

# Coincidências $\gamma\gamma$ - PET

Filipe Miguel (84381) • Francisco Duque (84383) • João Bravo (84390)

*Instituto Superior Técnico*

*Mestrado Integrado em Engenharia Física Tecnológica*

*LFEA - Grupo 2C - Prof. Marta Fajardo*

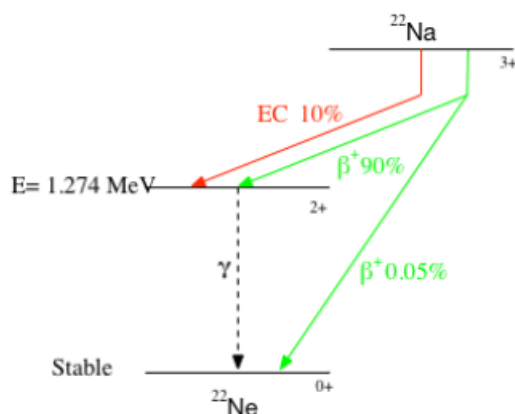
*Março 2018*

## I. PREPARAÇÕES DAS SESSÕES LABORATORIAIS

### 1. Preparação da sessão:

1ª Sessão - 02/03/2018

Pretende-se estudar o decaimento  $\beta^+$  da fonte de  $^{22}\text{Na}$ :



**Figura 1:** Esquema do decaimento  $\beta^+$  do  $^{22}\text{Na}$

O positrão emitido neste decaimento interage com o meio até atingir energias da ordem da energia de repouso dos eletrões do meio, 511 KeV. Nessa altura, ocorre um processo de aniquilação no qual são emitidos dois fotões ( $\gamma$ ) "back to back"(na mesma direção e sentidos opostos). A energia está equidistribuída entre eles, ou seja, cada fotão tem 511 KeV.

Posto isto, a experiência deve ser capaz de detetar os dois  $\gamma$ . Para tal são obviamente necessários dois detetores, com a respetiva eletrónica associada capaz de fornecer todo o espectro de cada  $\gamma$ . No entanto, para se garantir que os  $\gamma$  detetados têm origem na mesma aniquilação é necessário verificar a sua coincidência temporal. Tem de se criar uma porta lógica para cada pico de aniquilação de 511 KeV (conseguido através de um analisador monocanal) e utilizar uma unidade de coincidências que verifica a existência de coincidências (função lógica AND) num intervalo de tempo  $\tau$  definido pelo utilizador. Esta janela  $\tau$  tem de ser escolhida criteriosamente para, sendo o mais restrita possível, não ser inferior a

um eventual atraso temporal entre os detetores, para que todas as verdadeiras coincidências  $\gamma\gamma$  sejam detetadas e se minimizem o número de coincidências fortuitas.

É notória a necessidade de uma definição temporal dos eventos precisa, pelo que a resposta em tempo do detetor deve ser boa (baixo tempo morto). Os candidatos para esta tarefa são por excelência os detetores de cintilação.

Como os  $\gamma$  interagem com as partículas do ar no seu percurso até aos detetores, estes podem sofrer difusões, pelo que as suas trajetórias se alterarão. Dessa forma, a montagem utilizada deve ser capaz de estudar a distribuição angular destas partículas, permitindo assim estabelecer correlações angulares. Também seria interessante estudar como esta varia com a distância da fonte aos detetores, pelo que para além destes se poderem movimentar angularmente, os braços da mesa de correlação angular devem ser de comprimento variável.

O número de coincidências fortuitas  $N_C$  (que não correspondem à deteção de um par  $\gamma\gamma$ ) num dado intervalo de tempo  $T$  pode ser estimado tendo em conta as contagens de cada evento  $N_A$  e  $N_B$  nos detetores distintos. A probabilidade de ocorrer uma ou mais contagens do evento A num intervalo de tempo infinitesimal  $\tau$  é intuitivamente dada por  $P_A = \frac{N_A}{T}\tau$ , sendo o análogo para B,  $P_B = \frac{N_B}{T}\tau$ . A probabilidade de ocorrência de uma coincidência fortuita nesse intervalo de tempo é dada pelo produto das probabilidades dos acontecimentos independentes A e B  $P_C = P_A P_B$ . Deste modo, sendo o detetor de coincidências ativo tanto pelo evento B como pelo evento A, as contagens correspondentes a coincidências fortuitas num intervalo de tempo  $T$  serão estimadas por  $N_C = 2P_C T / \tau$ . Assim, obtêm-se a seguinte dependência para o número de contagens correspondentes a coincidências fortuitas num intervalo de tempo  $T$ :

$$N_C = 2 N_A N_B \frac{\tau}{T}$$

## 2. Preparação da sessão:

2ª Sessão - 05/03/2018

Pretende-se agora estudar as correlações angulares da emissão de dois  $\gamma$ , pela aniquilação de um positrão emitido pela fonte de  $^{22}\text{Na}$ , em função da posição relativa da fonte aos detetores de cintilação. Para isso, variar-se-á a posição da fonte:

- no eixo formado pelos detetores. Neste caso, as coincidências ficarão limitadas, já que, estando a fonte a diferentes distâncias de cada detetor, o ângulo sólido, e assim a eficiência geométrica (que lhe é proporcional), irá aumentar no mais próximo e diminuir no mais afastado, pelo que, devido a este segundo, se espera que as coincidências diminuam com o aumento da distância ao plano equidistante aos detetores. Exemplo ilustrativo nas figuras 1.a) (mesmas eficiências geométricas) e 1.b) (diferentes eficiências geométricas).
- no plano equidistante aos dois detetores. Neste caso, ainda que os ângulos sólidos sejam iguais para os dois detetores, a sua região de intersecção (para a qual é possível detetar dois  $\gamma$  back-to-back) diminui pelo que o número de coincidências também irá diminuir. De facto, se a fonte for colocada a uma distância do plano equidistante aos dois detetores igual ou maior ao seu raio, e estes estiverem perfeitamente alinhados (fig. 2), deixa de ser à partida impossível detetar dois  $\gamma$  provenientes da mesma aniquilação, a não ser que um deles sofra um desvio que o permita entrar na região de sombra onde estão os detetores. Na prática, deixa de haver intersecção entre os ângulos sólidos definidos para cada detetor e respetiva simetria.
- pela rotação do porta-amostras, com ângulos definidos a priori, para as diferentes distâncias da fonte ao eixo de rotação utilizadas no ponto anterior. Neste caso há uma combinação das duas situações anteriores e o comportamento da eficiência geométrica conjunta do aparato deixa de ter uma variação tão linear e fácil de prever. Na fig. 3 exemplifica-se uma situação limite, análoga à discussão da entrada numa região de sombra aquando da variação da posição da fonte no plano equidistante aos dois detetores, mas agora com esta um pouco mais próxima de um dos detetores.

### 3. Preparação da sessão:

4ª Sessão - 15/03/2018

Nesta sessão, pretende-se obter um sinograma para duas fontes de diferentes intensidades, de forma a reconstruir, com um programa de tomografia, uma imagem que recupere as posições das fontes.

Tendo em conta o tempo finito disponível para realizar as aquisições, foi necessário determinar *a priori* a posição onde colocar as fontes forte e fraca, os parâmetros de variação angular (*step* e amplitude) e tempo de aquisição de forma a ser possível obter dados relevantes para construir o sinograma. Estes foram escolhidos utilizando a informação integrada recolhida nas sessões anteriores.

Assim, calcularam-se as taxas de cada fonte de forma a estimar quanto será a taxa absorvida média de cada uma, verificando-se que a taxa da fonte forte era em média o dobro da fonte fraca. Assim, para tentar igualar as taxas absorvidas médias de cada fonte, decidiu-se posicionar a fonte fraca mais perto do centro do porta-amostras, já que esta taxa decai com a distância ao mesmo. Para evitar a sobreposição dos sinais detetados de ambas as fontes, estas serão colocadas com uma desfasagem de  $90^\circ$  em  $\phi$ . Para satisfazer todos estes requirimentos, um exemplo de posições viável é ter a fonte fraca no ponto  $(1'', 0'')$  e a forte no ponto  $(0'', 1.5'')$ . Note-se que através do ajuste efetuado à taxa de absorção dos detetores em função da distância da fonte ao centro, estima-se que a taxa absorvida correspondente à fonte fraca seja semelhante à taxa absorvida recorrendo à fonte forte.

Pelos ajustes feitos em função do ângulo  $\phi$ , chegou-se à conclusão que a  $FWHM_\phi$  para os picos a esta distância do centro é da ordem de  $30^\circ$ . Já para o ângulo  $\theta$ , chegou-se a cerca de  $13.6^\circ$ . De modo a garantir uma tomada de dados que caracterize com precisão suficiente a forma de cada pico escolheram-se passos semelhantes a  $FWHM_{\phi/\theta}/2$  para os ângulos  $\phi/\theta$ . Assim, escolheu-se um passo em  $\phi$  de  $15^\circ$  e em  $\theta$  de  $5^\circ$ . De forma a incluir as caudas da fonte forte, recorrendo aos ajustes no plano equidistante, percebemos que o varrimento terá de ser efetuado em  $\theta \in [-35^\circ, 35^\circ]$ . Deste modo a tomada de dados será composta por 336 pontos experimentais. Recorrendo aos ajustes efetuados a  $A(r)$ , calcularam-se as taxas médias que esperamos obter para a soma das absorções das fontes forte e fraca ( $\sim 100$  cts/s), portanto, se desejarmos uma estatística média de 3000 contagens, o tempo de aquisição médio será de 30s, esperando-se uma aquisição ativa com duração de aproximadamente 3 horas.

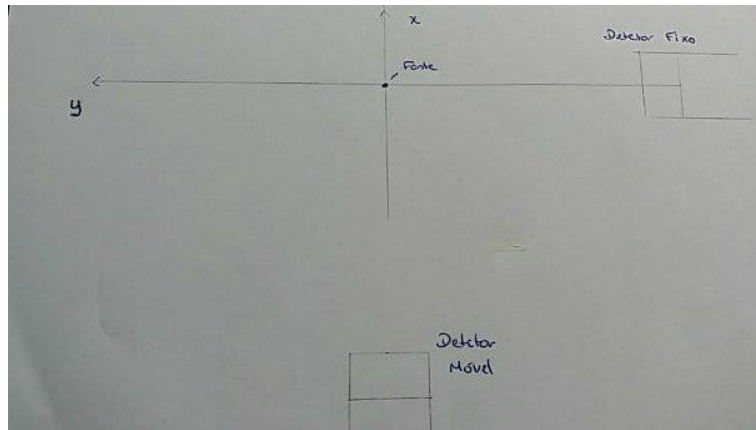
## II. TRATAMENTO DE DADOS

### 1. Dependência das coincidências fortuitas, $N_C^{fort}$ 1ª/2ª Sessão - 02-05/03/2018

O número de coincidências fortuitas num intervalo de tempo  $T$ , para um janela de coincidências  $\tau$  é dado por (derivação no logbook):

$$N_C^{fort} = 2 N_{Fixo} N_{Movel} \frac{\tau}{T},$$

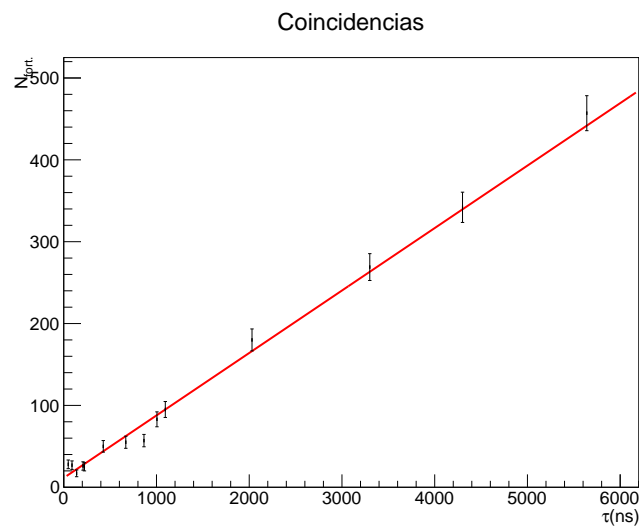
em que  $N_{Fixo}$  e  $N_{Movel}$  são as contagens em cada um dos respetivos detetores quando estes fazem um ângulo  $\theta$  de  $90^\circ$ .



