

PET - Tomografia por Emissão de Positrões

Nesta atividade laboratorial, com a duração de 4 sessões de 4h30 cada, estudar-se-á a detecção de coincidências $\gamma\gamma$ provenientes do decaimento β^+ de uma fonte de Sódio-22. Em particular, pretende-se analisar a forma como esta depende da posição relativa da fonte e dos dois detetores de cintilação NaI(Tl) que serão utilizados. Como objetivo último, o qual será explorado na quarta sessão, pretende-se compreender o funcionamento da Tomografia por Emissão de Positrões. Este método, baseado num estudo semelhante ao que iremos efetuar, reconstrói imagens de tumores dopando-os com substâncias radioativas e analisando posteriormente a detecção de coincidências $\gamma\gamma$.

Sessão 1 - 03/03/2016

MONTAGEM

Utilizou-se nesta experiência um sistema que consiste em dois detetores de cintilação NaI(Tl), um dos quais pode efetuar rotações em torno do outro que se mantém fixo, constituindo um espectómetro duplo. Cada um dos detetores irá estar associado ao seu próprio fotomultiplicador, pré-amplificador, amplificador de tensão e analisador monocanal. Ambos estão associados a uma unidade de coincidências com três contadores (um para cada detector e outro para as coincidências).

O processo de montagem segue uma sequência de passos que deve ser efetuado no início de cada uma das 4 sessões. Nas sessões 2, 3 e 4, apresentam-se apenas alguns valores, não todo o processo. Os passos 1 e 2 repetem-se para cada um dos detetores. A cada detetor corresponde uma fonte de alta tensão, um amplificador, uma Timing SCA e um contador.

1. Observar no programa PCA o Espectro de Emissão Gama da fonte Sódio-22.

- 1.1. Alimentar o Detetor com Fonte de alta tensão (900 V)

Ambos os botões reguladores que permitem impor a tensão têm um desvio ao zero, que se apresenta nas imagens seguintes:



Figura 1. Fonte usada para o Detetor Móvel



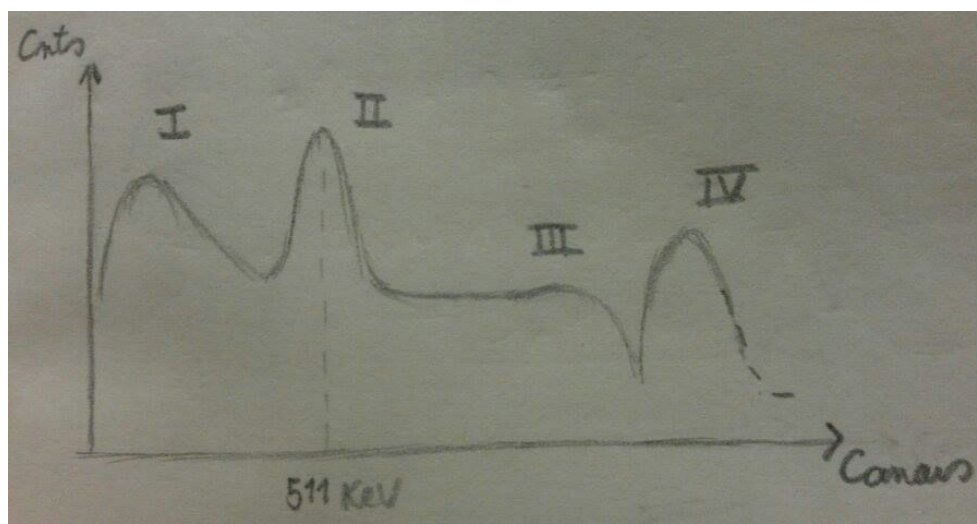
Figura 2. Fonte usada para o Detetor Fixo



- 1.2. Ligar Detetor -> Amplificador (Ganho= 10) -> Computador

1.3. Análise do espectro

Tempo de aquisição: $\Delta t_{aq} = 183$ s



Neste espectro é possível identificar as seguintes físicas distintas:

- I. Valor mais provável da corrente negra;
- II. Pico de Aniquilação (511keV)
- III. Joelho de Compton
- IV. Pico de absorção total (1274keV)

Constata-se em primeiro lugar que existe um fundo considerável em torno do pico de aniquilação que queremos detetar, originário da corrente negra e do patamar de Compton correspondente ao pico de 1274keV. Esta taxa de fundo será calculada na sessão 2.

| Pico | Área Total (Cts) | Área do Sinal (Cts) | Centróide - C (Can) | FWHM (Can) | Sigma - σ (Can) |
|----------------------------------|------------------|---------------------|---------------------|------------|------------------------|
| C (511keV) Canais: [235;285] | 11023 \pm 105 | 8193 \pm 187 | 262,43 \pm 0.10 | 22,18 | 9,41 |
| E (1274keV) Canais: [583;659] | 2157 \pm 46 | 1490 \pm 104 | 621,25 \pm 0.32 | 28,62 | 12,2 |

Tabela 1. Dados referentes ao espectro observado, para o detetor móvel, na sessão 1.

Fórmulas: $\sigma = \frac{FWHM}{2\sqrt{2\ln(2)}}$; $\sigma_C = \frac{\sigma}{\sqrt{A_{sinal}}}$

2. Montagem da Timing SCA

Com este procedimento pretende-se definir um intervalo de energia de $\pm 3\sigma$ em torno do centróide do pico de 511keV onde queremos que sejam contabilizados os fótons incidentes.

2.1. Ligar Pulser -> Amplificador -> Computador

- 2.2. Observando no programa PCA, colocar pulser no extremo inferior do pico (canal $262,43-3\sigma=234$), registar e manter esta tensão do pulser.
- 2.3. Ligar Pulser -> Amplificador -> Timing SCA -> Contador
- 2.4. Rodar limite inferior da Timing SCA por forma a encontrar a tensão em que o sinal do pulser origina contagens (limite entre contar e não contar). Registrar e manter essa tensão.
- 2.5. Ligar Pulser -> Amplificador -> Computador
- 2.6. Observando no programa PCA, colocar pulser no extremo superior do pico (canal $262,43+3\sigma=291$), registar e manter esta tensão do pulser.
- 2.7. Ligar Pulser -> Amplificador -> Timing SCA -> Contador
- 2.8. Rodar limite superior da Timing SCA por forma a encontrar a tensão em que o sinal do pulser origina contagens (limite entre contar e não contar). Registrar e manter essa tensão.

Obteve-se os seguintes valores para as tensões do pulser e dos limites das Timing SCA, para cada um dos detetores:

| | Limite Inferior (V) | | Limite Superior (V) | |
|---------------|---------------------|---------------|---------------------|---------------|
| | Pulser | Timing SCA | Pulser | Timing SCA |
| Detetor Móvel | 2.63 ± 0.01 | 2.06 ± 0.01 | 3.21 ± 0.01 | 2.48 ± 0.01 |
| Detetor Fixo | 2.62 ± 0.01 | 2.08 ± 0.01 | 3.22 ± 0.01 | 2.49 ± 0.01 |

Tabela 2. Valores dos limiares de tensão do pulser e das Timing SCA utilizados na sessão 1.

3. Montagens Finais

- 3.1. Ligar Detetor -> Amplificador -> Timing SCA -> Contador (para ambos os detetores)
- 3.2. Ligar Timing SCA -> Analisador de Coincidências (para ambas as Timing SCA).
- 3.3. Ligar Analisador de Coincidências -> Contador C (contagem das coincidências)
- 3.4. Regular o Resolving Time (=Janela de Coincidências), que é o intervalo de tempo após deteção de um γ por um detetor em que a deteção de um γ no outro detetor é considerada uma coincidência $\gamma\gamma$.

Dado importante a reter da montagem:

- Contador A - Número de partículas γ detetadas pelo detetor móvel;
- Contador C - Número de coincidências $\gamma\gamma$ detetadas;
- Contador B - Número de partículas γ detetadas pelo detetor fixo;

Passamos agora à recolha e análise de dados.

FONTE NO CENTRO (x=y=0) E VARIAÇÃO DA POSIÇÃO DO DETETOR MÓVEL (θ)

Resolving time: $5 \times 250ns = 1250ns$

Distância entre os detetores e a fonte: $D = (20 \pm 0.3)cm$

Raio do detetor: $R = 1in = 2.54cm$ (valor fornecido pelo docente)

Mantendo a fonte no centro do disco, variou-se a posição do detetor móvel (θ) entre -20° e 20° , para diferentes tempos de aquisição, e registaram-se as contagens de cada um dos detetores bem como o número de coincidências. Os dados obtidos encontram-se na tabela 3.

Nota: As taxas de contagens R_A , R_B e R_C já estão corrigidas para a taxa de fundo (R_{Back}) e para a taxa de coincidências fortuitas R_F . Estas serão calculadas em outras sessões.

Fórmulas:

$$\text{Fórmulas: } R'_{A,B} = \frac{C_{A,B}}{\Delta t}; R'_C = \frac{C_C}{\Delta t}; R_{A,B} = R'_{A,B} - R_{Back}; R_C = R'_C - R_F;$$

$$\text{Erros: } \sigma_{C_{A,B,C}} = \sqrt{C_{A,B,C}}; \sigma_{R'_{A,B,C}} = R'_{A,B,C} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{C_{A,B,C}}}{C_{A,B,C}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta t}}{\Delta t}\right)^2}; \sigma_{a-b} = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$$

| $\theta(^{\circ})$ | C_A (Cts) | Erro (Cts) | C_C (Cts) | Erro (Cts) | C_B (Cts) | Erro (Cts) | t (s) | Erro (s) | R_A (Cts/s) | Erro (Cts/s) | R_C (Cts/s) | Erro (Cts/s) | R_B (Cts/s) | Erro (Cts/s) |
|--------------------|--------------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|----------|-------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|
| -20 | 6814 | 83 | 9 | 3 | 7018 | 84 | 180 | 0.01 | 27.4 | 1.1 | 0.04 | 0.02 | 28.4 | 1.1 |
| -15 | 6776 | 82 | 17 | 4 | 7009 | 84 | 180 | 0.01 | 27.2 | 1.1 | 0.08 | 0.02 | 28.4 | 1.1 |
| -12 | 4547 | 67 | 16 | 4 | 4523 | 67 | 120 | 0.01 | 27.5 | 1.2 | 0.12 | 0.03 | 27.1 | 1.2 |
| -11 | 1118 | 33 | 9 | 3 | 1104 | 33 | 30 | 0.01 | 26.8 | 1.5 | 0.29 | 0.10 | 26.2 | 1.5 |
| -10 | 1122 | 33 | 24 | 5 | 1149 | 34 | 30 | 0.01 | 27.0 | 1.5 | 0.79 | 0.16 | 27.7 | 1.5 |
| -9 | 1149 | 34 | 37 | 6 | 1118 | 33 | 30 | 0.01 | 27.9 | 1.5 | 1.22 | 0.20 | 26.7 | 1.5 |
| -8 | 1080 | 33 | 60 | 8 | 1103 | 33 | 30 | 0.01 | 25.6 | 1.5 | 1.99 | 0.26 | 26.2 | 1.5 |
| -7 | 1036 | 32 | 88 | 9 | 1167 | 34 | 30 | 0.01 | 24.1 | 1.5 | 2.92 | 0.31 | 28.3 | 1.5 |
| -6 | 1141 | 34 | 122 | 11 | 1143 | 34 | 30 | 0.01 | 27.6 | 1.5 | 4.05 | 0.37 | 27.5 | 1.5 |
| -5 | 1155 | 34 | 161 | 13 | 1115 | 33 | 30 | 0.01 | 28.1 | 1.5 | 5.35 | 0.42 | 26.6 | 1.5 |
| -4 | 1167 | 34 | 188 | 14 | 1146 | 34 | 30 | 0.01 | 28.5 | 1.5 | 6.25 | 0.46 | 27.6 | 1.5 |
| -3 | 1091 | 33 | 236 | 15 | 1155 | 34 | 30 | 0.01 | 25.9 | 1.5 | 7.85 | 0.51 | 27.9 | 1.5 |
| -2 | 1038 | 32 | 230 | 15 | 1120 | 33 | 30 | 0.01 | 24.2 | 1.5 | 7.65 | 0.51 | 26.8 | 1.5 |
| -1 | 1114 | 33 | 282 | 17 | 1159 | 34 | 30 | 0.01 | 26.7 | 1.5 | 9.39 | 0.56 | 28.1 | 1.5 |
| 0 | 1156 | 34 | 320 | 18 | 1198 | 35 | 30 | 0.01 | 28.1 | 1.5 | 10.65 | 0.60 | 29.4 | 1.5 |
| 1 | 1126 | 34 | 325 | 18 | 1110 | 33 | 30 | 0.01 | 27.1 | 1.5 | 10.82 | 0.60 | 26.4 | 1.5 |
| 2 | 1121 | 33 | 309 | 18 | 1141 | 34 | 30 | 0.01 | 26.9 | 1.5 | 10.29 | 0.59 | 27.5 | 1.5 |
| 3 | 1139 | 34 | 291 | 17 | 1177 | 34 | 30 | 0.01 | 27.5 | 1.5 | 9.69 | 0.57 | 28.7 | 1.5 |
| 4 | 1129 | 34 | 237 | 15 | 1139 | 34 | 30 | 0.01 | 27.2 | 1.5 | 7.89 | 0.51 | 27.4 | 1.5 |
| 5 | 1081 | 33 | 196 | 14 | 1129 | 34 | 30 | 0.01 | 25.6 | 1.5 | 6.52 | 0.47 | 27.1 | 1.5 |
| 6 | 1179 | 34 | 187 | 14 | 1138 | 34 | 30 | 0.01 | 28.9 | 1.5 | 6.22 | 0.46 | 27.4 | 1.5 |
| 7 | 1091 | 33 | 152 | 12 | 1129 | 34 | 30 | 0.01 | 25.9 | 1.5 | 5.05 | 0.41 | 27.1 | 1.5 |

| | | | | | | | | | | | | | | |
|----|------|----|-----|----|------|----|-----|------|------|-----|-------------|-------------|------|-----|
| 8 | 1162 | 34 | 111 | 11 | 1167 | 34 | 30 | 0.01 | 28.3 | 1.5 | 3.69 | 0.35 | 28.3 | 1.5 |
| 9 | 1145 | 34 | 72 | 8 | 1119 | 33 | 30 | 0.01 | 27.7 | 1.5 | 2.39 | 0.28 | 26.7 | 1.5 |
| 10 | 1136 | 34 | 47 | 7 | 1195 | 35 | 30 | 0.01 | 27.4 | 1.5 | 1.55 | 0.23 | 29.3 | 1.5 |
| 11 | 1111 | 33 | 40 | 6 | 1144 | 34 | 30 | 0.01 | 26.6 | 1.5 | 1.32 | 0.21 | 27.6 | 1.5 |
| 12 | 4479 | 67 | 79 | 9 | 4571 | 68 | 120 | 0.01 | 26.9 | 1.2 | 0.64 | 0.07 | 27.5 | 1.2 |
| 15 | 6810 | 83 | 13 | 4 | 6800 | 82 | 180 | 0.01 | 27.4 | 1.1 | 0.06 | 0.02 | 27.2 | 1.1 |
| 20 | 6736 | 82 | 11 | 3 | 6914 | 83 | 180 | 0.01 | 27.0 | 1.1 | 0.05 | 0.02 | 27.9 | 1.1 |

Tabela 3. Valores obtidos para variação de θ com a fonte em $x=y=0$.

Os pontos destacados a negrito estão representados no gráfico da figura 4.

Procuramos agora uma expressão teórica que possa explicar o andamento da taxa de coincidências. A primeira observação óbvia que é necessário efetuar é que só serão detetadas coincidências quando a posição relativa detetor fixo - detetor móvel - fonte for tal que é possível desenhar uma reta que passe pela fonte e atravesse ambos os detetores. Para analisarmos em que casos tal é possível, podemos considerar todos os fótons que entram no detetor fixo, e analisar para quais deles o fóton que foi emitido em sentido contrário entra no detetor móvel. Ora, como os fótons são emitidos em sentidos diametralmente opostos, podemos considerar uma imagem do detetor fixo no campo de ação do detetor móvel, e concluir que o número de coincidências detetadas estará relacionado com a área da interseção da imagem do detetor fixo com a do detetor móvel, como se observa na figura 3.

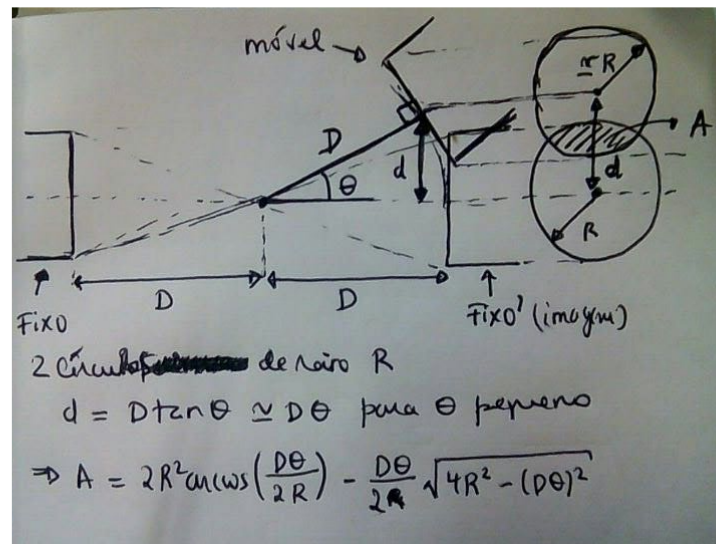


Figura 3. Modelo para taxa de coincidências em função de θ com a fonte em $x=y=0$.

A expressão para a área da interseção que aparece na figura 3 é a fórmula geral para a interseção de dois círculos de raio R quando a distância entre os seus centros é $d = D\theta$.

Tendo em conta este modelo, ajustou-se aos pontos da figura 4 a seguinte expressão:

$$R_C(\theta) = A \left[2R^2 \arccos\left(\frac{D|\theta - \Delta\theta|}{2R}\right) \times \frac{\pi}{180^\circ} - \frac{D|\theta - \Delta\theta|}{2} \times \frac{\pi}{180^\circ} \sqrt{4R^2 - D^2((\theta - \Delta\theta) \times \frac{\pi}{180^\circ})^2} \right] \quad (1)$$

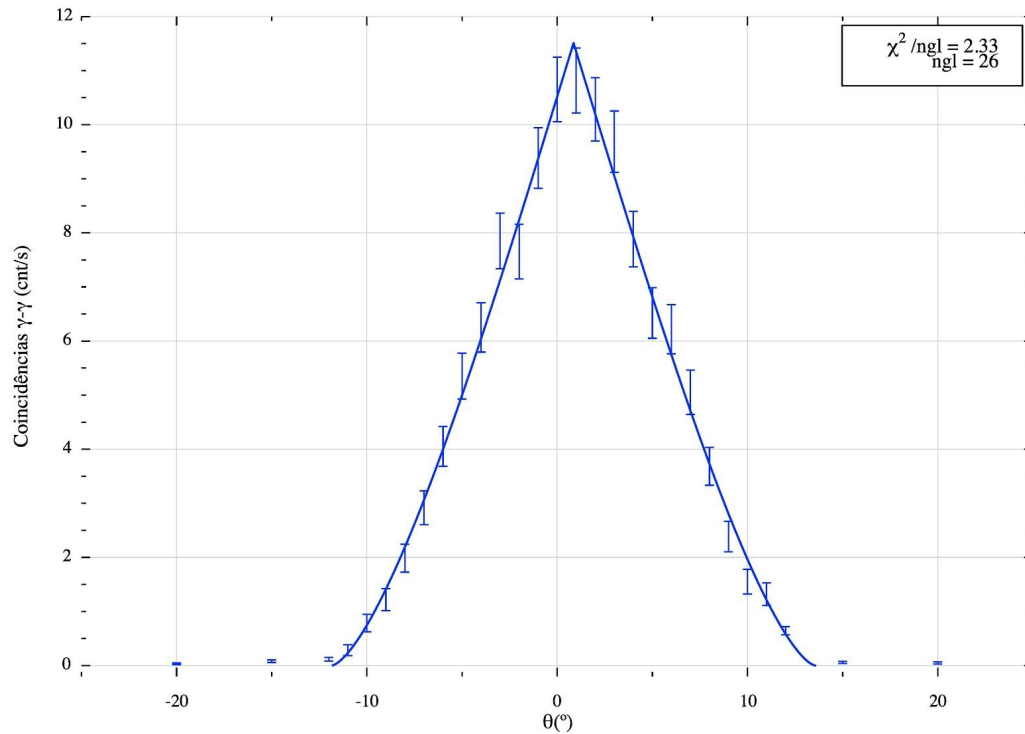


Figura 4. Ajuste da expressão (1) à variação da taxa de coincidências $\gamma\gamma$ com θ pelo método dos mínimos quadrados.

