

# Espetroscopia de Raio-X e Ótica Fina

Filipe Miguel (84381) • Francisco Duque (84383) • João Bravo (84390)

**Instituto Superior Técnico**

Mestrado Integrado em Engenharia Física Tecnológica

LFEA - Grupo 2C - Prof. Marta Fajardo & Prof. João Mendanha

Abril-Maio 2018

## Resumo

Neste trabalho estudaram-se diferentes fenómenos físicos recorrendo a diferentes técnicas de espectroscopia. Usando um difratómetro de Raio-X caracterizou-se a estrutura cristalina de várias amostras, calculando a distância entre planos cristalinos com precisão elevada; estimou-se ainda o alcance do potencial de scattering no interior do cristal e a sua refletividade. Recorrendo a um espectrómetro de Lummer-Gherke, estudou-se o efeito Zeeman normal, obtendo-se um valor experimental para  $e/m = (2.15 \pm 0.41) \times 10^{11} \text{ C/kg}$  o que corresponde a um desvio de  $0.95\sigma$  em relação ao esperado teoricamente. Através de um Interferómetro de Fabry-Perot fez-se com sucesso a análise fina da estrutura de modos de dois lasers, um de 2 mW e 20 mW. Realizou-se ainda a caracterização global dos diferentes espectrómetros concluindo-se que o espectrómetro ideal depende do fenómeno físico em estudo - o interferómetro de Fabry Perot e o o espectrómetro de Lummer-Gherke permitem análises espectrais com bastante precisão mas apenas locais, ao passo que o difratómetro de Raios-X permite estudar uma grande gama de frequências em detrimento da elevada precisão que os anteriores oferecem.

## I. INTRODUÇÃO TEÓRICA

### 1. Caraterização dos instrumentos

Em espectroscopia, carateriza-se a eficiência de um instrumento através da sua resolução espectral  $\delta\lambda$ , definida como a menor diferença de comprimentos de onda que pode ser distinguida, e da sua potência resolutive  $\lambda/\delta\lambda$ . Estas revelam a capacidade do instrumento resolver diferentes comprimentos de onda de um espectro eletromagnético. Usa-se ainda a sua *Free Spectral Range*  $FSR \equiv \Delta\lambda$ , definida como o espaçamento em comprimento de onda entre máximos ou mínimos de ordens sucessivas, e a sua *finesse*  $FSR/\delta\lambda$ , que representa o número de ordens que o instrumento consegue distinguir na sua banda espectral.

Estas caraterísticas podem ser estudadas em frequência, tendo em conta que  $\nu = c/\lambda$  e  $\delta\nu = c\delta\lambda/\lambda^2$ .

### 2. Difração de Raio-X

Uma onda incidente num cristal com vetor de onda  $\vec{k}$  sofre interferência por parte dos planos cristalinos e é refletida com um vetor de onda de igual intensidade mas direção diferente  $\vec{k}'$ . A intensidade da radiação emitida tem uma dependência dada por (1) [3], sendo. Sendo  $\vec{G}$  um vetor da rede recíproca que define uma família de planos cristalinos e  $S(\vec{G})$  uma constante de estrutura determinada pela base do cristal. Para  $S(\vec{G}) \neq 0$  e  $\vec{G} = \vec{k} - \vec{k}'$ , a intensidade da radiação refletida é máxima e ocorre fenómeno de difração. Esta é a condição de Laue que é equivalente à de Bragg (2), onde  $\theta$  é o ângulo a que a radiação é difratada.

$$I(\vec{k}, \vec{k}') = \sum_{\vec{G}} \left( \delta(\vec{k} - \vec{k}' - \vec{G}) S(\vec{G}) \right)^2. \quad (1) \quad \sin(\theta) = \frac{\lambda}{2} \frac{||\vec{G}||}{2\pi} = n \frac{\lambda}{2d}. \quad (2)$$

A constante de estrutura  $S(\vec{G})$  é dada por (3) [3], sendo a soma dada sobre todos os átomos na base do cristal com posição  $\vec{r}_j$ . A função  $f_j(\vec{G})$  é característica do potencial de scattering dos átomos da base. Sendo  $r_0$  o seu alcance, para  $x = ||\vec{G}||r_0 < 1$ ,  $f_j \rightarrow 1$ . No entanto, para  $x \sim 1$ ,  $f_j$  tem a seguinte dependência (4) [3].

$$S(\vec{G}) = \sum_j e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}_j} Z_j f_j(\vec{G}) \quad (3) \quad f_j(x) = 3 \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x^3} \quad (4)$$

Uma rede cristalina é definida por 3 vetores que replicam a sua estrutura. No caso de uma rede cúbica de faces centradas (FCC) de constante de rede  $a$ , os vetores da rede recíproca  $\vec{a}_i$  e da respetiva rede recíproca  $\vec{b}_i$  ( $\vec{b}_i \cdot \vec{a}_j = 2\pi\delta_{ij}$ ) são:

$$\vec{a}_1 = \frac{a}{2}(0, 1, 1) \quad \vec{a}_2 = \frac{a}{2}(1, 0, 1) \quad \vec{a}_3 = \frac{a}{2}(1, 1, 0); \quad \vec{b}_1 = \frac{2\pi}{a}(-1, 1, 1) \quad \vec{b}_2 = \frac{2\pi}{a}(1, -1, 1) \quad \vec{b}_3 = \frac{2\pi}{a}(1, 1, -1)$$

### 3. Efeito de Zeeman e Espectrômetro de Lummer-Gehrcke

O efeito de Zeeman é o desdobramento de linhas espectrais na presença de um campo magnético  $\vec{B}$  externo devido ao levantamento da degenerescência de estados com diferentes momentos angulares. Caso o spin total dos elétrons seja nulo, como é o caso do Cádmiu, serão observados dois efeitos de Zeeman normais distintos, dependentes da direção de observação. Se esta for paralela a  $\vec{B}$ , as linhas espectrais originais desdobrar-se-ão em duas componentes polarizadas circularmente e em sentido oposto. Se for perpendicular, as estas dividir-se-ão em três componentes linearmente polarizadas, uma  $\pi$  central no sentido do campo e duas  $\sigma$  exteriores perpendicularmente ao campo, podendo filtrar-se um dos tipos com um filtro polarizador. Assim, um campo magnético externo induz nos elétrons uma oscilação de frequência [7]:

$$\omega = \frac{eB}{2m} \Leftrightarrow \nu = \frac{e}{m} \frac{B}{4\pi}, \quad (5)$$

sendo  $\nu$  designada frequência de Larmor. Esta corresponde também ao desvio em frequência das componentes  $\sigma$  em relação à linha original, pelo que sabendo-a e o valor do campo  $B$ , pode-se estimar o rácio  $e/m$ . A linha espectral vermelha do Cádmiu é devida às transições com um  $\Delta E$  semelhante à  $^1P_1 - ^1D_2$ , respeitando as regras de seleção  $\delta m = \pm 1$  para as componentes  $\sigma$ , e  $\delta m = 0$  para a  $\pi$  [7, 8].

A partir do desvio destas linhas observado com o espectrômetro de Lummer-Gehrcke, é possível estimar o desvio em comprimento de onda [7], de acordo com (6). A ordem de interferência  $m$  para um interferômetro de Lummer-Gehrcke [9] é dada por (7). Já o ângulo  $\chi_q$  ( $\pi/2 - \theta_q$ ) que a  $q$ -ésima linha faz em relação ao centro [9] é dado por (8).

$$\delta\lambda \approx \frac{\delta a}{\Delta a} \frac{\lambda_0^2}{2h\sqrt{n'^2 - 1}} \quad (6) \quad m = \frac{2d}{\lambda_0} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \theta} \quad (7) \quad \chi_q = \frac{(n'^2 - n^2)^{1/4}}{n} \left( \frac{\lambda_0}{d} (q - e) \right)^{1/2} \quad (8)$$

·  $\Delta a$ : distância entre 2 riscas de interferência com  $\vec{B} = 0$ ; ·  $\delta a$  distância entre uma componente de desdobramento e a risca original com  $\vec{B} = 0$ ; ·  $\lambda_0$ : comprimento de onda da linha vermelha do cádmio; ·  $d$ : espessura da lâmina de Lummer-Gehrcke; ·  $n'$ : índice de refração da placa; ·  $n$ : índice de refração do ar; ·  $\delta$ : diferença de fase entre feixes; ·  $\theta$ : ângulo de emergência na lâmina; ·  $e$ : o desvio em relação ao centro da mira usada, devido a um alinhamento não perfeito

### 4. Interferômetro de Fabry-Perot

O interferômetro de Fabry-Perot é constituído por 2 espelhos paralelos de elevada refletividade,  $r^2$ , que funcionam como uma cavidade ótica ressonante de comprimento  $L$ , [10, 11]. Para um determinado comprimento de onda da radiação, a sua transmissividade é função de  $L$  e  $r^2$ , e dada por uma função de Airy (9) [11]. Variando  $L$ , o interferômetro funciona como um filtro de comprimentos de onda/frequência.

$$T_I = \frac{1}{1 + K \sin^2 \frac{2\pi L}{\lambda}} \quad , \quad K = \left[ \frac{2r}{1 - r^2} \right]^2 \quad (9)$$

