

Espectroscopia β e Eletrões de Conversão

Filipe Miguel (84381) • Francisco Duque (84383) • João Bravo (84390) • José Figueiredo (84402)

Instituto Superior Técnico

Mestrado Integrado em Engenharia Física Tecnológica

LFRA - Quarta-feira - Grupo 4B - Prof. Sérgio Ramos

Novembro de 2017

I. CALIBRAÇÃO EM ENERGIA

Com o intuito de se obter uma calibração em energia do detetor, fez uma aquisição de $t_{aq} = 600$ s com uma fonte de Césio-137, ^{137}Cs . Registaram-se os dados correspondentes ao seu pico de conversão interna da camada K, que se apresentam de seguida:

Tabela 1: *Ponto Graduador*

N_t	N_s	FWHM (Canal)	Centróide (Canal)	E_{tab} (keV)
9209 ± 96	3234 ± 142	5.88	116.19 ± 0.044	620

O erro considerado para este centróide (C), bem para como todos aqueles que foram obtidos com o programa de aquisição de dados, é dado por:

$$\sigma_C = \frac{\sigma_{N_s}}{\sqrt{N_s}} = \frac{FWHM}{2.355\sqrt{N_s}} \quad (1)$$

Sem utilizar nenhuma fonte radioativa, fizeram-se aquisições de $t_{aq} = 10$ s para pulsos de diferentes tensões, recorrendo ao "pulsar" da montagem. Utilizaram-se 6 tensões equidistantes entre si, e que abrangessem o intervalo de energias utilizado ao longo da experiência. Procurou-se também utilizar valores redondos no "pulsar", para não se considerar qualquer erro associado à escala deste. Como o pico mais energético que se iria observar ao longo da experiência era de 1047 keV - associado à conversão interna da camada L do Tálcio-204, ^{204}Tl - recorreu-se ao pico registado anteriormente e conclui-se que o pulso mais energético a utilizar teria que ter 1.2 V.

Os dados associados a cada pulso encontram-se reunidos na tabela 2. Como o pico associado a estes não é suficientemente gaussiano para que o programa de aquisição de dados consiga extrair um centróide e $FWHM$, recorreram-se às seguintes expressões para o cálculo das grandezas apresentadas para cada tensão do pulso (c_i -canal i ; n_i -contagens do canal i):

$$\bar{C} = \frac{\sum_i n_i c_i}{\sum_i n_i} \quad (2)$$

$$\sigma_{dist}^2 = \frac{\sum_i n_i (c_i - \bar{C})^2}{\sum_i n_i} \quad (3)$$

$$\sigma_{\bar{C}} = \frac{\sigma_{dist}}{\sqrt{\sum_i n_i}} \quad (4)$$

Tabela 2

Pulso (V)	Canal	Contagens	σ_{dist} (Canal)	\bar{C} (Canal)
0.1	20	38	0.644	21.472 ± 0.023
	21	382		
	22	363		
	23	29		
0.3	64	121	0.615	65.083 ± 0.022
	65	494		
	66	188		
0.5	110	132	0.630	111.073 ± 0.023
	111	480		
	112	191		
0.7	152	187	0.637	152.941 ± 0.023
	153	472		
	154	140		
0.9	197	136	0.599	198.005 ± 0.023
	198	492		
	199	140		
1.1	241	154	0.630	242.012 ± 0.023
	242	484		
	243	164		

Assumindo que a relação entre a tensão e canal é linear fez-se um ajuste pelo método dos mínimos quadrados (como todos os feitos ao longo do tratamento de dados) da expressão (5) aos dados, encontrando-se o resultado deste e consequentes parâmetros respetivamente na fig.5 e tabela 3

$$V(C) = aC + b \quad (5)$$

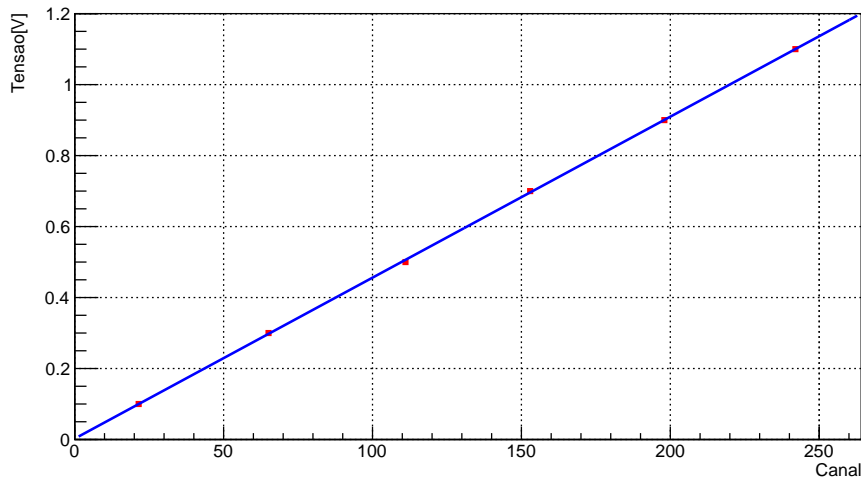


Figura 1: Ajuste para a Calibração relação Tensão-Canal

Tabela 3: Parâmetros de ajuste da Calibração Energia-Canal

a (mV/canal)	b (mV)	ngl	χ^2/ngl
4.53569 ± 0.00017	2.458 ± 0.083	4	1526.84

O valor obtido para o χ^2/ngl muito superior à unidade era esperado, pois o único erro tomado foi o de uma distribuição de um sinal que, à partida, deveria ser apenas um pulso. Logo, o desvio padrão desta "distribuição" será muito reduzido e por conseguinte os erros do centróides também o serão. Assim, os erros sistemáticos irão sobrepor-se aos considerados explicando o elevado χ^2/ngl . Esta conclusão é reforçada pelo b obtido, cujo valor esperado era nulo. Este nem é coberto pela incerteza deste parâmetro, havendo por isso um *offset* positivo nos valores das tensões em relação ao canal.

Assumindo agora que a Energia é proporcional à Tensão, utilizaram-se os dados do pico de conversão interna de 620 keV do ^{137}Cs como ponto de graduação. Recorrem-se às seguintes expressões para converter a calibração em Tensão-Canal para Energia-Canal:

$$K = \frac{E}{V} = \frac{E}{aC + b} \quad (6)$$

$$\sigma_K = \sqrt{\left(\frac{CK\sigma_a}{aC+b}\right)^2 + \left(\frac{aK\sigma_C}{aC+b}\right)^2 + \left(\frac{K\sigma_b}{aC+b}\right)^2} \quad (7)$$

$$a' = Ka \quad (8)$$

$$\sigma_{a'} = \sqrt{(K\sigma_a)^2 + (a\sigma_K)^2} \quad (9)$$

$$b' = Kb \quad (10)$$

$$\sigma_{b'} = \sqrt{(K\sigma_b)^2 + (b\sigma_K)^2} \quad (11)$$

Pelo que a calibração Energia-Canal e respetivo erro serão dados por:

$$E(C) = a'C + b' \quad (12)$$

$$\sigma_E = \sqrt{(C\sigma_{a'})^2 + (a'\sigma_C)^2 + \sigma_{b'}^2} \quad (13)$$

Os valores obtidos para as constantes explicitam-se de seguida:

Tabela 4: Constantes de Conversão

K (keV/mV)	a' (keV/canal)	b' (keV)
1.17100 ± 0.00050	5.3113 ± 0.0024	2.878 ± 0.097

O valor de K ligeiramente superior a 1 corrobora o verificado em laboratório, de não existir uma similaridade entre tensão e energia como indicado pelo fabricante do detetor.

