Exercícios de

Física Computacional

Mestrado em Engenharia Física-Tecnológica (MEFT)

Fernando Barao
Departamento de Física do Instituto Superior Técnico
Ano Lectivo: 2016-17

fernando.barao@tecnico.ulisboa.pt

versão: 14 de Novembro de 2016

Conteúdo

Parte I

Elementos de programação com objectos

1 Programação em C/C++

1.1 Revisão de C/C++

Exercício 1 : O programa **addnumbers.C** é suposto adicionar todos os números inteiros entre dois números introduzidos pelo utilizador no programa.

a) Compile o programar e verifique se existe algum erro.

b) Crie o executável e corra o programa para os pares de valores:
$(5, -2)$, $(5, 20)$ e $(10, 55)$.

Exercício 2 : Considere a fórmula matemática,

$$z(x) = x + f(x)$$

com,

$$f(x) = sin^2(x)$$

Realize um programa em C/C++ que calcule $z(x)$ para os valores de $x = 0.4, 2.1, 1.5$ e imprima os resultados no monitor do computador.
Nota: a função $f(x)$ deve ser construída autonomamente

Exercício 3 : O espaço em memória ocupado pelas variáveis depende do seu *tipo*. Realize um programa em C/C++ que calcule o número de bytes ocupado em memória pelas variáveis dos seguintes tipos: **short int**, **int**, **long int**, **unsigned int**, **float**, **double**, **long double**

Exercício 4 : Realize um programa em C/C++ que determine o valor da constante π com precisão *float* e *double* a partir da função **atan()**. Compare o valor obtido com o valor exacto de π. Determine a precisão obtida em *float* e *double*.

Exercício 5 : Aspectos relacionados com a implementação do C++ em cada arquitectura podem ser encontrados na *C++ standard library*
<limits> .

function	provides
numeric_limits<type>::max()	largest type value
numeric_limits<type>::min()	smallest type value

Realize um program em C/C++ que avalie e imprima no monitor do computador os limites máximo e mínimo dos seguintes tipos de variáveis: **int**, **unsigned int**, **float**, **double**.

Exercício 6 : Calcule o quadrado de um número inteiro positivo, x^2, usando somente as operações:

a) adição, subtracção, multiplicação ($\times 2$)

b) junte a hipótese de chamar uma função de forma recorrente (*recursion*)

Exercício 7 : Tendo como base o programa **addnumbers.C**, construa um outro programa *addnumbersS.C* que adiciona os quadrados dos números inteiros compreendidos entre os limites inseridos no programa pelo utilizador. O resultado da soma deve ser calculado em tipo **int** e em **double**. Compare os resultados para o caso $(1, 5000)$.

Exercício 8 : Realize um programa em C/C++ composto das funções **main()** e **int fact(int)** que determine o factorial do número n introduzido pelo utilizador no programa, $n!$. Obtenha primeiramente o código objecto **.o** e só depois o código executável **.exe**.

Exercício 9 : Realize um programa em C/C++ que calcule:

$$\sum_{i=0}^{100} \sum_{j=5}^{300} \cos\left(i^2 + \sqrt{j}\right)$$

Codifique a soma numa função do tipo,

```
double Sum(int* vi, int*vj); //vi, vj= limites de i e j
```

e realize um programa *mainSum.C* donde chame a função.

Exercício 10 : A função *rand()* declarada em <cstdlib> gera um número pseudo-aleatório entre 0 e RAND_MAX. Realize um programa em C++ que:

a) gere 1000 números aleatórios x entre $x_{min} = 5$ e $x_{max} = 55$.

b) determine o valor de $y = \frac{x}{x-10}$ para cada aleatório.

c) determine o valor médio de x e o seu desvio padrão.

Exercício 11 : Pretende-se calcular a soma dos seguintes valores,

$$0.1 + 0.2 + \cdots + 5.4$$

tendo-se introduzido o seguinte código em C++ num programa:

```
...
double sum = 0;
for (double x=0; x!= 5.5; x += 0.1) {
  sum += x;
}
```

Realize um programa inserindo este código e confirme se este realize o que se pretende.

Exercício 12 : Uma massa é deixada cair de uma altura h, partindo do repouso.

a) Escreva um programa em C++ que receba do utilizador a altura h em metros e calcule e imprima no ecrã o tempo que a massa demora a chegar ao solo. Despreze a resistência do ar.

b) Quanto tempo demora a queda para uma altura de 100 metros?

Exercício 13 : Um satélite orbita circularmente em torno da terra a uma dada altitude h e possuindo um período de tempo T.

a) Mostre que a relação entre a altitude h e o período T é dado por:

$$h + R = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

onde R representa a raio da Terra.

b) Escreva um programa em C++ que receba do utilizador o período de tempo em segundos e calcule e imprima a altitude do satélite em metros.

c) Utilize o programa para calcular as altitudes dos satélites que orbitam a Terra uma vez por dia (geo-síncronos), cada 90 minutos e cada 45 minutos. Comente os resultados.

$G = 6.67 \times 10^{-11}\ m^3\ Kg^{-1}\ s^{-2}$
$M = 5.97 \times 10^{24}\ Kg$
$R = 6\,371\ Km$

1.2 gestão de memória e passagem de parâmetros

Exercício 14 : No programa que se segue fazem-se *calls* às funções *fintv* e *fdoublev* que retornam ponteiros para arrays de inteiros e double respectivamente, cuja dimensão é dada no argumento das funções.

```
int main() {
 int *a = fintv(100);
 double *b = fdoublev(100);
}
```

As funções devem ser implementadas autonomamente em ficheiros separados *fintv.C* e *fdoublev.C*. Uma implementação possível da função *fintv* poderia ser a seguinte:

```
int* fintv(int n) {
 int v[n];
 return v;
}
```

a) Verifique se o exemplo de código está funcional e em caso negativo, corriga-o e complete com a função que falta.

b) Com base nas funções anteriores, realize novas funções *fintv* e *fdoublev* que permitam a criação de tensores de até dimensão 3. Coloque funcional o seguinte programa *main*.

```
int main() {
  // retornar uma matriz de inteiros de dimensão 100x50 inicializados a 1
 int ***a = fintv(100,50);
 // retornar um tensor de double de dimensão 100x50x20 inicializados a 5.
 double ***b = fdoublev(100, 50, 20);
 double ***c = fdoublev(100, 50);
}
```

c) Realize as funções que façam o *printout* para o ecrã dos valores dos tensores

```
  void print(int***, ...);
  void print(double***, ...);
```

d) Finalmente, no final do programa *main* apague a memória alocada.

Exercício 15 : Pretende-se obter o valor da função

$$f(x) = \sqrt{\sin(2x)}$$

Escreva em C++ métodos que permitam o cálculo de $f(x)$, em que x á dado em graus. Teste os diferentes métodos realizando um programa *main.C* donde os referencie.

a) o valor de $f(x)$ é retornado pelo método:

```
double func(double);
```

b) o valor de $f(x)$ é retornado por referência:

```
void func(double x, double& f);
```

c) o valor de $f(x)$ é retornado por *pointer*:

```
void func(double x, double* f);
```

d) modifique o método anterior de forma a que o valor em graus de x e o *pointer* não sejam modificáveis no interior do método.
*Nota 1: a variável x é passada para a função **func** por cópia, o que pode tornar questionável o uso da declaração **const**. Habitualmente o uso do **const** está ligado ao facto de se querer impedir a modificação de uma variável e que esta modificação se possa reflectir no programa que chama a função (para que isto acontecesse neste caso,*

a variável teria que ser passada por referência). Mas neste caso, uma vez que é feita a cópia da variável, mesmo que se altere esta cópia na função, o exterior não tomaria conhecimento dessa modificação.

Nota 2: algo semelhante se passa com a declaração ***const*** *do ponteiro. Como neste caso é feita uma cópia da variável que guarda o ponteiro, no interior da função, mesme que esta variável seja alterada não há repercussão sobre o valor para onde aponta.*

Exercício 16 : Um método/função em C++ desenvolvido para calcular a soma dos elementos contidos num *array*, possuia a seguinte declaração:

```
void sum(const double* const v,  int n);
```

a) escreva o código em C++ que implemente o método

b) diga se é possível retornar a soma dos elementos no 1º elemento do *array* . Justifique.

c) altere a declaração da função de forma a retornar o valor da soma

Exercício 17 : Realize o seguinte códigos em C++:

a) uma função que inicialize uma variável inteira com um valor aleatório e retorne o seu *pointer* :

```
int* func1();
```

b) uma função que inicialize uma variável inteira com um valor aleatório e retorne o sua referência:

```
int& func2();
```

Verifique que os endereços da variável *int* interna da função e da variável retornada para o programa *main*, são os mesmos.

c) um programa *main.C* que chame as funções 10^6 vezes. Verifique se tem *memory leakage* no programa. Liberte a memória que eventualmente tenha alocado.

Exercício 18 : Realize um código C++ no qual se definam métodos que realizem as seguintes tarefas:

a) calcular e retornar o traço da matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

```
double Trace(int** mx, int n);
```

b) retorne un *array* com os elementos da linha i da matriz $m \times n$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

```
int* Mrow(int i,  int** mx, int m, int n);
```

c) retorne um array com o resultado da multiplicação de uma matrix $M(n \times m)$ por um vector coluna de $V(m)$ elementos.

$$V(m) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

d) aproveitando o resultado da alínea anterior, determine o resultado da multiplicação das seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 10 & 1 & 5 \\ 15 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Exercício 19 : Realize um método em C++ e teste-o, que receba uma matriz de $n \times m$ elementos e um vector coluna de m componentes e calcule o vector produto, usando a seguinte declaração:

```
void Mmultiply(double** mx, double* vr, int n, int m, double*  pt);
```

com:
mx = matriz $n \times m$
vr = vector coluna
pt = vector resultado

Escreva um programa *main.C* que determine o resultado da alínea c) do problema anterior.