A periodicidade da função de transmissividade do aparelho determina o seu FSR (10). A resolução espectral é determinada pelo FWHM dos picos de intensidade, que também possuem uma aproximação analítica (11) [11]. Como ambas estas grandezas têm a mesma dependência em  $1/L$ , a *finesse*  $F$  acaba por ser apenas função da refletividade dos espelhos (12). É de realçar que estas grandezas são definidas para  $L$  constante e frequência variável. No entanto, o interferômetro funciona de modo contrário. Em geral, as grandezas são obtidas em unidades de frequência são obtidas corrigindo o regime funcionamento do aparato por um fator multiplicativo de  $\nu/L$ .

$$\Delta \nu_{FSR} = \frac{c}{2L} \quad (10) \quad FWHM_\nu = \frac{c(1 - r^2)}{\pi L 2r} \quad (11) \quad F = \frac{\Delta \nu_{FSR}}{FWHM_\nu} = \frac{\pi r}{1 - r^2} \quad (12)$$

É um aparelho de elevada resolução cujas potências resolutivas podem atingir ordens de  $10^8$ , permitindo uma análise fina de espectros. Nomeadamente, possibilita a observação dos modos de um *laser*. Simplificadamente, este também consiste numa cavidade ótica (com espelhos de diferentes refletividades). Por conseguinte, possui modos longitudinais bem definidos, que podem ser ampliados acima do *threshold* para o qual ocorre a emissão de radiação [11], e observados recorrendo ao interferômetro de Fabry-Perot.

## II. MONTAGEM

### 1. Espectroscopia de Raios-X - Cristalografia

O esquema do interferômetro utilizado encontra-se na figura 1. Este permite a separação angular de um feixe de radiação incidente em função do seu comprimento de onda. A lâmpada Molibdénio ( $^{42}\text{Mo}$ ) (a)

emite um feixe de Raio-X colimado na direção de um cristal colocado sobre uma plataforma (f) cuja normal faz um ângulo variável  $\theta$  com a vertical. O Feixe é refletido, relativamente à normal do cristal, na direção de um detetor de Geiger Muller (e) (colocado a um ângulo  $2\theta$  da horizontal) que deteta a intensidade do feixe refletido. Variando  $\theta$  vemos a correspondente variação da intensidade do feixe refletido obtendo-se o espectro da radiação incidente através de um sistema de aquisição de dados.

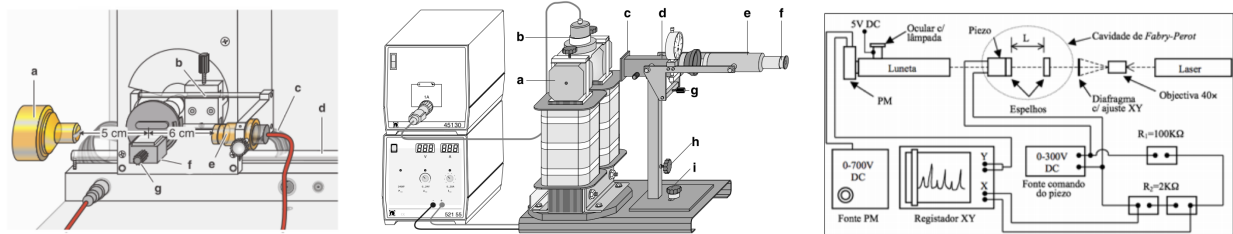
## 2. Espectroscopia Atômica - Efeito de Zeeman

Utilizou-se um espectrômetro atômico de Lummer-Gehrcke, representado na figura 1 na configuração transversal ao campo, que tem por base a interferência múltipla numa lâmina fina de espessura  $d = 4.04 \text{ nm}$  e índice de refração  $n = 1.4567$ , formando um padrão de difração. Usou-se também uma lâmpada de Cádmio (b), cujo comprimento de onda tabelado da linha vermelha é  $\lambda_0 = 643.8 \text{ nm}$ , dois eletroímãs (a) para produzir o campo magnético, um filtro vermelho (c), um manômetro (d) para medir o deslocamento vertical da luneta (e). O deslocamento angular da luneta é efetuado com o parafuso (g). Os ângulos serão dados por  $\chi_q = \arctan(z_q/L)$ , sendo  $z_q$  a posição da linha  $q$  e  $L$  a distância do manômetro ao eixo de rotação vertical da luneta.

Na configuração longitudinal ao campo, utilizou-se um retardador de  $\lambda/4$  para linearizar a polarização circular das componentes de desdobramento. Na configuração transversal, usou-se um filtro polarizador com a direção de polarização perpendicular ao campo aplicado para cortar a componente central ( $\pi$ ) de forma a facilitar a visualização das componentes  $\sigma$ .

## 3. Espectroscopia Fina Laser - Interferômetro de Fabry-Perot

Utilizaram-se dois lasers de  $\text{He} - \text{Ne}$  que emitem radiação nos  $632.8 \text{ nm}$ , com uma largura de banda de ganho (intervalo de frequências ampliado acima do *threshold*) de  $1.5 \text{ GHz}$ . O primeiro, com uma potência nominal de  $2 \text{ mW}$  possui modos espaçados de  $614 \text{ MHz}$ , enquanto o segundo tem potência nominal de  $20 \text{ mW}$  (na realidade inferior) emite modos distanciados de  $320 \text{ MHz}$  (valores do fabricante [2]). A montagem, cuja esquema se apresenta na fig. 1, está assente numa calha de diferentes componentes e materiais, que não estão necessariamente à mesma altura, o que dificultou o alinhamento de todos os elementos óticos. Na luneta é possível visualizar os anéis resultantes da interferência do laser na cavidade de Fabry-Perot. O comprimento desta é alterado recorrendo a um piezoelétrico cuja resposta à tensão imposta não é necessariamente linear, mas se assumiu como tal. O fotomultiplicador deteta o sinal correspondente aos vários anéis observados na luneta. Os varrimentos de tensão no piezoelétrico têm de ser suficientemente rápidos para não serem afetados por instabilidades na radiação emitida pelo laser, nomeadamente devido ao não equilíbrio térmico.



**Figura 1:** Esquemas das montagens: Esquerda - Difrátmetro de raio-X; Centro - Espectrômetro de Lummer-Gehrcke; Direita - Interferômetro de Fabry-Perot

## III. ESPETROSCOPIA DE RAIOS-X - CRISTALOGRAFIA

Os picos de raio-X mais intensos emitidos pela ampola de Molibdénio têm a energia dada na tabela 1. Estudou-se o espectro de raio-X usando 5 diferentes cristais como interferômetro. As suas características encontram-se resumidas na tabela 2. A distância indicada para o Silício ( $d/4$ ) é de facto metade da prevista pela condição de Laue, já que, em múltiplos ímpares de  $\vec{G}_0$ ,  $S(\vec{G})$  (eq. (3)) anula-se.

	$E \text{ (keV)}$	$\lambda \text{ (Å)}$
$K_\alpha$	17.443	0.71080
$K_\beta$	19.651	0.63095

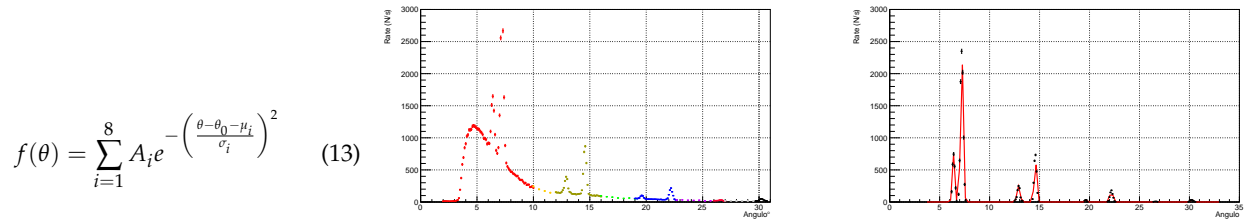
**Tabela 1:** Energia e comprimentos de onda da radiação emitida pelo Molibdénio

Cristal	$a \text{ (Å)}$	Base	$\vec{G}_0$	d
NaCl (plano 0)	5.6402	Na em [000], Cl em $[\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}]$	(110)	$a/2$
NaCl (plano 1)	5.6402	Na em [000], Cl em $[\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}]$	?	?
LiF	4.0351	Li em [000], F em $[\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}]$	(110)	$a/2$
Si	5.4310	Si em [000], Si em $[\frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4}]$	(110)	$a/4^*$
Al	4.0495	Al em [000]	(110)	$a/2$

**Tabela 2:** Estrutura cristalina dos diferentes cristais estudados

## 1. Caracterização do Espetrômetro

Nesta secção focalizamos a análise no espectro da primeira amostra de NaCl ( $\text{NaCl}_0$ ). Na figura 2 (painel esquerdo) podemos observar o espectro produzido pela incidência do feixe de raio-X neste cristal. Observam-se vários picos intensos sobre um fundo de contínuo produzido pela emissão de Bremsstrahlung pela aceleração dos elétrons na âmpola. Para uma correta caracterização dos picos  $K_\alpha$  e  $K_\beta$  é necessário isolar o fundo, subtraindo-o aos dados. Considerando todos os pontos cuja distância ao centróide de qualquer um dos picos fosse superior ao triplo da sua largura ( $\Delta\theta > 3\sigma$ ), construiu-se um interpolador *Spline-Cubic*, permitindo estimar a contribuição do fundo para a intensidade dos picos observados. Corrigiu-se os dados experimentais subtraindo-a e truncando a uma distância de  $3\sigma$  do centróide de cada um dos picos. A estes ajustou-se uma soma de 8 expressões gaussianas com parâmetros  $A_i$ ,  $\mu_i$ ,  $\sigma_i$  (uma por cada um dos dois picos energéticos observados em cada uma das 4 ordens no espectro) e um *offset* global em  $\theta$ ,  $\theta_0$  (13). Os centróides e desvios padrões obtidos foram usados para estimar novamente o ruído pelo processo descrito acima, repetindo-se o ajuste até uma convergência do valor do seu  $\chi^2$ , obtendo-se o ajuste da figura 2, estando os parâmetros de ajuste na tabela 3.