II. DETERMINAÇÃO DO *end-point* DA DISTRIBUIÇÃO DE β^- NUMA FONTE DE ^{204}Tl

De seguida utilizou-se uma fonte β pura de Tálzio-204, ^{204}Tl , e fez-se uma aquisição de $t_{aq} = 650$ s. O espetro obtido pode ser reproduzido utilizando os dados da tabela 5 (escolheram-se somente os canais pares). As energias foram obtidas com recurso à calibração da alínea anterior, bem como as expressões para as respetivas incertezas e erros estatísticos. Já as contagens N correspondem ao N_t pelo que o seu erro é dado por:

$$\sigma_N = \sqrt{N} \quad (14)$$

Tabela 5: Dados do espectro de β^- s para a fonte de ^{204}Tl

Canal	$E_{\text{calculada}}$ (keV)	N
60	318.78 ± 0.16	596 ± 24.41
62	329.40 ± 0.17	573 ± 23.94
64	340.02 ± 0.17	610 ± 24.70
66	350.64 ± 0.17	578 ± 24.04
68	361.27 ± 0.18	567 ± 23.81
70	371.89 ± 0.18	538 ± 23.19
72	382.51 ± 0.18	548 ± 23.41
74	393.13 ± 0.19	515 ± 22.69
76	403.76 ± 0.19	483 ± 21.98
78	414.38 ± 0.20	402 ± 20.05
80	425.00 ± 0.20	440 ± 20.98
82	435.63 ± 0.20	426 ± 20.64
84	446.25 ± 0.21	428 ± 20.69
86	456.87 ± 0.21	351 ± 18.73
88	467.49 ± 0.21	320 ± 17.89
90	478.12 ± 0.22	333 ± 18.25
92	488.74 ± 0.22	375 ± 19.36
94	499.36 ± 0.23	351 ± 18.73
96	509.98 ± 0.23	266 ± 16.31
98	520.61 ± 0.23	236 ± 15.36
100	531.23 ± 0.24	218 ± 14.76
102	541.85 ± 0.24	208 ± 14.42
104	552.47 ± 0.25	172 ± 13.11
106	563.10 ± 0.25	152 ± 12.33
108	573.72 ± 0.25	142 ± 11.92
110	584.34 ± 0.26	112 ± 10.58
112	594.96 ± 0.26	97 ± 9.85
114	605.59 ± 0.27	77 ± 8.77
116	616.21 ± 0.27	84 ± 9.17
118	626.83 ± 0.27	68 ± 8.25
120	637.45 ± 0.28	48 ± 6.93
122	648.08 ± 0.28	51 ± 7.14
124	658.70 ± 0.29	40 ± 6.32
126	669.32 ± 0.29	30 ± 5.48
128	679.95 ± 0.29	33 ± 5.74
130	690.57 ± 0.30	14 ± 3.74

Ajustou-se a distribuição em energia a um *Kurie-Plot*, que corresponde a uma linearização da parte final do espectro de β^- . Os detalhes teóricos do método serão suprimidos da análise. Assim, recorrendo às grandezas adimensionais W e P:

$$W = \frac{E}{E_e} + 1 \quad (15)$$

$$P = (W^2 - 1)^{1/2} \quad (16)$$

onde $E_e = 511 \text{ keV}$ é a energia em repouso do elétron. A grandeza y definida em baixo (função da energia) pode ser ajustada à seguinte distribuição:

$$y = \frac{1}{W} \left(\frac{N(E)}{G(Z, W)} \right)^{1/2} = K(E_0 - E) \quad (17)$$

onde $N(E)$ corresponde ao número de contagens associada a uma determinada energia E , $G(Z, W)$ é a função de Fermi modificada para o declínio β do ^{204}Tl , e cuja dependência com P se encontra expressa na figura 2, obtida por interpolação dos dados da tabela 6, através do método *Spline-Cubic*. Finalmente, E_0 corresponde ao *end-point* da distribuição que é o que se pretende determinar. Seguem-se as expressões para os erros considerados:

$$\sigma_W^2 = \left(\frac{\sigma_E}{E_e} \right)^2 \quad (18)$$

$$\sigma_P^2 = \left(\frac{W}{P} \sigma_W \right)^2 \quad (19)$$

$$\sigma_G = \left| \frac{dG}{dp} \right| \sigma_P \quad (20)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{y}{W} \sigma_W \right)^2 + \left(\frac{y}{2N} \sigma_N \right)^2 + \left(\frac{y}{2G} \sigma_G \right)^2} \quad (21)$$

Note-se que, na eq. 20, o método *Spline-Cubic* utilizado permite obter também a derivada da função.

Tabela 6: Dados para a interpolação da função de Fermi modificada para o declínio β Kurie-Plot

P	G(Z,W)	P	G(Z,W)
0	28.26	0.9	24.53
0.10	28.19	1.0	23.98
0.20	27.99	1.2	22.95
0.30	27.67	1.4	22.01
0.40	27.25	1.6	21.17
0.50	26.76	1.8	20.41
0.60	26.23	2.0	19.72
0.70	25.66	2.2	19.10
0.80	25.09	2.4	18.54