1.3 biblioteca STL (Standard Template Library)

Exercício 20 : Realize uma função *rand2vec* e um programa *main()* onde se teste a função, cujo objectivo é proceder à geração de n números aleatórios x com valores compreendidos entre 0 e 360 e que devem ser devovidos ao programa principal usando a estructura *vector<double>*.

```
vector<double> rand2vec(int n);
vector<double>* rand2vecp(int n);
```

Exercício 21 : Realize uma função *array2vec* e o respectivo programa *main()*, cujo objectivo é transferir um *array* de números inteiros para uma estructura STL *vector*.

```
vector<int> array2vec(int, int*);
```

a) aplique a função aos *arrays* seguintes: $\boldsymbol{a} = (1, 10, 5, 6, 9, 3)$ e $\boldsymbol{a} = (2, 5, 5, 7, 3)$

b) elabore numa função *array2vecs*, utilizando a biblioteca <*algorithm*>, a seriação dos valores de cada vector, quer na ordem crescente, quer na ordem decrescente. Retorne o vector ordenado.

```
vector<int> array2vecmaxs(int n, int* a);
```

c) elabore uma função *array2vecmax*, que determine o valor máximo existente em cada um dos *arrays*

```
int array2vecmax(int n, int* a);
```

d) elabore uma função *array2vecfind*, que localize a posição do valor $\boldsymbol{7}$ em cada um dos arrays

```
int array2vecfind(int n, int* a, int value);
```

e) realize as modificações necessárias nos métodos desenvolvidos de forma a impedir que os valores $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{a}$ seja modificado no interior das funções.

f) realize a desalocação de memória que tenha utilizado antes do programa terminar.

Exercício 22 : Neste exercício pretende-se explorar os *containers* ***vector*** e ***map*** da biblioteca STL.

a) O programa *main* (incompleto) que se segue implementa um vector que conterá elementos da tabela periódica. Cada elemento é descrito por uma estructura de dados *ATOM*.

```
  int main() {
    // fill with 1st 6 elements
    ATOM hydrogen;
    hydrogen.A = 1;
    hydrogen.Z = 1;
    hydrogen.mass = 938.89; //MeV - natural units
    hydrogen.name = "Hydrogen";

    //allocate and fill vector
    vector<ATOM> vperiodic(6); //6 elems allocated
    ...

    // print the contents of every element of the vector
    ...

    return 0;
}
```

Complete o programa *main* de forma a executar as acções descritas no programa, nomeadamente:

- escrever uma estructura *ATOM* num ficheiro *header atom.h* que contenha os dados de um elemento da tabela periódica
- incluir num vector os primeiros 6 elementos da tabela periódica
- imprimir no ecrâ os detalhes de cada elemento contido no vector

b) Altere agora o programa *main* de forma a trabalhar com um vector com ponteiros para os 6 elementos

```
vector<ATOM*> vperiodic(6);
```

c) Finalmente, realize um novo programa *main* que faça a gestão dos 6 elementos com um *map*, realizando as seguintes acções:

```
int main() {
  // criar mapa
  map< string, ATOM > mperiodic;
  // preencher mapa com os 1os 6 elementos
  ...
  // imprimir no ecrâ todas as entradas do mapa
  ...
}
```

Exercício 23 : O teste de Kolmogorov-Smirnov permite em estatística a comparação das formas de uma distribuição contínua de uma dada variável com uma distribuição de referência (*template function*). Este teste permite assim validar o grau de acordo de uma distribuição com a sua referência, através da determinação da diferença máxima entre a distribuição acumulada,

$$F(x) = \int_{x_{min}}^{x} f_{distrib}(x)\, dx$$

e a distribuição acumulada de referência.
Utilizando esta ideia, neste problema pretende-se estimar a qualidade de um gerador aleatório, que na essência deve permitir gerar números descorrelados entre si, gerando desta forma uma distribuição "plana".

a) Realize então o seguinte código:

- uma função *GetRandom* que retorne um número aleatório no intervalo $[x_{min}, x_{max}]$

```
// returns random number between [xmin, xmax]
// xmin = minimal value
// xmax = maximal value

double GetRandom(double xmin, double xmax);
```

- uma função *Fobs* que retorne a distribuição acumulada da variável aleatória x num número de intervalos N,

$$F(x_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i \qquad m = 1, 2, ..., N$$

e que receba o número de vezes que deve chamar a função geradora da variável x, os limites dos intervalos de x e um ponteiro para a função geradora.

```
// returns accumulated distribution on x intervals
// NCALLS                          = number of times generation function is calle
// vector<double> x                = x boundaries on the N intervals (N+1 boundar
// double (*f) (double, double)) = pointer to generating function

vector<double> Fobs(int NCALLS, vector<double> x, double (*f) (double, double))
```

Nota: garanta que a distribuição acumulada é normalizada a 1.

- uma função *KolmogorovTest* que retorne a diferença máxima entre a distribuição acumulada e a distribuição de referência

```
// returns maximal distance (F distance) between template and observations
// vector<double> x    = x boundaries on the N intervals (N+1 boundaries)
// vector<double> Fx   = accumulated distribution
// vector<double> Fref =  reference distribution

double KolmogorovTest(vector<double> x, vector<double> Fx, vector<double> Fref)
```

b) Realize agora um programa *main* que faça a geração de 10 000 números aleatórios no intervalo $[0, 5]$ (dividido em bins de 0.1) e calcule no final a diferença de kolmogorov.

c) Repita o procedimento para 1 000 amostras de 10 0000 números aleatórios e faça um *plot* com a distribuição das diferenças de kolmogorov.

Exercício 24 : Pretende-se realizar uma estrutura *map* usando a biblioteca STL do C++ que armazene matrizes de dimensão $n \times m$ qualquer, usando uma chave do tipo *string* , emparelhada com uma estructura *vector* .

```
map <string, ...> Mmap;
```

a) defina uma estrutura STL capaz de armazenar as matrizes abaixo, definindo uma função que devolva a estrura STL

```
---? GetMatrix(int nrows, int mcols, int** M);
```

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 10 & 1 & 5 \\ 15 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 2 \\ 15 & 1 \end{bmatrix}$$

b) armazene as três matrizes A, B e C sob as chaves "A", "B"e "C"no mapa *Mmap*.

c) crei uma função *Mmapfind* que procure uma chave e retorne a matriz.

```
---? Mmapfind(string c);
```

1.4 Programaçao com classes

Exercício 25 : A classe *Box* incompleta é descrita no seguinte ficheiro *header*:

Box.h

```
class Box {
public:
Box(); //cubo de lado 1
Box(float fx, float fy, floatz);
...
private:
float x;
float y;
float z;
};
```

a) O seguinte programa *main* utiliza esta classe e realiza operações sobre objectos por ela descritos. Complete a declaração da classe de forma a realizar as tarefas pedidas no programa e implemente os respectivos métodos num ficheiro *Box.C*. Corra o programa *main* no final.

```
int main() {
  // criar dois cubos de lado 1
  Box B1;
  Box B2 = B1;

  // somar dois cubos
  Box B3 = B1 + B2;

  // criar dois paralelipipedos
  Box B5(1,1,2);
  Box B6(B5);

  // somar os dois paralelipipedos
  Box B7;
  B7 = B5 + B6;

  // calcular volumes
  float volume_3 = B3.GetVolume();
  float volume_7 = B7.GetVolume();
```

```
  cout << "volumes: " << volume_3 << " " << volume_7 << endl;
}
```

b) Admita agora que no programa *main* se adicionam objectos *Box*, utilizando os seus ponteiros:

main.C

```
  ...
  Box* pB2 = new Box();
  Box* pBresultado = pBoriginal->Add(pB2);
  ...
```

Complete a declaração da classe Box e implemente o código C++ necessário.

Exercício 26 : Construi-se uma classe genérica *pessoa* que pretende possuir as características associadas às pessoas (aqui tratadas como objectos!). A declaração da classe é a seguinte:

```
  class pessoa {

  public:
  //constructor (nome do aluno, data de nascimento)
   pessoa(string, unsigned int);
   void SetName(string); //set name
   void SetBornDate(unsigned int); //nascimento
   string GetName(); //get name
   unsigned int GetBornDate();
   virtual void Print(); // print

  private:
   string name; //nome
   unsigned int DataN; //data de nascimento
}
```

a) Implemente o código associado aos *function members* da classe escrevendo sempre em cada método o código necessário que imprima o nome da classe e do método *[class::method]* de forma a sabermos quando é chamado. Compile o código e veja se não existem erros.

b) Para testar o código da classe realize um programa *main* onde construa um *array* de 10 objectos pessoa:

```
pessoa P[10];
```

Que constructor é chamado? Corrija o código e declaração da classe caso existam erros.

c) Admita agora que pretendia construir um *array* de N pointers para objectos pessoa. Construa uma função que retorne o ponteiro para o *array* .

```
pessoa** DoArray(int N);
```

Inclua a informação do nome dos alunos e a sua data de nascimento.

Exercício 27 : Construa agora uma classe *alunoIST* que derive da classe *pessoa*. A nova classe deverá ter novos *data members* como por exemplo:
- Número do aluno: *int number*
- Curso: *string branch*
e novas funções que interajam com os novos data members.

```
class alunoIST : public pessoa {
  public:
   //constructor (numero e nome do aluno)
   alunoIST(int number, string curso);
   void SetNumber(int);
   int GetNumber();
   void Print();
   ...
  private:
   int number;
   string branch;
}
```

a) Implemente o código da nova classe.

b) Construa um *array* de objectos *alunoIST* com conteúdo.

c) Construa uma função,

```
//function prototype
void Dummy(pessoa**, const int);  //int has the number of array entries
```

que receba um *pointer* genérico para um *array* de pointers de objectos *pessoa*. No interior da função circule sobre todos os objectos e chame a função membro *Print()*. A função que é chamada pertence a que class (*pessoa* ou *alunoIST*)?

Exercício 28 : Na sequência das classes anteriores podemos prosseguir o exercício criando agora a classe *Turma* que não necessita de derivar de nenhuma das classes anteriores, antes usando os objectos da classe *alunoIST*. Uma declaração ainda que incompleta da classe seria:

```
class Turma {
  public:
  Turma(string, int n); //nome da turma, num de alunos
  ~Turma(); //destructor
```

```
  private:
  alunoIST **va; //pointer to array de pointers de objectos
  int Nalunos;
}
```

a) Complete a declaração da classe de forma a incluir os seguintes métodos:
   - *default constructor*
   - *copy constructor*
   - *copy assignment*
   - métodos *void AddAluno(alunoIST* const)* e *alunoIST* FindAluno(int numero)*
   - método *int GetNalunos()*

b) Implemente o código da classe e em particular o método *alunoIST* FindAluno(int)* deveria ser implementado da forma mais eficaz usando a procura dicotómica.

c) Construa um programa *main()* onde possa testar a classe definindo a turma de MEFT T21.

Exercício 29 : O movimento de um corpo a uma dimensão pode ser descrito pela classe **Motion1D**, que se apresenta de seguida. Nesta classe registam-se as N posições do corpo e os tempos.

