

# Espetroscopia $\alpha$ e perda de energia das partículas $\alpha$ na matéria

Instituto Superior Técnico  
Mestrado Integrado em Engenharia Física Tecnológica  
LFAOFR  
Grupo 3D - Terça-feira  
B. Silva | J. Cunha(GAY) | G. Soares | O Bottleneck

6 de Janeiro de 2018

## I. 1ª SESSÃO

### I. Calibração (1ª sessão)

Na primeira sessão, foi utilizado um amplificador de janela, visto que a gama de energias implicada na experiência ser relativamente reduzida.

Como tal, o 1º passo foi escolher a janela a utilizar, recorrendo a uma fonte de  $^{210}\text{Po}$  (cujo espectro permite observar um pico único e bem definido), sendo o objetivo principal maximizar o ganho na região de interesse. Os dados adquiridos encontram-se na Tab. 1.

Range (V)	Centroide (canal)	FWHM (canal)	Área Total (ctg)	Área sinal (ctg)	Limiar (V)	Ganho
3-8	$634.950 \pm 0.093$	4.21	$443 \pm 21$	$371 \pm 24$	3	2
4-7	$637.77 \pm 0.16$	7.55	$461 \pm 21$	$426 \pm 25$	4	3.3(3)
3-5	-	-	-	-	-	-
4-6	$937.26 \pm 0.18$	7.8	$430 \pm 32$	$349 \pm 27$	4	5
5-7	$375.77 \pm 0.26$	10.45	$376 \pm 19$	$286 \pm 26$	5	5
6-8	-	-	-	-	-	-

**Tabela 1:** Características das várias janelas de amplificação testadas.  $t_{aq} = 120s$

De referir que o erro do centroíde foi obtido através de:  $\sigma_C = \frac{FWHM}{2\sqrt{2\ln(2)A_s}}$ .

O limiar representado é o limite inferior do intervalo indicado no amplificador. O ganho é calculado por  $G = \frac{V_{max} - \text{Limiar}}{10}$ , sendo  $V_{max}$  o limite superior do intervalo, e o denominador a dimensão, em Volts, do intervalo de tensão característico da norma NIM (0V-10V).

Das janelas testadas, foram imediatamente excluídas as de 3V-5V e 6V-8V, uma vez que estas não permitiam observar o pico (este possui energia  $E = 5.305 \text{ MeV}$ ). Também as janelas de 3V-8V e 4V-7V foram descartadas, por possuírem ganho inferior às restantes. Finalmente, e dado que ambas as janelas restantes possuíam o mesmo ganho, acabou por ser escolhido o intervalo 5V-7V, pois na janela de 4-6V o pico encontrava-se muito próximo do limite direito da região de trabalho, correndo-se o risco de perder dados relevantes no estudo de outras fontes com energias superiores.

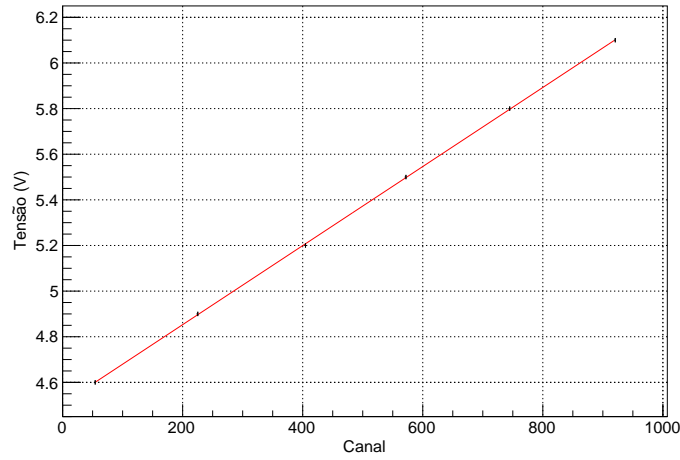
Como preparação para a calibração, verificou-se quais as tensões que correspondiam aproximadamente aos limites inferior e superior da janela escolhida (canais 0 e 1023, respetivamente). Determinou-se então que a tensão mínima (a menos de 5 canais) seria 4.52V e a máxima 6.26V (também a menos de 5 canais). Tendo em conta estes valores, registaram-se os valores do pico, criado por um gerador de impulsos, para uma série de tensões distintas (e igualmente espaçadas), que abrangessem toda a janela escolhida.

Tensão (V)	Centróide (canal)	FWHM (canal)	Área total (ctg)	Área Sinal (ctg)
4.6	$54.33 \pm 0.069$	4.72	$878 \pm 30$	$841 \pm 31$
4.9	$225.22 \pm 0.064$	4.37	$877 \pm 30$	$842 \pm 31$
5.2	$404.64 \pm 0.072$	4.9	$878 \pm 30$	$824 \pm 32$
5.5	$571.99 \pm 0.077$	5.22	$876 \pm 30$	$828 \pm 31$
5.8	$744.83 \pm 0.069$	4.77	$878 \pm 30$	$858 \pm 30$
6.1	$920.67 \pm 0.069$	4.75	$876 \pm 30$	$848 \pm 31$

**Tabela 2:** Resultados obtidos para a calibração tensão-canal.  $t_{aq} = 10s$

Tenho ideia que aqui algures calculámos mal os erros, mas as expressões tão corretas, e não influencia quase nada o erro dos picos para a fonte desconhecida

A partir dos valores apresentados na Tab. 2, foi feito um ajuste linear da tensão (U) em função do canal (C):  $U = P_0C + P_1$ , onde o erro da tensão é dado por:  $\sigma_U = \sqrt{P_0^2\sigma_C^2 + C^2\sigma_{P_0}^2 + \sigma_{P_1}^2}$ . O ajuste obtido encontra-se representado no gráfico da Fig. 1.



**Figura 1:** Ajuste da relação tensão-canal na janela escolhida.

$P_0$ (mV/canal)	$P_1$ (mV)	$\chi^2/\nu$
$1.73281 \pm 0.00016$	$4506.343 \pm 0.093$	$5707/4$

**Tabela 3:** Parâmetros de ajuste.

Verifica-se que os erros associados aos parâmetros de ajuste são muito reduzidos, o que remete ao cálculo do erro de cada centróide e ao facto de este estar subestimado, não tendo sido eventualmente considerados certos erros experimentais. Para além do mais, o valor de  $\chi^2/\nu$  é consideravelmente alto o que pode também indica isto. O valor de  $P_1$  encontra-se de acordo com o esperado uma vez que o valor mínimo de tensão obtido para o canal 0 (a menos de 5 canais) foi 4.52V e este encontra-se bastante próximo, apesar de não ser coberto pelo erro.