Tabela 7: Dados para o cálculo das grandezas relevantes para o Kurie-Plot

$E_{calculada}$ (keV)	N(E)	W	P	G(Z,W)	$\left \frac{dG}{dp} \right $	$\frac{1}{W} \left(\frac{N(E)}{G(Z,W)} \right)^{1/2}$
318.78 ± 0.16	596 ± 24.41	1.62383 ± 0.00032	1.27938 ± 0.00040	22.5685 ± 0.0019	4.76	3.165 ± 0.065
329.40 ± 0.17	573 ± 23.94	1.64462 ± 0.00032	1.30567 ± 0.00041	22.4441 ± 0.0019	4.71	3.072 ± 0.064
340.02 ± 0.17	610 ± 24.70	1.66540 ± 0.00033	1.33175 ± 0.00041	22.3218 ± 0.0019	4.66	3.139 ± 0.064
350.64 ± 0.17	578 ± 24.04	1.68619 ± 0.00034	1.35766 ± 0.00042	22.2020 ± 0.0019	4.59	3.026 ± 0.063
361.27 ± 0.18	567 ± 23.81	1.70698 ± 0.00035	1.38339 ± 0.00043	22.0847 ± 0.0019	4.52	2.968 ± 0.062
371.89 ± 0.18	538 ± 23.19	1.72777 ± 0.00035	1.40896 ± 0.00043	21.9700 ± 0.0019	4.44	2.864 ± 0.062
382.51 ± 0.18	548 ± 23.41	1.74856 ± 0.00036	1.43438 ± 0.00044	21.8581 ± 0.0019	4.37	2.864 ± 0.061
393.13 ± 0.19	515 ± 22.69	1.76934 ± 0.00037	1.45965 ± 0.00045	21.7487 ± 0.0019	4.29	2.750 ± 0.061
403.76 ± 0.19	483 ± 21.98	1.79013 ± 0.00037	1.48478 ± 0.00045	21.6416 ± 0.0019	4.23	2.639 ± 0.060
414.38 ± 0.20	402 ± 20.05	1.81092 ± 0.00038	1.50978 ± 0.00046	21.5368 ± 0.0019	4.16	2.386 ± 0.059
425.00 ± 0.20	440 ± 20.98	1.83171 ± 0.00039	1.53465 ± 0.00046	21.4339 ± 0.0019	4.11	2.474 ± 0.059
435.63 ± 0.20	426 ± 20.64	1.85250 ± 0.00040	1.55940 ± 0.00047	21.3329 ± 0.0019	4.05	2.412 ± 0.058
446.25 ± 0.21	428 ± 20.69	1.87328 ± 0.00040	1.58404 ± 0.00048	21.2337 ± 0.0019	4.00	2.397 ± 0.058
456.87 ± 0.21	351 ± 18.73	1.89407 ± 0.00041	1.60857 ± 0.00048	21.1360 ± 0.0019	3.96	2.152 ± 0.057
467.49 ± 0.21	320 ± 17.89	1.91486 ± 0.00042	1.63300 ± 0.00049	21.0398 ± 0.0019	3.92	2.037 ± 0.057
478.12 ± 0.22	333 ± 18.25	1.93565 ± 0.00043	1.65733 ± 0.00050	20.9450 ± 0.0019	3.87	2.060 ± 0.056
488.74 ± 0.22	375 ± 19.36	1.95643 ± 0.00043	1.68156 ± 0.00051	20.8516 ± 0.0019	3.83	2.168 ± 0.056
499.36 ± 0.23	351 ± 18.73	1.97722 ± 0.00044	1.70570 ± 0.00051	20.7596 ± 0.0019	3.79	2.080 ± 0.056
509.98 ± 0.23	266 ± 16.31	1.99801 ± 0.00045	1.72975 ± 0.00052	20.6690 ± 0.0019	3.75	1.795 ± 0.055
520.61 ± 0.23	236 ± 15.36	2.01880 ± 0.00046	1.75372 ± 0.00053	20.5782 ± 0.0019	3.71	1.688 ± 0.055
531.23 ± 0.24	218 ± 14.76	2.03959 ± 0.00047	1.77761 ± 0.00053	20.4916 ± 0.0020	3.66	1.599 ± 0.054
541.85 ± 0.24	208 ± 14.42	2.06037 ± 0.00047	1.80143 ± 0.00054	20.4048 ± 0.0020	3.62	1.550 ± 0.054
552.47 ± 0.25	172 ± 13.11	2.08116 ± 0.00048	1.82517 ± 0.00055	20.3193 ± 0.0020	3.58	1.398 ± 0.053
563.10 ± 0.25	152 ± 12.33	2.10195 ± 0.00049	1.84884 ± 0.00056	20.2350 ± 0.0020	3.54	1.304 ± 0.053
573.72 ± 0.25	142 ± 11.92	2.12274 ± 0.00050	1.87244 ± 0.00056	20.1519 ± 0.0020	3.50	1.251 ± 0.052
584.34 ± 0.26	112 ± 10.58	2.14353 ± 0.00050	1.89597 ± 0.00057	20.0700 ± 0.0020	3.46	1.102 ± 0.052
594.96 ± 0.26	97 ± 9.85	2.16431 ± 0.00051	1.91944 ± 0.00058	19.9894 ± 0.0020	3.42	1.018 ± 0.052
605.59 ± 0.27	77 ± 8.77	2.18510 ± 0.00052	1.94285 ± 0.00058	19.9099 ± 0.0020	3.37	0.900 ± 0.051
616.21 ± 0.27	84 ± 9.17	2.20589 ± 0.00053	1.96620 ± 0.00059	19.8316 ± 0.0020	3.33	0.933 ± 0.051
626.83 ± 0.27	68 ± 8.25	2.22668 ± 0.00054	1.98950 ± 0.00060	19.7545 ± 0.0020	3.29	0.833 ± 0.051
637.45 ± 0.28	48 ± 6.93	2.24747 ± 0.00054	2.01274 ± 0.00061	19.6785 ± 0.0020	3.25	0.695 ± 0.050
648.08 ± 0.28	51 ± 7.14	2.26825 ± 0.00055	2.03592 ± 0.00061	19.6036 ± 0.0020	3.21	0.711 ± 0.050
658.70 ± 0.29	40 ± 6.32	2.28904 ± 0.00056	2.05906 ± 0.00062	19.5299 ± 0.0020	3.17	0.625 ± 0.049
669.32 ± 0.29	30 ± 5.48	2.30983 ± 0.00057	2.08214 ± 0.00063	19.4573 ± 0.0020	3.13	0.538 ± 0.049
679.95 ± 0.29	33 ± 5.74	2.33062 ± 0.00058	2.10518 ± 0.00064	19.3857 ± 0.0020	3.09	0.560 ± 0.049
690.57 ± 0.30	14 ± 3.74	2.35141 ± 0.00058	2.12817 ± 0.00065	19.3151 ± 0.0020	3.05	0.362 ± 0.048

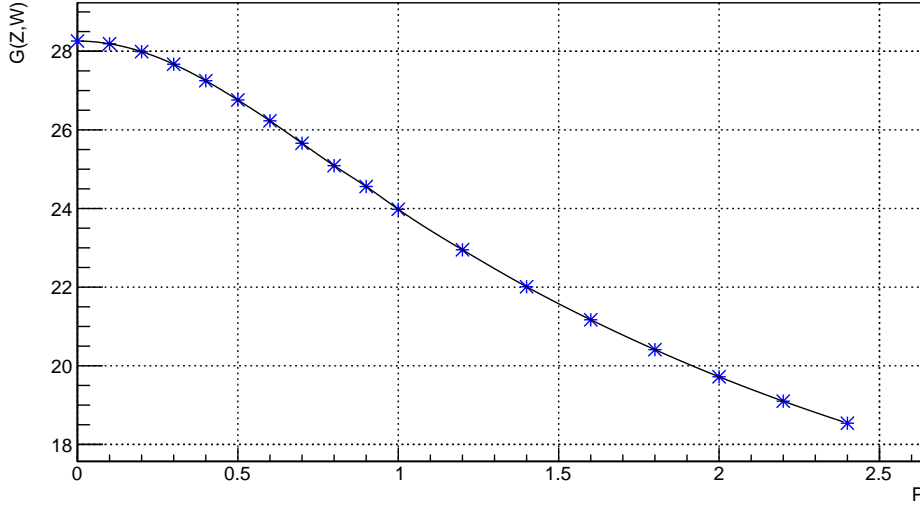


Figura 2: Interpolação da função de Fermi modificada para o decaimento β^- do ^{204}Tl , recorrendo ao Spline-Cubic