Motion1D.h

```
class Motion1D {
public:
  Motion1D(int N=0);
  virtual ~Motion1D();

  void SetMotion(float* t, float* x, int);

  int GetN(); //returns number of points
  float* GetTimes(); // returns array of times
  float* GetPositions(); //returns array of positions

  virtual void Print();
  virtual float TotalDistance(); //total distance
  virtual float MeanVelocity(); //mean velocity

protected:
  int N; //number of points
  float* t; //time array
  float* x; //position array
}
```

O movimento uniforme a uma dimensão pode ser descrito por uma classe **Uniform1D** que derive da classe **Motion1D**.

Uniform1D.h

```
class Uniform1D : public Motion1D {
public:
  Uniform1D(int fN=0, float ti=0., float xi=0., float dt=0., float vel=0.);
  ~Uniform1D();

  void Print();
private:
  float ti; // initial time
  float dt; // time duration
  float xi; // initial position
  float vel; // velocity (m/s)
};
```

Uniform1D.C

```
Uniform1D::Uniform1D(int fN, float ti, float xi, float dt, float vel) : Motion1D(fN) {
  // t and x arrays are created by Motion1D constructor
  for (int i=0; i<N; i++) {
     ... //fill here t and x arrays
  }
}

void Uniform1D::Print() {
  Motion1D::Print(); //call Print from base class
  printf("ti=%f, xi=%f, vel=%f \n", ti, xi, vel);
}

}
```

Produza um programa **Runiform1D.C** onde realize as seguintes acções:

a) Instancie um objecto **Uniform1D** na memória *heap* com 100 pontos discretos, durante 1000 segundos de tempo e a uma velocidade de 10 m/s. Imprima os valores usando o método Print().

```
// instantiate object Uniform1D
Uniform1D *p1D = new Uniform1D(100, 0., 0., 1000., 10.); // 1000 sec
p1D->Print();
```

b) Construa um array de dois ponteiros do tipo *Motion1D* que contenha os seguintes objectos *Uniform1D* e *Motion1D*. Inicialize os valores de Motion1D com 400 pontos de tempo e distância percorrida por um corpo em queda livre.

```
// make an array with Motion1D derived objects
```

```
Motion1D* pm[2] = {
  new Uniform1D(100, 0., 0., 500., 20.),
  new Motion1D(400)
};
// fill Motion1D object with values
...
```

c) Imprima através do método Print() os valores contidos em ambos os objectos.

d) Construa agora um array de dois objectos *Motion1D*, com 400 pontos. Inicialize os valores de um objecto Motion1D com 400 pontos de tempo e distância percorrida por um corpo em queda livre e o outro com movimento de um corpo atirado ao ar na vertical com velocidade inicial de 1 m/s.

```
Motion1D m[2] = {
  ...
};
...
```

e) Remova os objectos criados da memória.

2 Programação com objectos ROOT

Exercício 30 : Lance o root em sessão interactiva e utilize o interpretador de ROOT para correr código C++ que realize as seguintes tarefas:

a) crie um *array* de 2 histogramas *TH1F* utilizando o default constructor.

b) crie um *array* de 2 histogramas *TH1F* com as seguintes características numa só linha de comandos: 10 canais e limites inferior e superior respectivamente, 0.5 e 10.5

c) crie um *array* de 2 histogramas *TH1F* com 5 canais de largura variável dada por: $\mathbf{0.5, 1.5, 4.5, 2.0, 1.0}$

d) crie agora o *array* de 2 histogramas *TH1F* utilizando o default constructor e inicializando-os de seguida com as características da alínea b)

e) crie agora um *array* de 2 ponteiros que aponte para os histogramas com características da alínea b)

f) construa uma macro **mHisto.C** onde reuna o conjunto de operações da alíena d) e execute-a.

Exercício 31 : Lance o root em sessão interactiva e utilize o interpretador de ROOT para correr código C++ que realize as seguintes tarefas:

a) faça um array de dois inteiros sem inicializar os valores e verifique os valores existentes em cada posição do array.

b) liste os objectos existente em memória do ROOT.
Nota: utilize a classe TROOT, consultando a sua documentação em root.cern.ch, e em particular o ponteiro já existente para um objecto TROOT instanciado

c) construa um *array* de três objectos histograma que armazene floats (TH1F) entre os valores -10. e 10, com canais de largura 0.2

```
//a minha tentativa para mostrar a declaração
TH1F h[3]; //que constructor é chamado?
```

d) preencha o primeiro histograma com números aleatórios entre -5 e 5 e o segundo e terceiro histogramas com números aleatórios distribuídos de acordo com as funções

$$\begin{cases} f(x) & = 2x^2 \\ g(x) & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} \end{cases}$$

Verifique consultando as classes *TF1* e *TFormula* como pode escrever as expressões das funções.

e) Liste agora os objectos existentes em memória de ROOT e verifique que os três histogramas que construiu se encontram lá.

f) Defina agora um *array* de duas funções uni-dimensionais

```
TF1 f[2];
```

onde implemente as seguintes funções:

$$\begin{cases} f_1(x) & = A\ sin(x)/x \quad \text{com } x = [0, 2\pi] \quad \text{e } A = 10. \\ f_2(x) & = Ax^4 + Bx^2 - 2 \quad \text{com } x = [-4, 4] \quad \text{e } A = 4\ B = 2 \end{cases}$$

g) Liste de novo os objectos existentes em memória de ROOT e verifique que os três histogramas que construiu e as duas funções se encontram lá.

h) Procure o ponteiro para o segundo histograma usando a classe TROOT (ou melhor, o ponteiro disponível para o objecto TROOT instanciado).

i) Tendo o ponteiro para o objecto histograma, desenhe-o no ecran, usando o método da class *TH1*, *Draw()*.

j) Obtenha agora o número de canais (bins) do histograma, usando o método da class *TH1*, *GetNbinsX()*. Teve sucesso com esta operação?

k) Desenhemos agora cada um dos outros histogramas e cada uma das funções.

l) Antes de abandonar a sessão de ROOT armazene os objectos construídos num ficheiro ROOT.

Exercício 32 : Reúna agora todos os comandos C++ que introduziu linha a linha no exercício anterior, numa macro de nome **mRoot1.C**. Corra a macro de forma interpretada, usando quer os métodos da classe *TROOT*:

a) **Macro("macro-name")**

```
root> gROOT->Macro("mRoot1.C")
```

b) **LoadMacro("macro-name")**

```
root> gROOT->LoadMacro("mRoot1.C")
```

Esta forma permite ter um ficheiro C++ com várias funções que são interpretadas e carregadas em memória e que podem ser chamadas de seguida na linha de comandos ROOT.

c) quer os comandos

```
root> .x mRoot1.C //execute macro
root> .L mRoot1.C //load macro (but not execute it)
```

Exercício 33 : No exercício anterior o código C++ existente na macro **mRoot1.C** foi interpretado. Pretende-se agora compilar este mesmo código usando o compilador ACLIC do ROOT. Para tal execute na linha de comandos ROOT,

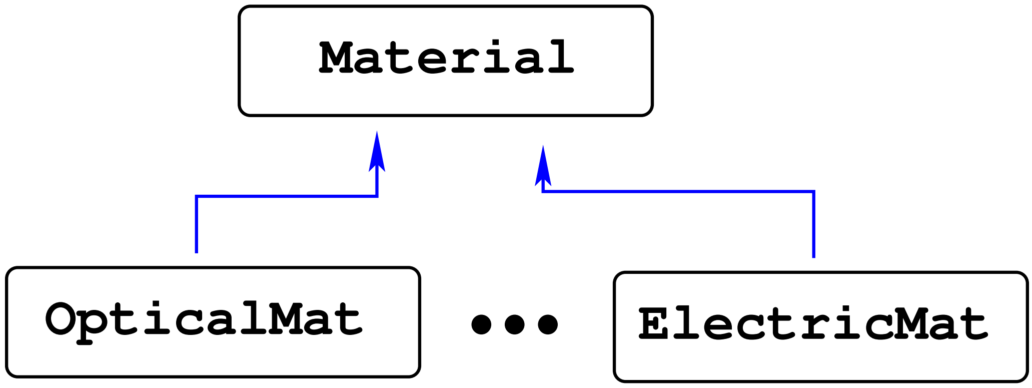
```
root> .L mRoot1.C+ //compile and load macro (but not execute it)
```

que produzirá uma biblioteca *shareable* **mRoot1.so**

Exercício 34 : O índice de refracção do material diamante em diferentes comprimentos de onda é dado na tabela que se segue.

color	wavelength (nm)	index
red	686.7	2.40735
yellow	589.3	2.41734
green	527.0	2.42694
violet	396.8	2.46476

Neste exercício pretende-se estruturar a informação relacionada com os materiais num código C++. Para isso, podemos imaginar uma hierarquia de classes constituída por uma classe de base **Material**, que contenha as características básicas de um material, como sejam o seu nome e a sua densidade, e classes derivadas onde sejam implementados outras características dos materiais.



```
class Material {
 public:
 Material(string fname="", Double_t fdens=0): name(fname), density(fdens){;}
 string GetName() {return name;}
 Double_t GetDensity() {return density;}
 virtual void Print();

 protected:
 string name;
 Double_t density;
};
```

Podemos, por exemplo, agrupar os materiais ópticos numa classe *OpticalMat* que derive da classe *Material* e onde vamos colocar as características ópticas do material como sejam o índice de refração. A classe *OpticalMat* deve possuir métodos que permitam:

- definir o índice de refracção
- ajustar por uma lei o índice de refracção em função do comprimento de onda
- desenhar o índice de refracção (usando a classe cFCgraphics que será disponibilizada)

```
class OpticalMat : public Material {
public:
  ...
  void SetRefIndex(vector<pair<float,float> >); //pair(wavelength, ref index)
  vector<pair<float,float> > GetRefIndex();
  void SetFitRefIndex(TF1*); //provide function to be fitted through TF1
  TF1* GetFitRefIndex(); //return TF1 pointer to fit function
  void DrawRefIndexPoints(); //draw points
  void DrawFitRefIndex(); //draw points and function
  void Print(); //define print for this class

private:
  // method with the fit function
  double FitRefIndex(double* x, double* par);
  // we need to store the refractive index characteric of the material
  ...
  // we need to store a TF1 pointer to the fit Ref Index function
  TF1* f;
```

