1a. Lista de Exercícios SMA 0354 - Cálculo II - Curso Coordenado
atual.: segundo semestre de 2020

Integrais Indefinidas

Exercício 1 *Usando a técnica por substituição, encontre as integrais indefinidas:*

a) $\displaystyle\int \frac{8\,x^2}{x^3+2}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int x\sqrt{x-4}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int (2\,x+3)^{11}\,dx$ *d)* $\displaystyle\int \frac{t^5+2\,t}{\sqrt{t^6+6\,t^2}}\,dt$

e) $\displaystyle\int \left(\frac{2\,z^2}{z^3+5} - \frac{3\,z}{z^2-10}\right) dz$ *f)* $\displaystyle\int \left[\sqrt{4\,t} + \cos(2\,t)\right] dt$ *g)* $\displaystyle\int \frac{\cos(t)}{-\operatorname{sen}^2(t)}\,dt$ *h)* $\displaystyle\int \left(2\,z^2-3\right)^5 z dz$

i) $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$ *j)* $\displaystyle\int e^{\cos(x)}\sin(x)\,dx$ *k)* $\displaystyle\int \sin(x)\tan(\cos(x))\,dx$ *l)* $\displaystyle\int \frac{(ln(x))^4}{x}\,dx$

m) $\displaystyle\int \cos^3(x)\,dx$

Exercício 2 *Utilizando a técnica por integração por partes na integral indefinida, resolva:*

a) $\displaystyle\int \ln(x)\,dx$ *b)* $\displaystyle\int x\,e^{3\,x}dx$ *c)* $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen}(3x)\,dx$ *d)* $\displaystyle\int e^x\,\cos(x)\,dx$

e) $\displaystyle\int e^x\,\operatorname{sen}(x)\,dx$ *f)* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2\,x)}{e^x}\,dx$ *g)* $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(x)\,dx$ *h)* $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}(x)\,dx$

i) $\displaystyle\int x\ln(x)\,dx$ *j)* $\displaystyle\int x\operatorname{arctg}(x)\,dx$ *k)* $\displaystyle\int x\operatorname{arcsen}(x)\,dx$

Integrais Definidas

Exercício 3 *Encontrar o valor das integrais definidas:*

a) $\displaystyle\int_{-3}^{2} |x+1|\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ *c)* $\displaystyle\int_7^{12} dx$ *d)* $\displaystyle\int_1^0 t^2\left(t^{\frac{1}{3}} - \sqrt{t}\right) dt$

e) $\displaystyle\int_3^2 \frac{x^2-1}{x-1}\,dx$ *f)* $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ *g)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\left(1-v^2\right)^2}\,dv$ *h)* $\displaystyle\int_0^1 x^2\,e^x\,dx$

i) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$ *j)* $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(x)\,e^{[\cos(x)+1]}\,dx$ *k)* $\displaystyle\int_1^2 x\,2^x\,dx$ *l)* $\displaystyle\int_0^1 x\,(2\,x+3)^{99}\,dx$

Exercício 4 *Consideremos uma partícula que se desloca sobre o eixo x com equação $x = x(t)$ e com velocidade $v = v(t)$ contínua em $[a\,,b]$. Qual é uma primitiva de v?*
(a) A diferença $x(b) - x(a)$ é o deslocamento da partícula entre os instantes $t = a$ e $t = b$. Como o Teorema Fundamental do Cálculo pode ser utilizado para calcular o deslocamento de uma partícula?
Definamos o espaço percorrido pela partícula entre os instantes $t = a$ e $t = b$ por $\displaystyle\int_a^b |v(t)|\,\mathrm{dt}$.
(b) Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = -t^2 + t$, para $t \geq 0$. Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t = 0$ e $t = 2$.
(c) Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = 2t - 3$, para $t \geq 0$. Calcule o deslocamento entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$. Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$. Descreva o movimento realizado pela partícula entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$.