Posteriormente, e sabendo que existe uma relação de proporcionalidade entre a energia e a tensão da forma:  $E = kU$ , determinou-se esta constante de proporcionalidade  $k$ , através do valor tabelado para a energia do pico de  $^{210}\text{Po}$  ( $E = 5.305\text{MeV}$ ), e do valor de tensão obtido para o centróide do mesmo,  $U = (5157.48 \pm 0.46)\text{mV}$ . Tem-se então:

$$E = kU \quad \Leftrightarrow \quad k = (1028.600 \pm 0.093) \text{ keV/V} \quad (1)$$

Onde  $\sigma_k = \frac{E}{U^2} \sigma_U$ .

Finalmente, obteve-se a correspondência canal-energia, através de  $E = k_0C + k_1$  onde:

$$k_0 = kP_0, \sigma_{k_0} = \sqrt{k^2\sigma_{P_0}^2 + P_0^2\sigma_k^2} \quad k_1 = kP_1, \sigma_{k_1} = \sqrt{k^2\sigma_{P_1}^2 + P_1^2\sigma_k^2}$$

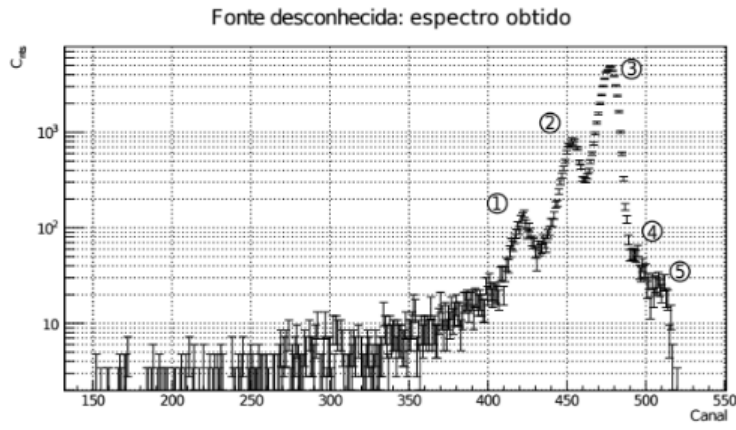
$k_0$ (keV/canal)	$k_1$ (keV)
$1.78237 \pm 0.00023$	$4635.24 \pm 0.43$

**Tabela 4:** Resultados da calibração em energia.

Mais uma vez verifica-se a grande diferença de ordens de grandeza entre os erros e os parâmetros associados, o que provém da propagação dos erros reduzidos referidos anteriormente.

## II. Estudo de uma fonte desconhecida

Nesta parte utilizou-se uma fonte desconhecida, e analisou-se o seu espectro de energia, obtendo-se os seguintes picos de absorção total e respetivas energias.



**Figura 2:** Esboço do espectro de energia observado para a fonte desconhecida. *DESENHAR À MÃO*

Pico	Centróide (canal)	FWHM (canal)	$A_{tot}$ (ctg)	$A_{sinal}$ (ctg)	Probabilidade (%)	E (MeV)
1	$422.10 \pm 0.16$	8.24	$1664 \pm 41$	$488 \pm 71$	2.38	$5.38758 \pm 0.00053$
2	$453.070 \pm 0.056$	9.21	$11193 \pm 106$	$4795 \pm 203$	16.03	$5.44278 \pm 0.00046$
3	$477.590 \pm 0.020$	10.66	$56206 \pm 237$	$49689 \pm 302$	80.50	$5.48648 \pm 0.00045$
4	$498.00 \pm 0.71$	8	$458 \pm 21$	-	0.66	$5.5229 \pm 0.0013$
5	$510.38 \pm 0.27$	6.27	$299 \pm 17$	$95 \pm 30$	0.43	$5.54493 \pm 0.00066$

**Tabela 5:** Resultados obtidos para os picos da fonte desconhecida.  $t_{aq} = 240s$

É de notar que o 4º pico era muito subtil, devido à sobreposição com o 3º e 5º picos, pelo que o programa utilizado não forneceu área de sinal, centróide e FWHM respetivos. De modo a ser possível considerar este pico na análise posterior, cada aluno estimou um valor para o centróide do mesmo, realizando-se uma média dessas estimativas, enquanto que para o FWHM foi obtida uma medição manual aproximada.

Utilizou-se o site <http://nucleardata.nuclear.lu.se/toi/> para cruzar os valores das energias obtidas com núclídeos existentes. Começou-se pelo 3º pico, por ser o mais relevante. Sobreestimou-se o erro das energias para 20keV, restringiu-se  $T_{1/2} \geq 20d$ , e consideraram-se os isótopos com uma probabilidade de decaimento superior a 50%. De seguida, procedeu-se do mesmo modo para o 1º e 2º picos, embora considerando probabilidades de decaimento aproximadamente iguais, ou superiores a 5% para o 2º pico, e de 0.5% para o 1º, encontrando-se os dados recolhidos na tabela 6.

O professor disse que devíamos ter posto um parágrafo a explicar melhor porque é que tínhamos considerado o erro das medidas 20keV, e que provavelmente devíamos ter usado um erro mais parecido ao que se calculou, porque realmente é mais do que suficiente. Quanto aos outros parâmetros, ele não se queixou

Nuclídeo	Energia (MeV)	Probabilidade (%)	$T_{1/2}$	Nuclídeo Filho	$T_{1/2 \text{ filho}}$
$^{238}\text{Pu}$	5.499	70.91	87.7 a	$^{234}\text{U}$	$2.455 \times 10^5$ a
$^{241}\text{Am}$	5.486	84.5	432.2 a	$^{237}\text{Np}$	$2.144 \times 10^6$ a
$^{238}\text{Pu}$	5.456	28.98	87.7 a	$^{234}\text{U}$	$2.455 \times 10^5$ a
$^{241}\text{Am}$	5.442	13.0	432.2 a	$^{237}\text{Np}$	$2.144 \times 10^6$ a
$^{249}\text{Bk}$	5.437	4.8	320 d	$^{245}\text{Am}$	2.05 h
$^{228}\text{Th}$	5.423	72.2	1.9 a	$^{224}\text{Ra}$	3.66 d
$^{249}\text{Bk}$	5.390	16.0	320 d	$^{245}\text{Am}$	2.05 h
$^{241}\text{Am}$	5.388	1.6	432.2 a	$^{237}\text{Np}$	$2.144 \times 10^6$ a
$^{246}\text{Cm}$	5.387	82.2	4230 a	$^{242}\text{Pu}$	$3.733 \times 10^5$ a

