

Dinâmica de N Corpos em Interação Gravítica a 3 Dimensões

Filipe S. Miguel (84381) & João F. Bravo (84390)

Instituto Superior Técnico - MEFT - Mecânica Analítica

Profs. Guilherme Milhano & Liliana Apolinário

25 de Junho de 2017

Neste trabalho, estudaram-se diversos sistemas representantes do problema Newtoniano de N corpos, com recurso à ferramenta Mathematica. Com esta, após implementação do algoritmo gerado, simulou-se a dinâmica de vários sistemas, analisando as várias conservações, simetrias e aproximações interessantes do mesmo. Estudou-se a validade da aproximação do sistema solar a 8 problemas de 2 corpos, confirmando-se a mesma com um aumento de eficácia para os planetas mais distantes do Sol. Testou-se a possibilidade do sistema solar manter as suas características perante um binário de estrelas ao invés do Sol, com sucesso, podendo este ser também tratado como 8 sistemas desacoplados. Analisou-se ainda a distribuição do potencial efetivo de um sistema de 10 corpos, de forma a encontrar os seus pontos de equilíbrio, testando a estabilidade dos mesmos, bem como o regime de pequenas oscilações num deles.

I. INTRODUÇÃO

1. Motivação

O problema de N corpos tenta descrever a dinâmica de um conjunto de N objetos sob a influência de uma interação físicas, como a gravítica. Este surgiu há vários séculos, tendo a sua importância sido elevada no final do século XVII, com a proposta da Lei da gravitação universal pelo físico inglês Sir Isaac Newton, bem como as 3 leis da dinâmica de corpos que fundamentaram toda a mecânica clássica. Apesar de permanecer um problema com muitas questões por explorar, várias evoluções e descobertas surgiram desde então, a maioria assentes no desejo de compreender a dinâmica de corpos celestiais como o Sol e as restantes estrelas visíveis, asteroides, cometas, a Lua e mesmo a própria Terra.

Este é um problema com numerosas aplicações, tanto em astrofísica, como em áreas desde o eletromagnetismo, no estudo de distribuições de N cargas sob o potencial de Coulomb, à biologia estrutural, na simulação da interação entre proteínas na construção celular. Tendo a maioria dos estudos incidido no problema Newtoniano, será nesse que este artigo se focará.

A dinâmica de um sistema de N corpos a interagir entre si gravitacionalmente tem associado um potencial entre os corpos i e j da forma:

$$V_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (1)$$

em que $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ é a distância entre os corpos.

Para $N=1$ e $N=2$, este problema tem solução analítica, o que não acontece para um número superior de corpos, forçando o recurso à resolução numérica. Para além disso, os problemas de $N \leq 2$ corpos, podem ser reduzidos a 1 só grau de liberdade, enquanto que a partir de 3 corpos, devido à não conservação das energias e momentos angulares de cada corpo, é impossível reduzir cada problema a menos de 6 graus de liberdade (4 no caso da dinâmica restrita a um plano). Todos estes factos servem de motivação à escolha de $N \geq 3$ para os casos em estudo.

2. Formulação Lagrangeana

Como descrito atrás, a dinâmica de um sistema Newtoniano de N corpos é ditada pelo potencial na equação (1), que apenas depende da distância entre os corpos e nunca de coordenadas com uma origem absoluta. Esta homogeneidade do espaço é uma simetria que, recorrendo ao teorema de Noether, induz conservação do momento linear do sistema, implicando uma velocidade constante do seu centro de massa. Deste modo intui-se que pondo em evidência as coordenadas do centro de massa se poderão eliminar 3 dos $3N$ graus de liberdade do sistema (3 graus de liberdade por cada uma das N partículas). Assim, designando a posição do CM por \mathbf{R} , m_i a massa de cada partícula e M a massa total do sistema, escreve-se:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \mathbf{r}_i}{M} \quad \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{1i} \quad \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{1j} - \mathbf{r}_{1i} \quad (2)$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \sum_{i=1}^N \frac{m_i \mathbf{r}_{1i}}{M} \quad (3)$$

Recorrendo às equações acima, pode-se reescrever as energias cinética e potencial do sistema em função das $3N$ coordenadas especificadas por \mathbf{r}_{1i} ($i = 2, \dots, N$) e \mathbf{R} , obtendo-se a equação (4). De modo a calcular a energia potencial no sistema, é essencial notar que esta é dada pela soma das energias de cada interação e não das energias potenciais de cada partícula na presença das demais. De facto, nota-se um fator de $1/2$ entre ambos estes métodos de descrever esta energia (já que neste segundo caso cada interação é considerada duas vezes). Assim, V será dado pela equação (5).