Fez-se um ajuste linear pelo método dos mínimos quadrados (a menos que referência em contrário todos os ajustes são feitos por este método) a:

$$N_C^{fort} = P_0 \tau + P_1,$$

aos dados recolhidos para a variação de  $N_C^{fort}$  com  $\tau$ , com  $T$  fixo de 20 segundos obtendo-se:



$P_0$ (cts/ns)	$P_1$ (cts)	$\chi^2/ndf$
$7.63 \pm 0.24$	$11.5 \pm 2.1$	1.82

O  $\chi^2/ndf$  da ordem da unidade é um indicador da qualidade do ajuste, o que valida o modelo. Ainda assim, o valor não nulo de  $P1$  indica a presença de um *offset* de coincidências fortuitas independentes da janela, algo não contemplado teoricamente, característica intrínseca da unidade de coincidências. Quanto ao declive obtido, este é concordante com o declive teórico esperado, dado pela média de  $m_{teor} = \frac{2 N_{Fixo} N_{Movel}}{T}$  obtido para os vários ensaios, sendo o quociente  $P0/m_{teor} = 1.030 \pm 0.032$ , compatível com a unidade a  $1 \sigma$ . O erro associado a este quociente é:

$$\sigma_{P0/m_{teor}}^2 = \left( \frac{1}{m_{teor}} \sigma_{P0} \right)^2 + \left( \frac{P0}{m_{teor}^2} \sigma_{m_{teor}} \right)^2$$

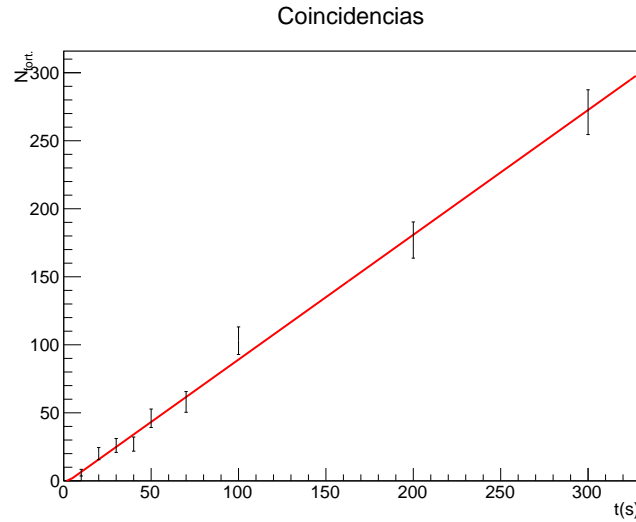
Já fixando a janela de aquisição  $\tau$ , pode-se estudar a variação de  $N_C^{fort}$  fazendo a seguinte manipulação:

$$N_C^{fort} = 2 N_{Fixo} N_{Movel} \frac{\tau}{T} = 2 \frac{N_{Fixo}}{T} \frac{N_{Movel}}{T} \frac{T^2 \tau}{T} = 2 R_{Fixo} R_{Movel} \tau T$$

que é necessária porque ao variar-se  $T$ , variam-se as contagens efetuadas por cada detetor mantendo-se os *rates* aproximadamente constantes (o que se verificou no laboratório). Assim, sendo  $\tau = 48.4 ns$  (medido no laboratório com o osciloscópio), fez-se igualmente um ajuste linear dos dados da variação de  $N_C^{fort}$  com  $T$ :

$$N_C^{fort} = \overline{P_0} T + \overline{P_1},$$

tendo-se obtido:



$\overline{P_0}$ (cts/s)	$\overline{P_1}$ (cts)	$\chi^2/ndf$
$0.917 \pm 0.041$	$-2.6 \pm 2.1$	0.745

Ainda que o  $\chi^2/ndf$  esteja próximo de 1 deverá existir alguma correlação entre os parâmetros de ajuste. Quanto ao *offset* para tempos de aquisição nulos, este não é tão relevante como anteriormente, não só porque é de uma ordem de grandeza inferior, como o 0 (inexistência de *offset*) está contido

numa vizinhança de  $3\sigma$  de  $\overline{P}_1$ . Já o declive obtido é superior ao esperado teoricamente, sendo desta vez  $\overline{P}_0/m_{teor} = 5.14 \pm 0.23$ . Esta diferença é explicada pelo *offset* das contagens fortuitas que deverá ser proporcional ao tempo de aquisição  $T$  utilizado e por isso conduz a um aumento de  $\overline{P}_0$ . De facto na relação:

$$N_C^{fort} = 2 R_{Fixo} R_{Move} \tau T,$$

falta o termo devido ao já referido *offset*:

$$N_C^{fort} = 2 R_{Fixo} R_{Move} \tau T + \frac{N_{offset} T}{T_1},$$

onde  $N_{offset} = P1$  e  $T_1$  é o tempo de aquisição utilizado no primeiro estudo (20 s). Daqui conclui-se que:

$$\overline{P}_0 - m_{teor} = \frac{N_{offset}}{T_1}.$$

Comparando,  $\frac{N_{offset}}{T_1} = 0.57 \pm 0.105$  enquanto  $\overline{P}_0 - m_{teor} = 0.738 \pm 0.041$ , ou seja, os valores interseam-se na sua incerteza, corroborando a validade do modelo teórico utilizado. Os erros associados a estes cálculos são dados por:

$$\sigma_{N_{offset}/T_1} = \left| \frac{\sigma_{N_{offset}}}{T_1} \right|$$

$$\sigma_{\overline{P}_0 - m_{teor}}^2 = \frac{N_{offset}}{T_1} = \sigma_{\overline{P}_0}^2 + \sigma_{m_{teor}}^2$$

Ao longo da sessão laboratorial optou-se por ir variando o tempo de aquisição  $T$  de forma a que o erro estatístico associado às contagens obtidas ( $\sqrt{N_i}$ ) se mantivesse aproximadamente constante. Por conseguinte, e como se utilizou a janela de  $\tau = 48.4 ns$  ao longo de toda a sessão, o *rate* a descontar em todas as medições devido às coincidências é dado por:

$$R_C^{fort}(T) = \frac{N_C^{fort}}{T} = \overline{P}_0 + \frac{\overline{P}_1}{T},$$

em que as constantes são as indicadas na tabela abaixo do ajuste. O erro associado ao *rate* subtraído:

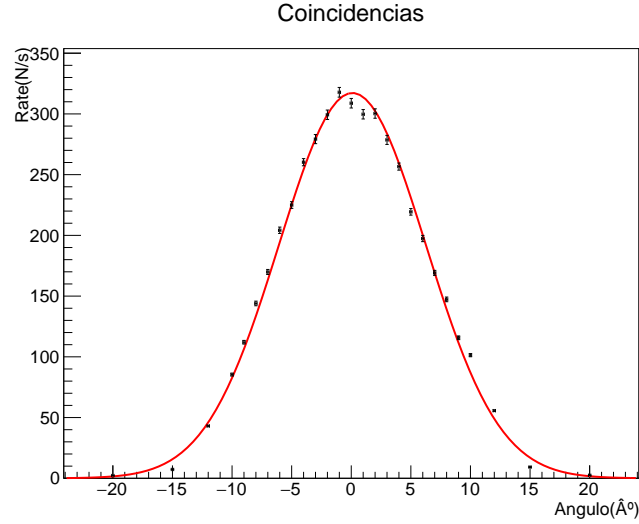
$$\sigma_{R_C^{fort}(T)}^2 = \sigma_{\overline{P}_0}^2 + \frac{\sigma_{\overline{P}_1}^2}{T^2}$$

## 2. Distribuição da correlação angular - fonte equidistante aos detetores 1ª/2ª Sessão - 02-05/03/2018

Fez-se um ajuste dos dados da primeira e segunda sessões, relativos aos rates de coincidências em função do ângulo entre detetores. Recorrendo ao ajuste efetuado  $N_C^f$  subtraíram-se a cada ponto as contagens fortuitas correspondentes ao tempo respetivo. O ajuste foi efetuado recorrendo ao método dos mínimos quadrados a uma curva gaussiana com parâmetros livres: valor médio  $\mu$ , desvio padrão  $\sigma$  e *rate* total  $A$ :

$$\frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp(-(\theta - \mu)^2/2\sigma^2)$$

Para a primeira sessão obteve-se:



$A \text{ (cts/s)}$	$\mu(^{\circ})$	$\sigma(^{\circ})$	$\chi^2/ndf$
$1953.0 \pm 7.7$	$0.0966 \pm 0.0028$	$6.155 \pm 0.023$	16.63

A grandeza do  $\chi^2/ndf$  é superior a 1 em uma ordem, o que indica que o ajuste não é perfeito. Para além disso, nota-se uma perturbação no pico da gaussiana, o que indica que deve ter havido algum desajuste da montagem no processo de aquisição de dados.

Outra forma de avaliar o modelo gaussiano aqui considerado é através da obliquidade (*skewness*),  $S$ , e curtose (*kurtosis*),  $K$ , da gaussiana obtida, sendo estas medidas de assimetria e achatamento, respetivamente. Estas são dadas por:

$$S = \frac{\sum_i (\theta_i - \bar{\theta})^3 R_i}{\sigma^3 \sum_i R_i} \quad K = \frac{\sum_i (\theta_i - \bar{\theta})^4 R_i}{\sigma^4 \sum_i R_i}$$

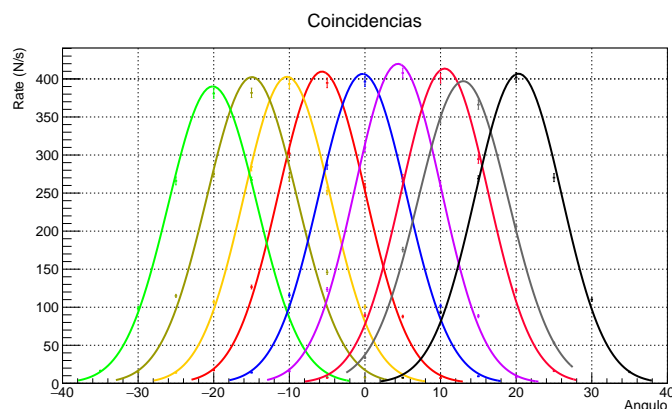
em que  $R_i$  é o rate para cada ângulo e  $\bar{\theta}$  é a média ponderada dos ângulos usados com o rate normalizado obtido para cada um. Obteve-se:

$\bar{\theta}$	$S$	$K$
0.0644	0.020	1.569

A obliquidade muito baixa indica que a curva é aproximadamente simétrica, não havendo caudas direitas ou esquerdas significantes. Note-se que, nesta definição, obliquidade positiva indica uma cauda direita predominante. Já a curtose de uma curva normal perfeita é 3, pelo que um valor superior a este indica um maior afunilamento da curva, enquanto que um valor inferior indica um achatamento superior ao gaussiano. Este último caso é o que aqui se verifica, o que indica que talvez a curva gaussiana não seja ideal para modelar esta distribuição. Por não ser imediatamente necessário para as sessões laboratoriais seguintes, adiar-se-á este estudo mais profundo da distribuição do *rate* das coincidências para uma sessão de trabalho futura.