**Tabela 6:** Elementos com alta probabilidade de gerar alfas com energias compatíveis, e respetivas energias

Acho que aqui não é preciso considerar núclídeos filhos porque assume-se à partida que não se está a trabalhar com cadeias de decaimento. Também convinha termos posto 3 linhas numa coluna à esquerda com os valores dos picos a que correspondem as hipóteses que estamos a dar

Como o isótopo  $^{245}\text{Am}$  não tem decaimento  $\alpha$ , e como todos os restantes núclídeos filhos têm tempos de semi-vida muito superiores ao período de aquisição (240s), incluindo o isótopo  $^{224}\text{Ra}$ , pode-se desprezar qualquer influência que estes possam ter tido no espectro obtido.

Após uma breve observação da tabela é direto dizer que, caso só haja um núclídeo na fonte, este tem de ser o Amerício-241. No entanto, para garantir que esta conjectura está correta, verificaram-se os decaimentos para o isótopo  $^{238}\text{Pu}$ , visto ser o único

que aparece duas vezes na tabela mantendo uma relação entre picos aceitável, notando-se que, apesar deste apresentar um decaimento com 5.358 MeV, indiciando que poderíamos ter subestimado o erro aquando da pesquisa, só tem uma probabilidade associada de 0.11%, constatando-se também a falta de decaimentos que pudessem corresponder aos picos mais energéticos.

Assim, ao estudar melhor os decaimentos associados a  $^{241}\text{Am}$ , foi possível verificar uma correspondência entre os picos 4 e 5 aos decaimentos de energias 5.511 MeV e 5.545 MeV, de probabilidades associadas de 0.22% e 0.34% respetivamente, ambos dentro dos 20 keV de incerteza utilizados na pesquisa, revelando que o 4º pico correspondia, de facto, a um decaimento, e não a uma sobreposição dos 3º e 5º picos inicialmente apontada, sendo que, apesar das probabilidades de decaimento estarem invertidas face ao que se tinha calculado, isto facilmente se explica devido ao modo de cálculo, que teve em conta a área total do sinal, sendo que o 3º pico, muito maior do que os restantes, tinha uma influência superior na área total do adjacente, face à do último. Por último, verifica-se, também, que os restantes decaimentos associados ao isótopo em consideração têm uma probabilidade de ocorrência deveras baixa, pelo que acabam por não se distinguir devido à sobreposição provocada pela cauda dos picos.

### III. Resolução

De forma a determinar a resolução do detector, foram utilizados os picos 1, 2, 3 e 5 do espectro da fonte desconhecida (o 4º pico não foi considerado, pois não foi possível recolher os seus parâmetros, dado que este não se encontrava bem definido), tendo-se calculado a sua resolução em energia, segundo:

$$R = \frac{\Delta E}{E} = \frac{FWHM_C \times k_0}{E} \quad (2)$$

onde  $k_0$  é o declive da reta de calibração em energia obtida anteriormente, e  $FWHM_C$  é a largura a meia altura do pico em canais. Por sua vez, o erro da resolução é dado por:

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{FWHM_C}{E} \sigma_{k_0}\right)^2 + \left(\frac{FWHM_C * k_0}{E^2} \sigma_E\right)^2} \quad (3)$$

Os resultados obtidos encontram-se na tabela 7:

Pico	Resolução (%)
F. Desconhecida - 1	$0.27260 \pm 0.00045$
F. Desconhecida - 2	$0.30160 \pm 0.00047$
F. Desconhecida - 3	$0.34631 \pm 0.00054$
F. Desconhecida - 5	$0.20154 \pm 0.00036$

**Tabela 7:** Resolução dos picos 1, 2, 3 e 5 da fonte desconhecida.

De referir que não se apresenta um ajuste da resolução em função da energia, uma vez que, não só há poucos pontos experimentais, como a gama de energias analisada é muito reduzida (usou-se um amplificador de janela), ou seja, os pontos não são representativos do comportamento do detetor em relação ao esperado (descrito por  $R \propto \frac{1}{\sqrt{E}}$ ), devido à reduzida região em energia estudada. Concluindo, é de notar que a resolução do tipo de detetor utilizado (de tipo semiconductor) é consideravelmente melhor que a de outros tipos, o que se pode justificar pela menor energia necessária para criar pares eletrões-buraco em detetores semicondutores comparativamente com os processos ocorrentes noutros tipos de detetores, o que introduz uma menor variação estatística.

## II. PERDA DE ENERGIA DE PARTÍCULAS $\alpha$ NO AR

### I. Calibração (2ª sessão)

Nesta 2ª sessão laboratorial, foi utilizado um amplificador linear, em vez de um amplificador de janela, pois pretendeu-se estudar a perda de energia de partículas  $\alpha$  em camadas de ar de diferentes espessuras, processo este que cobre um espectro de energia maior que o amplificador de janela permite. Assim, é obviamente necessário realizar uma nova calibração do sistema, procedendo-se de modo idêntico à calibração anterior. Obteve-se então, para o espectro do  $^{210}\text{Po}$ , os seguintes valores:

Área Total (ctg)	Área de Sinal (ctg)	Centróide (canal)	FWHM (canal)	$E_{\text{tabelada}}$ (MeV)
$461 \pm 21$	$458 \pm 22$	$679.44 \pm 0.16$	2.87	5.305

**Tabela 8:** Valores retirados do programa PCA, relativos ao espectro do  $^{210}\text{Po}$ .

De seguida, com auxílio do gerador de impulsos graduado em tensão, registaram-se novamente os valores dos picos detectados, para valores distintos de tensão, igualmente espaçados. De referir que, neste caso, devido ao facto de se estar a utilizar um amplificador linear, que permite medir uma gama de energias superior, não foi possível ajustar uma função gaussiana aos picos detectados, devido à sua menor dispersão, pelo que se calculou os valores dos centroídes de cada pico através de uma média ponderada entre os canais onde foram detectadas contagens, e as respectivas contagens de cada canal, segundo a expressão:

$$\bar{C} = \frac{\sum C_i N_i}{\sum N_i} \quad (4)$$

cujo erro é dado por:

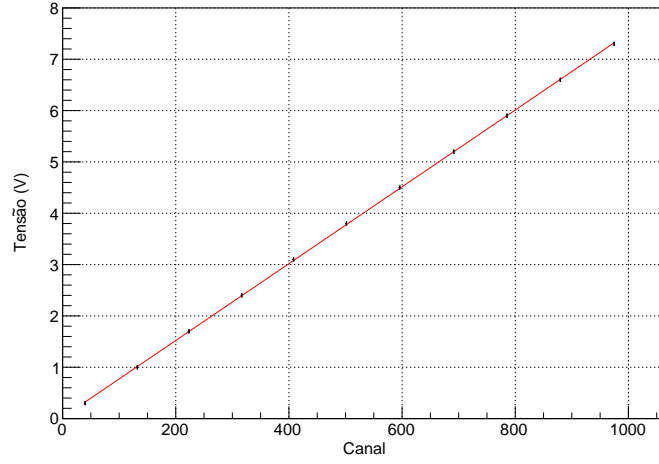
$$\bar{\sigma}_C = \frac{\sqrt{\sum (C_i - \bar{C})^2 N_i}}{\sum N_i} \quad (5)$$

Obteve-se então:

**Tabela 9:** *Dados recolhidos para a recalibração tensão-canal.*

U (V)	C (canais)	N (contagens)	C (canais)
0.3	38	3	$39.74 \pm 0.52$
	39	515	
	40	1172	
	41	65	
1.0	131	211	$131.98 \pm 0.47$
	132	1373	
	133	169	
	134	1	
1.7	222	22	$223.41 \pm 0.52$
	223	998	
	224	729	
	225	6	
2.4	315	2	$316.78 \pm 0.51$
	316	453	
	317	1228	
	318	72	
3.1	407	39	$408.30 \pm 0.51$
	408	1155	
	409	559	
	410	2	
3.8	500	7	$501.61 \pm 0.53$
	501	694	
	502	1026	
	503	28	
4.5	594	1	$596.05 \pm 0.46$
	595	136	
	596	1389	
	597	229	
5.2	690	18	$691.54 \pm 0.54$
	691	780	
	692	941	
	693	16	
5.9	784	13	$785.46 \pm 0.52$
	785	924	
	786	812	
	787	7	
6.6	878	5	$879.60 \pm 0.51$
	879	708	
	880	1032	
	881	10	
7.3	973	3	$974.64 \pm 0.51$
	974	649	
	975	1086	
	976	18	

Seguidamente, procedendo como na calibração inicial, realizou-se um ajuste linear (Fig: 3) a este conjunto de dados, segundo a expressão:  $U = P_0C + P_1$ , tendo-se obtido os seguintes parâmetros de ajuste:



**Figura 3:** Calibração Tensão-Canal para a segunda sessão de trabalho.

$P_0$ (mV/canal)	$P_1$ (mV)	$\chi^2/\nu$
$7.4849 \pm 0.0039$	$24.21 \pm 2.24$	150/9

**Tabela 10:** Parâmetros do ajuste.

Em casos onde o  $\chi^2/\nu \gg 5$  pode-se utilizar  $\frac{dE}{E}$  como parâmetro para verificar a proximidade do método à realidade, porque supostamente tem uma ordem de grandeza inferior à do  $\sigma$  e torna-se mais intuitivo.

Novamente, verifica-se que o erro do parâmetro de ajuste  $P_0$  é bastante reduzido, pelo que se evocam as mesmas justificações dadas anteriormente. Já o parâmetro  $P_1$ , dado que não é nulo (mesmo considerando o erro, o valor nulo não é englobado), indica que o valor mínimo de tensão detetada na região de trabalho não é 0 (como seria idealmente). Quanto ao valor de  $\chi^2/\nu$ , foi reduzido significativamente face ao seu valor na calibração anterior, o que indica uma melhor correlação entre os pontos e uma melhor estimativa para os erros associados (ver o diferente método utilizado para obtenção dos centróides e respectivo erro).

Posteriormente, recorrendo novamente ao valor tabelado para a energia do pico (único e bem definido) do  $^{210}\text{Po}$  em vácuo ( $E_{\text{tabelada}} = 5.305$  MeV), e ao valor de tensão medida para o centróide deste pico (obtida através da recalibração anterior), foi possível relacionar a energia com a tensão segundo:  $E = kU$ , com o objetivo de obter a constante de proporcionalidade  $k$ .

Centróide (canal)	U (V)	$k$ (MeV/V)
$679.44 \pm 0.16$	$5.1097 \pm 0.0035$	$1.03821 \pm 0.00071$

**Tabela 11:** Determinação da constante  $k$ .

Finalmente, obteve-se a equação pretendida que relaciona a energia com o canal do detector:  $E = k_0C + k_1$ , donde resulta:

$k_0$ (keV/canal)	$k_1$ (keV)
$7.7709 \pm 0.0066$	$25.14 \pm 2.33$

**Tabela 12:** Resultados da calibração em energia.

Note-se que todos os parâmetros utilizados nesta calibração foram definidos da mesma forma que na calibração da 1ª sessão, e todas as expressões utilizadas (incluindo fórmulas de erro) foram exatamente as mesmas, pelo que não se achou necessário repeti-las aqui.

