

# Espetroscopia de Raio-X e Ótica Fina

Filipe Miguel (84381) • Francisco Duque (84383) • João Bravo (84390)

*Instituto Superior Técnico*

*Mestrado Integrado em Engenharia Física Tecnológica*

*LFEA - Grupo 2C - Prof. Marta Fajardo*

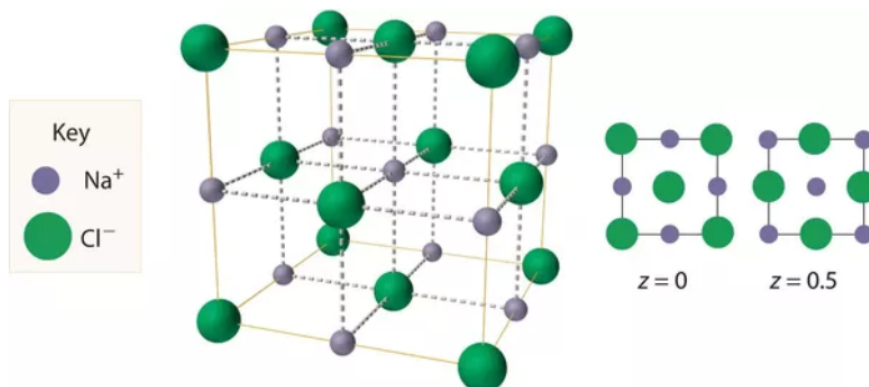
*Abril-Maio 2018*

## I. PREPARAÇÕES DAS SESSÕES LABORATORIAIS

### 1. Preparação da sessão:

1ª Sessão - 10/04/2018

O  $\text{NaCl}$  é um cristal que apresenta uma rede cúbica de face centrada com uma estrutura característica, em que existe um ião de cloro  $\text{Cl}^-$  e outro de sódio  $\text{Na}^+$  por célula primitiva. A posição do primeiro arbitra-se como  $\vec{r}_{\text{Cl}} = [0,0,0]$  e do segundo  $\vec{r}_{\text{Na}} = [0.5,0,0]$  (em unidades da constante de rede):



Para um cristal com rede cúbica de constante de rede  $a$ , a distância  $d$  entre planos inter-cristalinos é dada por:

$$d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}},$$

em que  $h, k$  e  $l$  são os índices de Miller do plano adjacente.

Pela lei de Bragg sabe-se que os máximos de difração ocorrem para:

$$n\lambda = 2d \sin \theta \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Combinando estas relações, chega-se a:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{n\lambda}{2d_{hkl}} \\ \Leftrightarrow \sin \theta &= \frac{n\lambda}{2a} \sqrt{h^2 + k^2 + l^2} \end{aligned}$$

Da observação da figura anterior ([http : // physicsopenlab.org/2018/01/22/sodium – chloride – nacl – crystal/](http://physicsopenlab.org/2018/01/22/sodium-chloride-nacl-crystal/)) conclui-se que os primeiros planos de interesse correspondem a interseções com os eixos coordenados em:

X	Y	Z
0.5	0	0
0.5	0.5	0
1	1	1

Utilizando o valor para a constante de rede do  $NaCl$ ,  $a_{NaCl} = 5.6402 \text{ \AA}$ , e as energias dos raios-X emitidos pelo molibdênio (Mo) (para conseguir os comprimentos de onda):

	E (keV)	$\lambda$ (Å)
$K_{\alpha}$	17.443	0.71080
$K_{\beta}$	19.651	0.63095

Então podemos obter os índices de Miller para os planos referidos e os ângulos  $\theta$  de difração para as ristas  $K_{\alpha}$  e  $K_{\beta}$  de várias ordens  $n$  do Mo :

$h$	$k$	$l$	d (Å)	$n$	$\theta_{\alpha}$ (°)	$\theta_{\beta}$ (°)
2	0	0	2.82	1	7.24	6.42
				2	14.60	12.93
				3	22.21	19.61
				4	30.27	26.58
2	2	0	1.994	1	10.27	9.10
				2	20.88	18.45
				3	32.32	28.33
				4	45.47	39.26
1	1	1	3.256	1	6.27	5.56
				2	12.61	11.17
				3	19.11	16.90
				4	25.88	22.80

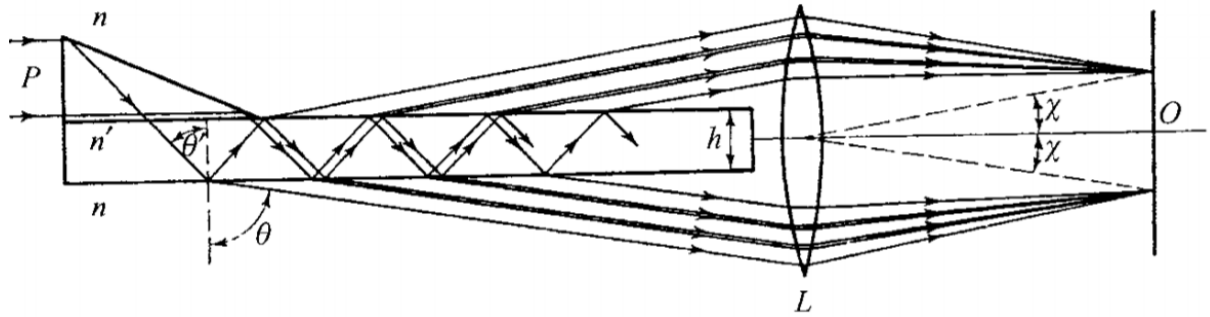
## 2. Preparação da sessão:

2ª Sessão - 16/04/2018

A ordem de interferência para um interferómetro de Lummer-Gehrcke é dada por ([https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316242/PrinciplesOptics\\_LG.pdf](https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316242/PrinciplesOptics_LG.pdf)):

$$m = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{2h}{\lambda_0} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \theta},$$

[jb:  $\delta$  é a diferença de fase entre feixes] onde  $h$  e  $n'$  são respetivamente a espessura e índice de refração da lâmina (figura abaixo),  $\theta'$  o ângulo de reflexão na lâmina e  $\theta$  o ângulo de emergência.



A ordem de interferência mínima ocorre no centro  $O$ , para o qual  $\theta \approx \frac{\pi}{2}$ , e portanto valerá:

$$m_0 = \frac{2h}{\lambda_0} \sqrt{n'^2 - n^2}$$

Para o interferómetro utilizado no laboratório (*Leybold Instruction Sheet*: [https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316240/Guia%20LD\\_Zeeman.pdf](https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316240/Guia%20LD_Zeeman.pdf)):

$$\begin{cases} n' = 1.4567 & (\text{índice de refração do quartzo}) \\ n = 1 & (\text{índice de refração do ar atmosférico}) \\ h = 4.04 \text{ mm} \\ \lambda_0 = 643.8 \text{ nm} & (\text{comprimento de onda da linha espectral vermelha da lâmpada de Cádmiu}) \end{cases}$$

Pelo que:

$$m_0 \approx 13294$$

Já o ângulo  $\chi_q (\frac{\pi}{2} - \theta_q)$  que a  $q$ -ésima risca faz em relação ao centro (figura acima) é dado por:

$$\chi_q = \frac{(n'^2 - n^2)^{1/4}}{n} \sqrt{\frac{\lambda_0}{h}} \sqrt{q - e}$$

em que  $e$  é um hipotético desvio em relação ao centro. Por conseguinte, para as previsões dos ângulos das 3 primeiras riscas observáveis este é tomado como nulo:

$q$	$\chi_q (^\circ)$
1	0.744
2	1.053
3	1.289

## II. TRATAMENTO DE DADOS

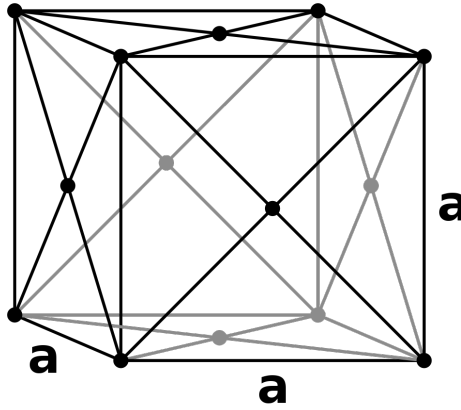
### 1. Espectroscopia de Raio X: Breve introdução fenomenológica 1ª Sessão - 10/04/2018

Apesar de trabalharmos em ° em toda a análise que se sucede, é necessário que em todas propagações de erros e outras propagações semelhantes se convertam os ângulos para radianos primeiro.

As energias das duas transições com maior probabilidade do Molibdênio-42, ( $^{42}\text{Mo}$ ), que correspondem à emissão de raios-X encontram-se na tabela seguinte:

Transição	$E(\text{keV})$	$\lambda(\text{\AA})$
$K_\alpha$	17.443	0.7108
$K_\beta$	19.651	0.63093

Os cristais estudados têm todo uma rede cristalina cúbica de faces centradas (FCC). A sua célula unitária convencional é dada por:



Os vetores que definem a rede primitiva são:

$$\vec{a}_1 = \frac{a}{2}(0, 1, 1) \quad \vec{a}_2 = \frac{a}{2}(1, 0, 1) \quad \vec{a}_3 = \frac{a}{2}(1, 1, 0),$$

sendo  $a$  é a constante de rede. Por conseguinte os vetores que definem a rede recíproca, (tais que  $\vec{b}_i \cdot \vec{a}_j = 2\pi\delta_{ij}$ ) são:

$$\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{a}(-1, 1, 1) \quad \vec{b}_2 = \frac{2\pi}{a}(1, -1, 1) \quad \vec{b}_3 = \frac{2\pi}{a}(1, 1, -1)$$

A distância entre planos do cristal determinados pelo vetor da rede recíproca  $\vec{G}$  é dada por:

$$d = \frac{2\pi}{||\vec{G}||}.$$

Uma onda incidente no cristal com vetor de onda  $\vec{k}$  é refletida pelo cristal com um vetor de onda de igual intensidade mas direção diferente  $\vec{k}'$ . A intensidade da radiação emitida tem a seguinte dependência [3]:

$$I(\vec{k}, \vec{k}') = \sum_{\vec{G}} \left( \delta(\vec{k} - \vec{k}' - \vec{G}) S(\vec{G}) \right)^2,$$

ou seja, para radiação incidente com vetor de onda  $\vec{k}$  a intensidade da radiação refletida só não é nula se  $\vec{k} - \vec{k}' = \vec{G}$ , sendo  $\vec{G}$  um dado vetor da rede cristalina e se  $S(\vec{G}) \neq 0$ . A primeira condição enunciada denomina-se condição de Laue. Esta é equivalente à condição de Bragg:

$$\sin(\theta) = \frac{\lambda}{2} \frac{||\vec{G}||}{2\pi} = n \frac{\lambda}{2d},$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda da radiação incidente e  $n$  é a ordem de interferência de um dado pico.

$S(\vec{G})$  é a constante de estrutura do cristal e caracteriza a interferência causada pelos átomos da base do cristal. Esta é dada com generalidade por:

$$S(\vec{G}) = \sum_j Z_j e^{\vec{G} \cdot \vec{r}_j} f_j(\vec{G}),$$

sendo a soma dada sobre todos os átomos na base do cristal, e  $\vec{r}_j$  a sua posição na base. A função  $f_j(\vec{G})$  é característica do potencial de *scattering* dos átomos da base. Sendo  $r_0$  o alcance do referido potencial, para  $x = ||\vec{G}||r_0 < 1$ ,  $f_j(\vec{G}) \sim 1$ . No entanto, Para  $x \sim 1$ , obtém-se a seguinte expressão para  $f_j(\vec{G})$  [3]:

$$f_j(x) = 3 \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x^3},$$

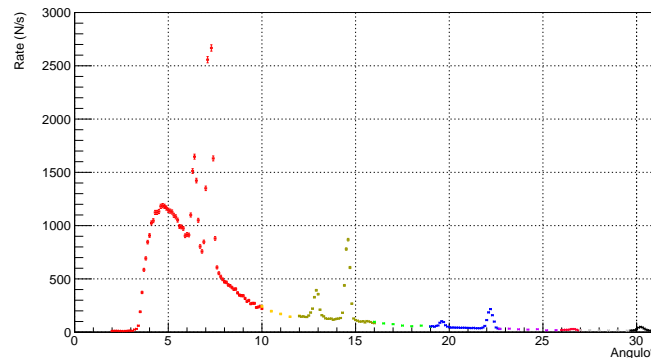
Ao longo da experiência estudaram-se 5 cristais diferentes, cujas características se resumem na seguinte tabela:

Cristal	$a$ (rA)	base	$\vec{G}_0$	d
NaCl (plano 0)	5.6402	Na em [000], Cl em $[\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}]$	(110)	a/2
NaCl (plano 1)	5.6402	Na em [000], Cl em $[\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}]$	?	?
LiF	4.0351	Li em [000], F em $[\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}]$	(110)	a/2
Si	5.4310	Si em [000], Si em $[\frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4}]$	(110)	a/4*
Al	4.0495	Al em [000]	(110)	a/2

Aqui,  $[hij]$  representa  $h\vec{a}_1 + j\vec{a}_2 + k\vec{a}_3$  e  $(klm)$  representa  $k\vec{b}_1 + l\vec{b}_2 + m\vec{b}_3$  (Nota: Não são os índices de Miller convencionais definidos pelo cristalógrafo na rede convencional, mas de cristalografia). Exceto no Silício, o fator de estrutura é diferente de 0 para quaisquer múltiplos inteiros de  $\vec{G}_0$ . No caso do Silício o fator de estrutura toma valores não nulos apenas para múltiplos pares de  $\vec{G}_0$ , logo a distância entre planos com interferência é equivalentemente dada por  $d = \frac{2\pi}{||2\vec{G}_0||} = a/4$ .

## 1.1 Espectroscopia Raio X: caracterização geral do espectrómetro

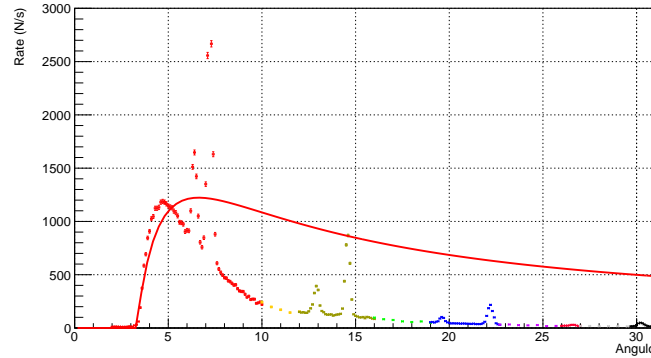
Na figura abaixo podemos observar a dependência angular da difração da radiação emitida pelo  $^{42}\text{Mo}$  num cristal de NaCl:



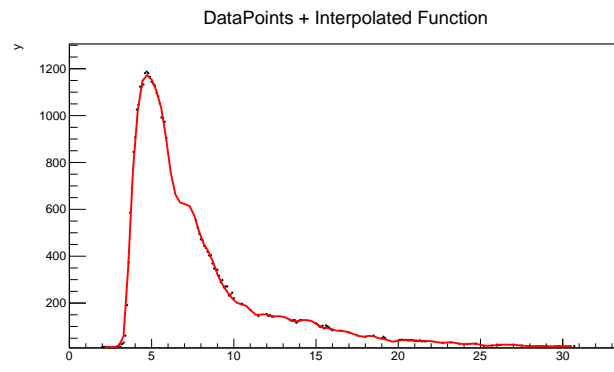
Encontram-se vários picos de intensidade máxima sobre um fundo de radiação contínua. Este é produzido pela emissão de radiação Bremsstrahlung, provocada pela aceleração dos eletrões na ampola de Molibdénio. Segundo a lei de Krammer [6], a secção eficaz deste fenómeno é dada por:

$$I_B = K \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\lambda}{\lambda_{min}} - 1 \right),$$

onde  $\lambda_{min}$  é o comprimento de onda mínimo da radiação de Bremsstrahlung, dado pela perda máxima de energia dos elétrons em interação com a matéria. Recorrendo à condição de Laue (ver acima) podemos calcular a distribuição angular da radiação de Bremsstrahlung incidente. Na figura seguinte representa-se o espectro do NaCl, sobreposto com a previsão do fundo dada pela lei de Krammer, sendo o valor de  $\lambda_{min}$  escolhido de modo a que o ângulo mínimo de incidência observado fosse coincidente com o previsto pela fórmula:



Sendo o  $\lambda_{min}$  especificado o único parâmetro livre para ajuste ao fundo é uma constante de proporcionalidade. É fácil concluir graficamente que, para que a intensidade do fundo seja concordante com a observada na região de intensidade máxima ( $\theta \sim 5^\circ$ ), para grandes ângulos a sua intensidade fica sobrestimada. Podemos concluir que há uma supressão da radiação a grandes ângulos cuja proveniência desconhecemos. Ainda assim, para uma correta caracterização dos picos  $K_\alpha$  e  $K_\beta$  é necessário isolar o fundo, subtraindo-o aos dados. Para isto, recorrendo à vizinhança de cada pico estimou-se, por uma interpolação por *Spline3*, a contribuição do fundo para a intensidade dos picos observados. recorreu-se a todos os pontos cuja distância a qualquer um dos picos fosse superior a  $3\sigma$  (numa primeira aproximação este valor foi estimado, mais abaixo descreve-se o método para uma caracterização mais exata). Na figura seguinte observa-se uma interpolação aos dados do fundo obtida pela difração com o NaCl:

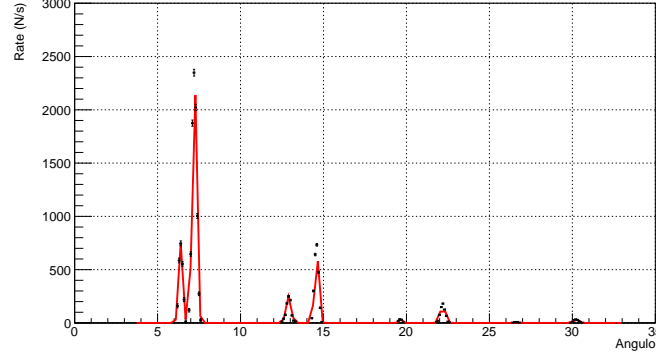


A interpolação cumpre a tarefa de seguir a evolução da intensidade de radiação do fundo. Os dados experimentais foram corrigidos subtraindo a radiação de fundo, obtendo-se os picos desejados. Numa primeira fase ajustaram-se estes dados, truncados a uma distância de  $3\sigma$  do centróide de cada pico, a uma soma de 8 expressões gaussianas com parâmetros  $A_i$ ,  $\mu_i$ ,  $\sigma_i$  (uma por cada um dos dois picos energéticos observados em cada uma das 4 ordens no espectro) e um *offset* global em  $\theta$ ,  $\theta_0$ . Mais especificamente, a expressão de ajuste é:

$$f(\theta) = \sum_{i=1}^8 A_i e^{-\left(\frac{\theta - \theta_0 - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2}.$$

Os valores de  $\mu_i$  e  $\sigma_i$  obtidos no ajuste foram usados para recalculas as regiões a mais de  $3\sigma$  de cada um dos

picos, redefinindo a região do fundo. Interpolou-se novamente o fundo tendo em conta esta região e por fim repetiu-se o ajuste. Este processo foi iterado até a estabilização do  $\chi^2$  do ajuste. Na figura seguinte podemos observar os picos de interferência construtiva acompanhados do ajuste gaussiano que lhes foi feito.