Os parâmetros de ajuste encontram-se na tabela 4:

| | |
|--|-------------------|
| $A \text{ (Cts s}^{-1} \text{in}^{-2}\text{)}$ | 3.58 ± 0.17 |
| $R \text{ (in)}$ | 1.011 ± 0.013 |
| $\Delta\theta \text{ (}^\circ\text{)}$ | 0.86 ± 0.10 |
| χ^2/n_{gl} | 2.33 |
| n_{gl} | 26 |

Tabela 4. Parâmetros do ajuste da figura 4.

O baixo valor do χ^2/n_{gl} indicia um bom ajuste. Além disso, podemos constatar que o valor do raio da abertura do detector é congruente dentro da margem de erro com o valor real $R = 1 \text{ in}$. Ademais, observamos um valor de $\Delta\theta$ que não é nulo e que indicia portanto um desvio na montagem. Alternativamente, podemos considerar que este desvio pode ser atribuído a um desvio Δx da posição fonte no eixo dos xx (eixo equidistante dos dois detetores) em relação a $x = 0$:

$$\Delta x = D \times \tan(\Delta\theta) ; \sigma_{\Delta x} = \frac{D}{\cos^2(\Delta\theta)} \sigma_{\Delta\theta}$$

| | |
|-------------------------|-----------------|
| $\Delta x \text{ (cm)}$ | 0.23 ± 0.04 |
|-------------------------|-----------------|

De seguida, calculemos a eficiência do fotopico, para cada um dos detetores, sabendo que esta é dada pelo quociente entre a taxa de coincidências e a taxa de contagens, sendo que estes valores devem ser tomados no ângulo em que as coincidências são máximas:

$$\varepsilon_{A,B} = \frac{R_C}{R_{A,B}} ; \sigma_{\varepsilon_{A,B}} = \varepsilon_{A,B} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{R_C}}{R_C}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{R_{A,B}}}{R_{A,B}}\right)^2} ; \varepsilon = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B}{2} ; \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{\varepsilon_A}^2 + \sigma_{\varepsilon_B}^2}$$

| | |
|------------------------------------|----------------|
| Detetor Móvel: $\varepsilon_A(\%)$ | 39.9 ± 3.1 |
| Detetor Fixo: $\varepsilon_B(\%)$ | 40.9 ± 3.3 |
| $\varepsilon(\%)$ | 40.4 ± 2.3 |

Tabela 5. Eficiência do fotopico.

Tal significa que cerca de 4 em cada 10 contagens detectadas corresponderão a coincidências. Este valor não ser 100% não se deve à radiação de fundo nem às coincidências fortuitas pois estas já tinham sido descontadas anteriormente no cálculo das taxas de contagens e coincidências. Como tal, esta diferença resulta certamente da unidade de coincidências, não se podendo inferir com certeza qual a sua origem. Podemos no entanto colocar a hipótese de se perder a deteção de algumas coincidências devido ao tempo em que a janela está aberta. No entanto, este facto explica mal o que se observa, visto o resolving time ser cerca de cinco ordens de grandeza menor que o tempo médio de deteção de uma partícula γ .

Observando o gráfico da figura 4, facilmente se conclui que existe uma gama restrita de ângulos θ para os quais se detetam coincidências $\gamma\gamma$. Este intervalo de valores de θ é designado por resolução angular. A partir da equação (1), concluímos que a resolução angular é definida por:

$$-\frac{2R}{D} < |\theta - \Delta\theta| < \frac{2R}{D},$$

o que, substituindo os parâmetros obtidos no ajuste da figura 4, resulta:

| | |
|--------------------------------|-------------------|
| Resolução Angular ($^\circ$) | $[-11.84; 13.56]$ |
|--------------------------------|-------------------|

Por último, podemos analisar o gráfico da figura 4 enquanto distribuição. Para isso, calculemos o valor da média μ , do desvio Padrão σ e do skewness γ_1 :

$$\text{Fórmulas: } \mu = E[\theta] = \frac{\sum \theta_i R_{C_i}}{\sum R_{C_i}} ; \sigma = \sqrt{\text{Var}[\theta]} = \sqrt{E[\theta^2] - E^2[\theta]} ; \gamma_1 = E\left[\left(\frac{\theta - E[\theta]}{\sigma}\right)^3\right]$$

$$\text{Erros: } E[K] = \frac{\sum K R_{C_i}}{\sum R_{C_i}}$$

$$\sigma_E = E[k] \sqrt{\sum_j \left(\frac{k_j}{\sum_i k_i R_i} - \frac{1}{\sum_i R_i} \right)^2 R_j^2 + \frac{\sum_j (R_j \sigma_{k_j})^2}{\left(\sum_i k_i R_i \right)^2}}$$

$$\text{Para } E[\theta]: A_i \equiv \theta_i R_{C_i} \Rightarrow \sigma_{A_i} = \theta_i \sigma_{R_{C_i}};$$

$$\text{Para } E[\theta^2]: A_i \equiv \theta_i^2 R_{C_i} \Rightarrow \sigma_{A_i} = 2\theta_i \sigma_{R_{C_i}};$$

$$\text{Para } E\left[\left(\frac{\theta - E[\theta]}{\sigma}\right)^3\right]: A_i \equiv \left(\frac{\theta_i - E[\theta]}{\sigma}\right)^3 R_{C_i} \Rightarrow \sigma_{A_i} = A_i \sqrt{\frac{9\sigma_{\mu}^2}{(\theta_i - \mu)^2} + \frac{9\sigma_{\sigma}^2}{\sigma^2} + \frac{\sigma_{R_{C_i}}^2}{R_{C_i}^2}};$$

$$\sigma_{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_{E[\theta^2]}^2 + E[\theta]^2 \sigma_{E[\theta]}^2};$$

| | |
|---------------------------|-------------------|
| $\mu (^{\circ})$ | 0.816 ± 0.075 |
| $\sigma (^{\circ})$ | 4.657 ± 0.049 |
| $\gamma_1 ((^{\circ})^3)$ | -0.03 ± 0.13 |

Tabela 6. Média, desvio padrão e *skewness* da distribuição da figura 4.

Podemos concluir a partir destes três parâmetros que:

- A média não é $\theta = 0$, como seria já de esperar. O que se observa aliás é que este valor é congruente com o anterior parâmetro de ajuste $\Delta\theta = 0.86 \pm 0.10$.
- O desvio padrão é bastante baixo, fruto das contagens desaparecerem rapidamente com a variação em θ . Tal é lógico dada a geometria da montagem, isto é, a distância da fonte aos detetores ser muito superior ao raio dos detetores.
- A *skewness* é nula dentro da margem de erro, indiciando que a distribuição não possui quaisquer assimetrias (ou caudas).

Resumidamente, notamos que existe uma assimetria a nível da posição do máximo, a qual poderá ser atribuída a um mau alinhamento dos detetores ou a um mau posicionamento da fonte, mas que a forma da curva se preserva simétrica.

Sessão 2 - 10/03/2016

MONTAGEM

Repetiu-se o procedimento da sessão 1, tendo-se colocado um resolving time de $250ns$.
Obtiveram-se os seguintes parâmetros para o pico de 511keV e para os valores dos limiares de tensão do Pulser e das Timing SCA.

Tempo de aquisição: $\Delta t_{aq} = 246s$ (igual para ambos os picos)

| Pico | Área Total (Cts) | Área do Sinal (Cts) | Centróide - C (Can) | FWHM (Can) | Sigma - σ (Can) |
|---|------------------|---------------------|---------------------|------------|------------------------|
| 511keV - Detetor Móvel Canais: [238;287] | 9171±96 | 6388±180 | 264.67 | 22,86 | 9,71 |
| 511keV - Detetor Fixo Canais: [237;286] | 9459±97 | 6792±178 | 262.73 | 21,30 | 9,05 |

Tabela 7. Dados referentes aos espectros observados na sessão 2.

| | Limite Inferior (V) | | Limite Superior (V) | |
|---------------|---------------------|------------|---------------------|------------|
| | Pulser | Timing SCA | Pulser | Timing SCA |
| Detetor Móvel | 2.48±0.01 | 2.09±0.01 | 3.01±0.01 | 2.50±0.01 |
| Detetor Fixo | 2.49±0.01 | 2.09±0.01 | 3.01±0.01 | 2.50±0.01 |

Tabela 8. Valores dos limiares de tensão do pulser e Timing SCA utilizados na sessão 2.

Para cada um dos espectros observados, registaram-se ainda as contagens em alguns canais em torno dos canais inferior e superior do pico de 511keV, por forma a quantificar aproximadamente a radiação de fundo. Designando por C_{inf} o número de contagens do canal inferior X_{inf} , e por C_{sup} o número de contagens do canal superior X_{sup} , podemos aproximar o número de contagens de fundo pela área do trapézio por baixo do pico, isto é:

$$C_{Back} = \frac{1}{2} \times (B + b) \times h; \quad B = C_{sup}; \quad b = C_{inf}; \quad h = X_{sup} - X_{inf}$$

Os resultados obtidos apresentam-se na tabela 9, onde foram utilizadas as seguintes fórmulas:

$$B, b = C_{sup,inf} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i; \quad \sigma_B = \sqrt{B}; \quad \sigma_b = \sqrt{b}; \quad \sigma_{C_{Back}} = \frac{h}{2} \sqrt{\sigma_B^2 + \sigma_b^2}$$

$$R_{Back} = \frac{C_{Back}}{\Delta t}; \quad \sigma_{R_{Back}} = R_{Back} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{C_{Back}}}{C_{Back}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta t}}{\Delta t}\right)^2}$$

| | | |
|-----------|-----------|--|
| Detetor A | Detetor B | |
|-----------|-----------|--|

| Canal | C_i (Cts) | Erro (Cts) | Canal | C_i (Cts) | Erro (Cts) | | | | | | |
|-------|-----------|------------|-------|-----------|------------|--|----------------|-----------|------|-----------|------|
| 232 | 59 | 8 | 232 | 51 | 7 | | | | | | |
| 233 | 54 | 7 | 233 | 51 | 7 | | | | | | |
| 234 | 60 | 8 | 234 | 45 | 7 | | | | | | |
| 235 | 42 | 6 | 235 | 50 | 7 | | | | | | |
| 236 | 58 | 8 | 236 | 54 | 7 | | | | | | |
| 237 | 57 | 8 | 237 | 65 | 8 | | | Detetor A | | Detetor B | |
| 238 | 60 | 8 | 238 | 66 | 8 | | | Valor | Erro | Valor | Erro |
| 239 | 61 | 8 | 239 | 71 | 8 | | B (Cts) | 56 | 8 | 57 | 8 |
| Canal | C_i (Cts) | Erro (Cts) | Canal | C_i (Cts) | Erro (Cts) | | b (Cts) | 48 | 7 | 49 | 7 |
| 286 | 50 | 7 | 282 | 61 | 8 | | h | 49 | - | 49 | - |
| 287 | 53 | 7 | 283 | 64 | 8 | | C_Back (Cts) | 2568 | 251 | 2597 | 252 |
| 288 | 53 | 7 | 284 | 56 | 7 | | R_Back (Cts/s) | 10.44 | 1.02 | 10.56 | 1.03 |
| 289 | 53 | 7 | 285 | 48 | 7 | | | | | | |
| 290 | 39 | 6 | 286 | 49 | 7 | | | | | | |
| 291 | 47 | 7 | 287 | 38 | 6 | | | | | | |
| 292 | 44 | 7 | 288 | 33 | 6 | | | | | | |
| | | | 289 | 46 | 7 | | | | | | |

Tabela 9. Cálculo da taxa de radiação de fundo para cada um dos detetores.

Esta taxa deverá ser descontada à taxa de contagens de cada um dos detetores A e B, mas não à taxa de coincidências $\gamma\gamma$. Devemos no entanto ter em atenção que apenas podemos fazer isto quando a fonte está na posição central. A radiação de fundo, sendo que provém da fonte, não é independente da posição relativa entre esta e o detetor, variando da mesma forma que a taxa de contagens.

* * * * *

Antes de apresentar os dados recolhidos, é necessário definir as coordenadas (x, y) . Para tal, consultar a figura 5.

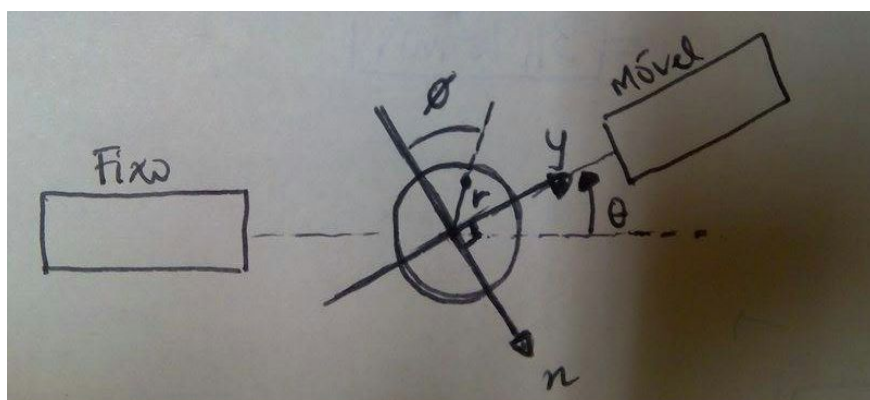


Figura 5. Esquema dos parâmetros x, y, r, ϕ, θ .

O eixo yy é o eixo de simetria dos detetores, quando $\theta = \phi = 0$, com sentido do detetor fixo para o móvel. O eixo xx é o eixo equidistante dos dois detetores, definido por forma a o eixo dos zz ser para cima. As coordenadas (r, ϕ) são as coordenadas polares correspondentes a (x, y) ainda que definidas de forma diferente do habitual. Por último, é necessário ter em conta que quando se varia θ também roda o disco onde se encontra a fonte.

VARIAR A POSIÇÃO DA FONTE AO LONGO DOS EIXOS, COM O DETETOR MÓVEL EM $\theta=0$

Mantendo os detetores alinhados, variou-se a posição da fonte ao longo do eixo yy , e registaram-se os valores indicados na tabela 10, onde também se inclui a conversão para taxas segundo as fórmulas anteriormente indicadas. Note-se que, devido à variação da taxa de fundo com a distância entre a fonte e o detetor, as taxas R_A e R_B não estão corrigidas para o fundo. A taxa R_C por sua vez já inclui a correção relacionada com as coincidências fortuitas.

| y (in) | C_A (Cts) | Erro (Cts) | C_C (Cts) | Erro (Cts) | C_B (Cts) | Erro (Cts) | R_A (Cts/s) | Erro (Cts/s) | R_C(x=0) (Cts/s) | Erro (Cts/s) | R_B (Cts/s) | Erro (Cts/s) |
|--------|--|------------|-----------|------------|-----------|------------|-------------|--------------|------------------|--------------|-------------|--------------|
| 1.5 | 3129 | 56 | 536 | 23 | 1664 | 41 | 52.2 | 0.9 | 8.92 | 0.4 | 27.7 | 0.7 |
| 1 | 2791 | 53 | 581 | 24 | 1882 | 43 | 46.5 | 0.9 | 9.7 | 0.4 | 31.4 | 0.7 |
| 0.5 | 2456 | 50 | 604 | 25 | 2083 | 46 | 40.9 | 0.8 | 10.1 | 0.4 | 34.7 | 0.8 |
| 0 | (Para y=0 utilizam-se os dados da tabela 3 para $\theta=0$) | | | | | | 38.5 | 0.8 | 10.7 | 0.6 | 39.9 | 1.2 |
| -0,5 | 2022 | 45 | 649 | 25 | 2652 | 51 | 33.7 | 0.7 | 10.8 | 0.4 | 44.2 | 0.9 |
| -1 | 1779 | 42 | 550 | 23 | 2904 | 54 | 29.7 | 0.7 | 9.2 | 0.4 | 48.4 | 0.9 |
| -1.5 | 1626 | 40 | 540 | 23 | 3294 | 57 | 27.1 | 0.7 | 9.0 | 0.4 | 54.9 | 1.0 |

Tabela 10. Valores obtidos para variação de y com $x=\theta=0$

Em primeiro lugar, procedemos ao estudo da variação do número de partículas γ detetadas em função de y . Para tal, representa-se no gráfico da figura 6 os valores R_A e R_B em função de y .

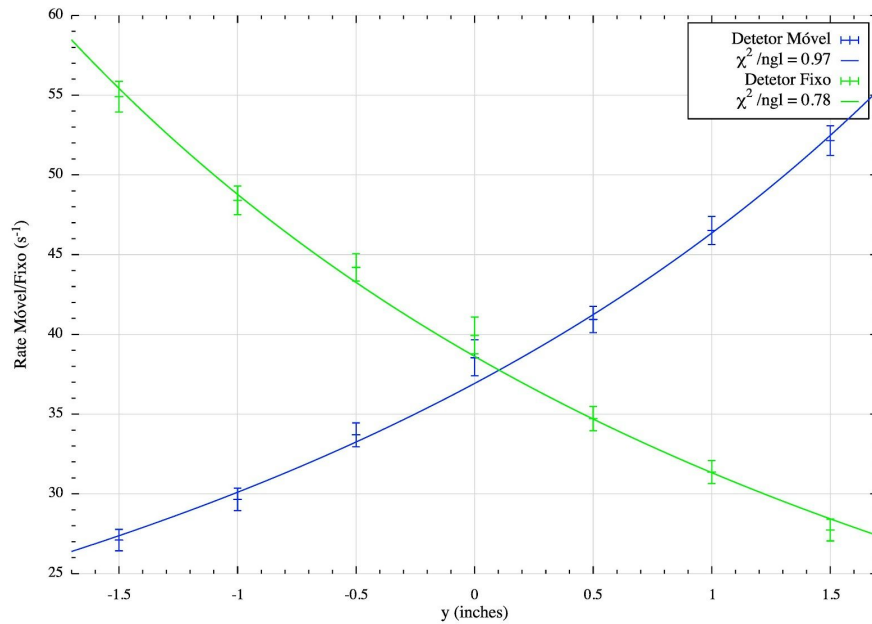


Figura 6. Representação gráfica de R_A e R_B em função de y e ajuste das expressões (2) pelo método dos mínimos quadrados.

É expectável que o número de contagens, e portanto a taxa, seja proporcional ao ângulo sólido definido correspondente a uma esfera de centro na fonte e raio até ao detetor, tal como se demonstra na figura 7.