Para os dados da segunda sessão também se testou a influência das coincidências fortuitas. Os ajustes com e sem este ruído (descontando-o com o ajuste feito às coincidências fortuitas) são visualmente idênticos, apresentando-se apenas o segundo abaixo. Já os parâmetros apresentam algumas discrepâncias.



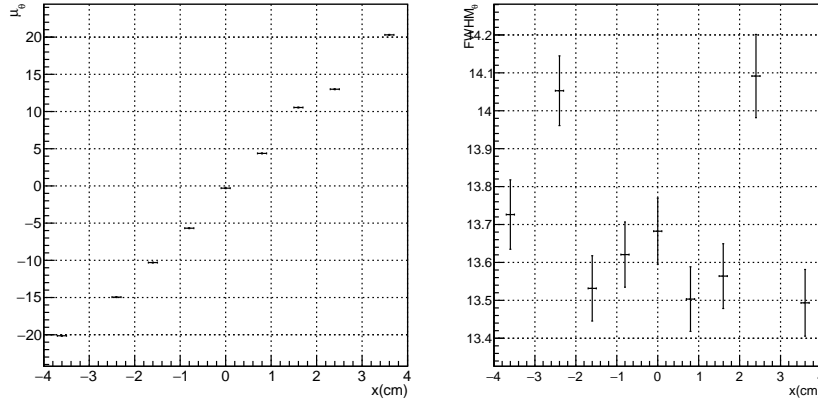
Os parâmetros do ajuste, obliquidade e curtose, com ruído:

Distância (cm)	A (cts/s)	$\mu$ (°)	$\sigma$ (°)	$\chi^2/Ndf$	S	K
-3.2	2274 $\pm$ 22	-20.139 $\pm$ 0.058	5.829 $\pm$ 0.039	20.42	-0.070	2.72
-2.4	2402 $\pm$ 23	-14.950 $\pm$ 0.058	5.967 $\pm$ 0.039	76.60	-0.051	2.66
-1.6	2315 $\pm$ 24	-10.300 $\pm$ 0.057	5.746 $\pm$ 0.037	22.97	0.0030	2.75
-0.8	2369 $\pm$ 24	-5.682 $\pm$ 0.057	5.784 $\pm$ 0.037	17.27	-0.0050	2.70
0	2363 $\pm$ 24	-0.301 $\pm$ 0.058	5.810 $\pm$ 0.037	17.23	-0.0020	2.72
0.8	2407 $\pm$ 24	4.372 $\pm$ 0.058	5.734 $\pm$ 0.036	11.62	0.017	2.74
1.6	2382 $\pm$ 24	10.542 $\pm$ 0.057	5.760 $\pm$ 0.036	16.43	0.029	2.72
2.4	2376 $\pm$ 23	12.998 $\pm$ 0.061	5.984 $\pm$ 0.047	5.49	-0.0020	2.18
3.2	2332 $\pm$ 23	20.306 $\pm$ 0.056	5.730 $\pm$ 0.037	17.52	0.062	2.76

Os parâmetros do ajuste, obliquidade e curtose, já sem ruído:

Distância (cm)	A (cts/s)	$\mu$ (°)	$\sigma$ (°)	$\chi^2/Ndf$	S	K
-3.2	2263 $\pm$ 22	-20.138 $\pm$ 0.058	5.793 $\pm$ 0.039	22.81	-0.072	2.72
-2.4	2391 $\pm$ 23	-14.946 $\pm$ 0.058	5.935 $\pm$ 0.039	81.01	-0.052	2.66
-1.6	2303 $\pm$ 23	-10.298 $\pm$ 0.057	5.708 $\pm$ 0.037	26.03	-0.0045	2.75
-0.8	2357 $\pm$ 24	-5.685 $\pm$ 0.057	5.747 $\pm$ 0.037	20.23	-0.0090	2.71
0	2351 $\pm$ 24	-0.303 $\pm$ 0.059	5.773 $\pm$ 0.037	19.68	-0.0030	2.73
0.8	2395 $\pm$ 24	4.367 $\pm$ 0.058	5.696 $\pm$ 0.036	13.92	0.014	2.75
1.6	2370 $\pm$ 24	10.543 $\pm$ 0.057	5.723 $\pm$ 0.036	19.2	0.032	2.72
2.4	2366 $\pm$ 23	12.999 $\pm$ 0.061	5.961 $\pm$ 0.047	5.9	-0.0010	2.19
3.2	2320 $\pm$ 23	20.307 $\pm$ 0.057	5.693 $\pm$ 0.038	20.02	0.065	2.76

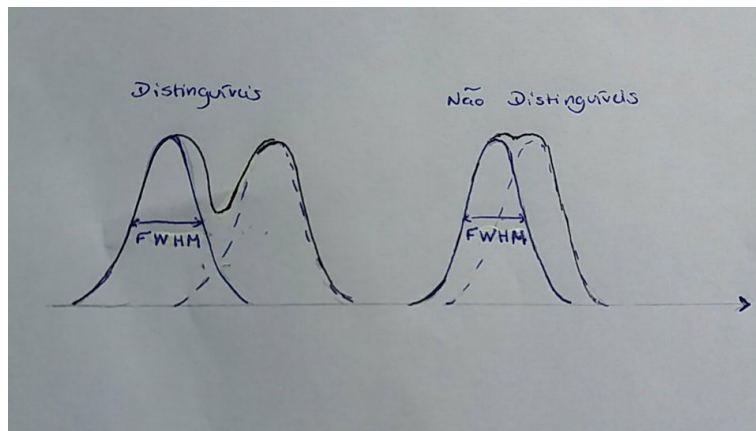
Podemos representar graficamente a evolução do centróide de cada curva e do seu FWHM em função da posição (x) da fonte no plano equidistante:



Note-se em primeiro lugar que a ordem do  $\chi^2/ndf$  varia para cada ajuste, mas é em média idêntica à do primeiro, o que indica uma qualidade semelhante. No entanto, o *rate* total de coincidências é superior nos dados da segunda sessão, o que pode indicar que os dados obtidos na primeira têm uma imprecisão maior (provavelmente a janela de Energias escolhida foi pequena demais). A obliquidade mantém-se muito baixa, o que indica de novo a grande simetria das curvas. Já a curtose aproxima-se agora mais do valor esperado para a gaussiana. Esta apresenta-se mesmo assim inferior a 3, o que indica que as caudas destas distribuições tendem para zero mais rapidamente que numa distribuição normal.

Para além disto, retirando o ruído das coincidências fortuitas aos dados, a obliquidade e a curtose mantêm-se baixas, sendo que a última se aproxima ligeiramente mais da de uma gaussiana. No entanto, os  $\chi^2/ndf$  aumentam, o que leva a crer que o modelo gaussiano utilizado nesta análise não é o ideal para os dados recolhidos pelo que se deve tentar modelar esta distribuição de outra forma.

Não obstante, esta distribuição permite-nos ter um parâmetro importante para a caracterização da resolução angular em  $\theta$  ( $^\circ$ ) do detetor - o  $FWHM = 2.353\sigma$  e a sua variação com  $\theta$ . Se tivermos dois picos aproximadamente gaussianos (como é o caso da distribuição em análise) com a mesma amplitude, para estes serem distinguíveis os seus centróides têm que diferir dos seus  $FWHM$ .



Analisando o painel direito da figura, nota-se que os  $FWHM_\theta$  para as diversas posições no plano equidistante aos detetores de cada um dos picos são aproximadamente constantes. Por esta razão, calcula-se a média dos  $FWHM_\theta$ , sendo o seu erro dado pelo desvio quadrático médio:

$FWHM_{\theta} (^{\circ})$	$13.70 \pm 0.40$
----------------------------	------------------

Este resultado é esperado dado que a variação da distância da fonte ao plano equidistante entre os dois detetores é muito pequena comparada com a distância deste plano aos detetores (+ livre percurso médio dos  $\gamma$  no detetor que será determinado *a posteriori*). Assim este  $\overline{FWHM}_{\theta}$  não deverá variar para pequenas variações da distância da fonte ao plano equidistante entre os detetores.

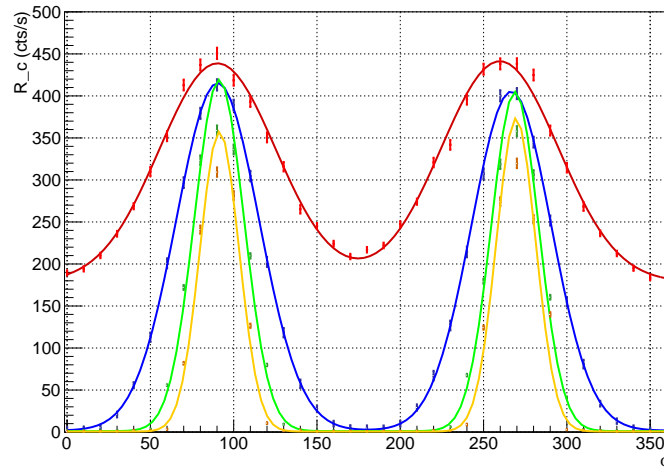
### 3. Distribuição da correlação angular - fonte equidistante aos detetores 1ª/2ª Sessão - 02-05/03/2018

Na 2ª sessão laboratorial conclui-se que os *rates* das coincidências fortuitas estavam a ser mal descontados. Nomeadamente, o parâmetro  $\overline{P}_0$  de  $R_C^{fort}(T)$  varia ao alterar-se a posição da fonte. Assim, o mais correto a fazer seria para cada ensaio descontar  $2 R_{Movel} R_{Fixo} T$  somada da taxa de *offset* obtida no ajuste realizado a  $N_{Fort}(\tau)$ . Contudo, observa-se uma não linearidade na dependência temporal das contagens causadas por este *offset*, ainda para mais, para iguais tempos de aquisição, o seu valor não se manteve constante entre as sessões laboratoriais, implicando que a nossa compreensão do funcionamento do detetor de coincidências (ainda) não é total. Como o *rate* das coincidências fortuitas é desprezável face às coincidências obtidas, prosseguiu-se o estudo e adiou-se esta discussão para uma sessão de trabalho futura, já que o objetivo primordial para realizar a última sessão laboratorial é determinar a resolução angular do detetor e os seus limites de variação angular, que estará relacionado com os *FWHM* das distribuições obtidas.

Sendo assim, até nova chamada os próximos estudos são feitos sem descontar o *rate* devido a coincidências fortuitas.