Obteve-se  $\chi^2/ndf = 0.496$ , valor algo inferior à unidade devido ao excessivo número de parâmetros de ajuste (a expressão tem 25 parâmetros livres). Obteve-se ainda  $\theta_0 = 0.0003 \pm 0.0060$ , valor compatível com 0 na sua incerteza. Os restantes parâmetros de ajuste encontram-se na seguinte tabela:

ordem	$A_\alpha$	$A_\beta$	$\mu_\alpha(^{\circ})$	$\mu_\beta(^{\circ})$	$\sigma_\alpha(^{\circ})$	$\sigma_\beta(^{\circ})$
1	$2387 \pm 114.96$	$748.4 \pm 24.2$	$7.2176 \pm 0.0163$	$6.3967 \pm 0.0234$	$0.1324 \pm 0.0112$	$0.1175 \pm 0.0145$
2	$763.4 \pm 64.716$	$249.1 \pm 8$	$14.572 \pm 0.0177$	$12.902 \pm 0.0176$	$0.1181 \pm 0.0128$	$0.1541 \pm 0.0095$
3	$181.58 \pm 6.6879$	$36.9 \pm 6.1$	$22.188 \pm 0.0173$	$19.62 \pm 0.0289$	$0.1435 \pm 0.0095$	$0.0968 \pm 0.0181$
4	$34.367 \pm 2.2611$	$9.3 \pm 1.1$	$30.224 \pm 0.018$	$26.631 \pm 0.0201$	$0.1524 \pm 0.0137$	$0.116 \pm 0.0162$

Para esta amostra de NaCl sabe-se que a distância entre planos cristalinos é de  $d = 2.8201\text{\AA}$  (justificaremos o porquê mais adiante), logo, pela lei de Bragg (enunciada acima), recorrendo aos valores de  $\mu_i$  e  $\sigma_i$  da tabela acima, é possível calcular o comprimento de onda e frequência da radiação incidente, assim como as respetivas variâncias:

$$\lambda = \frac{2d}{n} \sin(\theta) \quad v = \frac{c}{2d \sin(\theta)} n,$$

$$\delta_\lambda = \frac{\lambda}{\tan(\theta)} \delta_\theta \quad \delta_v = \frac{v}{\tan(\theta)} \delta_\theta,$$

onde  $\delta_\theta$  é a largura a meia altura em  $\theta$  ( $FWHM_\theta$ ) de um dado pico, dada por  $2.355\sigma_{dist_\theta}$ .  $\delta_\lambda^2$  e  $\delta_v^2$  são correspondentemente  $FWHM_\lambda$  e  $FWHM_v$ . No cálculo destas expressões a propagação de erros tem as seguintes fórmulas:

$$\sigma_\lambda = \frac{\lambda}{\tan(\theta)} \sigma_\theta, \quad \sigma_v = \frac{v}{\tan(\theta)} \sigma_\theta,$$

$$\sigma_{\delta_\lambda}^2 = \delta_\lambda^2 \left( \left( \frac{\sigma_{\delta_\theta}}{\delta_\theta} \right)^2 + (\tan(\theta) \sigma_\theta)^2 \right), \quad \sigma_{\delta_v}^2 = \delta_v^2 \left( \left( \frac{\sigma_{\delta_\theta}}{\delta_\theta} \right)^2 + (\tan(\theta) \sigma_\theta)^2 \right).$$

Assim, obtém-se nas seguintes duas tabelas os valores calculados para estes parâmetros:

ordem	$\lambda_\alpha (\text{\AA})$	$\delta(\# \sigma)$	$\lambda_\beta (\text{\AA})$	$\delta(\# \sigma)$	$\delta\lambda_\alpha (\text{\AA})$	$\delta\lambda_\beta (\text{\AA})$
1	$0.70862 \pm 0.00159$	-1.37	$0.62838 \pm 0.00229$	-1.11	$0.03046 \pm 0.00462$	$0.02706 \pm 0.00411$
2	$0.70953 \pm 0.00084$	-1.50	$0.62968 \pm 0.00084$	-1.48	$0.01325 \pm 0.00167$	$0.01741 \pm 0.00219$
3	$0.71000 \pm 0.00053$	-1.51	$0.63129 \pm 0.00089$	0.40	$0.01027 \pm 0.00077$	$0.00704 \pm 0.00053$
4	$0.70979 \pm 0.00038$	-2.62	$0.63204 \pm 0.00044$	2.52	$0.00763 \pm 0.00071$	$0.00601 \pm 0.00056$

order	$v_\alpha (10^{18} \text{ Hz})$	$\delta(\#\sigma)$	$v_\beta (10^{18} \text{ Hz})$	$\delta(\#\sigma)$	$\delta v_\alpha (10^{18} \text{ Hz})$	$\delta v_\beta (10^{18} \text{ Hz})$
1	$4.2306 \pm 0.0095$	1.36	$4.7708 \pm 0.0174$	1.11	$0.1818 \pm 0.0276$	$0.2054 \pm 0.0312$
2	$4.2252 \pm 0.0050$	1.50	$4.7610 \pm 0.0064$	1.47	$0.0789 \pm 0.0099$	$0.1317 \pm 0.0166$
3	$4.2224 \pm 0.0031$	1.51	$4.7489 \pm 0.0067$	-0.40	$0.0611 \pm 0.0046$	$0.053 \pm 0.0040$
4	$4.2237 \pm 0.0023$	2.62	$4.7432 \pm 0.0033$	-2.52	$0.0454 \pm 0.0042$	$0.0451 \pm 0.0042$

Um parâmetro importante na caracterização de um espectrómetro é o seu poder resolutivo, dado por  $R_\lambda = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$  ou equivalentemente  $R_v = \frac{v}{\delta v}$ . Recorrendo às expressões acima é fácil verificar que a sua dependência em  $\theta$  é a seguinte:

$$R_v = R_\lambda \equiv R = \frac{\tan(\theta)}{\delta_\theta}$$

no cálculo desta expressão usou-se a seguinte propagação de erros:

$$\sigma_R^2 = R \left( \left( \frac{\sigma_{\delta\theta}}{\delta_\theta} \right)^2 + \left( \frac{2\sigma_\theta}{\sin(2\theta)} \right)^2 \right).$$

Obtiveram-se assim as potências resolutivas correspondentes aos 8 picos estudados:

ordem	$R_\alpha$	$R_\beta$
1	$23.3 \pm 2.0$	$23.2 \pm 2.9$
2	$53.5 \pm 5.8$	$36.2 \pm 2.2$
3	$69.1 \pm 4.6$	$89.6 \pm 16.8$
4	$93.0 \pm 8.4$	$105.1 \pm 14.7$

O  $FSR_\lambda$  e o  $FSR_v$  (ou equivalentemente  $\Delta\lambda$  e  $\Delta v$ ) correspondem à largura de banda disponível numa dada ordem de interferência, ou seja, a diferença máxima de comprimentos de onda (frequências) tal que o ângulo em que surge o pico mais energético se sobrepõe com a ordem seguinte do pico usado como referência. As suas expressões teóricas deduzidas recorrendo à lei de Bragg são as seguintes:

$$\Delta\lambda_{teor} = \frac{\lambda}{n} \quad \Delta v_{teor} = \frac{v}{n+1},$$

sendo a propagação de erros:

$$\sigma_{\Delta\lambda_{teor}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \sigma_\lambda \quad \sigma_{\Delta v_{teor}} = \frac{\Delta v}{v} \sigma_v$$

Por outro lado, calcula-se o FSR a um nível experimental recorrendo às seguintes expressões:

$$\Delta\lambda = \frac{n}{2d} \left| \frac{1}{\sin(\theta_{n+1})} - \frac{1}{\sin(\theta_n)} \right| \quad \Delta v = \frac{2dc}{n} |\sin(\theta_{n+1}) - \sin(\theta_n)|.$$

Propagação de erros:

$$\sigma_{\Delta\lambda} = \frac{n}{2d} \sqrt{\left( \frac{\sigma_{\theta_{n+1}}}{\tan(\theta_{n+1})} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{\theta_n}}{\tan(\theta_n)} \right)^2} \quad \sigma_{\Delta v} = \frac{2dc}{n} \sqrt{\left( \frac{\sigma_{\theta_{n+1}}}{\tan(\theta_{n+1})} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{\theta_n}}{\tan(\theta_n)} \right)^2}.$$

Por fim, a *finesse* define-se como o quociente entre o FSR e o FWHM de uma dada grandeza espectroscópica. No caso da ordem de interferência ser elevada ( $n \gg 1$ ), a *finesse* quantifica o número máximo de picos que se pode distinguir no espectro de uma dada ordem de interferência. Assim,

$$finesse_\lambda = \frac{\Delta\lambda}{\delta\lambda} \quad finesse_v = \frac{\Delta v}{\delta v},$$

sendo o seu erro dado por:



$$\sigma_{finesse_\lambda} = finesse_\lambda \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta\lambda}}{\Delta\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\delta\lambda}}{\delta\lambda}\right)^2} \quad \sigma_{finesse_v} = finesse_v \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta v}}{\Delta v}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\delta v}}{\delta v}\right)^2}.$$

R recorrendo à expressão de FSR teórica podemos calcular a *finesse* através de:

$$finesse_{\lambda_{teor}} = \frac{\tan(\theta)}{n} \frac{1}{\delta_\theta} \quad finesse_{v_{teor}} = \frac{\tan(\theta)}{n+1} \frac{1}{\delta_\theta}$$

Apesar da *finesse* representar fisicamente o número de modos disponíveis na banda de comprimentos de onda / frequências de uma dada ordem de interferência, a sua descrição teórica não é igual, no entanto as expressões são iguais no limite de ordem de interferência elevada ( $n \gg 1$ ), como previsto atrás. Obtêm-se os valores constantes das seguintes duas tabelas para as expressões descritas acima:

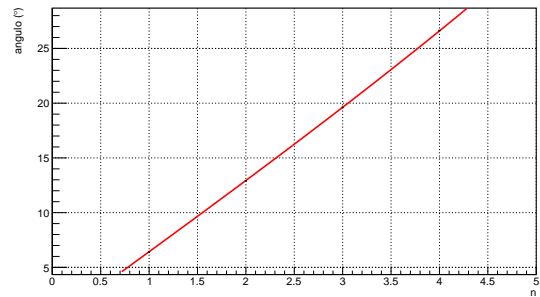
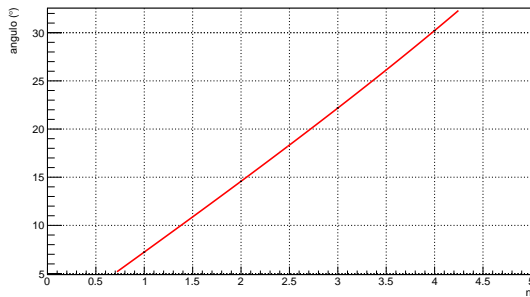
	ordem	$\Delta\lambda_{exp}(\text{\AA})$	$\Delta\lambda_{teor}(\text{\AA})$	$\delta(\text{\AA})$	$\delta(\#\sigma)$	$finesse_\lambda$
$\alpha$	1	$0.71043 \pm 0.00232$	$0.70862 \pm 0.00159$	-0.00181	-0.64	$23.3 \pm 3.5$
	2	$0.35547 \pm 0.00116$	$0.35476 \pm 0.00042$	-0.00071	-0.58	$26.8 \pm 3.4$
	3	$0.23639 \pm 0.00073$	$0.23667 \pm 0.00018$	0.00028	0.37	$23.0 \pm 1.7$
$\beta$	1	$0.6310 \pm 0.0028$	$0.62838 \pm 0.00229$	-0.0026	-0.71	$23.3 \pm 3.5$
	2	$0.3173 \pm 0.0016$	$0.31484 \pm 0.00042$	-0.00241	-1.47	$18.2 \pm 2.3$
	3	$0.2114 \pm 0.0011$	$0.21043 \pm 0.00030$	-0.00101	-0.91	$30.0 \pm 2.3$

	ordem	$\Delta v_{exp}(10^{18} \text{ Hz})$	$\Delta v_{teor}(10^{18} \text{ Hz})$	$\delta(10^{18} \text{ Hz})$	$\delta(\#\sigma)$	$finesse_v$
$\alpha$	1	$2.1180 \pm 0.0098$	$2.11532 \pm 0.00474$	-0.00269	-0.57	$11.6 \pm 1.8$
	2	$1.4103 \pm 0.0054$	$1.40841 \pm 0.00168$	-0.00188	-1.12	$17.9 \pm 2.3$
	3	$1.0547 \pm 0.0036$	$1.05561 \pm 0.00078$	0.00093	1.18	$17.3 \pm 1.3$
$\beta$	1	$2.3903 \pm 0.0177$	$2.3854 \pm 0.0087$	-0.0049	-0.57	$11.6 \pm 1.8$
	2	$1.5951 \pm 0.0078$	$1.5870 \pm 0.0021$	-0.0081	-3.79	$12.1 \pm 1.5$
	3	$1.1915 \pm 0.0072$	$1.1872 \pm 0.0017$	-0.0043	-2.54	$22.5 \pm 1.7$

Nos dados acima o valor de  $\delta(\#\sigma)$  foi calculado tendo em conta a soma das erros correspondentes à previsão teórica e experimental, i.e.  $\sigma = \sqrt{\sigma_{teor}^2 + \sigma_{exp}^2}$ . Como podemos ver os desvios em  $\#\sigma$  são em geral próximos da unidade, validando os modelos teóricos usados. Por fim, de modo a validar a lei de Bragg ajustou-se a variação angular em função da sua ordem de interferência à seguinte expressão:

$$\theta(n) = \text{asin}\left(\frac{\alpha}{2}n\right),$$

onde  $\alpha$  representa  $\lambda/d$ . Obtiveram-se os seguintes ajustes:



pico	$\left(\frac{\lambda_\alpha}{d}\right)_{Fit}$	$\chi^2/NDF$	$\left(\frac{\lambda_\alpha}{d}\right)_{teor}$	$\delta$	$\delta(\#\sigma)$
$\alpha$	$0.25169 \pm 0.000101$	0.26457	0.252046	-0.000356	-3.52
$\beta$	$0.22239 \pm 0.000126$	2.6805	0.223726	0.000174	1.38

O  $\chi^2/ndf$  tem uma grandeza próxima da unidade, validando a lei de Bragg. O reduzido número de graus de liberdade disponíveis tornam difícil uma correspondência exata de  $\chi^2/NDF \rightarrow 1$  e nomeadamente explicam que para o pico  $\alpha$  seja inferior a 1.

