

Coincidências $\gamma\gamma$ - PET

Instituto Superior Técnico - Mestrado Integrado em Engenharia Física Tecnológica

Laboratório de Física Experimental Avançada - Grupo 4E - Quarta-feira - Prof. Marta Fajardo

J. Cunha (81541) | B. Silva (80803) | G. Soares (80914)

22 de Janeiro de 2017

Ao realizar esta atividade laboratorial, pretendeu-se estudar e entender os fenómenos físicos associados à Tomografia por Emissão de Positrões (PET), através da medição de coincidências $\gamma\gamma$. Para tal, utilizou-se um par de detetores de cintilação, de forma a medir a correlação angular de raios γ resultantes da aniquilação de um positrão emitido por uma fonte radioativa (^{22}Na) colocada entre os dois detetores. Obteve-se assim informação suficiente relativamente ao decaimento β^+ e à geometria da montagem para, numa segunda fase, obter um sinograma, que permitiu posteriormente construir uma imagem (de baixa resolução, devido a limitações experimentais) por Tomografia.

1. Introdução

Como se sabe, núcleos atómicos com excesso de protões tornam-se instáveis, podendo ocorrer o fenómeno de desintegração β^+ , no qual um protão é convertido num neutrão, num positrão e num neutrino:



Uma vez que o positrão é a anti-partícula do eletrão (e^-), estas partículas tendem a aniquilar-se mutuamente. De facto, facilmente um positrão emitido captura um eletrão, que começa a circular em torno do primeiro. Forma-se assim um estado ligado designado por positrónio. O processo de aniquilação do positrão com o eletrão ocorre quando o positrónio perde a sua energia cinética, dando origem a 2 fotões γ com energia igual à energia de repouso ($E=mc^2$) do positrónio (511 KeV cada fotão), que são emitidos em direções opostas, de forma a garantir a conservação do momento linear.

1.1. Interação da radiação γ com a matéria

Dado que os fotões em estudo têm uma energia inferior a 1022 KeV, não precisamos de nos preocupar com o fenómeno de interação por produção de pares. Assim, estes irão interagir, fundamentalmente, por processos de difusão de Compton e por efeito fotoelétrico.

A difusão de Compton descreve choques elásticos entre fotões e eletrões atómicos fracamente ligados ao núcleo. Nos espectros de energia observados destacam-se o pico de retrodifusão e o joelho de Compton, correspondentes à energia do fotão e do eletrão, respetivamente, após uma colisão em que ocorre transferência máxima de energia (choque frontal).

Já o efeito fotoelétrico descreve o processo que ocorre quando um fóton (de energia superior à energia de remoção do eletrão) incide sobre um átomo, sendo absorvido, e emitindo um eletrão com a energia cinética que sobra da remoção.

É ainda de referir que ao longo da atividade será completamente desprezada a perda de energia da radiação γ por absorção no ar, devido não só às curtas distâncias percorridas pela mesma, mas também ao facto do coeficiente de absorção no ar ser bastante reduzido.

1.2. Tomografia PET

Positron Emission Tomography (PET) é um exame imagiológico usado na medicina para a deteção e diagnóstico de cancro. Consiste na ingestão, por parte do paciente, de um composto radioativo com pequeno tempo de semi-vida (e portanto o mais inofensivo possível), que é armazenado na zona a inspecionar, e cujo decaimento b^+ origina duas partículas γ com momentos opostos, que podem ser detetadas através de coincidências temporais e espaciais. Visto que as células cancerígenas consomem açúcar excessivamente, é possível colocar o composto radioativo numa molécula portadora de, por exemplo, glicose, sendo portanto facilmente detetável a zona em que se encontram as células cancerígenas, bem como o seu tamanho e forma, por deteção da atividade da fonte.

1.3. Fonte Radioactiva e Detectores

Sabe-se que, para uma fonte que se vá desintegrando com o tempo, também a sua atividade diminui ao longo do tempo. Regra geral, esta diminuição segue as seguintes relações:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad A(t) = -\frac{dN}{dt} = A_0 e^{-\lambda t} \quad (2)$$

onde N representa o número exacto de desintegrações da fonte num certo intervalo de tempo, e A a sua atividade. Tem-se ainda que $A_0 = N_0 \lambda$, e $\frac{1}{\lambda}$ é o tempo de relaxação da fonte. Já o tempo de semi-vida é dado por $t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$, correspondendo ao intervalo de tempo médio após o qual metade dos núcleos iniciais já se desintegraram.