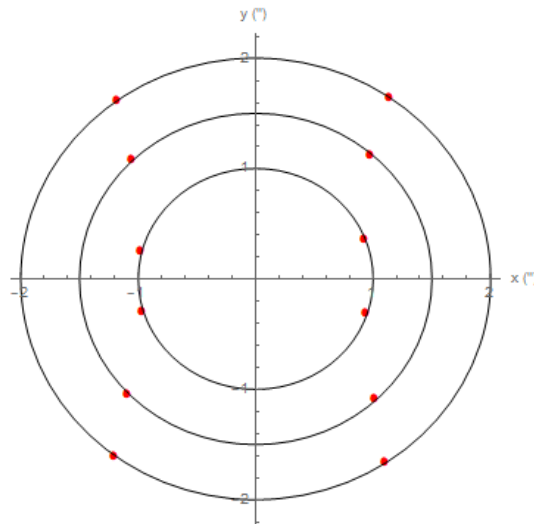
### 4. Distribuição das coincidências em função da rotação do porta amostras 3ª Sessão - 12/03/2018

À semelhança do que foi feito para a distribuição das coincidências no plano equidistante aos dois detetores, ajustaram-se gaussianas aos dados. Desta vez, optou-se por uma soma de duas gaussianas já que se distinguiam claramente dois centróides aproximadamente ao longo do eixo entre os detetores ( $\phi = 90^{\circ}, 270^{\circ}$ ). Inclui-se igualmente um parâmetro de *offset* (Off):



$r$ (")	$A_1$ (cts/s)	$\mu_1$ (")	$\sigma_1$ (")	S	K	$A_2$ (cts/s)	$\mu_2$ (")	$\sigma_2$ (")	Off (cts)	S	K	$\chi^2/ndf$
0.5	$260.6 \pm 3.4$	$90.317 \pm 0.375$	$34.964 \pm 0.516$	-0.11	3.90	$263.1 \pm 3.3$	$259.776 \pm 0.372$	$32.5 \pm 0.518$	$178.2 \pm 2.1$	0.16	3.49	2.333
1.0	$414.3 \pm 3.7$	$90.392 \pm 0.236$	$24.157 \pm 0.208$	0.0039	3.67	$404.3 \pm 3.8$	$266.496 \pm 0.242$	$24.102 \pm 0.218$	$1.715 \pm 1.025$	-0.080	3.71	0.468
1.5	$418.2 \pm 3.7$	$91.295 \pm 0.058$	$14.868 \pm 0.053$	-0.11	5.87	$403.8 \pm 3.7$	$268.832 \pm 0.092$	$14.195 \pm 0.056$	$1.109 \pm 0.067$	-0.12	6.32	37.12
2	$357.1 \pm 4.0$	$91.496 \pm 0.102$	$11.737 \pm 0.066$	-0.044	7.19	$372.9 \pm 4.0$	$269.470 \pm 0.106$	$11.807 \pm 0.063$	$0.6335 \pm 0.0930$	-0.059	7.05	43.29

É notório que com o aumento do raio  $a$  a que se colocam as fontes, a distribuição afasta-se mais de uma distribuição normal, como se pode verificar pelo distanciamento da curtose do valor 3,0 que é ainda reforçado pelo afastamento do  $\chi^2/ndf$  da unidade. Isto está intrinsecamente ligado à montagem, nomeadamente às regiões de sombra referidas na preparação da sessão experimental. Excluindo os valores para  $r = 0.5''$ , já que para este raio estamos sempre no interior da região definida pela interseção dos limites dos detetores a  $\theta = 0^\circ$ , os pontos que definem os limites das regiões de interesse,  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ , apresentam a seguinte variação:



sendo obtidos a partir de:

$$x = r \cos(\mu_i \pm 3\sigma_i) \quad y = r \sin(\mu_i \pm 3\sigma_i)$$

Teoricamente, estes pontos deveriam descrever duas retas verticais, com  $x = \pm R$  ( $R$ - raio dos detetores) o que claramente não se verifica. Contudo, esta anomalia é explicada tendo em consideração que a

distribuição utilizada para obter  $\sigma$  não foi a mais correta. De facto, pelos valores da curtose ( $> 3$ ) sabe-se que a distribuição em  $\phi$  deverá ser mais afunilada que a distribuição normal. Isto traduz-se numa largura  $\sigma$  menor. Consequentemente, ao utilizar-se o desvio padrão do ajuste a gaussianas para estimar os pontos a  $3\sigma$  do centróide, onde entramos na região de sombra, estar-se-á a incorrer numa estimativa por excesso. Esta será tanto maior, quanto maior a distância da fonte ao centro do porta-amostras, pois é para estas que o desvio em relação à distribuição normal é maior (maiores  $\chi/ndf$  e curtose). Por esta razão, podemos considerar uma boa estimativa por excesso da região de interesse em  $x$  a dada pela média dos pontos limites para o menor raio, onde o erro corresponde ao desvio médio:

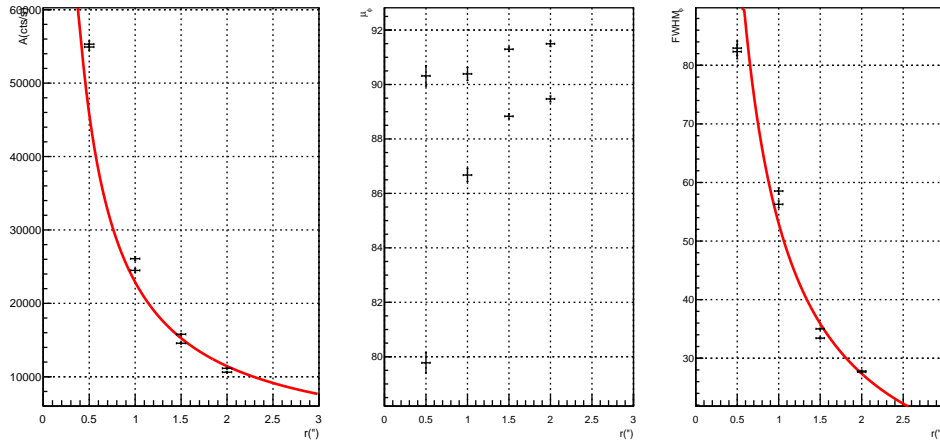
$x_{esq} (")$	$x_{dir} (")$
$-0.962 \pm 0.018$	$0.941 \pm 0.013$

A diferença entre estes valores, ainda que intersetem no erro, é indicadora de uma pequena assimetria no eixo entre os detetores em relação ao eixo do porta amostras, coerente com aquela que já tinha sido observada durante a sessão experimental (ver logbook do laboratório):



Quanto aos centróides obtidos, para os do ramo esquerdo da gaussiana os valores são coerentes com o seu valor esperado de  $90^\circ$ . Porém, no ramo direito parece existir um *offset* que diminui para raios maiores. Como dito no logbook do laboratório, observou-se durante o ensaio para  $r = 1.5''$  que a fonte tinha pequenos deslocamentos ao rodar-se o porta amostras. A partir desse momento, teve-se um maior cuidado nesta rotação o que explicaria porque é que os  $\mu_2$  estão em maior concordância com o valor esperado de  $270^\circ$  para os últimos ensaios (note-se que se começou em  $\phi = 90^\circ$  e foi-se avançando em passos  $10^\circ$ ).

Na figura seguinte resumem-se os resultados obtidos neste sector da experiência:



Por análise do aspeto visual dos gráficos intui-se que deverá haver uma dependência das rates obtidas e do  $FWHM_{\phi}(r)$  do seguinte tipo:

$$f(r) = b_{\infty} + \frac{a}{r^{\alpha}}$$

sendo  $f(r) = FWHM_{\phi}(r)$  ou  $f(r) = A(r)$ .

Fazendo *fits* aos dados usando  $\alpha$ ,  $b_{\infty}$  e  $a$  como parâmetros de ajuste obtêm-se valores coerentes com  $\alpha = 1$ , apresentando-se na seguinte tabela os valores obtidos colocando essa condição inicial:

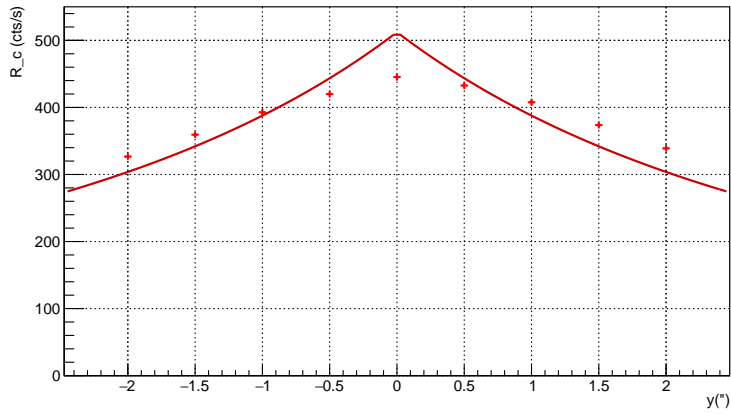
$f(r)$	$b_{\infty}$	$a$	$\chi^2/NDF$
$FWHM_{\phi} (^{\circ})$	$1.7 \pm 1.7$	$51.3 \pm 2.8$	4.78008
$A(cts/s)$	$0 \pm 60$	$22883 \pm 307$	3.45226

Ambos os  $b_{\infty}$  são compatíveis com assíntotas nulas em infinito, como seria intuitivamente de esperar. Para além disso os  $\chi^2/NDF$  são próximas da unidade o que valida o modelo considerado.

## 5. Distribuição das coincidências em função da posição ao longo do eixo entre os detetores

3ª Sessão - 12/03/2018

A variação em  $yy$  realizou-se com detetores alinhados ( $\theta = 0$ ) e fonte equidistante a ambos. No entanto, os valores retirados na 2ª sessão para esta secção apresentavam demasiadas incongruências, possivelmente devido a haver desalinhamento da montagem, o ajuste para a taxa de coincidências resultava numa distância  $d$  cerca de duas vezes superior à proveniente dos ajustes às taxas de contagens de cada detetor. Forçando a que as distâncias fossem iguais, o ajuste tinha o seguinte aspeto:



Assim, utilizaram-se os valores para  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 180^\circ$  retirados na 3ª sessão, para cada posição em  $y$ .

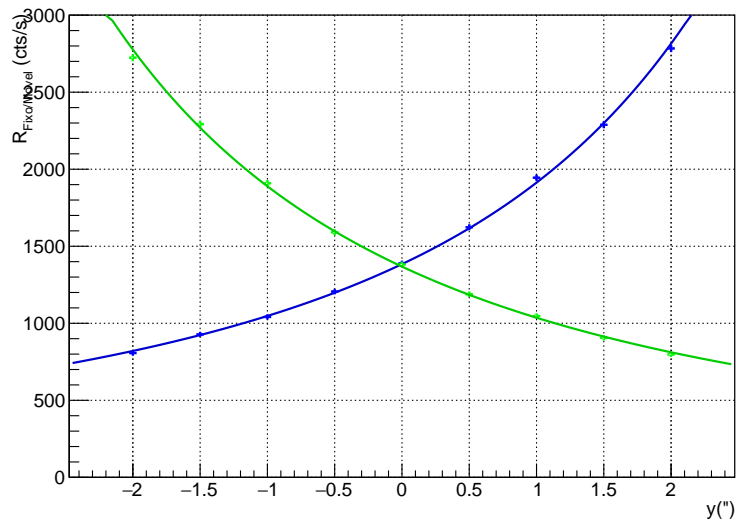
Na tabela abaixo, a taxa de coincidências fortuitas  $R_C$  inclui correção relacionada com as coincidências fortuitas.