## 2. Espectroscopia de Raio X: Caracterização dos Espectros

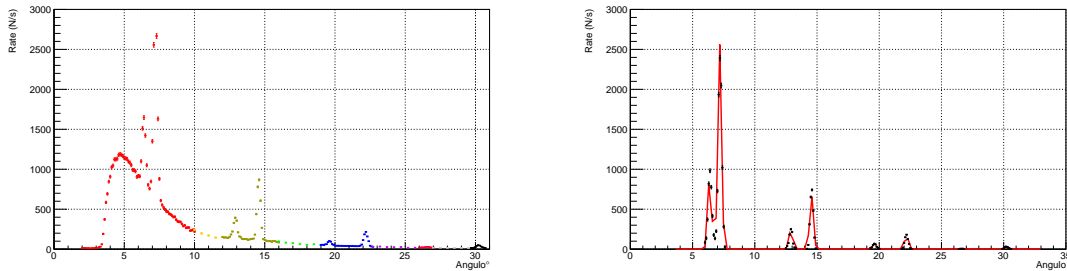
1ª Sessão - 10/04/2018

No ponto anterior ajustou-se uma expressão de 25 parâmetros livres aos pontos experimentais. Apesar de os resultados serem concordantes com as previsões teóricas, há certamente alguma correlação entre os parâmetros (isto é evidente já que o valor de  $\chi^2/ndf$  é algo inferior a 1 para o pico  $\alpha$ ). Assim, ao longo da próxima secção procurou-se melhorar a qualidade dos ajustes, reduzindo o espaço de parâmetros. Em primeiro lugar, tendo em conta a elevada concordância entre os resultados obtidos e a previsão da lei de Bragg assumiu-se que esta dependência fosse exata, determinando os centróides de cada pico. Por outro lado, como o valor de  $\sigma$  obtido foi semelhante em todos os picos, usou-se um único valor de  $\sigma$  para todo o ajuste. Assim, a equação de ajuste usada foi:

$$R(\theta + \theta_0) = \sum_{i=1}^{n_{order}} A_i \left( e^{-\left(\frac{\theta - \mu_{\alpha_i}}{\sigma}\right)^2} + \frac{A_\beta}{A_\alpha} e^{-\left(\frac{\theta - \mu_{\beta_i}}{\sigma}\right)^2} \right),$$

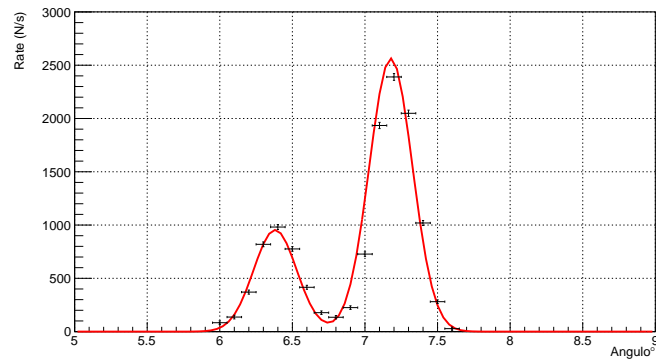
$$\mu_{\alpha_i} = \text{asin} \left( \frac{i \lambda_\alpha}{2 d} \right), \quad \mu_{\beta_i} = \text{asin} \left( \frac{i \lambda_\beta}{2 d} \right),$$

onde  $n_{order}$  representa o número de ordens observada. Temos assim um ajuste com  $5 + n_{order}$  parâmetros livres, nomeadamente:  $\theta_0$ ,  $\lambda_\alpha/d$ ,  $\lambda_\beta/d$ ,  $\sigma$ ,  $A_\alpha/A_\beta$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ , ...,  $A_{n_{order}}$ . A remoção do ruído foi efetuada recorrendo ao mesmo algoritmo que na secção anterior, iterando vários ajustes até à convergência de  $\chi^2/NDF$ . Para o primeiro sal de  $NaCl$  obteve-se o seguinte ajuste:

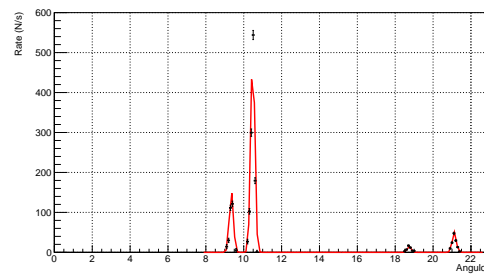
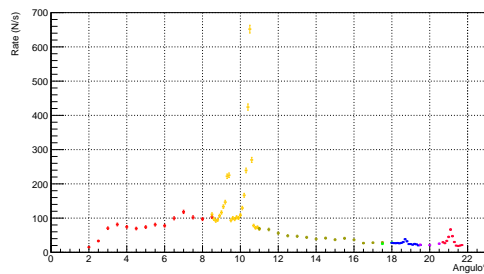


*Dados retirados para o primeiro cristal de NaCl e respetivo ajuste*

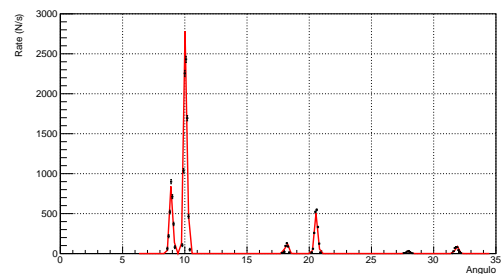
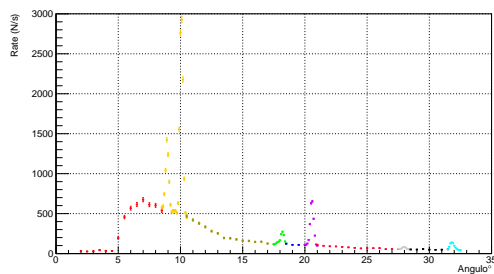
Tendo em conta que por dificuldades de resolução gráfica é complicado distinguir a qualidade local dos ajustes representa-se em seguida uma amplificação do ajuste à primeira região de interesse.



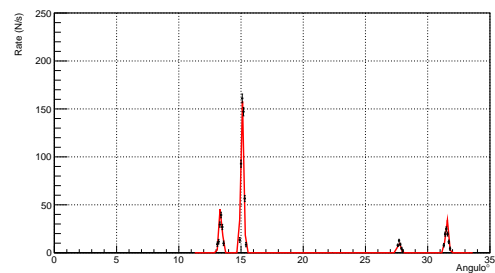
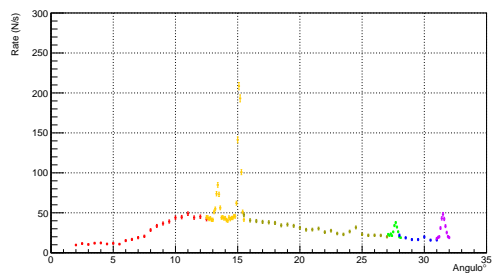
Repetiu-se o procedimento de ajuste descrito anteriormente para os restantes 4 cristais estudados em laboratório, obtendo-se os seguintes ajustes:



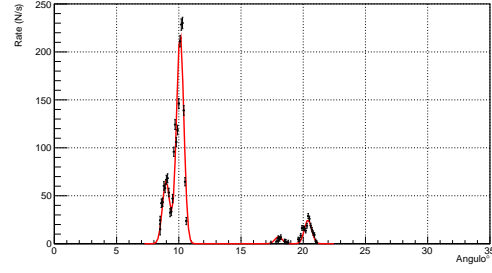
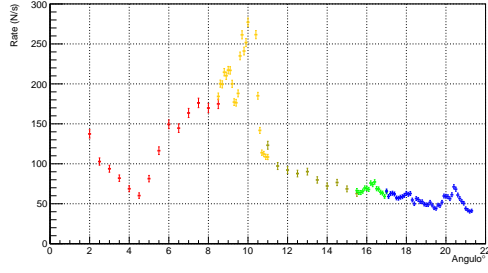
*Dados retirados para o segundo cristal de NaCl e respetivo ajuste*



*Dados retirados para o cristal de LiF e respetivo ajuste*



*Dados retirados para o cristal de Si e respetivo ajuste*



Dados retirados para o cristal de Al e respetivo ajuste

Os resultados dos vários ajustes realizados encontram-se sumariados na tabela seguinte:

amostra	$\theta_0$	$\lambda_\alpha/d$	$\lambda_\beta/d$	$A_\beta/A_\alpha$	$\sigma$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$\chi^2/NDF$
NaCl <sub>0</sub>	$-0.071 \pm 0.010$	$0.25239 \pm 0.00014$	$0.22476 \pm 0.00012$	$0.372 \pm 0.019$	$0.1485 \pm 0.0034$	$2564 \pm 127$	$691 \pm 35$	$187.5 \pm 9.8$	$30.3 \pm 2.0$	1.36
NaCl <sub>1</sub>	$0.189 \pm 0.031$	$0.35721 \pm 0.00066$	$0.31824 \pm 0.00077$	$0.296 \pm 0.048$	$0.106 \pm 0.0063$	$518 \pm 57$	$50.9 \pm 6.6$	-	-	0.73
LiF	$-0.102 \pm 0.016$	$0.35278 \pm 0.00022$	$0.31356 \pm 0.00029$	$0.301 \pm 0.026$	$0.1291 \pm 0.0052$	$2903 \pm 261$	$507 \pm 38$	$102.8 \pm 10.4$	-	0.82
Si	$-0.115 \pm 0.024$	$0.52485 \pm 0.00039$	$0.46632 \pm 0.00067$	$0.317 \pm 0.045$	$0.1176 \pm 0.0059$	$160 \pm 4.6$	$36.5 \pm 5.4$	-	-	1.99
Al	$0.151 \pm 0.029$	$0.34585 \pm 0.00072$	$0.30682 \pm 0.00100$	$0.297 \pm 0.013$	$0.2919 \pm 0.0067$	$219.4 \pm 5.3$	$24.8 \pm 1.3$	-	-	3.07

Os valores obtidos para  $\theta_0$  foram em geral diferentes para cada ajuste (incompatíveis nas suas incertezas) e incompatíveis com 0. Para mais, os valores obtidos para este sistemático têm sinais diferentes entre si. Podemos argumentar que alguma instabilidade na montagem produz um desvio sistemático angular que varia ao longo do tempo numa vizinhança de  $0.1^\circ$  de  $0^\circ$ . Outra hipótese, mais consistente, é que este sistemático seja apenas um artifício do ajuste (note-se que se obtiveram sistemáticos incompatíveis para as duas funções de ajuste ao espectro do primeiro cristal de NaCl). Os valores obtidos para os  $\chi^2/ndf$  de cada ajuste são em geral próximos da unidade, atestando a concordância entre os valores experimentais e o modelo teórico. No caso do Silício e do o Alumínio este valor foi ligeiramente mais elevado ( $\sim 2$  e  $\sim 3$ ) respetivamente, sendo que para estes dois materiais a qualidade dos dados experimentais é também inferior. Através dos resultados dos parâmetros de ajuste não é possível obter valores para as distâncias entre planos cristalinos e independentemente valores para o comprimento de onda da radiação incidente, como todos os parâmetros de ajuste são adimensionais é necessário a especificação de um parâmetro que confira dimensão ao problema. Ainda assim, de modo a validar os resultados obtidos, é possível quantificar quocientes adimensionais. Na tabela seguinte compara-se o valor de  $\lambda_\alpha/\lambda_\beta$  com a sua previsão teórica:

amostra	$(\lambda_\alpha/\lambda_\beta)_{Fit}$	$(\lambda_\alpha/\lambda_\beta)_{teor}$	$\delta$	$\delta(\# \sigma)$
NaCl <sub>0</sub>	$1.12293 \pm 0.00086$	1.12658	-0.00365	-4.25
NaCl <sub>1</sub>	$1.12245 \pm 0.00340$		-0.00413	-1.21
LiF	$1.12508 \pm 0.00124$		-0.00150	-1.21
Si	$1.12551 \pm 0.00181$		-0.00107	-0.59
Al	$1.12721 \pm 0.00434$		0.00062	0.14

Em todas as amostras exceto a primeira de NaCl o desvio em  $\# \sigma$  é próximo da unidade, validando os modelos de ajuste usados. No caso da primeira amostra de NaCl, temos um desvio um pouco mais elevado ( $\sim 4\sigma$ ). Isto indica que há a presença de algum tipo de sistemático não considerado no método experimental. Exceto no caso do Alumínio o desvio é sistematicamente negativo, indicando uma subestimação e sobrestimação sistemáticas de  $\lambda_\alpha$  e  $\lambda_\beta$  respetivamente. Resta-nos estudar a estrutura cristalina das amostras. Recorrendo aos valores teóricos de  $\lambda_\alpha$  e  $\lambda_\beta$  calculam-se as distâncias entre planos cristalinos evidenciadas pelo espaçamento dos picos correspondentes a cada energia do feixe incidente ( $d_\alpha$  e  $d_\beta$ ). Para descobrir a normal ao plano cristalino na segunda amostra de NaCl calcularam-se distâncias para alguns vetores da rede recíproca:

amostra	$d_\alpha$ (Å)	$d_\beta$ (Å)	$\vec{G}$	d (Å)
NaCl <sub>1</sub>	$1.9899 \pm 0.0037$	$1.9826 \pm 0.0048$	(100)	3.2564
			(110)	2.8201
			(211)	1.9941
			(210)	1.7006

A distância mais concordante é de 1.9941 (Å), correspondendo a um vetor normal (211). Na base cartesiana este vetor escreve-se  $\vec{G} = \frac{2\pi}{a}(2,2,0)$ . Ou seja, o corte é definido por diagonais paralelas em faces opostas da célula unitária, sendo a distância entre planos 1/4 diagonal. ( $d = \sqrt{2}/4a$ )

Na tabela seguinte apresentam-se os valores obtidos para as distâncias entre planos cristalinos e respectivos valores tabelados:

amostra	$d_\alpha$ (Å)	$d_\beta$ (Å)	$d_{teor}$ (Å)	$\delta_\alpha$ (Å)	$\delta(\#\sigma)$	$\delta_\beta$ (Å)	$\delta(\#\sigma)$
NaCl <sub>0</sub>	$2.8163 \pm 0.0016$	$2.8071 \pm 0.0015$	2.8201	-0.0038	-2.47	-0.013	-8.71
NaCl <sub>1</sub>	$1.9899 \pm 0.0037$	$1.9826 \pm 0.0048$	1.9941	-0.0043	-1.16	-0.0115	-2.42
LiF	$2.0148 \pm 0.0012$	$2.0122 \pm 0.0018$	2.0176	-0.0027	-2.19	-0.0054	-2.92
Si	$1.3543 \pm 0.0010$	$1.3530 \pm 0.0019$	1.3578	-0.0035	-3.41	-0.0048	-2.46
Al	$2.0552 \pm 0.0043$	$2.0564 \pm 0.0067$	2.0248	0.0305	7.16	0.0316	4.73

Os desvios em  $\#\sigma$  são algo superiores à unidade ( $\sim 3\sigma$ ), indicando que a correspondência entre o modelo usado e os resultados experimentais não é exata. Esta medição poderá ser afetada por impurezas nos cristais, imperfeições na sua estrutura cristalina e *offset's* no ângulo medido.

Verifica-se agora a validade da expressão deduzida para a intensidade da radiação refletida em função da ordem de interferência. No caso do NaCl, esta é dada por:

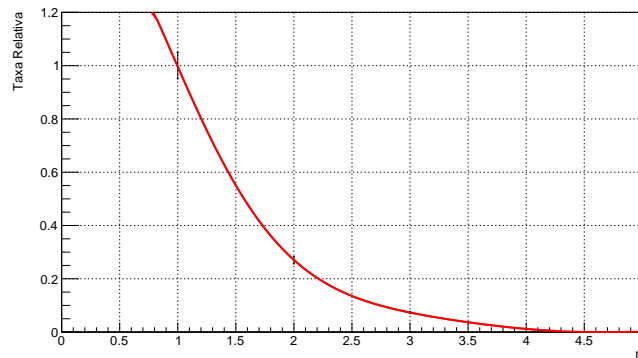
$$I(G) = I_0(Z_{Na}f(x_{Na}) + Z_{Cl}f(x_{Cl}))^2$$

$$f(x) = 3 \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x^3}$$

$$x_{Na} = r_{0_{Na}} G \quad x_{Cl} = r_{0_{Cl}} G$$

$$G = \frac{2\pi}{d} n$$

Ajustou-se os parâmetros  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  obtidos pelo espectro da primeira amostra NaCl em função da ordem de interferência à expressão acima, tendo por parâmetros livres  $r_{0_{Na}}/d$ ,  $r_{0_{Cl}}/d$  e  $I_0$ . Obteve-se o seguinte gráfico:



Os parâmetros de ajuste encontram-se na seguinte tabela:

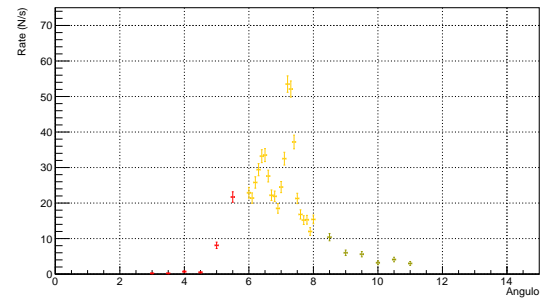
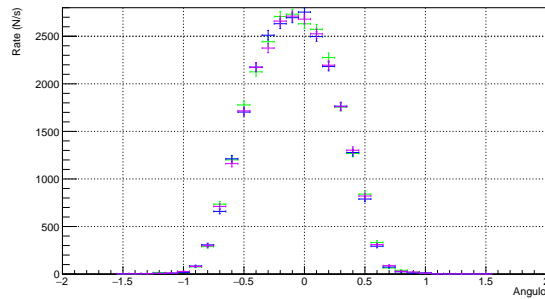
$r_{0_{Na}}/d$	$r_{0_{Cl}}/d$	$I_0$	$\chi^2/NDF$	$r_{0_{Cl}}/r_{0_{Na}}$	$r_{Cl^-}/r_{Na^+}$	$r_{Cl}/r_{Na}$
$0.3653 \pm 0.0101$	$0.1539 \pm 0.0011$	$0.01912 \pm 0.00076$	0.012	$0.421 \pm 0.012$	$\sim 1.31$	$\sim 0.42$

O quociente entre os valores do alcance  $r_0$  é idêntico ao quociente entre os raios atômicos dos constituintes da estrutura e completamente diferente do rácio entre os respetivos raios lónicos. Este resultado indica que na interação da radiação com a estrutura cristalina não é relevante a variação da dimensão dos constituintes induzida pela deslocalização dos eletrões nos iões. Por outro lado verifica-se que o valor do  $\chi^2/ndf$  é duas ordens de grandeza abaixo do esperado. Isto deve-se à elevada incerteza nas amplitudes provenientes do ajuste anterior e ao muito reduzido número de graus de liberdade ( $ndf = 1$ ).