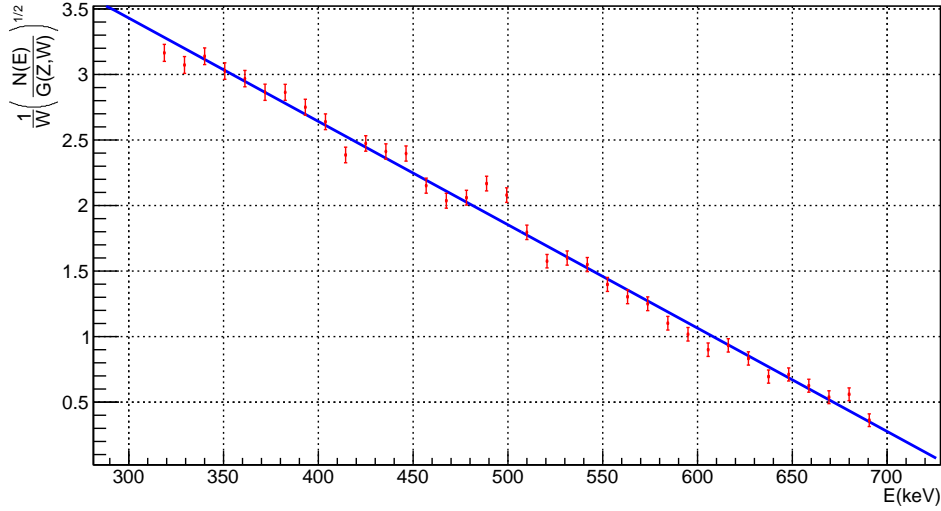


Figura 3: Kurie-Plot para a distribuição de β 's em energia

Tabela 8: Parâmetros de ajuste do Kurie-Plot da figura 3

$K \text{ (keV}^{-1}\text{)}$	$E_0 \text{ (keV)}$	ngl	χ^2/ngl
0.007885 ± 0.000084	735.01 ± 2.54	34	2.47

Tabela 9: Comparação dos parâmetros com os valores tabelados para o valor em energia do end-point

$E_{obtida} \text{ (keV)}$	$E_{tabelada} \text{ (keV)}$	$\delta(\#\sigma)$	Desvio (%)
735.01 ± 2.54	763.76	11.32	3.76

Observa-se no gráfico de 3, uma certa dispersão dos pontos em relação à reta de ajuste. É visível uma variação quase sinusoidal, típica de desvios aleatórios, e por isso com tratamento estatístico válido.

O valor do χ^2/ngl da ordem da unidade permite concluir que os dados experimentais se ajustam corretamente ao Kurie-Plot, apesar do end-point obtido se encontrar algo afastado do tabelado, em $\# \sigma$'s. Como o χ^2/ngl , então as razões para o afastamento entre o valor tabelado e o obtido devem dever-se sobretudo ao método experimental. Um offset na calibração não afetaria significativamente o declive da reta (uma vez que resulta de diferenças entre pontos), mas poderia afetar o valor da ordenada na origem. Deste modo, erros sistemáticos na calibração energia-canal, que já se afirmou existirem, poderiam justificar a disparidade encontrada. Para além disso, a quantidade de pontos utilizados para a interpolação da função de Fermi modificada é muito

inferior aos usados na análise. Por conseguinte, não se terá precisão suficiente nesta para o tratamento utilizado. Esta falta precisão é corroborada pelo baixo desvio de $\approx 3.8\%$ do *end-point* em relação ao valor tabelado, o que indica que o $\delta(\# \sigma)$ mais elevado deve-se a um incerteza relativa mais elevada.

III. ESTUDO DOS ELETRÕES DE CONVERSÃO DE ^{207}Bi

Estudou-se o espectro de emissão de β 's de uma fonte de Bismuto-207, ^{207}Bi . Para isto recolheram-se dados durante um tempo de aquisição de $t_{aq} = 2250\text{ s}$, obtendo-se o espectro presente abaixo:

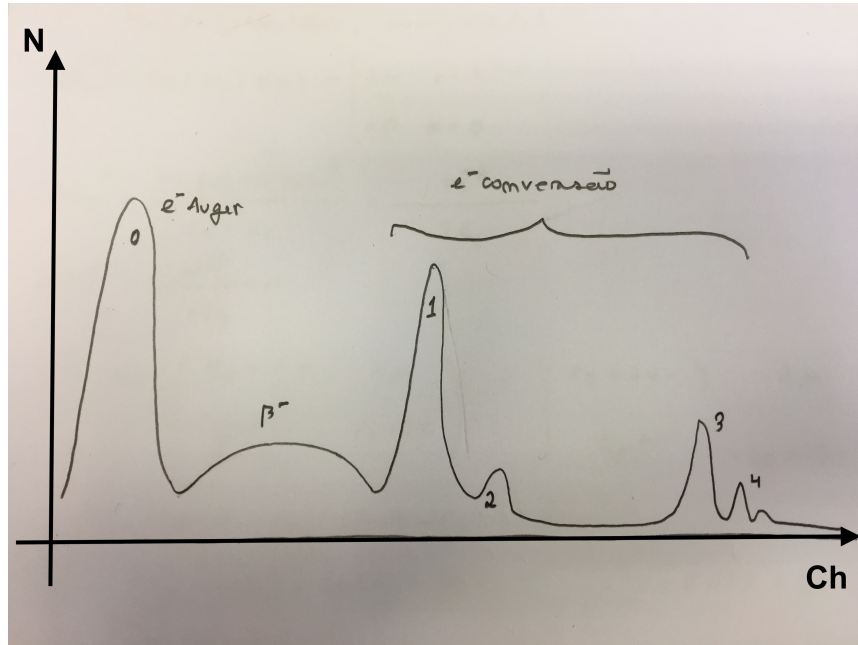


Figura 4: Espectro de β da fonte de Bismuto

Distinguem-se neste 5 principais picos, sobre um espectro contínuo de emissão de β s da fonte. Dada a sua baixa energia, o pico 0 deverá corresponder a eletrões de Auger, discutidos posteriormente. Os restantes, numerados de 1 a 4, devem-se à intervenção de eletrões das camadas interiores do átomo nos processos de desintegração nuclear, absorvendo a energia que usualmente é emitida com recurso a um fóton, sendo a sua energia suficiente para que escapem à atração nuclear. Os eletrões resultantes deste fenómeno designam-se por eletrões de conversão interna. As contagens associadas a cada um destes picos, encontram-se na seguinte tabela 10:

Pico 1		Pico 2		Pico 3		Pico 4	
Canal	N	Canal	N	Canal	N	Canal	N
100	893	111	574	205	141	220	33
101	835	112	599	206	131	221	28
102	959	113	594	207	121	222	24
103	1971	114	596	208	105	223	36
104	5228	115	922	209	139	224	24
105	3514	116	1427	210	372	225	33
106	872	117	950	211	1120	226	91
107	650	118	765	212	972	227	206
108	633	119	717	213	154	228	127
109	667	120	568	214	34	229	46
110	644	121	528	215	31	230	73
						231	20
						232	0

Tabela 10: Dados dos picos de conversão interna do ^{207}Bi

Dada a discretização dos valores energéticos dos eletrões à entrada do detetor, espera-se que as contagens em torno de cada evento apresentem uma distribuição gaussiana, tendo o ruído em redor natureza aproximadamente linear. Deste modo, ajustaram-se as contagens de cada pico à expressão (22):

$$f(x) = \frac{Ns}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + Bx + d \quad (22)$$

Para os picos 2 e 4 fixou-se o declive do ruído (parâmetro B) a 0, já que esta ação reduziu o χ^2/Ndf . Os ajustes efetuados e respetivos parâmetros encontram-se reunidos respetivamente na figura 5 e tabela 11.

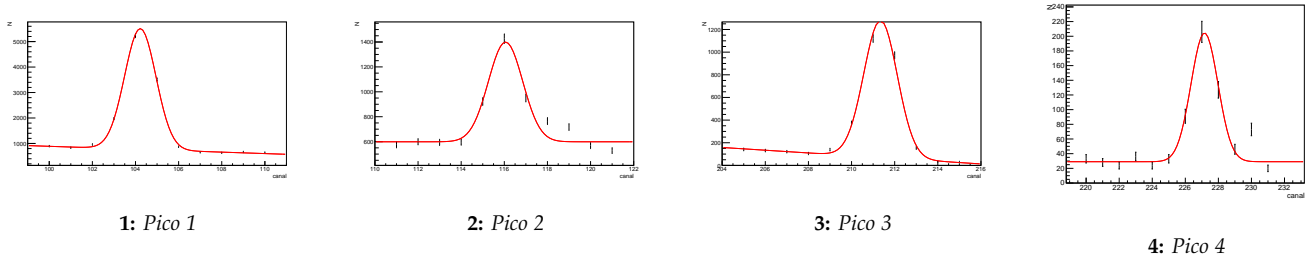


Figura 5: Ajustes aos dados de cada pico para extração de parâmetros relevantes

Pico	Ruído		Sinal			χ^2/n_{gl}
	d	B	Centróide (μ)	σ	N_s	
1	3739.75 ± 293.38	-28.52 ± 2.77	104.224 ± 0.010	0.7266 ± 0.0092	8637.70 ± 118.21	4.64778
2	598.72 ± 9.72	-	120.0590 ± 0.038	0.7962 ± 0.0465	1597.41 ± 80.30	8.08484
3	2627.17 ± 12.10	176.78 ± 0.84	211.346 ± 0.019	0.7772 ± 0.0154	2359.21 ± 53.87	3.07514
4	29.04 ± 2.00	-	227.161 ± 0.057	0.8136 ± 0.0589	357.75 ± 24.20	4.3411

Tabela 11: Parâmetros de cada sinal obtidos pelos ajustes acima

Nos ajustes 5.2 e 5.4 percebe-se um ombro à direita dos picos. No entanto, a resolução em energia do detetor é insuficiente para a sua correta caracterização: um ajuste a uma soma de duas gaussianas usando apenas 10 pontos experimentais tem demasiado poucos graus de liberdade para a sua qualidade ser credível.

A Cadeia dominante de decaimento, associada a 92% dos decaimentos de ^{207}Bi encontra-se esquematizada na figura 6. Devido à fraca probabilidade associada aos restantes decaimentos, estes não são detetáveis. As transições energéticas entre os diferentes estados energéticos (transições 2 - 1 e 1 - 0) resultam na emissão de um fóton cuja energia é dada pela diferença energética ou de um eletrão de conversão como explicado anteriormente.

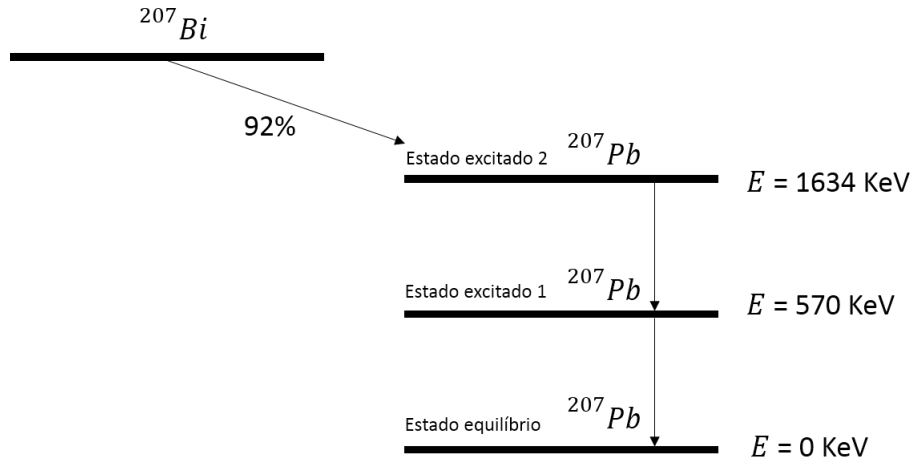


Figura 6: Esquema do decaimento do ^{207}Bi

As energias tabeladas para as transições nucleares foram obtidas em <http://nucleardata.nuclear.lu.se/toi/>, sendo que as energias de ligação dos eletrões nas camadas internas do ^{207}Bi apresentadas na tabela 12 foram consultadas em http://xdb.lbl.gov/Section1/Table_1-1.pdf. Dada a reduzida diferença energética entre as orbitais correspondentes a cada subcamada, não se espera observar picos correspondentes à conversão de eletrões provenientes de cada uma das subcamadas indicadas, mas um único pico cujo centróide seja calculado recorrendo à média da energia de ligação de cada camada. A energia de cada eletrão emitido por conversão interna de uma camada i é dada pela diferença entre a energia da transição energética no nuclídeo e a sua energia de ligação :

$$E_{e_{\text{camada}}} = E_{\text{decay}} - E_i \quad (23)$$

Na tabela 13 encontram-se as energias dos eletrões de conversão provenientes das camadas K, L e M do ^{207}Bi , resultantes da absorção das energias das transições esquematizadas na figura 6.