$$T = \frac{1}{2} \left(M \dot{\mathbf{R}}^2 + \sum_{i=2}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_{1i}^2 - M (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{R}})^2 \right) \quad (4)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=2, j=2, i \neq j}^N V_{ij} + \sum_{i=1}^N V_{1i} \quad (5)$$

Desta forma, o Lagrangeano do sistema será naturalmente dado por $T - V$, sendo que é importante destacar que $\dot{\mathbf{r}}_1$ em (4) é substituído como especificado na equação (3). É imediato, por análise deste lagrangeano, que a coordenada \mathbf{R} é cíclica, como previsto inicialmente, sendo por isso o momento conjugado à mesma conservado. Deste modo, por simplificação, recorreram-se a coordenadas referentes ao CM nos vários casos estudados ao longo do trabalho, sendo por isso

$\mathbf{R} = \dot{\mathbf{R}} = 0$. Através desta simplificação, obtém-se um lagrangeano com apenas $3(N-1)$ variáveis:

$$L = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=2}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_{1i}^2 - \sum_{i=2, j=2}^N \frac{1}{M} \dot{\mathbf{r}}_{1j} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{1i} \right) - V(\mathbf{r}_{12}, \dots, \mathbf{r}_{1N}) \quad (6)$$

Por inspeção direta lagrangeano intuem-se duas simetrias imediatas, isotropia do espaço e homogeneidade do tempo, que, mais uma vez recorrendo ao teorema de Noether, conduzem respetivamente a uma conservação do momento angular total e da energia do sistema, valores que servirão de controlo ao longo do trabalho.

3. Formulação Hamiltoniana

De modo a facilitar a implementação, computacional reescreveu-se o lagrangeano, recorrendo à formulação Hamiltoniana. Sendo T_{ij} as componentes da matriz cinética de tal forma que $T = 1/2 \mathbf{r}_{1j} \cdot \mathbf{r}_{1j} T_{ij}$, designa-se T^{ij} como a sua inversa, obtendo-se o seguinte hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j T^{ij} + V(\mathbf{r}_{12}, \dots, \mathbf{r}_{1N}) \quad (7)$$

Note-se que cada componente \mathbf{p}_i é um vetor tridimensional, tal como acontecia no caso das coordenadas.

4. Estabilidade e pequenas oscilações

Uma característica fundamental do problema de N corpos, é que para N maior que 2, as soluções da sua dinâmica são em geral aperiódicas e mesmo caóticas. Posto isto, a busca de soluções periódicas, ou até mesmo estáveis, deste problema adquire uma merecida beleza. Deste modo, ao longo deste trabalho, focou-se primariamente a busca da dita ordem no caos. Esta periodicidade pode ser alcançada tanto em casos limite (para os quais é possível desacoplar um problema de N corpos em vários problemas de menos corpos) ou para certas condições iniciais muito específicas, que pela sua especificidade geram órbitas periódicas. Ainda dentro deste segundo grupo, é possível distinguir um conjunto particular de órbitas, denominadas de coreografias, nas quais todos os corpos descrevem a mesma curva fechada, sempre igualmente espaçados entre eles.

Um caso específico do problema de N corpos para o qual é mais simples encontrar estabilidade é o de movimento restrito a um plano. Neste caso, as trajetórias das partículas são todas co-planares, descrevendo o sistema, por isso, um movimento bi-dimensional. Nestas circunstâncias o número de graus de liberdade reduz-se a $2/3$ do inicial, diminuindo por isso a complexidade do problema. Uma propriedade particularmente interessante no estudo desta restrição é a estabilidade de movimentos oscilatórios para pequenas oscilações numa direção normal ao plano: se uma das partículas descrever uma órbita que constitua uma situação de equilíbrio e for perturbada numa direção normal ao plano, é fácil argumentar que irá oscilar em torno da posição inicial, num equilíbrio que será estável nessa direção. Para concluir isto, basta observar que sendo os potenciais de interação proporcionais ao simétrico do inverso da distância entre as partículas, sendo o equilíbrio no plano orbital, uma pequena perturbação em z introduzirá sempre um acréscimo das distâncias de interação, e, consequentemente, um aumento do potencial a estas associado, constituindo por isso o plano um mínimo do potencial, i.e. um ponto de equilíbrio estável. Por uma questão de completude, note-se ainda que a frequência de oscilação pode ser calculada através de $\sqrt{k/m}$, sendo k a segunda derivada do potencial em ordem à distância relativa r_{ij} da partícula j em questão avaliada no ponto de equilíbrio, e m a massa da mesma partícula.