## 2.1 Estudo da Refletividade

1ª Sessão - 10/04/2018

Por fim pretende-se estudar a refletividade dos cristais usados. Mais uma vez usando o primeiro cristal de  $NaCl$  comparou-se a intensidade de radiação proveniente da incidência direta do feixe de Molibdénio no detetor com a da refletida pelo cristal. Na figura seguinte encontra-se a dependência angular do espectro em ambas as situações (fizeram-se 3 medições da intensidade de radiação direta):



A intensidade total de radiação será proporcional à integral do número de contagens na região de interesse.  $I = \alpha \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} R(\theta)$ . Na tabela seguinte encontram-se os valores obtidos para as integrais referidas:

$I_0/\alpha$ 1	$I_0/\alpha$ 2	$I_0/\alpha$ 3	$I_r/\alpha$	Refletividade
2595.7	2571.4	2569.5	95.4	3.70%

A refletividade do  $NaCl$  é dada pelo quociente entre a intensidade refletida e a incidente (calculada através da média das 3 regiões estudadas), obtendo-se  $R = 3.70\%$ . Integrando o espectro obtido para cada um dos restantes sais estudados na alínea anterior e comparando com o espectro da amostra  $NaCl_0$  calcularam-se refletividades normalizadas à deste cristal. Multiplicando pela sua refletividade absoluta obtêm-se as refletividades absolutas ( $R_a$ ) dos vários cristais:

amostra	$I_r/\alpha$	$R_a/R_0$	$R_a$
$NaCl_0$	7463	100%	3.70%
$NaCl_1$	1319	18%	0.65%
LiF	7234	97%	3.59%
Si	915	12%	0.45%
Al	2027	27%	1.00%

### 3. Espectroscopia atômica com lâmina de Lummer-Gehrke:

#### Verificação da condição de interferência

2ª Sessão - 16/04/2018

Apesar da menor divisão da escala do manómetro ser  $0.01\text{ mm}$ , devido à imprecisão inerente à montagem experimental, isto é, as oscilações da luneta, a rotação dos eixos da mira e a subjetividade das medições, associou-se às medidas retiradas um erro de  $0.02\text{ mm}$ .

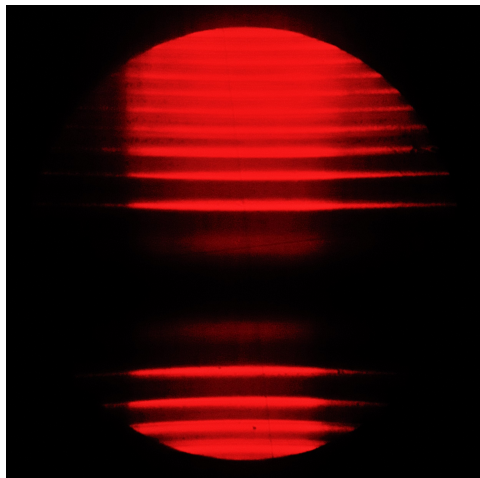
Tal como indicado no logbook do laboratório, é possível calcular os ângulos  $\chi_q$  dos centros das riscas  $q$  tendo em conta a distância do manómetro ao eixo de rotação vertical da luneta,  $L = 54.3\text{ mm}$ , com:

$$\chi_q = \arctan\left(\frac{z_q}{L}\right)$$

É também possível, assumindo os valores dados do comprimento de onda da linha vermelha do cádmio  $\lambda_0$ , do índice de refração  $n'$  e da espessura  $h$  do vidro de quartzo da lâmina de Lummer-Gehrcke, como sendo os presentes na experiência, calcular uma ordem  $m_q$  de interferência das riscas visualizadas por [9]:

$$m_q = \frac{2h}{\lambda_0} \sqrt{n'^2 - \sin^2 \theta_q}$$

com  $\theta_q = \pi/2 - \chi_q$ . Note-se que este cálculo assume que o centro, coberto por uma proteção devido à intensidade da risca central e por isso sem qualquer luminosidade, está exatamente alinhado com o centro da mira usada, pelo que as imprecisões nestes valores têm em conta não só as dificuldades na medição das riscas mas também no alinhamento do origem das mesmas. No entanto, para a restante análise, apenas interessará a distância entre as riscas visíveis. Apresentam-se abaixo uma imagem do que foi visualizado (sem campo magnético) e os resultados dos cálculos referidos.



q	$z_q \pm 0.014 \text{ (mm)}$	$\chi_q \pm 0.021 \text{ (}^\circ\text{)}$	$\chi_{teo} \text{ (}^\circ\text{)}$	$\delta(\#\sigma)$	$m_q$	$m_{teo}$	$\delta(\#\sigma)$
1	0.815	0.86	0.7444	-5.46	$13295.2 \pm 3.8$	13295	-0.059
2	1.095	1.155	1.0527	-4.84	$13296.3 \pm 5.1$	13296	-0.058
3	1.395	1.472	1.2893	-8.57	$13297.8 \pm 6.5$	13297	-0.12
4	1.585	1.672	1.4888	-8.6	$13298.9 \pm 7.4$	13298	-0.13
5	1.775	1.872	1.6645	-9.73	$13300.2 \pm 8.3$	13299	-0.15
-1	0.778	0.82	0.7444	-3.59	$13295.1 \pm 3.6$	13295	-0.028
-2	1.115	1.176	1.0527	-5.83	$13296.4 \pm 5.2$	13296	-0.074
-3	1.353	1.427	1.2893	-6.47	$13297.6 \pm 6.3$	13297	-0.089
-4	1.568	1.654	1.4888	-7.73	$13298.8 \pm 7.3$	13298	-0.11
-5	1.735	1.83	1.6645	-7.76	$13299.9 \pm 8.1$	13299	-0.11

**Tabela 1**

Foi utilizada neste tratamento a propagação de erros:

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2}$$

$$\sigma_\chi = \frac{z/L}{1 + (z/L)^2} \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2}$$

$$\sigma_m = \frac{2h \sin \theta \cos \theta \sigma_\theta}{\lambda_0 \sqrt{n'^2 - \sin^2 \theta}}$$

É possível verificar que os ângulos são todos superiores ao esperado. Este *offset* pode dever-se ao alinhamento da origem não ser perfeito. Pela mesma causa, verificam-se valores ligeiramente superiores ao esperado para as ordens das riscas. No entanto, este desvio aumenta com o ângulo pelo que isto se pode dever mesmo a diferenças entre as especificações da montagem fornecidas e as reais. De qualquer forma, os seus erros são compatíveis com as ordens teóricas.

Tendo as riscas inferiores ao centro sido retiradas posteriormente e com mais cuidado, tendo-se repetido algumas das medições várias vezes, optou-se por utilizar este conjunto, ao invés das superiores que eram menos visíveis pela luneta devido ao alinhamento feito pelo grupo.

Verificou-se a condição de interferência com a expressão [9]:

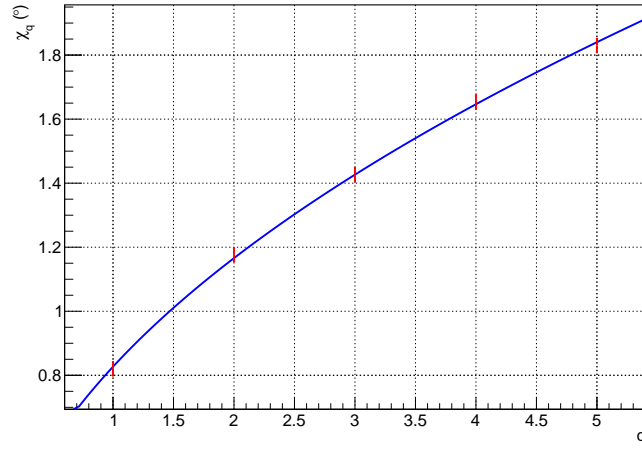
$$\chi_q = \frac{(n'^2 - n^2)^{1/4}}{n} \sqrt{\frac{\lambda_0}{h}} \sqrt{q - e}$$

Para tal, usou-se o método dos mínimos quadrados para ajustar uma expressão do tipo:

$$\chi_q = A \sqrt{q - e}$$

em que o parâmetro de ajuste  $e$  já terá em conta o desvio da origem inerente ao alinhamento. Obteve-se o seguinte:





$A$	$e$ (°)	$\chi^2/ndf$
$0.822 \pm 0.015$	$-0.016 \pm 0.066$	0.25

O ajuste interseta todos o pontos nas suas incertezas, o que indica a sua boa qualidade. Já o valor do  $\chi^2/ndf$  é baixo e inferior a 1, o que leva a querer que os erros assumidos poderão ter sido muito elevados. No entanto, devido aos problemas de oscilação da luneta já referidos, estes são bem fundamentados.

Sendo:

$$A = \frac{(n'^2 - n^2)^{1/4}}{n} \sqrt{\frac{\lambda_0}{h}}$$

o seu valor esperado é  $A = 0.744$ , pelo que o obtido não se mostra compatível com este na sua incerteza, distanciando-se a cerca de  $5\sigma$  por excesso, tendência já verificada nas ordens estimadas, mesmo tendo em conta o desvio da origem. Isto poderá ser fruto da dificuldade e subjetividade das medições bem como das oscilações da montagem, que terão levado à sobre-estimação da posição das riscas de ordem superior. Note-se também que o desvio deste parâmetro poderá estar também associado a incongruências nas especificações da montagem fornecidas como referido anteriormente.

Já o parâmetro  $e$  é compatível com o valor nulo na sua incerteza. Este apresenta-se negativo como se esperava, indicando um desvio dos ângulos calculados por excesso.

Apesar das dificuldades referidas, o comportamento das riscas segue o modelo proposto, pelo que se assume como verificada a interferência para as várias ordens.

Por razões de completude, apresentam-se também a largura das riscas registadas, com o respetivo erro propagado em quadratura como anteriormente.

q	$\Delta z_q \pm 0.028 \text{ (mm)}$
1	0.050
2	0.150
3	0.090
4	0.110
5	0.070
-1	0.045
-2	0.050
-3	0.075
-4	0.085
-5	0.070

Note-se a grande discrepância das larguras observadas, o que evidencia novamente as dificuldades tidas na medição das mesmas. Devido a isto, optou-se por considerar uma média dos valores calculados com as riscas centrais (as mais definidas) para as próximas seções.

#### 4. Espectrómetro atômico de Lummer-Gehrke:

##### Caraterização do espectrómetro

2ª Sessão - 16/04/2018

Antes de estudar o desdobramento das riscas com a aplicação de campos magnéticos, convém caraterizar a eficiência do espectrómetro usado. Para isso faz sentido estimar a sua resolução espectral  $\delta\lambda$ , a potência resolutive  $\lambda_0/\delta\lambda$ , a *Full Spectral Range*  $\Delta\lambda$  e a *finesse*  $\Delta\lambda/\delta\lambda$ .

A resolução espectral pode ser calculada pela expressão aproximada [7]:

$$\delta\lambda = \frac{\delta a}{\Delta a} \frac{\lambda^2 \sqrt{n'^2 - 1}}{2h(n'^2 - 1)}$$

em que  $\Delta a$  é distância entre duas riscas de interferência sem a aplicação do campo magnético e  $\delta a$  é a distância entre uma componente de desdobramento e a risca original sem campo magnético.

Utilizando todos os dados retirados sem campo magnético, chegaram-se aos seguintes valores de  $\Delta a$ :

Riscas	$\Delta a \pm 0.020 \text{ (mm)}$
1,2	0.280
2,3	0.300
3,4	0.190
4,5	0.190
-1,-2	0.338
-2,-3	0.238
-3,-4	0.215
-4,-5	0.168

Propagação de erros:

$$\sigma_{\Delta a} = \sqrt{\sigma_{z_i}^2 + \sigma_{z_{i+1}}^2}$$

Como se pode notar, o espaçamento entre riscas também não é constante. Tendo em conta que as primeiras três riscas inferiores e superiores estavam mais definidas e por isso se retiraram com precisão muito superior, optou-se por considerar a média dos quatro intervalos centrais para o  $\Delta a$  final, sendo o erro do mesmo dado por:

$$\sigma_{\Delta a} = \frac{1}{4} \sqrt{\sigma_{\Delta a_{1,2}}^2 + \sigma_{\Delta a_{2,3}}^2 + \sigma_{\Delta a_{-1,-2}}^2 + \sigma_{\Delta a_{-2,-3}}^2}$$

Tem-se assim  $\Delta a = (0.289 \pm 0.010) \text{ mm}$ .

Para calcular o  $\delta a$  a usar na resolução do aparelho, considerou-se a menor corrente aplicada a que se conseguia distinguir duas componentes de desdobramento. Isto deu-se a  $I = 5 \text{ A}$ . No decorrer da experiência houve bastantes oscilações da luneta e desregulações da montagem, mesmo em distância à lâmpada. Isto fez com que as posições das riscas sem campo aplicado não coincidissem com o centro das suas componentes de desdobramento. Por isso, optou-se por calcular o  $\delta a$  de cada risca como a subtração da média da posição das componentes de desdobramento a uma das mesmas componentes. Fez-se o mesmo cada corrente aplicada.

*Note-se que a alternativa poderia passar por considerar mesmo a distância de cada componente à risca sem campo magnético, e fazer a média desses dois cálculos. No entanto, supondo que as riscas originais estão sempre entre as duas componentes, mesmo que as distâncias de cada componente à risca original sejam diferentes, esta metodologia é exatamente o mesmo que o método acima referido!*

Considerando que com a corrente referida, já se notaram separações das componentes das primeiras e segundas riscas, optou-se por usar a média das mesmas para o valor final de  $\delta a$ :

Risca <sub>i</sub>	$\delta a_i \pm 0.017 \text{ (mm)}$
1	0.038
2	0.033
-1	0.035
-2	0.016
	$\overline{\delta a} \text{ (mm)}$
	$0.0303 \pm 0.0087$

Propagação de erros:

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{z}} &= \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{z^+}^2 + \sigma_{z^-}^2} \\ \sigma_{\delta a_i} &= \sqrt{\sigma_{z_i^+}^2 + \sigma_{z_i^-}^2} \\ \sigma_{\overline{\delta a}} &= \frac{1}{4} \sqrt{\sigma_{\delta a_1}^2 + \sigma_{\delta a_2}^2 + \sigma_{\delta a_{-1}}^2 + \sigma_{\delta a_{-2}}^2} \\ \sigma_{\delta \lambda} &= \delta \lambda \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\delta a}}{\delta a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta a}}{\Delta a}\right)^2} \end{aligned}$$

em que  $z^+$  e  $z^-$  são as posições centrais das componentes superior e inferior de cada risca.

Assim, com os valores fornecidos, chega-se a uma resolução espectral de  $\delta \lambda = (5.1 \pm 1.5) \text{ pm}$ . Tendo em conta que a resolução em frequência é dada por:

$$\delta \nu = \frac{c \delta \lambda}{\lambda^2} \quad \sigma_{\delta \nu} = \delta \nu \frac{\sigma_{\delta \lambda}}{\delta \lambda}$$

chega-se a  $\delta \nu = (3.7 \pm 1.1) \text{ GHz}$ .

Com o valor da resolução a que se chegou, obtém-se a potência resolutive  $\lambda_0 / \delta \lambda = (1.27 \pm 0.36) \times 10^5$ , com:

$$\sigma_{\frac{\lambda_0}{\delta \lambda}} = \frac{\lambda_0 \sigma_{\delta \lambda}}{\delta \lambda^2}$$

A ordem deste valor é concordante com o esperado para um espectrómetro de Lummer-Gehrcke.

Assumindo que as contantes fornecidas estão corretas para a montagem usada, o FSR (*Full Spectral Range*) deste espectrómetro é dado pelo valor de  $\delta\lambda$  quando  $\delta a$  é igual à separação entre riscas de ordens sucessivas, sem campo magnético. Assim, este é dado por:

$$FSR_\lambda \equiv \Delta\lambda = \frac{\lambda^2 \sqrt{n'^2 - 1}}{2h(n'^2 - 1)} = 48.43 pm$$

Da mesma forma que em cima, este intervalo em frequências é:

$$FSR_\nu \equiv \Delta\nu = 35.03 GHz$$

A *finesse* deste aparato é dada assim por  $FSR_\lambda / \delta\lambda = 9.5 \pm 2.7$  com erro propagado em quadratura como nos restantes cálculos.

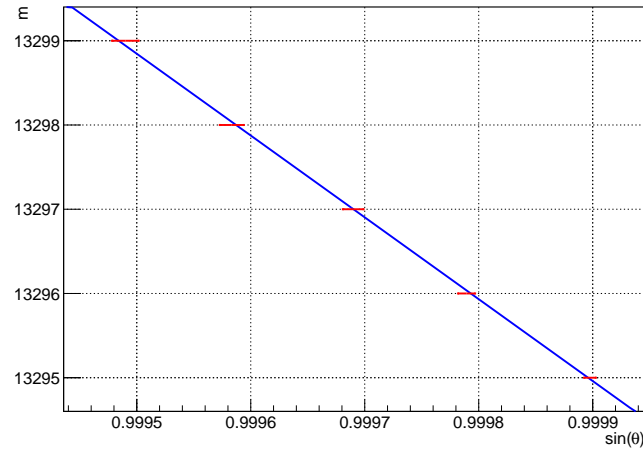
Todos os cálculos desta secção, até agora, foram realizados assumindo que os valores fornecidos representavam bem os reais. Assumiu-se então que isso poderá não ser verdade. Sendo a ordem de cada risca  $q$  dada por:

$$m_q = \frac{2h}{\lambda'} \sqrt{n'^2 - \sin^2 \theta_q}$$

assumiu-se agora que os ângulos das riscas visualizadas correspondiam exatamente às ordens esperadas. Isto leva a um novo comprimento de onda  $\lambda'$  da risca vermelha da lâmpada de cádmio. Assim, ajustou-se pelo método dos mínimos quadrados a expressão:

$$m_q = a \sqrt{b - \sin^2 \theta_q}$$

aos dados da ordem vista em função do seno do ângulo ao centro de cada risca, já numa tabela acima (Secção 3). Apresenta-se os resultados abaixo:



$a$	$b$	$\chi^2/ndf$
$11365.90 \pm 0.46$	$2.36805 \pm 0.00011$	0.26

Visualmente, o ajuste intersecta todos o pontos nas suas incertezas, o que indica a sua boa qualidade. Já o valor do  $\chi^2/ndf$  é de novo baixo, o que parece reforçar a ideia de que os erros assumidos terão sido elevados. Devido aos problemas da montagem já referidos, continuam a assumir-se estes como válidos.

O parâmetro  $b$  incorpora não só o valor do índice de refração do cristal de quartzo, mas também os desvios angulares na origem, pelo que não se deve extrapolar valores deste parâmetro.

Já o parâmetro  $a$  não contém à partida esse tipo de dependências, pelo que faz sentido assumir que o comprimento de onda da linha vermelha da lâmpada usada poderia ter um comprimento de onda de  $\lambda' = 2h/a = (710.898 \pm 0.029) \text{ nm}$  (erro propagado em quadratura). Este valor não é compatível na sua incerteza com o fornecido, mas ainda está contido no espetro do visível, em particular na banda dos vermelhos, pelo que não será de todo absurdo assumir esta hipótese.