Nota: A lei de variação do índice de refracção (n) *com o comprimento de onda* (λ) *é conhecida como lei de dispersão do material e pode ser ajustada com a fórmula de Sellmeir.*

$$n^2(\lambda) = 1 + \sum_i \frac{B_i \lambda^2}{\lambda^2 - C_i}$$

em que cada termo da série representa uma absorção na região de comprimentos de onda $\sqrt{C_i}$*. Para o ajuste do diamante pode-se usar a expressão:*

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2 - 0.028} + \frac{C}{(\lambda^2 - 0.028)^2} + D\lambda^2 + E\lambda^4$$

com λ *em* μm

Exercício 35 : Desenvolvamos agora uma classe **PixelDet** que simule um detector constituído por um conjunto 100×100 de píxeis quadrados de dimensão 5 mm. Cada pixel funciona de forma binária, isto é, ou está activo ou inactivo. Os píxeis possuem ruído intrínseco descorrelado cuja probabilidade é de 0.5%. O sinal físico deixado pelo atravessamento de uma partícula de carga eléctrica não nula são 10 pixeis distribuídos aleatoriamente numa região de 2×2 cm^2. Na resolução do problema, podemos associar um sistema de eixos x, y ao detector cuja origem esteja coincidente com o vértice inferior esquerdo do detector. Realize a implementação dos métodos da classe que julgar necessários de forma a simular acontecimentos físicos constituídos por ruído e sinal:

a) **simule o ruído no detector:**
realize um método que simule o ruído e devolva um *array* com o número dos pixeis ruidosos.

```
int* EventNoise(float probability);
```

b) **simule o sinal deixado pela partícula no detector:**
realize um método que simule o sinal de uma partícula que passe na posição (x, y) e devolva um *array* com o número dos pixeis activos com sinal.

```
int* EventSignal(float a[2], float signal); //signal=10
```

c) Realize um método que permita visualizar o acontecimento no detector (por exemplo, um histograma bi-dimensional) com uma grelha a definir os pixeis.

```
...? DrawEvent(); //escolha o objecto ROOT a retornar
```

d) Realize um método que em cada acontecimento reconstrua a posição onde a partícula cruzou o detector e devolva ainda o conjunto dos hits associados à reconstrução.

```
// Evt pode ser uma estrutura a definir no ficheiro .h
// que reúna a informação da posição reconstruída do
// evento e ainda quais os pixeis que estão associados
Evt RecEvent();
```

e) Realize ainda um método que permita fazer o *dump* do conteúdo do acontecimento.

Realize um programa principal **mainPixelDet** onde realize a simulação de 1000 acontecimentos que passem na posição $(4cm, 4cm)$ e obtenha a distribuição da distância reconstruída à verdadeira.

3 Representação dos números em computador e arredondamentos

Exercício 36 : Considere o número real de precisão simples e 32 bits,

sinal	expoente	mantissa
0	0000 1110	1010 0000 0000 0000 0000 000

a) Determine o valor do expoente verdadeiro.

b) Mostre que a mantissa vale $\mathbf{1.625}$

c) Determine o valor do número real.

Exercício 37 :

a) Escreva uma funçao em C++ que determine os limites *underflow* e *overflow* do seu computador e linguagem de programação, dentro de um factor $\mathbf{2}$.

b) Obtenha os valores limite de underflow e overflow para números reais de precisão simples.

c) Obtenha os valores limite de underflow e overflow para números reais de precisão dupla.

Exercício 38 : Escreva uma funçao em C++ que determine a precisão do computador. Por exemplo, implemente um algoritmo em que se adicione ao número $\mathbf{1.}$ um número cada vez mais pequeno até que este seja inferior à precisão e a soma seja $\mathbf{1}$.

a) para números reais de precisão simples.

b) para números reais de precisão dupla.

Exercício 39 : Habitualmente considera-se que os erros de arredondamento são de natureza aleatória. Para verificarmos essa hipótese podemos desenvolver um código em C++ que calcule os erros de arredondamento associados a uma dada operação de cálculo em precisão *float* e usando como referência a representação *double* do resultado. Defina uma classe em C++ de nome **FCtools** onde implemente os seguintes métodos estáticos:

a) Um método que determine o erro de arredondamento relativo à operação $\sqrt{i}$, com $i = 1, \cdots, 1000$.

```
static double RoundOffError(int i);
// retorna o erro relativo de arredondamento
```

b) Um método que retorne um objecto *TGraph* cuja abcissa seja o valor de i e a ordenada o erro de arredondamento.

```
TGraph* RoundOffErrorG(int imin, int imax);
```

c) Um método que retorne um histograma unidimensional *TH1D* com a distribuição dos erros de arredondamento.

```
TH1D* RoundOffErrorH(int imin, int imax);
```

Exercício 40 : Resolva a equação quadrática $x^2 - 2bx + c = 0, \quad b^2 > c$ pode ser feito com recurso à formula resolvente dando lugar à seguinte solução:

$$x_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - c}$$

a) Mostre que o produto das duas soluções nos dá a seguinte equação:

$$x_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - c}$$
$$x_1 \times x_2 = c$$

b) As soluções da equação podem ser dadas pelos seguintes algoritmos:

(a) $x_1 = b + \sqrt{b^2 - c}$
$x_2 = b - \sqrt{b^2 - c}$

(b) $if\ b > 0$
$x_1 = b + \sqrt{b^2 - c}$
$x_2 = c/x_1$
$else$
$x_2 = b - \sqrt{b^2 - c}$
$x_1 = c/x_2$
$endif$

Qual dos algoritmos tem menor erro? Porquê? Crie um código C++ em que resolve o sistema para $b = 0.03, \; c = 0.0008$ e verifique a sua conclusão anterior.

Exercício 41 : A derivada numérica da função $\cos(x)$ pode ser calculada recorrendo à expansão em série de Taylor de primeira ordem.

a) Mostre que se pode escrever a seguinte igualdade numérica:

$$\frac{\cos(x+\delta)-\cos(x)}{\delta}+\sin(x)\simeq 0$$

b) Crie um programa em C++ que verifique a igualdade anterior para $x=3$ e $\delta=10^{-11}$.

c) É possível reescrever a diferença entre dois cosenos, usando a seguinte identidade trigonométrica:

$$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\ \sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

Assim, a equação demonstrada na alínea a) pode ser rescrita como:

$$-\frac{2}{\delta}\sin\left(\frac{2x+\delta}{2}\right)\ \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)+\sin(x)\simeq 0$$

Crie uma nova função em C++ que permita avaliar esta expressão e comprare com o valor obtido b). Justifique.

Parte II

Resolução numérica de problemas em C++

4 Sistemas Lineares

Exercício 42 : A definição de uma matriz é mais facilmente implementável usando uma classe que armazene os elementos lineares da matriz, linha ou coluna.
Neste problema pretende-se desenvolver a classe **Vec** que depois posteriormente poderá ser usada como objecto na manipulação de matrizes. A declaração da classe que se segue mostra os *data members* que esta deve possuir:

```
class Vec {
  public:
  ...
  private:
  int N; //number of elements
  double *entries; // pointer to array of doubles
};
```

Proceda-se então à implementação dos métodos da classe num ficheiro *Vec.C* e às respectivas declarações num ficheiro *Vec.h*, de forma a que a classe possa realizar as operações que se enunciam de seguida:

a) **Os construtores** desta classe devem ser tais que nos permitam a construção dos vectores usando as seguintes formas:

```
Vec v1(10); //array with 10 values set to zero
Vec v2(10,5.); //array with 10 values set to 5.

double a[]={1.2, 3.0, 5.4, 5.2, 1.0};
Vec v1(5,a); //array with 5 values given by "a" pointer

Vec v2(v1); //define a vector by using another one
```

b) Defina o método *SetEntries* de forma a permitir redefinir um objecto *Vec* de n elementos, com o conteúdo de um array

```
void  SetEntries (int n, double*);
```

Escreva um pequeno programa *main* onde usando o método *SetEntries* copie o conteúdo da matriz C para um array de objectos *Vec*

```
int main() {
 // matrix 5x5
 double cm[][5] = {...};

 //array of Vec's for storing matrix rows
 Vec cv[5];

 //copy rows as arrays into Vecs
 for (int i=0; i<5; i++) {
   cv[i].SetEntries(...);
 }
}
```

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{1.0} & \mathbf{7.0} & \mathbf{5.0} & \mathbf{3.0} & \mathbf{-3.0} \\ \mathbf{5.0} & \mathbf{2.0} & \mathbf{8.0} & \mathbf{-2.0} & \mathbf{4.0} \\ \mathbf{1.0} & \mathbf{-5.0} & \mathbf{-4.0} & \mathbf{6.0} & \mathbf{7.6} \\ \mathbf{0.0} & \mathbf{-5.0} & \mathbf{3.0} & \mathbf{+3.2} & \mathbf{3.3} \\ \mathbf{1.0} & \mathbf{7.0} & \mathbf{2.0} & \mathbf{2.1} & \mathbf{1.2} \end{bmatrix}$$

c) Adicione ao programa a possibilidade de ler a matriz a partir de um ficheiro *matrix.txt* cujo conteúdo seria, para a matriz anterior:

```
// matrix elements
1.0   7.0   5.0    3.0   -3.0
5.0   2.0   8.0   -2.0    4.0
1.0  -5.0  -4.0    6.0    7.6
0.0  -5.0   3.0   +3.2    3.3
1.0   7.0   2.0    2.1    1.2
```

Construa uma classe auxiliar *FCtools* que possua os seguintes métodos para ler o ficheiro:

```
 class FCtools {
  public:
  vector<string> ReadFile(string); //file name, returns lines
  vector<Vec> ReadFile(string); //file name, returns vectors of Vec's
  Vec* ReadFile(string, int&); //file name, returns pointer to array of Vec's, int pr
 };
```

A leitura da matrix existente no ficheiro de texto seria então feita da seguinte forma:

```
 int main() {
  (...)
  int n=0;
```

```
 Vec* cvp = ReadFile("matrix.txt", n);
 (...)
}
```

d) Complete agora o programa *main* anterior de forma a fazer um histograma bidimensional e mostrá-lo (*Draw()*) no ecran, usando para a tal a classe *cFCgraphics*.
Nota: ara aceder aos elementos da classe *Vec* necessita de definir o método *At(int)*.

```
int main() {
(...)
// instantiate 2-dim histogram
TH2F *h2 = new TH2F(...);
// fill histogram with matrix values
for (int i=0; i<...) { //loop on rows
    for (int j=0; j<...) { loop on columns
       h2->Fill(i,j,cv[i].At(j));
    }
}
// graphics class
cFCgraphics G;
(...)
```

e) Para completar a classe *Vec*, devem ser ainda definidos os seguintes **overloading de operadores** de forma que possamos:
- igualar dois vectores (=)
- somar dois vectores (+=, +)
- subtrair dois vectores (-=, -)
- aceder a um elemento i do vector através de $v[i]$
- poder fazer o negativo (-) ou o positivo (+) do vector
- multiplicar dois vectores (a[i] = b[i]*c[i])
- multiplicar um vector por um escalar (a[i] = b[i]*λ)

f) Devem ser também definidos os métodos **size, dot** que permitirão respectivamente:
- *size*: obter a dimensão do vector
- *dot*: fazer o produto interno com outro vector

g) Defina, por último, os métodos *void Print()* e *void swap(int,int)* que permita, respectivamente, imprimir o conteúdo de um vector e trocar dois elementos de ordem.