5. Notas relativas ao sistema de unidades utilizado

Na maioria das situações, uma correta escolha do sistema de unidades é um bom auxílio para uma correta interpretação dos dados obtidos. Num problema de dois corpos com trajetória circular, demonstra-se que a velocidade angular de rotação do sistema é dada pela equação (8), na qual m_1 e m_2 são as massas de cada um dos corpos e r quantifica a distância entre eles.

$$\omega^2 = G \frac{m_1 + m_2}{r^3} \quad (8)$$

Se neste sistema escolhermos como unidade de massa $m_1 + m_2$, unidade de distância r e unidade de tempo o período de uma órbita, obtemos $G = 4\pi^2$. Assim, dada a simplicidade do sistema e focando a minimização de possíveis erros numéricos, ir-se-á recorrer a ele por diversas vezes ao longo da realização deste trabalho.

II. MÉTODO COMPUTACIONAL

De forma a estudar detalhadamente diversos sistemas de interesse com N corpos, recorreu-se à ferramenta *Mathematica*. Depois de introduzidas as 6N condições iniciais relativas ao referencial de centro de massa (bem como as massas e o valor da constante de gravitação), converteram-se estas para o referencial com centro no corpo 1. Formulado o Hamiltoniano do sistema de acordo com o descrito acima, obtiveram-se as 6(N-1) equações de Hamilton através de cálculo simbólico. De seguida, aplicou-se um método de resolução numérica de equações diferenciais ordinárias, *NDSolve*, ao sistema de equações obtido em conjunto com as condições iniciais impostas, obtendo-se um conjunto de funções interpoladas ao longo de um intervalo de tempo especificado, que descrevem a distância e o momento linear de cada corpo relativos ao primeiro corpo introduzido. Posuindo já as soluções numéricas pretendidas, procedeu-se à mudança inversa de coordenadas para o referencial de centro de massa de forma a analisar os resultados com maior intuição física. Pôde-se assim representar graficamente a evolução spatiotemporal do sistema com o método *ParametricPlot3D*. Com as soluções obtidas, estudaram-se ainda algumas conservações interessantes do mesmo, calculando, por exemplo, as energias cinética e potencial e o momento angular de cada corpo, de forma a obter energias e momentos individuais e totais do sistema, utilizando o último método para representar a evolução temporal dos mesmos.

Nota: em alguns casos, optou-se por representar a energia média do sistema (por corpo) ao invés da total, de forma a facilitar a visualização das restantes quantidades.

III. CASOS ESTACIONÁRIOS NA NATUREZA

Dada a magnitude do intervalo de tempo característico entre eventos astronômicos, salvo raras exceções, a dinâmica de corpos na natureza possui uma certa estabilidade. Por isto, estudaram-se em primeiro lugar este tipo de órbitas, que têm ainda por benefício ilustrar vários casos limites interessantes.

1. Sistema Solar

Um sistema de óbvio interesse, cujo funcionamento condiciona a nossa própria existência, é o sistema solar. Ainda assim, a principal intenção do seu estudo à luz deste trabalho é o facto de constituir um bom exemplo de um caso limite, em que um sistema de 9 corpos se comporta em primeira aproximação como 8 sistemas de 2 corpos. De facto, constituindo a massa do sol aproximadamente 98% da massa do sistema solar, as interações interplanetárias são desprezáveis relativamente às interações Sol-planeta. Para simplificação, utilizou-se o sistema de unidades discutido em I.5, tomando por referência o sistema Terra-Sol. Recorrendo à base de dados da NASA [2], obtiveram-se velocidades e distâncias orbitais médias, usadas como condições iniciais. De novo visando a simplificação, considerou-se que em $t=0$ todos os planetas se encontram alinhados segundo o eixo x .

Nota: Devido à falta de informação disponível relativa aos parâmetros relacionados com a excentricidade das órbitas, consideraram-se as mesmas circulares, recorrendo aos parâmetros médios.

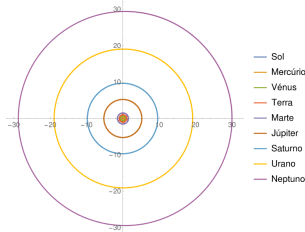


Figura 1: Simulação das trajetórias dos diferentes planetas ao longo de 200 anos

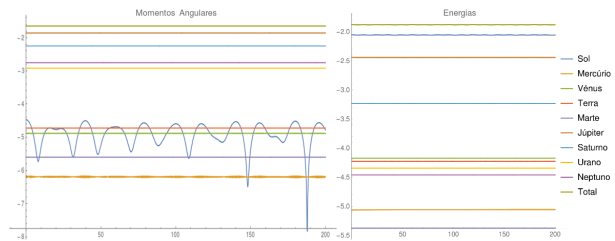


Figura 2: Momentos angulares relativos ao centro de massa (à esquerda) e energias (à direita) de cada um dos planetas (escala logarítmica em y: em ambas as situações a ordenação representa a ordem de grandeza da energia/momento e a abcissa o tempo em anos)