Exercício 5 *Seja $f : [-a\,,a] \to \mathbb{R}$ uma função integrável.*

1. *Mostre que se f é uma função par, então*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.$$

2. *Mostre que se f é uma função ímpar, então*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,.$$

Exercício 6 *Estude a paridade das funções que aparecem no integrando das integrais definidas abaixo e depois calcule-as:*

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^2+4\right)\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-17\pi/4}^{17\pi/4} \left[\operatorname{sen}\left(x^3\right) - x^7\,\cos(x)\right]\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^{17}}{x^2+1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh\left(x^3-x\right)}dx$

Exercício 7 *Sendo $f:[0,9]\to\mathbb{R}$ contínua, calcule* $\displaystyle\int_{-3}^{3} xf(x^2)dx.$

Exercício 8 *Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função w-periódica e integrável em qualquer intervalo limitado da reta, mostre que*

$$\int_{0}^{w} f(x)\,dx = \int_{a}^{a+w} f(x)\,dx$$

para cada $a\in\mathbb{R}$ e para um real w fixados.

Exercício 9 *Verifique que para todo natural $n>1$, temos* $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen}^n(t)\,\mathrm{dt} = \frac{n-1}{n}\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2}(t)\,\mathrm{dt}.$

Exercício 10 *Determine se a função f é integrável no intervalo $[a,b]$.*

a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ *e* $[a,b]=[-1,2]$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{para} \quad x=0\,, \\ -\sin(x)/x & \textit{para} \quad x\in(0\,,1] \end{cases}$ *e* $[a,b]=[0,1]$

c) $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \textit{para} \quad |x|\le 1,\, x\neq 0\,, \\ 3 & \textit{para} \quad x=0 \end{cases}$ *e* $[a,b]=[-1,1]$

Exercício 11 *Determine o maior domínio de definição da função cuja lei é dada por:*

a) $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} t^2\,dt$

b) $F(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} 1/t^2\,dt$

c) $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\,dt,$ *onde* $f(t) = \begin{cases} t & \textit{para} \quad t\in[-2,0]\,, \\ e^{-t} & \textit{para} \quad t>0 \end{cases}$

Derivada no sinal da integral

Exercício 12 *Em cada um dos itens abaixo, encontrar a expressão da função* $f': A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *onde* $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por:*

$$a)\ f(x) = \int_0^x \left(t^2+1\right)^{10}\,dt \qquad b)\ f(x) = \int_x^0 \sqrt{u^2+4\,u}\,du \qquad c)\ f(x) = \int_{-1}^x t\ \mathrm{sen}(t)\,dt$$

$$d)\ f(x) = \int_0^{x^3} \cos^{\frac{1}{3}}(t)\,dt \qquad e)\ f(x) = \int_{\mathrm{sen}(x)}^{\cos(x)} \sqrt{t^2+1}\,dt \qquad f)\ f(x) = \int_0^{4\,x} \mathrm{sen}^{10}(t)\,dt$$

Aplicações do teorema do valor médio (TVM) para integrais

Exercício 13 *Em cada um dos itens abaixo, calcule o valor médio das funções* f *e determine* $c \in (a,b)$, *tal que* $f(c) =$ *valor médio da função* f *no intervalo* $[a,b]$*:*

a) $f(x) = 3\,x$ *e* $[a\,,b] = [1\,,2]$.
b) $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ *e* $[a\,,b] = [-\pi\,,\pi]$.
c) $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ *e* $[a\,,b] = [0\,,\pi]$.
d) $f(x) = x^2 - 2\,x$ *e* $[a\,,b] = [0\,,2]$.

Mudança de variáveis para integral definida

Exercício 14 *Nos casos abaixo aplique o Teorema da Mudança de Variáveis para Integral (***T.M.V.I***) para resolver as seguintes integrais.*

$$a)\ \int_{-1}^0 x\sqrt{x+1}\,dx \qquad b)\ \int_0^1 \frac{u^2}{(u^3+1)^2}\,du \qquad c)\ \int_{-1}^0 t(t^2+1)^{80}\,dt$$

$$d)\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(t)\sin(t)\,dt \qquad e)\ \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(z)\,dz \qquad f)\ \int_0^1 \mathrm{senh}^3(t)\,dt$$

Exercício 15 *Suponha que a função* $f: [-2\,,0] \to \mathbb{R}$ *é contínua em* $[-2\,,0]$ *e que* $\displaystyle\int_{-2}^0 f(x)\,dx = 3$. *Calcule* $\displaystyle\int_0^2 f(x-2)\,dx$.