Exercício 43 : Neste problema iremos utilizar a classe *Vec* para manipular a matriz $\mathbf{C}$ dada no problema anterior. Escreva um programa *main* onde realize as seguintes acções:

a) Recupere num *array* de 5 objectos *Vec* as linhas (rows) da matriz $\mathbf{C}$ e imprima com a ajuda da função *Print()* os valores no ecrã.

b) Obtenha um objecto *Vec* que resulte da multiplicação da constante $\mathbf{2}$ pela primeira linha da matriz.

c) Obtenha a nova matriz $\mathbf{D}$ sob a forma de um *array* de $\mathbf{5}$ objectos *Vec*, que resulte da seguinte operação entre as duas primeiras linhas da matriz $\mathbf{C}$:
$\boldsymbol{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{C_{21}}{C_{11}} \times L_1}$

d) Multiplique as duas primeiras linhas da matriz $\mathbf{C}$ e obtenha um novo objecto *Vec* com o resultado.

e) Implemente a função,

```
void swap(Vec&, Vec&);
```

que troca duas linhas da matriz. Construa com o auxílio desta função uma matriz $\mathbf{E}$ onde a $\boldsymbol{4a}$ linha seja trocada com a $\boldsymbol{5a}$ linha da matriz $\mathbf{C}$.

Exercício 44 : Considere a seguinte matriz $\mathbf{M_{3\times3}}$ preenchida com os seguintes números:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{-3/2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

a) Defina a classe em C++ *FCmatrixTeste* que manipule esta matriz e que armazene o seu conteúdo nas diferentes formas expressas na seguinte definição da classe:

```
classe FCmatrixTeste {
  public:
  FCmatrixTeste();
  FCmatrixTeste(double** fM, int fm, int fn); //matrix fm x fn
  FCmatrixTeste(double* fM, int fm, int fn);
  FCmatrixTeste(vector<Vec>);
  private:
  double** M1;
  double* M2;
  vector<Vec> M3;
  int m; //nb rows
  int n; //nb cols
  int flag; // integer with a definition of which constructor was used
};
```

b) Implemente os seguintes métodos da classe que permitem obter os conteúdos das linhas (rows) e colunas (columns) das matrizes.

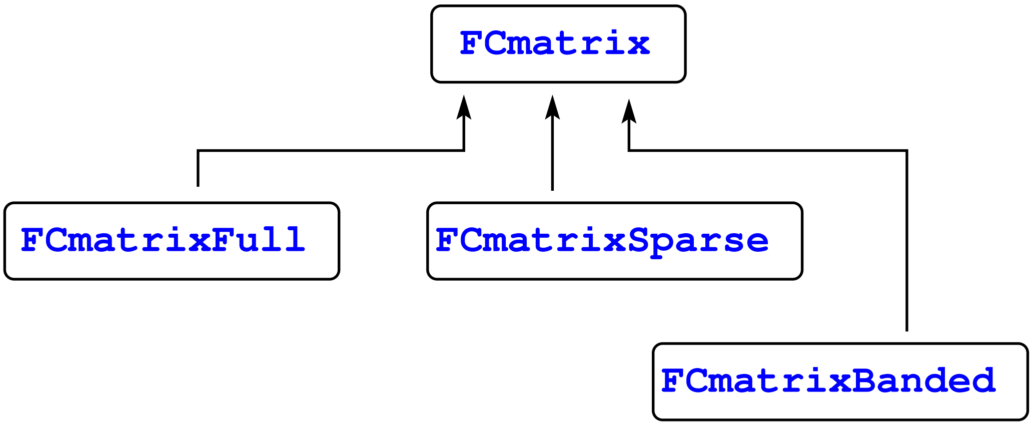
```
Vec GetRow(int i); // row i
Vec GetCol(int i); // column i
```

c) Implemente agora o *operador[]* de forma a aceder a cada um dos elementos da matriz.

```
int main() {
  ...
  FCmatrixTeste A ...;
  cout << A[1][4] << endl;
  A[1][4] = 3.;
  cout << A[1][4] << endl;
}
```

Realize a implementação deste método para os três casos de armazenamento.

Exercício 45 : O armazenamento e manipulação de matrizes pode ser feito com o auxílio de uma classe genérica de base *FCmatrix* e de classes derivadas que tenham em conta as particularidades dos conteúdos das matrizes. Existem as matrizes que necessitam de um armazenamento integral (*FCmatrixFull*) de todos os elementos, outras matrizes que possuem muitos zeros entre os seus elementos (*FCmatrixSparse*) e ainda matrizes que possuam estruturas em banda como por exemplo as matrizes tridiagonais (*FCmatrixBanded*).



a) A classe de base pode ser feita a partir da classe desenvolvida no exemplo precedente. Nela devem ser declarados e implementados os seguintes métodos:

- os construtores que permitam armazenar os elementos necessários e suficientes para a reconstrução da matriz, na classe

```
classe FCmatrix {
public:
FCmatrix();
FCmatrix(double** fM, int fm, int fn); //matrix fm x fn
FCmatrix(double* fM, int fm, int fn);
FCmatrix(vector<Vec>);
(...)
protected:
vector<Vec> M;
string classname;
};
```

- os métodos puramente virtuais *GetRow*, *GetCol*, *Determinant* que deverão ser implementados nas classes derivadas

```
classe FCmatrix {
public:
(...)
// operators
virtual Vec& operator[] (int) = 0;
// methods
virtual Vec GetRow(int i) = 0; // retrieve row i
virtual Vec GetCol(int i) = 0; // retrieve column i
virtual double Determinant() = 0;
(...)
protected:
vector<Vec> M;
string classname;
};
```

- o método *Print* que imprima os elementos armazenados na matriz (e não a matriz reconstruída, porque isso só será possível nos métodos implementados em cada classe derivada)

```
classe FCmatrix {
public:
(...)
virtual void Print();
(...)
protected:
vector<Vec> M;
string classname;
};
```

- Os métodos *GetRowMax* e *GetColMax*:
  O método **GetRowMax**, retorna o índice da coluna (0,1,...) que possui na linha i, o elemento máximo absoluto (módulo)
  O método **GetColMax**, retorna o índice da linha (0,1,...), a partir da linha j, que possui o elemento máximo (módulo) relativo à escala s (linha a linha)

```
classe FCmatrix {
public:
(...)
// row max element index
virtual int GetRowMax(int i=0) = 0;
// row max element index  (scaled by s, from j on)
virtual int GetColMax(int j=0) = 0;
protected:
vector<Vec> M;
string classname;
};
```

Nota: usando os métodos GetRow e GetCol poderíamos definir aqui inteiramente o método Print(), não necessitando de ser definido como virtual.

b) Implemente a classe derivada *FCmatrixFull*, em que todos os elementos da matriz são armazenados, e ainda os métodos que envolvem os diferentes operadores tal como se mostra na declaração seguinte:

```
classe FCmatrixFull : public FCmatrix {
 public:
  // constructors
  FCmatrixFull();
  FCmatrixFull(double** fM, int fm, int fn); //matrix fm x fn
  FCmatrixFull(double* fM, int fm, int fn);
  FCmatrixFull(vector<Vec>);
  // copy constructor
  FCmatrixFull(const FCmatrixFull&);
  // operators
  FCmatrixFull operator+(const FCmatrix&); // add 2 matrices of any kind
  FCmatrixFull operator-(const FCmatrix&); // sub 2 matrices of any kind
  FCmatrixFull operator*(const FCmatrix&); // mul 2 matrices of any kind
  FCmatrixFull operator*(double lambda); // mul matrix of any kind by scalar
  FCmatrixFull operator*(const Vec&); // mul matrix by Vec
  // virtual inherited
  Vec GetRow(int i); // retrieve row i
  Vec GetCol(int i); // retrieve column i
  double Determinant();
  void Print();
  void swapRows(int,int);
  ...
 private:
  int rowindices[fm]; // row indices (0,1,2,...)
};
```

c) Teste as classes desenvolvidas realizando um programa *main* onde manipule as seguintes matrizes:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -3/2 & 5 \\ 1/2 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 8 & -1/2 \\ 5/2 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
int main() {
  // build matrices
  A[][4] = {...};
  B[][3] = {...};
  // build objects
  FCmatrixFull MA...
  FCmatrixFull MB...
```

```
  // use operators
  double a=2.5;
  FCmatrixFull MC(a*MA); //copy constructor and operator*
  FCmatrixFull MD(MA*MB);
  // print
  MC.Print();
  MD.Print();
  // other methods
  MD.Determinant();
  MC.swapRows(1,2);
  MC.Print();
}
```

Exercício 46 : Para a resolução de sistemas de equações é conveniente definirmos a classe *EqSolver* que possua os diferentes métodos de solução.

a) Definamos então a classe **EqSolver**, que implemente os diferentes algoritmos de resolução do sistema.