## II. Estudo da perda de energia de partículas $\alpha$ na matéria

Com o objetivo de estudar a perda de energia de partículas  $\alpha$  na matéria, nomeadamente no ar atmosférico ( $\approx 80\% \text{ N}_2 + 20\% \text{ O}_2 \Rightarrow \rho = 1.2863 \text{ mg/cm}^3$  a  $15^\circ\text{C}$ ), em função da distância percorrida, registaram-se os valores respetivos ao espectro do  $^{210}\text{Po}$  em várias prateleiras do detetor, numeradas de 2 a 8 e distanciadas entre si de 4mm, com um desfazamento inicial de 2mm. Em primeira análise, decidiu-se realizar uma pequena correção no valor da distância percorrida. De facto, admitindo a emissão como isotrópica, e sabendo que o detetor tem uma área circular de valor  $A = 50\text{mm}^2$  (e portanto  $R = \sqrt{A/\pi}$ ),

tem-se que o percurso médio das partículas emitidas a partir de uma prateleira a uma distância  $d$  do detetor é dado por:  $d' = \sqrt{d^2 + (2R/3)^2}$  onde  $2R/3$  é a coordenada radial média a que as partículas atingem o detetor. Nas seguintes secções serão aplicados os métodos às duas estimativas de  $d$  para uma melhor comparação. Uma vez que o aumento da distância ao detetor diminui a eficiência geométrica, de forma a manter os dados congruentes com a experiência, decidiu-se compensar este fator com o aumento do tempo de aquisição, calculado a partir da eficiência geométrica relativa à prateleira 2 a partir da seguinte equação:

$$t_{aq_x} = \frac{t_{aq_2}}{\epsilon_{geor}} \quad (6)$$

onde  $\epsilon_{geor} = \frac{d_2^2}{d_x^2}$ . A partir dos valores retirados do *software* e da calibração em energia, calculou-se a variação média da energia das partículas que chegam ao detetor,  $\Delta E_{exp}$ , tendo em conta os valores retirados em condições de vácuo, onde alegadamente não há perda de energia.

$$\Delta E_{exp} = E - E_{vacuo} \quad \sigma_{\Delta E_{exp}} = \sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_{E_{vacuo}}^2} \quad (7)$$

Tenho ideia que aqui o prof não gostou muito que se tivesse adicionado  $\sigma_{E_{vacuo}}^2$  ao erro, porque como a calibração foi feita só com base no pico do plutónio, o erro já foi contado uma vez no próprio valor da energia final, e acabamos por propagar mais erros sistemáticos associados a esse valor

Os dados retirados pelos *software*, assim como os valores referidos anteriormente encontram-se registados na Tab. 13.

Prateleira	d (mm)	d'(mm)	$\epsilon_{geor}$ (%)	$t_{aq}$ (s)	Centróide (canal)	FWHM (canal)	$A_{rot}$ (ctg)	$A_{Sinal}$ (ctg)	E (keV)	$\Delta E_{exp}$ (keV)
0*	0	0	-	120	679.44 ± 0.16	7.9	461 ± 21	458 ± 22	5305.0 ± 5.1	-
2	10	10.35	100	120	562.35 ± 0.14	11.81	1348 ± 37	1313 ± 39	4395.1 ± 4.6	909.89 ± 6.8
3	14	14.25	51.02	235	498.67 ± 0.12	10.8	1480 ± 38	1442 ± 41	3900.2 ± 4.2	1404.74 ± 6.6
4	18	18.20	30.86	389	450.61 ± 0.13	11.94	1529 ± 39	1488 ± 43	3526.8 ± 4.0	1778.21 ± 6.4
5	22	22.16	20.66	581	379.57 ± 0.15	13.06	1459 ± 38	1440 ± 40	2974.7 ± 3.7	2330.26 ± 6.2
6	26	26.14	14.79	811	315.32 ± 0.17	15.38	1497 ± 39	1447 ± 44	2475.5 ± 3.4	2829.54 ± 6.1
7	30	30.12	11.11	1080	232.45 ± 0.22	20.14	1508 ± 39	1481 ± 42	1831.5 ± 3.3	3473.51 ± 6.1
8	34	34.10	8.65	1387	133.03 ± 0.26	22.6	1476 ± 38	1350 ± 53	1058.9 ± 3.2	4246.10 ± 6.0

**Tabela 13:** Valores obtidos para o pico do Po-210 em função da distância da fonte ao detetor.

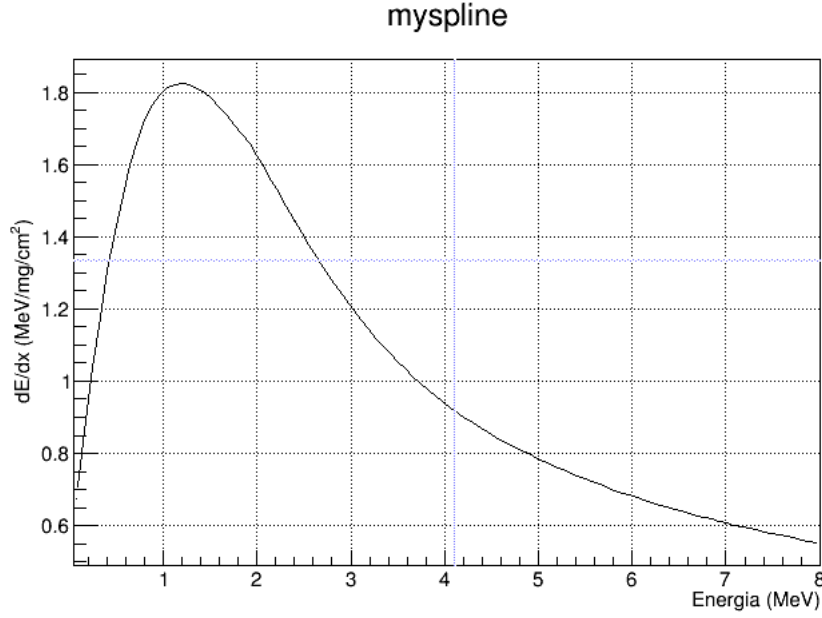
## II.1 Variação da energia pelo stopping power

A partir dos valores tabelados para as componentes do ar, estimou-se  $\frac{dE}{dx}$  (stopping power) para os vários valores de energia obtidos (devido à composição do ar). Realizou-se uma interpolação destes pontos, usando para o efeito um *spline cubico*, onde se obteve o gráfico da Fig. 4 e em seguida, a partir da função interpoladora, pretende-se obter a variação média da energia das partículas  $\alpha$  que chegam ao detetor, que corresponde a integrar esta função ao longo do percurso das partículas. No entanto, o integral não pode ser resolvido analiticamente, visto a função interpoladora não ser função da distância, mas sim da energia. Desta forma, dividiu-se o percurso em troços de tamanho  $\Delta x$  onde se considera  $dE/dx$  constante em cada um dos troços. Assim o integral pode ser resolvido numericamente, sendo a variação da energia em cada troço dada por:

$$E(x + \Delta x) = E(x) - \frac{dE}{dx}(E(x))\Delta x \quad (8)$$

Faltou pôr uma tabela com os valores de O e N utilizados (tirados da tabela do protocolo) para estimar o  $\frac{dE}{dx}$  do ar. Também nos esquecemos de desenhar os pontos ao mesmo tempo que desenhámos o spline