Pretende-se estudar uma fonte com elevada atividade, pelo que se deve utilizar um tempo de aquisição T elevado. No entanto, é necessário garantir que $t_{\frac{1}{2}} \gg T$, de forma a garantir que a atividade da fonte ao longo da medição se mantém aproximadamente constante.

De referir ainda que, tendo duas fontes emissoras distintas (A e B), obtém-se:

$$N_C = 2N_A N_B \frac{\tau}{T} \Rightarrow R_C = 2R_A R_B \tau \quad (3)$$

em que N_C representa o número de eventos que ocorrem, em média, dentro de um tempo de resolução τ , para uma aquisição num intervalo T . O tempo de resolução de um detector corresponde ao intervalo de tempo durante o qual o sistema associa duas contagens em detectores opostos a uma coincidência, sendo portanto N_C o número de coincidências fortuitas.

Ao longo da atividade laboratorial, utilizaram-se exclusivamente fontes radioativas de ^{22}Na , cujo

decaimento para ^{22}Ne é responsável pela emissão de um positrão e de um raio γ , como se observa na figura seguinte:

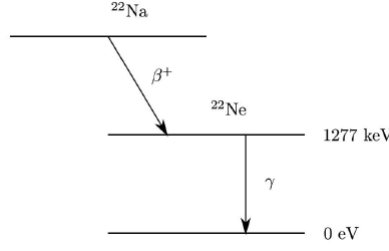


Figura 1: Esquema do decaimento mais provável (90%) do ^{22}Na .

De forma a detectar os raios γ foram utilizados dois detectores de cintilação com cristal de iodeto de sódio dopado com tálio, NaI(Tl). Quando radiação energética interage com o cristal, este último cintila, ou seja, emite fótons de baixa energia. Estas cintilações são amplificadas, recorrendo a um fotomultiplicador, sendo posteriormente convertidas em impulsos elétricos, que são tratados pela cadeia eletrónica associada.

1.4. Curva de resposta $R(\theta)$

Considerando que a fonte se encontra posicionada no centro do porta-alvos e seja θ o ângulo entre os detectores, representado na Fig.3, l a distância da fonte ao detetor e r o raio do detetor, é possível verificar¹ que a dependência no ângulo θ das contagens de coincidências é dada pela Eq. 4, considerando $l \gg r$:

$$R(\theta) \propto \frac{A(\theta)}{\pi r^2} = 1 - \frac{\frac{l}{r}|\theta| \sqrt{1 - (\frac{l}{2r}\theta)^2} + 2\arcsin(\frac{l}{2r}|\theta|)}{\pi} \quad (4)$$

sendo que a função $R(\theta)$ corresponde ao *rate* das contagens das coincidências normalizado ao seu valor em $\theta = 0$. Caso a fonte não esteja no centro do porta-alvos, mas sim numa posição (R, ϕ) , tem-se que para $R \ll r, l$: $R(\theta) \rightarrow R(\theta - \frac{2R}{l}\cos(\phi))$.

2. Montagem e Procedimento

Antes de se iniciar cada sessão laboratorial, foi sempre necessário realizar uma calibração do material a utilizar, com o objectivo de limitar as contagens a uma zona de trabalho de $\pm 3\sigma$ em torno do pico de 511 KeV do espectro de ^{22}Na , que corresponde ao pico de aniquilação.

Com esta finalidade, colocou-se a fonte radioativa entre os dois detectores, à mesma distância de cada, e com estes sobre o mesmo eixo. Ligando os detectores ao computador, foi possível observar o espectro da fonte e estabelecer a zona de trabalho. De seguida, recorrendo a um *pulser*, determinaram-se os canais correspondentes aos limites da zona de trabalho, e com um *Timer SCA* isolou-se a região pretendida, sendo que os seus limites foram obtidos verificando o instante em que se deixava de registar contagens no contador.

¹A dedução desta dependência encontra-se no logbook.