**Figura 2:** *Painel esquerdo:* Espectro produzido pelo primeiro sal de NaCl estudado. *Painel direito:* Ajuste da equação (13) aos dados após removido o fundo.

ordem	$A_\alpha$	$A_\beta$	$\mu_\alpha(^{\circ})$	$\mu_\beta(^{\circ})$	$\sigma_\alpha(^{\circ})$	$\sigma_\beta(^{\circ})$
1	$2387 \pm 114.96$	$748.4 \pm 24.2$	$7.2176 \pm 0.0163$	$6.3967 \pm 0.0234$	$0.1324 \pm 0.0112$	$0.1175 \pm 0.0145$
2	$763.4 \pm 64.716$	$249.1 \pm 8$	$14.572 \pm 0.0177$	$12.902 \pm 0.0176$	$0.1181 \pm 0.0128$	$0.1541 \pm 0.0095$
3	$181.58 \pm 6.6879$	$36.9 \pm 6.1$	$22.188 \pm 0.0173$	$19.62 \pm 0.0289$	$0.1435 \pm 0.0095$	$0.0968 \pm 0.0181$
4	$34.367 \pm 2.2611$	$9.3 \pm 1.1$	$30.224 \pm 0.018$	$26.631 \pm 0.0201$	$0.1524 \pm 0.0137$	$0.116 \pm 0.0162$

**Tabela 3:** Parâmetros do ajuste de (13) ao espectro de  $\text{NaCl}_0$

Obteve-se  $\chi^2/ndf = 0.496$ , valor algo inferior à unidade devido ao excessivo número de parâmetros de ajuste ( $N_{par} = 25$ ), sendo o sistemático em  $\theta$  compatível com 0 ( $\theta_0 = 0.0003 \pm 0.0060$ ). Usando os valores dos parâmetros de ajuste calculou-se, pela lei de Bragg (2) a frequência correspondente a cada pico. Recorrendo à equação (14), partindo da largura dos picos  $\delta\theta$ , estimou-se a sua largura em frequência, obtendo-se os dados da tabela 4.

order	$v_\alpha (10^{18} \text{Hz})$	$\delta(\# \sigma)$	$v_\beta (10^{18} \text{Hz})$	$\delta(\# \sigma)$	$\delta v_\alpha (10^{18} \text{Hz})$	$\delta v_\beta (10^{18} \text{Hz})$
1	$4.2306 \pm 0.0095$	1.36	$4.7708 \pm 0.0174$	1.11	$0.1818 \pm 0.0276$	$0.2054 \pm 0.0312$
2	$4.2252 \pm 0.0050$	1.50	$4.7610 \pm 0.0064$	1.47	$0.0789 \pm 0.0099$	$0.1317 \pm 0.0166$
3	$4.2224 \pm 0.0031$	1.51	$4.7489 \pm 0.0067$	-0.40	$0.0611 \pm 0.0046$	$0.053 \pm 0.0040$
4	$4.2237 \pm 0.0023$	2.62	$4.7432 \pm 0.0033$	-2.52	$0.0454 \pm 0.0042$	$0.0451 \pm 0.0042$

**Tabela 4:** Centróide e largura em frequência dos picos obtidos

Prova-se que o poder resolutivo em cada pico é dado por (15). Recorrendo à lei de Bragg deduz-se uma expressão teórica para  $FSR_v$  ( $\Delta v$ ) (16); partindo da distância angular entre picos sucessivos calcula-se o  $FSR$  a um nível por (17). Obtêm-se os valores constantes da tabela 5.

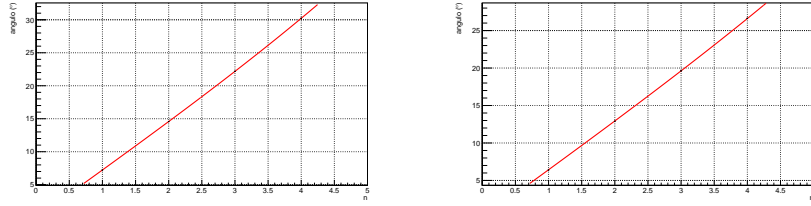
$$R = \frac{\tan(\theta)}{\delta_\theta} \quad (15) \quad \Delta v_{teor} = \frac{v}{n+1} \quad (16) \quad \Delta v_{Exp} = \frac{2dc}{n} |\sin(\theta_{n+1}) - \sin(\theta_n)| \quad (17)$$

	ordem	R	$\Delta v_{exp}(10^{18} \text{ Hz})$	$\Delta v_{teor}(10^{18} \text{ Hz})$	$\delta(10^{18} \text{ Hz})$	$\delta(\# \sigma)$	$finesse_v$
$\alpha$	1	$23.3 \pm 2.0$	$2.1180 \pm 0.0098$	$2.11532 \pm 0.00474$	-0.00269	-0.57	$11.6 \pm 1.8$
	2	$53.5 \pm 5.8$	$1.4103 \pm 0.0054$	$1.40841 \pm 0.00168$	-0.00188	-1.12	$17.9 \pm 2.3$
	3	$69.1 \pm 4.6$	$1.0547 \pm 0.0036$	$1.05561 \pm 0.00078$	0.00093	1.18	$17.3 \pm 1.3$
	4	$93.0 \pm 8.4$	-	-	-	-	-
$\beta$	1	$23.2 \pm 2.9$	$2.3903 \pm 0.0177$	$2.3854 \pm 0.0087$	-0.0049	-0.57	$11.6 \pm 1.8$
	2	$36.2 \pm 2.2$	$1.5951 \pm 0.0078$	$1.5870 \pm 0.0021$	-0.0081	-3.79	$12.1 \pm 1.5$
	3	$89.6 \pm 16.8$	$1.1915 \pm 0.0072$	$1.1872 \pm 0.0017$	-0.0043	-2.54	$22.5 \pm 1.7$
	4	$105.1 \pm 14.7$	-	-	-	-	-

**Tabela 5:** Parâmetros característicos do espectrômetro e respectivos desvios aos valores teóricos

Por fim, de modo a validar a lei de Bragg ajustou-se a posição angular dos picos produzidos por um dado comprimento de onda  $\lambda_\alpha$  ou  $\lambda_\beta$  em função da sua ordem de interferência à equação (18), na qual  $\alpha$  representa  $\lambda/d$ . Obtiveram-se os ajustes da fig. 3, resumindo-se os valores dos parâmetros de ajuste na tabela 6.

$$\theta(n) = \text{asin}\left(\frac{\lambda}{2d}n\right), \quad (18)$$



**Figura 3:** Resultado do ajuste da equação (18) à variação da posição angular dos picos correspondentes a um dado comprimento de onda, em função da ordem de interferência

pico	$\left(\frac{\lambda_\alpha}{d}\right)_{Fit}$	$\chi^2/NDF$	$\left(\frac{\lambda_\alpha}{d}\right)_{teor}$	$\delta$	$\delta(\# \sigma)$
$\alpha$	$0.25169 \pm 0.000101$	0.26457	0.252046	-0.000356	-3.52
$\beta$	$0.2239 \pm 0.000126$	2.6805	0.223726	0.000174	1.38

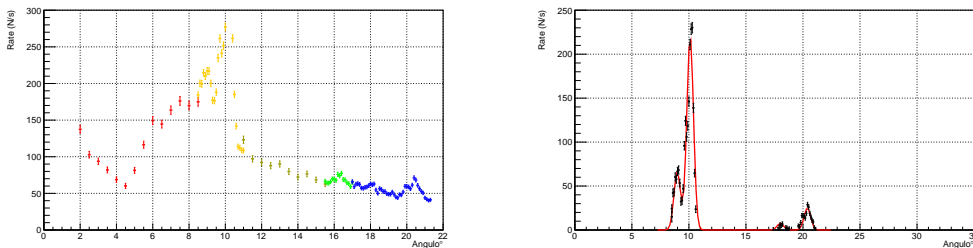
**Tabela 6:** Parâmetros obtidos no ajuste acima referido

O  $\chi^2/NDF$  tem uma grandeza próxima da unidade, validando a lei de Bragg.