**Figura 4:** Intepolação dos valores tabelados relativos ao  $dE/dx$  de partículas  $\alpha$  no ar.

Em primeira instância, considerou-se uma partição unitária (método do  $dE/dx$  global), admitindo que a taxa de variação de energia seria constante e igual à média aritmética entre os valores de  $dE/dx$  calculados para a energia média inicial ( $5305.0 \pm 5.1$  keV) e final. Desta forma, tem-se que:

$$\Delta E_{global} = \left( \overline{\frac{dE}{dx}} \right) d \quad \sigma_{\frac{dE}{dx}} = \frac{d}{dE} \left( \frac{dE}{dx}(E) \right) \sigma_E \quad (9)$$

Prateleira	Energia (keV)	$\frac{dE}{dx} (keV/mg/cm^2)$
0*	5305	749.6
2	4395.1	868.5
3	3900.3	959.7
4	3526.8	1047.7
5	2974.7	1215.6
6	2475.5	1410.4
7	1831.5	1687.5
8	1058.9	1814.2

**Tabela 14:** Energias finais detetadas e respetivos  $\frac{dE}{dx}$

A prateleira 0 corresponde ao vácuo

Prateleira	$\Delta E_{global}$ (keV)	$\delta$ ( $\sigma$ )	$\delta$ (%)	$\Delta E'_{global}$ (keV)	$\delta'$ ( $\sigma$ )	$\delta'$ (%)
2	1040.69	29.06	14.37	1076.87	37.10	18.35
3	1539.04	31.98	9.56	1566.56	38.54	11.52
4	2080.67	77.56	17.01	2103.26	83.35	18.28
5	2780.60	125.08	19.32	2800.85	130.71	20.19
6	3611.88	230.11	27.65	3630.73	235.66	28.31
7	4702.26	372.35	35.38	4720.70	377.94	35.91
8	5606.11	425.00	32.03	5623.23	430.35	32.43

**Tabela 15:** Variação da energia com base no método do  $(dE/dx)$  global e desvios destes valores à variação da energia medida experimentalmente, tanto para a distância  $d$  como  $d'$ .

Ao comparar as variações de energia obtidas experimentalmente,  $\Delta E_{exp}$  com as estimadas pelo *spline* de  $dE/dx$ , verifica-se que esta aproximação, apesar de ser razoável para as distâncias mais curtas, tem uma acumulação de erros significativa para os percursos mais longos, sendo o desvio máximo na ordem de  $430\sigma$  e até 35% de erro relativo, tanto para  $d$  ou  $d'$ .

É possível obter uma aproximação mais exata, dividindo o trajeto entre a fonte e o detetor em várias partições reduzidas (método do  $dE/dx$  por troços), sendo que, no limite extremo, ter-se-ia

$$\Delta E = \int_0^d \frac{dE}{dx} dx$$

Neste caso, para implementar o método, considerou-se que  $\frac{dE}{dx}$  era constante, em cada troço  $\Delta x$ , e por isso, obtinha-se um método recursivo dado por,

$$\Delta E = \sum_{i=1}^n \Delta x \times \frac{dE}{dx} |_{E_{inicial} - \Delta E}$$

onde  $\Delta x = \frac{d}{n}$ , e onde  $n$  é o número de iterações consideradas, tendo-se como condição inicial que  $\Delta E_{inicial} = 0$ . Neste caso, foram considerados entre 80 a 500 troços, verificando-se que a exatidão do método diminuía com o aumento do número de iterações. Isto pode dever-se ao número excessivo de pontos considerados entre cada nó da interpolação.

Troços	Prateleira	$\Delta E_{tr}$ (keV)	$\delta$ ( $\sigma$ )	$\delta$ (%)	$\Delta E'_{tr}$ (keV)	$\delta'$ ( $\sigma$ )	$\delta'$ (%)
80	2	1044.52	29.92	14.80	1084.41	38.78	19.18
	3	1524.22	28.46	8.51	1555.95	36.01	10.77
	4	2062.46	72.89	15.99	2090.72	80.13	17.58
	5	2690.39	100.03	15.45	2718.06	107.71	16.64
	6	3459.78	185.38	22.28	3488.88	193.94	23.30
	7	4369.09	271.39	25.78	4396.09	279.57	26.56
	8	5115.13	271.57	20.47	5128.03	275.60	20.77
200	2	1045.26	30.08	14.88	1085.22	38.96	19.27
	3	1526.03	28.89	8.64	1557.86	36.47	10.90
	4	2066.44	73.91	16.21	2094.85	81.19	17.80
	5	2698.79	102.36	15.81	2726.70	110.11	17.01
	6	3476.73	190.36	22.87	3506.15	199.01	23.91
	7	4391.56	278.20	26.43	4414.80	286.33	27.20
	8	5118.64	272.67	20.54	5131.09	276.56	20.84
500	2	1045.56	30.15	14.91	1085.54	39.03	19.30
	3	1526.76	29.06	8.69	1558.63	36.65	10.96
	4	2068.04	74.32	16.30	2096.52	81.62	17.90
	5	2702.18	103.30	15.96	2730.20	111.08	17.16
	6	3483.59	192.38	23.12	3513.13	201.07	24.16
	7	4404.44	280.89	26.69	4427.20	289.00	27.46
	8	5119.95	273.08	20.58	5132.21	276.91	20.87

**Tabela 16:** Variação da energia com base no método do  $(dE/dx)$  por troços e desvios destes valores à variação da energia medida experimentalmente, tanto para a distância  $d$  como  $d'$ .

### O professor adora esta comparação entre o número de troços utilizados

Como já se refeririu, a melhor aproximação aos valores de  $\Delta E_{exp}$  obteve-se para 80 troços, pelo que este valor será usado de agora em diante para fins de comparação entre métodos. Os valores face à estimativa da distância  $d'$ , apresentam em média desvios superiores aos da distância  $d$ , o que indica que  $d'$  é uma pior estimativa do trajeto das partículas, para este método. Um facto de interesse, é de que, para a 2ª prateleira, que tem uma variação de energia menor, a aproximação linear (média), é mais exata do que por troços, sugerindo duas coisas: o método por troços sofre, de facto, influência negativa pelo facto de estar a calcular o integral através de um spline, que não representa necessariamente de forma mais fiel o comportamento de  $\frac{dE}{dx}$ , e como  $d$  é muito diminuto, a aproximação de uma fonte singular e isotópica pode não ser aplicável neste caso.