Com este comprimento de onda, a resolução espectral seria  $\delta\lambda = (6.2 \pm 1.8) \text{ pm}$ , superior à anterior. Tem-se ainda que  $FSR_\lambda \equiv \Delta\lambda = (59.0489 \pm 0.0048) \text{ pm}$ , também superior à anterior. Ambos estes valores são compatíveis com os fornecidos na sua incerteza. Já a FSR em banda de frequências é a mesma pois, com as suposições feitas, esta depende apenas de constantes da montagem que se assumiram exatas (só se pode determinar uma das constantes fornecidas pois estas estão todas correlacionadas nas fórmulas usadas):

$$\Delta\nu = \frac{c \Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{c \sqrt{n'^2 - 1}}{2h(n'^2 - 1)} = 35.03 \text{ GHz}$$

A potência resolutive será então  $\lambda'/\delta\lambda = (1.15 \pm 0.33) \times 10^5$ , inferior ao que se obteve com os dados fornecidos, sendo no entanto compatível com o obtido anteriormente na sua incerteza. A caracterização com  $\lambda'$  é assim consistente com o primeiro método. Note-se que o comprimento de onda do primeiro método é em princípio mais fiável, já que é o valor tabelado da risca vermelha do cádmio. No entanto, estas diferenças entre métodos podem estar relacionadas com discrepâncias noutro dos valores fornecidos, mas como apresentam todos uma alta correlação nas fórmulas usadas, não seria possível saber qual é. De qualquer forma, a concordância de valores introduz uma maior confiança nos resultados. A *finesse* mantém-se, por razão semelhante à  $FSR_\nu$ .

## 5. Espectrómetro atómico de Lummer-Gehrke:

### Efeito de Zeeman Normal Longitudinal

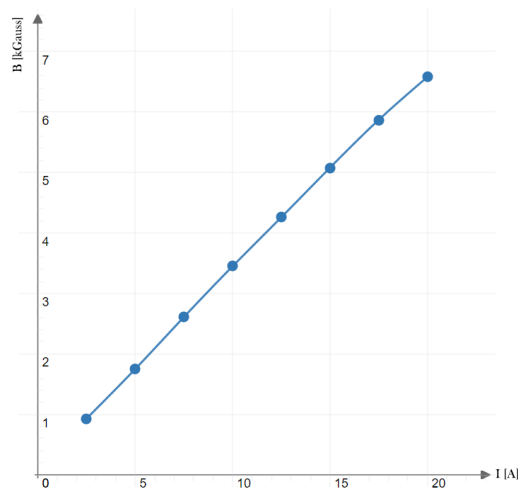
#### Desdobramento das riscas em função do campo magnético

2ª Sessão - 16/04/2018

Interpolaram-se os valores fornecidos do campo magnético  $B$  em função da corrente aplicada  $I$  (em baixo) pelo método *Spline-Cubic* (resultado também em baixo), devido ao uso de valores de corrente que não constavam exatamente nessa tabela.

I (A)	B (KGauss)
2.5	0.93
5	1.75
7.5	2.61
10	3.45
12.5	4.26
15	5.08
17.5	5.87
20	6.58

$$1 \text{ KGauss} = 0.1 \text{ T}$$



Desta forma, tendo em conta que o desvio absoluto em frequência de cada componente à risca original pode ser dado por [7]:

$$\delta\omega = \frac{eB}{2m} \Leftrightarrow \delta\nu = \frac{e}{m} \frac{B}{4\pi},$$

estudou-se o desdobramento das riscas em função do campo magnético aplicado longitudinalmente ao eixo da luneta. Note-se que cada uma das duas componentes visíveis de cada risca está polarizada circularmente no

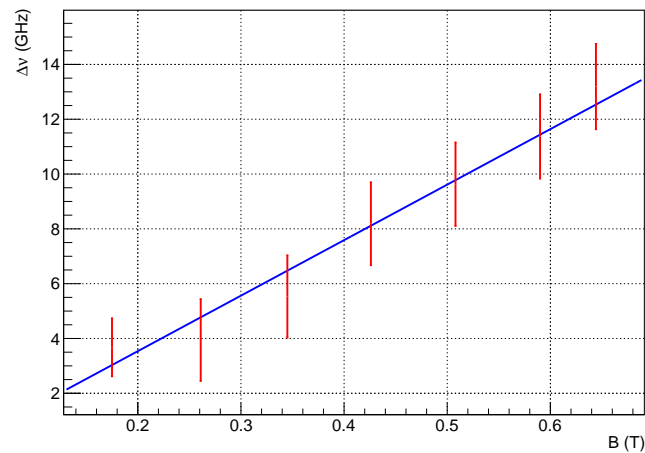
sentido oposto à outra nesta configuração, usando-se por isso um retardador de quarto de onda para linearizar a sua polarização. Ajustou-se assim aos dados do desvio absoluto em frequência em função do campo uma expressão do tipo:

$$\delta\nu = a \frac{B}{4\pi} + b,$$

pelo método dos mínimos quadrados. Apresentam-se os dados calculados bem como o ajuste e os parâmetros obtidos abaixo.

I (A)	B (T)	$\Delta\nu$ (GHz)
5	0.175	$3.7 \pm 1.1$
7.5	0.261	$3.9 \pm 1.5$
10	0.345	$5.5 \pm 1.5$
12.5	0.426	$8.2 \pm 1.5$
15	0.508	$9.6 \pm 1.5$
17.6	0.58998	$11.4 \pm 1.5$
19.5	0.64416	$13.2 \pm 1.6$

Propagação de erros com as fórmulas já explicitadas.



$a$ (GHz/T)	$b$ (GHz)	$\chi^2/ndf$
$245 \pm 40$	$-0.5 \pm 1.3$	0.36

Os dados obtidos são concordantes com o previsto, havendo um aumento do desvio das componentes com o aumento do campo aplicado. Visualmente, o ajuste intersecta todos o pontos nas suas incertezas, o que indica a sua boa qualidade. Já o valor do  $\chi^2/ndf$  é de novo baixo, razão discutida acima.

O parâmetro  $b$  reflete desvios em frequência mesmo na ausência de campo magnético, cujo valor esperado é obviamente zero. O resultado é compatível com o valor nulo na sua incerteza.

Já o parâmetro  $a$ , que corresponde à razão  $e/m \approx 1.759 \times 10^{11} \text{ C/kg}$  em módulo, é em unidades mais familiares  $a = (2.45 \pm 0.40) \times 10^{11} \text{ C/kg}$ , o que dista do valor teórico por 39%, englobando-o a  $1.7\sigma$ .

*Note-se que, considerando o comprimento de onda emitido pela lâmpada como o obtido anteriormente por ajuste ( $\lambda'$ ), os resultados desta secção permanecem os mesmos já que os desvios em frequências são iguais pelas razões já descritas.*

## 6. Espectrômetro atômico de Lummer-Gehrke:

Configuração transversal ao campo, sem retardador de  $\lambda/4$

2ª Sessão - 16/04/2018

Depois de retirar o retardador de quarto de onda e reposicionar a montagem na configuração de observação transversal ao campo, notou-se uma melhor definição das riscas visíveis, pelo que se optou por repetir parcialmente a análise já feita, para esta configuração. *Pois é :).* Devido às oscilações, manteve-se o erro de medição em  $0.02\text{ mm}$ . Apresenta-se de forma sumária os resultados:

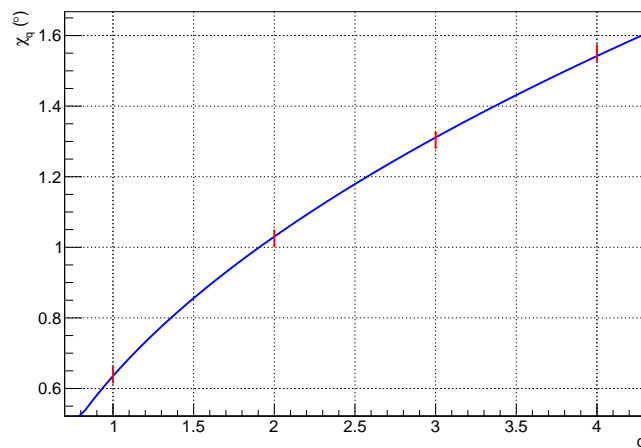
### Condição de interferência:

$q$	$z_q \pm 0.014\text{ (mm)}$	$\chi_q \pm 0.021\text{ (}^\circ\text{)}$	$\chi_{teo}\text{ (}^\circ\text{)}$	$\delta(\#\sigma)$	$m_q$	$m_{teo}$	$\delta(\#\sigma)$
1	0.618	0.652	0.7444	4.39	$13294.7 \pm 2.8$	13295	0.12
2	1.015	1.071	1.0527	-0.86	$13296.0 \pm 4.7$	13296	-0.012
3	1.265	1.335	1.2893	-2.13	$13297.1 \pm 5.9$	13297	-0.020
4	1.483	1.564	1.4888	-3.53	$13298.3 \pm 6.9$	13298	-0.044
-1	0.605	0.638	0.7444	5.02	$13294.6 \pm 2.8$	13295	0.14
-2	0.973	1.026	1.0527	1.26	$13295.8 \pm 4.5$	13296	0.045
-3	1.235	1.303	1.2893	-0.64	$13297.0 \pm 5.7$	13297	-0.010
-4	1.470	1.551	1.4888	-2.91	$13298.2 \pm 6.8$	13298	-0.034

Nota-se um menor desvio por excesso das posições (e respetivos ângulos) e ordens estimadas para as riscas visíveis, o que indica um melhor alinhamento da montagem. Para além disso, para a primeira ordem o ângulo é inferior ao esperado.

Usando o conjunto inferior para evitar que sistemáticos associados ao sistema de medição afetassem diferentemente os resultados, obteve-se o ajuste pelo método dos mínimos quadrados:

$$\chi_q = A\sqrt{q - e}$$



$A$	$e\text{ (}^\circ\text{)}$	$\chi^2/ndf$
$0.810 \pm 0.015$	$-0.004 \pm 0.052$	0.21

Visualmente, o ajuste intersecta na mesma todos o pontos nas suas incertezas, o que indica a sua boa qualidade. O  $\chi^2/ndf$  é semelhante ao primeiro ajuste. Já o parâmetro  $A$  aproxima-se mais do esperado

(0.744). Não é compatível com o mesmo na sua incerteza, mas desvia-se do mesmo a uma amplitude menor ( $4.4\sigma$ ).

O parâmetro  $e$  é compatível com o valor nulo na sua incerteza e menor em módulo do que o obtido anteriormente, fruto do melhor alinhamento da montagem.

Largura das riscas registadas:

q	$\Delta z_q \pm 0.028 \text{ (mm)}$
1	0.105
2	0.070
3	0.060
4	0.125
-1	0.080
-2	0.045
-3	0.070
-4	0.100

Continua a notar-se alguma discrepância nas larguras, apesar de menor. Considerou-se igualmente a média das riscas centrais.

#### Recaraterização do espectrómetro:

Distância entre riscas sem aplicação de campo magnético:

Riscas	$\Delta a \pm 0.020 \text{ (mm)}$
1,2	0.398
2,3	0.250
3,4	0.218
-1,-2	0.368
-2,-3	0.263
-3,-4	0.235

Novamente, o espaçamento entre riscas não é constante, havendo no entanto uma maior simetria entre as distâncias superiores e inferiores. Sendo possível medir as três riscas mais centrais com maior precisão, optou-se por considerar mais uma vez a média dos quatro intervalos centrais para o  $\Delta a$  final, obtendo-se  $\Delta a = (0.319 \pm 0.010) \text{ mm}$ , valor ligeiramente superior cuja incerteza não intersecta a do primeiro. Isto reflete novamente a subjetividade da medida.

Devido à escassez de tempo no laboratório, apenas se retiraram as posições das risca inferiores ao centro para cada corrente aplicada nesta configuração. A menor corrente a que se conseguiu distinguir as 3 componentes de uma risca foi de novo  $I = 5 \text{ A}$ .

Separação das componentes de cada risca:

Risca	$\delta a \pm 0.017 \text{ (mm)}$
-1	0.044
-2	0.021
	$\overline{\delta a} \text{ (mm)}$
	$0.033 \pm 0.012$

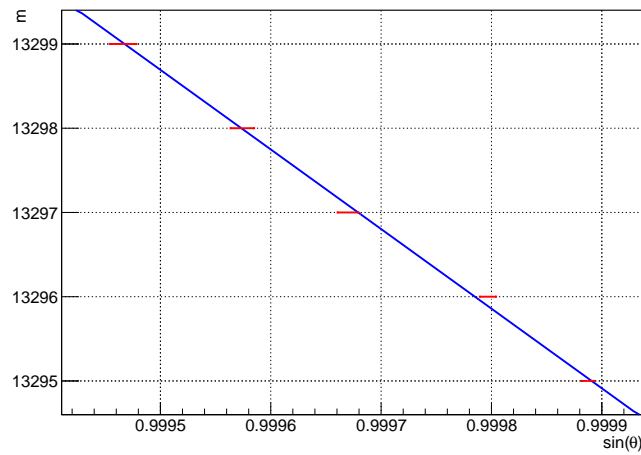


Devido à menor quantidade de dados, o erro propagado é superior. Mesmo assim, este não intersecta o do primeiro resultado.

Com estes valores, tem-se  $\delta\lambda = (4.9 \pm 1.9) \text{ pm}$  e  $\delta\nu = (3.6 \pm 1.4) \text{ GHz}$ , valores inferiores aos obtidos anteriormente. No entanto, intersectam-se na sua incerteza. A potência resolutive é  $\lambda_0/\delta\lambda = (1.31 \pm 0.49) \times 10^5$ , que também intersecta o primeiro valor, sendo no entanto superior e ainda concordante com o esperado para este espectrómetro. Isto provém da maior facilidade que o grupo teve em recolher dados com qualidade. As FSR mantêm-se obviamente iguais. Obtém-se assim uma *finesse* superior à primeira,  $FSR_\lambda/\delta\lambda = 9.8 \pm 3.7$ .

Como os valores agora obtidos indicam uma maior precisão do espectrómetro (que na verdade é um reflexo da maior precisão na tomada de dados), faz sentido considerar de novo um comprimento de onda experimental  $\lambda'$  diferente do fornecido. Obteve-se o ajuste pelo método dos mínimos quadrados:

$$m_q = a \sqrt{b - \sin^2 \theta_q}$$



$a$	$b$	$\chi^2/ndf$
$11211.60 \pm 0.45$	$2.40597 \pm 0.00013$	1.30

Visualmente, o ajuste intersecta os pontos nas suas incertezas, à exceção de um. No entanto, o valor do  $\chi^2/ndf$  é da ordem da unidade, indicando que os erros assumidos são válidos e o ajuste tem boa qualidade.

O parâmetro  $b$  está muito próximo do obtido anteriormente, mas não o intersecta na sua incerteza.

Do parâmetro  $a$  retira-se um comprimento da linha vermelha da lâmpada usada  $\lambda' = 2h/a = (720.682 \pm 0.029) \text{ nm}$ . Este valor não é compatível na sua incerteza nem com o fornecido nem com o anterior, mas ainda está contido na banda dos vermelhos do espectro visível, pelo que se assumirá esta hipótese.

Com este  $\lambda'$ , obtém-se a resolução  $\delta\lambda = (6.2 \pm 2.3) \text{ pm}$ , concordante com o obtido na outra configuração e superior ao valor obtido nesta com o  $\lambda$  fornecido. Tem-se ainda  $FSR_\lambda = (60.6855 \pm 0.0049) \text{ pm}$ , superior ao outros obtidos. A potência resolutive é  $\lambda'/\delta\lambda = 1.17 \pm 0.44 \times 10^5$  e intersecta todas as obtidas anteriormente. No entanto, é de notar que, sendo o comprimento de onda estimado pelos cálculos feitos superior ao fornecido, as potências resolutive obtidas por este método são inferiores às com os dados fornecidos. Estes resultados concordantes voltam a assegurar a qualidade dos mesmos.

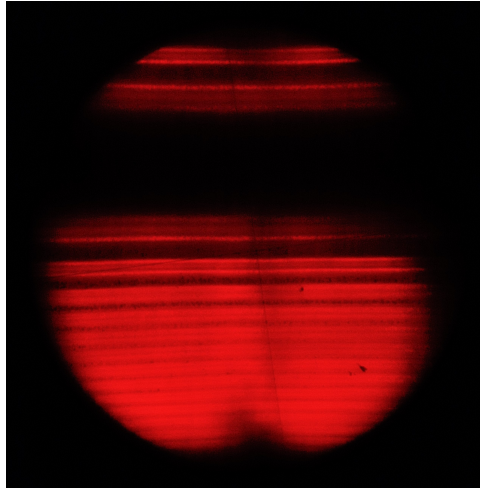
## 7. Espectrómetro atômico de Lummer-Gehrke:

### Efeito de Zeeman Normal Transversal

Desdobramento das riscas em função do campo magnético

2ª Sessão - 16/04/2018

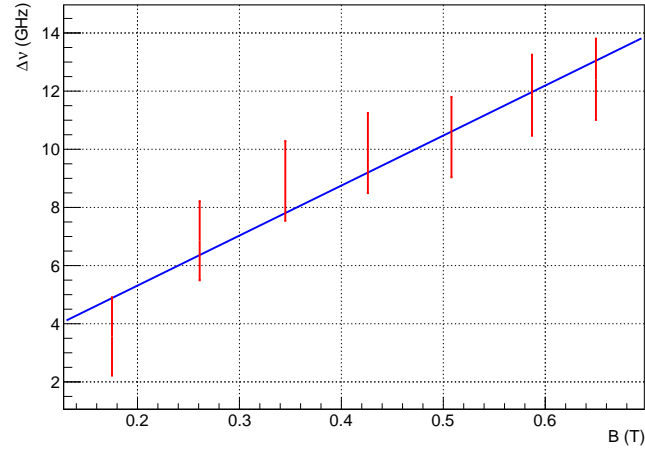
Apresenta-se abaixo uma imagem do efeito de Zeeman Normal transversal visualizado, sem polarizador. *Que bonito.* ♡



Efetuuou-se a mesma análise para o campo magnético aplicado transversalmente ao eixo da luneta. Neste caso, as 3 componentes de cada risca estão polarizadas linearmente, não sendo necessário um retardador para as linearizar. No entanto, usou-se um polarizador com a direção de polarização perpendicular ao campo aplicado para cortar a componente central ( $\pi$ ). Obteve-se o ajuste pelo método dos mínimos quadrados:

$$\delta\nu = a \frac{B}{4\pi} + b,$$

I (A)	B (T)	$\Delta\nu$ (GHz)
5	0.175	$3.6 \pm 1.3$
7.5	0.261	$6.9 \pm 1.4$
10	0.345	$8.9 \pm 1.4$
12.5	0.426	$9.9 \pm 1.4$
15	0.508	$10.4 \pm 1.4$
17.5	0.587	$11.9 \pm 1.4$
19.7	0.6497	$12.4 \pm 1.4$



$a \text{ (GHz/T)}$	$b \text{ (GHz)}$	$\chi^2/ndf$
$215 \pm 41$	$1.6 \pm 1.7$	0.45

Os dados obtidos são concordantes com o previsto, havendo um aumento do desvio das componentes  $\sigma$  com o aumento do campo aplicado. Note-se que esse desvio, para  $I = 19.7 \text{ A}$ , se apresenta inferior ao obtido com campo longitudinal. Tendo em conta a grande dispersão das riscas, há a possibilidade da proteção central ter coberto parte da componente  $\sigma^-$  da primeira risca nesta configuração. Isso sobrestimaria a posição dessa componente, o que subestimaria o seu desvio da risca original.