```
#include "Vec.h"
class EqSolver {
 public:
  EqSolver();
  EqSolver(const FCmatrix&, const Vec&); // matriz M e vector de constantes B
  // set
  void SetConstants(const Vec&);
  void SetMatrix(const FCmatrix&)
  //eliminação de Gauss:
  //resolução do sistema pelo método de eliminação de Gauss
  Vec GaussEliminationSolver();
  Vec LUdecompositionSolver();
 private:
 //decomposição LU com |L|=1
 void LUdecomposition(FCMatrix&, vector<int> index);
 /* return triangular matrix and changed vector of constants */
 void GaussElimination(FCmatrix&, Vec&);
  FCmatrix *M; //matriz de coeffs
  Vec b; //vector de constantes
};
```

b) Resolva o seguinte sistemas de equações lineares por ambos os métodos:
1)

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \quad (1) \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -16 \quad (2) \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 17 \quad (3) \end{cases}$$

2)

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{8} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \qquad [\mathrm{b}] = \begin{pmatrix} \mathbf{16} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

5 Raízes de funções

Exercício 47 : O ponto de Lagrange é o local entre a Terra e a Lua onde um satélite aí colocado, possuirá uma órbita em sincronia total com a Lua. Do ponto de vista da dinâmica, nesse ponto o balanço das forças gravíticas da Terra e da Lua produzem uma força resultante que assegura a manutenção do satélite na órbita.

a) Assumindo órbitas circulares, mostre que a distância radial a partir do centro da Terra a que se encontra o satélite, obedece à seguinte equação:

$$\frac{G\,M_E}{r^2} - \frac{G\,M_L}{(R-r)^2} = \omega^2 r$$

onde ω é a veclocidade angular do satélite e da Lua.

b) Construa um programa em C++, utilizando vários métodos de determinação de raízes, para calcular numericamente o raio orbital r.

Exercício 48 : Um canhão encontra-se colocado a uma altura h e pode ser disparado com um ângulo θ, medido com a horizontal, variável. Desprezando as forças de atrito,

a) Escreva as equações do movimento da bala.

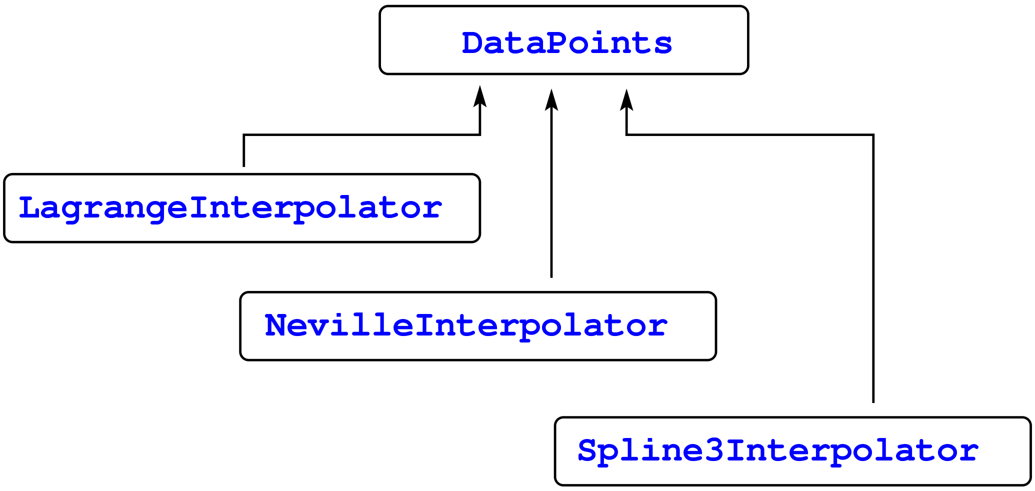
b) Mostre que a distância horizontal percorrida pela bala obedece à seguinte equação:

$$x = \frac{v_o\,\cos\theta}{g}\left(v_0\,\sin\theta + \sqrt{(v_0\,\sin\theta)^2 + 2hg}\right)$$

c) Construa um programa em C++ que receba a partir do terminal a velocidade inicial da bala (v_0) e a distância horizontal que pretende alcançar (x) e calcule o ângulo θ com que o disparo deve ser feito.

6 Interpolação

Exercício 49 : Para a realização de interpolações, pode-se definir uma classe **DataPoints**, que conterá os dados respeitantes aos pontos e classes que herdem desta onde se implementarão os diferentes métodos de interpolação. Teremos assim as classes de interpolação **NevilleInterpolator**, **NewtonInterpolator** e **Spline3Interpolator**.



A classe **DataPoints** deve ser usada para o armazenamento dos pontos e possui ainda o objecto cFCgraphics, para a representação gráfica.

DataPoints

```
class DataPoints {
 public:
  DataPoints();
  DataPoints(int, double*, double*);
  virtual ~DataPoints();

  virtual double Interpolate(double x) {return 0.;}
  virtual void Draw();
  virtual void Print(string FILE=");
 protected:
  int N; // number of data points
  double *x, *y; // arrays
```

```
  cFCgraphics G;
};
```

Aqui mostra-se um exemplo da classe **NevilleInterpolator** onde se implementa o método de interpolação de Neville sobre o conjunto de pontos transmitidos no constructor da classe.

DataPoints

```
class NevilleInterpolator : public DataPoints {

 public:
  NevilleInterpolator(int N=0, double *x=NULL, double *y=NULL, TF1* fF0=NULL);
  ~NevilleInterpolator() {;}

  double Interpolate(double x);
  void Draw(); //draw everything (points and interpolation function)
  TF1* GetInterpolationFunction();

  void Print(string FILE="); // print results

 private:
  double fInterpolator(double *fx, double *par) {
    return Interpolate(fx[0]);
  }
  TF1* FInterpolator; //interpolation function
  TF1* F0; //eventual underlying function
};
```

Proceda à implementação das classes.

Exercício 50 : Usando as classes construídas anteriormente e dados os seguintes pontos,

x	-1.2	0.3	1.1
y	-5.76	-5.61	-3.69

realize um programa *main* que determine o valor $y(0)$ usando os diferentes métodos:

a) o método de Neville

b) o método de Lagrange

c) o método de Newton

d) o método do spline cúbico

Exercício 51 : Usando as classes construídas anteriormente e dados os seguintes pontos,

x	1	2	3	4	5
y	0	1	0	1	0

realize um programa *main* que utilize a classe *Spline3Interpolator* e que determine e desenhe a função interpoladora dos pontos.

7 Derivação e Integração de funções

Exercício 52 : Para a integração de funções vamos definir a classe **Integrator** onde se definirão os métodos de integração trapezoidal e de Simpson. Implemente os algoritmos e estruture a classe:

```
class Integrator {
  public:
  Integrator(TF1* f);
  ...
  void TrapezoidalRule(...);
  void SimpsonRule(...);

  private:
  TF1 *func;
};
```

Exercício 53 : Determine o integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)\ dx$.

Exercício 54 : O oscilador harmónico, cujo potencial é dado por $V(x) = kx^2$, possui um período de tempo $T^{-1} \propto \sqrt{k}$; isto é, o período de tempo não depende da amplitude da oscilação. Um potencial diferente deste com $V(x) = V(-x)$ dará origem a um oscilador anarmónico, onde o período dependerá da amplitude da oscilação.

a) A equação do movimento do oscilador pode ser obtida partindo da conservação de energia:

$$E = \frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V(x)$$

Sabendo que em $t = 0$, a massa m se encontra em repouso em $x = a$, mostre que o período do movimento pode ser calculado como sendo:

$$T = \sqrt{8m}\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{V(a) - V(x)}$$

b) Suponha que o termo do potencial é dado por $V(x) = x^4$ e a massa do corpo é $m = 1$ Kg. Escreva um programa em C++ que calcule o período do oscilador para amplitudes de $a = 1.$ até $a = 3.$ com um passo de 0.1.

Exercício 55 : Neste problema pretende-se calcular a eficiência de uma lâmpada de tungsténio para uma radiação na região do visível ($\lambda_1 - \lambda_2\,\mathrm{nm}$). A potência emitida pela lâmpada por unidade de comprimento de onda λ obedece à lei de radiação de Planck,

$$I(\lambda) \propto \frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

onde T é a temperatura em Kelvin, h é a constante de Planck e k_B a constante de Boltzman.
$k_B = 8.617 \times 10^{-5}\,\mathrm{eV/K}$
$h = 4.136 \times 10^{-15}\,\mathrm{eV\,s}$

a) Determine a eficiência da lâmpada para o intervalo de comprimentos de onda $[\lambda_1, \lambda_2]$.

b) Faça a transformação de variável

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$$

e mostre que a eficiência se pode escrever como,

$$\eta = \frac{15}{\pi^4} \int_{x_2}^{x_1} \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx$$

c) Escreva um programa em C++ que determine a eficiência da lâmpada de tungsténio à temperatura de 3000 K, na região de comprimentos de onda $[400, 700]$ nm.

d) Realize um gráfico com a evolução da eficiência com a temperatura do filamento, no intervalo de T=300 K até 10 000 K.

8 Métodos Monte-Carlo

Exercício 56 : Os geradores de números aleatórios usam relações do tipo:

$$I_{i+1} = (aI_i + c)\%m$$

a) Construamos uma classe em C++ **FCrand** que implemente o método das congruências lineares para geração de números aleatórios. Use somente um construtor que possua um parâmetro semente e que possa também funcionar como default constructor a partir da função *time*.

```
class FCrand {
public:
//seed number (prototype incompleto)
FCrand(int seed);
//generate one random between [0,1]
float GetRandom();
//generate one random between [min,max]
float GetRandom(float min, float max);
//generate N randoms between [0,1]
float* GetRandom(int N);
//generate N randoms between [min,max]
float* GetRandom(int N, float min, float max);
private:
...
};
```

Para aferirmos da qualidade do gerador constituído por: $a = 65, c = 319, m = 65537$, vamos gerar 5 números aleatórios e fazer as seguintes distribuições:

b) distribuições de cada um dos números aleatórios para 1000000 de amostragens. Determine o valor médio e o desvio padrão da amostra e compare com os valores esperados.

c) Divida a distribuição em 10 intervalos e coloque num gráfico os valores médios de cada intervalo bem como o erro do valor médio.

d) Um teste à independência dos números aleatórios produzidos por um gerador é o chamado teste de auto-correlação,

$$C_k = \frac{< x_{i+k}\, x_i > - < x_i >^2}{< x_i^2 > - < x_i >^2}$$

onde $k \neq 0$. Este coeficiente deve ser tendencialmente nulo em números aleatórios descorrelados. Produza um gráfico do coeficiente de auto-correlação para diferentes valores de $k = 1, 2, ..., 1000$.

e) distribuição de um número aleatório .vs. outro (escolha quais)

f) distribuição de um número aleatório .vs. outro .vs. outro (escolha quais)

g) Verifique agora o que obteria se utilizasse o gerador *rand()* de números aleatórios existente na biblioteca *<cstdlib>*.

Exercício 57 : Determinemos a superfície de um de círculo de raio 1, isto é, o valor de π. Consideremos um grande número N de pares de números aleatórios (r_1, r_2), tirados a partir de uma distribuição aleatória entre 0 e 1. Construa um algoritmo que determine o valor de π e obtenha o valor calculado bem como o seu erro, em função do número de amostragens N (10000, 100000, 1000000).

Exercício 58 : A classe **Integrator** pode ser extendida de forma a incluir os métodos de integração de Monte-Carlo, simples, *importance sampling* e de *aceitação-rejeição*. No método de *importance sampling* é usada uma função auxiliar $p(x)$ para geração dos números aleatórios, de forma a minimizar-se o erro da integração. A geração dos aleatórios é feita, recorrendo à função acumulada $(y(x) = \int_a^x p(x)dx)$ e fazendo a sua inversão de forma a obter-se $x(y)$. As funções $p(x)$ e $x(y)$ devem ser passadas como parâmetros do método *ImportanceSampling* da classe.