Na figura 1 observa-se a representação gráfica das órbitas obtidas, num intervalo de tempo de 200 anos (ordem de grandeza do período de Neptuno). Sem grandes surpresas, as órbitas obtidas são aproximadamente circulares e estáveis, explicitando a validade da aproximação a 8 sistemas de 2 corpos. Analisando a figura 2, destaca-se a constância das energias de cada um dos corpos, e dos momentos angulares de quase todos os planetas (como seria de esperar em sistemas de 2 corpos), sendo que a energia e momento angular total se mantém constantes, como demonstrado antes. Destaca-se apenas uma fraca oscilação no momento

angular de mercúrio e uma forte variação, aparentemente aperiódica, no caso do Sol. Tendo o Sol 98% da massa do sistema Solar, é natural que esteja bastante próximo do centro de massa do sistema, pelo que pequenas perturbações nesta distância terão efeitos visíveis em quantidades a ela proporcionais (por exemplo o momento angular). O mesmo ocorre em menor escala no caso de Mercúrio, que tem tendência a orbitar o Sol e não o CM, podemos inclusive observar que a amplitude da oscilação do momento angular de Mercúrio é proporcional ao momento angular do Sol. Concluímos que a aproximação a sistemas de dois corpos é válida, sendo melhor para os planetas mais distantes do Sol, para os quais a variação do CM nem tem qualquer efeito.

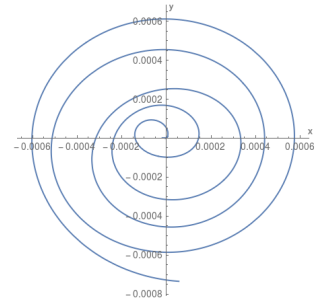


Figura 3: Diferença entre a solução analítica do sistema Terra-Sol e a sua dinâmica considerando a influência dos demais planetas, ao longo de 5 anos

De modo a estudar um pouco mais a fundo a validade da aproximação da dinâmica a um sistema de 2 corpos, podemos recorrer à figura 3, na qual se observa a diferença entre a órbita prevista analiticamente para o sistema Terra-Sol desprezando os restantes planetas e a dinâmica obtida na figura 1. Note-se que o centro da trajetória da Terra se desloca ligeiramente do Sol, na direção da abcissa positiva (a um ritmo de aproximadamente 0.0002 UA por ano), aproximando-se como seria de esperar dos planetas gasosos mais pesados (tendo em conta que nestes instantes iniciais, estes se encontram alinhados em x). Estes resultados devem ser analisados com alguma reserva já que rapidamente se verifica um desfaseamento entre os tempos orbitais, que aumentam imediatamente a distância entre as partículas, não havendo necessariamente uma elevada divergência entre as órbitas descritas num período pelas partículas. Tentou-se ainda estudar a evolução deste efeito em largos períodos de tempo, no entanto o incremento dos erros computacionais não permitiram obter a precisão numérica necessária para um correto estudo desta variação.

2. Sistema Binário

Outro caso limite de interesse obtém-se quando uma das distâncias de interação é muito maior que as restantes, ou vice-versa, sendo que a interação no corpo distante pode ser aproximada pela influência da massa dos restantes concentrada no centro de massa do resto do sistema. De modo a ilustrar um exemplo disto, estudou-se um sistema semelhante ao familiar sistema solar substituindo o Sol por duas estrelas de meia massa solar em rotação em torno da posição teoricamente ocupada pelo Sol, esperando que a dinâmica deste seja aproximada por 8 sistemas desacoplados idênticos ao descrito acima.

Assim, as condições iniciais foram idênticas às fornecidas no caso anterior, substituindo-se apenas o Sol por duas estrelas com metade da sua dimensão. Escolheu-se uma distância entre as estrelas de 0.1 UA, muito menor que a maioria das distâncias orbitais, enquadrando-se propositadamente na grandeza da órbita de Mercúrio (0.38 UA). Tendo em conta a equação (8), escolheu-se uma velocidade angular que permitisse uma órbita circular das estrelas, obtendo-se as condições iniciais para as estrelas que figuram na tabela abaixo:

Estrela	\mathbf{r}_i	\mathbf{v}_i
1	(0.05, 0, 0)	(0, 9.9345883, 0)
2	(-0.05, 0, 0)	(0, -9.9345883, 0)