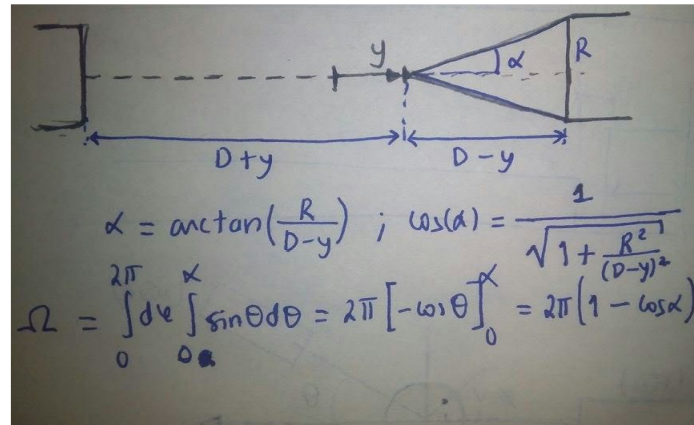


Figura 7. Dedução das fórmulas (2)

Podemos então ajustar aos pontos da figura 6 as expressões

$$R_A = A_1 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{(D_1-y)^2}}} \right); \quad R_B = A_2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{(D_2+y)^2}}} \right) \quad (2)$$

Obteve-se os seguintes parâmetros de ajuste:

| | | | |
|------------------------------|--------------|------------------------------|--------------|
| A_1 (Cts s ⁻¹) | 6421.4±473.2 | A_2 (Cts s ⁻¹) | 6278.1±406.9 |
|------------------------------|--------------|------------------------------|--------------|

| | | | |
|-----------------|------------------|-----------------|------------------|
| $D_1 (cm)$ | 23.54 ± 0.84 | $D_2 (cm)$ | 22.80 ± 0.71 |
| χ^2/n_{gl} | 0.97 | χ^2/n_{gl} | 0.78 |
| n_{gl} | 4 | n_{gl} | 4 |

Tabela 11. Parâmetros do ajuste da figura 6.

Em primeiro lugar, observamos que os valores χ^2/n_{gl} são próximos da unidade, indiciando a boa qualidade do ajuste.

Sabemos que a distância entre o centro do referencial e os detetores é $20cm$. Os valores D_1 e D_2 que aqui foram obtidos são superiores a esta distância. Tal ocorre dado que se deve considerar um livre percurso médio dentro do detetor necessário para que uma partícula γ seja detetada. Isto implica que podemos considerar que a entrada do detetor está ligeiramente mais distante do que $20cm$.

Calculemos a média entre estes dois valores para definir um valor para D :

| | |
|----------|------------------|
| $D (cm)$ | 23.17 ± 0.55 |
|----------|------------------|

Temos então que a correção a efetuar é de $3.17cm$. Este valor parece particularmente elevado dado que o comprimento do detetor é de $5cm$, no entanto tal compreende-se dado que $D \gg R$. Isto implica que o ângulo de proveniência das partículas será muito reduzido, e como tal incidirão quase paralelamente ao eixo do detetor.

Por fim, observamos que na verdade os detectores não estão equidistantes do ponto $y = 0$ visto os gráficos se sobreporem em $y \approx 2.6mm$. Este valor é no entanto inferior à precisão associada à montagem utilizada.

De seguida, variou-se a posição da fonte ao longo do eixo dos xx , isto é, para $y = 0$.

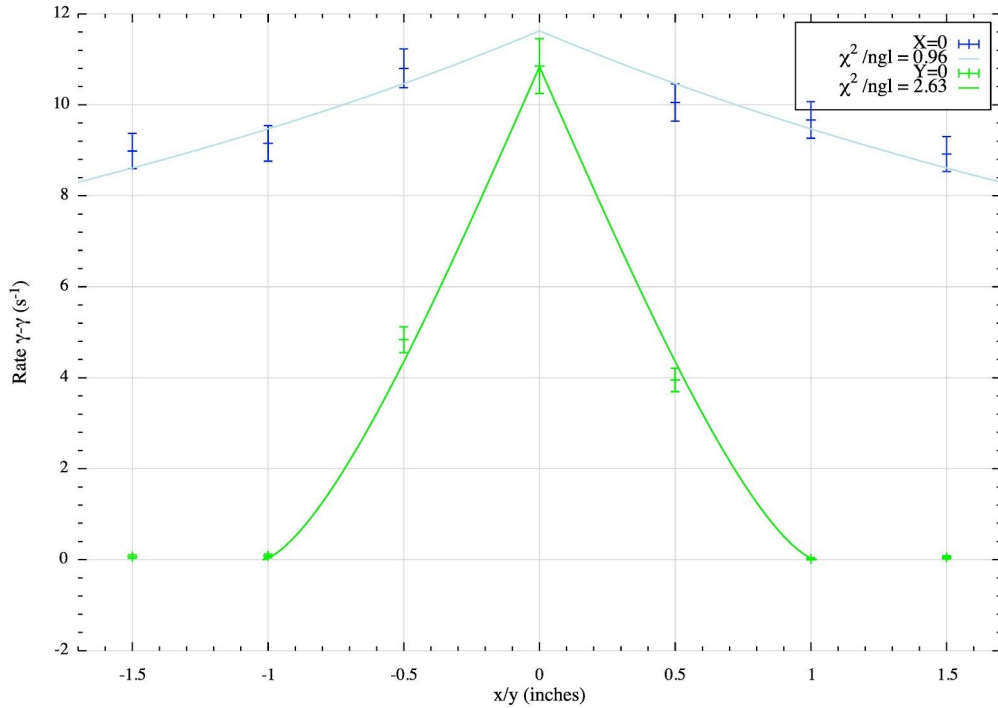
Obtiveram-se os resultados da tabela 12. Desta vez, podemos considerar que a distância da fonte aos detetores é $\approx D$ e como tal podemos descontar a taxa de fundo. Logo, ao contrário do que acontecia na tabela 11, as taxas R_A e R_B já estão corrigidas.

| $x (in)$ | C_A (Cts) | Erro (Cts) | C_C (Cts) | Erro (Cts) | C_B (Cts) | Erro (Cts) | R_A (Cts/s) | Erro (Cts/s) | $R_C(y=0)$ (Cts/s) | Erro (Cts/s) | R_B (Cts/s) | Erro (Cts/s) |
|----------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|------------------|-----------------|-----------------------|-----------------|------------------|-----------------|
| 1.5 | 2223 | 47 | 4 | 2 | 2194 | 47 | 26.6 | 1.3 | 0.05 | 0.03 | 26.0 | 1.3 |
| 1 | 2170 | 47 | 2 | 1 | 2166 | 47 | 25.7 | 1.3 | 0.02 | 0.02 | 25.5 | 1.3 |
| 0.5 | 2154 | 46 | 238 | 15 | 2195 | 47 | 25.5 | 1.3 | 3.95 | 0.26 | 26.0 | 1.3 |
| -0,5 | 2330 | 48 | 291 | 17 | 2263 | 48 | 28.4 | 1.3 | 4.84 | 0.28 | 27.2 | 1.3 |
| -1 | 2176 | 47 | 6 | 2 | 2223 | 47 | 25.8 | 1.3 | 0.09 | 0.04 | 26.5 | 1.3 |
| -1.5 | 2108 | 46 | 5 | 2 | 2151 | 46 | 24.7 | 1.3 | 0.07 | 0.04 | 25.3 | 1.3 |

Tabela 12. Valores obtidos para variação de x com $y=\theta=0$

Na figura 8 representa-se a variação da taxa de coincidências $\gamma\gamma$ com x e com y .

Figura



8.

Representação gráfica da variação de $R_{C(y=0)}$ com x e de $R_{C(x=0)}$ com y e ajuste das expressões (3) e (4), respetivamente, pelo método dos mínimos quadrados.

Determinemos agora um modelo teórico geral que permita explicar a variação da taxa de coincidências. Podemos seguir o raciocínio anterior e considerar que esta estará relacionada de alguma forma com a área da interseção da imagem do detetor fixo com o detetor móvel. Na verdade, será proporcional ao ângulo sólido correspondente a esta área de interseção.

Para calcular este ângulo sólido devemos considerar coordenadas esféricas centradas na fonte. No entanto, visto que na maior parte dos casos tal é muito difícil de fazer analiticamente, iremos considerar que para uma dada área de interseção A situada a uma distância D da fonte, o ângulo sólido correspondente é dado por

$$\Omega \approx \frac{A}{D^2}.$$

Ora, esta área é a da interseção do detetor móvel com uma imagem do detetor fixo, que designaremos por A_1 . Mas em bom rigor devemos também considerar de forma semelhante a área A_2 da interseção do detetor fixo com uma imagem do detetor móvel. Podemos então fazer a média entre os dois ângulos sólidos correspondentes a cada uma destas áreas para obter:

$$R_C \propto \Omega \approx \frac{1}{2} \left(\frac{A_1}{D_1^2} + \frac{A_2}{D_2^2} \right)$$

Temos então esta expressão geral, que para ser aplicada, basta apenas calcular as duas áreas de interseção A_1 e A_2 e as distâncias delas à fonte D_1 e D_2 .

Comecemos então por estudar o caso em que a fonte se desloca segundo o eixo dos xx , que se representa na figura 9. Neste caso, $A_1 = A_2 = A$ e $D_1 = D_2 = D$.

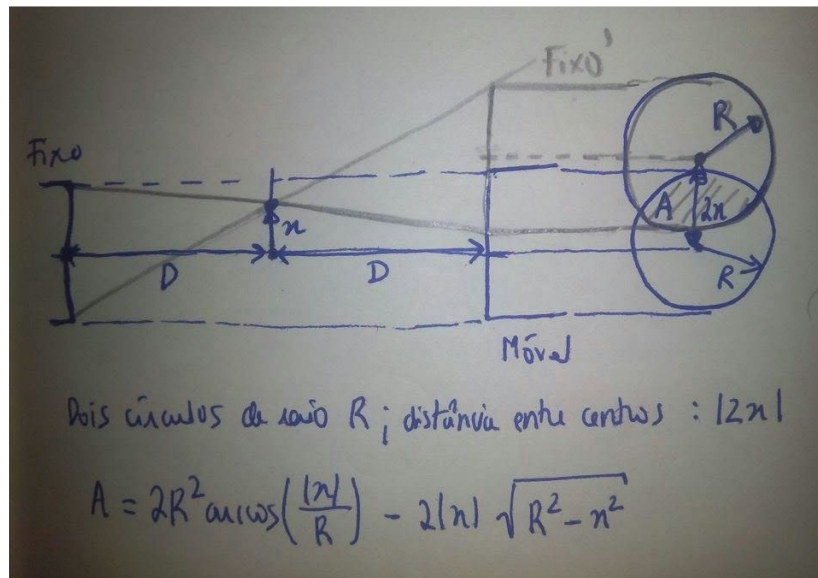


Figura 9. Esquema para a dedução da fórmula (3)

Temos então que a taxa de coincidências ao longo de $y=0$ varia com x da seguinte forma:

$$R_{C(y=0)}(x) = \frac{A_1}{D^2} \left[2R^2 \arccos\left(\frac{|x|}{R}\right) - 2|x| \sqrt{R^2 - x^2} \right] \quad (3)$$

No caso em que a fonte se desloca segundo o eixo dos yy , temos que as áreas já serão diferentes, como se observa na figura 10.

Temos então que a taxa de coincidências ao longo de $x=0$ varia com y da seguinte forma:

$$R_{C(x=0)}(y) = A_2 \frac{\pi R^2}{(D+y)^2} \quad (4)$$

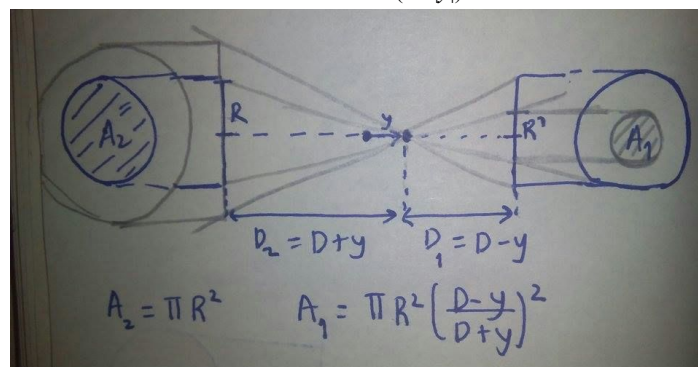


Figura 10. Esquema para a dedução da fórmula (4)

Os parâmetros do ajuste da figura 8 apresentam-se na tabela 13.

| | |
|----------------------|-----------------|
| A_1 (Cts^{-1}) | 142.1 ± 9.7 |
| A_2 (Cts^{-1}) | 152.6 ± 2.4 |

| | |
|-------------------|-----------------|
| $R \text{ (in)}$ | 1.02 ± 0.01 |
| χ_1^2/n_{gl} | 2.63 |
| χ_2^2/n_{gl} | 0.96 |
| $n_{gl_{1,2}}$ | 6 |

Tabela 13. Parâmetros do ajuste da figura 8.

Assim, podemos concluir em primeiro lugar que em ambos os casos possuímos bons valores de χ^2/n_{gl} , indiciando a boa qualidade do ajuste aos pontos experimentais. Por outro lado, notamos que os valores dos máximos são concordantes. Ainda assim, foram utilizados muito poucos pontos, o que provoca ajustes adequados aos pontos mas com um andamento diferente do esperado. Como tal, concluímos que estes ajustes são bastante inconclusivos quanto à qualidade do modelo aplicado.

Deve-se mencionar ainda que o valor obtido para o raio $R = (1.02 \pm 0.01)in$ desvia-se de 2σ do valor indicado pelo docente de $1in$.

Sessão 2.2 - 10/03/2016

VARIAR A POSIÇÃO DA FONTE (r, ϕ), COM O DETETOR MÓVEL EM $\theta=0$

Variou-se agora a posição da fonte para diferentes valores de (r, ϕ). Utilizaram-se três valores de r , percorrendo os 360° de ϕ para cada um. Os resultados encontram-se na tabela 14.