$y(") \pm 0.02$	$R_{Fixo}$	$R_{Movel}$	$R_C$
-2	$2724.1 \pm 16.5$	$806.7 \pm 9.0$	$310.2 \pm 5.6$
-1.5	$2292.8 \pm 15.1$	$927.9 \pm 9.6$	$359.7 \pm 6.0$
-1	$1908.7 \pm 13.8$	$1041.2 \pm 10.2$	$414 \pm 6.4$
-0.5	$1590.4 \pm 12.6$	$1205.8 \pm 11.0$	$451.5 \pm 6.7$
0	$1381.9 \pm 11.8$	$1388.1 \pm 11.8$	$521.2 \pm 7.3$
0.5	$1188.8 \pm 10.9$	$1623.2 \pm 12.7$	$439.1 \pm 6.6$
1	$1047.1 \pm 10.2$	$1944.8 \pm 13.9$	$403.6 \pm 6.4$
1.5	$905.2 \pm 9.5$	$2288.2 \pm 15.1$	$358.9 \pm 6.0$
2	$797.6 \pm 8.9$	$2784 \pm 16.7$	$320.6 \pm 5.7$

Sendo a taxa de partículas  $\gamma$  detetadas em função de  $y$  proporcional ao ângulo sólido de cada detetor, esta pode ser descrita pela seguinte expressão:

$$R_{F/M} = \frac{A}{(d \pm y)^2}$$

para o detetor móvel (-) e fixo (+). Abaixo apresenta-se os ajustes pelo método dos mínimos quadrados da expressão anterior aos dados de cada detetor.

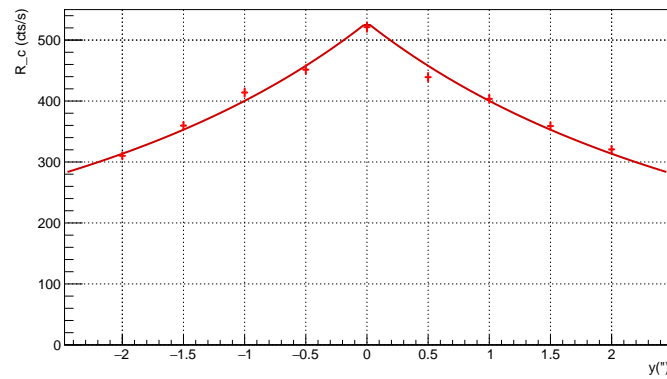


detetor	A ( $10^3 \cdot ''^2 \text{cts/s}$ )	d (")	$\chi^2/Ndf$
fixo	$62.0 \pm 1.2$	$6.693 \pm 0.058$	1.0128
móvel	$61.6 \pm 1.2$	$6.709 \pm 0.058$	1.48086

Verifica-se que o  $\chi^2/Ndf$  é da ordem da unidade, o que revela bons ajustes, como se pode intuir visualmente. O parâmetro  $d$ , que indica a distância dos detetores à fonte, apresenta-se superior ao esperado, já que os detetores foram colocados a  $6.14''$  ( $15.6 \text{ cm}$ ) da mesma. Isto indica que há um livre percurso médio da partícula  $\gamma$  dentro do detetor para que a mesma seja detetada.

Para ajustar o modelo que descreve a variação das taxas de coincidências com  $y$ , fixou-se a distância  $d$  à média dos parâmetros resultantes dos ajustes anteriores. Dessa forma, utilizou-se a expressão (resultado abaixo):

$$R_C = \frac{A}{(d_{avg} - |y|)^2}$$



A ( $10^3 \cdot ''^2 \text{cts/s}$ )	d (") - Fixo	$\chi^2/Ndf$
$23.74 \pm 0.13$	$6.7007 \pm 0.0082$	2.12



De novo, o  $\chi^2/Ndf$  é da ordem da unidade, o que indica um bom ajuste aos dados. Já o parâmetro  $A$ , que representa o produto da área do detetor pela taxa de contagens em coincidência, diminuiu para cerca de um terço, o que representa sensivelmente a eficiência do fotópico, estudada em maior detalhe na secção seguinte.

## 6. Eficiência do fotópico

1ª Sessão - 02/03/2018

Numa situação em que as eficiências geométricas dos detetores sejam idênticas ( $\epsilon_{geo_A} = \epsilon_{geo_B} \equiv \epsilon_g$ ), as eficiências de cada um dos detetores  $\epsilon_{A/B}$  e as eficiências de contagens  $\epsilon_C$  são dadas, em função das eficiências intrínsecas  $\epsilon_{I_{A/B}}$  por:

$$\begin{aligned}\epsilon_{A/B} &= \epsilon_{I_{A/B}} \epsilon_g \\ \epsilon_C &= \epsilon_{I_A} \epsilon_{I_B} \epsilon_g\end{aligned}$$

A eficiência do fotópico, para cada um dos detetores, é dada pelo quociente entre o número de coincidências e as contagens totais no outro detetor (ou seja, a eficiência intrínseca ao outro detetor):

$$\epsilon_{I_{A/B}} = \frac{\epsilon_C}{\epsilon_{A/B}}$$

Calculou-se uma eficiência geral associada ao fotópico, estimada por uma média das eficiências referidas:

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_I &= \frac{\epsilon_C}{2} \left( \frac{1}{\epsilon_A} + \frac{1}{\epsilon_B} \right) \\ \sigma_{\bar{\epsilon}_I}^2 &= \left( \frac{\bar{\epsilon}_I}{\epsilon_C} \sigma_{\epsilon_C} \right)^2 + \left( \frac{\epsilon_C}{2\epsilon_A^2} \sigma_{\epsilon_A} \right)^2 + \left( \frac{\epsilon_C}{2\epsilon_B^2} \sigma_{\epsilon_B} \right)^2\end{aligned}$$

Tomou-se  $\theta = 0$ , com a fonte centrada e equidistante a ambos os detetores, de forma às coincidências serem máximas e as eficiências geométricas serem idênticas, obtendo-se:

$N_C$	$N_A$	$N_B$	$\epsilon_A$	$\epsilon_B$	$\bar{\epsilon}_I$
$3964 \pm 63$	$13881 \pm 118$	$13819 \pm 118$	$0.2869 \pm 0.0052$	$0.2856 \pm 0.0051$	$0.2862 \pm 0.0049$

Verifica-se que as eficiências de ambos os detetores são semelhantes, sendo a do móvel ( $A$ ) ligeiramente superior. No entanto, intercetam-se na incerteza associada a estas.

A eficiência do fotópico  $\bar{\epsilon}_I$  não se apresenta como 100% devido ao número elevado de fótons produzidos na aniquilação de pares eletrão-positrão cuja absorção energética não é total por parte do detetor, (contribuem para o patamar de Compton e outras regiões menos energéticas associadas a este fotópico).

## 7. Existência de contagens fortuitas para janelas de aquisição $\tau$ nulas

4ª Sessão -

15/3/2018

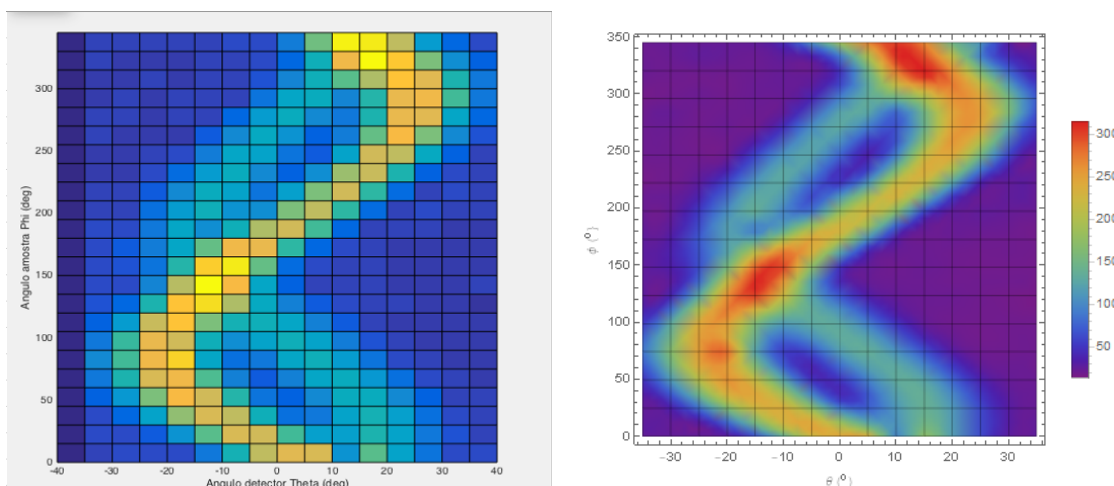
Vimos aquando o estudo da dependência das coincidências fortuitas com a janela de aquisição  $\tau$ , a existência dum *offset* positivo não negligenciável na relação linear entre  $N_C^{fort}$  e  $\tau$ . Primeiramente, pôs-se a hipótese deste ter origem na montagem, devido por exemplo à eletrónica. Na última sessão

procurou-se explorar esta teoria. Observámos que ao fazer aquisições sem fontes, não se obtinham coincidências. Logo, este *offset* deverá estar relacionado com a física do decaimento do  $^{22}\text{Na}$  e não com um fator externo atribuído erradamente à montagem. Analisando o diagrama de decaimento do  $^{22}\text{Na}$  observamos que o núcleo decai em primeira instância num estado excitado do  $^{22}\text{Na}$  com energia  $E = 1.274\text{MeV}$  que por sua vez decai num nuclide estável por emissão de um fóton com essa mesma energia. Sabemos da mecânica quântica que o tempo de semi-vida destes estados excitados mais energéticos dos núcleos é bastante reduzido, pelo que, nas emissões *back-to-back* de fótons por aniquilação dos positrões provenientes da fonte, devemos considerar a emissão de um terceiro fóton simultâneo com energia  $E_\gamma = 1.274\text{MeV}$ . A direção de emissão deste fóton está descorrelacionada da direção de emissão dos restantes fótons, pelo que a probabilidade da sua absorção por parte de um dos detetores em simultâneo com um dos fótons provenientes da aniquilação é afeta de um fator extra  $\epsilon_{geo}$ . Por outro lado, é importante referir que estando o detetor de coincidências calibrado para apenas detetar fótons com energia próxima de  $511\text{KeV}$ , os fótons de energia  $E_\gamma = 1.274\text{MeV}$  que contribuem para este efeito apenas são detetados numa região muito específica do seu patamar de Compton, sendo a eficiência de deteção deste fenómeno reduzida de um novo fator multiplicativo bastante pequeno. Assim, este *offset* presente em janelas de aquisição nulas é um efeito físico detetável em qualquer ângulo entre os detetores, esperando-se no entanto que a sua contribuição seja desprezável relativamente à taxa de coincidências reais.

