

Espectroscopia Gama e Atenuação de Fotões na Matéria

João Ferreira (78179) Henrique Rodrigues (78632) Rodrigo C. Carvalho (78646)

MEFT - 3º Ano, 2º Semestre - Laboratório de Física Experimental Avançada - Grupo 5C

Sexta-Feira, 15 de Abril de 2016

Resumo

Nesta experiência estudaram-se coincidências γ - γ . Desenvolveu-se um modelo teórico para explicar a dependência nas coordenadas da fonte do número de coincidências e testaram-se os limites da sua aplicabilidade. Determinaram-se assimetrias e áreas de detecção, obteve-se a eficiência intrínseca $\epsilon = (40.4 \pm 2.3)\%$ dos detectores utilizados, foi quantificado o valor da resolução angular $\theta \in [-11.84^\circ, 13.56^\circ]$ dos mesmos e o livre percurso médio $(3.17 \pm 0.55)\text{cm}$ das partículas γ de 511keV dentro destes. Estudou-se a contribuição da radiação de fundo e outros fenómenos radiativos da fonte para a taxa de contagens de coincidências, bem como a influência do fenómeno de coincidências fortuitas nesta. Por fim, elaborou-se um sinograma e reconstruiu-se com sucesso a partir deste a posição original das fontes.

I - Introdução Teórica

PET (Tomografia por Emissão de Positrões) é um processo que permite localizar uma fonte radioactiva em função do número de coincidências γ - γ detectadas. Uma coincidência γ - γ designa a detecção dentro de um dado intervalo de tempo correspondente ao tempo de resolução de duas partículas γ , uma em cada detector.

Para permitir a conservação do momento linear, os fotões emitidos aquando de um processo de aniquilação terão que ser emitidos em sentidos opostos. Contudo, é necessário ter em conta que estão a ocorrer ao longo do tempo diversos processos de aniquilação - como tal, a detecção de coincidências γ - γ subdivide-se em dois casos: as coincidências não-fortuitas, que correspondem à detecção de dois γ 's provenientes do mesmo processo de aniquilação; e as coincidências fortuitas, que correspondem à detecção de γ 's provenientes de processos de aniquilação distintos.

A taxa de detecção R destas coincidências irá de-

pende do ângulo entre os detectores e da posição relativa da fonte em relação aos detectores. Para as detecções em cada um dos detectores temos

$$R_i = \frac{N_i}{\Delta t} \epsilon_{geo} \epsilon_{int}, \quad i = A, B \quad (1)$$

onde N_i designa o número de fotões que chegam ao detector i , ϵ_{geo} designa a eficiência geométrica do detector e ϵ_{int} a sua eficiência intrínseca. Para o caso das coincidências basta termos em conta que, visto os detectores serem idênticos e a radiação emitida pela fonte ser isotrópica, $N_{cc} = \frac{1}{2} N_i$, visto termos que contabilizar 2 fotões por cada contagem; $\epsilon_{geo_{cc}} = 2\epsilon_{geo}$, visto o ângulo sólido ser agora o dobro, e $\epsilon_{int_{cc}} = \epsilon_{int}^2$, uma vez que ambos os detectores contabilizaram o fotão que os atravessou. Denominemos por R_{cc} a taxa de contagens de coincidências γ - γ . Por conseguinte, temos que:

$$R_i = \frac{N_i}{\Delta t} \epsilon_{geo} \epsilon_{int}, i = 1, 2 \quad (2a)$$

$$R_{cc} = \frac{N_i}{\Delta t} \epsilon_{geo} \epsilon_{int}^2 \quad (2b)$$

$$\epsilon_{int} = \frac{R_{cc}}{R_i}, i = 1, 2 \quad (2c)$$

É possível obter uma outra expressão para R_{cc} . Consideramos τ como o tempo para o qual seriam contabilizáveis as coincidências. A probabilidade de ser detectado pelo menos um γ para um dado detector será $1-P(0)$. $P(0)=e^{-\mu}$ visto o processo de emissão de gamas ser tratado como poissoniano. Como $\mu \ll 1$, temos que $e^{-\mu} \approx 1 - \mu$ e $P_i = \mu$. μ corresponde ao valor esperado de detecções em τ , logo temos que $P_i = R_i \tau$.

Tendo em conta que isto se aplica a ambos os detectores, temos ainda que $P_{cc} = 2P_A P_B = 2R_A R_B \tau^2$, onde o factor 2 decorre de o portão de detecção de coincidências poder ser aberto primeiro por um γ a atingir o detector 1 ou o detector 2 - que corresponderão ao longo da experiência aos detectores móvel e fixo respectivamente. Como R_{cc} será igualmente poissoniano com o mesmo μ resultante do mesmo τ , concluímos que $P_{cc} = R_{cc} \tau$, pelo que $R_{cc} = 2R_A R_B \tau$.

É necessário mencionar ainda que, para obter resultados experimentais adequados, se deve considerar uma taxa de coincidências corrigida R'_i que corresponderá à extracção da contribuição da radiação de fundo e das coincidências fortuitas.

$$R'_i = R_i - R_{back} \quad (3a)$$

$$R'_{cc} = R_{cc} - R_{cc_f} \quad (3b)$$

onde R_{cc_f} designa a taxa de contagens fortuitas e R_{back} designa a taxa de contagens de fundo. Devemos notar duas coisas: em primeiro lugar, que a obtenção do valor da taxa de contagens de fundo implicará ter em conta a existência de outros fenómenos da fonte concomitantes com o pico de aniquilação; e em segundo lugar, que não se extrai a radiação de fundo ao valor das coincidências pois a radiação de fundo é um fenómeno que afecta somente um detector - logo, não está contabilizado por si nas coincidências, estando já

implícita a sua influência nas coincidências no valor da taxa de contagens fortuitas.