Depois de efetuada a calibração, é finalmente possível começar a realizar a experiência propriamente dita. Para tal, utilizou-se a seguinte montagem experimental:

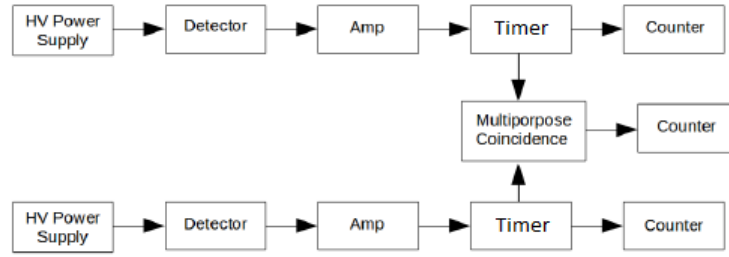


Figura 2: Esquema da montagem final a utilizar na obtenção de coincidências.

Na figura 3 apresenta-se um esquema da montagem e posições relativas dos detectores. A montagem possui dois detectores idênticos, sendo que um deles se encontra sempre fixo, enquanto que o outro é móvel. De facto, ao longo da experiência, iremos fazer variar a posição deste detector, variando portanto o ângulo θ (que corresponde à rotação do detector móvel em relação à posição original), entre -30° e 30° . Será ainda possível fazer variar o ângulo ϕ , correspondente à rotação do porta-alvos (pode sofrer uma revolução total). Por fim, também a distância r da fonte em relação ao centro do porta-alvos será um fator a ter em jogo. Definem-se ainda as direções x e y .

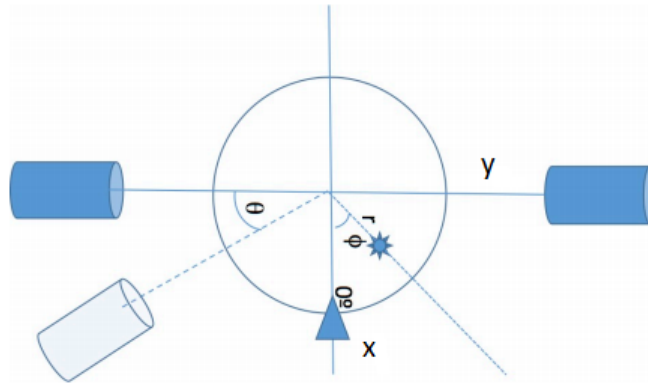


Figura 3: Esquema da montagem dos detectores.

3. Análise e Resultados Experimentais

3.1. Coincidências γ γ : Correlações angulares

3.1.1 Coincidências Fortuitas do ar

Começou-se por verificar a dependência linear no tempo de janela, τ , do número de contagens de coincidências fortuitas dada pela Eq. 3, de forma a encontrar o valor correspondente ao tempo de janela

utilizado² e posteriormente descontar este valor a todas as contagens, ponderando os respectivos tempos de aquisição. Fez-se então um ajuste à Eq. 5 e obteve-se o gráfico da Fig. 4.

$$N = P_0\tau + P_1 \quad \sigma_N = \sqrt{P_0^2\sigma_\tau^2 + \tau^2\sigma_{P_0}^2 + \sigma_{P_1}^2} \quad (5)$$

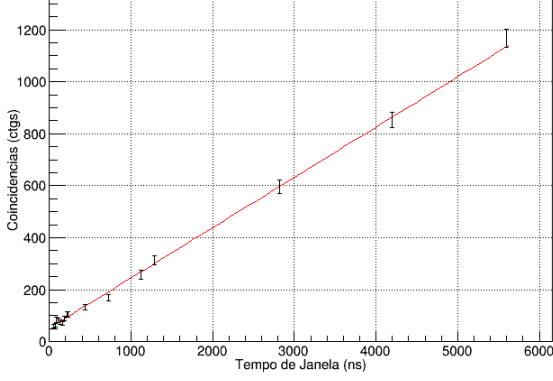


Figura 4: Ajuste obtido para as coincidências fortuitas, $t_{aq} = 90s$.

P_0 (ctgs/ns)	P_1 (ctgs)	χ^2/n_{gl}
0.1934 ± 0.0040	51.9 ± 3.0	0.81

Tabela 1: Parâmetros de ajuste da relação das coincidências fortuitas com o tempo de janela.