```
class IntegratorMC : public Integrator {
  public:
  IntegratorMC(TF1*, int N=1); //integrand function (1-dim by default)
  IntegratorMC(TFormula); //integrand function
  ...
  // the following methods need the number of samplings (N) and shall return
  // the integral value and error
  void UniformRandom(...);
  void ImportanceSampling(...); // auxiliar function and inverse
                                // accummulated
  void AcceptanceRejection(...);

  private:
  ...
};
```

Exercício 59 : Determine os seguintes integrais,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \qquad\qquad \int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy\, dx$$

usando:

a) o método trapezoidal utilizando um passo $h = 0.2$

b) o método de Simpson usando o mesmo passo

c) o método de monte-carlo com variável aleatória uniforme, usando 100, 1000 e 10000 amostragens. Determine o erro associado ao cálculo do integral em cada um dos casos.

Exercício 60 : O problema da agulha de Buffon, colocado pelo naturalista francês Buffon em 1733, pretende saber qual é a probabilidade de uma agulha de comprimento ℓ lançada aleatoriamente num solo com riscas paralelas espaçadas de d, cair sobre uma linha. Este problema teve uma solução cerca de quatro décadas depois de ter sido colocado e é um problema típico que pode ser resolvido pelo método de simulação monte-carlo.
Consideremos uma agulha de comprimento $\ell = 2cm$ e riscas de espessura desprezável espaçadas de $d = 10cm$.

b) Mostre que a probabilidade de uma agulha cruzar uma linha/risca do solo é dada por

$$P = \frac{2\,\ell}{\pi\, d}$$

Consideremos agora um quadrado de dimensão $100 \times 100cm$ onde existem onze riscas horizontais (paralelas ao eixo x) espaçadas de $10cm$. Um acontecimento na simulação de monte-carlo consiste em colocar o centro de uma agulha de forma aleatória no interior do quadrado e ainda gerar de forma aleatória a sua direcção θ.

3. Construa as classes **Point2D** e **line2D** que permitam construir os elementos riscas e agulha.

```
class Point2D {
public:
Point2D(double fx=0., double fy=0.);
(..)
private:
 double x; // x coo
 double y; // y coo
};
```

```
class line2D {
public:
// constructors
// ... provide extreme points
line2D(Point2D P1=Point2D(), Point2D P2=Point2D());
```

```
// ... provide line center, line length and line theta (angle with X-axis)
line2D(Point2D P1=Point2D(), double length, double ftheta);

// set line: line center, line length and line theta (angle with X-axis)
void SetLine(Point2D, double, double);

// check if the two lines are crossing
bool Crossing(const line2D&); // true if two lines crossing

private:
vector<Point2D> vP;
Point2D center;
double theta;
};
```

4. Construa um programa **main** onde comece por definir, com o auxílio das classes acima definidas, o quadrado (frame) de $100 \times 100cm$ com onze riscas e de seguida gere um número $N = 100$ agulhas aleatórias.

```
int main() {
 // define frame
 line2D FRAME[11];
 for (int i=0; i<11; i++) {
    FRAME[i].SetLine(Point2D(50., i*10.), 100., 0.);
 }
 // generate random needles
 const int N = 100;
 line2D NEEDLES[N];
 int Nc = 0; //counter of needles crossing
 for (int i=0; i<N; i++) {
    // generate needle center position
    (...)
    // generate needle direction
    (...)
    // seet needle data
    NEEDLES[i].SetLine(...);
    // check if needle is crossing a line
    for (int j=0; j<11; j++) {
       if (NEEDLES[i].Crossing(FRAME[j])) {
          Nc++;
          cout << "needle nb " << i << flush;
          cout << " is crossing frame line nb " << j << endl;
       }
    }
 }
 // compute probability
```

```
 double Prob = Nc/N;
}
```

5. Represente graficamente o valor da probabilidade em função do número de lançamentos aleatórios da agulha.

6. Represente graficamente a o quadro das riscas (a negro) conjuntamente com as agulhas lançadas aleatoriamente. As agulhas que atravessam riscas deverão ser representadas a vermelho e as outras a verde.

9 | Resolução de equações diferenciais

Exercício 61 : A resolução de equações diferenciais ordinárias (ODEs) por via numérica, exige a implementação dos diferentes métodos iterativos (Euler, Runge-Kutta, etc.) de forma a obter-se a solução das equações. Dado que o número de variáveis dependentes do sistema, correspondentes ao número de equações diferenciais de primeira ordem a resolver, podem ser diferentes em cada problema, será útil implementar uma classe em C++ suficientemente flexível e capaz de lidar com os diferentes números de variáveis. Além do mais, na resolução do sistema de equações diferenciais, a variável independente (habitualmente o tempo) e as variáveis dependentes (os graus de liberdade necessários à resolução do problema bem como as suas primeiras derivadas) são iteradas e os seus valores registados. Torna-se por isso conveniente, definir uma estrutura **ODEpoint** (*struct* ou *class*) que aramazene em cada iteração os valores das variáveis.

a) Implemente a estrutura **ODEpoint**.

```
...
double t; // time
vector<double> var; //dependent variables
...
```

b) Implemente a classe **ODEsolver** que vise a solução de um sistema de equações diferenciais de primeira-ordem, $\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_i, y_i')$
Implemente pelo menos, os construtores e métodos que estão indicados abaixo. Nesta implementação o construtor recebe as funções através de objectos de ROOT *TFormula*, que permitem definir funções com tantas variáveis quanto se queira.

```
class ODEsolver {
public:
  ODEsolver(vector<TFormula>);
  SetODEfunc(vector<TFormula>);
  vector<ODEpoint> Euler(ODEpoint i, double step, double T);
  vector<ODEpoint> PredictorCorrector(ODEpoint i, double step, double T);
  vector<ODEpoint> RK2(ODEpoint i, double step, double T);
  vector<ODEpoint> RK4(ODEpoint i, double step, double T);
  ...
private:
  vector<TFormula> F;
```

```
    ...
};
```

Exercício 62 : Considere a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 3x - y + 8$ cujo valor inicial é $y(0) = 3$. Determine a solução da equação $y(x)$ no intervalo $x \in [0, 2.0]$ e usando um passo de 0.1, com os diferentes métodos numéricos.

Exercício 63 : Considere o sistema de duas equações diferenciais de primeira-ordem,

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} &= sin(x) + y \\ \frac{dy}{dx} &= cos(x) - z \end{cases}$$

cujos valores iniciais são: $z(0) = y(0) = 0$. Determine a solução das equações $y(x)$ e $z(x)$ no intervalo $x \in [0, 2.0]$ e usando um passo de 0.1, com o método Runge-Kutta de ordem-4.

Exercício 64 : Um corpo de massa m sujeito ao campo gravítico encontra-se em queda livre, possuindo ainda uma força de travagem proporcional à velocidade ($\propto kv$), devido à resistência do ar.

a) Determine a equação do movimento.

b) Resolva numericamente a equação do movimento tendo em conta os seguintes valores iniciais e características do corpo:
$z(0) = 2$ Km
$\dot{z}(0) = 0$ m/s
$m = 80$ Kg
$k = 0.3$ Kg/s
$g = 9.81$ m/s^2

   b.1) Reduza a equação do movimento a um sistema de equações de 1ª ordem

   b.2) Obtenha a solução $v(t)$ e determine a velocidade limite da queda

   b.3) Quanto tempo demora a queda?

Exercício 65 : Os problemas físicos oscilatórios como sejam o de uma massa m ligada a uma mola de constante de restituição k ou o do pêndulo gravítico de comprimento ℓ no limite das pequenas oscilações, implicam a resolução da equação diferencial:

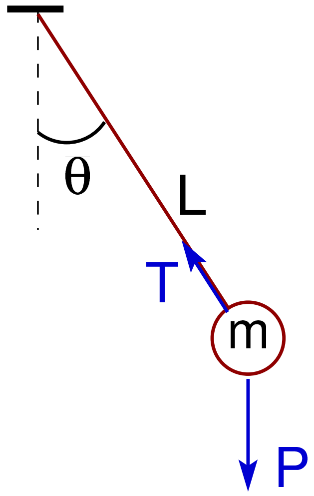
$$\ddot{x} + \omega^2 \, x = 0$$

Determine numericamente a solução da equação tendo em conta as condições iniciais, $x(0) = 1$ cm e $\dot{x}(0) = 0$:

a) utilizando o método de Taylor de 2a ordem (Stormer-Verlet)

b) utilizando o método de Runge-Kutta de 4a ordem

Exercício 66 : Considere uma massa $m = 1\ Kg$ suspensa por um fio de comprimento $\ell = 1\ m$ e sujeita a uma força de atrito $\vec{F}_a = -k\vec{v}$, com $k = 0.3\ kg/s$.



a) escreva a equação do movimento

b) escreva o sistema de equações diferenciais de primeira ordem e identifique as variáveis dependentes

c) tendo em conta que a massa é deixada oscilar a partir do ângulo inicial $\theta_i = 70$ graus, partindo do repouso, determine numericamente a solução das equações utilizando o método de Runge-Kutta de 4a ordem. Qual a amplitude de oscilação ao fim de 10 minutos? Faça o plot da amplitude de oscilação ao longo do tempo.

Exercício 67 : Uma barra cilíndrica de diâmetro $D = 101\ cm$ e comprimento de $L = 100\ cm$ está em contacto com uma fonte de calor à temperatura de $T_s = 40$ graus Celsius.

a) admitindo que a barra está isolada, conduzindo calor entre as duas extremidades, a temperatura da barra obedece à seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

resolva numericamente esta equação sabendo que as temperaturas nas extremidades da barra são $T(x = 0) = 40$ e $T(x = L) = 10$ graus Celsius. Utilize como passo $s = 10\ cm$ e $s = 2\ cm$. Produza um plot.

b) admitindo que é retirado o isolamento da barra e que esta conduz calor por convecção também, a temperatura da barra obedece à seguinte equação:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{4h}{kD}(T - T_a)$$

onde $T_a = 23$ graus Celsius é a temperatura do ar e os coeficientes $h = 17\ W.m^{-2}.K^{-1}$ e $k = 206\ W.m^{-1}.K^{-1}$ resolva numericamente esta equação sabendo que a temperatura na extremidade da barra é $T(x = 0) = 40$ graus Celsius e que o gradiente de temperatura na outra extremidade é nulo ($\frac{dT}{dx} = 0$). Produza um plot.

Parte III

Problemas de síntese e revisão

10 | Problemas com objectos C++

Problema de Exame (2015-16)

Neste problema manipulam-se objectos de duas classes distinctas: a classe **Vector** e a classe **Point**. A classe **Point** representa pontos bi-dimensionais e a classe **Vector** representa vectores no mesmo espaço.

Implementa as classes **Point** e **Vector** de forma que os dois programas principais que se seguem possam ser executados sem quaisquer modificações.

Programa: **rPoint.C**