Exercício 16 *Suponha a funçao* $f: [-1\,,1] \to \mathbb{R}$ *é contínua em* $[-1\,,1]$ *e que* $\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{dt} = 5$. *Calcule* $\displaystyle\int_0^1 f(2\,x-1)\,\mathrm{dx}$.

Exercício 17 *Sendo* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua e* $\int_{-4}^2 f(x)dx = 12$, *encontre* $\int_0^2 f(2-3x)dx$.

Cálculo de áreas de regiões planas

Exercício 18 *Encontrar a área da região limitada do plano xy, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das seguintes funções e retas abaixo:*

a) $f(x) = x^2$, *para* $x \in \mathbb{R}\,, x = 2\,, x = 4$ *e* $y = 0$
b) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$, *para* $x \in [-2\,,2]\,, x = 0\,, x = 2$ *e* $y = 0$
c) $f(x) = |\,\mathrm{sen}(x)|$, $x = -2\pi$, $x = 2\pi$ *e* $y = 0$
d) $f(x) = \mathrm{sen}(x)$, *para* $x \in \mathbb{R}\,, x = -2\,\pi\,, x = 2\,\pi$ *e* $y = 0$
e) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{10-x^2}}$, *para* $x \in [-\sqrt{10}\,, \sqrt{10}]\,, x = 2$ *e* $y = 0$

Exercício 19 *Encontrar a área da região limitada do plano xy, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das curvas abaixo:*

$$a)\, y = x^2 \;\; e \;\; y = 4\,x - x^2 \qquad\qquad b)\, y = \cos(x)\,,\, y = \cos^2(x)\,,\, x = 0 \;\; e \;\; x = \pi$$

Exercício 20 *Calcule a área da região limitada do plano xOy, que está à direita do eixo Oy e à esquerda da parábola $x = 2\,y - y^2$.*

Exercício 21 *Calcule a área da região limitada abaixo do gráfico da função f (e acima do eixo x), nos seguintes casos:*

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & para \;\; x \in [0\,,1]\,, \\ 2 - x & para \;\; x \in [1\,,2] \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & para \;\; x \in [0\,,1]\,, \\ -(x-1)\,(x-4) & para \;\; x \in [1\,,4] \end{cases}$

Exercício 22 *Considere a região $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1, a \geq b > 0\}$. Encontre a área da região E.*

Exercício 23 *Desenhe o subconjunto A, do plano xy, e calcule sua área nos seguintes casos:*
(a) A é o subconjunto limitado do plano xy, delimitado pelas retas $x = 1$, $x = 3$, pelo eixo x e pelo gráfico de $y = x^3$.
(b) A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = \sqrt{x}$.
(c) A é o subconjunto limitado do plano xy, formado por todos $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, tais que $0 \leq y \leq 9 - x^2$.
(d) A é o subconjunto limitado do plano xy, formado por todos $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, tais que $1 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq \dfrac{x}{1+x^2}$.

Exercício 24 *Seja $x_o \in \mathbb{R}$ o ponto máximo da função $f(x) = x^2\,e^{-x}$, para $x \in \mathbb{R}$. Calcule a área do conjunto limitado $A = \big\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leq x \leq x_o \;\; e \;\; 0 \leq y \leq x^2\,e^{-x}\big\}$.*

Frações parciais

Exercício 25 *Use decomposição em frações parciais para calcular as seguintes integrais indefinidas:*

(a) $\displaystyle\int \frac{16\,x + 69}{x^2 - x - 12}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{3\,x^2 - 10\,x - 60}{x^3 + x^2 - 12\,x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{-3\,x^3 + x^2 + 2\,x + 3}{x^4 + x^3}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{3\,x^2 - 5\,x + 4}{x^3 - x^2 + x - 1}dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{x - 1}{x^2\,(x+1)^2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 4\,x^2 + 6\,x + 1}{x^3 + x^2 + x - 3}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 9}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^4 - x^2}dx$ (i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(4 - x)}\,dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x^2 + x + 2)}\,dx$ (k) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 + x + 2}\,dx$ (l) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 4x - 1}{x(x-1)^3}\,dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\,dx$ (n) $\displaystyle\int \frac{6x^2 - 3x}{(x-2)(x-4)}\,dx$ (o) $\displaystyle\int \frac{x^4 + 5x^3 + 20x + 16}{x(x^2+4)^2}\,dx$