Para estudar o número de coincidências que detetadas em função dos diversos parâmetros considerados referentes à geometria da montagem desenvolveu-se o modelo presente nos anexos A e B.

II - Montagem

Utilizou-se nesta experiência um sistema que consiste em dois detectores de cintilação NaI(Tl), um dos quais pode efectuar rotações em torno do outro que se mantém fixo, constituindo um espectómetro duplo. Cada um dos detectores irá estar associado ao seu próprio fotomultiplicador, pré-amplificador (que permite uma amplificação inicial do sinal eléctrico sem aumento significativo do ruído), amplificador de tensão (que permite uma segunda amplificação) e analisador monocanal. Ambos estão associados a uma unidade de coincidências com três contadores (um para cada detector e um para as coincidências).

Entre os dois detectores encontra-se o porta-alvos no qual se encontra uma fonte de ^{22}Na . Este porta-alvos pode ser rodado independentemente dos detectores. Assim, a montagem pode ser esquematizada do seguinte modo:

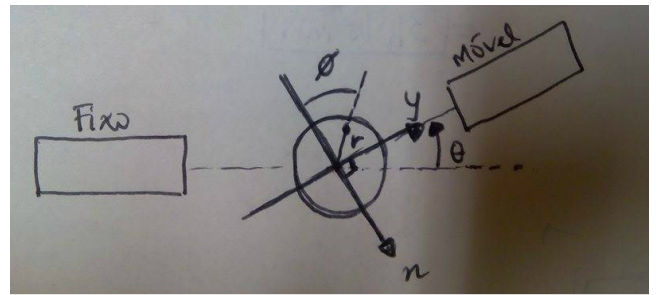


Figura 2: Esquema da montagem utilizada na experiência

Utilizou-se um output bipolar para o detector, com o fotomultiplicador associado a uma fonte de alta tensão de 900V e utilizou-se um ganho total de 10. Colocou-se a fonte a uma distância $D = 20\text{cm}$ do detector, que possui um raio de abertura de $R = 1\text{in}$ (polegada).

III - Análise de dados

III.1 ANÁLISE DO ESPECTRO DO ^{22}Na

Procedeu-se à obtenção do espectro do ^{22}Na . Este encontra-se representado na seguinte figura:

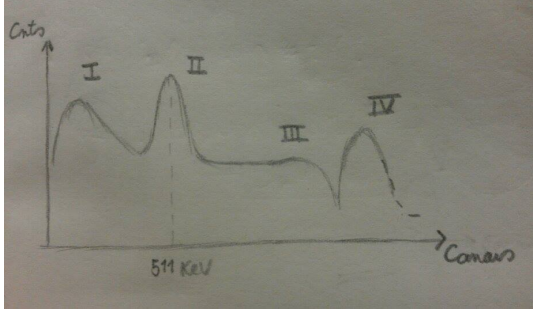


Figura 3: Espectro do ^{22}Na .

Para este espectro identificam-se assim as seguintes físicas distintas:

1. Valor mais provável da corrente negra;
2. Pico de Aniquilação;
3. Joelho de Compton;
4. Pico de absorção total.

III.2 ESTUDO DAS COINCIDÊNCIAS FORTUITAS E RADIAÇÃO DE FUNDO

Para começar efectuou-se o estudo da relação entre a ocorrência de coincidências fortuitas e o tempo de resolução dos detectores. Para tal, colocaram-se os braços do detector a um ângulo de 90° , e procedeu-se à obtenção do número de coincidências detectadas para um intervalo de tempo de 600s.

τ (ns)	R_A (Cts/s)	R_B (Cts/s)	R_C (Cts/min)	a_T (Cts/ms · s)	R_T Cts/min · s	Desvio
50	37.8 ± 0.3	36.9 ± 0.3	0.50 ± 0.22	2.80 ± 0.03	0.008 ± 0.001	2.2σ 5859%
250	37.4 ± 0.3	37.3 ± 0.3	0.90 ± 0.30	2.79 ± 0.03	0.042 ± 0.001	2.9σ 2052%
750	37.6 ± 0.3	37.5 ± 0.3	0.80 ± 0.28	2.82 ± 0.03	0.127 ± 0.002	2.4σ 531%
2500	38.0 ± 0.3	36.6 ± 0.3	1.20 ± 0.35	2.78 ± 0.03	0.417 ± 0.004	2.3σ 188%
5000	38.1 ± 0.3	36.5 ± 0.3	1.80 ± 0.43	2.78 ± 0.03	0.835 ± 0.008	2.3σ 115%
6250	37.5 ± 0.3	37.4 ± 0.3	1.60 ± 0.40	2.81 ± 0.03	1.054 ± 0.010	1.4σ 52%

Tabela 2: Estudo da taxa de coincidências fortuitas.