## II.2 Variação da energia pelo alcance

A partir das tabelas disponíveis no guia da experiência também é possível obter o alcance médio,  $\Delta x$  das partículas  $\alpha$  a partir da sua energia,  $\Delta x(E)$ , ou vice-versa,  $E(\Delta x)$ , utilizando para o efeito o *spline cubico* como método de interpolação. Considerando um percurso de comprimento  $l$ , a variação de energia em relação a  $E_0 = 5305$  keV é dada por:

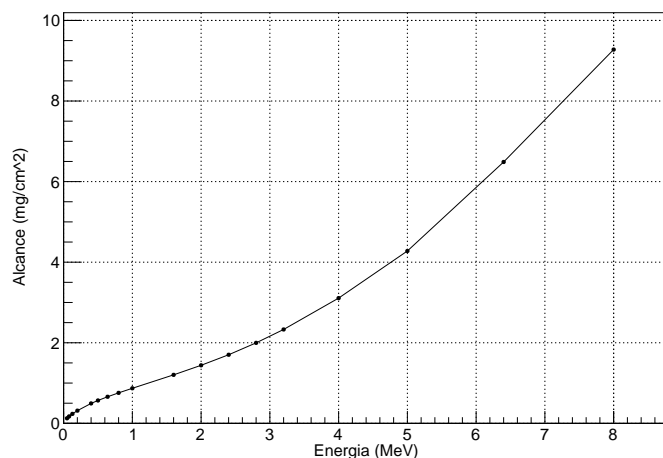
$$\Delta E_r = E_0 - E(\Delta x_{E_0} - d) \quad (10)$$

Neste caso, como se queria calcular o valor de uma energia, com base num alcance ( $l$ ), mas tínhamos o alcance em função da energia, aplicou-se o método de Newton para a função  $0 = R(E) - (\Delta x_{E_0} - d)$ , onde  $R(E)$  é a função interpoladora que descreve o alcance médio, e  $\Delta x_{E_0} = R(5305) = 4.70624 \text{ mg/cm}^2$ . Note-se que a função foi escrita para energias em MeV. A aproximação inicial dada foi sempre o valor experimental da energia de chegada das partículas ao detetor, da prateleira em causa, visto esperar-se que o método seja verosímil à prática.

Aqui era preciso pôr uma tabela com os valores de O e N que foram utilizados da tabela do protocolo para se estimar o alcance do ar

Prateleira	Aproximação inicial (keV)	Alcance ( $mg/cm^2$ )
2	4395.1	3.537
3	3900.3	3.005
4	3526.8	2.632
5	2974.7	2.138
6	2475.5	1.755
7	1831.5	1.339
8	1058.9	0.903

**Tabela 17:** Energias finais detetadas/aproximações iniciais e respetivos alcances



**Figura 5:** Intepolação dos valores tabelados relativos ao alcance de partículas  $\alpha$  no ar.

Prateleira	$\Delta E_r$ (keV)	$\delta$ ( $\sigma$ )	$\delta$ (%)	$\Delta E'_r$ (keV)	$\delta'$ ( $\sigma$ )	$\delta'$ (%)
2	1014.68	23.28	11.52	1055.44	32.34	16.00
3	1501.76	23.11	6.91	1533.53	30.67	9.17
4	2036.60	66.26	14.53	2064.66	73.45	16.11
5	2663.30	92.50	14.29	2690.90	100.17	15.47
6	3434.73	178.01	21.39	3463.83	186.57	22.42
7	4346.21	264.46	25.12	4373.11	272.61	25.90
8	5087.07	262.80	19.81	5100.23	266.92	20.12

**Tabela 18:** Variação da energia com base no método do alcance e desvios destes valores à variação da energia medida experimentalmente, tanto para a distância  $d$  como  $d'$ .

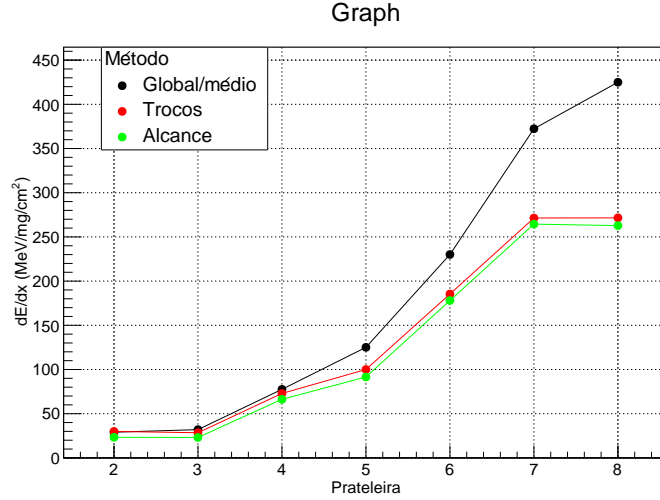
Aqui, novamente, a aproximação de  $d'$  apresenta pior exatidão do que as previsões originais, implicando que  $d'$  não foi uma boa consideração. Isto pode implicar duas situações distintas. Ou existem erros sistemáticos associados a  $d$ , que depois se propagam para  $d'$  e fazem com que este não seja realmente o percurso médio, resultando em modelos teóricos pior ajustados, ou então os métodos computacionais aplicados, como a aplicação dos interpoladores, ou os cálculos dos valores de  $\Delta E$ , não apresentam sensibilidade suficiente para que o valor corrigido da distância percorrida implique maior verosimilhança face ao verificado empiricamente, sendo que os erros dos próprios métodos podem sobrepor-se à correção efetuada em  $d'$ .

### II.3 Comparação dos métodos

Para uma melhor comparação dos desvios à experiência em cada um dos modelos fez-se um gráfico com base nos valores da Tab. 19.

Prateleira	$\delta_{global} (\sigma)$	$\delta_{tr} (\sigma)$	$\delta_r (\#\sigma)$
2	29.06	29.92	23.28
3	31.98	28.46	23.11
4	77.56	72.89	66.26
5	125.08	100.03	92.50
6	230.11	185.38	178.01
7	372.35	271.39	264.46
8	425.00	271.57	262.80

**Tabela 19:** Comparação dos desvios à experiência em unidades de  $\sigma$  para cada um dos métodos.



**Figura 6:** Comparação, prateleira a prateleira dos métodos usados para estimar a variação média de energia de partículas  $\alpha$  no ar.