(p) $\displaystyle\int \frac{4x^3 - x}{x^2 - x - 30}\,dx$ (q) $\displaystyle\int \frac{8 - t^3}{(t-3)\,(t+1)^2}\,dt$ (r) $\displaystyle\int \frac{6 - z^2}{2z^2 + z - 21}\,dz$

(s) $\displaystyle\int_2^4 \frac{3z^2 + 1}{(z+1)\,(z-5)^2}\,dz$ (t) $\displaystyle\int \frac{2 + w^4}{w^3 + 9w}\,dw$ (u) $\displaystyle\int \frac{8 + t + 6t^2 - 12t^3}{(3t^2+4)\,(t^2+7)}\,dt$

Exercício 26 *No seguinte exercicio verifique que: $A = 1, B = -1, C = -1, D = 1, E = 0$.*

$$\int \frac{16-4x+5x^2-x^3}{x^5+8x^3+16x}\,dx = \cdots = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+4}dx + \int \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}\,dx.$$

Agora, responda as seguintes perguntas:

1. *Como se resolve estas três últimas integrais acima?. E se a constante E fosse uma constante não nula? Como você resolveria a última integral?*

2. *E se fossem integrais do tipo:* $\displaystyle\int \left(\frac{3}{2x+1} + \frac{2}{(3x+2)^2} + \frac{2x+3}{(2x^2+x+1)}\right) dx$*? Como você resolveria?*

Integração por substituição trigonométrica

Exercício 27 *Faça substituição trigonométrica e então calcule a integral:*

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^4}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+13}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int 3x^5\sqrt{16-x^2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{z^5}{(9z^2-25)^{\frac{3}{2}}}\,dz$ (f) $\displaystyle\int \frac{5}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3-4t^2}}{t^2}\,dt$ (h) $\displaystyle\int \frac{w^5}{\sqrt{8w^2+1}}\,dw$ (i) $\displaystyle\int \frac{2}{(x-3)^6\sqrt{-x^2+6x-5}}\,dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{(z+1)^2(2z^2+4z-34)^{\frac{3}{2}}}\,dz$ (k) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4y^2-16y+19}}{(y-2)^6}\,dy$ (l) $\displaystyle\int \frac{e^{12t}}{\sqrt{4e^{6t}-1}}\,dt$

Exercício 28 *Resolva as seguintes integrais trigonométricas:*

(a) $\displaystyle\int \sin(5x)\cos(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int \sin(4x)\cos(2x)\,dx$ (c) $\displaystyle\int \sin^6(x)\cos^3(x)\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{\sin^7(x)}{\cos^4(x)}\,dx$ (e) $\displaystyle\int \sin^3\left(\frac{2}{3}x\right)\cos^4\left(\frac{2}{3}x\right)\,dx$ (f) $\displaystyle\int \sin^8(3z)\cos^5(3z)\,dz$

(g) $\displaystyle\int \sec^6(3y)\tan^2(3y)\,dy$ (h) $\displaystyle\int \tan^3(6x)\sec^{10}(6x)\,dx$ (i) $\displaystyle\int \csc^6\left(\frac{1}{4}w\right)\cot^4\left(\frac{1}{4}w\right)\,dw$

(j) $\displaystyle\int \frac{\sec^4(2t)}{\tan^9(2t)}\,dt$ (k) $\displaystyle\int \frac{2+7\sin^3(z)}{\cos^2(z)}\,dz$ (l) $\displaystyle\int \left[9\sin^5(3x)-2\cos^3(3x)\right]\csc^4(3x)\,dx$

Exercício 29 *Desenvolvendo outras habilidades: Faça uma substituição para expressar o integrando como uma função racional (ou seja, como divisão de polinômios) e então calcule a integral:*

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)-3\cos(x)}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$ (i) $\displaystyle\int \frac{\sec^2(t)}{\tan^2(t)+3\tan(t)+2}\,dt$

Cálculo de volume por integral simples

Exercício 30 *Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno do eixo-$x$da região do plano-xOy delimitada pelos gráficos das funções $f(x)=x^2$ e $g(x)=\sqrt{x}$.*

Exercício 31 *Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando-se a região*

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \ e \ x^2 \leq y \leq 1\right\},$$

em torno do eixo-y.