Efectuou-se então um ajuste do tipo $y = ax + b$ pelo método dos mínimos quadrados aos dados obtidos para os diversos tempos de resolução:

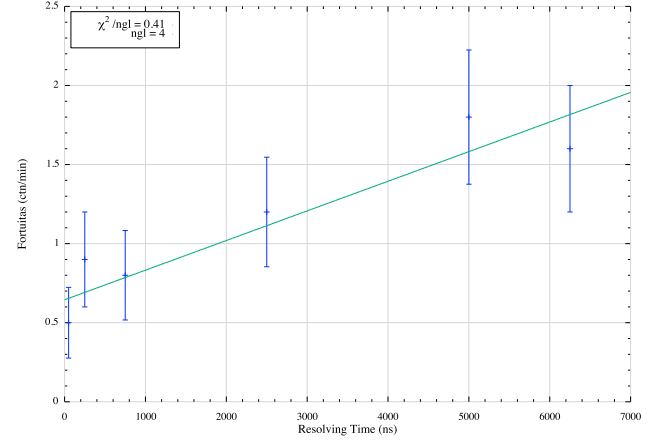


Figura 4: Ajuste linear ao número de coincidências fortuitas em função do tempo de resolução τ .

a (Cts/s · ms)	(3.00 ± 0.57)
b (Cts/s)	0.011 ± 0.002
χ^2/ngl	0.414
ngl	4

Tabela 3: Parâmetros do ajuste da figura 4

Em primeiro lugar verifica-se uma variação linear do número de coincidências fortuitas detectadas em função do tempo de resolução, o que é lógico tendo em conta a equação para R_C . Em segundo lugar, todavia, verificamos que existe uma ordenada na origem b não-nula.

De facto, esta é significativa, justificando que os dados obtidos se encontrem muito acima do seu valor teórico previsto. Na realidade, este valor é alto o suficiente para afectar de forma significativa a contabilização de coincidências fortuitas para baixos tempos de resolução (os desvios percentuais são muito elevados, e para valores superiores aos teóricos). A existência deste valor decorrerá naturalmente de ruído associado à própria electrónica, e que será significativo visto a ocorrência de coincidências fortuitas ser extremamente improvável, mesmo para valores elevados do tempo de resolução.

Uma confirmação desta hipótese decorre de um outro facto: o valor do declive expectável em função das contagens em cada um dos detectores médio é dado

por $a_T = 2.80\text{Cts/s.ms}$. Comparando com o valor experimental obtido $a = (3.00 \pm 0.57)\text{Cts/s.ms}$, verificamos que estes são concordantes dentro da margem de erro, indiciando que a variação verificada para as contagens em função do tempo de resolução é a esperada.

Por fim, devemos realçar que o baixo valor do χ^2/n_{gl} resulta fundamentalmente do grande valor dos erros, facilmente observáveis no gráfico ou no facto de o desvio σ ser baixo mesmo quando o desvio percentual é extremamente elevado.

Relativamente ao estudo da radiação de fundo, esta foi efectuada a partir do espectro do sódio. Tal permite ter em conta o facto de, juntamente com a radiação de fundo em si, existir um fundo decorrente de outros fenómenos associados ao decaimento da fonte e que devem ser contabilizados, tais como a existência do patamar de Compton. Do mesmo modo que anteriormente efectuou-se uma aquisição de dados, uma para cada detector e somente se estudou o pico de 511keV visto ser esta a área a ser estudada, obtendo-se os resultados da tabela 4.

Área Total (Cts)	Área do Sinal (Cts)	FWHM (Can)	Centroide (Can)	σ (Can)
9171 \pm 96	6388 \pm 180	22.86	264.67 \pm 0.12	9.71
9459 \pm 97	6792 \pm 178	21.30	262.73 \pm 0.11	9.05

Tabela 4: Dados correspondentes ao espectro da fonte emissora ^{22}Na para ambos os detectores. $\Delta t_{aq} = 246\text{s}$

Para extrair qual a contribuição das radiações de fundo, considerou-se o trapézio sob o pico detectado e extraiu-se a sua área. Para tal, consideraram-se os dois canais que correspondem ao início e fim da área sob análise e efectuou-se a média das contagens para os 8 canais circundantes, obtendo por conseguinte os dois lados do trapézio: B e b. Torna-se então trivial obter R_{back} , visto esta corresponder a $R_{back} = \frac{A}{\Delta t}$. Obtiveram-se os resultados indicados na tabela 5.

Detector	B (Cts)	b (Cts)	h (Can)	A (Cts)	R_{back} (Cts/s)
Móvel	56.4 \pm 7.5	48.4 \pm 7.0	49	2568 \pm 251	10.4 \pm 1.0
Fixo	56.6 \pm 7.5	49.4 \pm 7.0	49	2597 \pm 252	10.6 \pm 1.0

Tabela 5: Dados correspondentes ao espectro da fonte emissora ^{22}Na para ambos os detectores. $\Delta t_{aq} = 246\text{s}$

Como tal, verificamos que as contagens de fundo são significativas, e que apresentam valores concor-

dantes para os dois detectores (o que seria expectável devido a ambos os detectores serem idênticos).

III.3 VARIAÇÃO DAS CONTAGENS AO LONGO DOS EIXOS

Nesta secção variou-se a posição da fonte ao longo do eixo xx e do eixo yy para $\theta = 0$. Para cada posição efectuou-se uma aquisição de $\Delta t = 60\text{s}$.