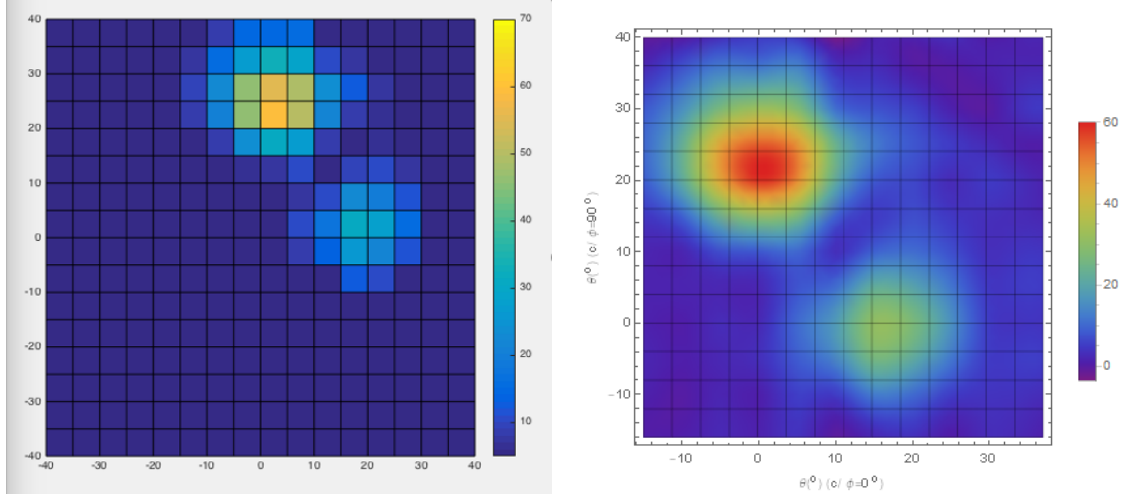
## 8. Sinograma

4ª Sessão - 15/3/2018

O sinograma obtido a partir da recolha de dados realizada na última sessão experimental apresenta-se abaixo (sem descontar as coincidências fortuitas), quer na sua versão *pixelizada* (em bruto), quer fazendo uma interpolação numérica aos dados no *Mathematica*:



Aplicando-lhe a Transformada Inversa de Radon, chegamos à seguinte reconstrução tomográfica:



Clarificando o eixo em que a representação da reconstrução é feita,  $\theta (c/\phi = 0^\circ)$  (usemos a notação  $\theta_0$ ) corresponde a variações em  $\theta$  em relação ao eixo entre os dois detetores quando estes estão alinhados. Já  $\theta (c/\phi = 90^\circ)$  (passemos para a notação  $\theta_{90}$ ) são desvios em  $\theta$  em relação ao eixo perpendicular ao anterior.

Observam-se claramente dois picos, desfasados de 90 graus, sendo um deles mais intenso (correspondente à fonte forte) que o outro (fonte fraca). Ambas estão aproximadamente centrados num eixo (opostos), sendo que o correspondente à fonte forte está mais longe da origem (0",0"). Todas estas observações são coerentes com a posição inicial em que as fontes foram colocadas - **Forte** (0",1.5") e **Fraca** (1",0").

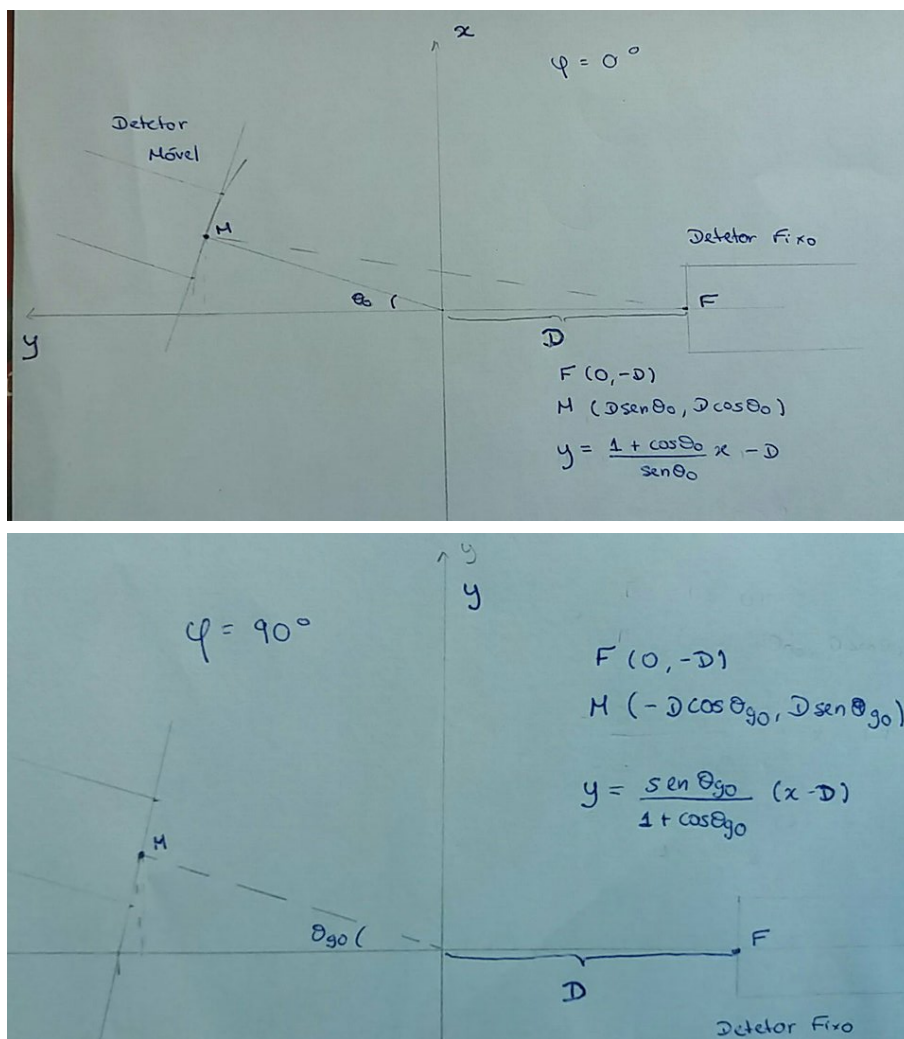
No entanto, para quantificarmos a precisão do método é necessário obter o centro destes picos bidimensionais. Começou-se por utilizar a função interpoladora para a reconstrução tomográfica para determinar os máximos de cada pico, dando valores iniciais coerentes a  $\theta_{0_{Max}}$  e  $\theta_{90_{Max}}$ . De seguida, através de integração numérica determinou-se o valor médio e desvio médio de  $\theta_{0_{Max}}$  e  $\theta_{90_{Max}}$  associado a cada pico, sendo as integrações feitas num intervalo de  $[\bar{\theta}_\alpha - FWHM_\alpha, \bar{\theta}_\alpha + FWHM_\alpha]$  ( $\alpha : 0, 90$  respetivamente). Este processo foi iterado até os valores convergirem a uma diferença menor que 1 %, sendo que o valor inicial de  $FWHM_\alpha$  foi de  $10^\circ$  para  $\phi = 0$  e  $\phi = 90^\circ$ .

Os resultados obtidos foram:

	$\theta_0 (^\circ)$	$\theta_{90} (^\circ)$
Fonte Fraca	$16.53 \pm 5.01$	$-0.21 \pm 4.99$
Fonte Forte	$0.19 \pm 5.07$	$-23.53 \pm 6.09$

É necessário agora traduzir este resultado para uma representação cartesiana em  $x$  e  $y$ , para podermos comparar com os valores esperados.

Atendendo às seguintes construções geométricas:



e igualando as expressões para  $y$  chegamos finalmente a:

$$x = D \frac{\sin \theta_0 (1 + \cos \theta_0) + \sin \theta_0 \sin \theta_{90}}{(1 + \cos \theta_{90}) (1 + \cos \theta_0) + \sin \theta_0 \sin \theta_{90}}$$

Considerando que na verdade  $D$  não é a distância da fonte ao detetor mas sim esta distância somada do percurso médio no detetor até os  $\gamma$  serem detetados, ou seja,  $D = 16.9 \text{ cm}$  chega-se à seguinte conversão:

	$x \text{ (")}$	$\delta_x (\#\sigma)$	$y \text{ (")}$	$\delta_y (\#\sigma)$
Fonte Fraca	$0.965 \pm 0.304$	-0.115	$-0.010 \pm 0.277$	-0.036
Fonte Forte	$0.013 \pm 0.310$	0.042	$1.383 \pm 0.338$	-0.346

## 9. Estudo geral das distribuições angulares

1/2/3/4ª Sessão

Ao longo do estudo das distribuições das coincidências em função dos vários parâmetros variáveis das montagens (distância  $x$  da fonte ao centro do porta amostras, o seu ângulo de rotação  $\phi$  e o ângulo  $\theta$  de rotação do detetor móvel) foram-se ajustando gaussianas, verificando-se que estas não são ideais na descrição física dos dados (recorde-se a discussão da *kurtosis* da distribuição).

Vamos retornar ao estudo destas distribuições, recorrendo desta feita a expressões baseadas em argumentos geométricos, que as modelem mais acertadamente.

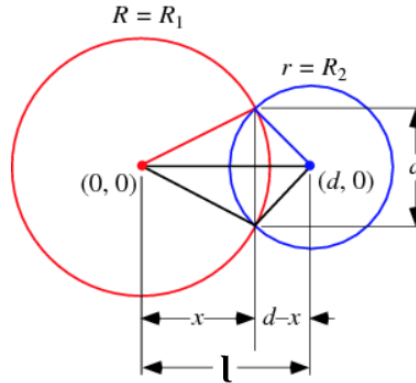
## 10. Modelo Teórico

Na detecção de aniquilação de pares elétron-positrão, com emissão de fótons *back-to-back*, a coincidência ocorre quando ambos os fótons são detetados (um em cada detetor). Deste modo, o número de coincidências será proporcional ao ângulo sólido correspondente à intersecção de cónicas provenientes da fonte e englobando cada um dos detetores. Estando os fótons desfasados angularmente de  $180^\circ$  na sua emissão, uma das cónicas terá a direção de um dos detetores, tendo a outra a direção da inversão do segundo detetor relativo à fonte.

As intersecções de cada uma destas cónicas com uma dada superfície esférica centrada na fonte têm um formato circular. Assim, o ângulo sólido,  $\Omega$ , relevante para o cálculo da taxa de coincidências é dado pelo quociente entre a área da intersecção dos círculos e o quadrado do raio,  $r$ , da superfície esférica:

$$\Omega \propto \frac{A_{int}}{r^2}$$

A área da intersecção de dois círculos genéricos de raios  $R_1$  e  $R_2$ , cujos centros distem de uma distância  $l$  é dada por [4]:



$$A(R_1, R_2, l) = R_1^2 \arccos\left(\frac{l^2 + R_1^2 - R_2^2}{2lR_1}\right) + R_2^2 \arccos\left(\frac{l^2 - R_1^2 + R_2^2}{2lR_2}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{(-l + R_1 + R_2)(l - R_1 + R_2)(l + R_1 - R_2)(l + R_1 + R_2)}$$

De modo a obter uma descrição completa deste ângulo sólido de intersecção, resta caracterizar os parâmetros das projeções circulares de cada detetor (os seus raios  $R_1$  e  $R_2$  e a distância entre os seus centros geométricos,  $l$ ) em função dos parâmetros experimentais (o ângulo do detetor móvel  $\theta$ , o ângulo do porta amostras  $\phi$ , a distância da fonte ao centro geométrico  $x$ , o raio de abertura dos detetores  $R$  e a sua distância relativamente ao centro do porta amostras  $d$ ).