## 2. Caracterização dos Cristais

Ao longo desta secção analisa-se a estrutura cristalina dos restantes cristais. Dado a validade demonstrada acima da lei de Bragg, é possível reduzir bastante o número de parâmetros livres necessários ao estudo de cada espectro, controlando a posição dos centróides de cada pico pela sua previsão teórica e assumindo a mesma variância para todas as gaussianas. A cada espectro removeu-se o fundo de Bremsstrahlung pelo mesmo método descrito na secção anterior, ajustando-se os picos à equação (19) ( $5 + n_{order}$  parâmetros livres), na qual  $n_{order}$  representa o número de ordens observadas no espectro. A título de exemplo apresenta-se o ajuste efetuado ao espectro do Alumínio na figura 4, para a consulta dos restantes espectros refere-se o leitor à consulta do *logbook* digital anexo. Os resultados obtidos para as restantes amostras encontram-se sumariados na tabela 7.

$$R(\theta + \theta_0) = \sum_{i=1}^{n_{order}} A_i \left( e^{-\left(\frac{\theta - \mu_{\alpha_i}}{\sigma}\right)^2} + \frac{A_\beta}{A_\alpha} e^{-\left(\frac{\theta - \mu_{\beta_i}}{\sigma}\right)^2} \right), \quad (19) \quad \mu_{\alpha_i} = \text{asin}\left(\frac{i \lambda_\alpha}{2d}\right), \quad \mu_{\beta_i} = \text{asin}\left(\frac{i \lambda_\beta}{2d}\right) \quad (20)$$



**Figura 4:** Dados retirados para o cristal de Al e respetivo ajuste

amostra	$\theta_0$	$\lambda_\alpha/d$	$\lambda_\beta/d$	$A_\beta/A_\alpha$	$\sigma$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$\chi^2/NDF$
NaCl <sub>0</sub>	-0.071 ± 0.010	0.25239 ± 0.00014	0.22476 ± 0.00012	0.372 ± 0.019	0.1485 ± 0.0034	2564 ± 127	691 ± 35	187.5 ± 9.8	30.3 ± 2.0	1.36
NaCl <sub>1</sub>	0.189 ± 0.031	0.35721 ± 0.00066	0.31824 ± 0.00077	0.296 ± 0.048	0.106 ± 0.0063	518 ± 57	50.9 ± 6.6	-	-	0.73
LiF	-0.102 ± 0.016	0.35278 ± 0.00022	0.31356 ± 0.00029	0.301 ± 0.026	0.1291 ± 0.0052	2903 ± 261	507 ± 38	102.8 ± 10.4	-	0.82
Si	-0.115 ± 0.024	0.52485 ± 0.00039	0.46632 ± 0.00067	0.317 ± 0.045	0.1176 ± 0.0059	160 ± 4.6	36.5 ± 5.4	-	-	1.99
Al	0.151 ± 0.029	0.34585 ± 0.00072	0.30682 ± 0.00100	0.297 ± 0.013	0.2919 ± 0.0067	219.4 ± 5.3	24.8 ± 1.3	-	-	3.07

**Tabela 7:** Parâmetros de ajuste obtidos na análise dos espectros das várias amostras.

Os valores obtidos para  $\theta_0$  foram em geral diferentes para cada ajuste (incompatíveis nas suas incertezas), com sinais diferentes entre si e incompatíveis com 0. Intui-se que este sistemático é apenas um artifício do ajuste. Os valores obtidos para os  $\chi^2/Ndf$  de cada ajuste são em geral próximos da unidade, atestando a concordância entre os valores experimentais e o modelo teórico, ocorrendo valores ligeiramente superiores apenas em amostras cuja estrutura cristalina está mais afeta a impurezas (Alumínio e Silício).

Recorrendo aos valores teóricos de  $\lambda_\alpha$  e  $\lambda_\beta$  e aos parâmetros do ajuste anterior calculam-se as distâncias entre planos cristalinos que lhes correspondem ( $d_\alpha$  e  $d_\beta$ ). Para descobrir a normal ao plano cristalino na segunda amostra de NaCl calcularam-se distâncias para alguns vetores da rede recíproca (tabela 8). A distância mais concordante é de 1.9941 (Å), correspondendo a um vetor normal (211). Na base cartesiana este vetor escreve-se  $\vec{G} = \frac{2\pi}{a}(2, 2, 0)$ , descrevendo por isso planos paralelos a  $\vec{e}_z$  e a uma diagonal da célula unitária, espaçados de  $\frac{\sqrt{2}a}{4}$ . Na tabela 9 apresentam-se os valores obtidos para as distâncias entre planos cristalinos e respetivos valores tabelados:

amostra	$d_\alpha$ (Å)	$d_\beta$ (Å)	$\vec{G}$	d (Å)
NaCl <sub>1</sub>	1.9899 ± 0.0037	1.9826 ± 0.0048	(100)	3.2564
			(110)	2.8201
			(211)	1.9941
			(210)	1.7006

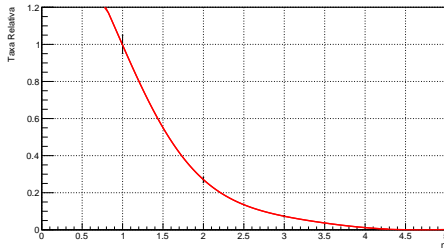
amostra	$d_\alpha$ (Å)	$d_\beta$ (Å)	$d_{teor}$ (Å)	$\delta_\alpha$ (Å)	$\delta(\# \sigma)$	$\delta_\beta$ (Å)	$\delta(\# \sigma)$
NaCl <sub>0</sub>	2.8163 ± 0.0016	2.8071 ± 0.0015	2.8201	-0.0038	-2.47	-0.013	-8.71
NaCl <sub>1</sub>	1.9899 ± 0.0037	1.9826 ± 0.0048	1.9941	-0.0043	-1.16	-0.0115	-2.42
LiF	2.0148 ± 0.0012	2.0122 ± 0.0018	2.0176	-0.0027	-2.19	-0.0054	-2.92
Si	1.3543 ± 0.0010	1.3530 ± 0.0019	1.3578	-0.0035	-3.41	-0.0048	-2.46
Al	2.0552 ± 0.0043	2.0564 ± 0.0067	2.0248	0.0305	7.16	0.0316	4.73

**Tabela 8:** Possíveis vetores normais ao plano de corte

**Tabela 9:** Distâncias entre planos cristalinos obtidas e respetiva comparação com a previsão teórica

Os desvios em  $\# \sigma$  são algo superiores à unidade ( $\sim 3\sigma$ ), indicando que a correspondência entre o modelo usado e os resultados experimentais não é exata. Esta medição poderá ser afetada por impurezas nos cristais, imperfeições na sua estrutura cristalina e *offset's* no ângulo medido.

Verifica-se agora a validade da expressão deduzida para a intensidade da radiação refletida em função da ordem de interferência (eqs (3)-(4)). No caso do NaCl, usando as definições das equações referidas, a dependência é dada pela equação (21). Ajustou-se a variação de  $A_n$ ,  $n = 1, \dots, 4$  obtidos no ajuste à amostra NaCl<sub>0</sub> em função da ordem de interferência  $n$  à equação referida, tendo por parâmetros livres  $r_{0Na}/d$ ,  $r_{0Cl}/d$  e  $I_0$ . Na fig. 5 vemos o resultado deste ajuste, encontrando-se os parâmetros obtidos na tabela 10.



**Figura 5:** Ajuste da variação da Intensidade da radiação refletida com a ordem de interferência à equação (21)

$$I(G) = I_0(Z_{Na}f(x_{Na}) + Z_{Cl}f(x_{Cl}))^2 \quad (21)$$

$$x_{Na} = r_{0Na}G \quad x_{Cl} = r_{0Cl}G \quad G(n) = \frac{2\pi}{d}n$$

$r_{0Na}/d$	$r_{0Cl}/d$	$I_0$	$\chi^2/NDF$	$r_{0Cl}/r_{0Na}$	$r_{Cl^-}/r_{Na^+}$	$r_{Cl}/r_{Na}$
0.3653 ± 0.0101	0.1539 ± 0.0011	0.01912 ± 0.00076	0.012	0.421 ± 0.012	$\sim 1.31$	$\sim 0.42$

**Tabela 10:** Dados do ajuste acima descrito

O quociente entre os valores do alcance  $r_0$  é idêntico ao quociente entre os raios atômicos dos constituintes da estrutura e completamente diferente do rácio entre os respetivos raios Iónicos. Este resultado indica que na interação da radiação com a estrutura cristalina não é relevante a variação da dimensão dos constituintes induzida pela deslocalização dos eletrões nos iões. Por outro lado verifica-se que o valor do  $\chi^2/ndf$  é duas ordens de grandeza abaixo do esperado. Isto deve-se à elevada incerteza nas amplitudes provenientes do ajuste anterior e ao muito reduzido número de graus de liberdade ( $ndf = 1$ ).