| r (in) | ϕ ($^\circ$) | C_A (Cts) | Erro (Cts) | C_C (Cts) | Erro (Cts) | C_B (Cts) | Erro (Cts) | R_A (Cts/s) | Erro (Cts/s) | R_C (Cts/s) | Erro (Cts/s) | R_B (Cts/s) | Erro (Cts/s) |
|----------|---------------------|--------------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|
| 0.5 | 0 | 2330 | 48 | 291 | 17 | 2263 | 48 | 28.40 | 1.18 | 4.84 | 0.28 | 27.16 | 1.17 |
| 0.5 | 10 | 2139 | 46 | 291 | 17 | 2272 | 48 | 25.21 | 1.16 | 4.84 | 0.28 | 27.31 | 1.17 |
| 0.5 | 20 | 2116 | 46 | 287 | 17 | 2325 | 48 | 24.83 | 1.15 | 4.77 | 0.28 | 28.19 | 1.18 |
| 0.5 | 30 | 2061 | 45 | 327 | 18 | 2376 | 49 | 23.91 | 1.15 | 5.44 | 0.30 | 29.04 | 1.19 |
| 0.5 | 40 | 2046 | 45 | 370 | 19 | 2515 | 50 | 23.66 | 1.15 | 6.15 | 0.32 | 31.36 | 1.20 |
| 0.5 | 50 | 2018 | 45 | 444 | 21 | 2540 | 50 | 23.20 | 1.14 | 7.39 | 0.35 | 31.78 | 1.20 |
| 0.5 | 60 | 1940 | 44 | 517 | 23 | 2463 | 50 | 21.90 | 1.13 | 8.60 | 0.38 | 30.49 | 1.20 |
| 0.5 | 70 | 1939 | 44 | 514 | 23 | 2499 | 50 | 21.88 | 1.13 | 8.55 | 0.38 | 31.09 | 1.20 |
| 0.5 | 80 | 1964 | 44 | 598 | 24 | 2658 | 52 | 22.30 | 1.14 | 9.95 | 0.41 | 33.74 | 1.22 |
| 0.5 | 90 | 2022 | 45 | 649 | 25 | 2652 | 51 | 23.26 | 1.14 | 10.80 | 0.42 | 33.64 | 1.22 |
| 0.5 | 100 | 1914 | 44 | 566 | 24 | 2569 | 51 | 21.46 | 1.13 | 9.42 | 0.40 | 32.26 | 1.21 |
| 0.5 | 110 | 1998 | 45 | 550 | 23 | 2547 | 50 | 22.86 | 1.14 | 9.15 | 0.39 | 31.89 | 1.20 |
| 0.5 | 120 | 2061 | 45 | 518 | 23 | 2524 | 50 | 23.91 | 1.15 | 8.62 | 0.38 | 31.51 | 1.20 |
| 0.5 | 130 | 2095 | 46 | 454 | 21 | 2528 | 50 | 24.48 | 1.15 | 7.55 | 0.35 | 31.58 | 1.20 |
| 0.5 | 140 | 2012 | 45 | 345 | 19 | 2367 | 49 | 23.10 | 1.14 | 5.74 | 0.31 | 28.89 | 1.18 |
| 0.5 | 150 | 2159 | 46 | 336 | 18 | 2370 | 49 | 25.55 | 1.16 | 5.59 | 0.30 | 28.94 | 1.19 |
| 0.5 | 160 | 2103 | 46 | 282 | 17 | 2425 | 49 | 24.61 | 1.15 | 4.69 | 0.28 | 29.86 | 1.19 |
| 0.5 | 170 | 2164 | 47 | 304 | 17 | 2357 | 49 | 25.63 | 1.16 | 5.05 | 0.29 | 28.73 | 1.18 |
| 0.5 | 180 | 2154 | 46 | 238 | 15 | 2195 | 47 | 25.46 | 1.16 | 3.95 | 0.26 | 26.03 | 1.17 |
| 0.5 | 190 | 2224 | 47 | 239 | 15 | 2133 | 46 | 26.63 | 1.17 | 3.97 | 0.26 | 24.99 | 1.16 |
| 0.5 | 200 | 2240 | 47 | 281 | 17 | 2192 | 47 | 26.90 | 1.17 | 4.67 | 0.28 | 25.98 | 1.17 |
| 0.5 | 210 | 2268 | 48 | 324 | 18 | 2132 | 46 | 27.36 | 1.17 | 5.39 | 0.30 | 24.98 | 1.16 |
| 0.5 | 220 | 2376 | 49 | 332 | 18 | 2087 | 46 | 29.16 | 1.18 | 5.52 | 0.30 | 24.23 | 1.15 |
| 0.5 | 230 | 2520 | 50 | 418 | 20 | 2121 | 46 | 31.56 | 1.20 | 6.95 | 0.34 | 24.79 | 1.16 |
| 0.5 | 240 | 2451 | 50 | 455 | 21 | 2091 | 46 | 30.41 | 1.19 | 7.57 | 0.35 | 24.29 | 1.15 |
| 0.5 | 250 | 2481 | 50 | 549 | 23 | 2097 | 46 | 30.91 | 1.19 | 9.14 | 0.39 | 24.39 | 1.16 |
| 0.5 | 260 | 2470 | 50 | 578 | 24 | 2018 | 45 | 30.73 | 1.19 | 9.62 | 0.40 | 23.08 | 1.15 |
| 0.5 | 270 | 2456 | 50 | 604 | 25 | 2083 | 46 | 30.50 | 1.19 | 10.05 | 0.41 | 24.16 | 1.15 |
| 0.5 | 280 | 2538 | 50 | 616 | 25 | 2049 | 45 | 31.86 | 1.20 | 10.25 | 0.41 | 23.59 | 1.15 |
| 0.5 | 290 | 2527 | 50 | 523 | 23 | 2006 | 45 | 31.68 | 1.20 | 8.70 | 0.38 | 22.88 | 1.15 |
| 0.5 | 300 | 2405 | 49 | 437 | 21 | 2020 | 45 | 29.65 | 1.19 | 7.27 | 0.35 | 23.11 | 1.15 |
| 0.5 | 310 | 2474 | 50 | 449 | 21 | 2191 | 47 | 30.80 | 1.19 | 7.47 | 0.35 | 25.96 | 1.17 |
| 0.5 | 320 | 2376 | 49 | 342 | 18 | 2091 | 46 | 29.16 | 1.18 | 5.69 | 0.31 | 24.29 | 1.15 |
| 0.5 | 330 | 2236 | 47 | 306 | 17 | 2161 | 46 | 26.83 | 1.17 | 5.09 | 0.29 | 25.46 | 1.16 |
| 0.5 | 340 | 2372 | 49 | 276 | 17 | 2216 | 47 | 29.10 | 1.18 | 4.59 | 0.28 | 26.38 | 1.17 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|------|----|-----|----|------|----|-------|------|------|------|-------|------|
| 0.5 | 350 | 2144 | 46 | 193 | 14 | 2209 | 47 | 25.30 | 1.16 | 3.20 | 0.23 | 26.26 | 1.17 |
| 1 | 0 | 2176 | 47 | 6 | 2 | 2223 | 47 | 25.83 | 1.16 | 0.09 | 0.03 | 26.49 | 1.17 |
| 1 | 10 | 2083 | 46 | 8 | 3 | 2329 | 48 | 24.28 | 1.15 | 0.12 | 0.04 | 28.26 | 1.18 |
| 1 | 20 | 1993 | 45 | 10 | 3 | 2470 | 50 | 22.78 | 1.14 | 0.15 | 0.05 | 30.61 | 1.20 |
| 1 | 30 | 1965 | 44 | 32 | 6 | 2571 | 51 | 22.31 | 1.14 | 0.52 | 0.09 | 32.29 | 1.21 |
| 1 | 40 | 1836 | 43 | 86 | 9 | 2683 | 52 | 20.16 | 1.12 | 1.42 | 0.15 | 34.16 | 1.22 |
| 1 | 50 | 1816 | 43 | 175 | 13 | 2730 | 52 | 19.83 | 1.12 | 2.90 | 0.22 | 34.94 | 1.22 |
| 1 | 60 | 1834 | 43 | 266 | 16 | 2768 | 53 | 20.13 | 1.12 | 4.42 | 0.27 | 35.58 | 1.23 |
| 1 | 70 | 1813 | 43 | 420 | 20 | 2898 | 54 | 19.78 | 1.12 | 6.99 | 0.34 | 37.74 | 1.24 |
| 1 | 80 | 1782 | 42 | 538 | 23 | 2877 | 54 | 19.26 | 1.12 | 8.95 | 0.39 | 37.39 | 1.24 |
| 1 | 90 | 1779 | 42 | 550 | 23 | 2904 | 54 | 19.21 | 1.12 | 9.15 | 0.39 | 37.84 | 1.24 |
| 1 | 100 | 1853 | 43 | 543 | 23 | 2915 | 54 | 20.45 | 1.12 | 9.04 | 0.39 | 38.03 | 1.24 |
| 1 | 110 | 1792 | 42 | 388 | 20 | 2757 | 53 | 19.43 | 1.12 | 6.45 | 0.33 | 35.39 | 1.23 |
| 1 | 120 | 1801 | 42 | 257 | 16 | 2678 | 52 | 19.58 | 1.12 | 4.27 | 0.27 | 34.08 | 1.22 |
| 1 | 130 | 1842 | 43 | 163 | 13 | 2759 | 53 | 20.26 | 1.12 | 2.70 | 0.21 | 35.43 | 1.23 |
| 1 | 140 | 1878 | 43 | 93 | 10 | 2605 | 51 | 20.86 | 1.13 | 1.54 | 0.16 | 32.86 | 1.21 |
| 1 | 150 | 1989 | 45 | 39 | 6 | 2475 | 50 | 22.71 | 1.14 | 0.64 | 0.10 | 30.69 | 1.20 |
| 1 | 160 | 2103 | 46 | 18 | 4 | 2426 | 49 | 24.61 | 1.15 | 0.29 | 0.07 | 29.88 | 1.19 |
| 1 | 170 | 2148 | 46 | 12 | 3 | 2305 | 48 | 25.36 | 1.16 | 0.19 | 0.05 | 27.86 | 1.18 |
| 1 | 180 | 2170 | 47 | 2 | 1 | 2166 | 47 | 25.73 | 1.16 | 0.02 | 0.01 | 25.54 | 1.16 |
| 1 | 190 | 2215 | 47 | 10 | 3 | 2208 | 47 | 26.48 | 1.16 | 0.15 | 0.05 | 26.24 | 1.17 |
| 1 | 200 | 2383 | 49 | 14 | 4 | 2069 | 45 | 29.28 | 1.18 | 0.22 | 0.06 | 23.93 | 1.15 |
| 1 | 210 | 2447 | 49 | 27 | 5 | 2107 | 46 | 30.35 | 1.19 | 0.44 | 0.08 | 24.56 | 1.16 |
| 1 | 220 | 2556 | 51 | 70 | 8 | 2015 | 45 | 32.16 | 1.20 | 1.15 | 0.14 | 23.03 | 1.15 |
| 1 | 230 | 2610 | 51 | 123 | 11 | 1877 | 43 | 33.06 | 1.21 | 2.04 | 0.18 | 20.73 | 1.13 |
| 1 | 240 | 2735 | 52 | 292 | 17 | 1948 | 44 | 35.15 | 1.22 | 4.85 | 0.28 | 21.91 | 1.14 |
| 1 | 250 | 2781 | 53 | 425 | 21 | 1853 | 43 | 35.91 | 1.23 | 7.07 | 0.34 | 20.33 | 1.13 |
| 1 | 260 | 2749 | 52 | 517 | 23 | 1853 | 43 | 35.38 | 1.22 | 8.60 | 0.38 | 20.33 | 1.13 |
| 1 | 270 | 2791 | 53 | 581 | 24 | 1882 | 43 | 36.08 | 1.23 | 9.67 | 0.40 | 20.81 | 1.13 |
| 1 | 280 | 2764 | 53 | 538 | 23 | 1830 | 43 | 35.63 | 1.22 | 8.95 | 0.39 | 19.94 | 1.13 |
| 1 | 290 | 2872 | 54 | 407 | 20 | 1879 | 43 | 37.43 | 1.24 | 6.77 | 0.34 | 20.76 | 1.13 |
| 1 | 300 | 2703 | 52 | 261 | 16 | 1918 | 44 | 34.61 | 1.22 | 4.34 | 0.27 | 21.41 | 1.14 |
| 1 | 310 | 2715 | 52 | 157 | 13 | 1967 | 44 | 34.81 | 1.22 | 2.60 | 0.21 | 22.23 | 1.14 |
| 1 | 320 | 2502 | 50 | 70 | 8 | 1965 | 44 | 31.26 | 1.20 | 1.15 | 0.14 | 22.19 | 1.14 |
| 1 | 330 | 2430 | 49 | 31 | 6 | 1993 | 45 | 30.06 | 1.19 | 0.50 | 0.09 | 22.66 | 1.14 |
| 1 | 340 | 2258 | 48 | 13 | 4 | 2039 | 45 | 27.20 | 1.17 | 0.20 | 0.06 | 23.43 | 1.15 |
| 1 | 350 | 2217 | 47 | 6 | 2 | 2030 | 45 | 26.51 | 1.16 | 0.09 | 0.03 | 23.28 | 1.15 |
| 1.5 | 0 | 2108 | 46 | 5 | 2 | 2151 | 46 | 24.70 | 1.15 | 0.07 | 0.03 | 25.29 | 1.16 |
| 1.5 | 10 | 2097 | 46 | 3 | 2 | 2397 | 49 | 24.51 | 1.15 | 0.04 | 0.02 | 29.39 | 1.19 |
| 1.5 | 20 | 1882 | 43 | 1 | 1 | 2477 | 50 | 20.93 | 1.13 | 0.00 | 0.00 | 30.73 | 1.20 |
| 1.5 | 30 | 1893 | 44 | 2 | 1 | 2568 | 51 | 21.11 | 1.13 | 0.02 | 0.01 | 32.24 | 1.21 |
| 1.5 | 40 | 1829 | 43 | 1 | 1 | 2664 | 52 | 20.05 | 1.12 | 0.00 | 0.00 | 33.84 | 1.22 |
| 1.5 | 50 | 1751 | 42 | 10 | 3 | 2885 | 54 | 18.75 | 1.11 | 0.15 | 0.05 | 37.53 | 1.24 |
| 1.5 | 60 | 1713 | 41 | 91 | 10 | 3042 | 55 | 18.11 | 1.11 | 1.50 | 0.16 | 40.14 | 1.26 |
| 1.5 | 70 | 1622 | 40 | 271 | 16 | 3196 | 57 | 16.60 | 1.10 | 4.50 | 0.27 | 42.71 | 1.27 |
| 1.5 | 80 | 1645 | 41 | 468 | 22 | 3172 | 56 | 16.98 | 1.10 | 7.79 | 0.36 | 42.31 | 1.27 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|------|----|-----|----|------|----|-------|------|------|------|-------|------|
| 1.5 | 90 | 1626 | 40 | 540 | 23 | 3294 | 57 | 16.66 | 1.10 | 8.99 | 0.39 | 44.34 | 1.28 |
| 1.5 | 100 | 1562 | 40 | 401 | 20 | 3117 | 56 | 15.60 | 1.09 | 6.67 | 0.33 | 41.39 | 1.27 |
| 1.5 | 110 | 1684 | 41 | 261 | 16 | 3120 | 56 | 17.63 | 1.11 | 4.34 | 0.27 | 41.44 | 1.27 |
| 1.5 | 120 | 1641 | 41 | 102 | 10 | 3023 | 55 | 16.91 | 1.10 | 1.69 | 0.17 | 39.83 | 1.26 |
| 1.5 | 130 | 1713 | 41 | 13 | 4 | 2930 | 54 | 18.11 | 1.11 | 0.20 | 0.06 | 38.28 | 1.25 |
| 1.5 | 140 | 1727 | 42 | 5 | 2 | 2847 | 53 | 18.35 | 1.11 | 0.07 | 0.03 | 36.89 | 1.24 |
| 1.5 | 150 | 1896 | 44 | 4 | 2 | 2661 | 52 | 21.16 | 1.13 | 0.05 | 0.03 | 33.79 | 1.22 |
| 1.5 | 160 | 2008 | 45 | 6 | 2 | 2540 | 50 | 23.03 | 1.14 | 0.09 | 0.03 | 31.78 | 1.20 |
| 1.5 | 170 | 2126 | 46 | 4 | 2 | 2365 | 49 | 25.00 | 1.15 | 0.05 | 0.03 | 28.86 | 1.18 |
| 1.5 | 180 | 2223 | 47 | 4 | 2 | 2194 | 47 | 26.61 | 1.17 | 0.05 | 0.03 | 26.01 | 1.17 |
| 1.5 | 190 | 2157 | 46 | 1 | 1 | 2178 | 47 | 25.51 | 1.16 | 0.00 | 0.00 | 25.74 | 1.16 |
| 1.5 | 200 | 2333 | 48 | 3 | 2 | 2014 | 45 | 28.45 | 1.18 | 0.04 | 0.02 | 23.01 | 1.15 |
| 1.5 | 210 | 2604 | 51 | 2 | 1 | 1922 | 44 | 32.96 | 1.21 | 0.02 | 0.01 | 21.48 | 1.14 |
| 1.5 | 220 | 2718 | 52 | 4 | 2 | 1805 | 42 | 34.86 | 1.22 | 0.05 | 0.03 | 19.53 | 1.12 |
| 1.5 | 230 | 2711 | 52 | 7 | 3 | 1838 | 43 | 34.75 | 1.22 | 0.10 | 0.04 | 20.08 | 1.13 |
| 1.5 | 240 | 2988 | 55 | 84 | 9 | 1775 | 42 | 39.36 | 1.25 | 1.39 | 0.15 | 19.03 | 1.12 |
| 1.5 | 250 | 2932 | 54 | 232 | 15 | 1697 | 41 | 38.43 | 1.24 | 3.85 | 0.25 | 17.73 | 1.11 |
| 1.5 | 260 | 3168 | 56 | 449 | 21 | 2365 | 49 | 42.36 | 1.27 | 7.47 | 0.35 | 28.86 | 1.18 |
| 1.5 | 270 | 3129 | 56 | 536 | 23 | 1664 | 41 | 41.71 | 1.26 | 8.92 | 0.39 | 17.18 | 1.11 |
| 1.5 | 280 | 3275 | 57 | 475 | 22 | 1663 | 41 | 44.15 | 1.28 | 7.90 | 0.36 | 17.16 | 1.11 |
| 1.5 | 290 | 3090 | 56 | 227 | 15 | 1745 | 42 | 41.06 | 1.26 | 3.77 | 0.25 | 18.53 | 1.12 |
| 1.5 | 300 | 3003 | 55 | 82 | 9 | 1755 | 42 | 39.61 | 1.25 | 1.35 | 0.15 | 18.69 | 1.12 |
| 1.5 | 310 | 3001 | 55 | 7 | 3 | 1798 | 42 | 39.58 | 1.25 | 0.10 | 0.04 | 19.41 | 1.12 |
| 1.5 | 320 | 2820 | 53 | 7 | 3 | 1814 | 43 | 36.56 | 1.23 | 0.10 | 0.04 | 19.68 | 1.12 |
| 1.5 | 330 | 2516 | 50 | 2 | 1 | 1881 | 43 | 31.50 | 1.20 | 0.02 | 0.01 | 20.79 | 1.13 |
| 1.5 | 340 | 2439 | 49 | 3 | 2 | 2022 | 45 | 30.21 | 1.19 | 0.04 | 0.02 | 23.14 | 1.15 |
| 1.5 | 350 | 2297 | 48 | 2 | 1 | 2002 | 45 | 27.85 | 1.17 | 0.02 | 0.01 | 22.81 | 1.15 |

Tabela 14. Valores obtidos para várias posições de (r, ϕ) com $\theta = 0$. ($\Delta t_{aq} = 60s$)

Tal como anteriormente, os valores de $R_{A,B}$ não estão corrigidos para a radiação de fundo e os valores de R_C estão corrigidos para as coincidências fortuitas. Representa-se graficamente na figura 11 os valores das coincidências $\gamma\gamma$ como função de ϕ , para os três diferentes valores de r .

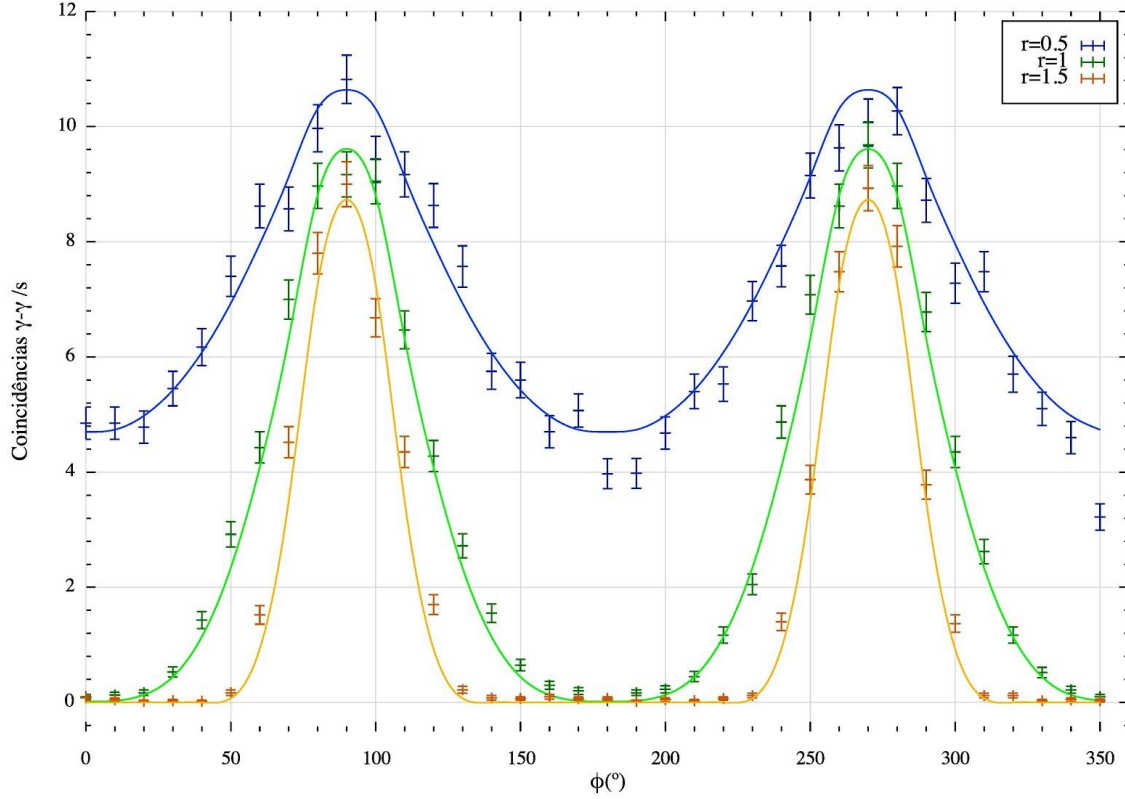


Figura 11. Representação gráfica da variação de R_C com ϕ para diferentes valores de r , e ajuste da expressão (5) pelo método dos mínimos quadrados.

Pretendemos agora encontrar o modelo teórico que explique esta variação. O processo é semelhante ao anterior e está explicitado nas figuras 12 e 13, onde se determina os raios R_1 e R_2 dos dois círculos que se intersectam, e a distância d entre os seus centros. A expressão que permite calcular a área da interseção é:

$$I(R_1, R_2, d) = R_1^2 \arccos\left(\frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2}{2dR_1}\right) + R_2^2 \arccos\left(\frac{d^2 + R_2^2 - R_1^2}{2dR_2}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{(-d + R_1 + R_2)(d + R_1 - R_2)(d - R_1 + R_2)(d + R_1 + R_2)}$$

Temos no entanto que ter em atenção que, em ambos os casos, quando $|x| > \frac{R}{D}|y|$, o círculo maior passa a englobar inteiramente o círculo menor. Nesse caso, a área da interseção passa a ser simplesmente a do círculo menor.

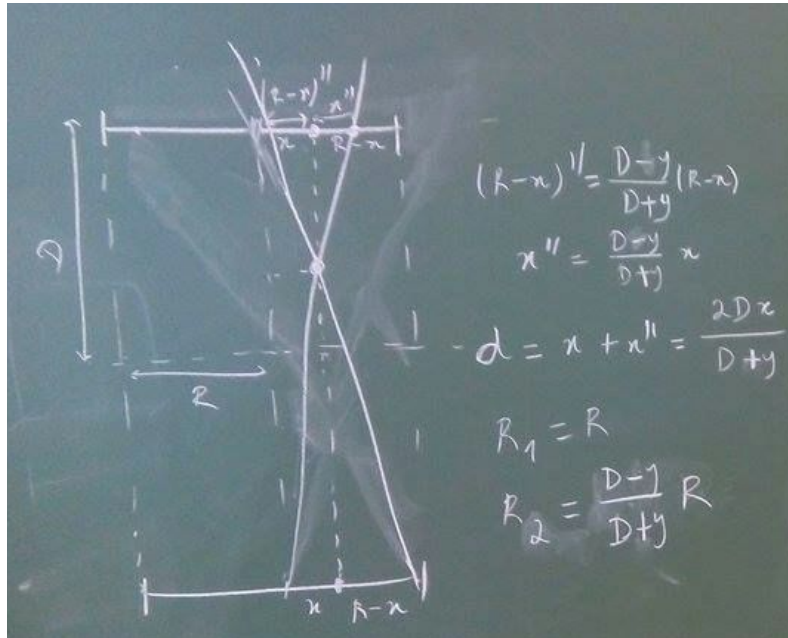


Figura 12. Esquema para calcular A_1

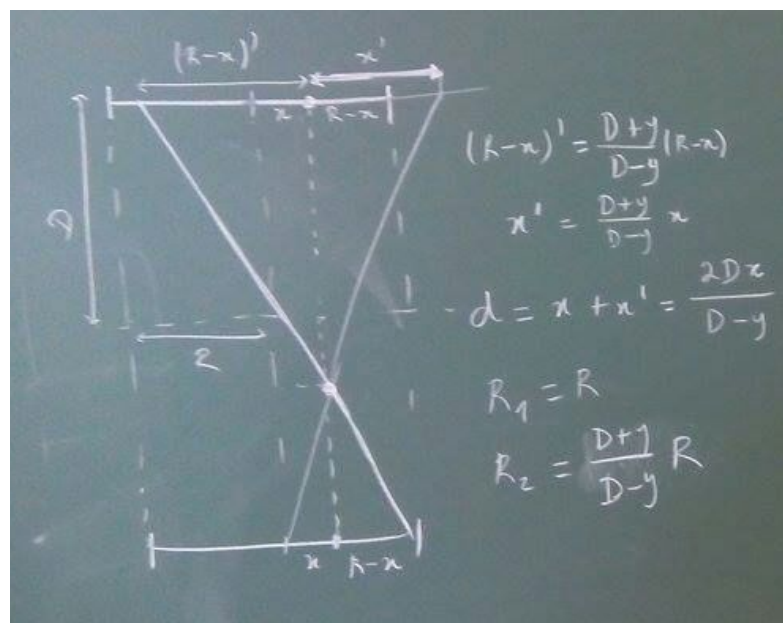


Figura 13. Esquema para calcular A_2

Logo:

$$A_1(x, y) = \begin{cases} I \left(R, \frac{D-|y|}{D+|y|} R, \frac{2D|x|}{D+|y|} \right), & |x| > \frac{R}{D} |y| \\ \pi \left(\frac{D+|y|}{D-|y|} \right)^2 R^2, & |x| < \frac{R}{D} |y| \end{cases} \quad A_2(x, y) = \begin{cases} I \left(\frac{D+|y|}{D-|y|} R, R, \frac{2D|x|}{D-|y|} \right), & |x| > \frac{R}{D} |y| \\ \pi R^2, & |x| < \frac{R}{D} |y| \end{cases}$$

Por último, temos que $D_1 = D - |y|$ e $D_2 = D + |y|$. Juntando estes resultados, temos que:

$$R_C = A \left[\frac{A_1(x, y)}{(D-|y|)^2} + \frac{A_2(x, y)}{(D+|y|)^2} \right] \quad (5)$$

É ainda necessário passar de (x, y) para (r, ϕ) , da seguinte forma:

$$x = -r \cos(\phi); y = -r \sin(\phi)$$

Devido à complexidade da expressão, não foi possível utilizar o software *Gnuplot* para ajustar esta equação aos pontos da figura 11. Antes disso, obteve-se através do software o valor do modelo teórico calculado nos pontos experimentais para cada valor de r , e fez-se o ajuste analiticamente à amplitude A pelo método dos mínimos quadrados. Este método foi aplicado simultaneamente para todos os dados, tendo-se obtido os seguintes resultados.