Antes disso, procedeu-se ao estudo da variação do número de partículas γ detectadas em função da distância da fonte ao detector por forma a determinar o livre percurso médio das partículas dentro do detector. Para tal, efectuou-se aos dados obtidos (aos não corrigidos, visto a não uniformidade do fundo resultante da variação da posição da fonte impossibilitar a sua dedução) um ajuste pelo método dos mínimos quadrados do tipo

$$R_i = A_i \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{(D_i \pm y)^2}}} \right) \quad (4)$$

para cada um dos detectores, onde R é o raio da sua abertura e D_i são parâmetros livre que corresponderão à distância real percorrida pela partícula quando $y = 0$. De facto, esperamos que este seja superior a 20cm uma vez que ela percorrerá alguma distância dentro do próprio detector. Estes ajustes correspondem ao gráfico da figura 4 e os parâmetros que resultam encontram-se na tabela 7.

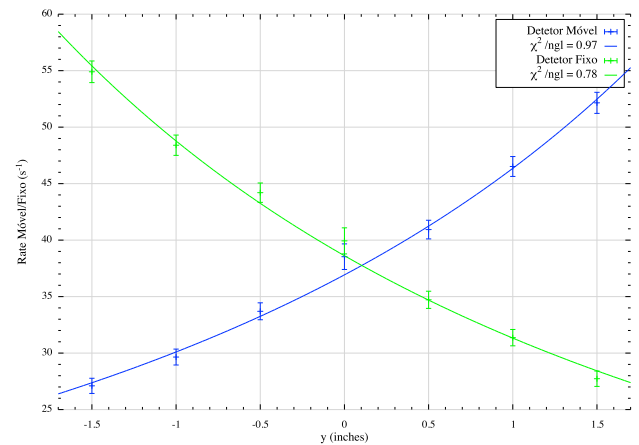


Figura 4: Ajuste da equação (4) à taxa de contagens em função de y .

A_1 (Cts/s)	(6421 ± 473)
D_1 (cm)	23.54 ± 0.84
χ^2_{ngl}	0.97
ngl	4
A_2 (Cts/s)	(6278 ± 407)
D_2 (cm)	22.80 ± 0.71
χ^2_{ngl}	0.78
ngl	4

Tabela 7: Parâmetros dos ajustes da figura 4.

Em primeiro lugar observamos que o valor do χ^2/ngl se encontra próximo de 1 para ambos os ajustes, evidenciando a boa qualidade do ajuste; por outro lado, constatamos como esperávamos que D apresenta um valor superior a 20cm. De facto, para ambos os detectores, constatamos que os valores de D são congruentes dentro da margem de erro, o que é normal para detectores supostamente idênticos. Efectuando a média concluímos portanto que $D = 23.17 \pm 0.55\text{cm}$, sendo que como tal o percurso percorrido pela partícula no detector corresponde a $3.17 \pm 0.55\text{cm}$.

O detector apresenta um comprimento de 5cm. Como tal, verificamos que o livre percurso médio da partícula dentro do detector é superior a metade do comprimento do detector. Tal seria expectável: como D é muito superior a R , apenas um pequeno ângulo sólido gera coincidências $\gamma - \gamma$, e os fótons incidem quase paralelamente ao eixo dos detetores obrigando a um maior livre percurso médio.

Por fim, observamos que os detectores não estão equidistantes do ponto $y = 0$ visto os gráficos se sobreporem em $y \approx 2.6\text{mm}$. Este valor é no entanto inferior à precisão que o material utilizado possibilita.

De seguida, procedeu-se à utilização do modelo desenvolvido na secção teórica para ajustar pelo método dos mínimos quadrados os dados obtidos para as coincidências em função de y com $x=0$ e em função de x com $y=0$. Ajustou-se no primeiro caso a equação A.9 do anexo; no segundo caso ajustou-se a equação A.15 do anexo adaptada para $\theta = 0$. O ajuste está representado na figura 6 e obtiveram-se os parâmetros indicados na tabela 8.

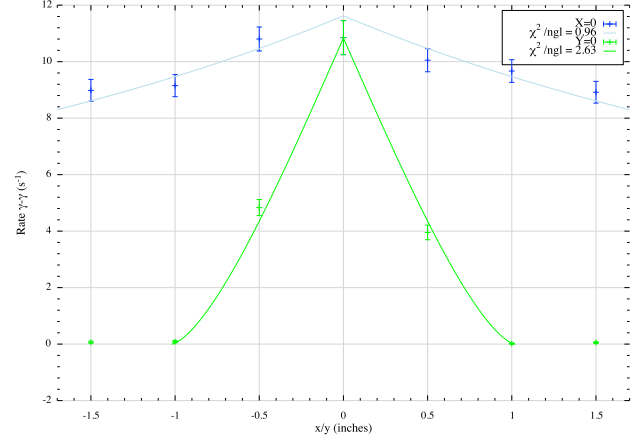


Figura 6: Taxa de coincidências em função da posição da fonte

Caso	A (Cts/s)	R (in)	χ^2/ngl	ngl
x=0	152.6 ± 2.4	1.02 ± 0.01	0.96	6
y=0	142.1 ± 9.7		2.63	6

Tabela 8: Parâmetros do ajuste da figura 6

Assim, podemos concluir em primeiro lugar que em ambos os casos possuímos um valor de χ^2/ngl bastante bom, indiciando a boa qualidade do ajuste aos pontos experimentais. Por outro lado, notamos que, mesmo dentro da margem de erro, os valores do ajuste não coincidem para $(x,y)=(0,0)$. Tal resulta maioritariamente da utilização de poucos pontos nos ajustes, o que provoca ajustes adequados aos pontos mas com um andamento diferente do esperado. Como tal, concluímos que estes ajustes são inconclusivos quanto à qualidade do modelo aplicado - embora esta seja demonstrada em posteriores ajustes.