Camada	Energia de Ligação (keV)					Média (keV)
K	90.524	-	-	-	-	90.524
L	16.388	15.711	13.419	-	-	15.172
M	3.999	3.696	3.177	2.688	2.580	3.228

Tabela 12: Energia das camadas internas do ^{207}Bi

E_{decay} (keV)	E_{e_K} (keV)	E_{e_L} (keV)	E_{e_M} (keV)
569.702	479.178	554.529	566.474
1063.662	973.138	1048.489	1060.434

Tabela 13: Energia dos elétrons de conversão interna do ^{207}Bi

A calibração energética efetuada na secção I recorreu a um pico graduador de uma fonte fechada de ^{137}Ce . Nesta, os elétrons emitidos têm de atravessar um plástico selador, interagindo com este meio, pelo que a sua energia está reduzida de um dado valor sistemático. No entanto, o ^{207}Bi utilizado é uma fonte aberta, pelo que este desvio não ocorre, sendo necessário realizar uma nova graduação, como feito na primeira parte do tratamento de dados. No decorrer da experiência não se efetuou uma nova calibração com uma fonte aberta, tendo sido em detrimento fornecido uma estimativa do sistemático por parte do docente, de $\Delta E = 92 \text{ keV}$. Recalculou-se o fator de conversão K, desta feita recorrendo a (24) (usando a mesma energia de 620 keV do ^{137}Cs), sendo a sua incerteza novamente dada por (7), obtendo-se os valores expressos na tabela 14.

$$K = \frac{E - \Delta E}{aC + b} \quad (24)$$

K (keV/mV)	a' (keV/Canal)	b' (keV)
0.99724 ± 0.00042	4.52318 ± 0.00200	2.45122 ± 0.08278

Tabela 14: Calibração em energia corrigida para $\Delta E = -92 \text{ KeV}$

De seguida, calcularam-se os valores energéticos correspondentes aos centróides dos eventos indicados na tabela 6. Através destes identificaram-se os valores das energias calculadas com as energias dos elétrons de conversão calculadas na tabela 13, obtendo-se a correspondência entre os picos observados e respetivos eventos:

E_{Decay} (keV)	Camada	$E_{tab.}$ (keV)	Pico	$E_{med.}$ (keV)	$\delta(\#\sigma)$	$\delta(\%)$
569.702	K	479.178	1	473.876 ± 0.229	23.118	1.11
	L e M	554.529	2	545.500 ± 0.307	29.367	1.63
1063.662	K	973.138	3	958.408 ± 0.440	33.505	1.51
	L e M	1048.489	4	1029.942 ± 0.529	35.083	1.77

Tabela 15: Comparação entre energias medidas e o seu valor tabelado após correção de ΔE

Os ombros à direita dos picos 2 e 4 correspondem aos elétrons de conversão provenientes da camada M quando excitados com energias de 570 e 1064 keV respetivamente. No entanto, a resolução energética do detetor é insuficiente para um estudo mais aprofundado desta relação.

Ainda que os desvios à precisão sejam em geral reduzidos ($\tilde{1} \%$), os desvio em $\# \sigma$ são muitíssimo elevados, incompatibilizando a descrição destas incertezas com flutuações estatística. De facto, a magnitude deste desvio é similar para todos os picos, sendo o sinal sempre positivo, apontando para uma subestimação sistemática na medição das energias. Uma causa possível para tal poderá provir de uma desadequação do sistemático da energia usada para a graduação entre as duas fases da experiência. De modo a validar esta hipótese, efetuou-se um novo ajuste linear (equação (??)) pelo método de quadrados mínimos, à relação entre a energia tabelada de cada evento e o seu centróide experimental, obtendo-se o gráfico da fig. 7.

$$E_{tab} = m\mu + E_0 \quad (25)$$

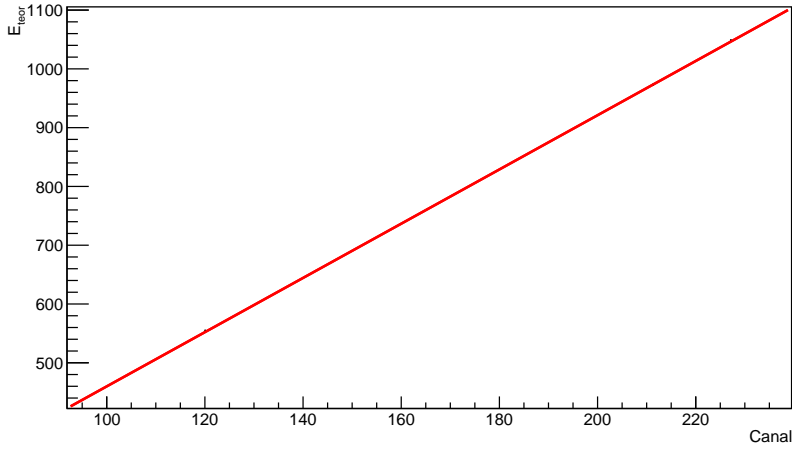


Figura 7: Ajuste da energia tabelada em função do centróide de cada evento ($\chi^2/ndf = 117.835$)

m (eV/canal)	E_0 (eV)	ΔE_{corr} (keV)	ngl	χ^2/ngl
4.61325 ± 0.00088	-1.50756 ± 0.12191	81.48646 ± 0.24261	2	117.835

Tabela 16: Parâmetros do ajuste da fig. 7 ΔE

Visualmente o ajuste apresenta elevada qualidade, notando-se a relação linear entre as grandezas consideradas. Ainda assim, o valor de χ^2/ndf obtido é bastante elevado (da ordem de 118), devendo-se a uma sobreposição dos erros sistemáticos aos estatísticos. Recorrendo à equação (26) calculou-se um novo valor para o desfasamento energético, propagando-se o seu erro pela expressão (27):

$$\Delta E' = E - \frac{m}{\frac{b}{a} + \mu} \quad (26)$$

$$\sigma_{\Delta E'} = \sqrt{\frac{a^2 (a^2 m^2 \sigma_\mu^2 + \sigma_m^2 (a\mu + b)^2 + m^2 \sigma_b^2) + b^2 m^2 \sigma_a^2}{(a\mu + b)^4}} \quad (27)$$

Nestas expressões μ representa o centróide do pico graduador na calibração original, E o valor tabelado da energia, usando-se para a e b os parâmetros da referida calibração. Calcularam-se novos valores para K e os restantes parâmetros da calibração. Os resultados obtidos foram:

K (keV)/V	a' (keV/Canal)	b' (keV)
1.01710 ± 0.00043	4.61325 ± 0.00204	2.50003 ± 0.08443

Tabela 17: Nova calibração energia/canal obtida corrigindo ΔE

Recorrendo a esta nova calibração, calcularam-se novos valores para as energias dos eventos detetados, apresentando-se novamente a sua comparação com os valores tabelados na tabela 16. Como seria de esperar, tanto os desvios relativos como os desvios em $\# \sigma$ diminuirão, validando a hipótese formulada. Novamente este desvio não pode ser explicado pela dispersão estatística, devendo-se a erros sistemáticos da experiência, resultando (nesta situação) de uma sobrestimação das energias de cada evento, já que o sinal de todos estes desvios em $\# \sigma$ é negativo.