Nota: utilizou-se $D = (23.17 \pm 0.55) \text{ cm}$ e $R = (1.011 \pm 0.013) \text{ in}$, obtidos com os ajustes das figuras 6 e 4 respetivamente.

| | |
|---------------------------------|--------|
| $A \text{ (Cts s}^{-1}\text{)}$ | 152.98 |
| χ^2/n_{gl} | 3.26 |

O ajuste foi efetuado seguindo a seguinte lógica explicada de seguida.

Começamos por analisar o caso de 1 único conjunto de N pontos a ajustar a uma função $Af(x)$ que, no ponto experimental e_n assume o valor $f(e_n)$. Ora, o funcional que desejamos minimizar é dado por

$$F(A) = \sum_{n=1}^N (Af(e_n) - e_n)^2$$

onde o parâmetro A designa a amplitude da função a ser determinada. Minimizar consiste em descobrir o extremo do funcional. Efetuando a derivada temos assim:

$$\sum_{n=1}^N 2f(e_n)(Af(e_n) - e_n) = 0$$

que rapidamente pode ser rearranjada em ordem a A para obter:

$$A = \frac{\sum_{n=1}^N e_n}{\sum_{n=1}^N f(e_n)}$$

Podemos agora generalizar para o caso que nos será útil: o caso em que temos M conjuntos de pontos experimentais, cada qual com N pontos, aos quais ajustaremos M função $f_m(x)$, pelo que a amplitude a ajustar será idêntica para todos os pontos (de facto, queremos minimizar a soma dos erros quadráticos para cada conjunto de pontos). Repetindo o procedimento anterior, definimos o funcional

$$F(A) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (Af_m(e_{nm}) - e_{nm})^2$$

onde e_{nm} designa o ponto experimental n do conjunto m . Obter o mínimo deste funcional corresponde à condição:

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N 2f_m(e_{nm})(Af_m(e_{nm}) - e_{nm}) = 0$$

Assim, reescrevendo esta equação:

$$A = \frac{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N e_{nm} f_m(e_{nm})}{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N f_m(e_{nm})^2}$$

No nosso caso concreto, em que $M = 3$ (três raios diferentes), a equação acima é passível de ser reescrita enquanto:

$$A = \frac{\sum_{n=1}^N e_{n1} f_m(e_{n1}) + e_{n2} f_m(e_{n2}) + e_{n3} f_m(e_{n3})}{\sum_{n=1}^N f_m(e_{n1})^2 + f_m(e_{n2})^2 + f_m(e_{n3})^2}$$

Tal como anteriormente, calculemos a média, o desvio padrão e o skewness:

| | $r = 0.5$ | $r = 1.0$ | $r = 1.5$ |
|---------------------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| $\mu (^{\circ})$ | 173.6 ± 0.8 | 179.2 ± 1.1 | 178.7 ± 1.4 |
| $\sigma (^{\circ})$ | 100.5 ± 2.1 | 93.5 ± 0.3 | 200.3 ± 0.24 |
| $\gamma_1 ((^{\circ})^3)$ | 0.02 ± 0.15 | 0.01 ± 0.11 | 0.002 ± 0.114 |

Tabela 15. Média, desvio padrão e *skewness* da distribuição da figura 11.

Observa-se que a posição dos picos é congruente com 180° , exceptuando para $r=0.5in$. Tal decorre de meras flutuações estatísticas a nível das contagens e não de qualquer problema existente para este raio. O desvio padrão neste caso não possui significado físico. A skewness é sempre nula, indicando que não existem assimetrias ou caudas.

Calculemos agora os mesmos parâmetros mas considerando duas distribuições em torno de $\phi = 90^{\circ}$ e de $\phi = 270^{\circ}$:

| ϕ | | $r = 0.5in$ | $r = 1.0in$ | $r = 1.5in$ |
|---------------|---------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 90° | $\mu (^{\circ})$ | 89.50 ± 0.54 | 89.99 ± 0.42 | 90.11 ± 0.36 |
| | $\sigma (^{\circ})$ | 47.72 ± 1.45 | 26.00 ± 2.12 | 17.27 ± 2.71 |
| | $\gamma_1 ((^{\circ})^3)$ | -1.2 ± 35.5 | 1.1 ± 6.7 | 1.0 ± 3.0 |
| 270° | $\mu (^{\circ})$ | 269.41 ± 0.50 | 270.01 ± 0.46 | 270.16 ± 0.36 |
| | $\sigma (^{\circ})$ | 41.93 ± 4.58 | 28.3 ± 2.0 | 15.44 ± 3.03 |
| | $\gamma_1 ((^{\circ})^3)$ | 1.4 ± 95.2 | -1.1 ± 0.4 | 1.3 ± 2.5 |

Tabela 16. Média, desvio padrão e *skewness* das distribuição da figura 11 em torno de $\phi = 90^{\circ}$ e de $\phi = 270^{\circ}$.

Pode-se concluir que:

- Exceptuando $r = 0.5 \text{ in}$ os valores esperados dos picos encontram-se extremamente congruentes com os valores supostos, indicando a quase perfeita simetria da distribuição;
- O desvio padrão diminui com r . Tal é lógico - para menores valores de r , a rotação do porta-alvos irá influenciar de forma menor o deslocamento da fonte e como tal a ocorrência de coincidências. De forma mais intuitiva, a curva das coincidências demora menos a “morrer” (ser nula) para maiores valores de raio porque uma mesma rotação corresponde a um maior desvio da fonte.
- O valor do skewness é quase nulo para todos os picos, indicando que estes não possuem uma cauda em nenhum dos lados, revelando novamente a sua grande simetria.

ÁREA DE DETECÇÃO

Para determinar a área de detecção determinou-se os pontos onde a distribuição deixa praticamente de ter contagens. Para isso, consideramos que a distribuição morre a 3σ (visualmente é o que se verifica) e utilizamos os estes valores de ϕ_{lim} para determinar os pontos da Fig. 14

$$\phi_{lim} = E[\phi] \pm 3 * VAR[\phi] \quad \epsilon_{\phi_{lim}} = \sqrt{\epsilon_E^2 + 9 * \epsilon_{VAR}^2}$$

$$x_{lim} = R * \cos(\phi_{lim}) \quad \epsilon_{x_{lim}} = R * |\sin(\phi_{lim})| * \epsilon_{\phi_{lim}}$$

$$y_{lim} = R * \sin(\phi_{lim}) \quad \epsilon_{y_{lim}} = R * |\cos(\phi_{lim})| * \epsilon_{\phi_{lim}}$$

| r(in) | x(in) | Erro (in) | y(in) | Erro (in) |
|-------|-------|-----------|-------|-----------|
| 1.0 | -0.98 | 0.02 | 0.21 | 0.11 |
| 1.0 | 0.98 | 0.02 | 0.21 | 0.11 |
| 1.0 | 1.00 | 0.01 | -0.07 | 0.10 |
| 1.0 | -0.99 | 0.01 | -0.11 | 0.10 |
| 1.5 | -1.18 | 0.13 | 0.92 | 0.17 |
| 1.5 | 1.18 | 0.13 | 0.93 | 0.17 |
| 1.5 | 1.08 | 0.16 | -1.04 | 0.17 |
| 1.5 | -1.08 | 0.16 | -1.04 | 0.17 |

Tabela 17. Pontos limites da área de detecção

A laranja na figura 14 está representado os limites teóricos da área de detecção do modelo, isto é, duas retas paralelas a xx distanciadas $R=1.01 \text{ in}$ do eixo de simetria dos detetores. Todos os pontos ajustam-se ao modelo a menos de 1.5σ no entanto a reduzida dimensão do números de pontos não permite fazer nenhuma análise. Além disso, os pontos limites as 3σ poderão não corresponder aos zeros da função pelo que teria sido mais relevante tirar pontos junto aos ângulos limites para determinar o 0.

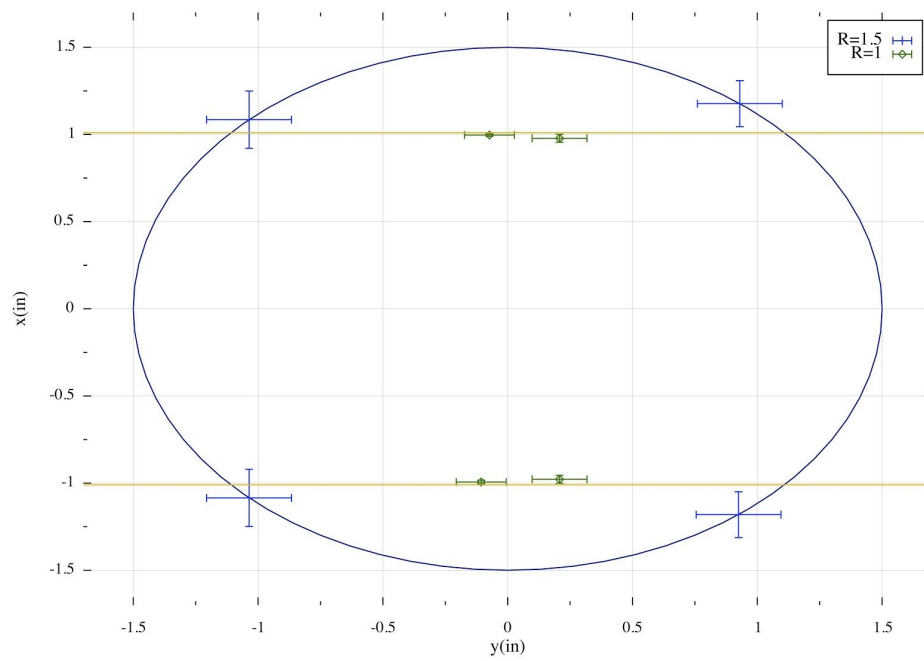


Figura 14. Pontos limites da área de detecção e círculo de raio 1.5 in

Sessão 3 - 17/03/2016

MONTAGEM

Repetiu-se novamente o procedimento da sessão 1, tendo-se colocado um resolving time de 250ns . Obtiveram-se os seguintes parâmetros para o pico de 511keV e para os valores dos limiares de tensão do Pulser e das Timing SCA.

Tempo de aquisição: $\Delta t_{aq} = 130\text{s}$ (igual para ambos os picos)

| Pico | Área Total (Cts) | Área do Sinal (Cts) | Centróide - C (Can) | FWHM (Can) | Sigma - σ (Can) |
|---|------------------|---------------------|---------------------|------------|------------------------|
| 511keV - Detetor Móvel Canais: [236;291] | 4984 \pm 71 | 3416 \pm 140 | 264.72 | 23,30 | 9.89 |
| 511keV - Detetor Fixo Canais: [235;292] | 4652 \pm 68 | 3308 \pm 124 | 263.40 | 22,47 | 9,54 |

Tabela 18. Dados referentes aos espectros observados na sessão 3.

| | Limite Inferior (V) | | Limite Superior (V) | |
|---------------|---------------------|-----------------|---------------------|-----------------|
| | Pulser | Timing SCA | Pulser | Timing SCA |
| Detetor Móvel | 2.45 \pm 0.01 | 2.06 \pm 0.01 | 3.07 \pm 0.01 | 2.54 \pm 0.01 |
| Detetor Fixo | 2.47 \pm 0.01 | 2.05 \pm 0.01 | 3.08 \pm 0.01 | 2.52 \pm 0.01 |

Tabela 19. Valores dos limiares de tensão do pulser e Timing SCA utilizados na sessão 3.

COINCIDÊNCIAS FORTUITAS

Iremos agora determinar a taxa de coincidências fortuitas. Para isso, coloca-se o detetor móvel na posição $\theta = 0$, de tal forma que certamente todas as coincidência contadas serão fortuitas. Para um tempo de aquisição $\Delta t_{aq} = 10\text{min} = 600\text{s}$, registaram-se as contagens e coincidências para diferentes resolving times τ . Os resultados apresentam-se na tabela 20.

| τ (ns) | C_A (Cts) | Erro (Cts) | C_C (Cts) | Erro (Cts) | C_B (Cts) | Erro (Cts) | R_A (Cts/s) | Erro (Cts/s) | R_C (Cts/min) | Erro (Cts/min) | R_B (Cts/s) | Erro (Cts/s) |
|----------------|--------------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|----------------|-----------------|------------------|-------------------|----------------|-----------------|
| 50 | 22709 | 151 | 5 | 2 | 22169 | 149 | 37.8 | 0.3 | 0.50 | 0.22 | 36.9 | 0.2 |
| 250 | 22431 | 150 | 9 | 3 | 22378 | 150 | 37.4 | 0.2 | 0.90 | 0.30 | 37.3 | 0.2 |
| 750 | 22564 | 150 | 8 | 3 | 22470 | 150 | 37.6 | 0.3 | 0.80 | 0.28 | 37.5 | 0.2 |
| 2500 | 22813 | 151 | 12 | 3 | 21935 | 148 | 38.0 | 0.3 | 1.20 | 0.35 | 36.6 | 0.2 |
| 5000 | 22860 | 151 | 18 | 4 | 21924 | 148 | 38.1 | 0.3 | 1.80 | 0.43 | 36.5 | 0.2 |
| 6250 | 22524 | 150 | 16 | 4 | 22458 | 150 | 37.5 | 0.3 | 1.60 | 0.40 | 37.4 | 0.2 |

Tabela 20. Contagens e coincidências para diferentes valores de τ .

Podemos agora utilizar os valores obtidos para R_A e R_B , para determinar o valor R_T que se segue do modelo teórico para as coincidências fortuitas:

$$R_T = a_T \tau; a_T = R_A R_B; \sigma_{a_T} = a_T \sqrt{\left(\frac{\sigma_{R_A}}{R_A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{R_B}}{R_B}\right)^2}; \sigma_{R_T} = \tau \sigma_{a_T}$$

Note-se que estas taxas R_A e R_B não são corrigidas para a radiação de fundo uma vez que esta também irá contribuir para as coincidências fortuitas. Na tabela 21 efetua-se a comparação entre os resultados experimentais e as previsões teóricas.

| τ (ns) | R_A (Cts/s) | Erro (Cts/s) | R_C (Cts/min) | Erro (Cts/min) | R_B (Cts/s) | Erro (Cts/s) | a_T (Cts/s.ms) | Erro (Cts/s.ms) | R_T (Cts/min) | Erro (Cts/min) | Desvi o (#) | Desvi o (%) |
|----------------|------------------|-----------------|--------------------|-------------------|------------------|-----------------|---------------------|--------------------|--------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 50 | 38 | 0 | 1 | 0 | 37 | 0 | 2.797 | 0.026 | 0.008 | 0.001 | 2.2 | 5859 |
| 250 | 37 | 0 | 1 | 0 | 37 | 0 | 2.789 | 0.026 | 0.042 | 0.001 | 2.9 | 2052 |
| 750 | 38 | 0 | 1 | 0 | 37 | 0 | 2.817 | 0.027 | 0.127 | 0.001 | 2.4 | 531 |
| 2500 | 38 | 0 | 1 | 0 | 37 | 0 | 2.780 | 0.026 | 0.417 | 0.004 | 2.3 | 188 |
| 5000 | 38 | 0 | 2 | 0 | 37 | 0 | 2.784 | 0.026 | 0.835 | 0.008 | 2.3 | 115 |
| 6250 | 38 | 0 | 2 | 0 | 37 | 0 | 2.810 | 0.027 | 1.054 | 0.010 | 1.4 | 52 |

Tabela 21. Comparação entre os resultados obtidos e as previsões teóricas.

Observamos que existe uma grande discrepância entre as previsões teóricas e os resultados obtidos. Na figura 15 representa-se R_C em função de τ e efetua-se um ajuste do tipo $R_C = a\tau + b$ pelo método dos mínimos quadrados aos dados obtidos e obtiveram-se os parâmetros de ajuste da tabela 22.

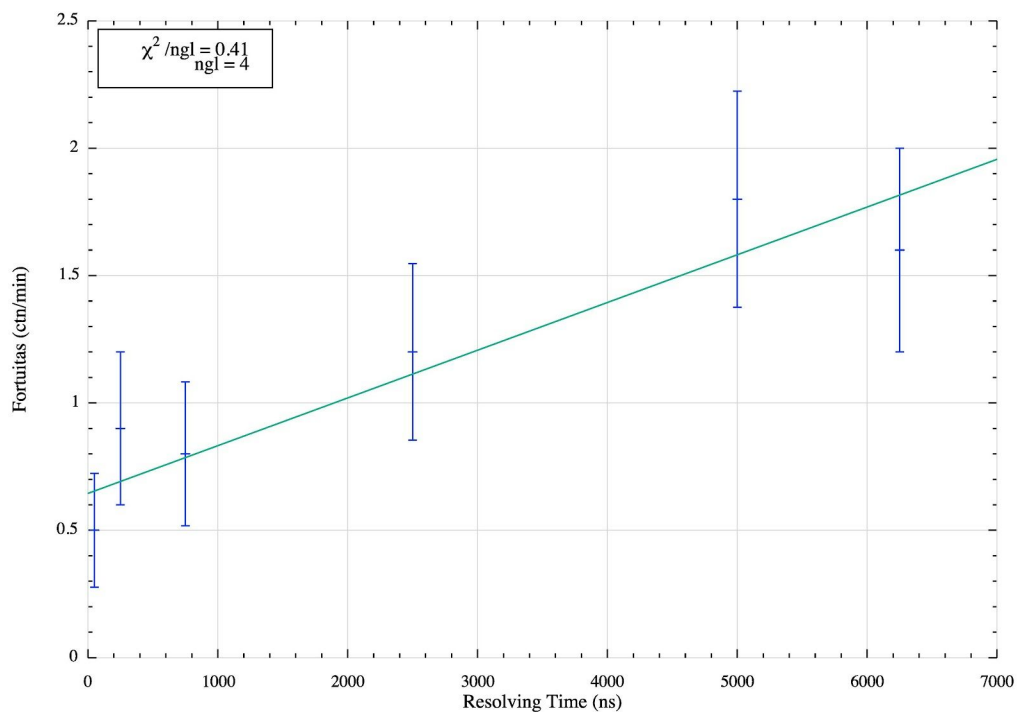


Figura 15. Ajuste linear à taxa de coincidências fortuitas R_C em função do tempo de resolução τ .

| | |
|--------------------------|-------------------|
| $a \text{ (Cts/(s.ms))}$ | 3.00 ± 0.57 |
| $b \text{ (Cts/s)}$ | 0.011 ± 0.002 |
| χ^2/n_{gl} | 0.414 |
| n_{gl} | 4 |

Tabela 22. Parâmetros do ajuste da figura 15.