Deve-se mencionar ainda que o valor do raio $r=1.02 \pm 0.01$ polegadas não coincide dentro da margem de erro com o valor suposto de 1 polegada, indiciando que pode existir um pequeno erro no valor fornecido pelo fabricante.

III.4 VARIAÇÃO DAS CONTAGENS EM FUNÇÃO DE θ

Colocando-se a fonte centrada em $(x,y)=(0,0)$ procedeu-se à variação da posição do detector 1 e à obtenção do número de coincidências em função

do ângulo θ . Corrigindo as taxas obtidas, utilizou-se a equação A.6 do anexo para se fazer um ajuste pelo método dos mínimos quadrados, deixando como parâmetros livres a amplitude A , o raio do detector r e um eventual desvio angular $\Delta\theta$ em relação à posição central $\theta=0$, tendo-se obtido os seguintes resultados:

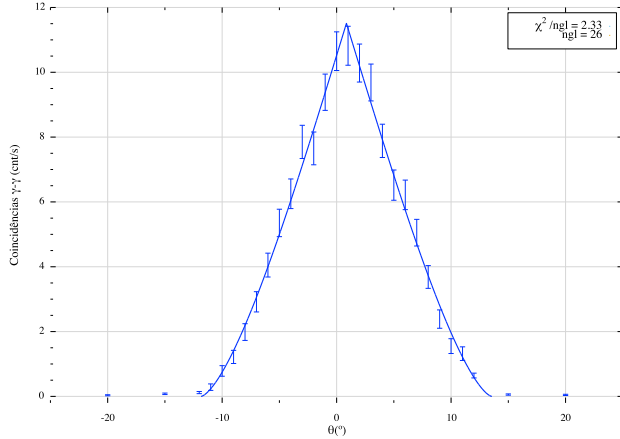


Figura 8: Taxa de coincidências em função do ângulo entre os detectores

A (Cnts/s.m ²)	3.58 ± 0.17
r (pol)	1.011 ± 0.013
$\Delta\theta$ (°)	0.86 ± 0.10
χ^2/ngl	2.33
ngl	26

Tabela 9: Parâmetros do Ajuste

O baixo valor do χ^2/ngl indicia um bom ajuste. Além disso, podemos constatar que o valor do raio da abertura do detector corresponde a 1.011 ± 0.013 polegadas, o que é um valor congruente dentro da margem de erro com o valor suposto - 1 polegada. Ademais, é possível utilizar o valor de $\Delta\theta$ por forma a calcular o desvio Δ_x da fonte em relação ao centro tendo em conta que a variação em y será aproximadamente desprezável comparável com a distância de 20cm que separa o detector e a fonte:

$$\Delta_x \approx 0.2 \tan(\Delta\theta) \quad (5)$$

Assim, obtemos que $\Delta_x = (0.23 \pm 0.04)$ cm. O valor medido na aula foi (0.19 ± 0.01) cm, pelo que são congruentes.

Pode-se ainda, utilizando o gráfico acima, determinar a resolução angular. Esta corresponderá aos valores de θ para o qual existem contagens. Substituindo os parâmetros do ajuste na fórmula A.6 do anexo determina-se quando esta é nula: $|\theta| = \frac{2R}{D}$. Assim, verificamos que a resolução angular corresponde a $\theta \in [-12.702, 12.702]^\circ$.

Procedeu-se agora ao cálculo da eficiência do fotopico. Para tal, tomou-se o ponto para o qual se verificou o máximo das coincidências (tendo já efectuado as correcções necessárias às coincidências fortuitas e à radiação de fundo) e utilizaram-se as equações (2) para ambos os detectores, tendo-se obtido os seguintes resultados:

Detector	ϵ (%)
Móvel	39.9 ± 3.1
Fixo	40.9 ± 3.3

Tabela 10: Eficiências do Fotopico para ambos os detectores

Os valores são por conseguinte congruentes, não havendo um detector com uma eficiência superior. Efectuando a média obtém-se $\epsilon = (40.4 \pm 2.3)\%$. Este valor não ser 100% não resulta do fundo ou das fortuitas pois estas foram descontadas; como tal, conclui-se que esta diferença resulta de detalhes ao nível da electrónica associada, não se podendo inferir exactamente qual a razão.

Por fim, procedemos ao estudo da simetria da distribuição em torno do ponto $\theta=0$. Para tal, calcularam-se os primeiros três momentos da distribuição:

μ (°)	σ (°)	ν (° ³)
0.816 ± 0.075	4.657 ± 0.049	-0.03 ± 0.13

Tabela 11: Momentos das Distribuições

Assim, podemos concluir que:

- 1 A média da distribuição não se encontra em torno de $\theta=0$. De facto, apresenta um desvio para valores de θ positivos - tal como é indicado pelo máximo se encontrar em valores positivos - logo, indica que a fonte possui um desvio para os valores negativos de x . Observa-se que este valor é congruente com o anterior parâmetro de ajuste $\Delta\theta = 0.86 \pm 0.10$

- 2 Relativamente ao desvio padrão, verificamos que este é bastante baixo, fruto das contagens desaparecerem rapidamente com a variação em θ . Ou seja, o ângulo sólido subtendido pelo detector e que ainda permite coincidências é pequeno: o raio dos detectores é muito inferior à distância da fonte aos detectores.
- 3 Observa-se que a skewness é nula dentro da margem de erro, indicando que a distribuição não possui quaisquer caudas - isto é, é simétrica em torno do seu máximo, embora este se encontre deslocado do valor esperado.