Exercício 32 *As seções transversais de um certo sólido, por planos perpendiculares ao eixo-x, são círculos, cujos diâmetros estão compreendidos entre as curvas no plano-xOy definidas pelas equações* $y = x^2$ *e* $y = 8 - x^2$. *Encontre seu volume.*

Exercício 33 *Para* $a > 0$ *fixado, temos que a base de um certo sólido é o círculo*

$$C \doteq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\right\}.$$

Cada seção plana do sólido por planos perpendiculares ao eixo-x é um quadrado com um lado sobre a base do sólido. Calcule o seu volume. Faça o mesmo quando a base desde sólido é o círculo

$$C \doteq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq a^2\right\}.$$

Exercício 34 *A base de um certo sólido é a região do plano-xOy delimitada pelo eixo-x, pela curva dada por* $y = \operatorname{sen}(x)$ *e pelas retas* $x = 0$ *e* $x = \pi/2$. *Cada seção plana do sólido perpendicular ao eixo-x é um triângulo equilátero com um lado na base do sólido. Encontre o volume do sólido.*

Exercício 35 *Em cada um dos itens abaixo, esboce a região delimitada pelas curvas dadas. Além disso, usando o método das cascas cilíndricas, determine o volume do sólido gerado pela rotação desta região em torno do eixo indicado.*

(a) $y = \sqrt{x}\,, x = 4\,, y = 0$ *e o eixo-y*

(b) $y = x^2\,, y^2 = 8\,x$ *e o eixo-y*

(c) $y^3 = x\,, y = 3,\ x = 0$ *e o eixo-x*

(d) $x^2 = 4\,y\,, y = 4\,,$ *e o eixo-x*

(e) $y = \sqrt{x+4}\,, y = 0\,, x = 0$ *e o eixo-x*

(f) $16y = x^2\,, y^2 = 2\,x$ *e o eixo-y.*

Exercício 36 *Seja* R *a região do plan-xOy delimitada pela parábola de equação* $x = y^2$ *e pela reta* $x = 9$. *Para cada um dos itens abaixo, determine o volume do sólido que tem a região* R *como base, sabendo-se que a secção relativa ao eixo-x é*
(a) *um quadrado.*
(b) *um retângulo de altura igual a* 2.
(c) *um semicírculo.*
(d) *um quarto de círculo.*
(e) *um triângulo equilátero.*
(f) *um triângulo, cuja altura é igual a* $1/4$ *do comprimento da sua base.*
(g) *um trapézio com base inferior no plano-xOy, cuja base superior tem comprimento igual à metade do comprimento da sua base inferior e o comprimento da altura é igual a* $1/4$ *da sua base inferior.*
(h) *um paralelogramo, com base no plano-xOy e cuja altura é igual a duas vezes o comprimento de sua base.*

Integrais Impróprias

Exercício 37 *Decida quais integrais impróprias abaixo são convergentes e quais são divergentes:*

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ $\quad(b)$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ $\quad(c)$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ $\quad(d)$ $\displaystyle\int_0^\infty e^{2x}dx$

(e) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}$ $\quad(f)$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ $\quad(g)$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{s^2+x^2}dx,\ s>0$ $\quad(h)$ $\displaystyle\int_{-1}^\infty e^{-sx}dx,\ s>0$

(i) $\displaystyle\int_0^\infty te^{-st}dt,\ s>0$ $\quad(j)$ $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}\cos t dt,\ s>0$ $\quad(k)$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}dx$ $\quad(l)$ $\displaystyle\int_1^\infty \ln x dx$