Constata-se em primeiro lugar que o valor obtido para o declive a é muito semelhante aos valores a_T da tabela 21. Para quantificar esta semelhança, efetuem os a média entre eles:

| | |
|--------------------------|-------------------|
| $a \text{ (Cts/(s.ms))}$ | 3.00 ± 0.57 |
| $a_T \text{ (Cts/s)}$ | 2.796 ± 0.001 |
| Desvio ($\# \sigma$) | 0.36 |
| Desvio (%) | 7.3 |

Tabela 23. Comparação entre os valores do declive obtidos pelo ajuste e pela aplicação do modelo teórico para as coincidências fortuitas.

O valor obtido para o declive é portanto congruente com o que seria expectável para a taxa de contagens R_A e R_B . No entanto, a ordenada na origem b não é nula. Aliás, esta é significativa, justificando que os dados obtidos sejam superiores a R_T . Este valor afetará de forma mais significativa a contabilização de coincidências fortuitas para baixos τ , daí os desvios percentuais serem especialmente elevados nesses casos. Esta ordenada na origem, que na prática pode ser considerado um fundo residual de coincidências, decorrerá naturalmente de ruído associado à própria eletrónica.

Por fim, devemos realçar que o valor χ^2/n_{gl} muito inferior a 1 advém do do grande valor dos erros, cuja dimensão é facilmente observável no gráfico da figura 4, ou no facto de o desvio em unidades de σ da tabela 21 ser baixo mesmo quando o desvio percentual é extremamente elevado.

Para os tempo de resolução que foram utilizados ao longo das quatro sessões laboratoriais, obtém-se a partir do ajuste as seguintes taxas de coincidências fortuitas:

| | |
|---------------------|-----------------------|
| $\tau \text{ (ns)}$ | $R_F \text{ (Cts/s)}$ |
| 250 | 0.012 ± 0.002 |
| 1250 | 0.015 ± 0.002 |

Tabela 24. Taxa de coincidências fortuitas para os tempos de resolução utilizados.

Notamos que ao contrário da radiação de fundo, esta taxa de coincidências poderá ser sempre utilizada para corrigir a taxa de contagens do contador C visto ser independente da posição relativa entre os detetores e a fonte.

FONTE EM $(x, y = 0)$ E VARIAR POSIÇÃO DO DETETOR MÓVEL

Deslocando a fonte ao longo do eixo dos xx , equidistante dos dois detetores, registou-se na tabela 25 os resultados obtidos para diferentes posições θ do detetor móvel.

| x | θ (°) | C_A (Cts) | Erro (Cts) | C_C (Cts) | Erro (Cts) | C_B (Cts) | Erro (Cts) | R_A (Cts/s) | Erro (Cts/s) | R_C (Cts/s) | Erro (Cts/s) | R_B (Cts/s) | Erro (Cts/s) |
|-----|-----------------|--------------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|
| 0.5 | -35 | 2183 | 47 | 1 | 1 | 2376 | 49 | 25.9 | 1.3 | 0.00 | 0.02 | 29.0 | 1.3 |
| 0.5 | -30 | 2317 | 48 | 2 | 1 | 2476 | 50 | 28.2 | 1.3 | 0.02 | 0.02 | 30.7 | 1.3 |
| 0.5 | -25 | 2305 | 48 | 1 | 1 | 2420 | 49 | 28.0 | 1.3 | 0.00 | 0.02 | 29.8 | 1.3 |
| 0.5 | -20 | 2245 | 47 | 3 | 2 | 2391 | 49 | 27.0 | 1.3 | 0.04 | 0.03 | 29.3 | 1.3 |
| 0.5 | -15 | 2294 | 48 | 134 | 12 | 2274 | 48 | 27.8 | 1.3 | 2.22 | 0.19 | 27.3 | 1.3 |
| 0.5 | -10 | 2181 | 47 | 398 | 20 | 2399 | 49 | 25.9 | 1.3 | 6.62 | 0.33 | 29.4 | 1.3 |
| 0.5 | -5 | 2337 | 48 | 624 | 25 | 2368 | 49 | 28.5 | 1.3 | 10.39 | 0.42 | 28.9 | 1.3 |
| 0.5 | 0 | 2232 | 47 | 274 | 17 | 2306 | 48 | 26.8 | 1.3 | 4.55 | 0.28 | 27.9 | 1.3 |
| 0.5 | 5 | 2374 | 49 | 27 | 5 | 2331 | 48 | 29.1 | 1.3 | 0.44 | 0.09 | 28.3 | 1.3 |
| 0.5 | 10 | 2268 | 48 | 1 | 1 | 2329 | 48 | 27.4 | 1.3 | 0.00 | 0.02 | 28.3 | 1.3 |
| 0.5 | 15 | 2277 | 48 | 2 | 1 | 2208 | 47 | 27.5 | 1.3 | 0.02 | 0.02 | 26.2 | 1.3 |
| 0.5 | 20 | 2319 | 48 | 3 | 2 | 2205 | 47 | 28.2 | 1.3 | 0.04 | 0.03 | 26.2 | 1.3 |
| 1 | -35 | 2154 | 46 | 1 | 1 | 2502 | 50 | 25.5 | 1.3 | 0.00 | 0.02 | 31.1 | 1.3 |
| 1 | -30 | 2150 | 46 | 4 | 2 | 2355 | 49 | 25.4 | 1.3 | 0.05 | 0.03 | 28.7 | 1.3 |
| 1 | -25 | 2243 | 47 | 17 | 4 | 2443 | 49 | 26.9 | 1.3 | 0.27 | 0.07 | 30.2 | 1.3 |
| 1 | -20 | 2258 | 48 | 226 | 15 | 2383 | 49 | 27.2 | 1.3 | 3.75 | 0.25 | 29.2 | 1.3 |
| 1 | -15 | 2201 | 47 | 518 | 23 | 2350 | 48 | 26.2 | 1.3 | 8.62 | 0.38 | 28.6 | 1.3 |
| 1 | -10 | 2292 | 48 | 565 | 24 | 2348 | 48 | 27.8 | 1.3 | 9.40 | 0.40 | 28.6 | 1.3 |
| 1 | -5 | 2155 | 46 | 173 | 13 | 2208 | 47 | 25.5 | 1.3 | 2.87 | 0.22 | 26.2 | 1.3 |
| 1 | 0 | 2218 | 47 | 5 | 2 | 2195 | 47 | 26.5 | 1.3 | 0.07 | 0.04 | 26.0 | 1.3 |
| 1 | 5 | 2210 | 47 | 4 | 2 | 2160 | 46 | 26.4 | 1.3 | 0.05 | 0.03 | 25.4 | 1.3 |
| 1 | 10 | 2213 | 47 | 2 | 1 | 2084 | 46 | 26.4 | 1.3 | 0.02 | 0.02 | 24.2 | 1.3 |
| 1 | 15 | 2203 | 47 | 0 | 0 | 2066 | 45 | 26.3 | 1.3 | -0.01 | 0.00 | 23.9 | 1.3 |
| 1 | 20 | 2206 | 47 | 0 | 0 | 2061 | 45 | 26.3 | 1.3 | -0.01 | 0.00 | 23.8 | 1.3 |
| 1.5 | -35 | 2166 | 47 | 5 | 2 | 2790 | 53 | 25.7 | 1.3 | 0.07 | 0.04 | 35.9 | 1.4 |
| 1.5 | -30 | 2062 | 45 | 40 | 6 | 2638 | 51 | 23.9 | 1.3 | 0.65 | 0.11 | 33.4 | 1.3 |
| 1.5 | -25 | 2115 | 46 | 295 | 17 | 2611 | 51 | 24.8 | 1.3 | 4.90 | 0.29 | 33.0 | 1.3 |
| 1.5 | -20 | 2092 | 46 | 584 | 24 | 2466 | 50 | 24.4 | 1.3 | 9.72 | 0.40 | 30.5 | 1.3 |
| 1.5 | -15 | 2153 | 46 | 406 | 20 | 2368 | 49 | 25.4 | 1.3 | 6.75 | 0.34 | 28.9 | 1.3 |
| 1.5 | -10 | 2169 | 47 | 123 | 11 | 2356 | 49 | 25.7 | 1.3 | 2.04 | 0.18 | 28.7 | 1.3 |
| 1.5 | -5 | 2168 | 47 | 3 | 2 | 2196 | 47 | 25.7 | 1.3 | 0.04 | 0.03 | 26.0 | 1.3 |
| 1.5 | 0 | 2178 | 47 | 4 | 2 | 2251 | 47 | 25.9 | 1.3 | 0.05 | 0.03 | 27.0 | 1.3 |
| 1.5 | 5 | 2151 | 46 | 1 | 1 | 2180 | 47 | 25.4 | 1.3 | 0.00 | 0.02 | 25.8 | 1.3 |
| 1.5 | 10 | 2208 | 47 | 2 | 1 | 2081 | 46 | 26.4 | 1.3 | 0.02 | 0.02 | 24.1 | 1.3 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|------|-----|------|----|-----|----|------|----|------|-----|-------|------|------|-----|
| 1.5 | 15 | 2135 | 46 | 0 | 0 | 2136 | 46 | 25.1 | 1.3 | -0.01 | 0.00 | 25.0 | 1.3 |
| 1.5 | 20 | 2078 | 46 | 1 | 1 | 1953 | 44 | 24.2 | 1.3 | 0.00 | 0.02 | 22.0 | 1.3 |
| -0.5 | -35 | 2211 | 47 | 1 | 1 | 2123 | 46 | 26.4 | 1.3 | 0.00 | 0.02 | 24.8 | 1.3 |
| -0.5 | -30 | 2363 | 49 | 0 | 0 | 2163 | 47 | 28.9 | 1.3 | -0.01 | 0.00 | 25.5 | 1.3 |
| -0.5 | -25 | 2354 | 49 | 4 | 2 | 2257 | 48 | 28.8 | 1.3 | 0.05 | 0.03 | 27.1 | 1.3 |
| -0.5 | -20 | 2244 | 47 | 1 | 1 | 2259 | 48 | 27.0 | 1.3 | 0.00 | 0.02 | 27.1 | 1.3 |
| -0.5 | -15 | 2221 | 47 | 2 | 1 | 2183 | 47 | 26.6 | 1.3 | 0.02 | 0.02 | 25.8 | 1.3 |
| -0.5 | -10 | 2273 | 48 | 4 | 2 | 2260 | 48 | 27.4 | 1.3 | 0.05 | 0.03 | 27.1 | 1.3 |
| -0.5 | -5 | 2302 | 48 | 17 | 4 | 2260 | 48 | 27.9 | 1.3 | 0.27 | 0.07 | 27.1 | 1.3 |
| -0.5 | 0 | 2221 | 47 | 291 | 17 | 2297 | 48 | 26.6 | 1.3 | 4.84 | 0.28 | 27.7 | 1.3 |
| -0.5 | 5 | 2309 | 48 | 610 | 25 | 2372 | 49 | 28.0 | 1.3 | 10.15 | 0.41 | 29.0 | 1.3 |
| -0.5 | 10 | 2175 | 47 | 418 | 20 | 2368 | 49 | 25.8 | 1.3 | 6.95 | 0.34 | 28.9 | 1.3 |
| -0.5 | 15 | 2320 | 48 | 131 | 11 | 2439 | 49 | 28.2 | 1.3 | 2.17 | 0.19 | 30.1 | 1.3 |
| -0.5 | 20 | 2233 | 47 | 3 | 2 | 2279 | 48 | 26.8 | 1.3 | 0.04 | 0.03 | 27.4 | 1.3 |
| -0.5 | 25 | 2278 | 48 | 1 | 1 | 2310 | 48 | 27.5 | 1.3 | 0.00 | 0.02 | 27.9 | 1.3 |
| -0.5 | 30 | 2292 | 48 | 0 | 0 | 2403 | 49 | 27.8 | 1.3 | -0.01 | 0.00 | 29.5 | 1.3 |
| -0.5 | 35 | 2208 | 47 | 0 | 0 | 2401 | 49 | 26.4 | 1.3 | -0.01 | 0.00 | 29.5 | 1.3 |
| -1 | -35 | 2297 | 48 | 1 | 1 | 2003 | 45 | 27.8 | 1.3 | 0.00 | 0.02 | 22.8 | 1.3 |
| -1 | -30 | 2218 | 47 | 1 | 1 | 2033 | 45 | 26.5 | 1.3 | 0.00 | 0.02 | 23.3 | 1.3 |
| -1 | -25 | 2268 | 48 | 0 | 0 | 2020 | 45 | 27.4 | 1.3 | -0.01 | 0.00 | 23.1 | 1.3 |
| -1 | -20 | 2192 | 47 | 1 | 1 | 2072 | 46 | 26.1 | 1.3 | 0.00 | 0.02 | 24.0 | 1.3 |
| -1 | -15 | 2277 | 48 | 1 | 1 | 2163 | 47 | 27.5 | 1.3 | 0.00 | 0.02 | 25.5 | 1.3 |
| -1 | -10 | 2339 | 48 | 2 | 1 | 2217 | 47 | 28.5 | 1.3 | 0.02 | 0.02 | 26.4 | 1.3 |
| -1 | -5 | 2253 | 47 | 3 | 2 | 2205 | 47 | 27.1 | 1.3 | 0.04 | 0.03 | 26.2 | 1.3 |
| -1 | 0 | 2188 | 47 | 7 | 3 | 2275 | 48 | 26.0 | 1.3 | 0.10 | 0.04 | 27.4 | 1.3 |
| -1 | 5 | 2259 | 48 | 182 | 13 | 2288 | 48 | 27.2 | 1.3 | 3.02 | 0.22 | 27.6 | 1.3 |
| -1 | 10 | 2337 | 48 | 570 | 24 | 2397 | 49 | 28.5 | 1.3 | 9.49 | 0.40 | 29.4 | 1.3 |
| -1 | 15 | 2262 | 48 | 543 | 23 | 2325 | 48 | 27.3 | 1.3 | 9.04 | 0.39 | 28.2 | 1.3 |
| -1 | 20 | 2194 | 47 | 210 | 14 | 2441 | 49 | 26.1 | 1.3 | 3.49 | 0.24 | 30.1 | 1.3 |
| -1 | 25 | 2213 | 47 | 12 | 3 | 2424 | 49 | 26.4 | 1.3 | 0.19 | 0.06 | 29.8 | 1.3 |
| -1 | 30 | 2206 | 47 | 2 | 1 | 2513 | 50 | 26.3 | 1.3 | 0.02 | 0.02 | 31.3 | 1.3 |
| -1 | 35 | 2263 | 48 | 8 | 3 | 2533 | 50 | 27.3 | 1.3 | 0.12 | 0.05 | 31.7 | 1.3 |
| -1.5 | -15 | 2127 | 46 | 0 | 0 | 2081 | 46 | 25.0 | 1.3 | -0.01 | 0.00 | 24.1 | 1.3 |
| -1.5 | -10 | 2219 | 47 | 0 | 0 | 2173 | 47 | 26.5 | 1.3 | -0.01 | 0.00 | 25.7 | 1.3 |
| -1.5 | -5 | 2271 | 48 | 4 | 2 | 2102 | 46 | 27.4 | 1.3 | 0.05 | 0.03 | 24.5 | 1.3 |
| -1.5 | 0 | 2180 | 47 | 1 | 1 | 2268 | 48 | 25.9 | 1.3 | 0.00 | 0.02 | 27.2 | 1.3 |
| -1.5 | 5 | 2195 | 47 | 3 | 2 | 2376 | 49 | 26.1 | 1.3 | 0.04 | 0.03 | 29.0 | 1.3 |
| -1.5 | 10 | 2189 | 47 | 126 | 11 | 2373 | 49 | 26.0 | 1.3 | 2.09 | 0.19 | 29.0 | 1.3 |
| -1.5 | 15 | 2267 | 48 | 970 | 31 | 2365 | 49 | 27.3 | 1.3 | 16.15 | 0.52 | 28.9 | 1.3 |
| -1.5 | 20 | 2222 | 47 | 571 | 24 | 2415 | 49 | 26.6 | 1.3 | 9.50 | 0.40 | 29.7 | 1.3 |
| -1.5 | 25 | 2248 | 47 | 305 | 17 | 2631 | 51 | 27.0 | 1.3 | 5.07 | 0.29 | 33.3 | 1.3 |
| -1.5 | 30 | 2297 | 48 | 34 | 6 | 2698 | 52 | 27.8 | 1.3 | 0.55 | 0.10 | 34.4 | 1.3 |
| -1.5 | 35 | 2275 | 48 | 4 | 2 | 2688 | 52 | 27.5 | 1.3 | 0.05 | 0.03 | 34.2 | 1.3 |

Tabela 25. Valores obtidos com a fonte em $(x,y = 0)$ para várias posições do detetor móvel.

$$(\Delta t_{aq} = 60s)$$

A taxa de coincidências e as taxas de contagens encontram-se corrigidas para as coincidências fortuitas e para a radiação de fundo, respetivamente. Na figura 16 representa-se graficamente cada um dos conjuntos de valores de R_C para os diferentes valores de x como função de θ .

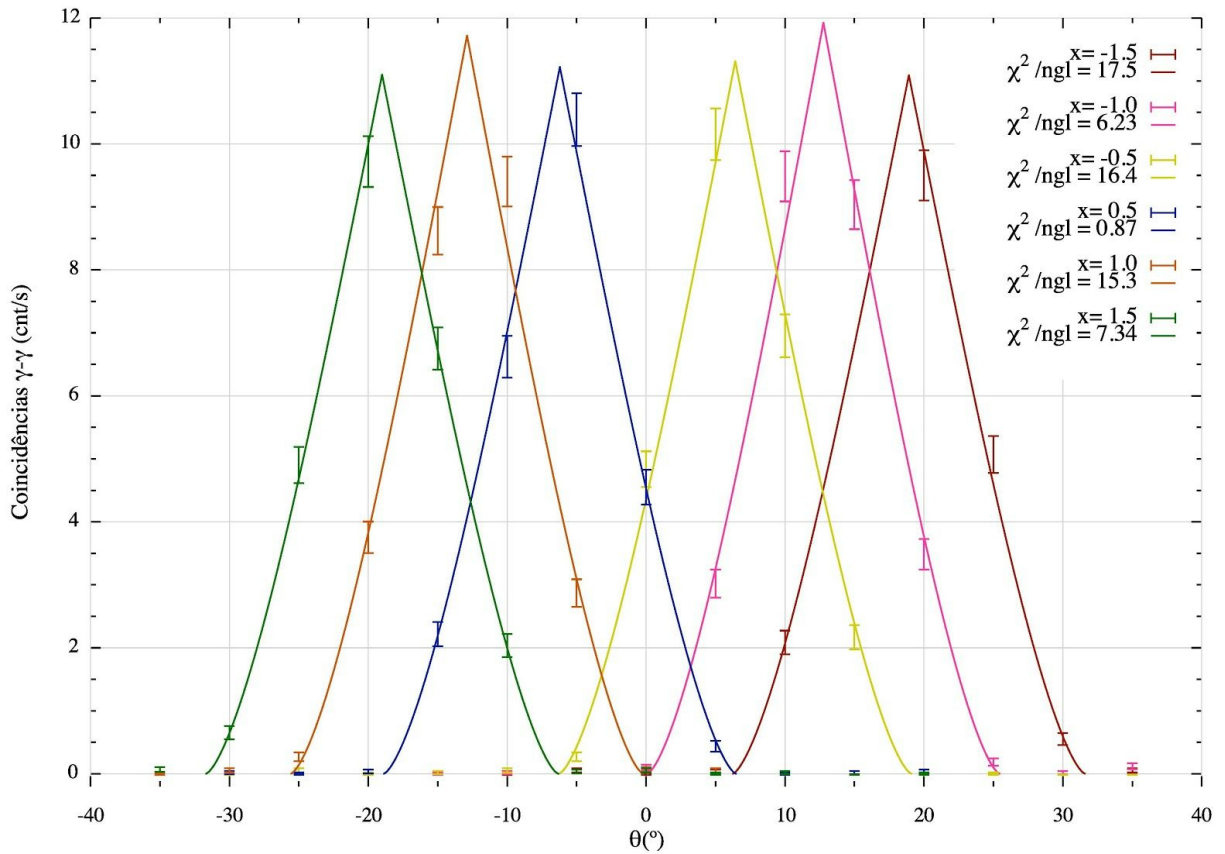


Figura 16. Representação da taxa de coincidências R_C como função da rotação do detetor móvel θ , para diferentes valores de x , e respetivos ajustes da equação (6).