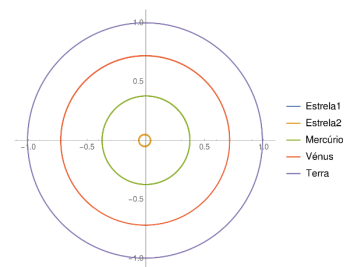


Figura 4: Órbitas dos planetas até à Terra, num sistema binário

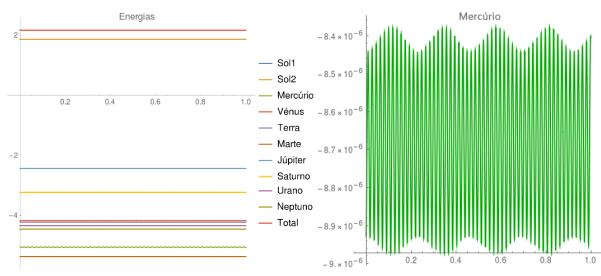


Figura 5: À esquerda, energias dos vários planetas (escala logarítmica em y); à direita em específico a energia de Mercúrio

A título de exemplo, na figura 4, ilustram-se as trajetórias dos planetas até à Terra ao longo de um ano, que, mais uma vez, se aproximam das trajetórias circulares previstas em dinâmicas de 2 corpos. Na figura 5, encontram-se as energias de cada um dos planetas, que mais uma vez são aproximadamente constantes (o que também se verifica para os momentos angulares respetivos), validando as aproximações discutidas acima, sendo que mais uma vez, tanto a energia como o momento angular total se conservam, como previsto. As oscilações nestas grandezas que mais se destacam são respeitantes à energia da órbita de Mercúrio (ilustrada à direita), note-se que a onda que especifica esta oscilação se assemelha ao produto de duas sinóides, uma de elevada frequência relacionada com a rápida rotação das estrelas, que implica uma variação da distância entre Mercúrio e as estrelas, influenciando diretamente a medição da sua energia potencial, e outra mais lenta, relacionada com a própria oscilação da órbita de Mercúrio, quantificando a principal diferença relativamente à dinâmica considerando apenas o centro de massa do sistema.

IV. OUTRAS ÓRBITAS PERIÓDICAS DE INTERESSE

Para além dos sistemas planetários estudados acima, vale a pena analisar algumas das descobertas recentes (últimas 4 décadas) relativas a problemas de interação gravítica entre $N \geq 3$ corpos.

Nesta secção, tomou-se $G = 1$ e as massas de cada sistema todas unitárias (exceto quando explicitado em contrário), recorrendo-se ao sistema de unidades naturais definido pelos autores das referidas descobertas, de forma a facilitar o cálculo de grandezas e posterior análise. Todos os gráficos de momentos angulares apresentam apenas a componente angular segundo o eixo normal (zz) ao plano xy, visto as outras componentes serem nulas, já que os movimentos ocorrem apenas nesse plano.

1. Décagono regular

Depois de Lagrange, no século XIX, demonstrar que 3 massas a girar sobre o seu centro de massa, constituindo os vértices de um triângulo equilátero, com uma velocidade angular específica, descrevem uma solução periódica para o problema de 3 corpos, em 1985, Perko e Walter [3] conseguem generalizar esta solução, mostrando que $N \geq 4$ massas iguais nos vértices de um polígono regular com N lados, a girar sobre o seu CM comum com uma velocidade angular constante dada pela expressão (9), em que M é a massa total do sistema, descrevem também uma solução periódica para o problema de N corpos.

$$\omega^2 = \frac{M}{4N} \cdot \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\sin(j\pi/N)} \quad (9)$$

Este tipo de órbitas são as já referidas coreografias. Apresenta-se de seguida a coreografia obtida para $N = 10$ e raio do decágono R unitário, tendo-se $\omega \simeq 1.96531$ e $\dot{\mathbf{r}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$:

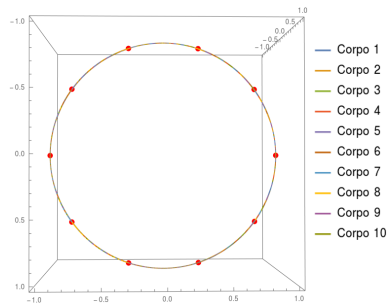


Figura 6: Simulação da Órbita de 10 corpos a formar um decágono regular - 1 período

Como seria de esperar, estas são órbitas restritas a um plano ($z = 0$), sendo o período destas cerca de 3.197.

Avaliando a evolução temporal das energias e momentos angulares individuais e totais apresentados na figura 7, é claro que todos os valores se conservam durante a dinâmica do sistema, sendo este um exemplo de um problema de N corpos muito bem comportado. Note-se que a conservação dos valores totais já era prevista à partida, enquanto que os individuais apenas se conservam e são iguais devido à igualdade das órbitas descritas, sendo todas estas circulares. A energia total obtida foi cerca de -19.312, sendo este valor negativo também

já esperado devido à natureza fechada da órbita, e o momento total do sistema cerca de -19.653.

