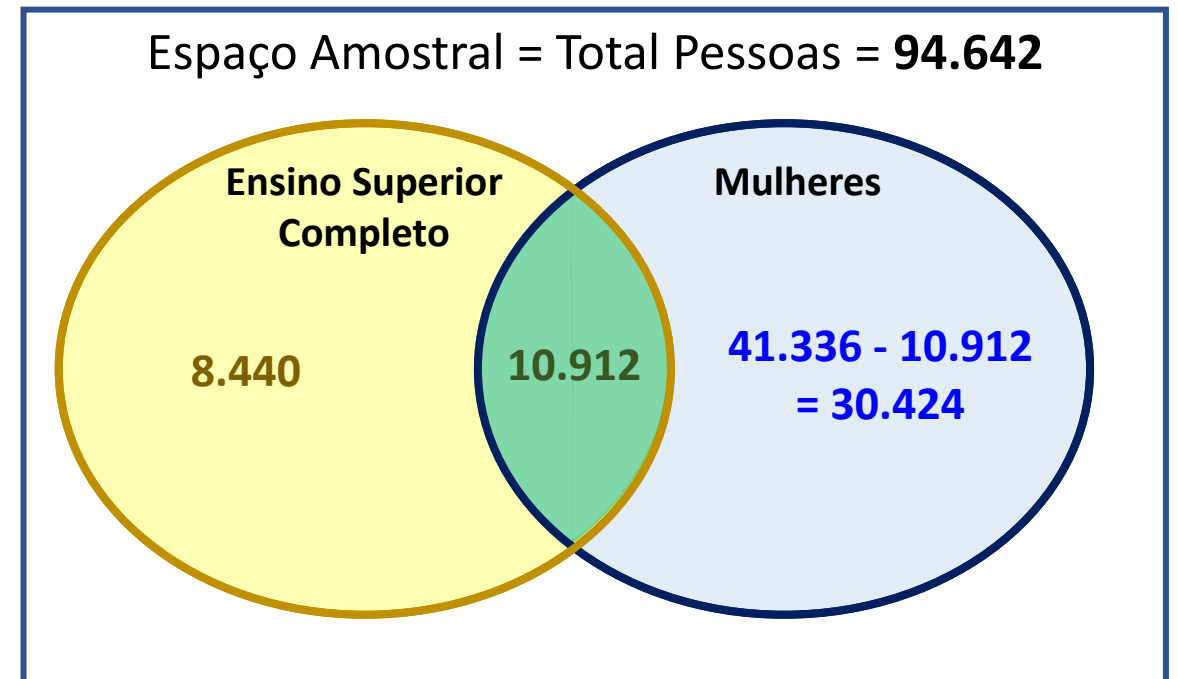
# Probabilidades

## Teoria Axiomática



O IBGE divulgou as estatísticas de 2019 sobre nível de instrução para pessoas de 14 anos ou mais, separadas por gênero:

Categorias	Nº Pessoas (mil)
<b>Mulheres</b>	<b>41.336</b>
<b>Ensino Superior Completo</b>	<b>10.912</b>
Homens	53.306
<b>Ensino Superior Completo</b>	<b>8.440</b>
<b>Total</b>	<b>94.642</b>