Recorre-se à seguinte figura para um auxílio na descrição geométrica do problema, na qual  $O$  representa o centro do porta amostras,  $F$  representa a posição da fonte,  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $x$  e  $d$  têm o significado descrita acima e  $(AB, A'B')$ ,  $(CD, C'D')$  são os detetores móvel e fixo e as respetivas imagens:



A posição angular da imagem do detetor móvel  $\theta_{\text{Img.}}$  é dada por:

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \arccos\left(\frac{r_1^2 + d^2 - x^2}{2dr_1}\right) \\ k_0 &= \begin{cases} 0, & -\frac{\pi}{2} \leq \phi - \theta - \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{cc.} \end{cases} \\ \theta_{\text{Img.}}(\theta) &= \theta + (-1)^{k_0} \theta_0 - \varphi'_0 + \varphi_0\end{aligned}$$

Procede-se de modo análogo para o detetor fixo, escolhendo  $\theta = \pi$  e mantendo o raio da superfície esférica definido acima. De modo a inverter a sua imagem, subtraiu-se  $\pi$  à posição angular da sua projeção, obtendo-se as seguintes expressões para as posições angulares das imagens de cada detetor ( $\theta'_{\text{Móvel}}$  e  $\theta'_{\text{Fixo}}$ ):

$$\begin{aligned}\theta'_{\text{Móvel}} &= \theta_{\text{Img.}}(\theta) \\ \theta'_{\text{Fixo}} &= \theta_{\text{Img.}}(\pi) - \pi\end{aligned}$$

Assim, a distância entre os centros das imagens dos detetores é dada por:

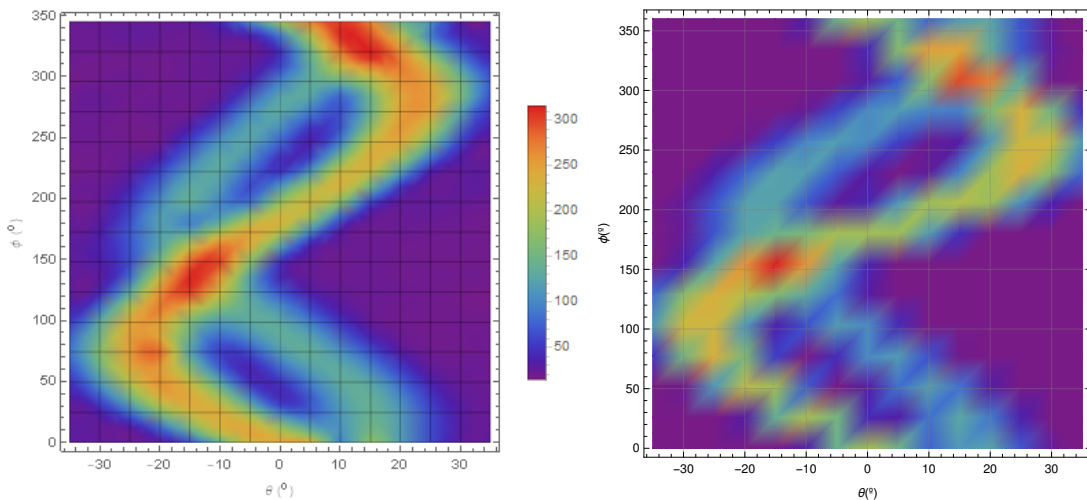
$$\Delta_l = d' \sin |\theta'_{\text{Fixo}} - \theta'_{\text{Móvel}}|$$

Finalmente, o ângulo sólido correspondente à intersecção das imagens de cada detetor é dado com generalidade por:

$$\Omega_C(\theta, \phi, x, d, R) = \frac{A(R'_{\text{Fixo}}, R'_{\text{Móvel}}, \Delta_l)}{d'^2}$$

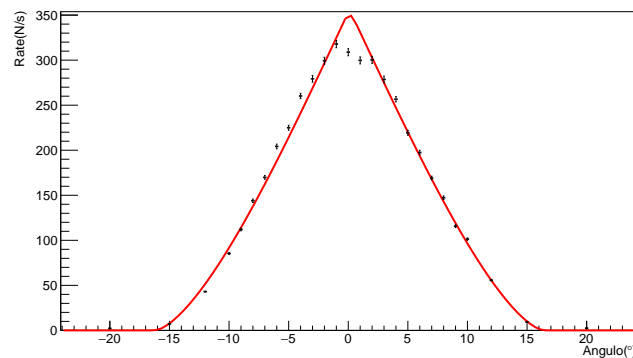
Note-se que na dedução desta expressão, o uso da expressão para a área de intersecção círculo círculo é apenas uma boa aproximação. Na verdade, ela é válida apenas para círculos co-planares e não no caso dos círculos definidos acima. No entanto, dada a larga curvatura da superfície esférica na qual são projetados, este fator é apenas de segunda ordem, não se esperando uma influência relevante nos resultados obtidos.

Por forma a testar a validade desta expressão, representam-se abaixo, lado a lado os dados experimentais obtidos na 4ª sessão experimental (painel esquerdo) e a sua previsão teórica através do modelo descrito acima (painel direito), observando-se uma elevada correspondência entre as figuras:



## 11. Distribuição da correlação angular - fonte equidistante aos detetores (dados da 1a e 2a Sessão)

Recuperando os dados da primeira sessão para a distribuição angular do número de contagens no caso de uma fonte centrada, ajustou-se a expressão deduzida acima, tendo por parâmetros livres,  $R$ ,  $d$ , uma constante de proporcionalidade  $A$ , e possíveis offsets iniciais em  $x$  e  $\theta$ ,  $x_0$  e  $\theta_0$ , obtendo-se:



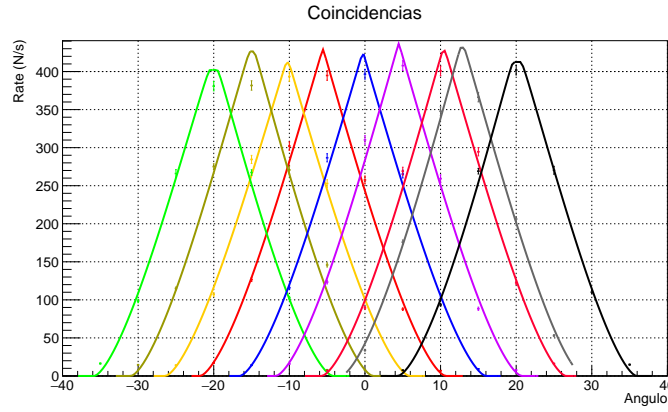
Os valores para os parâmetros de ajuste obtidos foram:

Parâmetro	Valor
$R(^{\circ})$	$0.920 \pm 0.011$
$d(^{\circ})$	$6.570 \pm 0.058$
$x_0(^{\circ})$	$-0.194 \pm 0.167$
$A(10^3 \cdot \text{cts}/s)$	$5.780 \pm 0.063$
$\theta_0(^{\circ})$	$3.5 \pm 2.9$
$\chi^2/NDF$	27.8766

Podemos observar que o valor para  $\chi^2/NDF$  é superior ao obtido no ajuste inicial a uma gaussiana. Isto deve-se a uma má qualidade dos dados obtidos, possivelmente afetados por desvios não sistemáticos angulares das posições dos detetores e da fonte. O valor obtido para o raio do detetor é coerente com o valor estimado em aula, sendo que a distância  $d(^{\circ})$  obtida é de magnitude ligeiramente inferior à estimada nos ajustes efetuados à variação da posição da fonte ao longo do eixo entre os detetores.

Analisando agora os dados respeitantes à distribuição angular das taxas de contagem para posições  $x$  da fonte ao longo do plano equidistante aos detetores, ajustou-se (para cada posição  $x$ ), a expressão geral deduzida atrás, tendo por parâmetros livres a posição  $x$  e uma constante de proporcionalidade  $A$ , fixando-se o raio às  $0.920(^{\circ})$  obtidas no ajuste anterior, e a distância às  $6.701(^{\circ})$  obtidas no ajuste à distribuição angular em função da posição da fonte ao longo do eixo (melhor qualidade de ajuste que no caso acima). Obteve-se:





Os resultados obtidos para os parâmetros de ajuste encontram-se resumidos na tabela abaixo:

$x$ (cm)	A	$\chi^2/Ndf$
$-0.8273 \pm 0.0074$	$7006.4 \pm 74.2$	8.1884
$-1.5263 \pm 0.0077$	$6811.7 \pm 72.1$	5.7916
$-2.2326 \pm 0.0074$	$7174.0 \pm 64.5$	33.739
$-3.0038 \pm 0.0071$	$6951.7 \pm 66.5$	19.669
$-0.0412 \pm 0.0078$	$6932.7 \pm 73.3$	5.4012
$0.6641 \pm 0.0075$	$7117.9 \pm 75.5$	9.9867
$1.5538 \pm 0.0074$	$7063.9 \pm 74.7$	8.8625
$1.9218 \pm 0.0088$	$7195.5 \pm 73.7$	7.5493
$3.0207 \pm 0.0070$	$7137.6 \pm 68.6$	11.993

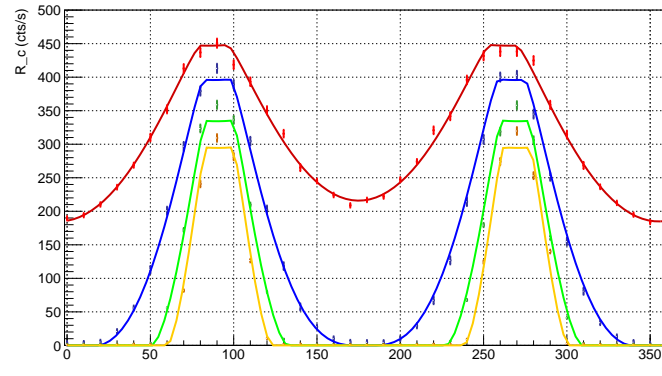
Podemos observar que, novamente, os valores obtidos para  $\chi^2/NDF$  são algo superiores à unidade, atestando a imperfeição do modelo usado. Ainda assim, analisando a tabela abaixo observamos uma elevada correspondência entre os valores impostos em laboratório para as posições de cada uma das fontes e o valor que lhe corresponde proveniente do ajuste aos dados experimentais, atestando a poder do modelo enquanto ferramenta de reconstrução:

$x_{\text{Medição}} (\pm 0.05\text{cm})$	$x_{\text{Fit}} (\text{cm})$	$\delta(\text{cm})$	$\delta(\# \sigma)$
-0.8	$-0.8273 \pm 0.0074$	-0.0273	0.54
-1.6	$-1.5263 \pm 0.0077$	0.0737	1.46
-2.4	$-2.2326 \pm 0.0074$	0.1674	3.31
-3.2	$-3.0038 \pm 0.0071$	0.1962	3.89
0	$-0.0412 \pm 0.0078$	-0.0412	0.81
0.8	$0.6641 \pm 0.0075$	-0.1359	2.69
1.6	$1.5538 \pm 0.0074$	-0.0462	0.91
2.4	$1.9218 \pm 0.0088$	-0.4782	9.42
3.2	$3.0207 \pm 0.0070$	-0.1793	3.55

Note-se que o desvio em  $\# \sigma$  foi calculado recorrendo usando por incerteza uma soma quadrática da incerteza das medições efetuadas em aula com a incerteza intrínseca ao ajuste  $\left( \sigma = \sqrt{\sigma_{\text{Medição}}^2 + \sigma_{\text{Fit}}^2} \right)$ .