### 3. Estudo da Refletividade dos Cristais

Por fim pretende-se estudar a refletividade dos cristais usados, comparando as intensidades do feixe incidente e refletido ( $R = I_r/I_0$ ). Diminui-se a intensidade do feixe de raio-X e estudou-se a sua incidência direta no leitor de Geiger, integrando o espectro detetado. Para a mesma intensidade integrou-se o espectro obtido usando a amostra  $\text{NaCl}_0$ , obtendo-se uma refletividade absoluta de  $R_0 = 3.70\%$ . Integrando o espectro obtido para cada um dos restantes sais estudados na alínea anterior e comparando com o espectro da amostra  $\text{NaCl}_0$  calcularam-se refletividades normalizadas à deste cristal. Multiplicando pela sua refletividade absoluta obtêm-se as refletividades absolutas ( $R_a$ ) dos vários cristais (tab. 11)

amostra	$R_a/R_0$	$R_a$
$\text{NaCl}_0$	100%	3.70%
$\text{NaCl}_1$	18%	0.65%
$\text{LiF}$	97%	3.59%
$\text{Si}$	12%	0.45%
$\text{Al}$	27%	1.00%

**Tabela 11:** Refletividade dos vários cristais estudados

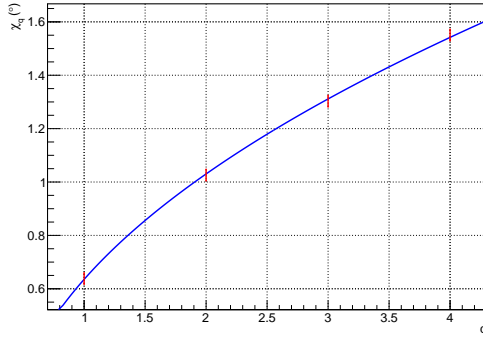
## IV. ESPETROSCOPIA ATÔMICA - EFEITO DE ZEEMAN

### 1. Verificação da Condição de Interferência

Devido a imprecisões na medições, como oscilação da luneta, e à subjetividade das mesmas, associou-se às medidas retiradas um erro de  $0.02 \text{ mm}$ , superior à menor divisão da escala. No geral, as posições obtidas para as riscas apresentam um desvio sistemático por excesso em relação ao valor esperado, ainda que sejam compatíveis nos seus erros. Os dados obtidos com maior exatidão, porventura devido à maior visibilidade das riscas, foram para a configuração transversal ao campo magnético, sem retardador de  $\lambda/4$ . Para estes, verificou-se a condição de interferência com a expressão (8), ajustando aos dados dos ângulos e ordens relativas ao centro uma expressão do tipo:

$$\chi_q = A\sqrt{q-e} \quad (22)$$

em que o parâmetro de ajuste  $e$  já terá em conta o desvio da origem inerente ao alinhamento. Obteve-se o seguinte resultado:



**Figura 6:** Ajuste de (22) aos dados para verificar condição de interferência

$A$	$e$ (°)	$\chi^2/ndf$
$0.810 \pm 0.015$	$-0.004 \pm 0.052$	0.21

**Tabela 12:** Parâmetros obtidos no ajuste de (22)

$$A = \frac{(n'^2 - n^2)^{1/4}}{n} \sqrt{\frac{\lambda_0}{h}} \quad (23)$$

O ajuste intersesta todos o pontos nas suas incertezas, o que indica a sua boa qualidade. Já o valor do  $\chi^2/ndf$  é baixo e inferior a 1, o que leva a crer que os erros assumidos poderão ter sido muito elevados. No entanto, devido aos fatores já referidos, estes estão bem fundamentos. Sendo  $A$  dado pela equação (23), o seu valor esperado é  $A = 0.744$ , sendo o parâmetro de ajuste incompatível com ele na sua incerteza, sobrestimando-o. Isto poderá ser de novo fruto da dificuldade nas medições, que terão levado à sobreestimação da posição das riscas de ordem superior. Já o parâmetro  $e$  é compatível com o valor nulo na sua incerteza, o que indica um alinhamento razoável da montagem. O seu valor negativo é consistente com um desvio dos ângulos calculados por excesso.

### 2. Caracterização do Espetrómetro de Lummer-Gehrcke

Com os dados registados, notam-se discrepâncias tanto nas larguras das linhas, como no espaçamento entre elas, o que evidencia novamente as dificuldades tidas nas medições das mesmas. Optou-se por considerar uma média dos valores calculados com as 6 riscas centrais (as mais definidas), 3 superiores e 3 inferiores. Para a configuração transversal, obteve-se  $\bar{\Delta a} = (0.319 \pm 0.010) \text{ mm}$ .

Para calcular o  $\delta a$  a usar na resolução do aparelho, considerou-se a menor corrente aplicada a que se conseguia distinguir duas componentes de desdobramento,  $I = 5 \text{ A}$ . Considerando que já se notaram separações das componentes das primeiras e segundas riscas, optou-se por usar a média das mesmas para o valor final de  $\delta a$ . No decorrer da experiência houve bastantes oscilações da luneta e desregulações da



montagem, mesmo em distância à lâmpada. Isto fez com que as posições das riscas sem campo aplicado não coincidisse com o centro das suas componentes de desdobramento. Por isso, optou-se por calcular o  $\delta a$  de cada risca como a subtração da média da posição das componentes de desdobramento a uma das mesmas componentes. Fez-se o mesmo cada corrente aplicada. Obteve-se  $\bar{\delta a} = (0.033 \pm 0.012) \text{ mm}$ , chegando-se a uma resolução espectral de  $\delta\lambda = (4.9 \pm 1.9) \text{ pm}$  ou  $\delta\nu = (3.6 \pm 1.4) \text{ GHz}$ . Obtém-se a potência resolutive  $\lambda_0/\delta\lambda = (1.31 \pm 0.49) \times 10^5$ , cuja ordem é concordante com o esperado para um espectrómetro de Lummer-Gehrcke, o que introduz confiança nos resultados.

Assumindo que as contantes fornecidas estão corretas para a montagem usada, o FSR deste espectrómetro é dado pelo valor de  $\delta\lambda$  quando  $\delta a$  é igual à separação entre riscas de ordens sucessivas, sem campo magnético. Assim:

$$FSR_\lambda \equiv \Delta\lambda = \frac{\lambda^2 \sqrt{n'^2 - 1}}{2h(n'^2 - 1)} = 48.43 \text{ pm} \implies FSR_\nu \equiv \Delta\nu = \frac{c \sqrt{n'^2 - 1}}{2h(n'^2 - 1)} = 35.03 \text{ GHz} \quad (24)$$

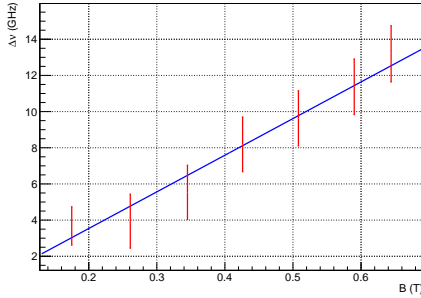
A *finesse* deste aparato é dada assim por  $FSR_\lambda/\delta\lambda = 9.8 \pm 3.7$ .

### 3. Desdobramento das Riscas em função do Campo Magnético Longitudinal e Transversal

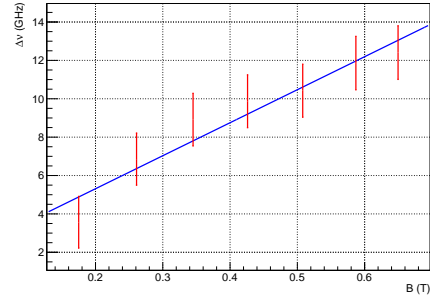
Interpolaram-se os valores fornecidos do campo magnético  $B$  em função da corrente aplicada  $I$  pelo método *Spline-Cubic*. Ajustou-se aos dados do desvio absoluto em frequência em função do campo uma expressão do tipo:

$$\delta\nu = a \frac{B}{4\pi} + b \quad (25)$$

Apresentam-se o ajuste e os parâmetros obtidos para o campo magnético aplicado longitudinalmente (7-13) e transversalmente (8-14) ao eixo da luneta.



**Figura 7:** Ajuste de (25) aos dados experimentais na configuração de observação longitudinal ao campo aplicado



**Figura 8:** Ajuste de (25) aos dados experimentais na configuração de observação transversal ao campo aplicado

$a \text{ (GHz/T)}$	$b \text{ (GHz)}$	$\chi^2/ndf$
$245 \pm 40$	$-0.5 \pm 1.3$	0.36

**Tabela 13:** Parâmetros obtidos no ajuste da figura 7 de (25)

$a \text{ (GHz/T)}$	$b \text{ (GHz)}$	$\chi^2/ndf$
$215 \pm 41$	$1.6 \pm 1.7$	0.45

**Tabela 14:** Parâmetros obtidos no ajuste da figura 8 de (25)

Os ajustes interseam todos os pontos nas suas incertezas, o que indica a sua boa qualidade. Já os valores dos  $\chi^2/ndf$  são de novo baixos, razão discutida acima. O desvio para  $I = 19.7 \text{ A}$ , apresenta-se inferior ao obtido com campo longitudinal. Tendo em conta a grande dispersão das riscas, há a possibilidade da proteção central ter coberto parte da componente  $\sigma^-$  da primeira risca nesta configuração. Isso sobrestimaria a posição dessa componente, o que subestimaria o seu desvio da risca original. O parâmetro  $b$  reflete desvios em frequência mesmo na ausência de campo magnético, cujo valor esperado é obviamente zero. Este é compatível na sua incerteza. Já o parâmetro  $a$ , que corresponde à razão  $e/m \approx 1.759 \times 10^{11} \text{ C/kg}$  em módulo, é em unidades mais familiares  $a = (2.45 \pm 0.40) \times 10^{11} \text{ C/kg}$  e  $a = (2.15 \pm 0.41) \times 10^{11} \text{ C/kg}$  nas configurações longitudinal e transversal, respetivamente. Estes distam do valor teórico por 39% e 22%, englobando-o a  $1.7\sigma$  e  $0.95\sigma$ , respetivamente. Torna-se aqui claro a maior precisão no alinhamento e medição na configuração transversal. Ambas as estimativas da razão carga-massa do elétron se encontram por excesso. Isto traduz-se numa inclinação da reta de ajuste superior à esperada. Tal pode ser devido à subestimação do desvio das componentes da primeira risca. Para além disso, sendo os desvios tabelados calculados por teoria de perturbações, quanto maior a perturbação, menor será a validade da aproximação tabelada. Outra causa poderá também ser o simples facto da subjetividade das medidas ter levado à



sobrestimação da separação entre riscas de maior ordem. Assume-se que este excesso é fruto duma combinação destes fatores.