Como tal, notamos que existe uma assimetria a nível da posição do máximo, mas que a forma da curva se preserva simétrica em torno desse máximo.

III.5 VARIAÇÃO DAS CONTAGENS EM FUNÇÃO DE ϕ , R

De seguida, obteve-se a taxa de coincidências com $\theta=0$ para 3 valores distintos de distância da fonte ao centro do porta-alvos, a saber, $r=0.5$, 1.0 e 1.5 polegadas. Para cada valor rodou-se o porta-alvo 360° . Obtiveram-se os seguintes resultados:

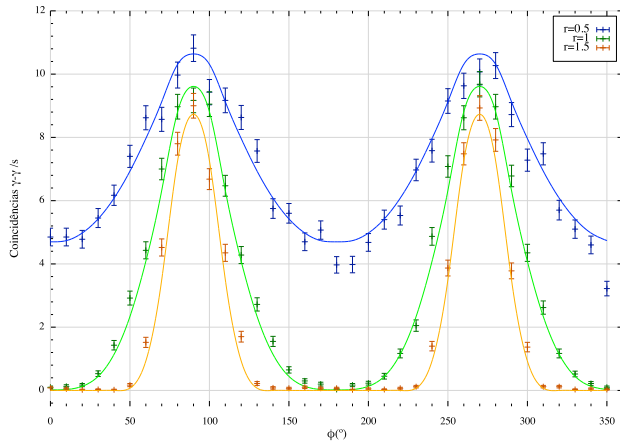


Figura 9: Coincidências em função do ângulo ϕ para cada valor de r

O software Gnuplot revelou-se incapaz de efectuar um ajuste da expressão A.13 do anexo; como

tal, utilizou-se o método enunciado em B por forma a obter um ajuste aos dados experimentais. Obteve-se então para a amplitude da função $A = 152.98 \text{ Cnts/s}$ como sendo a que minimizava os desvios quadráticos médios aos pontos experimentais e $\chi^2/n_{gl}=3.26$. De facto, este baixo valor evidencia a qualidade do ajuste ao modelo teórico desenvolvido, algo que é facilmente observável na própria figura 9.

De seguida, substituiu-se a fonte utilizada por uma fonte mais fraca. Efectuando-se as mesmas medições que anteriormente, obtiveram-se os seguintes resultados:

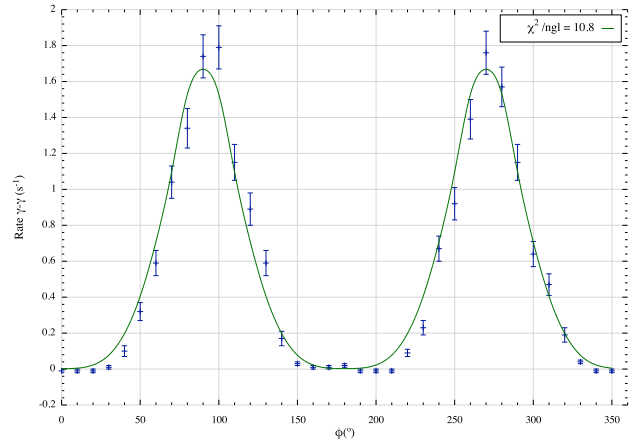


Figura 10: Coincidências em função do ângulo ϕ para a fonte mais fraca

Obteve-se então para a amplitude da função $A = 26.6$ como sendo a que minimizava os desvios quadráticos médios aos pontos experimentais e $\chi^2/n_{gl}=10.82$, o que indica um mau ajuste que decorre principalmente do ajuste aos menores valores de contagens. Assim, notamos por um lado que a amplitude é muito inferior à obtida para a fonte forte (cerca de 6 vezes menor), o que é lógico, e que a forma da curva é idêntica, revelando que é impossível distinguir as fontes sem ser pela sua taxa de contagens.

Procedeu-se ainda ao estudo da existência de assimetrias nas 3 distribuições da fonte forte. Para tal, consideraram-se dois casos distintos: primeiro, para cada raio a distribuição geral em torno de $\phi = 180^\circ$; e segundo, para cada raio novamente, as duas distri-

buições simétricas em torno de $\phi = 90^\circ$ e $\phi = 270^\circ$. Obteve-se assim, para o primeiro caso:

r (pol)	μ ($^\circ$)	σ ($^\circ$)	v (93)
0.5	173.6 ± 0.8	100.5 ± 2.1	0.02 ± 0.15
1.0	179.2 ± 1.1	93.5 ± 0.3	0.01 ± 0.11
1.5	178.7 ± 1.4	200.3 ± 0.24	0.002 ± 0.114

Tabela 12: Momentos das Distribuições em torno de $\phi=180^\circ$

Relativamente a μ , observamos que esta é congruentemente 180° para os maiores raios, indicando tal como seria de esperar que não há mais contagens quando mais próximo de um dado detector. De facto, o desvio que existe para $r=0.5$ pol é pouco significativo, e resulta de meras flutuações estatísticas.

É de notar que, para este caso, a variância não possui significado físico, visto a distribuição ser constituída por dois picos distintos. Relativamente à Skewness, verificamos ser quase nula - indiciando que a área em ambos os lados dos 180° é aproximadamente idêntica. Como tal, notamos que as contagens são simétricas em ϕ : somente a localização do pico é um pouco deslocada para a esquerda.