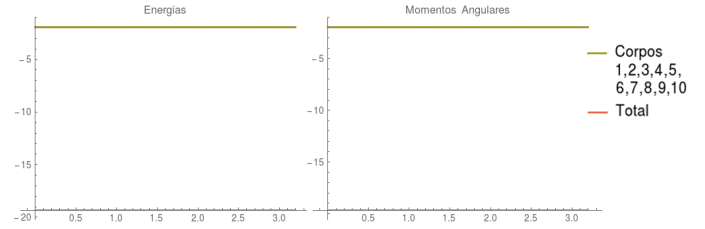


Figura 7: Energias e Momentos Angulares do sistema de 10 corpos acima

Em sistemas de 3 corpos, se um dos corpos tem uma massa muito menor que as dos demais e as massas maiores descreverem trajetórias elípticas, extremizando o potencial efetivo calculado num referencial co-móvel com estas, encontram-se analiticamente pontos de equilíbrio para a massa mais pequena, os chamados pontos de Lagrange. Esta ideia pode ser generalizada para mais corpos, desde que seja possível encontrar um referencial co-móvel com todas as massas consideradas como é o caso da configuração discutida acima: todas as massas rodam em torno do centro de massa com a mesma velocidade angular, pelo que, num referencial que rode a essa velocidade em torno do CM todas estarão em repouso.

O lagrangeano de uma partícula livre em função das coordenadas descritas acima é dado por $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}}^2 + r^2\omega^2)$. Tendo em conta que o segundo termo da equação acima é independente de velocidades, estando apenas relacionado com as coordenadas, pode-se absorvê-lo no potencial a que a partícula se encontra sujeita, constituindo um potencial efetivo. Retomando o caso do decágono de partículas massivas, o potencial efetivo é assim dado pela equação (10), na qual m_p é a massa da partícula infinitesimal e \mathbf{r} a sua posição e m e \mathbf{r}_i a massa e posição das demais partículas:

$$V_{eff} = -Gmm_p \sum_{i=1}^N \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} - \frac{1}{2}m_p r^2 \omega^2 \quad (10)$$

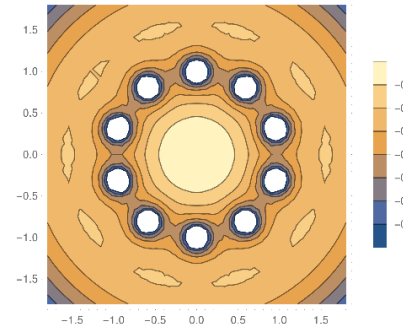


Figura 8: Potencial eficaz num referencial comóvel com o sistema de 10 corpos

Na figura 8, representou-se o potencial efetivo especificado pela equação (10), verificando-se um máximo de potencial no centro e em 10 posições que circundam as singularidades (estas que especificam a posição das massas, já que, o potencial destas cresce infinitamente na sua vizinhança), não havendo mínimos nem minimizantes finitos da função. Deste modo conclui-se que existem 11 pontos de equilíbrio para massas pequenas, sendo que as órbitas por eles definidas são todas instáveis. Numericamente maximizou-se este potencial, calculando-se a distância ao centro maximizante, tendo-se obtido $d = 1.5542$, que por simetria será igual para os dez casos de estacionaridade.

Introduzindo massas 3 ordens de grandeza menores que as restantes nos pontos exteriores encontrados e uma massa estática no ponto central da órbita, obteve-se a confirmação da conjectura feita:

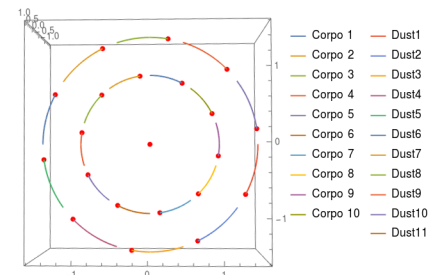


Figura 9: Simulação da Órbita de 10 corpos a formar um decágono regular com massas pequenas nos seus pontos de equilíbrio

Como podemos observar na figura 9 as partículas exteriores acompanham as interiores, não interferindo com as suas órbitas, pelo menos em curtos intervalos de tempo, descrevendo as órbitas descritas teoricamente. Como seria de prever, a introdução destes corpúsculos levou a um aumento ínfimo na energia total

do sistema, que obviamente se mantém constante em conjunto com o momento angular total. Mesmo tendo em conta o elevado contraste entre as massas das partículas exteriores e as interiores, dada a elevada instabilidade de todo o sistema, ao fim de cerca de 1 período, os erros computacionais são suficientes para uma dispersão caótica das partículas.