## V. ESPETROSCOPIA FINA LASER - INTERFERÓMETRO DE FABRY-PEROT

### 1. Caracterização do Interferómetro - Laser de 2 mW

Os dados obtidos para a intensidade da radiação detetada pelo fotomultiplicador,  $U_{PM}$ , em função da tensão imposta no piezoelétrico,  $U_{Piezo}$ , foram ajustados a somas de funções de Airy:

$$U_{PM}(U_{Piezo}) = \sum_{i=0}^N \frac{P_i}{1 + P_1 \cdot \sin^2(P_2 \cdot U_{Piezo} + P_{i+3})}, \quad (26)$$

em que  $N$  é o número de picos (modos) que se repetem periodicamente.  $P_i$  e  $P_{i+3}$  correspondem respetivamente à intensidade e fase inicial do modo, daí que cada um possua estes parâmetros diferentes. Já  $P_1$  e  $P_2$  têm significados em (9) bem definidos independentes do modo observado pelo que se usa o mesmo parâmetro para todos os modos (num mesmo *fit*). Para este laser realizaram-se ensaios com uma distância entre espelhos de  $L_1 = 65 \pm 2$  mm e  $L_2 = 46 \pm 2$  mm. Os ajustes e parâmetros consequentes encontram-se nas figs. 9 e 10, e na tabela 15.

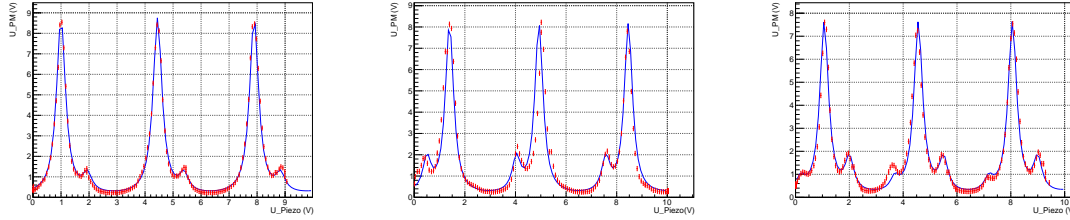


Figura 9: Ajuste de (26) a ensaios realizados com o laser de 2 mW, com uma distância entre espelhos de  $L_1 = 65 \pm 2$  mm

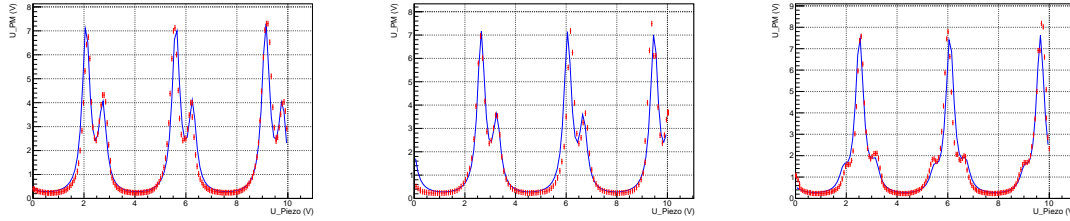


Figura 10: Ajuste de (26) a ensaios realizados com o laser de 2 mW, com uma distância entre espelhos de  $L_2 = 46 \pm 2$  mm

Ensaio	$P_0$ (V)	$P_1$	$P_2$ (rad V <sup>-1</sup> )	$P_3$ (rad)	$P_4$ (V)	$P_5$ (rad)	$P_6$ (V)	$P_7$ (rad)	$\chi^2/ndf$
$L_1$ - Esquerda	$8.718 \pm 0.066$	$31.77 \pm 0.54$	$(9.114 \pm 0.006) \times 10^{-1}$	$(9.107 \pm 0.032) \times 10^{-1}$	$(8.898 \pm 0.301) \times 10^{-1}$	$1.769 \pm 0.008$	-	-	1.63
$L_1$ - Centro	$8.094 \pm 0.079$	$32.13 \pm 0.63$	$(8.887 \pm 0.006) \times 10^{-1}$	$1.234 \pm 0.003$	$1.596 \pm 0.037$	$(4.448 \pm 0.058) \times 10^{-1}$	-	-	16.28
$L_1$ - Direita	$7.545 \pm 0.058$	$32.59 \pm 0.59$	$(8.898 \pm 0.006) \times 10^{-1}$	$(9.573 \pm 0.031) \times 10^{-1}$	$(5.842 \pm 0.303) \times 10^{-1}$	$(1.732 \pm 0.102) \times 10^{-1}$	$1.478 \pm 0.034$	$1.799 \pm 0.006$	4.78
$L_2$ - Esquerda	$7.065 \pm 0.070$	$39.12 \pm 0.67$	$(8.912 \pm 0.005) \times 10^{-1}$	$1.856 \pm 0.003$	$3.556 \pm 0.041$	$2.438 \pm 0.004$	-	-	9.44
$L_2$ - Centro	$6.905 \pm 0.079$	$36.82 \pm 0.77$	$(9.195 \pm 0.006) \times 10^{-1}$	$2.43 \pm 0.004$	$3.04 \pm 0.055$	$3.000 \pm 0.005$	-	-	15.24
$L_2$ - Direita	$7.441 \pm 0.057$	$38.98 \pm 0.73$	$(8.820 \pm 0.006) \times 10^{-1}$	$2.225 \pm 0.005$	$(8.721 \pm 0.380) \times 10^{-1}$	$1.670 \pm 0.009$	$1.171 \pm 0.041$	$2.776 \pm 0.008$	9.85

Tabela 15: Parâmetros resultantes dos ajustes efetuados nas figs. 9 e 10

Em todos os ensaios o  $\chi^2/ndf$  mantém-se suficientemente reduzido para conferir fiabilidade ao ajuste. Visualmente, a maior diferença entre os ensaios para os diferentes  $L$  é a distância entre os picos, que é maior para um espaçamento  $L_1$  maior. Isto justifica que para estes os  $\chi^2/ndf$  sejam em geral inferiores, já que a mistura entre picos que ocorre para os ensaios com  $L_2$  dificulta a soma de funções de Airy independentes. Esta aproximação entre picos também é consistente com o modelo descrito na introdução teórica. O parâmetro  $P_2$  mantém-se aproximadamente constante em todos os ensaios e este define o intervalo de tensão correspondente ao período da função de Airy, ou seja, o FSR. Devido ao fator de conversão  $\nu/L$  referido na introdução teórica a não variação deste parâmetro para diferentes  $L$  é consistente ( $FSR_U \propto LFSR_\nu/\nu$ , logo independente de  $L$ ). Também se verificou que o comprimento do piezoelétrico não variava de forma linear com a tensão que lhe é imposta. Ao realizarem-se *fits* a apenas conjuntos de 2 picos para um mesmo ensaio, obtêm-se parâmetros  $P_2$  distintos consoante o conjunto escolhido. Por fim, os vários ajustes permitem demonstrar a instabilidade na ampliação dos modos do laser. De facto, para  $L_1$  os

dados da figura central foram obtidos após se soprar para o laser e a diferença na curva obtida é drástica em relação à anterior.

A partir do parâmetro  $P_2$  calcula-se o intervalo de tensão correspondente ao  $FSR$ ,  $\Delta U_{FSR}$ , recorrendo a (27). Para cada ensaio, os  $FWHM_U$  ( $FWHM$  em tensão) são obtidos por médias aos dois pontos à esquerda/direita do centróide de cada pico que englobassem metade da sua intensidade (ou seja, para o pico mais intenso  $P_0/2$ ). De seguida, faz-se uma média sobre estes valores. Estas duas grandezas determinam a *finesse*  $F$  através da relação (12). Fazendo uma média sobre todas as  $F$  obtidas para cada distância entre espelhos, calculou-se a refletividade associada invertendo a expressão correspondente em (12). A partir da definição do  $FSR$  em frequência (10), definiu-se um fator de conversão tensão  $\Leftrightarrow$  frequência a partir de (29). Isto permitiu obter os valores dos  $FWHM$  em frequência, que determinam a resolução espectral do interferómetro. Finalmente calcula-se a potência resolutive do mesmo através de  $\nu/FWHM_\nu$ .

$$P_2 \Delta U_{FSR} = \pi \Leftrightarrow \Delta U_{FSR} = \frac{\pi}{P_2}, \quad (27) \quad F = \frac{\Delta U_{FSR}}{FWHM_U}, \quad (28) \quad C = \frac{\Delta \nu_{FSR}}{\Delta U_{FSR}}. \quad (29)$$

Os resultados obtidos mostram-se na tabela 16.