Visualmente, o ajuste intersecta todos o pontos nas suas incertezas, o que indica a sua boa qualidade e o valor do  $\chi^2/ndf$  é ligeiramente superior ao do campo longitudinal, sendo na mesma muito reduzido.

O parâmetro  $b$  é de novo compatível com o valor nulo na sua incerteza. Já o parâmetro  $a = (2.15 \pm 0.41) \times 10^{11} \text{ C/kg}$  dista do valor teórico por 22%, englobando-o a  $0.95\sigma$ .

Este resultado reflete as melhores condições da experiência nesta configuração. No entanto, ambas as estimativas da razão carga-massa do eletrão se encontram por excesso. Isto traduz-se numa inclinação da reta de ajuste superior à esperada. Tal pode ser devido à subestimação do desvio das componentes da primeira risca. Para além disso, sendo os desvios tabelados calculados por teoria de perturbações, quanto maior a perturbação, menor será a validade da aproximação tabelada. Outra causa poderá também ser o simples facto da subjetividade das medidas ter levado à sobrestimação da separação entre riscas. Assume-se que estas estimativas por excesso são fruto duma combinação destes fatores.

## 8. Interferómetro Fabry-Perot:

Caracterização do Interferómetro usando o Laser de 2 mW

3ª Sessão - 23/04/2018

Como visto na preparação da sessão (ver *logbook* do laboratório), a transmissividade de um interferómetro de Fabry-Perot é determinada por uma função de Airy. Por conseguinte, os dados da tensão detetada pelo fotomultiplicador,  $U_{PM}$ , em função da imposta no piezoelétrico (que varia a distância  $L$  entre os espelhos do interferómetro),  $U_{Piezo}$ , foram ajustados a uma função do tipo Airy com os seguintes parâmetros  $P_i$  de ajuste:

$$U_{PM}(U_{Piezo}) = \frac{P_0}{1 + P_1 \cdot \sin^2(P_2 \cdot U_{Piezo} + P_3)}$$

Contudo, como o *laser* possui uma certa largura espectral, irão existir vários modos que originam diferentes funções de Airy para a transmissividade do interferómetro. Por conseguinte, por cada modo observado no espectro é necessário somar uma função daquelas descrita acima. Ainda assim, os parâmetros  $P_1$  e  $P_2$  deverão ser os mesmos para cada uma. O primeiro corresponde à constante  $K$ :

$$K = \left[ \frac{2r}{1 - r^2} \right]^2$$

que dependendo apenas da refletividade deverá ser mantida constante para qualquer modo. Já  $P_2$  corresponde fisicamente a:

$$P_2 \propto \frac{2\pi}{\lambda}$$

Ainda que os modos possuam comprimentos de onda distintos, a sua diferença não é suficiente para que sejam observados diferentes períodos para as transmissividades dos mesmos (para além de que estes estariam correlacionados). Por conseguinte, optou-se por não introduzir mais um grau de liberdade nos ajustes já que os parâmetros que se iriam obter intersetariam-se nos respetivos erros (isto foi verificado com alguns *fit*).

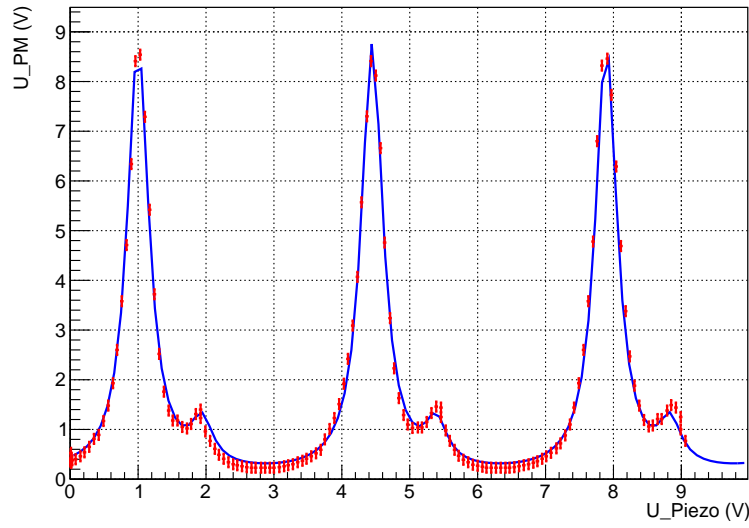
Para um primeiro conjunto de dados, obtidos com um distanciamento entre espelhos de  $L = 65 \pm 2 \text{ mm}$  observaram-se 2 modos (2 picos repetidos periodicamente) pelo que os dados foram ajustados a:

$$\frac{P_0}{1 + P_1 \cdot \sin^2(P_2 \cdot U_{Piezo} + P_3)} + \frac{P_4}{1 + P_1 \cdot \sin^2(P_2 \cdot U_{Piezo} + P_5)}$$

Considerou-se a incerteza acima referida para o distanciamento entre espelhos pois a medida, ainda que feita com um instrumento preciso (craveira), requer alguma subjetividade em avaliar a espessura dos espelhos (já que não se pode tocar diretamente com a craveira nos mesmos).

Utilizou-se para os erros em  $U_{Piezo}$  a menor divisão da escala de leitura da tensão imposta no piezoelétrico (0.01 V). Porém, como descrito no *logbook* do laboratório, para a intensidade detetada no fotomultiplicador observavam-se instabilidades atribuídas ao laser do Fabry-Perot (como concluído na altura, estas decorrem do não equilíbrio térmico do sistema). Por conseguinte, o erro considerado para estas tensões não foi a menor divisão da escala mas sim de 0.1 V.

Obteve-se então:

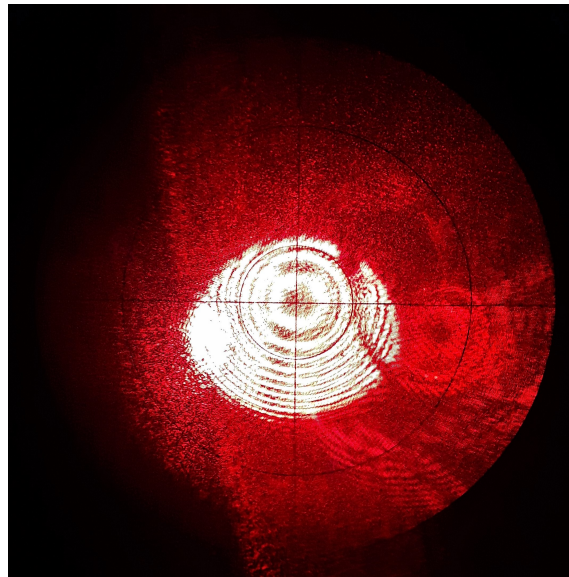


$P_0 (V)$	$P_1$	$P_2 (rad V^{-1})$	$P_3 (rad)$	$P_4 (V)$	$P_5 (rad)$	$\chi^2/ndf$
$8.718 \pm 0.066$	$31.77 \pm 0.54$	$(9.114 \pm 0.006) \times 10^{-1}$	$(9.107 \pm 0.032) \times 10^{-1}$	$(8.898 \pm 0.301) \times 10^{-1}$	$1.769 \pm 0.008$	1.63

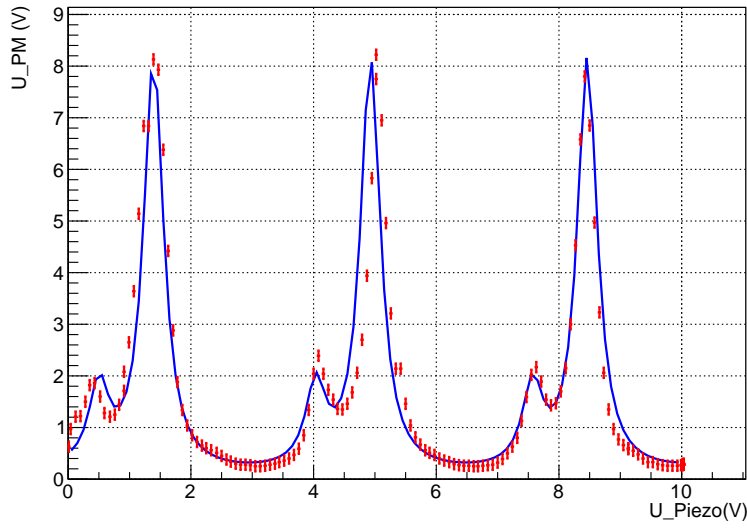
O  $\chi^2/ndf$  é da ordem de 1 o que valida a qualidade do ajuste, já por si confirmada visualmente.

Os  $FWHM$  de cada pico de maior intensidade foram obtidos manualmente fazendo médias aos dois pontos que englobassem  $P_0/2$  quer à esquerda e à direita do centróide de cada um. O  $FWHM$  final considerado para o ensaio é a média destes sendo o seu erro o desvio médio (porque o número de ensaios é inferior a 10). Este método foi corroborado por alguns ajustes gaussianos que se fizeram aos picos de forma a ver se os valores obtidos assim eram coerentes. Para este ensaio obteve-se  $\overline{FWHM}_U = 0.381 \pm 0.032 V$ .

Abaixo apresenta-se o respetivo padrão de anéis de interferência observado na luneta do interferómetro de Fabry-Perot:



Para que se possam extrair conclusões acerca dos parâmetros obtidos é necessário realizar mais ajustes a outros ensaios, para observar se estes se mantêm coerentes. No seguinte ensaio, tal como descrito no *logbook* soprou-se para o laser de modo a arrefece-lo:



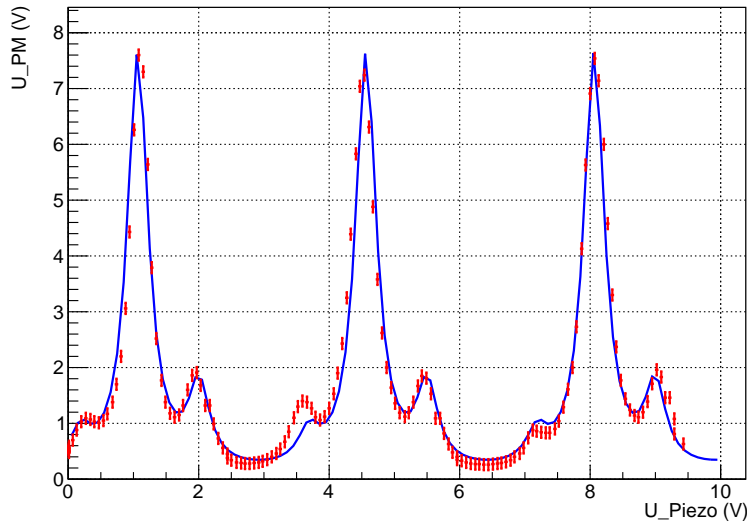
$P_0 (V)$	$P_1$	$P_2 (rad V^{-1})$	$P_3 (rad)$	$P_4 (V)$	$P_5 (rad)$	$\chi^2/ndf$
$8.094 \pm 0.079$	$32.13 \pm 0.63$	$(8.887 \pm 0.006) \times 10^{-1}$	$1.234 \pm 0.003$	$1.596 \pm 0.037$	$(4.448 \pm 0.058) \times 10^{-1}$	16.28

Tendo-se  $\overline{FWHM}_U = 0.431 \pm 0.027 V$ .

É notória a alteração dos modos observados estando o de menor intensidade agora à esquerda. O parâmetro  $P_1$  mantém-se consistente com o obtido anteriormente. Já  $P_2$ , que também se deveria manter constante já que está relacionado com o *Full Spectral Range*, e a montagem não sofreu nenhuma perturbação, sofreu uma variação que não é coberta pelo erro experimental. Contudo, tendo em conta o ligeiro aumento do  $\chi^2/ndf$ , esta não é alarmante. As fases  $P_3$  e  $P_5$  estão relacionados com o comprimento inicial do piezoelétrico e não podem ser comparadas e entre ensaios. Porém, irão posteriormente permitir realizar um estudo da estrutura de modos do laser.

Finalmente, fez-se um ajuste a um ensaio onde fossem visíveis 3 modos do laser de *He – Ne*, sendo neste caso o *fit* feito a:

$$\frac{P_0}{1 + P_1 \cdot \sin^2 (P_2 \cdot U_{Piezo} + P_3)} + \frac{P_4}{1 + P_1 \cdot \sin^2 (P_2 \cdot U_{Piezo} + P_5)} + \frac{P_6}{1 + P_1 \cdot \sin^2 (P_2 \cdot U_{Piezo} + P_7)}$$



$P_0 (V)$	$P_1$	$P_2 (rad V^{-1})$	$P_3 (rad)$	$P_4 (V)$	$P_5 (rad)$	$P_6 (V)$	$P_7 (rad)$	$\chi^2/ndf$
$7.545 \pm 0.058$	$32.59 \pm 0.59$	$(8.898 \pm 0.006) \times 10^{-1}$	$(9.573 \pm 0.031) \times 10^{-1}$	$(5.842 \pm 0.303) \times 10^{-1}$	$(1.732 \pm 0.102) \times 10^{-1}$	$1.478 \pm 0.034$	$1.799 \pm 0.006$	4.78

$$\overline{FWHM} = 0.385 \pm 0.025 V$$

Regista-se novamente uma coerência no parâmetro  $P_1$  e uma variação em  $P_2$  que não interseja os valores anteriores no respetivo erro experimental. Já o  $\chi^2/ndf$  mantém-se numa ordem que confere consistência ao modelo.

Poder-se-ia questionar se as instabilidades que se verificam na própria cavidade ótica do *laser* não tornam a análise ao conjunto de todos os dados registados menos precisa. Ao invés, poder-se-ia apenas *fittar* dois picos seguidos já que à partida, devido às instabilidades quer a frequência  $P_2$  e as intensidades de cada modo observado não se mantêm constante ao longo de todo o varrimento em tensão no piezoelétrico.

Por conseguinte, fizeram-se ajustes a conjuntos de dois picos seguidos para todos os ensaios anteriormente apresentados. Observou-se que o parâmetro  $P_2$  variava consideravelmente em todos eles quando se tomavam os dois primeiros picos no sentido do varrimento da tensão  $U_{Piezo}$ , ou os dois últimos. Isto veio verificar uma suspeita já tida no laboratório de que a variação do comprimento do piezoelétrico, e por conseguinte da cavidade ótica do interferómetro, não é verdadeiramente linear com a tensão  $U_{Piezo}$ . Tentou-se realizar um ajuste a uma variação quadrática em  $U_{Piezo}$  (motivada pelo facto de que este contributo poderia ser pequeno e por isso a variação poderia ser tomada até segunda ordem em série de Taylor), mas sem sucesso já que o parâmetro  $P_2$  continuou a ter variações não desprezáveis consoante o conjunto de picos tomados.

Posto isto, tomou-se que o que descreveria melhor o interferómetro seriam os ajustes feitos a todos os dados em cada ensaio pois estes teriam um comportamento "médio" da variação do comprimento do piezoelétrico com a tensão.