Foque-se agora um dos pontos de equilíbrio, o presente no centro de massa deste sistema tão simétrico. De forma a estudar a estabilidade deste ponto de equilíbrio, simularam-se perturbações da ordem de 10^{-2} na posição do corpo central radiais (no plano xy) e segundo o eixo normal ao plano do movimento. A primeira (figura 10, à esquerda) revelou logo a instabilidade deste ponto de equilíbrio, sendo o corpo de menor massa projetado para fora da área englobada pelas órbitas circulares. Já a segunda revelou-se como uma perturbação segundo a qual é originada uma dinâmica estável do sistema, como era esperado. Recorrendo à segunda derivada do potencial do sistema em ordem à posição z deste corpo central, avaliada no ponto de equilíbrio $z = 0$, obteve-se uma aproximação da constante elástica da oscilação do mesmo corpo:

$$k = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(-N \frac{Gmm_c}{\sqrt{r_0^2 + z^2}} \right) \right|_{z=0} = NGmm_c = 0.01 \quad (11)$$

sendo $N = 10$ o número de corpos que constituem o decágono, $m = 1$ a massa dos corpos na periferia, $m_c = 0.001$ a massa do corpo central e $r_0 = 1$ a distância do corpo central a cada um dos outros corpos no equilíbrio. Obtém-se assim um período de oscilação dado por $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{k/m_c} \simeq 1.987$. Isto é confirmado na representação da evolução temporal da posição em z deste corpo.

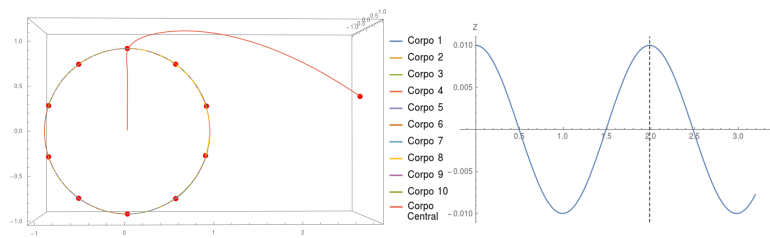


Figura 10: À esquerda: Simulação de uma perturbação radial (plano xy) na posição do corpo central do decágono regular - 1 período. À direita: Evolução temporal da posição em z do corpo central com uma perturbação nessa direção

2. Super-Eight

Em 1999, uma semana depois da prova por Chenciner e Montgomery da existência da coreografia *Figure 8* como solução periódica do problema de 3 corpos (uma órbita em oito descrita simultaneamente por todos os corpos), Gerver descobriu a existência de uma solução semelhante para o problema de 4 corpos, que intitulou de *Super-Eight*. Mais tarde, em 2003, Kapela e Zgliczynski [4] provaram rigorosamente a existência desta coreografia.

Utilizaram-se as condições iniciais, chegadas por este último grupo, que reproduzem esta órbita:

i	\mathbf{r}_i	\mathbf{r}_i
1	(0, 0.157030, 0)	(1.871935, 0, 0)
2	(1.382857, 0, 0)	(0, 0.584873, 0)
3	(0, -0.157030, 0)	(-1.871935, 0, 0)
4	(-1.382857, 0, 0)	(0, -0.584873, 0)

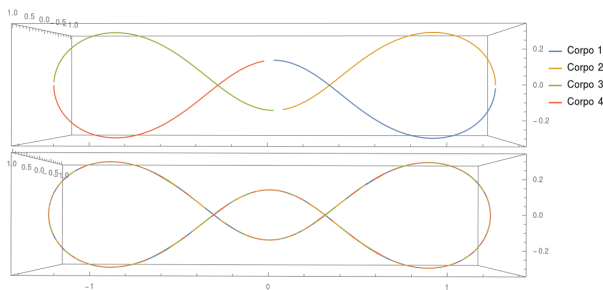


Figura 11: Simulação da órbita Super-Eight. Em cima: um quinto de período. Em baixo: 1 período

Note-se que é claro pela análise das condições iniciais que esta órbita está também restrita ao plano $z = 0$.

A órbita apresenta um período de 6.283. Analisando as energias e momentos angulares individuais e totais (figura 12), nota-se que, sendo os segundos constantes como esperado, os primeiros não o são. Não obstante, a periodicidade das grandezas individuais e a igualdade destas entre os corpos 1 e 2 e os corpos 3 e 4 são boas indicações das simetrias da órbita. A energia total da mesma é cerca de -2.574, negativa como esperado, e o momento angular total aproximadamente 1.030.