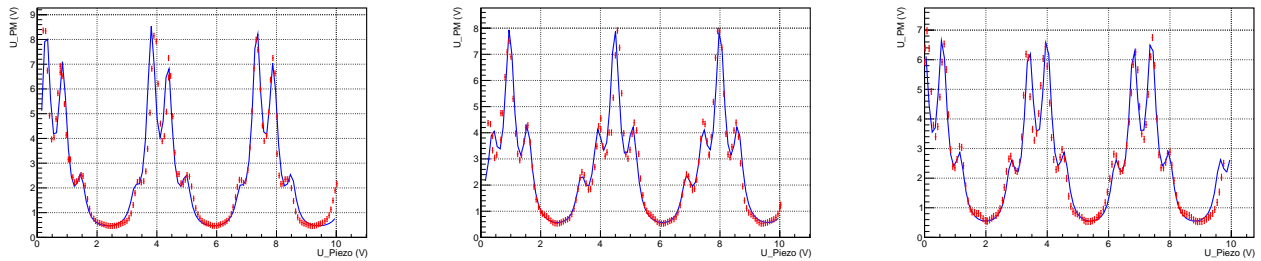
Ensaio	$FWHM_U$ (V)	$\Delta U_{FSR}$ (V)	$F$	$\bar{F}$	$r^2$	$C$ (GHz/V)	$FWHM_\nu$ (MHz)	$A \times 10^6$
$L_1$ - Esquerda	$0.381 \pm 0.032$	$3.447 \pm 0.023$	$9.04 \pm 0.76$	$8.81 \pm 0.41$	$0.701 \pm 0.056$	$0.658 \pm 0.022$	$262 \pm 10$	$1.805 \pm 0.059$
$L_1$ - Centro	$0.424 \pm 0.025$	$3.535 \pm 0.024$	$9.18 \pm 0.65$					
$L_1$ - Direita	$0.385 \pm 0.027$	$3.531 \pm 0.024$	$8.20 \pm 0.48$					
$L_2$ - Esquerda	$0.422 \pm 0.032$	$3.525 \pm 0.020$	$8.45 \pm 0.64$	$8.30 \pm 0.14$	$0.686 \pm 0.024$	$0.931 \pm 0.044$	$394 \pm 19$	$1.202 \pm 0.056$
$L_2$ - Centro	$0.431 \pm 0.076$	$3.417 \pm 0.022$	$8.26 \pm 0.69$					
$L_3$ - Direita	$0.417 \pm 0.030$	$3.562 \pm 0.024$	$8.19 \pm 0.60$					

**Tabela 16:** Resultados da Caracterização do Interferómetro de Fabry-Perot utilizando o laser de 2 mW

Como esperado, os  $FWHM_U$  (que repete-se, determinam a resolução espectral), e os  $\Delta U_{FSR}$  interestam-se todos nas respetivas incertezas. Naturalmente, as *finesses*  $U$  obtidas também são consistentes entre si e serão iguais as previstas em frequência já que os fatores multiplicativos se cancelam. Já o  $FWHM_\nu$  aumentou para o menor comprimento da cavidade óptica, como esperado teoricamente por (11). As refletividades obtidas são ligeiramente inferiores aos 0.8 apontados pelo fabricante. Poder-se-ia supor um erro sistemático do método porém, é mais verosímil que seja o valor indicado pelo fabricante que esteja sobrestimado. Um dos espelhos tinha inclusive parte do papel refletor retirado e a montagem já possui alguns anos de utilização.

## 2. Caracterização do Interferómetro - Laser de 20 mW

Repetiu-se a análise feita anteriormente para caracterizar o interferómetro, desta feita recorrendo ao laser de potencia nominal 20 mW e a um espaçamento entre espelhos de  $L = 77 \pm 2$  mm. Os ajustes e consequentes parâmetros encontram-se respetivamente na fig. 11 e tabela 17.



**Figura 11:** Ajuste de (26) a ensaios realizados com o laser de 20 mW, com uma distância entre espelhos de  $L = 77 \pm 2$  mm

Ensaio	$P_0$ (V)	$P_1$	$P_2 \times 10^{-1}$ (rad V <sup>-1</sup> )	$P_3 \times 10^{-1}$ (rad)	$P_4$ (V)	$P_5$ (rad)	$P_6$ (V)	$P_7$ (rad)	$P_8$ (V)	$P_9$ (rad)	$\chi^2/ndf$
Esq.	$7.016 \pm 0.061$	$40.50 \pm 0.62$	$8.924 \pm 0.005$	$2.856 \pm 0.023$	$6.094 \pm 0.058$	$(7.617 \pm 0.024)$	$1.754 \pm 0.039$	$1.309 \pm 0.006$	$1.293 \pm 0.047$	$2.930 \pm 0.008$	14.07
Centro	$7.269 \pm 0.063$	$34.47 \pm 0.53$	$8.925 \pm 0.006$	$8.578 \pm 0.026$	$3.027 \pm 0.041$	$(3.531 \pm 0.040) \times 10^{-1}$	$3.390 \pm 0.046$	$1.397 \pm 0.004$	$1.659 \pm 0.043$	$2.995 \pm 0.006$	12.04
Dir.	$5.512 \pm 0.051$	$33.38 \pm 0.51$	$0.921 \pm 0.007$	$5.344 \pm 0.037$	$5.604 \pm 0.056$	$3.139 \pm 0.004$	$2.008 \pm 0.041$	$1.062 \pm 0.005$	$1.741 \pm 0.040$	$2.595 \pm 0.006$	11.52

**Tabela 17:** Parâmetros resultantes dos ajustes efetuado na fig. 11

Este laser possui 4 modos que, segundo o fabricante estão menos espaçados em frequência que para o laser de 2 mW (320 MHz). Naturalmente, sendo necessárias mais funções de Airy no ajuste e havendo uma maior "mistura" entre os picos a qualidade do ajuste tenderá a diminuir, daí os  $\chi^2/ndf$  mais elevados. Ainda assim, estes são suficientemente reduzidos para validar o ajuste realizado.

Os parâmetros de caracterização do Fabry-Perot apresentam-se na tabela 18.

Ensaio	$FWHM_U$ (V)	$\Delta U_{FSR}$ (V)	$F$	$\bar{F}$	$r^2$	$C$ (GHz/V)	$FWHM_v$ (MHz)	$A \times 10^6$
Esquerda	$0.338 \pm 0.041$	$3.520 \pm 0.020$	$10.407 \pm 1.570$	$10.48 \pm 0.33$	$0.741 \pm 0.051$	$0.552 \pm 0.021$	$186 \pm 7$	$2.550 \pm 0.094$
Centro	$0.350 \pm 0.030$	$3.520 \pm 0.024$	$10.066 \pm 1.153$					
Direita	$0.321 \pm 0.033$	$3.525 \pm 0.027$	$10.98 \pm 1.472$					

**Tabela 18:** Resultados da Caracterização do Interferômetro de Fabry-Perot utilizando o laser de 20 mW

Observa-se uma ligeira diminuição dos  $FWHM_U$  em relação aos obtidos anteriormente. Tendo em conta que estes ensaios foram feitos num dia posterior aos anteriores, ou seja, com outro alinhamento e no qual o grupo já estava mais familiarizado com o manuseio da montagem, uma maior qualidade do alinhamento pode explicar esta melhoria. Ainda assim, as grandezas obtidas interseam os valores encontrados anteriormente nas respetivas incertezas. Fizeram-se ainda ensaios com um espaçamento entre espelhos de  $L = 47 \pm 2$ . Devido à aproximação entre modos deixa de ser possível observar a estrutura fina do espetro de radiação do laser, observando ao invés uma curva do tipo gaussiano resultante da sobreposição dos 4 modos anteriormente observados.