Pela definição de *Full Spectral Range* do interferómetro (rever preparação da sessão laboratorial) é óbvio que esta será definida pela periodicidade da função de Airy, que por sua vez é determinada pela periodicidade de  $\sin^2$ , de  $\pi$ . Tendo em conta o modelo considerado o espaçamento entre dois máximos observados no Fabry-Perot é de:

$$P_2 \Delta U_{FSR} = \pi \Leftrightarrow \Delta U_{FSR} = \frac{\pi}{P_2} \quad , \quad \sigma_{\Delta U_{FSR}} = \frac{\pi}{P_2^2} \sigma_{P_2}$$

Reúnem-se os resultados na seguinte tabela

Ensaio	$FWHM_U (V)$	$\Delta U_{FSR} (V)$	F
1	$0.381 \pm 0.032$	$3.447 \pm 0.023$	$9.04 \pm 0.76$
2	$0.424 \pm 0.025$	$3.535 \pm 0.024$	$9.18 \pm 0.65$
3	$0.385 \pm 0.027$	$3.531 \pm 0.024$	$8.20 \pm 0.48$

Ainda não se realizou qualquer consideração acerca de que se estes valores fazem sentido tendo em conta o que sabe teoricamente sobre o interferômetro de Fabry-Perot. No entanto, prossegue-se com o cálculo da *finesse*, F, (apresentada na última coluna da tabela anterior) a partir de:

$$F = \frac{\Delta U_{FSR}}{FWHM_U} \quad , \quad \sigma_F^2 = \left( \frac{\sigma_{\Delta U_{FSR}}}{FWHM_U} \right)^2 + \left( \frac{\Delta U_{FSR}}{FWHM_U^2} \sigma_{FWHM_U} \right)^2$$

Invertendo a expressão teórica avançada para a *finesse* na preparação da sessão laboratorial chega-se à seguinte relação para a refletividade dos espelhos:

$$r^2 = \left( \frac{-\pi + \sqrt{\pi^2 + 4F^2}}{2F} \right)^2 \quad , \quad \sigma_{r^2}^2 = \left( \frac{r^2}{F} \sigma_F \right)^2 + \left( \frac{2\sigma_F}{\sqrt{\pi^2 + 4F^2}} \right)^2$$

Calculando a média das *finesses* obtidas obtêm-se aos seguintes resultados:

$$\bar{F} = 8.81 \pm 0.41 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 0.701 \pm 0.056$$

Este valor é ligeiramente inferior aos 0.8 apontados no guia. No entanto, já tinham sido observadas no laboratório algumas irregularidades nos espelhos do interferômetro. Nomeadamente um deles tinha parte do seu papel refletor descolado. Estes fatores adicionados da variada utilização do interferômetro ao longo dos anos justificam o valor mais reduzido encontrado para a refletividade  $r^2$ .

Repare-se que a refletividade também pode ser estimada a partir do parâmetro  $P_1$ . Correspondendo este a K então:

$$r^2 = \frac{(\sqrt{1+P_1}-1)^2}{P_1} \quad , \quad \sigma_{r^2}^2 = \left( \frac{r^2}{P_1} \sigma_{P_1} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{1+P_1}-1}{P_1 \sqrt{1+P_1}} \sigma_{P_1} \right)^2$$

Fazendo a média sobre os  $P_1$  obtidos chega-se a:

$$\bar{P}_1 = 32.16 \pm 0.28 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 0.704 \pm 0.010$$

Pelo que os valores são consistentes intersetando-se, na sua incerteza.

Pode-se ainda calcular a potência resolutive do interferômetro [11]:

$$R = \frac{\nu}{FWHM_\nu} \quad , \quad \sigma_R = \frac{R}{FWHM_\nu} \sigma_{FWHM_\nu}$$

Para calcular o FWHM em frequência começa-se por calcular o *Full Spectral Range* em frequência teórico para a distância utilizada:

$$\Delta \nu_{FSR} = \frac{c}{2L} \quad , \quad \sigma_{\Delta \nu_{FSR}} = \frac{c}{2L^2} \sigma_L$$

o que corresponde a

$$\Delta \nu_{FSR} = 2.306 \pm 0.071 \text{ GHz} ,$$

pelo que definindo o fator de conversão:

$$C = 0.658 \pm 0.022 \text{ GHz/V}$$



onde se usou:

$$\sigma_C = \frac{\Delta v_{FSR}}{\Delta U_{FSR}^2} \sigma_{\Delta U_{FSR}}$$

chega-se a:

$$FWHM_v = C \cdot FWHM_U = 0.262 \pm 0.010 \text{ GHz}$$

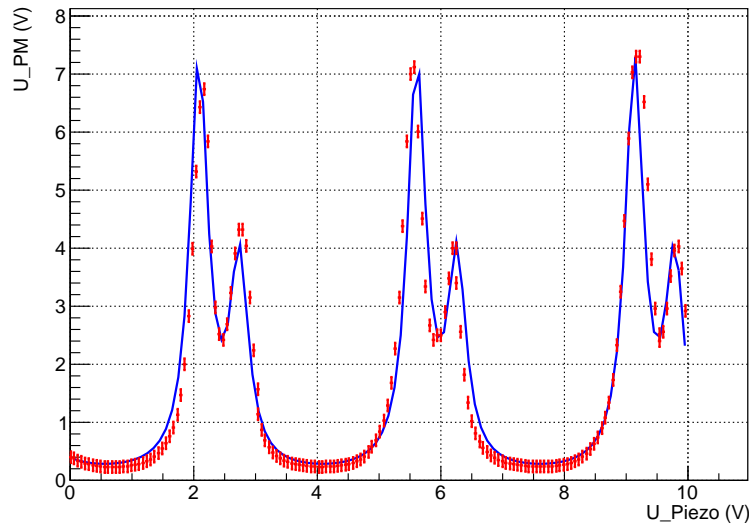
Este corresponde à resolução espectral do interferômetro quando usado como espectrôscópio.

Tem-se finalmente:

$$R_{L=65 \text{ mm}} = (1.805 \pm 0.059) \times 10^6$$

Apesar deste valor estar no limite inferior das ordens de grandezas esperadas para um interferômetro de Fabry-Perot é, ainda assim, superior em ordem de grandeza quer em relação à espectroscopia com lâmina de Lummer-Gehrke ( $\sim 10^5$ ) quer em relação à espectroscopia de Raio-X ( $\sim 10^6$ ), permitindo por isso a análise fina do espectro de modos de um laser.

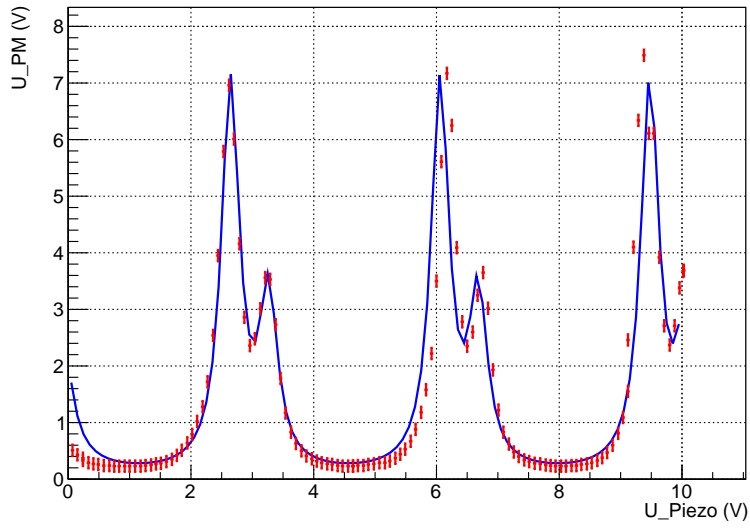
Repetiu-se a análise feita anteriormente para os dados retirados com uma distância entre espelhos de  $L = 46 \text{ mm}$ .



$P_0 (V)$	$P_1$	$P_2 (rad V^{-1})$	$P_3 (rad)$	$P_4 (V)$	$P_5 (rad)$	$\chi^2/ndf$
$7.065 \pm 0.070$	$39.12 \pm 0.67$	$(8.912 \pm 0.005) \times 10^{-1}$	$1.856 \pm 0.003$	$3.556 \pm 0.041$	$2.438 \pm 0.004$	9.44

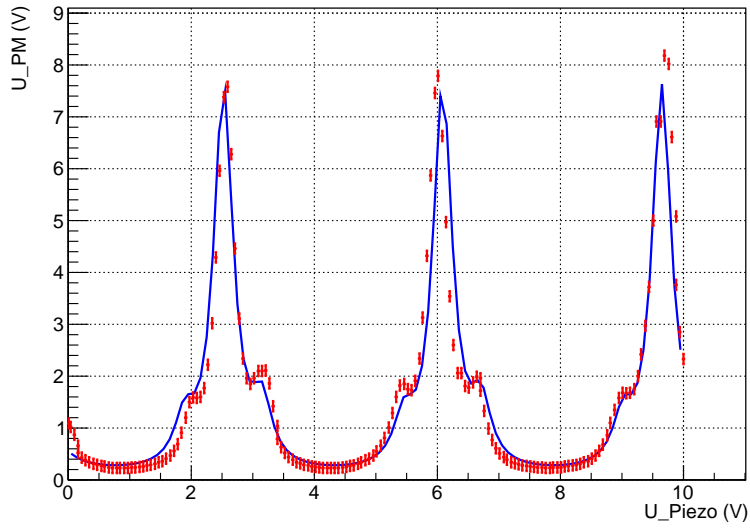
$$\overline{FWHM} = 0.422 \pm 0.032 \text{ V}$$

Para mais dois ensaios:



$P_0 (V)$	$P_1$	$P_2 (rad V^{-1})$	$P_3 (rad)$	$P_4 (V)$	$P_5 (rad)$	$\chi^2/ndf$
$6.905 \pm 0.079$	$36.82 \pm 0.77$	$(9.195 \pm 0.006) \times 10^{-1}$	$2.43 \pm 0.004$	$3.04 \pm 0.055$	$3.000 \pm 0.005$	15.24

$$\overline{FWHM} = 0.431 \pm 0.036 V$$



$P_0 (V)$	$P_1$	$P_2 (rad V^{-1})$	$P_3 (rad)$	$P_4 (V)$	$P_5 (rad)$	$P_6 (V)$	$P_7 (rad)$	$\chi^2/ndf$
$7.441 \pm 0.057$	$38.98 \pm 0.73$	$(8.820 \pm 0.006) \times 10^{-1}$	$2.225 \pm 0.005$	$(8.721 \pm 0.380) \times 10^{-1}$	$1.670 \pm 0.009$	$1.171 \pm 0.041$	$2.776 \pm 0.008$	9.85

$$\overline{FWHM} = 0.417 \pm 0.030 V$$

No geral, observa-se o  $FWHM$  varia pouco, ainda que tenha um ligeiro aumento. Isto promove a mistura entre funções de Airy que dificulta o *fit*, o que justifica o aumento global do  $\chi^2/ndf$ . Este último deverá sobretudo estar motivado pela maior proximidade entre picos.

Sendo  $P_2$  independente da montagem a sua não variação é consistente. Repetindo os cálculos anteriores:

Ensaio $i$	$FWHM_i (V)$	$\Delta U_{FSR} (V)$	F
1	$0.422 \pm 0.032$	$3.525 \pm 0.020$	$8.45 \pm 0.64$
2	$0.431 \pm 0.076$	$3.417 \pm 0.022$	$8.26 \pm 0.69$
3	$0.417 \pm 0.030$	$3.562 \pm 0.024$	$8.19 \pm 0.60$

Tal corresponde a uma *finesse* média de  $\bar{F} = 8.30 \pm 0.14$  que intersecta o obtido anteriormente na sua incerteza.

Esta  $\bar{F}$  corresponde a um refletividade de:

$$r^2 = 0.686 \pm 0.024$$

Fazendo novamente a média dos parâmetros  $P_1$  e a refletividade correspondente chega-se a:

$$\bar{P}_1 = 38.31 \pm 0.99 \Rightarrow r^2 = 0.725 \pm 0.137$$

Conclui-se que os resultados que se estão a obter são todos consistentes entre si o que contribui para a validade do método.

Utilizando as expressões apresentadas anteriormente:

$$\Delta \nu_{FSR} = 3.259 \pm 0.142 \text{ GHz} \Rightarrow C = 0.931 \pm 0.044 \text{ GHz/V} \Rightarrow FWHM_\nu = 0.394 \pm 0.019 \text{ GHz}$$

E assim:

$$A_{L=46 \text{ mm}} = (1.202 \pm 0.056) \times 10^6$$

Para um comprimento menor da cavidade óptica de Fabry-Perot, a potência resolutive o que diminui a discretização do espectro.

## 9. Interferómetro Fabry-Perot:

Laser de 2 mW - Estrutura de Modos do Laser

3ª Sessão 23/04/2018

Vai-se agora caracterizar a estrutura de modos do laser. Já se observou que este laser amplifica 3 dos seus modos espectrais acima do seu *threshold* (os 3 picos observados). Se estes estão a uma distância  $\Delta U_{Modos}$  dada pela diferença entre as suas fases convertida para tensão, então o respetivo espaçamento entre os modos em frequência será dado por:

$$\Delta \nu_{Modos} = C \cdot \Delta U_{Modos} = C \frac{Fase_j - Fase_i}{P_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{\Delta \nu_{Modos}}^2 = \left( C \frac{\sigma_{Fase_j}}{P_2} \right)^2 + \left( C \frac{\sigma_{Fase_i}}{P_2} \right)^2 + \left( \frac{\Delta \nu_{Modos}}{C} \sigma_C \right)^2 + \left( \frac{\Delta \nu_{Modos}}{P_2} \sigma_{P_2} \right)^2$$

Para  $L = 65 \pm 2 \text{ mm}$ , tem-se respetivamente para o primeiro ensaio:

Fase (rad)	Espaçamento entre modos (MHz)
$0.911 \pm 0.003$	$619.7 \pm 21.2$
$1.769 \pm 0.008$	

segundo ensaio:

Fase ( <i>rad</i> )	Espaçamento entre modos ( <i>MHz</i> )
0.445 ± 0.006	584.3 ± 22.7
1.234 ± 0.003	

e terceiro ensaio:

Fase ( <i>rad</i> )	Espaçamento entre modos ( <i>MHz</i> )
0.173 ± 0.010	579.8 ± 26.9
0.957 ± 0.003	
0.957 ± 0.003	622.7 ± 19.8
1.799 ± 0.006	

Para  $L = 46 \pm 2 \text{ mm}$ , tem-se respetivamente para o primeiro ensaio:

Fase ( <i>rad</i> )	Espaçamento entre modos ( <i>MHz</i> )
1.856 ± 0.003	607.3 ± 25.8
2.438 ± 0.006	

segundo ensaio:

Fase ( <i>rad</i> )	Espaçamento entre modos ( <i>MHz</i> )
2.430 ± 0.004	576.6 ± 26.7
3.000 ± 0.005	

terceiro ensaio:

Fase ( <i>rad</i> )	Espaçamento entre modos ( <i>MHz</i> )
1.670 ± 0.009	585.2 ± 28.3
2.225 ± 0.005	
2.225 ± 0.005	581.0 ± 27.8
2.776 ± 0.008	

Comparando os valores obtidos para todos os ensaios com o valor apontado pelo fabricante de 320 *MHz*:

Ensaio	Espaçamento entre modos médio	Desvio ( $\sigma$ )
L=65 - 1	620 ± 22	0.27
L=65 - 2	584 ± 23	-1.30
L=65 - 3	601 ± 22	-0.59
L=46 - 1	607 ± 25	-0.28
L=46 - 2	577 ± 27	-1.37
L=46 - 3	583 ± 28	-1.11

Conclui-se que ainda que os resultados obtidos sejam bastantes satisfatórios (desvios em  $\sigma$  da ordem da unidade) parece existir um sistemático negativo pois a maior parte dos valores está subestimada.

## 10. Interferômetro Fabry-Perot:

Caracterização do Interferômetro usando o Laser de 20 mW

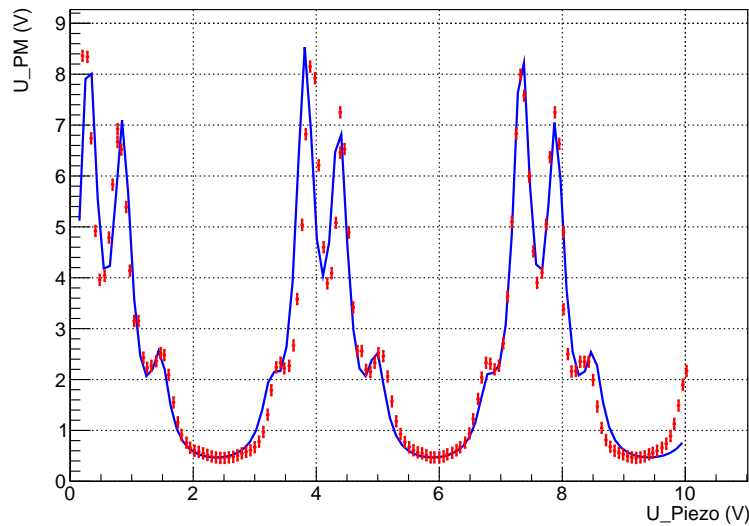
4ª Sessão - 23/04/2018

Irá-se repetir, para este laser de potência nominal de 20 mW (ainda que o valor real seja menor) a análise feita anteriormente para o laser de 2 mW e registrar as diferenças observadas.

A primeira, já vista em laboratório, é a observação de mais modos (que, segundo o fabricante, estão menos espaçados), nomeadamente 4. Naturalmente, isto dificultará o *fit* a realizar já que são necessárias 4 funções de Airy:

$$\frac{P_0}{1 + P_1 \cdot \sin^2(P_2 \cdot U_{Piezo} + P_3)} + \frac{P_4}{1 + P_1 \cdot \sin^2(P_2 \cdot U_{Piezo} + P_5)} + \frac{P_6}{1 + P_1 \cdot \sin^2(P_2 \cdot U_{Piezo} + P_7)} + \frac{P_8}{1 + P_1 \cdot \sin^2(P_2 \cdot U_{Piezo} + P_9)}$$

Para a primeira configuração utilizou-se o espaçamento máximo entre espelhos,  $L = 77 \pm 2 \text{ mm}$  para que o *FWHM* fosse mínimo e se conseguissem observar nitidamente os modos do laser:

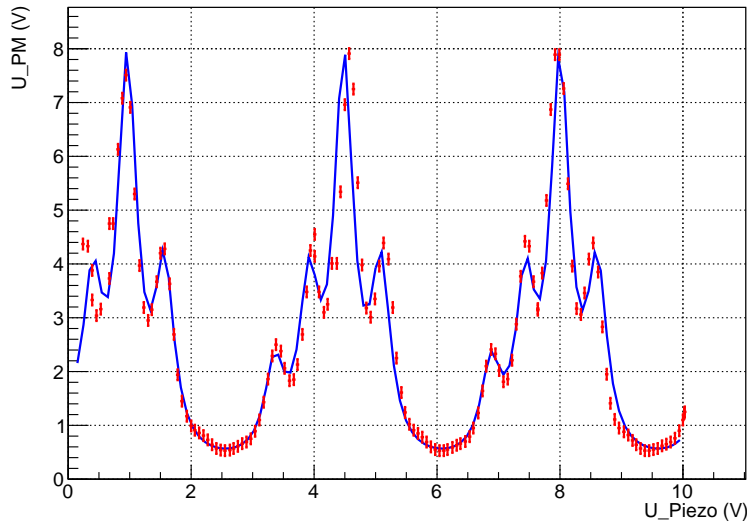


$P_0$ (V)	$P_1$	$P_2$ (rad V <sup>-1</sup> )	$P_3$ (rad)	$P_4$ (V)	$P_5$ (rad)	$P_6$ (V)	$P_7$ (rad)	$P_8$ (V)	$P_9$ (rad)	$\chi^2/ndf$
$7.016 \pm 0.061$	$40.50 \pm 0.62$	$(8.924 \pm 0.005) \times 10^{-1}$	$(2.856 \pm 0.023) \times 10^{-1}$	$6.094 \pm 0.058$	$(7.617 \pm 0.024) \times 10^{-1}$	$1.754 \pm 0.039$	$1.309 \pm 0.006$	$1.293 \pm 0.047$	$2.930 \pm 0.008$	14.07

Tal como esperado, a distância entre os modos é menor (menor espaçamento em frequência) e ainda que o  $\chi^2/ndf$  seja superior à generalidade obtida anteriormente, manteve-se suficientemente pequeno para que o ajuste seja satisfatório.