## 12. Distribuição das coincidências em função da rotação do porta amostras (dados da 3ª Sessão)

Procedeu-se a uma nova análise da distribuição das taxas de coincidências em função da rotação do porta amostras, ajustando-se os dados ao modelo teórico deduzido, usando como parâmetros livres offsets iniciais  $\theta_0$  e  $\phi_0$ , a distância da fonte ao centro da porta amostras  $x$  e uma constante de proporcionalidade  $A$ . Obtiveram-se os seguintes resultados, fixando-se novamente os valores de  $R$  e  $d$  aos explicitados na secção anterior:



Na tabela abaixo encontram-se resumidos os valores obtidos para os diferentes parâmetros de ajuste. Note-se em primeiro lugar que os offsets iniciais obtidos em  $\phi$  e  $\theta$  não são compatíveis com 0, indicando que a montagem estaria afeta deste tipo de erros sistemáticos. Os valores obtidos para estes  $\chi^2/NDF$  são próximos da unidade nos dois primeiros casos e algo mais elevados nos dois casos seguintes:

$\phi_0(^{\circ})$	$\theta_0(^{\circ})$	$x(^{\prime\prime})$	$A \text{ (cts/s)}$	$\chi^2/Ndf$
$5.180 \pm 0.284$	$0.443 \pm 0.020$	$0.4652 \pm 0.0026$	$8312.2 \pm 41.8$	1.6875
$1.757 \pm 0.167$	$0.453 \pm 0.039$	$0.9718 \pm 0.0044$	$8437.8 \pm 54.4$	2.0356
$0.215 \pm 0.059$	$0.551 \pm 0.023$	$1.4435 \pm 0.0031$	$8032.8 \pm 50.5$	31.468
$-0.486 \pm 0.068$	$0.421 \pm 0.033$	$1.8077 \pm 0.0056$	$7725.5 \pm 59.3$	12.004

Na tabela que se segue comparam-se os valores obtidos para os diferentes parâmetros com os valores que lhes foram impostos em laboratório. A incerteza para  $\phi$  foi calculada tendo em conta uma incerteza na escala ( $\sigma_e = 0.02(^{\prime\prime})$ ) recorrendo à expressão  $\sigma_{\phi} = \frac{\sigma_e}{x}$ . Novamente os desvios em  $\# \sigma$  foram calculados tendo em conta uma soma quadrática das incertezas das medições efetuadas no laboratório e das incertezas provenientes dos ajustes:

$r_{\text{Medição}} (^{\prime\prime})$	$r_{\text{Fit}} (^{\prime\prime})$	$\delta (^{\prime\prime})$	$\delta (\# \sigma)$	$\phi_{\text{Medição}} (^{\circ})$	$\phi_{\text{Fit}} (^{\circ})$	$\delta (^{\circ})$	$\delta (\# \sigma)$
$0.5 \pm 0.02$	$0.4652 \pm 0.0026$	-0.0348	-1.72	$0 \pm 2.29$	$5.180 \pm 0.284$	5.180	2.24
$1 \pm 0.02$	$0.9718 \pm 0.0044$	-0.0282	-1.38	$0 \pm 1.15$	$1.757 \pm 0.167$	1.757	1.52
$1.5 \pm 0.02$	$1.4435 \pm 0.0031$	-0.0565	-2.79	$0 \pm 0.76$	$0.215 \pm 0.059$	0.215	0.28
$2 \pm 0.02$	$1.8077 \pm 0.0056$	-0.1923	-9.26	$0 \pm 0.57$	$-0.486 \pm 0.068$	-0.486	-0.84

Os valores obtidos para  $x$ , são compatíveis com os valores esperados em intervalos menores que  $3\sigma$ ,

para os três primeiros ajustes, havendo um desvio um pouco superior no terceiro caso. Por outro lado, os valores obtidos para o offset em  $\phi$  são compatíveis a 0 para margens inferiores a  $2\sigma$ . Estes resultados atestam a elevada capacidade de reconstrução física do modelo utilizado.

### 13. Sinograma (dados da 4ª Sessão)

Por fim, ajustou-se, por minimização de quadrados mínimos, o modelo desenvolvido acima descrito ao sinograma retirado ao longo da 4ª sessão laboratorial. Para isto construiu-se um modelo resultante da soma de 3 contribuições: duas proporcionais ao modelo geométrico descrito no início da secção correspondentes às contagens provenientes das fontes forte e fraca e um terceiro termo que descreva as contagens fortuitas. (Dado que por lapso a janela de coincidências usada tinha uma duração de 5600 ns, a taxa de contagens fortuitas não era desprezável face às restantes taxas). Como descrito em secções anteriores, a taxa de coincidências fortuitas é corretamente modelada por:

$$R_C^{fort.} = 2R_A R_B \tau$$

Por outro lado, as taxas de cada detetor ( $R_A$  e  $R_B$ ) são proporcionais ao seu ângulo sólido na vizinhança da fonte, dado por:

$$\Omega = 2\pi \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{r_1^2 + r_2^2 - (2R)^2}{2r_1 r_2} + 1 \right)} \right),$$

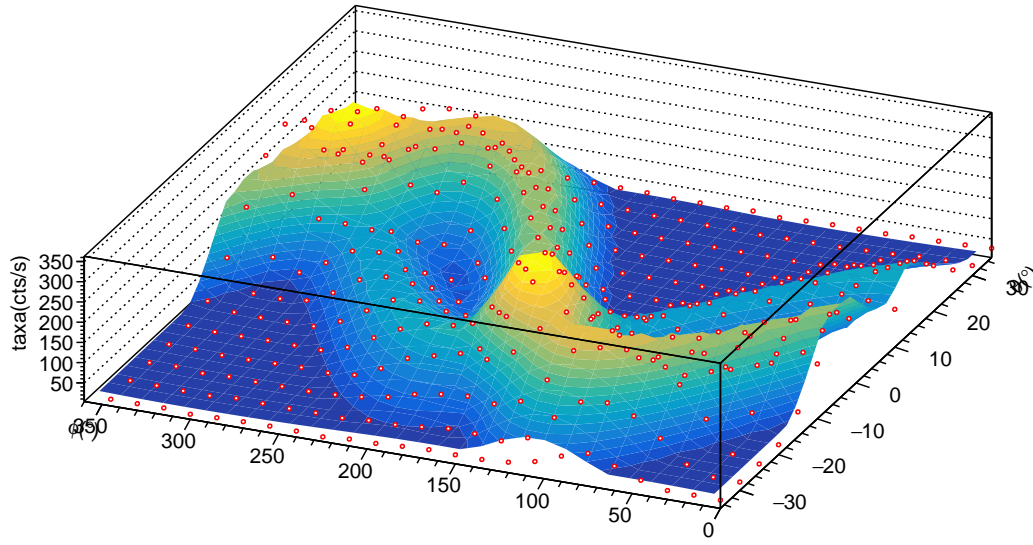
tendo  $r_1$  e  $r_2$  as expressões referidas aquando da dedução do modelo teórico para um ângulo  $\theta$  no caso do detetor móvel e  $\pi$  no caso do detetor fixo. Como referido na discussão da eficiência do fotopico, a constante de proporcionalidade entre o número de contagens de e o ângulo sólido de um dado detetor é dada por  $A_{A/B} = A_0 \epsilon_I$ , sendo  $A_0$  a atividade da fonte e  $\epsilon_I$  a sua eficiência intrínseca. No caso das coincidências, a constante é dada por  $A_C = A_0 \epsilon_I^2$ . Assim, o ruído pode ser descrito por uma soma do ruído correspondente a cada uma das fontes (W-> fraca, S-> forte), segundo a seguinte expressão:

$$R_{\text{noise (W/S)}} = 2\Omega_A \Omega_B \tau \frac{A_{W/S}}{\epsilon_I^2},$$

sendo  $\Omega_{A/B}$  os ângulos sólidos de cada um dos detetores e  $A_{W/S}$  as constantes de proporcionalidade referentes ao ajuste a cada uma das fontes. Assim, sendo  $\Omega_{C_{W/S}}$  o ângulo sólido que descreve a região de coincidências de cada fonte, o efetuou-se um ajuste recorrendo à seguinte expressão:

$$R_{Fit}(\theta, \phi) = A_S \cdot \Omega_{C_S} + A_W \cdot \Omega_{C_W} + R_{\text{noise (S)}} + R_{\text{noise (W)}},$$

O raio do detetor e a distância ao centro d foram impostos aos valores referidos nas alíneas anteriores. Tomaram-se enquanto parâmetros livres  $A_{S/W}$ , um offset inicial em  $\phi$  para cada fonte ( $\phi_{0_{S/W}}$ ), a sua distância ao centro do porta amostras ( $x_{S/W}$ ) e a eficiência intrínseca do detetor  $\epsilon_I$ , tendo-se obtido os resultados expressos na seguinte figura:



Para este ajuste bidimensional obteve-se  $\chi^2/NDF = 46.9824$  e uma eficiência média do detetores  $\epsilon_I = 0.18987 \pm 0.00089$ , encontrando-se os restantes parâmetros de ajuste sumariados nas tabelas abaixo:

$\phi_0(^{\circ})$	$r(^{\circ})$	$A(\text{cts/s})$
$0.0091 \pm 0.1656$	$0.97944 \pm 0.00233$	$2130.2 \pm 12.0$

**Tabela 1:** Resultados do ajuste referentes à fonte fraca

$\phi_0(^{\circ})$	$r(^{\circ})$	$A(\text{cts/s})$
$90.1154 \pm 0.1243$	$1.34188 \pm 0.00241$	$4202.8 \pm 17.0$

**Tabela 2:** Resultados do ajuste referentes à fonte forte

Relativamente à qualidade do ajuste é de notar que o valor obtido para  $\chi^2/NDF$  é de algum modo elevado, indicando que as incertezas estatísticas consideradas nos pontos experimentais foram insuficientes, sendo a adequação do modelo teórico imperfeita. Por outro lado, o valor obtido para a eficiência intrínseca do detetor foi cerca de 30 % mais reduzido que o estimado anteriormente, mostrando que a descrição do ruído não está isenta de problemas. Por outro lado, a constante A correspondente à fonte fraca tem cerca de metade da intensidade da constante A correspondente à fonte forte, como seria de esperar dadas as atividades de cada fonte. para mais, comparando os valores obtidos para as posições de cada uma das fontes recorrendo ao ajuste com os valores medidos em aula, obtém-se uma correspondência quase total, excetuando no caso da posição em y da fonte fraca, caso em que o desvio ascende a 8  $\sigma$ :

	x	$\delta_x(\# \sigma)$	y	$\delta_y(\# \sigma)$
Fonte Fraca	$0.9794 \pm 0.0023$	-1.0212	$0.0002 \pm 0.0028$	0.0077
Fonte Forte	$-0.0027 \pm 0.0029$	-0.1337	$1.3419 \pm 0.0024$	-7.8493

Note-se que, mais uma vez, no cálculo dos desvios em  $\# \sigma$  o valor utilizado para a variância estatística resultou de uma soma quadrática da incerteza de cada valor resultante do ajuste com a incerteza da medição em aula referente à própria escala ( $\sigma_e = 0.02''$ ). Estes valores são idênticos aos obtidos recorrendo à inversa de Rádón na secção anterior, sendo no entanto bastante mais precisos, justificando por isso os desvios em  $\# \sigma$  mais elevados. O desvio de  $8\sigma$  na posição longitudinal da fonte forte indica a presença de um erro sistemático na montagem ou uma desadequação do modelo teórico. Tendo em conta que ambos os diferentes modelos resultaram em desvios sistemáticos idênticos, atribui-se o desvio a erros na leitura da montagem.

## REFERÊNCIAS

- [1] Março 2018, Guião da Experiência Coincidências  $\gamma\gamma$ -PET - LFEA
- [2] Março 2018, Guião da Experiência Annihilation Radiation Coincidence Studies with  $^{22}\text{Na}$
- [3] Fernandes, Hugo; 2009, Reconstrução de Imagem PET por Decomposição do Sinograma (Cap. 2), IBILI
- [4] Março 2018, <http://mathworld.wolfram.com/Circle-CircleIntersection.html>