### 3. Estrutura de Modos dos Lasers

Para obter o espaçamento entre modos dos lasers utilizados é necessário, para cada ensaio, converter as diferenças de fase para tensão e de seguida para frequência através de (30) ((recorde-se que a fase inicial de cada modo é dada por  $P_{i+3}$ ). Em cada ensaio, fez-se a média deste espaçamento para cada par de picos consecutivos, e comparou-se com o valor indicado pelo fabricante: 614 MHz para o laser de 2 mW e 320 MHz para o de 20 mW estando os resultados apresentados na tabela 19.

$$\Delta \nu_{Modos} = C \cdot \Delta U_{Modos} = C \frac{Fase_j - Fase_i}{P_2} \quad (30)$$

Potência Laser (mW)	Ensaio	Espaçamento entre modos (MHz)	Desvio ( $\# \sigma$ )
2	$L_1$ - Esq	$620 \pm 22$	0.27
2	$L_1$ - Centro	$584 \pm 23$	-1.30
2	$L_1$ - Dir.	$601 \pm 22$	-0.59
2	$L_2$ - Esq.	$607 \pm 25$	-0.28
2	$L_2$ - Centro	$577 \pm 27$	-1.37
2	$L_2$ - Dir.	$583 \pm 28$	-1.11
20	Esq.	$314 \pm 17$	-0.35
20	Centro	$318 \pm 11$	-0.18
20	Dir.	$323 \pm 5$	0.60

**Tabela 19:** Resultados obtidos para o espaçamento entre modos dos lasers de 2 mW e 20 mW

Os valores são muito satisfatórios, já que todos os desvios em  $\# \sigma$  são inferiores a 2. Ainda assim observa-se uma tendência sistemática para subestimar o espaçamento entre modos (sinal do desvio é tendencialmente negativo). Como esperado, os resultados globais são ligeiramente melhores para as configurações do interferômetro com maior potência resolutive e *finesse* (maior comprimento da cavidade óptica) já que estas permitem uma análise mais fina do espetro

### 4. Largura de Banda de Ganho

Para estimar o intervalo de frequências que é ampliado acima do *threshold* de emissão dos lasers (largura de banda de ganho) definiram-se, para cada laser, para a configuração do interferômetro com maior potência resolutive (já que este possui uma melhor caracterização do espetro e a estimativa será por isso menos grosseira), estimaram-se os intervalos em tensão em que estavam englobados todos os modos radiados. Estes foram convertidos para frequência utilizando o  $C$  respetivo para cada ensaio. Os resultados apresentam-se na tabela 20. Para o laser de 2 mW. Isto corresponde a um desvio de  $0.67 \sigma$  em relação ao valor de 1.5 GHz indicado pelo fabricante. Já para o de 20 mW o desvio é de  $0.40 \sigma$ .

Potência do Laser (mW)	Ensaio	Limites $U_{Piezo}$ (V)	$\Delta U_{Piezo}$ (V)	$\Delta f$ (GHz)	$\bar{\Delta f}$ (GHz)
2	$L_1$ -Dir.	$3.32 \pm 0.01$ $5.83 \pm 0.01$	$2.51 \pm 0.02$	$1.65 \pm 0.06$	$1.56 \pm 0.09$
2	$L_1$ -Dir.	$7.05 \pm 0.01$ $9.29 \pm 0.01$	$2.24 \pm 0.02$	$1.47 \pm 0.06$	
20	Esq.	$5.62 \pm 0.01$ $8.67 \pm 0.01$	$3.08 \pm 0.02$	$1.70 \pm 0.07$	$1.56 \pm 0.15$
20	Esq.	$2.25 \pm 0.01$ $5.13 \pm 0.01$	$2.88 \pm 0.02$	$1.59 \pm 0.07$	
20	Centro	$2.76 \pm 0.01$ $5.90 \pm 0.01$	$3.08 \pm 0.02$	$1.70 \pm 0.07$	
20	Centro	$6.32 \pm 0.01$ $9.24 \pm 0.01$	$2.92 \pm 0.02$	$1.61 \pm 0.06$	
20	Dir.	$2.93 \pm 0.01$ $5.58 \pm 0.01$	$2.65 \pm 0.02$	$1.42 \pm 0.06$	
20	Dir.	$6.28 \pm 0.01$ $68.85 \pm 0.01$	$2.57 \pm 0.02$	$1.42 \pm 0.06$	

**Tabela 20:** Estimativa das larguras de banda dos Lasers

## VI. CONCLUSÃO

No geral, a análise dos fenómenos físicos em estudo revelou-se satisfatória. Os dados obtidos recorrendo ao difratômetro de raio-X têm uma elevadíssima precisão e exatidão. Como seria de esperar, em cristais

de melhor qualidade (menor grau de impurezas na rede) como o caso do NaCl os ajustes aos modelos teóricos foram melhores, obtendo-se resultados mais precisos e geralmente exatos constituindo portanto melhores interferômetros na dispersão de um feixe incidente. Apesar das elevadas incertezas considerada na recolha de dados recorrendo ao espectrómetro de Lummer-Gehrcke, obtiveram-se valores para grandezas físicas - nomeadamente o quociente  $e/m$  - a distâncias inferiores a  $\sigma$  do respetivo valor teórico, validando os modelos utilizados. O estudo do espectro dos modos longitudinais dos lasers foi caracterizado com grande exatidão precisão através do interferómetro de Fabry-Perot, confirmando a sua capacidade para uma análise fina. O modelo adotado para a transmissividade, dado por uma função Airy, foi igualmente exaustivamente corroborado pelos dados experimentais. Ainda assim, as potências resolutivas obtidas -  $\sim 10^6$  situam-se no limiar inferior das usuais para esta montagem experimental, muito devido à baixa refletividade dos espelhos da cavidade ótica. Um estudo mais aprofundado da variação da curva de resposta do piezoelétrico também permitiria resultados ainda mais satisfatórios.

Conclui-se igualmente que os 3 espectrómetros utilizados têm características muito distintas entre si. Na tabela 21 comparam-se os resultados obtidos para as grandezas, termos de ordens de grandeza, que descrevem um espectrómetro para todas as montagens utilizadas.

Aparato	$\sim v_{\text{trabalho}}$	$\sim \text{FSR}$	$\sim \text{finesse}$	$\sim \text{Resolução Espetal}$	$\sim \text{Potência Resolutiva}$
Difratómetro Raio-X	$10^{18} \text{ Hz}$	$10^{18} \text{ Hz}$	10	$10^{17} \text{ Hz}$	10
Espectrómetro de Lummer-Gehrcke	$10^{14} \text{ Hz}$	10 GHz	10	1 GHz	$10^5$
Interferómetro Fabry-Perot	$10^{14} \text{ Hz}$	1 GHz	10	$10^2 \text{ MHz}$	$10^6$

**Tabela 21:** Comparação das ordens de grandeza dos vários parâmetros que caracterizam os espectrómetros utilizados

O Interferómetro de Fabry-Perot e o Espectrómetro de Lummer-Gehrcke em menor escala possibilitam uma elevadíssima discretização do espectro - menor Resolução Espectral e maior Potência Resolutiva - analisando com enorme precisão uma região muito restrita do mesmo ( $\text{FSR}_v \ll v_{\text{trabalho}}$ ). Daí que se diga que o seu propósito é uma análise fina, quase como um "microscópio". Por sua vez, o Difratómetro de Raio-X possibilita um estudo global do espectro ( $\text{FSR} \sim v$ ) mas com muito menor precisão. No fundo, a conclusão a retirar é que o aparato a utilizar depende do fenómeno em estudo: um difratómetro com a resolução espectral e FSR do espectrómetro de Lummer-Gehrcke seria inútil para caracterizar estruturas cristalinas. Por outro lado, jamais se poderia estudar o efeito de Zeeman com um instrumento tão limitado em banda de frequência como o interferómetro de Fabry-Perot, ainda que a sua precisão fosse desejável para tal.

## REFERÊNCIAS

- [1] Maio 2018, *Guião da Experiência Espectroscopia Raio-X e Ótica Fina*, LFEA, [fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1407993358864628/Espectroscopia\\_Guiao2018.pdf](http://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1407993358864628/Espectroscopia_Guiao2018.pdf)
- [2] Maio 2018, *Protocolo da Experiência Espectroscopia Raio-X e Ótica Fina*, LFEA, [fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1407993358864629/Espectroscopia\\_Protocolos2018.pdf](http://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1407993358864629/Espectroscopia_Protocolos2018.pdf)
- [3] Steven Simon, *The Oxford Solid State Basics*, Oxford University Press (2013)
- [4] Maio 2018, *Bragg reflection: diffraction of x-rays at a monocrystal*, [fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316238/Guia%20LD\\_Bragg%20Reflection.pdf](http://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316238/Guia%20LD_Bragg%20Reflection.pdf)
- [5] Maio 2018, *Lattice Constants of the elements*, <http://periodictable.com/Properties/A/LatticeConstants.html>
- [6] Maio 2018, *Slides Raio-X*, LFEA, [fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316239/Slides\\_RX.pdf](http://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316239/Slides_RX.pdf)
- [7] Maio 2018, *Zeeman Effect Leybold Instruction Sheet*, [fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316240/Guia%20LD\\_Zeeman.pdf](http://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316240/Guia%20LD_Zeeman.pdf)
- [8] Maio 2018, *Observing the normal Zeeman effect in transverse and longitudinal configuration*, [fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316241/P6271\\_E.PDF](http://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316241/P6271_E.PDF)

- [9] Max Born & Emil Wolf, *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light* (Cap. 7), Cambridge University Press (1999)
- [10] Maio 2018, *Slides Interferência de Feixes Múltiplos*, LFEA,  
[fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316243/Slides\\_FabryPerot.pdf](http://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316243/Slides_FabryPerot.pdf)
- [11] Werner Lauterborn & Thomas Kurz, *Coherent Optics: Fundamentals and Applications* (Cap. 5), Springer (2003)