Neste gráfico o eixo dos y devia ter  $\delta (\#\sigma)$ . O professor também nos disse que seria bom ter uma tabela com os sigmas somados, porque apesar de neste caso os sigmas serem todos positivos, ficando fácil comparar métodos, quando as aproximações teóricas atravessam os pontos experimentais diagonalmente a soma de todos os sigmas de cada modelo é um bom método para comparar

Pela análise direta da tabela e do gráfico anteriores, é trivial dizer-se que, o método do alcance é o que melhor descreve a situação estudada, apresentando sistematicamente desvios menores aos valores obtidos na experiência. No entanto, à medida que a distância aumenta, a relação entre  $\delta_r$  e  $\delta_{tr}$  torna-se menor, podendo supor-se que, para distâncias muito elevadas ambos os métodos têm a mesma validade.

Entre o método global e o método por troços, verifica-se, que o segundo tem desvios menores, para qualquer prateleira superior à segunda, sendo que a relação entre estas aumenta inegavelmente com o percurso das partículas, pelo que o método global não deve ser aplicado para distâncias elevadas. No entanto, para distâncias muito pequenas (2ª prateleira ou menor, se fosse possível estudar), o método global, que acaba por ser um ajuste linear, tem uma aproximação melhor, revelando que utilizar um ajuste através de um spline cúbico também pode ter desvantagens, principalmente quando o troço da função é melhor aproximada por um polinómio de grau inferior a 3.

#### II.4 Variação do FWHM com a distância

Acho que a maneira mais correta de fazer esta parte era fazer-se uma coisa do género  $\Delta x = d_{min} - d_{max}$  para cada prateleira, e cheira-me que dava melhor mas o professor não se chateou com o nosso tipo de análise

Uma vez que as partículas aqui estudadas são não-relativistas, pode-se considerar que nesta gama de energias é válida a relação:

$$\frac{dE}{dx} \propto \frac{1}{E} \Leftrightarrow d(E^2) \propto dx \Rightarrow FWHM_E \propto \sqrt{x} \quad (11)$$

Onde  $FWHM_E$  é a largura a meia altura convertida em unidades de energia e  $x$  é a distância média percorrida pelas partículas  $\alpha$  até ao detetor, que corresponde ao  $d$  da secção anterior, uma vez que já foi verificado esta ser uma melhor aproximação que  $d'$ .

Prateleira	d (mm)	FWHM (canal)	$FWHM_E$ (keV)
0	0	7.9	$61.390 \pm 0.052$
2	10	11.81	$91.774 \pm 0.078$
3	14	10.8	$83.926 \pm 0.072$
4	18	11.94	$92.784 \pm 0.079$
5	22	13.06	$101.488 \pm 0.087$
6	26	15.38	$119.52 \pm 0.10$
7	30	20.14	$156.51 \pm 0.13$
8	34	22.6	$175.62 \pm 0.15$

**Tabela 20**

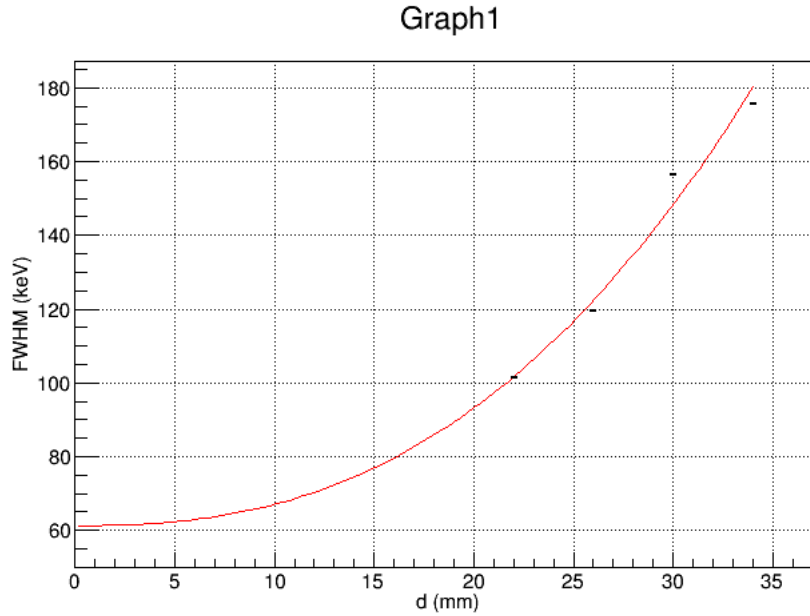
$$FWHM_E = k_0 FWHM \quad (12)$$

$$\sigma_{FWHM_E} = FWHM \sigma_{k_0} \quad (13)$$

Em seguida de forma a verificar a relação de proporcionalidade admitida, realizou-se um ajuste dos dados à função:

$$FWHM_E = P_0 d^{P_1} + P_2 \quad (14)$$

tendo sido excluídos os pontos relativos às prateleiras 2,3 e 4, uma vez que neste caso excecional, o valor de FWHM diminui com o aumento da distância percorrida pelas partículas, por razões já discutidas. Obteve-se então o gráfico da Fig. 7 e os parâmetros da Tab. 21



**Figura 7: Ajuste à Eq. 14**

$P_0$ (keV / (mm) $^{P_1}$ )	$P_1$	$P_2$ (keV)	$\chi^2/\nu$
$0.01921 \pm 0.00036$	$2.4754 \pm 0.0054$	$61.305 \pm 0.052$	$5608/2$

**Tabela 21: Parâmetros do ajuste.**

Numa primeira análise repara-se que o crescimento dos pontos em questão não é típico de uma raiz quadrada. De facto, o valor de  $P_1$  não corrobora essa hipótese inicial, apresentando um desvio de  $364\sigma$  para o seu valor esperado ( $P_1 = 0.5$ ). É notório afirmar que o número reduzido de graus de liberdade ( $\nu = 2$ ) prejudica significativamente o ajuste, acrescentando a isto o valor reduzido dos erros associados aos pontos, o que pode levar a uma subestimação de eventuais erros sistemáticos, algo evidenciado pelo elevado valor de  $\chi^2/\nu$ .