E_{Decay} keV	Camada	$E_{tab.}$ (keV)	Pico	$E_{med.}$ (keV)	$\delta(\# \sigma)$	$\delta(\%)$
569.702	K	479.178	1	483.311 ± 0.234	-17.669	-0.86
	L e M	554.529	2	556.362 ± 0.314	-5.845	-0.33
1063.662	K	973.138	3	977.492 ± 0.448	-9.710	-0.45
	L e M	1048.489	4	1050.451 ± 0.539	-3.637	-0.19

Tabela 18: Comparação entre energias medidas e o seu valor tabelado após correção de ΔE

$$\sigma_{N_K/N_L} = \sqrt{\frac{N_K^2 \sigma_{N_L}^2 + N_L^2 \sigma_{N_K}^2}{N_L^4}} \quad (28)$$

Por fim, estudaram-se as taxas de contagem correspondentes a cada eletrão de conversão em função da sua camada energética de proveniência. A emissão resultante do decaimento menos energético apresenta uma taxa de contagem cerca de 4 vezes superior

à observada para a transição nuclear mais energética. Assim, espera-se que o quociente entre as áreas do sinal proveniente das camadas L e M e a do sinal proveniente da camada K tenha este valor para ambas as transições energéticas. Para estudar esta hipótese calculou-se N_K/N_L para ambas as transições, propagando-se o erro através da expressão (28), obtendo-se o explanado na tabela 19.

$E_{Decay} (keV)$	Camada	N_s	N_K/N_L
569.702	K	8637.7 ± 118.2	5.41 ± 0.28
	L e M	1597.4 ± 80.3	
1063.662	K	2359.2 ± 53.9	6.59 ± 0.47
	L e M	357.7 ± 24.2	

Tabela 19: Contagens dos diferentes eventos estudados

Como expectável verifica-se que $N_K/N_L > 1$. Quanto mais interna a orbital em que um dado eletrão se encontrar mais simples é que intervenha num processo nuclear. Para mais, camadas mais internas são mais energéticas, facilitando a absorção da energia de magnitude elevada resultante do decaimento nuclear. As razões entre as contagens dos eletrões provenientes das duas camadas referidas não se intersectam na vizinhança das respetivas incertezas, sendo no entanto compatíveis a 3σ , não excluindo a possibilidade de a diferença entre ambos se dever exclusivamente a flutuações estatísticas. Ainda assim, tendo em conta que fisicamente eventos de maior compatibilidade energética são mais prováveis, quanto maior a energia disponibilizada pelo núcleo, mais difícil será a sua absorção pelas camadas mais externas do átomo, esperando-se portanto um ligeiro incremento da probabilidade relativa de emissão de eletrões de conversão interna da camada K relativamente aos da camada L e M, cuja confirmação requer um estudo experimental mais aprofundado

IV. ELETRÕES DE AUGER

No espectro β da fonte de ^{207}Bi , é possível observar ainda um pico sobreposto ao espectro contínuo de emissão β^- para baixas energias. Este corresponde a eletrões de *Auger*, emitidos devido à geração de energia suficiente por recombinação eletrónica, após emissão de um eletrão das camadas atómicas por conversão interna. Apresentam-se os dados deste pico na tabela 20.

Tabela 20: Centróide do pico de eletrões de Auger.

Canal	N
10	6388.0 ± 79.9

Utilizando o calibração da secção anterior, conclui-se que este pico corresponde a uma energia de cerca de 48 keV da ordem da radiação X como esperado. Note-se que a maior contribuição corresponde à emissão após recombinação pela transição de um eletrão da camada L para a K, já que é esta a mais provável após conversão interna.

V. RESOLUÇÃO EM ENERGIA

Pode calcular-se a resolução em energia do detetor dos picos gaussianos bem definidos retirados na sessão do trabalho, através da expressão:

$$R = \frac{\Delta E}{E} = \frac{FWHM_{keV}}{E} \quad (29)$$

uma vez que esta apenas tem significado para esse tipo de picos.

Devido ao número reduzido de picos claramente gaussianos, optou-se por usar também os picos à partida tendencialmente gaussianos, visualmente bem definidos. Para preservar o erro estatístico, todos os picos utilizados teriam que estar igualmente espaçados. No entanto, devido à escassez de picos razoáveis para a medição da grandeza pretendida, não é possível satisfazer completamente essa condição. Para os erros ainda não especificados utilizaram-se as expressões apresentadas de seguida:

$$\sigma_{FWHM} = 2.355 \cdot \sigma_{\sigma} \quad (30)$$

$$\sigma_{FWHM_{keV}} = \sqrt{(FWHM \cdot \sigma_{a'})^2 + (a' \cdot \sigma_{FWHM})^2} \quad (31)$$

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{1}{E}\right)^2 \sigma_{FWHM}^2 + \left(\frac{FWHM}{E^2}\right)^2 \sigma_E^2} \quad (32)$$

Assim, apresentam-se os valores obtidos na tabela abaixo:

Tabela 21

Fonte	Pico	E (keV)	FWHM	FWHM (keV)	Resolução (%)
^{137}Cs	Conversão K	620.00 ± 0.10	5.88	31.231 ± 0.014	5.0372 ± 0.0024
^{207}Bi	Conversão K 570 keV	468.49 ± 0.23	1.711 ± 0.022	7.740 ± 0.098	1.652 ± 0.021
	Conversão L+M 570 keV	521.41 ± 0.30	1.875 ± 0.020	8.480 ± 0.089	1.627 ± 0.017
	Conversão K 1634 keV	947.52 ± 0.43	1.8304 ± 0.0066	8.279 ± 0.030	0.8738 ± 0.0032
	Conversão L+M 1634 keV	1018.24 ± 0.52	1.916 ± 0.025	8.67 ± 0.11	0.851 ± 0.011

Há uma diferença entre as resoluções associadas às duas fontes, devido ao facto da fonte de ^{137}Cs ser fechada, enquanto que a fonte de ^{207}Bi é aberta. Isto faz com que no primeiro caso haja uma interação adicional dos eletrões com a camada de plástico que cobre a fonte, havendo uma perda de energia não uniforme por parte de diferentes β s. Por conseguinte, o intervalo de energias captado pelo detetor é mais disperso, o que leva a um aumento do $FWHM$ e da resolução.