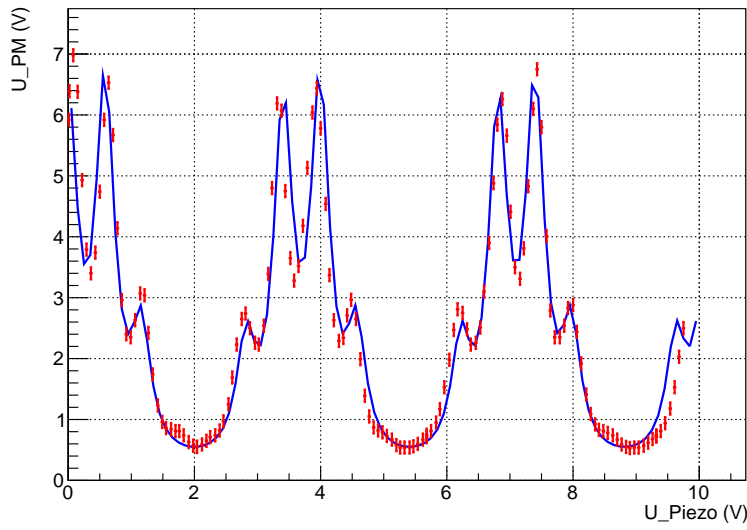
Obteve-se  $FWHM = 0.338 \pm 0.051 \text{ V}$ . A diminuição deste valor é esperada para variações em frequência e  $L$  constante, sendo que para variações no último a frequência constante o *FWHM* deveria manter-se o mesmo. Ainda assim o valor obtido intersesta os anteriores na respetiva incerteza.

Repetindo para mais dois ensaios:



$P_0$ (V)	$P_1$	$P_2$ (rad $V^{-1}$ )	$P_3$ (rad)	$P_4$ (V)	$P_5$ (rad)	$P_6$ (V)	$P_7$ (rad)	$P_8$ (V)	$P_9$ (rad)	$\chi^2/ndf$
$7.269 \pm 0.063$	$34.47 \pm 0.53$	$(8.925 \pm 0.006) \times 10^{-1}$	$(8.578 \pm 0.026) \times 10^{-1}$	$3.027 \pm 0.041$	$(3.531 \pm 0.040) \times 10^{-1}$	$3.390 \pm 0.046$	$1.397 \pm 0.004$	$1.659 \pm 0.043$	$2.995 \pm 0.006$	12.04

$$FWHM = 0.350 \pm 0.040 \text{ V}$$



$P_0$ (V)	$P_1$	$P_2$ (rad $V^{-1}$ )	$P_3$ (rad)	$P_4$ (V)	$P_5$ (rad)	$P_6$ (V)	$P_7$ (rad)	$P_8$ (V)	$P_9$ (rad)	$\chi^2/ndf$
$5.512 \pm 0.051$	$33.38 \pm 0.51$	$(0.921 \pm 0.007) \times 10^{-1}$	$(5.344 \pm 0.037) \times 10^{-1}$	$5.604 \pm 0.056$	$3.139 \pm 0.004$	$2.008 \pm 0.041$	$1.062 \pm 0.005$	$1.741 \pm 0.040$	$2.595 \pm 0.006$	11.52

$$FWHM = 0.321 \pm 0.043 \text{ V}$$

No geral, ainda que com o aumento do número de modos, os ajustes revelaram-se de boa qualidade o que reforça uma vez mais o modelo utilizado. A diminuição do  $FWHM$  foi consistente em todos os ensaios. Já  $P_2$  manteve-se constante como previsto teoricamente. Novamente, isto poderá dever-se à variação não linear do comprimento do piezoelétrico com a tensão. Repetindo os cálculos para a *finesse*

Ensaio $i$	$FWHM_i$ (V)	$\Delta U_{FSR}$ (V)	F
1	$0.338 \pm 0.041$	$3.520 \pm 0.020$	$10.407 \pm 1.570$
2	$0.350 \pm 0.030$	$3.520 \pm 0.024$	$10.066 \pm 1.153$
3	$0.321 \pm 0.033$	$3.525 \pm 0.027$	$10.98 \pm 1.472$

Ainda que haja um ligeira aumento os valores obtidos anteriormente continuem a ser englobados pelo erro experimental. Este aumento pode ser justificado por uma maior qualidade do alinhamento já que estes ensaios foram feitos uma semana depois dos para o *laser* de 2 mW estando o grupo mais familiarizado com a montagem,

Repetindo os cálculos já feitos para os casos anteriores:

$$\bar{F} = 10.48 \pm 0.33 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 0.741 \pm 0.051$$

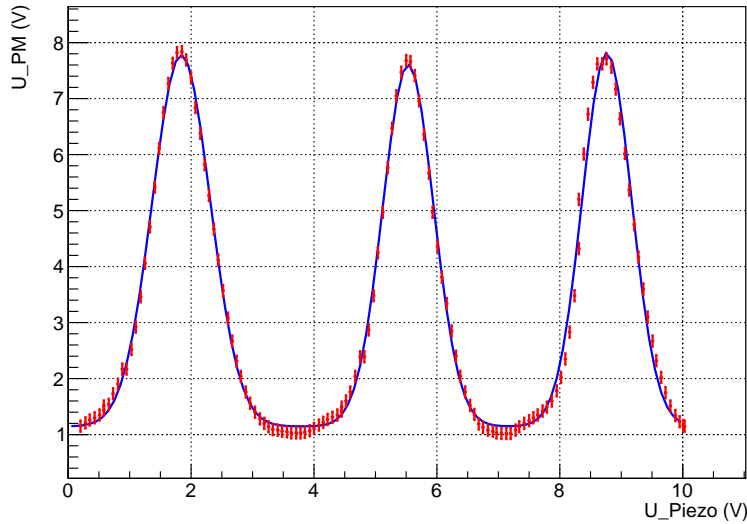
$$\Delta \nu_{FSR} = 1.945 \pm 0.071 \text{ GHz} \Rightarrow C = 0.552 \pm 0.021 \text{ GHz/V} \Rightarrow FWHM_\nu = 0.186 \pm 0.007 \text{ GHz}$$

$$A_{L=77 \text{ mm}} = (2.550 \pm 0.094) \times 10^6$$

Novamente, para uma maior distância entre os espelhos do interferómetro tem-se uma maior capacidade de caracterização fina do espectro.

Por fim, repetiu-se o procedimento experimental para uma distância entre espelhos de  $L = 47 \pm 2 \text{ mm}$ . Para esta, devido ao aumento do *FWHM* e ao menor espaçamento entre modos em tensão para o mesmo intervalo, não se observam os modos do laser separadamente.

Ao invés, a transmissividade assume um comportamento gaussiano o que motivou um ajuste a uma soma de 3 gaussianas:



$P_0$ (V)	$P_1$	$P_2$ (rad V <sup>-1</sup> )	$P_3$ (rad)	$P_4$ (V)	$P_5$ (rad)	$P_6$ (V)	$P_7$ (rad)	$P_8$ (V)	$P_9$ (rad)	$\chi^2/ndf$
$6.638 \pm 0.042$	$1.840 \pm 0.004$	$(4.722 \pm 0.039) \times 10^{-1}$	$6.47 \pm 0.045$	$5.533 \pm 0.004$	$(4.143 \pm 0.036) \times 10^{-1}$	$6.670 \pm 0.045$	$8.866 \pm 0.004$	$(4.034 \pm 0.036) \times 10^{-1}$	$1.145 \pm 0.016$	2.22

Caso se utilizem diretamente os  $\sigma$  obtidos para estimar os *FWHM* a partir da relação  $FWHM = 2.355 \sigma$  iriam-se obter resultados disparatados, pois uma gaussiana está a englobar 4 picos. Contudo, sabe-se que para

um distribuição normal que resultado da soma de outras  $N$  distribuições normais, a variância é a soma de cada uma das variâncias das  $N$  distribuições (caso estas fossem independentes, o que não é verdade neste caso).

Assumindo então a independência entre os picos dos modos do laser podemos fazer a aproximação de que  $FWHM_{modo} = FWHM_{total} / \sqrt{4} = FWHM_{total} / 2$ . Fazendo a média dos valores obtidos para estes 3 gaussianas chega-se a  $\overline{FWHM} = 0.502 \pm 0.033$  V. Sendo os *Full Spectral Range* dados por:

$ \mu_2 - \mu_1 $ (V)	$ \mu_3 - \mu_2 $ (V)	$\overline{FSR}$ (V)
3.693	3.333	$3.51 \pm 0.18$

Obtém-se uma *finesse* média de

$$F = 7.012 \pm 0.584$$

Um valor algo discordante dos anteriores, mas tendo em conta as aproximações feitas no seu cálculo considera-se uma estimativa aceitável.

## 11. Interferómetro Fabry-Perot:

Laser de 20 mW - Estrutura de Modos do Laser - 4ª Sessão 23/04/2018

Repetindo a análise feita anteriormente para a estrutura de modos do laser, para o espaçamento entre espelhos de  $L = 77 \pm 2$  mm, no primeiro ensaio tem-se:

Fase $\times 10^{-1}$ (rad)	Espaçamento entre modos (MHz)
$2.856 \pm 0.023$ $7.617 \pm 0.024$	$295.5 \pm 24.6$
$7.617 \pm 0.024$ $13.09 \pm 0.06$	
$29.30 \pm 0.08$ $\pi + 2.856 \pm 0.023$	$307.7 \pm 24.7$

para o segundo:

Fase $\times 10^{-1}$ (rad)	Espaçamento entre modos (MHz)
$3.531 \pm 0.040$ $8.578 \pm 0.026$	$312.3 \pm 24.6$
$8.578 \pm 0.026$ $13.97 \pm 0.04$	
$29.95 \pm 0.06$ $34.95 \pm 0.05$	$309.2 \pm 24.7$

e para o terceiro:



Fase $\times 10^{-1}$ (rad)	Espaçamento entre modos (MHz)
0.026 $\pm$ 0.004 5.344 $\pm$ 0.037	318.9 $\pm$ 25.1
5.344 $\pm$ 0.037 10.62 $\pm$ 0.04	319.7 $\pm$ 25.3
25.95 $\pm$ 0.06 31.39 $\pm$ 0.05	329.7 $\pm$ 26.1

Comparando com o valor de 320 MHz avançado teoricamente:

Ensaio	Espaçamento entre modos médio	Desvio ( $\sigma$ )
1	314 $\pm$ 17	-0.35
2	318 $\pm$ 11	-0.18
3	323 $\pm$ 5	0.60

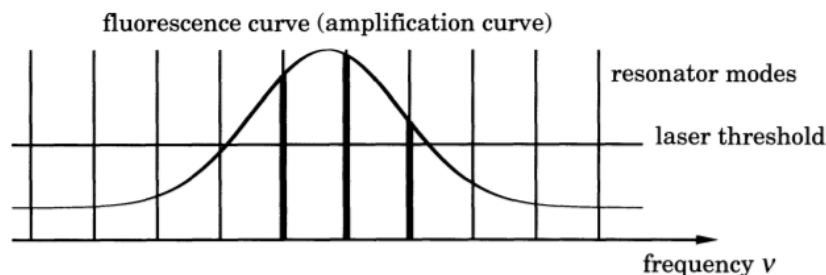
Para este laser, muito porventura de se estar a usar a máxima distância possível entre espelhos, conseguiu-se uma caracterização ainda mais exata e precisa da estrutura de modos do laser. Ainda assim, continua a ter-se um comportamento tendencialmente de subestimação do espaçamento entre modos, o que evidencia uma vez mais a existência de um erro sistemático no método de análise.

## 12. Interferómetro Fabry-Perot:

Laser de 2 mW - Largura de banda de ganho do Laser

3ª Sessão 23/04/2018

Pretende-se obter uma estimativa da largura de banda de ganho do laser, ou seja, o intervalo de frequências que é suficientemente ampliado acima do *threshold* de emissão:



Para tal, observou-se no conjunto de dados recolhidos para o ensaio em que eram observados os 3 modos do laser qual os pontos em que a transmissividade começava a ter um comportamento crescente a partir do *offset* da não transmissão, ou seja, os pontos  $U_{Piezo}$  que delimitavam inferior e superiormente as funções de Airy observadas. Estes intervalos de tensão foram convertidos (usando o fator calculado anteriormente) para intervalos em frequência e por fim fez-se a média sobre os valores encontrados. Optou-se por fazer esta análise para a configuração do interferómetro com maior potência resolutive (maior  $L$  entre espelhos) já que aí ter-se-á uma melhor discretização do espetro e a estimativa será menos grosseira.

Limites $U_{Piezo}$ (V)	$\Delta U_{Piezo}$ (V)	$\Delta f$ (GHz)	$\overline{\Delta f}$ (GHz)
3.32 $\pm$ 0.01 5.83 $\pm$ 0.01	2.51 $\pm$ 0.02	1.65 $\pm$ 0.06	1.56 $\pm$ 0.09
7.05 $\pm$ 0.01 9.29 $\pm$ 0.01	2.24 $\pm$ 0.02	1.47 $\pm$ 0.06	

O que  $\overline{\Delta f}$  obtido tem um desvio de  $0.67\sigma$  em relação ao valor real de  $1.5 \text{ GHz}$ .

### 13. Interferómetro Fabry-Perot:

Laser de  $20 \text{ mW}$  - Largura de banda de ganho do Laser

4ª Sessão 23/04/2018

Repetiu-se o procedimento anterior para determinar a largura de banda de ganho do laser de potência nominal de  $20 \text{ mW}$ :

Limites $U_{Piezo} \text{ (V)}$	$\Delta U_{Piezo} \text{ (V)}$	$\Delta f \text{ (GHz)}$	$\overline{\Delta f} \text{ (GHz)}$
$5.62 \pm 0.01$ $8.67 \pm 0.01$	$3.08 \pm 0.02$	$1.70 \pm 0.07$	$1.56 \pm 0.15$
$2.25 \pm 0.01$ $5.13 \pm 0.01$	$2.88 \pm 0.02$	$1.59 \pm 0.07$	
$2.76 \pm 0.01$ $5.90 \pm 0.01$	$3.08 \pm 0.02$	$1.70 \pm 0.07$	
$6.32 \pm 0.01$ $9.24 \pm 0.01$	$2.92 \pm 0.02$	$1.61 \pm 0.06$	
$2.93 \pm 0.01$ $5.58 \pm 0.01$	$2.65 \pm 0.02$	$1.42 \pm 0.06$	
$6.28 \pm 0.01$ $8.85 \pm 0.01$	$2.57 \pm 0.02$	$1.42 \pm 0.06$	

O que corresponde a um desvio de  $0.40\sigma$  em relação ao valor real.

## REFERÊNCIAS

- [1] Maio 2018, *Guião da Experiência Espectroscopia Raio-X e Óptica Fina*, LFEA, [fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1407993358864628/Espectroscopia\\_Guiao2018.pdf](http://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1407993358864628/Espectroscopia_Guiao2018.pdf)
- [2] Maio 2018, *Protocolo da Experiência Espectroscopia Raio-X e Óptica Fina*, LFEA, [fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1407993358864629/Espectroscopia\\_Protocolos2018.pdf](http://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1407993358864629/Espectroscopia_Protocolos2018.pdf)
- [3] Steven Simon, *The Oxford Solid State Basics*, Oxford University Press (2013)
- [4] Maio 2018, *Bragg reflection: diffraction of x-rays at a monocrystal*, [fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316238/Guia%20LD\\_Bragg%20Reflection.pdf](http://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316238/Guia%20LD_Bragg%20Reflection.pdf)
- [5] Maio 2018, *Lattice Constants of the elements*, <http://periodictable.com/Properties/A/LatticeConstants.html>
- [6] Maio 2018, *Slides Raio-X*, LFEA, [fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316239/Slides\\_RX.pdf](http://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316239/Slides_RX.pdf)
- [7] Maio 2018, *Zeeman Effect Leybold Instruction Sheet*, [fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316240/Guia%20LD\\_Zeeman.pdf](http://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316240/Guia%20LD_Zeeman.pdf)
- [8] Maio 2018, *Observing the normal Zeeman effect in transverse and longitudinal configuration*, [fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316241/P6271\\_E.PDF](http://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316241/P6271_E.PDF)
- [9] Max Born & Emil Wolf, *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light* (Cap. 7), Cambridge University Press (1999)
- [10] Maio 2018, *Slides Interferência de Feixes Múltiplos*, LFEA, [fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316243/Slides\\_FabryPerot.pdf](http://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312316243/Slides_FabryPerot.pdf)
- [11] Werner Lauterborn & Thomas Kurz, *Coherent Optics: Fundamentals and Applications* (Cap. 5), Springer (2003)