(m) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{st} sent dt,\ s>0$ $\quad(n)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{x^2}{1+x^2}dx$ $\quad(o)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\ln|x|}{x}dx$ $\quad(p)$ $\displaystyle\int_1^\infty \ln^2 x\, dx.$

Exercício 38 *Verifique para quais valores de* α *a integral* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ *converge e para quais diverge.*

Exercício 39 *Determine todos os números naturais* n *para os quais a integral imprópria* $\displaystyle\int_1^\infty x^n \ln x dx$ *é convergente.*

Exercício 40 *Se* f *é contínua em* $(-\infty, \infty)$ *definimos* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx.$ *Identifique quais integrais abaixo convergem e quais divergem.*

$$(a)\ \int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}dx \quad (b)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} \quad (c)\ \int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}dx \quad (d)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}dx.$$

Exercício 41 *Se* f *é contínua em* $(x_0, b]$ *então* $\displaystyle\int_{x_0}^b f(x)dx = \lim_{a\to x_0^+}\int_a^b f(x)dx$. *De modo análogo, se* f *é contínua em* $[a, x_0)$ *então* $\displaystyle\int_a^{x_0} f(x)dx = \lim_{b\to x_0^-}\int_a^b f(x)dx$. *No caso do limite existir dizemos que a integral converge. Com estas definições verifique se as integrais abaixo convergem ou não:*

$$(a)\ \int_0^1 \frac{1}{x}dx \qquad (b)\ \int_0^1 \frac{1}{x^2}dx \qquad (c)\ \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (d)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(e)\ \int_0^1 \frac{dx}{x^3+2x^2+x} \qquad (f)\ \int_0^1 \frac{dx}{x^3+x^2}.$$

Exercício 42 *Teste a convergência das integrais abaixo:*

$$(a)\ \int_3^\infty e^{-2x}dx \quad (b)\ \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^3} \quad (c)\ \int_8^\infty x^{-4/3}dx \quad (d)\ \int_0^\infty sen x\ dx$$

$$(e)\ \int_1^\infty \frac{1}{x^2}sen\frac{1}{x}dx \quad (f)\ \int_e^\infty \frac{dx}{xlnx} \quad (g)\ \int_e^\infty \frac{dx}{x(lnx)^2}dx \quad (h)\ \int_1^\infty e^{-x}cos x\ dx$$

$$(i)\ \int_0^2 \frac{lnx}{\sqrt{x}}dx \quad (j)\ \int_0^\infty |x|cos\, x^2dx \quad (k)\ \int_{-\infty}^\infty e^{-x}cos x\, dx \quad (l)\ \int_{-\infty}^\infty x^2e^{-x^3}dx$$

$$(m)\ \int_0^2 \frac{1}{4-x^2}dx \quad (n)\ \int_0^e \ln x dx \quad (o)\ \int_0^1 \frac{x^2+4x+1}{x^4-3x+2}dx \quad (p)\ \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$(q)\ \int_0^3 \frac{1}{2x^2-18}dx \quad (r)\ \int_0^\infty \mathrm{sen}(x+1)dx \quad (s)\ \int_0^\infty 4x^3e^{-x^4}dx \quad (t)\ \int_0^{\pi/4} \frac{cos x}{\sqrt{sen x}}dx$$

Exercício 43 *Use o critério da comparação ou comparação por limite para decidir se as integrais abaixo convergem ou divergem:*

$$(a)\ \int_1^\infty \frac{cos^2 x}{1+x^2}dx \quad (b)\ \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx \quad (c)\ \int_{-\infty}^{-2} \frac{1+cos x}{\sqrt{|x|^3}}dx \quad (d)\ \int_0^1 \frac{e^{-x^2}-0.05}{x^2}dx$$

$$(e)\ \int_1^\infty \frac{x}{1+3x-x^7+x^{10}}dx \quad (f)\ \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^4+3e^{-x}}dx \quad (g)\ \int_2^\infty \frac{x^3-3x-1}{\sqrt{|x|^7}}dx \quad (h)\ \int_0^\infty \frac{xe^{-x^2}}{\cos x+2}dx.$$