Como o processo de ionização segue uma distribuição aproximadamente de Poisson, haverá uma energia média ω para a remoção de eletrões. No caso em que todos os eventos são independentes e a energia não é totalmente absorvida, a estatística é verdadeiramente de Poisson e tem-se:

$$R = \frac{\Delta E}{E} = 2.355 \sqrt{\frac{\omega}{E}} \quad (33)$$

Pelo que $R \propto \frac{1}{\sqrt{E}}$. Espera-se que, com o aumento da energia, o número médio de ionizações aumente e as flutuações estatísticas relativas diminuam. Fez-se um ajuste pelo método dos mínimos quadrados dos valores obtidos para a fonte de aberta, da qual há pontos experimentais suficientes, à seguinte expressão para testar a validade do modelo referido:

$$R = \sqrt{\frac{a}{E}} + b \quad (34)$$

Abaixo apresenta-se o ajuste, bem como os respetivos parâmetros resultantes:

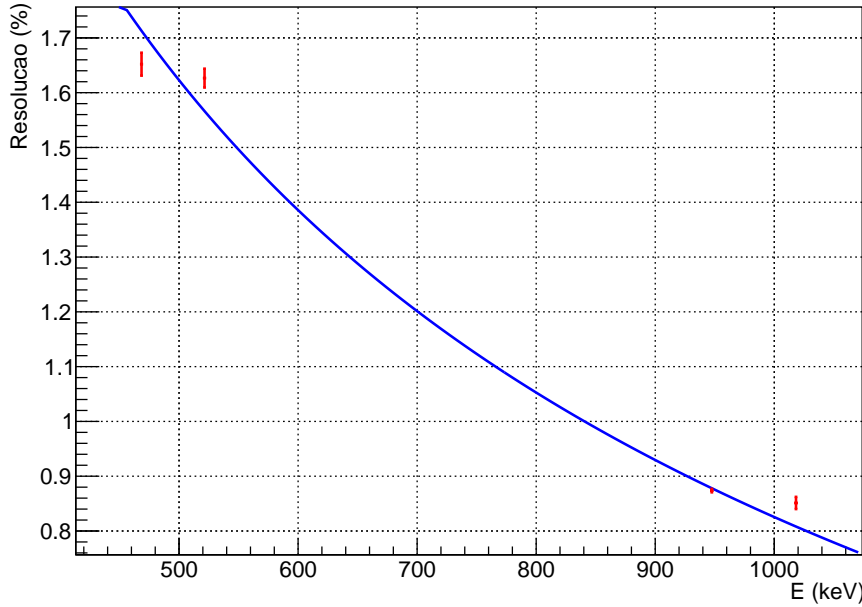


Figura 8: Ajuste obtido para a variação de R com E , no caso da fonte aberta

Tabela 22: Parâmetros do ajuste da variação de R com E , no caso da fonte aberta

a (keV)	b	ngl	χ^2/ngl
3706 ± 133	-1.099 ± 0.036	2	18.74

O valor de χ^2/ngl é superior à unidade em uma ordem de grandeza, o que reflete a fraca qualidade do ajuste aos pontos considerados. Visto apenas um dos pontos intercalar a curva de ajuste, atribui-se parte da causa à falta de consideração de erros adicionais na montagem utilizada. A ordenada na origem foi introduzida para detetar a existência de possíveis sistemáticos, pelo que o seu valor esperado era zero. Examinando o erro associado ao parâmetro, deduz-se que o valor nulo não é compatível com os dados, pelo que se assume assim a existência de sistemáticos em resolução associados à montagem. Por se tratarem de erros em resolução, estes sistemáticos englobam fenómenos com distribuições gaussianas como o ruído eletrónico ou flutuações na deriva de eletrões no interior do detetor, por exemplo.

Já a validade do parâmetro a pode ser averiguada pela sua relação com a energia média de ionização ω :

$$\omega = \frac{a}{100^2 \cdot 2.355^2} \quad (35)$$

$$\delta_\omega = \frac{\delta_a}{100^2 \cdot 2.355^2} \quad (36)$$

Obtém-se assim $\omega = (67.1 \pm 2.4) \text{ eV}$, um valor muito alto e cuja incerteza não cobre a energia média esperada para a extração de elétrons no detetor, da ordem dos eV . Isto já era esperado, revelando de novo a fraca qualidade do ajuste, também devida à quantidade diminuta de pontos disponíveis. Assim, apesar de se verificar a diminuição das flutuações estatísticas relativas com o aumento de energia, não é possível com os dados retirados corroborar totalmente o modelo proposto.

De forma a aprofundar o estudo deste modelo, optou-se por ajustar pelo método dos mínimos quadrados a expressão anterior, mas desta vez com o expoente do termo a/E livre, designado c . Apresenta-se o resultado do ajuste e os parâmetros do mesmo em baixo:

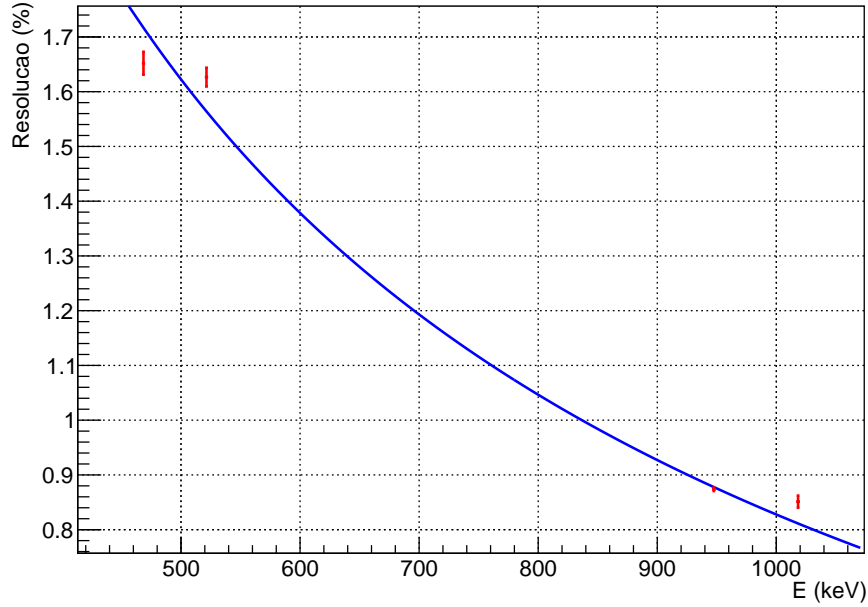


Figura 9: Ajuste obtido para a variação de R com E com expoente livre, no caso da fonte aberta

Tabela 23: Parâmetros do ajuste da variação de R com E com expoente livre, no caso da fonte aberta

$a \text{ (keV)}$	b	c	n_{gl}	χ^2/n_{gl}
1767 ± 80	-0.608 ± 0.033	0.636 ± 0.014	1	37.27

O ajuste apresenta-se visualmente muito semelhante e o valor de χ^2/n_{gl} continua superior à unidade, refletindo de novo a fraca qualidade do ajuste. No entanto, a ordenada na origem continua longe do zero e o erro associado a este parâmetro torna o zero incompatível com os dados, reafirmando-se a existência de sistemáticos em resolução associados à montagem utilizada. Já o expoente de a/E é superior ao esperado, não cobrindo o $1/2$ com a sua incerteza. Isto reflete o facto deste modelo ser apenas uma aproximação para um caso simples de uma distribuição de Poisson perfeita com todos os eventos independentes.

Com este ajuste obtém-se para a energia média de ionização $\omega = (32.0 \pm 1.5) \text{ eV}$, um valor ainda superior ao esperado, estando no entanto mais próximo do que o ω retirado do ajuste anterior.

Este tratamento permite reafirmar que, notando-se a diminuição das flutuações estatísticas relativas com o aumento de energia, não é de todo possível validar o modelo considerado com os dados disponíveis.