Pretende-se adaptar o modelo que já foi apresentado a esta nova situação. Como a fonte está aproximadamente equidistante dos dois detetores, temos que $A_1 = A_2 = A$. Temos então, tal como anteriormente, de determinar a área da interseção $A(R_1, R_2, d)$ de dois círculos de raio R_1 e R_2 cujos centros estão distanciados de d . A determinação destes três valores apresenta-se na figura 17. Visto que o disco onde a fonte se encontra roda juntamente com o detetor móvel, projecta-se propositadamente no esquema o desvio em θ no detetor fixo por forma a ser mais simples analisar a geometria do problema.

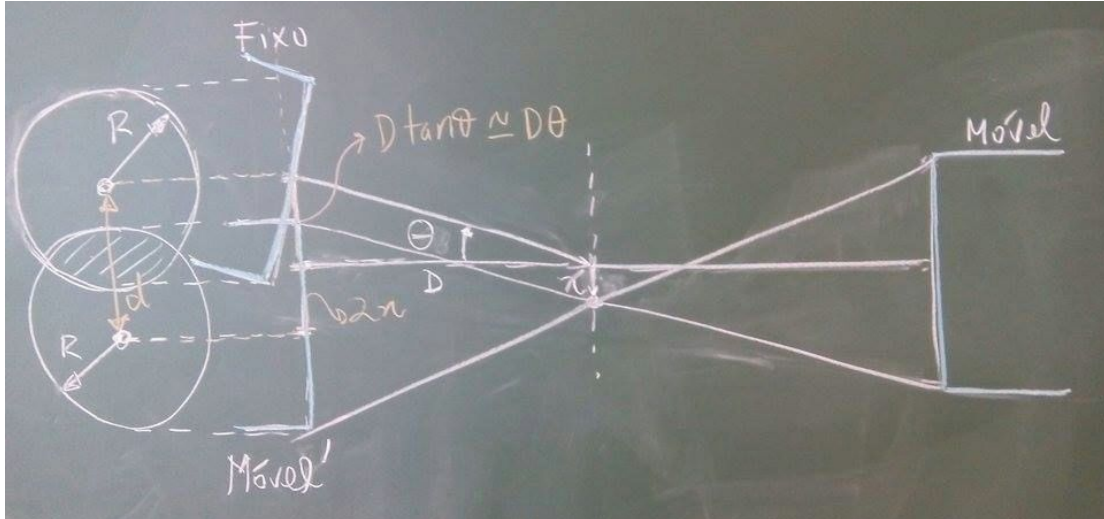


Figura 17. Esquema para a determinação da equação (6).

Concluimos então que $R_1 \approx R_2 \approx R$ e que $d \approx |D\theta + 2x|$. Logo, aplicando a fórmula para a área da interseção de dois círculos de raios iguais, temos que:

$$R_C(\theta, x) = A \left[2R^2 \arccos\left(\frac{|D\theta + 2x|}{2R} \times \frac{\pi}{180^\circ}\right) - \frac{|D\theta + 2x|}{2} \times \frac{\pi}{180^\circ} \sqrt{4R^2 - \left((D\theta + 2x) \times \frac{\pi}{180^\circ}\right)^2} \right] \quad (6)$$

Os parâmetros do ajuste da equação (6) a cada um dos conjuntos de pontos da figura 16 apresentam-se na tabela 26. Note-se que o valor de x também foi deixado como parâmetro livre.

| | $x = -1.5in$ | $x = -1.0in$ | $x = -0.5in$ | $x = 0.5in$ | $x = 1.0in$ | $x = 1.5in$ |
|--|------------------|------------------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $A \text{ (Cts s}^{-1}\text{m}^{-2}\text{)}$ | 3.45 ± 0.50 | 3.71 ± 0.25 | 3.52 ± 0.38 | 3.49 ± 0.09 | 3.65 ± 0.37 | 3.46 ± 0.25 |
| $x_e \text{ (in)}$ | -1.51 ± 0.04 | -1.02 ± 0.02 | -0.51 ± 0.03 | 0.49 ± 0.01 | 1.03 ± 0.04 | 1.51 ± 0.03 |
| χ^2/ngl | 17.5 | 6.23 | 16.4 | 0.87 | 15.3 | 7.34 |

Tabela 26. Parâmetros do ajuste da figura 16.

Observa-se em primeiro lugar que os valores de χ^2/ngl são particularmente elevados, devido ao facto de haver muitos pontos aos quais ajustar a expressão.

De seguida, constata-se que a amplitude se mantém constante, o que indica que o máximo da taxa de coincidências não varia significativamente com a deslocação da fonte segundo x . Tal é lógico visto que na posição máxima, na qual os dois detetores e a fonte estão alinhados, esta se encontra a uma distância que varia muito pouco em relação a D , que é a distância para $x = 0$.

Por último, o parâmetro livre x_e é congruente dentro do erro com o valor de x onde colocámos a fonte. No entanto, no início da primeira sessão (figura 4), tínhamos observado

que existia uma assimetria na nossa montagem. Relembramos que a expressão de ajuste era semelhante, mas a distância entre os centros dos círculos a interseção era dada por

$$d = D|\theta - \Delta\theta| = |D\theta - \Delta x|,$$

onde se obteve $\Delta x = (0.232 \pm 0.047) \text{ cm} = (0.091 \pm 0.019) \text{ in}$. Desta vez, se quisermos incluir este desvio $\Delta\theta$, obtemos

$$d = |D(\theta - \Delta\theta) + 2x| = |D\theta - \Delta x + 2x| = |D\theta + 2(x - \Delta x/2)|.$$

Ou seja, os parâmetros de ajuste x_e correspondem a $x - \Delta x/2$. A correção a x seria então da ordem de $\Delta x/2 \sim 0.045 \text{ in}$, o que é da ordem de grandeza do erro de x_e . É portanto natural que esta simetria que foi detetada no caso da sessão 1 para $x = 0$ aqui não seja detetada.

Vamos agora tentar analisar se é lógico o valor de θ para o qual a taxa de coincidências é máxima. Para tal, supomos que este máximo se dá quando a fonte e os detetores estão alinhados, tal como se representa no esquema da figura 18. Desse esquema conclui-se que o maximizante $\theta_{\text{máx}}$ será a solução da equação

$$\frac{D}{x} = \frac{1 + \cos(\theta_{\text{máx}})}{-\sin(\theta_{\text{máx}})} \quad (7)$$

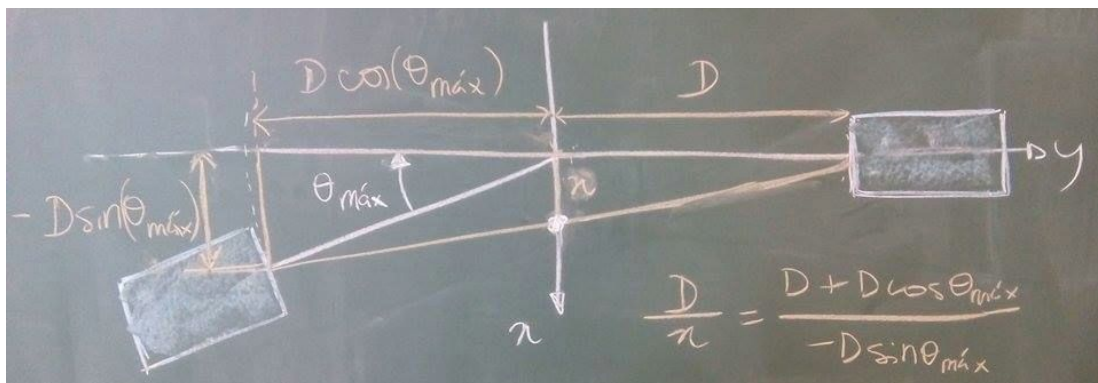


Figura 18. Esquema para a equação (7)

Na tabela 27 apresenta-se os valores de $\theta_{\text{máx}}$ para cada x , bem como a média, desvio padrão e skewness da distribuição referente a cada x . O desvio que se apresenta igualmente refere-se à comparação entre os valores obtidos para $\theta_{\text{máx}}$ e para a média.

| $x \text{ (in)}$ | $\theta_{\text{máx}} (^{\circ})$ | $\mu (^{\circ})$ | $\sigma (^{\circ})$ | $\gamma_1 ((^{\circ})^3)$ | Desvio (%) |
|------------------|----------------------------------|-------------------|---------------------|---------------------------|------------|
| -1.5 | 18.68 | 17.88 ± 0.10 | 4.46 ± 0.60 | 0.06 ± 0.01 | -4.3 |
| -1.0 | 12.51 | 12.72 ± 0.14 | 4.87 ± 0.50 | 1.21 ± 0.60 | 1.7 |
| -0.5 | 6.28 | 6.10 ± 0.14 | 4.73 ± 0.30 | 1.24 ± 0.36 | -2.9 |
| 0.5 | -6.28 | -6.15 ± 0.13 | 4.82 ± 0.30 | 0.06 ± 0.29 | 2.1 |
| 1.0 | -12.51 | -12.81 ± 0.13 | 4.69 ± 0.50 | -0.33 ± 1.05 | -2.4 |
| 1.5 | -18.68 | -19.02 ± 0.14 | 4.91 ± 0.70 | 0.08 ± 0.43 | -1.8 |

Tabela 27. Média, Desvio padrão e Skewness das distribuições da figura 16 e comparação da média com o valor esperado teoricamente $\theta_{\text{máx}}$.

Concluimos então que:

- A posição do máximo é sempre próxima do valor esperado. De facto, os desvios são sempre inferiores a 5% e não exibem uma tendência de sinal.
- O valor do desvio padrão é aproximadamente constante. Tal é lógico - as curvas correspondem a translações da original mas preservam a sua forma.
- A skewness é baixa, em módulo inferior à unidade, não indicando a existência de assimetrias na distribuição.

VARIAR A POSIÇÃO DA FONTE FRACA (r, ϕ), COM O DETETOR MÓVEL EM $\theta=0$

Nesta secção, utiliza-se uma fonte de Sódio-22 mais fraca, de menor atividade radioativa, e registam-se as contagens correspondentes a diferentes valores de ϕ para $r = 1$. Os resultados apresentam-se na tabela 28.

Note-se que as taxas R_A e R_B não estão corrigidas para a radiação de fundo visto que estamos a utilizar uma fonte diferente daquela que foi utilizada para calcular a taxa de fundo. A taxa R_C por outro lado está corrigida para as coincidências fortuitas visto que estas são independentes da fonte utilizada.

No gráfico da figura 19 representam-se os valores das taxas coincidências da tabela 28 como função de ϕ , bem como o ajuste da expressão (5), cujos parâmetros se encontram na tabela 29. Este ajuste foi feito da mesma forma que anteriormente, isto é, manualmente pelo método dos mínimos quadrados, dada a complexidade da fórmula.

| Φ (°) | C_A (Cts) | Erro (Cts) | C_C (Cts) | Erro (Cts) | C_B (Cts) | Erro (Cts) | R_A (Cts/s) | Erro (Cts/s) | R_C (Cts/s) | Erro (Cts/s) | R_B (Cts/s) | Erro (Cts/s) |
|------------|--------------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|
| 0 | 1331 | 36 | 0 | 0 | 1215 | 35 | 11.1 | 1.1 | -0.01 | 0.01 | 10.1 | 1.1 |
| 10 | 1267 | 36 | 1 | 1 | 1362 | 37 | 10.6 | 1.1 | -0.01 | 0.01 | 11.4 | 1.1 |
| 20 | 1214 | 35 | 1 | 1 | 1342 | 37 | 10.1 | 1.1 | -0.01 | 0.01 | 11.2 | 1.1 |
| 30 | 1232 | 35 | 3 | 2 | 1400 | 37 | 10.3 | 1.1 | 0.01 | 0.01 | 11.7 | 1.1 |
| 40 | 1237 | 35 | 14 | 4 | 1375 | 37 | 10.3 | 1.1 | 0.10 | 0.03 | 11.5 | 1.1 |
| 50 | 1122 | 33 | 40 | 6 | 1316 | 36 | 9.4 | 1.1 | 0.32 | 0.05 | 11.0 | 1.1 |
| 60 | 1152 | 34 | 73 | 9 | 1451 | 38 | 9.6 | 1.1 | 0.59 | 0.07 | 12.1 | 1.1 |
| 70 | 1193 | 35 | 127 | 11 | 1471 | 38 | 9.9 | 1.1 | 1.04 | 0.09 | 12.3 | 1.1 |
| 80 | 1167 | 34 | 163 | 13 | 1511 | 39 | 9.7 | 1.1 | 1.34 | 0.11 | 12.6 | 1.1 |
| 90 | 1171 | 34 | 211 | 15 | 1548 | 39 | 9.8 | 1.1 | 1.74 | 0.12 | 12.9 | 1.1 |
| 100 | 1172 | 34 | 217 | 15 | 1536 | 39 | 9.8 | 1.1 | 1.79 | 0.12 | 12.8 | 1.1 |
| 110 | 1114 | 33 | 140 | 12 | 1461 | 38 | 9.3 | 1.1 | 1.15 | 0.10 | 12.2 | 1.1 |
| 120 | 1121 | 33 | 109 | 10 | 1521 | 39 | 9.3 | 1.1 | 0.89 | 0.09 | 12.7 | 1.1 |
| 130 | 1222 | 35 | 73 | 9 | 1386 | 37 | 10.2 | 1.1 | 0.59 | 0.07 | 11.6 | 1.1 |
| 140 | 1155 | 34 | 22 | 5 | 1395 | 37 | 9.6 | 1.1 | 0.17 | 0.04 | 11.6 | 1.1 |
| 150 | 1182 | 34 | 5 | 2 | 1422 | 38 | 9.9 | 1.1 | 0.03 | 0.01 | 11.9 | 1.1 |
| 160 | 1302 | 36 | 3 | 2 | 1361 | 37 | 10.9 | 1.1 | 0.01 | 0.01 | 11.3 | 1.1 |
| 170 | 1262 | 36 | 3 | 2 | 1323 | 36 | 10.5 | 1.1 | 0.01 | 0.01 | 11.0 | 1.1 |
| 180 | 1254 | 35 | 4 | 2 | 1266 | 36 | 10.5 | 1.1 | 0.02 | 0.01 | 10.6 | 1.1 |
| 190 | 1267 | 36 | 1 | 1 | 1185 | 34 | 10.6 | 1.1 | -0.01 | 0.01 | 9.9 | 1.1 |
| 200 | 1345 | 37 | 1 | 1 | 1215 | 35 | 11.2 | 1.1 | -0.01 | 0.01 | 10.1 | 1.1 |
| 210 | 1324 | 36 | 0 | 0 | 1123 | 34 | 11.0 | 1.1 | -0.01 | 0.01 | 9.4 | 1.1 |
| 220 | 1437 | 38 | 12 | 3 | 1179 | 34 | 12.0 | 1.1 | 0.09 | 0.02 | 9.8 | 1.1 |
| 230 | 1483 | 39 | 29 | 5 | 1110 | 33 | 12.4 | 1.1 | 0.23 | 0.04 | 9.3 | 1.1 |
| 240 | 1463 | 38 | 82 | 9 | 1254 | 35 | 12.2 | 1.1 | 0.67 | 0.07 | 10.5 | 1.1 |
| 250 | 1508 | 39 | 112 | 11 | 1102 | 33 | 12.6 | 1.1 | 0.92 | 0.09 | 9.2 | 1.1 |
| 260 | 1543 | 39 | 168 | 13 | 1126 | 34 | 12.9 | 1.1 | 1.39 | 0.11 | 9.4 | 1.1 |
| 270 | 1519 | 39 | 213 | 15 | 1134 | 34 | 12.7 | 1.1 | 1.76 | 0.12 | 9.5 | 1.1 |
| 280 | 1508 | 39 | 190 | 14 | 1180 | 34 | 12.6 | 1.1 | 1.57 | 0.11 | 9.8 | 1.1 |
| 290 | 1504 | 39 | 140 | 12 | 1092 | 33 | 12.5 | 1.1 | 1.15 | 0.10 | 9.1 | 1.1 |
| 300 | 1521 | 39 | 78 | 9 | 1100 | 33 | 12.7 | 1.1 | 0.64 | 0.07 | 9.2 | 1.1 |
| 310 | 1485 | 39 | 58 | 8 | 1190 | 34 | 12.4 | 1.1 | 0.47 | 0.06 | 9.9 | 1.1 |
| 320 | 1399 | 37 | 25 | 5 | 1178 | 34 | 11.7 | 1.1 | 0.19 | 0.04 | 9.8 | 1.1 |
| 330 | 1340 | 37 | 6 | 2 | 1151 | 34 | 11.2 | 1.1 | 0.04 | 0.01 | 9.6 | 1.1 |
| 340 | 1417 | 38 | 1 | 1 | 1194 | 35 | 11.8 | 1.1 | -0.01 | 0.01 | 10.0 | 1.1 |
| 350 | 1313 | 36 | 1 | 1 | 1258 | 35 | 10.9 | 1.1 | -0.01 | 0.01 | 10.5 | 1.1 |

Tabela 28. Valores obtidos com a fonte fraca, para várias posições de ϕ com $r = 1$ e $\theta = 0$.
 $(\Delta t_{aq} = 120s)$

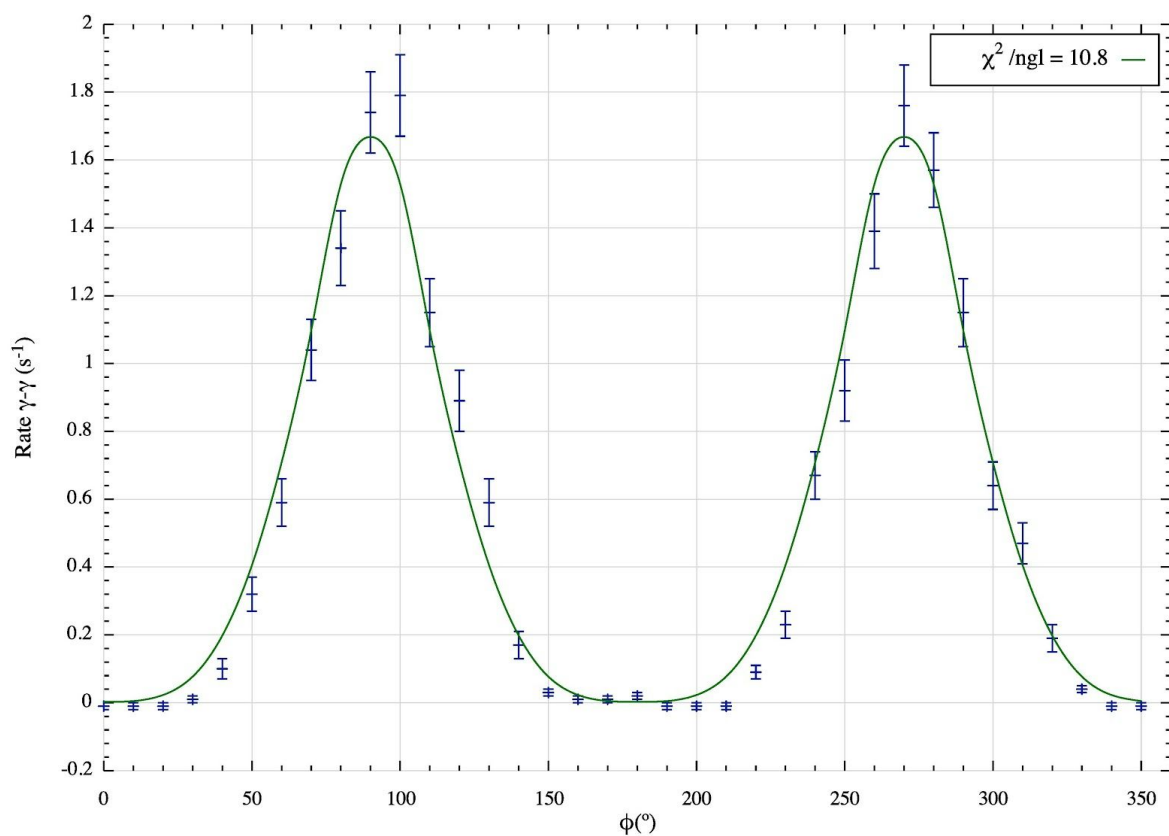


Figura 19. Representação gráfica da taxa de coincidências da fonte fraca em função de ϕ , para $r = 1$, e respetivo ajuste pelo método dos mínimos quadrados da expressão (5).

| | |
|---------------------------------|-------|
| $A \text{ (Cts s}^{-1}\text{)}$ | 26.6 |
| χ^2/ngl | 10,82 |

Tabela 29. Parâmetro do ajuste da figura 19.