Relativamente ao segundo caso enunciado, obteve-se:

r (pol)	ϕ ($^\circ$)	μ ($^\circ$)	σ ($^\circ$)	v (93)
0.5	90	89.50 ± 0.54	47.72 ± 1.45	-1.2 ± 35.5
		269.41 ± 0.50	41.93 ± 4.58	1.4 ± 95.2
1.0	90	89.99 ± 0.42	26.00 ± 2.12	1.1 ± 6.7
		270.01 ± 0.46	28.3 ± 2.0	-1.1 ± 0.4
1.5	90	90.11 ± 0.36	17.27 ± 2.71	1.0 ± 3.0
		270.16 ± 0.36	15.44 ± 3.03	1.3 ± 2.5

Tabela 13: Momentos das Distribuições em torno de $\phi = 90$ e $\phi = 270$)

Pode-se concluir que:

- 1 Todos os valores esperados dos picos encontram-se congruentes com os valores supostos, indicando a quase perfeita simetria da distribuição; além disso, não há uma tendência para qualquer dos ângulos para valores menores ou maiores somente.

- 2 O desvio padrão diminui com a distância r ao centro do porta-alvos. Tal é lógico - para menores valores de r, a rotação do porta-alvos irá influenciar de forma menor o deslocamento da fonte e como tal a ocorrência de coincidências. De forma mais intuitiva, a curva das coincidências demora menos a morrer (ser nula) para maiores valores de raio porque uma mesma rotação corresponde a um maior desvio.

- 3 O valor da skewness é nula para quase todos os picos e inferior em módulo a 1, indicando que estes não possuem uma cauda em nenhum dos lados, revelando novamente a sua simetria.

III.6 VARIAÇÃO EM θ E X

Para cada posição (x,0) da fonte, em incrementos de 0.5 polegadas, diferentes da posição (0,0), obteve-se a variação da taxa das coincidências em função do ângulo θ . De seguida, para cada conjunto de medições, efectuou-se um ajuste pelo método dos mínimos quadrados da expressão A.15, deixando como parâmetros livres a posição x da fonte e a amplitude A. Obtiveram-se os seguintes resultados:

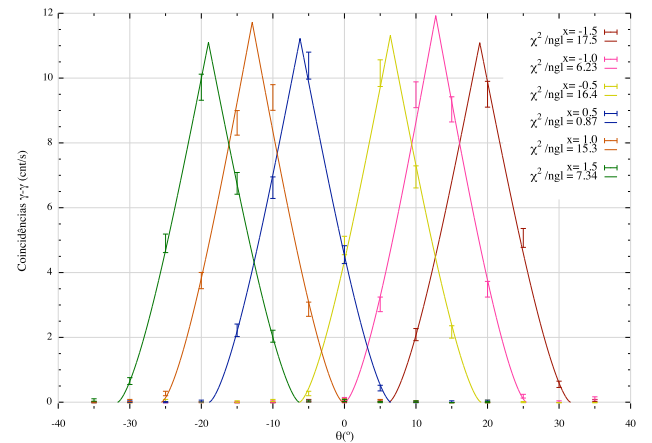


Figura 11: Coincidências em função do ângulo θ para cada posição da fonte

x_t (pol)	χ^2/ngl	A (Cnts/sm ²)	x_2 (polegadas)
-1.5	17.5	3.45±0.50	-1.51± 0.04
-1.0	6.23	3.71±0.25	-1.02± 0.02
-0.5	16.4	3.52±0.38	-0.51± 0.03
0.5	0.87	3.49±0.09	0.49± 0.01
1.0	15.3	3.65±0.37	1.03± 0.04
1.5	7.34	3.46±0.25	1.51± 0.03

Tabela 14: Parâmetros do Ajuste

Pode-se concluir que:

- 1 O desvio da fonte em relação ao centro obtido pelo ajuste x_2 , para qualquer caso considerado, coincide dentro da margem de erro com o desvio suposto x_t ;
- 2 As curvas correspondem a translações da originalmente obtida para $x=0$. Como seria de esperar, o pico desloca-se para valores negativos de θ quando a posição é positiva e para valores positivos quando é negativa, visto isto corresponder ao alinhamento dos detectores (ver a figura na secção montagem).
- 3 Os χ^2/ngl são em geral todos bastante elevados - resultante da pouca quantidade de valores angulares para os quais se verificaram contagens. Todavia, para o caso de $x=0.5$, é muito inferior aos demais. Tal resulta apenas de mera anomalia estatística, não existindo fundamento mais profundo.

Relativamente ao estudo de simetrias, começamos por determinar qual o valor esperado do máximo para cada valor de x . Facilmente se vê que a condição geométrica que permite obter este valor corresponde à equação

$$\frac{D}{x} = \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \quad (6)$$

Assim, procedeu-se à obtenção dos momentos de inércia para cada distribuição:

x_t (pol)	μ_t (°)	μ (°)	σ (°)	v (° ³)	Desvio(%)
-1.5	18.68	17.88 ± 0.1	4.5 ± 0.6	0.06 ± 0.01	-4.3
-1.0	12.51	12.72 ± 0.14	4.9 ± 0.5	1.21 ± 0.6	1.7
-0.5	6.28	6.10 ± 0.14	4.7 ± 0.3	1.24 ± 0.36	-2.9
0.5	-6.28	-6.15 ± 0.13	4.82 ± 0.3	0.06 ± 0.29	2.1
1.0	-12.51	-12.81 ± 0.13	4.7 ± 0.5	-0.33 ± 1.05	-2.4
1.5	-18.68	-19.02 ± 0.14	4.9 ± 0.7	0.08 ± 0.43	-1.8