Esperava-se que o valor do parâmetro P_1 fosse aproximadamente nulo, o que não se verifica, indicando a existência de um *offset* nas contagens. Por outro lado, o valor de χ^2/n_{gl} reflete a qualidade do ajuste validando a Eq. 3 à parte de um *offset*.

O tempo de janela do módulo de coincidências utilizado ao longo da experiência foi $\tau = 52ns$, que corresponde a um valor de $N_c^{fort} = 61.9 \pm 2.9$. Uma vez que foram feitas medições ao longo do trabalho experimental com tempos de aquisição diferentes, resolveu-se descontar o *rate* das coincidências fortuitas dado por: $R_c^{fort} = 0.688 \pm 0.032$ aos restantes *rates* obtidos³.

3.1.2 Variação do número de coincidências com o ângulo entre os detetores

Nesta secção pretendeu-se verificar a validade da Eq. 4, ajustando os dados experimentais obtidos à relação: $R_c^{norm} = P_3R(\theta - P_2)$, onde a distância da fonte ao detetor, l , e o raio do detetor, r , foram tomados como parâmetros livres, P_0 e P_1 , respetivamente.

²A determinação do tempo de janela a utilizar encontra-se no logbook.

³Este valor é uma aproximação que indica que o número de coincidências fortuitas não depende da geometria da montagem ($N_A N_B = const$). O uso desta aproximação encontra-se justificado no logbook.

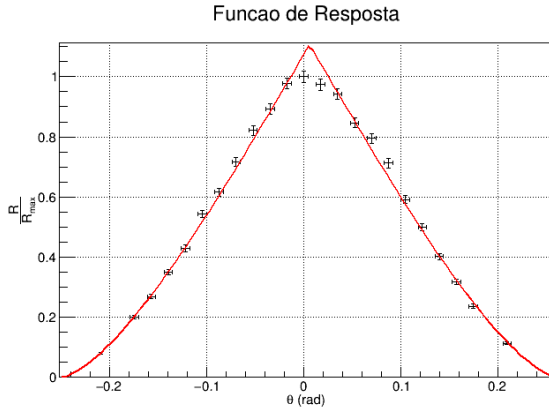


Figura 5: Correlação angular: Coincidências em função do ângulo θ .

l (cm)	r (cm)	ϕ_0 (10^{-3}rad)	P_3 (%)	χ^2/n_{gl}
18 ± 20	2.3 ± 2.6	5.81 ± 0.98	110.7 ± 1.1	0.88
19.89 ± 0.13	2.54 (fixo)	5.81 ± 0.98	110.7 ± 1.1	0.88

Tabela 2: Parâmetros de ajuste da correlação angular.

A primeira conclusão que se pode retirar do ajuste onde P_1 está livre é que ambos l e r têm erros maiores do que o próprio valor, invalidando a este modelo, pelo que se fixou r como 2.54cm.

Assim, obteve-se um segundo conjunto de dados relativos ao ajuste, que se mostrou muito satisfatório, tendo-se obtido um valor de $\chi^2/n_{gl} = 0.88$, muito próximo do 1 ideal.

Para além disto, o modelo confirma algumas das ideias que se esperavam, nomeadamente o valor de $l \neq 17.00 \pm 0.05 \text{cm}$, valor medido em laboratório, que não contava com o percurso médio dos γ dentro do detetor, que é, então, $2.89 \pm 0.18 \text{cm}$. O valor de ϕ_0 indica que existe uma pequena assimetria nos valores obtidos, algo que seria de esperar dada a natureza estatística dos decaimentos. Por último, o valor de P_3 , que foi introduzido *a posteriori*⁴ de forma a obter-se um melhor ajuste, revela que os dados experimentais encontram-se sobrevalorizados cerca de 11% em relação ao modelo teórico, pelo menos nas laterais da distribuição.