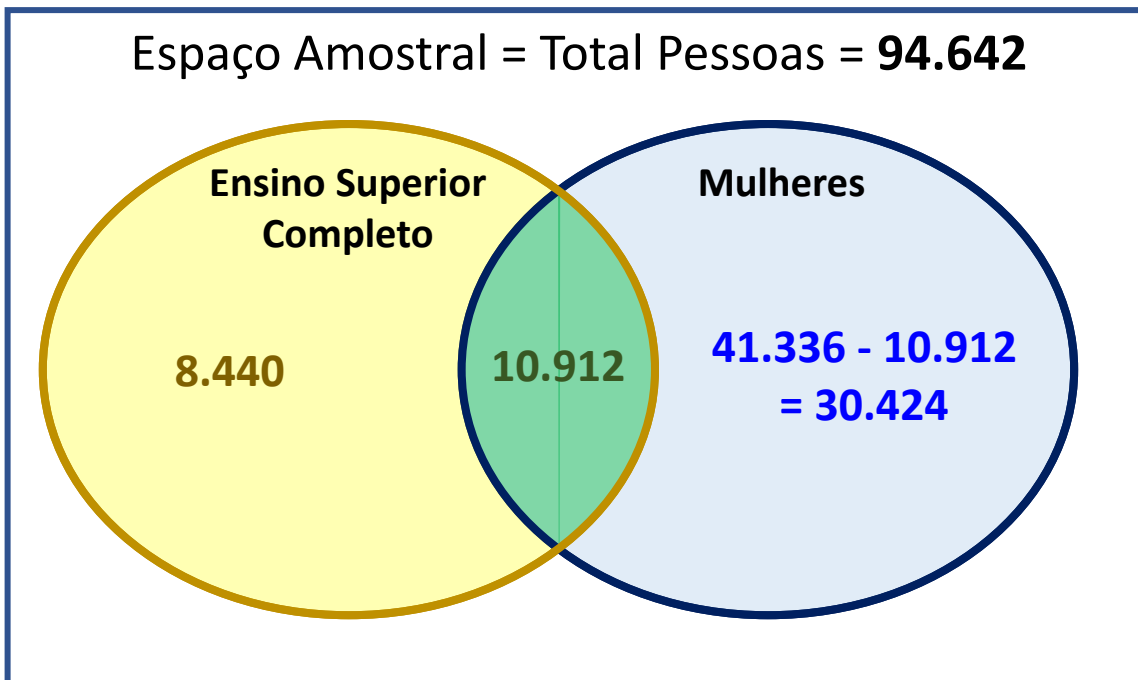


# Probabilidades

## Teoria Axiomática



Considerando o **Diagrama de Venn** construído, vamos então calcular as probabilidades dos seguintes eventos:



**Evento A:** Ensino Superior Completo

$$P(\text{Ensino Superior Completo}) = \frac{8.440 + 10.912}{94.642} = 20,4\%$$

**Evento B:** Mulheres

$$P(\text{Mulheres}) = \frac{10.912 + 30.424}{94.642} = 43,7\%$$

**Evento C:** Ensino Superior Completo e Mulheres

$$P(\text{Ens. Superior} \cap \text{Mulheres}) = \frac{10.912}{94.642} = 11,5\%$$

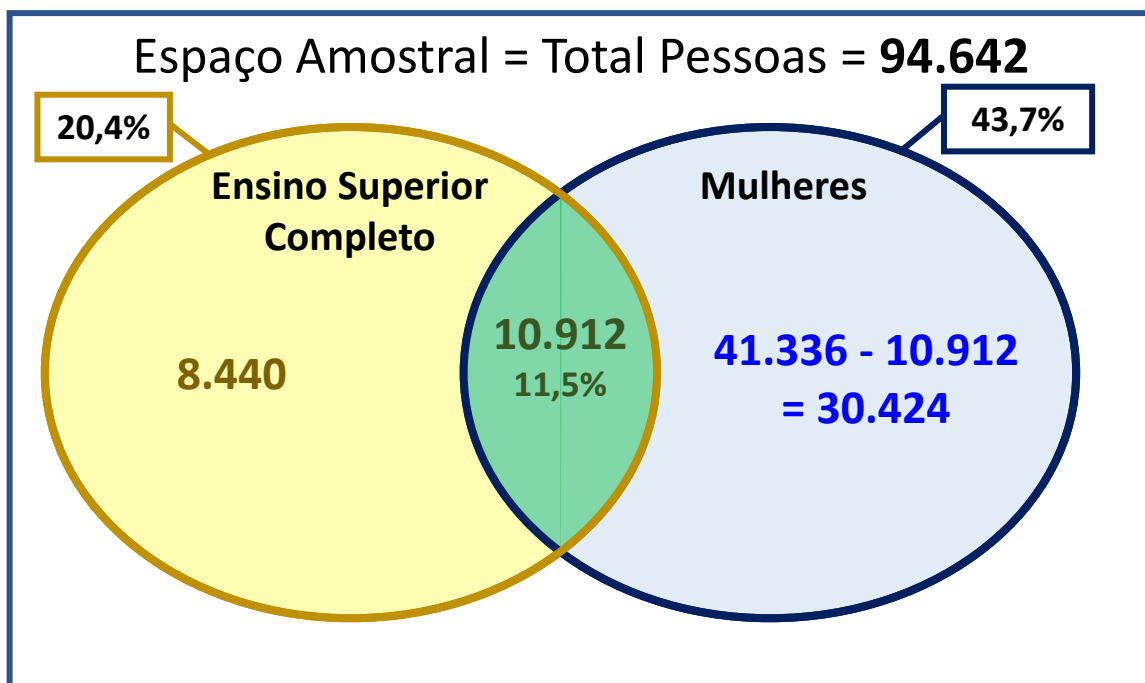


# Probabilidades

## Teoria Axiomática



Considerando o diagrama de Venn construído, vamos então calcular as probabilidades dos seguintes eventos:



**Evento D:** Superior Completo **ou** Mulheres

$$P(\text{Superior} \cup \text{Mulheres}) =$$

$$P(\text{Superior}) + P(\text{Mulheres}) - P(\text{Superior} \cap \text{Mulheres}) = 20,4\% + 43,7\% - 11,5\% = 52,6\%$$

**Evento E:** Mulheres **ou** Homens

$$P(\text{Mulheres} \cup \text{Homens}) =$$

$$P(\text{Mulheres}) + P(\text{Homens}) =$$

$$43,7\% + \frac{53.306}{94.642} = 100\%$$

# Probabilidades

## Teoria Axiomática



Embora a teoria Frequentista já resolva grande parte dos problemas para se estimar a probabilidade de um evento, pode-se **argumentar que não é possível garantir que essa probabilidade seja a mesma** em uma segunda ou terceira repetição do experimento.

Para eliminar esta dúvida, outra forma de estudar probabilidades é utilizando a **Teoria Axiomática**. Essa teoria baseia-se nos 4 axiomas (premissas incontestáveis) listados a seguir:

1)  $0 \leq P(\text{Evento}) \leq 1$

A probabilidade de **um evento** é um número entre 0 e 1.

2)  $P(\text{Espaço Amostral}) = 1$

A probabilidade de ocorrência de **pelo menos um dos eventos** do espaço amostral é igual a 1.

3)  $P(A + B) = P(A) + P(B)$

A probabilidade da **união dos eventos A e B** é igual a **soma das probabilidades de A e B**, se e somente se A e B **não tiverem chance de ocorrer simultaneamente**.

Ex.: Não é possível sair cara e coroa simultaneamente.

4)  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

A probabilidade da **união dos eventos A e B** é igual a **soma das probabilidades de A e B menos a probabilidade de ocorrência de A e B simultaneamente**.

Outra regra muito relevante é a **regra de multiplicação de probabilidades**:

$$P(\text{Evento } A \cap B) = P(A) * P(B)$$

**Importante:** Esta regra só é verdadeira **quando A e B são independentes**. Ou seja, quando a ocorrência de A não depende da ocorrência de B.

Exemplo: Qual a probabilidade de lançar **duas vezes** uma moeda e sair *cara* nas duas vezes ?

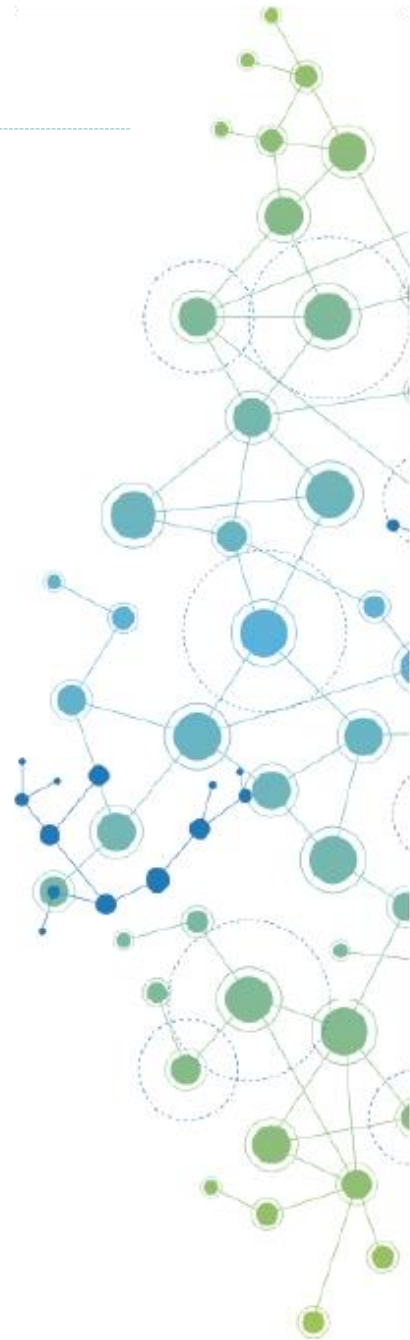
$$P(\text{Cara} \cap \text{Cara}) = P(\text{Cara}) * P(\text{Cara}) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\%$$

# Revisão

---

Vimos que a **Teoria Axiomática de Probabilidades** se utiliza de 4 premissas incontestáveis para o cálculo das probabilidade.