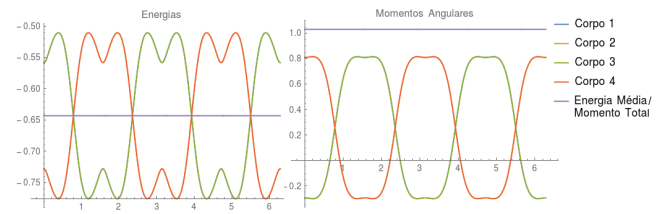


Figura 12: Energias e Momentos Angulares do sistema Super-Eight

De forma a demonstrar a grande instabilidade de qualquer uma destas órbitas, introduziu-se uma perturbação inicial muito pequena na posição de um dos corpos. O resultado, exposto na figura 13, aponta para o caos, com a periodicidade da órbita totalmente destruída, obtendo-se um resultado completamente diferente. Note-se que uma perturbação ainda mais pequena fazer-se-ia sentir na mesma, sendo apenas necessário verificar o sistema num tempo posterior.

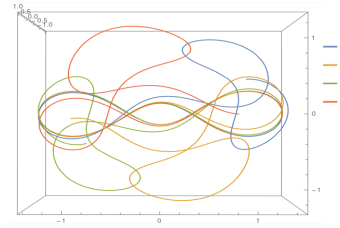


Figura 13: Simulação de uma perturbação de ordem 10^{-3} em uma das posições iniciais da órbita Super-Eight - $t=12.566$ (2 períodos no caso periódico)

3. ButterFly III

Em 2012, Šuvakov e Dmitrašinović [5], um grupo de físicos Sérvios do Institute of Physics Belgrade, descobriram 4 classes de famílias de órbitas periódicas de 3 massas iguais a moverem-se num plano, com propriedades deveras intrigantes. Todas estas apresentam configurações iniciais do tipo:

i	\mathbf{r}_i	\mathbf{r}_i
1	(-1, 0, 0)	($p_1, p_2, 0$)
2	(1, 0, 0)	($p_1, p_2, 0$)
3	(0, 0, 0)	($-2p_1, -2p_2, 0$)

bem como momento angular total nulo. Assim, valores específicos de p_1 e p_2 geram cada órbita.

Explore-se assim uma das órbitas mais visualmente elegantes, a *ButterFly III*, cujos valores iniciais são:

$$p_1 = 0.405916 \quad p_2 = 0.230163$$

Obtém-se a evolução espaciotemporal do sistema, bem como as energias e momentos individuais e totais (14).

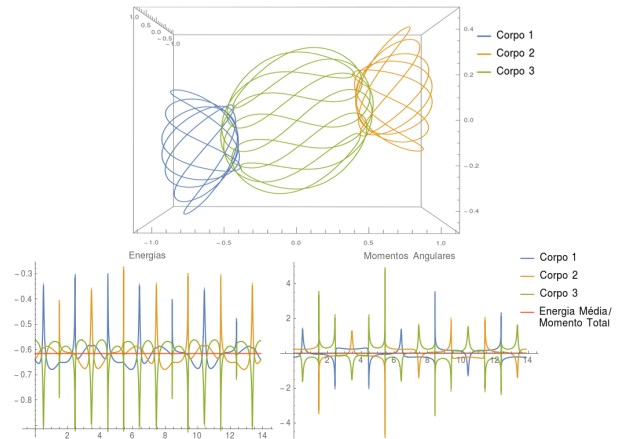


Figura 14: Simulação da órbita ButterFly III - 1 período. Energias e Momentos Angulares do sistema

A órbita apresenta um período de cerca de 13.866. Não havendo conservação das energias e momentos individuais, há das grandezas totais como se esperava. A energia total do sistema é cerca de -1.847, enquanto que o momento angular total se apresenta nulo durante todo o movimento, apesar do grau de complexidade visual desta órbita.

V. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] D. Tong, *Classical Dynamics*, University of Cambridge, Jan. 2015, <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/dynamics.html> ♥
- [2] D. Williams, *Planetary Fact Sheet*, NASA Space Science Data Coordinated Archive, Jun. 2017, <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet>
- [3] L. Perko and E. Walter, *Regular polygon solutions of the N-body problem*, American Mathematical Society, Jun. 1985, <http://www.ams.org/journals/proc/1985-094-02/S0002-9939-1985-0784183-1>
- [4] T. Kapela and P. Zgliczynski, *An existence of simple choreographies for N-body problem - a computer assisted proof*, Abr. 2003, <https://arxiv.org/abs/math/0304404>
- [5] M. Šuvakov, V. Dmitrašinović, *Three Classes of Newtonian Three-Body Planar Periodic Orbits*, Mar. 2013, <https://arxiv.org/abs/1303.0181>
- [6] *Three-body Gallery*, Institute of Physics Belgrade, 2012, <http://three-body.ipb.ac.rs>