Em primeiro lugar, verificamos que como seria de esperar o valor aqui obtido para a amplitude é bastante inferior ao obtido anteriormente (152.98 Cts/s), indiciando a menor atividade radioativa da fonte fraca. Ainda assim, devemos notar que o valor de χ^2/ngl é relativamente elevado o que corresponde a um mau ajuste.

Sessão 4 - 31/03/2016

MONTAGEM

Repetiu-se novamente o procedimento da sessão 1, tendo-se colocado um resolving time de $250ns$. Obtiveram-se os seguintes parâmetros para o pico de $511keV$ e para os valores dos limiares de tensão do Pulser e das Timing SCA.

Tempo de aquisição: $\Delta t_{aq} = 130s$ (igual para ambos os picos)

| Pico | Área Total (Cts) | Área do Sinal (Cts) | Centróide - C (Can) | FWHM (Can) | Sigma - σ (Can) |
|---|------------------|---------------------|---------------------|------------|------------------------|
| 511keV - Detetor Móvel Canais: [242;288] | 4379±66 | 2906±126 | 266.13 | 21,10 | 8.96 |
| 511keV - Detetor Fixo Canais: [240;286] | 3801±62 | 2469±119 | 264.53 | 24.61 | 10.44 |

Tabela 30. Dados referentes aos espectros observados na sessão 4.

| | Limite Inferior (V) | | Limite Superior (V) | |
|---------------|---------------------|------------|---------------------|------------|
| | Pulser | Timing SCA | Pulser | Timing SCA |
| Detetor Móvel | 2.52±0.01 | 2.11±0.01 | 3.12±0.01 | 2.51±0.01 |
| Detetor Fixo | 2.47±0.01 | 2.05±0.01 | 3.09±0.01 | 2.53±0.01 |

Tabela 31. Valores dos limiares de tensão do pulser e Timing SCA utilizados na sessão 4.

OBTENÇÃO DE UM SINOGRAMA PET

Nesta última sessão pretende-se obter um sinograma PET correspondente às coincidências $\gamma\gamma$ originadas pelas duas fontes de Sódio-22 (a forte e a fraca) colocadas simultaneamente no porta alvos, em posições distintas.

Colocámos a fonte fraca na posição $(x,y) = (-1,0)$ e a fonte forte em $(x,y) = (0,1.5)$. Assim, garantimos um espaçamento de 90° em ϕ , e de $0.5in$ em r , por forma a conseguir diferenciar no sinograma a contribuição de cada uma das fontes.

Devido à extensão dos resultados obtidos, apresenta-se na tabela 32 apenas a matriz utilizada para fazer o sinograma, cuja entrada (ϕ, θ) corresponde à taxa de coincidências com o detetor móvel na posição θ e o porta alvos rodado de ϕ .

Na figura 20 representa-se graficamente o sinograma e a imagem tumográfica, fornecidos pelo docente após utilizar o software MATLAB para aplicar a *Inverse Radon Transform* aos dados da matriz da tabela 32.

| | | θ (°) | | | | | | | | | | | | |
|------------|--------|--------------|--------|--------|--------|--------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | -30,00 | -25,00 | -20,00 | -15,00 | -10,00 | -5,00 | 0,00 | 5,00 | 10,00 | 15,00 | 20,00 | 25,00 | 30,00 |
| Φ (°) | 0,00 | -0,01 | 0,05 | 0,02 | 0,09 | 0,55 | 1,29 | 1,42 | 2,84 | 7,04 | 7,09 | 2,69 | 0,12 | -0,01 |
| | 15,00 | -0,01 | -0,01 | 0,02 | 0,09 | 0,05 | 0,32 | 0,99 | 3,94 | 7,89 | 7,84 | 1,64 | 0,15 | 0,05 |
| | 30,00 | -0,01 | -0,01 | 0,02 | -0,01 | -0,01 | 0,09 | 0,39 | 3,94 | 8,69 | 5,29 | 1,19 | 0,05 | 0,09 |
| | 45,00 | 0,02 | -0,01 | -0,01 | 0,12 | 0,02 | 0,12 | 1,39 | 5,59 | 8,39 | 4,49 | 1,14 | 0,49 | 0,05 |
| | 60,00 | 0,05 | -0,01 | -0,01 | -0,01 | 0,02 | 0,19 | 2,95 | 6,94 | 5,84 | 2,69 | 2,09 | 0,82 | 0,19 |
| | 75,00 | -0,01 | -0,01 | 0,12 | 0,02 | 0,02 | 0,99 | 6,69 | 7,49 | 2,19 | 1,19 | 1,54 | 0,85 | 0,12 |
| | 90,00 | -0,01 | -0,01 | 0,02 | -0,01 | 0,15 | 3,09 | 8,45 | 5,14 | 0,89 | 0,59 | 1,34 | 0,85 | 0,19 |
| | 105,00 | 0,02 | -0,01 | 0,05 | 0,05 | 2,25 | 8,02 | 6,35 | 1,89 | 0,39 | 1,24 | 1,04 | 0,62 | 0,05 |
| | 120,00 | -0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,45 | 5,02 | 7,05 | 4,15 | 0,59 | 0,69 | 1,39 | 0,59 | 0,15 | -0,01 |
| | 135,00 | 0,02 | 0,02 | 0,09 | 2,49 | 7,52 | 6,19 | 1,92 | 0,54 | 1,24 | 0,74 | 0,54 | 0,02 | -0,01 |
| | 150,00 | -0,01 | 0,09 | 0,32 | 4,52 | 8,69 | 4,72 | 0,55 | 1,24 | 1,19 | 0,69 | 0,04 | -0,01 | 0,02 |
| | 165,00 | 0,05 | 0,02 | 1,59 | 4,92 | 8,29 | 2,29 | 1,22 | 1,14 | 0,59 | -0,01 | 0,04 | 0,09 | 0,02 |
| | 180,00 | 0,02 | 0,05 | 2,92 | 7,55 | 7,69 | 3,29 | 1,02 | 0,44 | 0,09 | -0,01 | -0,01 | -0,01 | -0,01 |
| | 195,00 | 0,12 | 0,25 | 2,89 | 7,59 | 7,02 | 3,32 | 1,15 | 0,14 | 0,04 | -0,01 | -0,01 | 0,02 | -0,01 |
| | 210,00 | 0,02 | 0,12 | 2,75 | 5,19 | 7,32 | 4,99 | 0,52 | 0,04 | -0,01 | 0,09 | -0,01 | -0,01 | -0,01 |
| | 225,00 | 0,09 | 0,12 | 1,35 | 5,55 | 8,32 | 4,92 | 1,62 | -0,01 | -0,01 | 0,14 | 0,04 | -0,01 | -0,01 |
| | 240,00 | 0,12 | 0,09 | 1,15 | 4,45 | 8,65 | 6,82 | 3,59 | 0,34 | 0,09 | 0,04 | 0,04 | 0,05 | 0,02 |
| | 255,00 | -0,01 | 0,39 | 1,29 | 2,25 | 5,05 | 7,25 | 6,05 | 2,59 | 0,24 | -0,01 | 0,04 | 0,09 | 0,05 |
| | 270,00 | 0,12 | 0,69 | 2,02 | 1,05 | 2,25 | 5,72 | 8,49 | 8,54 | 1,59 | 0,14 | -0,01 | 0,02 | -0,01 |
| | 285,00 | 0,29 | 0,62 | 1,02 | 1,15 | 0,49 | 2,79 | 6,95 | 8,54 | 4,99 | 0,54 | 0,14 | 0,09 | 0,12 |
| | 300,00 | 0,12 | 0,45 | 1,49 | 1,09 | 0,72 | 0,99 | 3,69 | 7,29 | 7,64 | 2,79 | 0,24 | 0,02 | -0,01 |
| | 315,00 | -0,01 | 0,52 | 1,02 | 1,52 | 1,12 | 0,42 | 1,55 | 6,04 | 8,69 | 4,94 | 1,44 | 0,09 | 0,05 |
| | 330,00 | -0,01 | 0,09 | 0,72 | 1,09 | 1,52 | 0,82 | 1,05 | 3,54 | 7,64 | 6,09 | 2,39 | 0,15 | 0,15 |
| | 345,00 | 0,02 | 0,02 | -0,01 | 0,49 | 0,92 | 1,65 | 0,95 | 3,24 | 7,09 | 7,79 | 2,94 | 0,12 | 0,05 |

Tabela 32. Valores da taxas de coincidências para diferentes θ e ϕ .

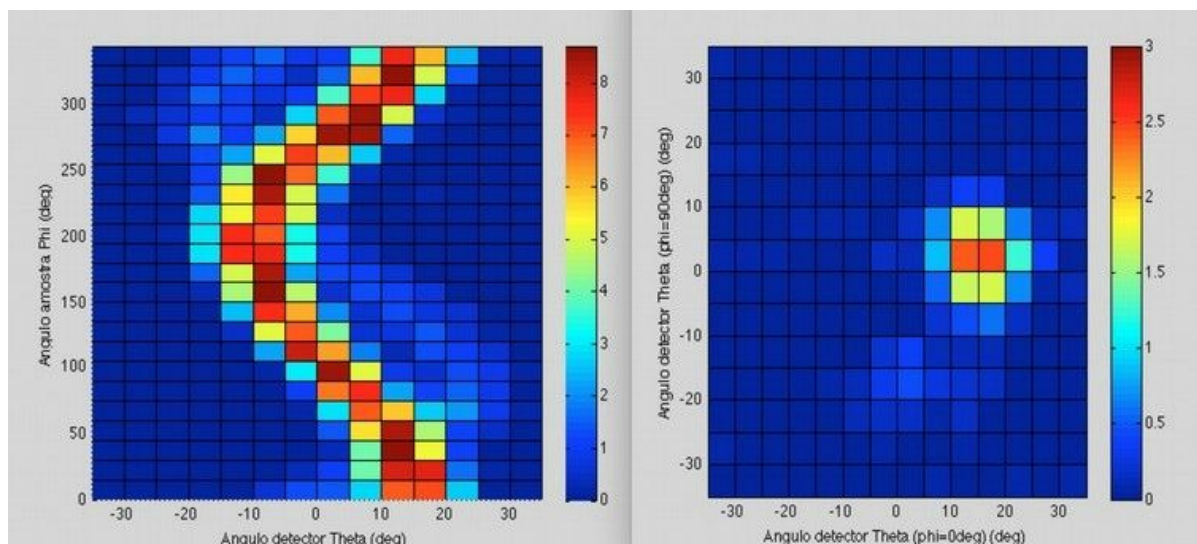


Figura 20. Sinograma (à esquerda) e imagem tumográfica (à direita) referente à matriz da tabela 32.

Identifica-se claramente no sinograma um andamento em tons de vermelho correspondente à fonte forte, e outro andamento em tons de azul claro correspondentes à fonte fraca. Estes estão desfazados de 90° , o que corresponde ao desfazamento em ϕ das duas fontes. Para além disso, a amplitude em θ do andamento correspondente à fonte forte é inferior à do correspondente à fonte fria, o que advém do facto de $r = 1$ para a fonte forte e $r = 1.5$ para a fonte fraca.

Na imagem tumográfica, é simples de reconhecer a fonte forte e a fonte fraca. No entanto, os eixos utilizados são pouco intuitivos. Vamos então estabelecer uma correspondência entre este sistema de coordenadas (θ_0, θ_{90}) e o sistema de coordenadas habitual que temos usado (x, y) .

Este sistema de coordenadas funciona da seguinte forma: um dado ponto (x, y) , quando $\phi = 0^\circ$, estará alinhado com os dois detetores caso o detetor móvel esteja desviado de θ_0 ; por outro lado, quando $\phi = 90^\circ$, estará alinhado com os dois detetores caso o detetor móvel esteja desviado de θ_{90} .

Ou seja, o ângulo θ_0 define uma reta no porta alvos correspondente a todas as posições (x, y) que estarão alinhadas com os dois detetores caso $\theta = \theta_0$. Por sua vez, o ângulo θ_{90} define também por sua vez uma reta. A interseção destas duas retas estabelece a correspondência $(\theta_0, \theta_{90}) \rightarrow (x, y)$. Na figura 21 concretiza-se este raciocínio.

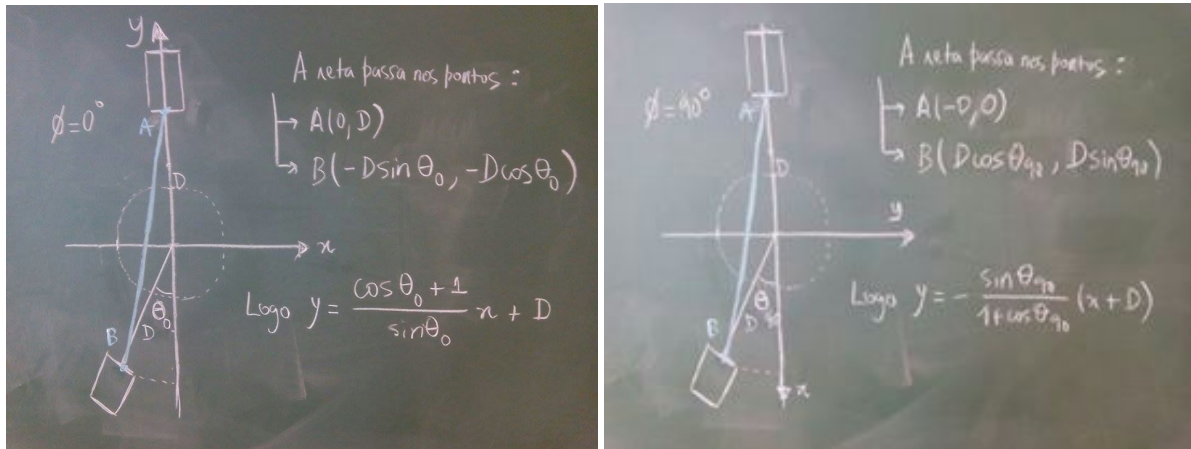


Figura 21. Esquema para determinar a correspondência $(\theta_0, \theta_{90}) \rightarrow (x, y)$

Igualando as expressões das duas retas, obtém-se

$$x = -D \frac{1 + \cos \theta_{90} + \sin \theta_0 \sin \theta_{90}}{(1 + \cos \theta_0)(1 + \cos \theta_{90}) + \sin \theta_0 \sin \theta_{90}}$$

Aplicando esta correspondência, passa a ser possível representar graficamente a imagem tumográfica num sistema de coordenadas (x, y) . O resultado apresenta-se na figura 22.

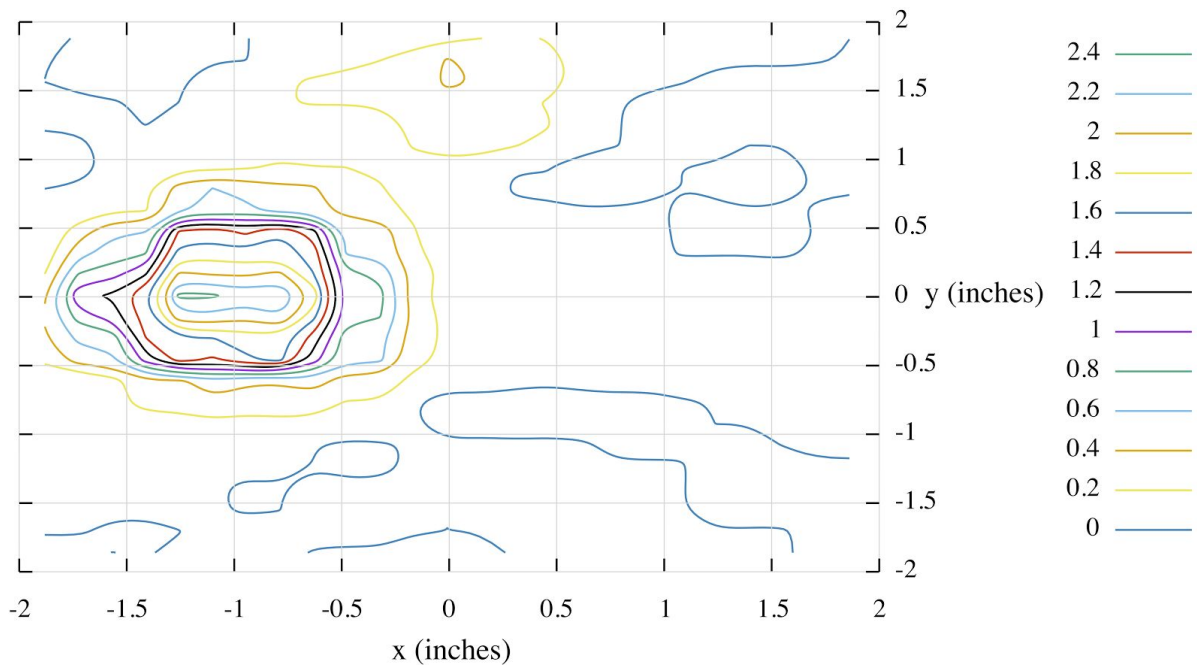


Figura 22. Imagem tumográfica para o sistema de coordenadas (x, y)

Assim, podemos observar imediatamente que as posições das fontes coincidem com aquelas nas quais foram calculadas, evidenciando a validade da reconstrução. O método utilizado foi portanto capaz de perfeitamente reconstruir a posição das duas fontes. Para as

localizar de forma mais exacta na imagem considerou-se a média da posição dentro do contorno de contagens máximas para cada fonte, e um erro associado à FWHM calculado no contorno intermédio. Assim, obtiveram-se como posições das fontes os seguintes resultados da tabela 33.

| | x (in) | y (in) |
|-------------|------------------|-----------------|
| Fonte Forte | -0.02 ± 0.25 | 1.63 ± 0.18 |
| Fonte Fraca | -1.17 ± 0.26 | 0.01 ± 0.23 |

Tabela 33. Valores reconstruídos para a posição das fontes forte e fraca.

Por conseguinte, vemos que dentro da margem de erro as posições das fontes coincidem com o seu valor, evidenciando a qualidade da reconstrução e a forma como a escolha inicial das posições das duas fontes foi adequada.