```
int main() {

  Point *P12;
  {
    Point P1(1.5, 3.);
    Point P2;
    P2.SetX(0.2);
    P2.SetY(-0.4);

    P1.Print();
    P2.Print();

    P12 = new Point(P1);
  }

  Point P3 = *P12;
  Point P4;
  P3.Print();
}
```

Programa: **rVector.C**

```
int main() {
  Point P1(1, 3.);
  Point P2(5, 2.);
  P1.Print();
  P2.Print();
  Vector V(P1,P2); //V=vector de P1 para P2

  V = P1;
  V.Print();

  Point* A = new Vector(P1);
```

```
  delete A;
}
```

Realize um Makefile que permita obter os executáveis dos programas, respectivamente, **rPoint.exe** e **rVector.exe**, através dos seguintes comandos:

- make Point
- make Vector

Problema de Exame (2014-15)

```
#include <iostream>

class vector {
  public:
  vector() {
    size = 5;
    vec = new double[size];
  }
  ~vector() {;}
  double* GetVector() {
    double tmp[size];
    for (int i = 0; i < size; i++) tmp[i] = vec[i];
    double *tmp2 = tmp;
    return tmp2;
  }
  int GetSize() {return size;}
  private:
  double *vec;
  int size;
};

int main() {
  vector V;
  //print vector
  for (int i=0; i<V.GetSize(); i++) {
    cout << V[i] << endl;
  }
  //get array defined inside vector and delete it
  double *f = V.GetVector();
  delete *f;
}
```

No código em cima encontra-se implementada uma classe *vector* e um pequeno programa *main()* onde se realizam três operações:

- impressão dos elementos do vector
- acesso ao ponteiro do *array* existente na classe *vector*
- *delete* do *array* existente na classe *vector*

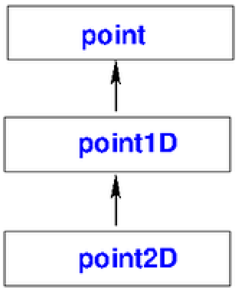
Corrija o código da classe e do programa, mantendo as acções do programa, de forma a que este compile e corra sem erros.

Problema de Exame (2014-15)

Consideremos as classes *point*, *point1D* e *point2D* em que *point1D* é usada para representar pontos uni-dimensionais e *point2D* é usada para representação de pontos bi-dimensionais.

Parte 1

As classes possuem o esquema de herança definido pela figura que se segue.




```cpp
int main() {
  point1D P(4.,4.);
  P.Print();
  double a = P->Norma();
}
```

Com este programa pretende-se realizar os seguintes passos:

- instanciar um objecto *point1D*
- imprimir os detalhes do ponto
- calcular a norma do ponto (módulo)

Complete o programa e corrija se necessário as três linhas de código existentes, sem adicionar mais nenhuma ao programa, de forma a que este possa compilar e correr e ainda produza o seguinte output:

```
[point1D::Print()]
[point1D::Norma()]
```

Para resolver o problema deve partir das implementações das classes que se apresentam a seguir sem modificar **os data members**. Se achar necessário corrigir ou completar o resto da classe, pode faze-lo.

```
class point {

  public:
  point() {;}
  virtual double Norma()=0;
  virtual void Print()=0;
  virtual void SetPoint()=0;
  void Setname(string);

  protected:
  string name;
};
```

```
class point1D : public point {
  public:
  point1D();
  float Norma();
  void Print();
  protected:
  double x;
}
```

Parte 2

No programa que se segue pretende-se construir um array de pontos uni e bi-dimensionais, usando o elemento *vector* da biblioteca STL. O programa que deve completar e corrigir de forma a que corra, implementa as seguintes etapas:

- preenchimento do array com os pontos (não modifique a ordem de preenchimento que se encontra no programa)
- imprimir, usando o método Print(), os pontos do array
- listar/imprimir os pontos do array no sentido ascendente do seu módulo

```
int main() {

  v.push_back(new point1D(10.));
  v.push_back(new point2D(4.,4.));
  v.push_back(new point1D(1.));
  v.push_back(new point2D(3.,3));
  v.push_back(new point2D(2.,3));
  v.push_back(new point2D(5.,3));
  v.push_back(new point2D(1.,3));
  v.push_back(new point1D(5.));
  v.push_back(new point1D(4.));
  v.push_back(new point2D(10.,5));

  //imprimir a lista de pontos tal qual foi introduzida
  for (int i=0; i<v.size(); i++) {
    v[i]->Print();
  }

  //calcular a norma de cada ponto, seriar e imprimir os pontos no sentido
  //crescente da norma
  ...
  double a = v[i]->Norma();
  ...
}
```

Note que terá que completar a classe point2D para completar o exercício. Em baixo poderá ver um começo da implementação da mesma.

```cpp
class point2D : ... {
  public:
  ...
  protected:
  double y;
};
```

11 Problemas numéricos

Problema de Exame (2015-16)

Pretende-se integrar a seguinte função:

$$I = \int_0^{\pi} f(x)\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{x^2 + \cos^2(x)}\, dx$$

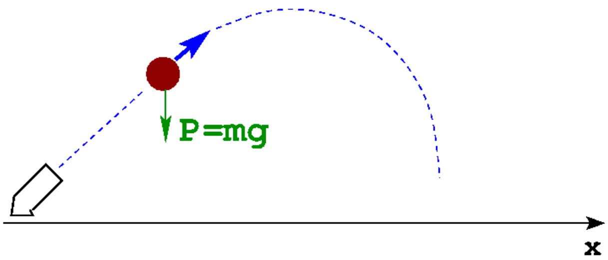
Realize um programa main **rIntegralMC.C** que pode recorrer a código já desenvolvido na disciplina, onde seja determinado o valor do integral utilizando o método de Monte-Carlo e $\mathbf{1000}$ pontos aleatórios:

- determine o integral pelo método MC simples e o seu erro
- determine o integral pelo método de **importance sampling** utilizando a função auxiliar $p(x) = Ce^{-ax}$
  - o valor do integral e o seu erro para $a = 0$
  - o valor de **a** que minimiza o erro do integral

Complete o Makefile de forma a que o comando make IntegralMC produza o executável rIntegralMC.exe

Problema de Exame (2015-16)

Um corpo de massa $m = 100$ Kg é disparado por um canhão que faz um ângulo α com a horizontal. A velocidade inicial é de $v = 200$ Km/h.



Determine:

- as equações do movimento
- o sistema de equações necessárias à resolução do problema pelo método RK4
- Utilizando o método RK4 determine:
  - A que distância x o corpo aterra, se fôr disparado com um ângulo de 30 graus?
  - Qual o ângulo do disparo, se o alvo se encontrar em $x = 200$ metros?

Realize um programa principal **rCanhao.C** onde procede à resolução deste problema (podendo obviamente recorrer a código já desenvolvido).

Complete o Makefile de forma a que o comando make Canhao produza o executável rCanhao.exe

Problema de Exame (2014-15)

Calcule utilizando o método de Monte-carlo e somente 100 números aleatórios gerados com o **TRandom3** de ROOT, o seguinte integral e o erro associado,

$$\int_0^1 e^{-x^2} \mathrm{d}x$$

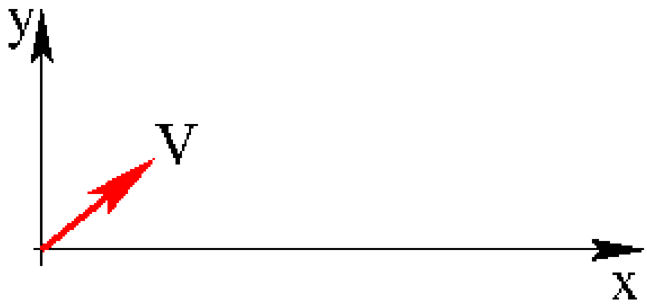
Utilize como base de partida o programa

```
int main() {
  // loop para calculo do integral
  for (int i=0; i<100; i++) {
  }
  // imprimir resultados
}
```

Problema de Exame (2014-15)

Considere um corpo de massa **m** no campo gravítico terrestre e próximo da superfície da Terra de forma a que possa considerar a aceleração gravítica como constante. Pretende-se estudar a trajectória do corpo quando lançado com uma velocidade inicial $\mathbf{v} = \mathbf{e_x} + \mathbf{e_y}$, usando o método Runge-Kutta de 4ª ordem. Considere que o corpo sente uma força de atrito proporcional à velocidade e dada por: $\mathbf{F} = -mk\mathbf{v}$.

- Determine as equações diferenciais de 1ª ordem
- Desenvolva um programa **Rprojectile.C** onde se obtenha:
  - uma figura (**Prob4_trajectorias.pdf**) com as trajectórias y.vs.x sobrepostas, para os seguintes coeficientes:



  * k=0 (linha preta)
  * k=0.2 (vermelho)
  * k=1 (verde)
  * k=5 (azul)
  * k=10 (azul, traço interrompido)

- o tempo gasto e o espaço percorrido, que o corpo demora a atingir o solo nas diferentes situações de atrito
- uma figura (**Prob4_energia.pdf**) com a energia mecânica em função do tempo, para as diferentes situações de atrito (conserve o mesmo código de côres)

Dados:

- condições iniciais: $\boldsymbol{r(t=0)=0}$
- $\boldsymbol{m = 100}\mathrm{Kg}$
- $\boldsymbol{g = 10}\mathrm{m/s}^{\boldsymbol{2}}$