A **multiplicação de probabilidades** só pode ser realizada em eventos que sejam independentes.





Preditiva.ai

# Probabilidades

## Uma arma poderosa

“ A probabilidade **nunca** erra. Quem erra são as pessoas que **usam** a probabilidade...”

Autor desconhecido

Quando **mal usada**, a probabilidade pode causar **grandes problemas**. Vejamos alguns erros comuns:

**Erro 1)** Não entender a diferença dos conceitos a seguir:

## Evento possível

- ☐ Arrumar um bom emprego \$\$\$ sem formação.
- ☐ Ganhar na loteria!!!
- ☐ A TV pifar durante o período de garantia estendida.
- ☐ Um avião cair no mar e todos morrerem.



## Evento provável

- ☐ As melhores oportunidades ficam com os bem formados.
- ☐ Só ganhar dívidas e frustração.
- ☐ Funcionar durante anos e anos...
- ☐ Morrer no trânsito caótico de SP.

# Probabilidades

## Uma arma poderosa



Preditiva.ai

Você tem **quase 2.000 vezes mais chance de morrer em um acidente de carro** do que um de aviação\*.

Causa da morte - EUA 2017	Probabilidade
Doença cardíaca	16,6667%
Câncer	14,2857%
Doença Respiratória Inferior Crônica	3,7037%
Suicídio	1,1364%
Overdose de drogas	1,0417%
<b>Acidente de carro</b>	<b>0,9709%</b>
Cair	0,8772%
Bala perdida	0,3509%
Incidente de pedestres	0,1799%
Acidente de moto	0,1166%
Afogamento	0,0895%
Fogo ou fumaça	0,0678%
Intoxicação	0,0371%
Acidente de bicicleta	0,0247%
Acidente com armas	0,0117%
Insolação	0,0112%
Eletrocussão, Radiação, Temperaturas Extremas e Pressão	0,0064%
Objetos pontiagudos	0,0036%
Tempestade Cataclísmica	0,0032%
Superfícies e substâncias quentes	0,0022%
Picadas de vespas e abelhas	0,0021%
Ataque de cachorro	0,0009%
<b>Passageiros em um avião</b>	<b>0,0005%</b>
Relâmpago	0,0005%
Acidente de trem	0,0004%

**Estima-se\*\* que mais de 2.170 americanos morreram de acidentes de carro após 11/9 por terem deixado de voar de avião.**



Esse cálculo está correto?

A probabilidade de **um dos motores** de um avião falhar é de **1 em 100 mil**.  
Portanto, a probabilidade dos **2 falharem ao mesmo tempo** é de **1 em 10 Bilhões**,  
ou seja:

$$\frac{1}{100 \text{ mil}} \cdot \frac{1}{100 \text{ mil}} = \frac{1}{10 \text{ bilhões}}$$

Resposta: **Não!**

Motivo:

**Erro 2)** Pressupor que eventos **sejam** independentes **quando não são**.

## O que acha desse caso?

A **morte súbita de bebês é estimada: 1 em 8.500**. Quando mais de um caso como este acontecia na mesma família, um pediatra famoso chamado Roy Meadow era chamado para depor. Segundo Meadow, a **chance de 2 bebês morrerem na mesma família era de 1 em 73 milhões**, ou seja:

$$\frac{1}{8.500} \cdot \frac{1}{8.500} = \frac{1}{73 \text{ milhões}}$$

Com base nesse argumento, os júris colocaram muitos pais na cadeia no Reino Unido\*.

**Mais um caso** de pressupor que eventos **sejam** independentes **quando não são**.

Após amplo debate, o governo britânico **anunciou que reveria 258 julgamentos** nos quais os pais foram condenados por assassinar seus bebês.

**Agora imagine a seguinte situação:**

Um jogador de basquete acerta uma cesta, depois mais outra. A probabilidade de ele acertar a terceira cesta aumenta. **Verdadeiro ou falso?**

Uma **pesquisa\*** mostrou que **91% dos fãs** de basquete **acreditam** na “**mão quente**” e acham a afirmação acima verdadeira.

Infelizmente, essa sequência de acertos **não tem comprovação estatística.**

**Motivo:**

**Erro 3)** Pressupor que eventos **não sejam** independentes **quando de fato são.**

Esse é o porquê da “banca sempre ganhar” em um cassino.



Preditiva.ai