Tabela 15: Momentos de Inércia

Como tal pode-se concluir que:

- 1 A posição do máximo é sempre próxima do valor esperado, com desvios percentuais inferiores a 5%.
- 2 O sinal dos desvios à posição do máximo variam consoante o caso, não havendo um padrão - logo, não há um desvio para valores menores ou superiores preferencial.
- 3 O valor do desvio padrão é constante o que é lógico - as curvas correspondem a translações da original mas preservam a sua forma, logo o desvio padrão mantém-se.
- 4 A skewness é baixa, não indicando a existência de acumulações de valores para qualquer lado das curvas.

1 III.7 Sinograma e Reconstituição

Por fim, procedeu-se à obtenção de um sinograma. Para tal, considerou-se uma disposição das fontes forte-fraca em (-1,0) e (0,1.5) respectivamente. Colocou-se a fonte mais fraca num maior raio porque o desvio-padrão correspondente seria inferior, permitindo que a sua zona de detecção fosse menor e mais facilmente se a identificasse. Colocaram-se ainda as fontes a 90° por forma a evitar sobreposições dos seus espectros. Efectuaram-se aquisições para θ entre -30°

e 30° , ϕ os 360° em incrementos de 15° , e intervalos $\Delta_t=30s$ para os maiores valores de θ e $20s$ para os menores. Obtiveram-se os seguintes resultados:

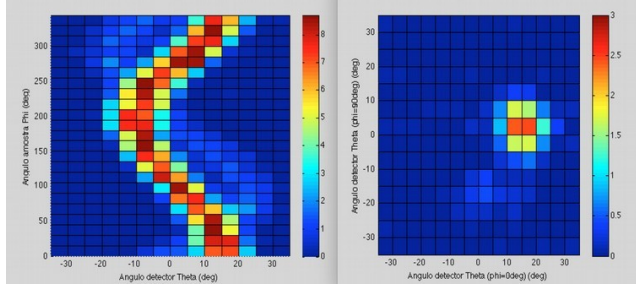


Figura 12: Resultados do Sinograma

Identifica-se claramente no sinograma um andamento em tons de vermelho correspondente à fonte forte e outro andamento em tons de azul claro correspondentes à fonte fraca. Estes estão desfazados de 90° , o que corresponde ao desfazamento em ϕ das duas fontes. Para além disso, a amplitude do andamento correspondente à fonte forte é inferior à do correspondente à fonte fraca, o que advém do facto de $r=1$ para a fonte forte e $r=1.5$ para a fonte fraca.

Procedemos à reconstrução das posições da fonte a partir das imagens obtidas. Ou seja, o ângulo θ_0 define uma reta no porta alvos correspondente a todas as posições (x,y) que estarão alinhadas com os dois detetores caso $=0$. Por sua vez, o ângulo 90 define também por sua vez uma reta. A intersecção destas duas retas estabelece a correspondência $(0,90) \rightarrow (x,y)$. Utiliza-se assim a equação de intersecção das rectas:

$$x = -D \frac{1 + \cos(\theta_{90}) + \sin(\theta_{90})\sin(\theta_0)}{(1 + \cos(\theta_0))(1 + \cos(\theta_0) + \sin(\theta_{90})\sin(\theta_0))} \quad (7a)$$

$$y = -\frac{\sin(\theta_{90})}{1 + \cos(\theta_{90})}(x + D) \quad (7b)$$

O resultado obtido encontra-se no seguinte gráfico:

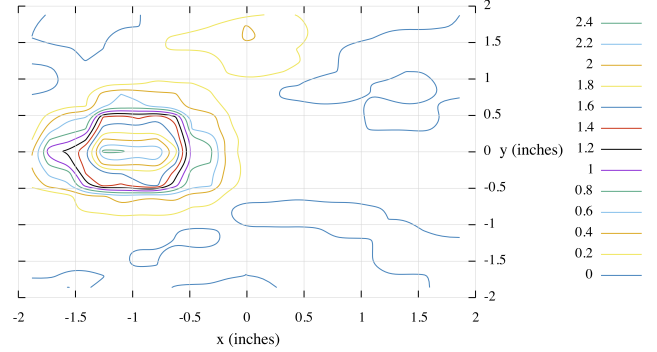


Figura 13: Resultados da Reconstrução

Assim, podemos observar imediatamente que as posições das fontes coincidem com aquelas nas quais foram calculadas, evidenciando a validade da reconstrução. O método utilizado foi portanto capaz de perfeitamente reconstruir a posição das duas fontes. Para as localizar de forma mais exacta na imagem considerou-se a média da posição dentro do contorno de contagens máximas para cada fonte, e um erro associado ao FWHM calculado no contorno intermédio. Assim, obtiveram-se como posições das fontes os seguintes resultados:

Fonte	x (pol)	y (pol)
Forte	-0.02 ± 0.25	1.63 ± 0.18
Fraca	-1.17 ± 0.26	0.01 ± 0.23

Tabela 15: Posições das Fontes reconstruídas

Por conseguinte, vemos que dentro da margem de erro as posições das fontes coincidem com o seu valor, evidenciando a validade de todo o método adoptado.