Conclui-se então que este modelo, apesar de meramente aproximativo, apresenta resultados congruentes com a realidade física. Apesar de tudo, na vizinhança de $\theta = 0$, verifica-se que os valores encontram-se sobrestimados o que leva a que a tendência da curva teórica nesta zona seja diferente da dos pontos experimentais (que apresentam um formato mais curvo do que seria de esperar). Isto pode ser explicado à luz do modelo teórico que teve em conta a interseção de dois círculos como projeções dos ângulos sólidos de interseção dos dois detetores. De facto, se o raio efetivo do detetor for menor que o previsto, o número de contagens nesta zona será inferior face ao esperado pelo modelo, ou seja, o raio considerado não fornece um caminho médio suficientemente longo para a energia das partículas ser totalmente absorvida, tendo-se uma sobreestimação das contagens.

3.1.3 Eficiência do Detetor

Nesta secção pretendeu-se determinar as eficiências de ambos os detectores, bem como a eficiência intrínseca de coincidências. Para tal, começou-se por determinar a eficiência geométrica do sistema (para $\theta = \phi = 0^\circ$ considerou-se que a eficiência geométrica de coincidências seria igual às eficiências geométricas de

⁴O ajuste sem o parâmetro P_3 encontra-se no logbook

ambos os detectores), que segue:

$$\varepsilon_g = \frac{r^2}{2l^2} \quad (6)$$

em que r representa o raio efectivo dos detectores, e l é a distância efectiva da fonte aos detectores, tal como visto na secção anterior.

Seguidamente, foram calculadas as eficiências totais de cada detector, bem como das coincidências. Neste instante, importa relembrar que a atividade da fonte é dada por:

$$A(t) = 0.9A_0 e^{-\frac{\ln(2)}{t_{1/2}} \Delta t} \quad (7)$$

sendo A_0 a atividade inicial da fonte ($A_0 \approx 10\mu\text{C}$), $t_{1/2}$ é o tempo de semi-vida da mesma ($t_{1/2}=2.6$ anos) e Δt o intervalo de tempo entre o momento em que se adquiriu a fonte, e o momento da medição, que se considerou ser, aproximadamente, 0.5 anos. Desta forma, a eficiência total do detector móvel/fixo (M/F) é obtida através de:

$$\varepsilon_{T_{M/F}} = \frac{R_{M/F}}{A(t)} \frac{A_{\text{signal}_{M/F}}}{A_{\text{total}_{M/F}}} \quad (8)$$

sendo $R_{M/F}$ os rates corrigidos medidos no detector (móvel ou fixo), e $\frac{A_{\text{signal}_{M/F}}}{A_{\text{total}_{M/F}}}$ o quociente entre a área de sinal e a área total (para o detector móvel ou fixo). Já para a eficiência total de coincidências, tem-se:

$$\varepsilon_{T_C} = \frac{R_C}{A(t)} \quad (9)$$

onde R_C representa o rate corrigido de coincidências.

Com base nestes valores, facilmente se obteve valores para as eficiências intrínsecas, sabendo que a eficiência total é dada pelo produto da eficiência geométrica com a intrínseca. Tem-se então para os detectores e para as coincidências, respectivamente:

$$\varepsilon_{I_{M/F}} = \frac{\varepsilon_{T_{M/F}}}{\varepsilon_g} \quad \varepsilon_{I_C} = \frac{\varepsilon_{T_C}}{\varepsilon_g} \quad (10)$$

Por outro lado, pode-se ainda obter a eficiência intrínseca de coincidências através de:

$$\varepsilon_{I_C} = \varepsilon_{I_M} \varepsilon_{I_F} \quad (11)$$

Finalmente, é ainda possível obter esta eficiência por um outro método, que segue ⁵:

$$\varepsilon_{I_C} = 2 \left(\frac{l}{r} \right)^2 \frac{R_C P_3}{A(t)} \quad (12)$$

onde P_3 é o parâmetro presente na tabela 2. Efectuadas as contas, obtêm-se os valores expressos na tabela 3:

	ε_g	ε_{T_M}	ε_{T_F}	ε_{I_M}	ε_{I_F}	$\varepsilon_{I_C} (10)$	$\varepsilon_{I_C} (11)$	$\varepsilon_{I_C} (12)$
Eficiência (%)	0.82 ± 0.01	0.31 ± 0.07	0.29 ± 0.07	37.53 ± 9.08	35.35 ± 8.58	11.83 ± 2.80	13.27 ± 6.43	13.10 ± 3.07

Tabela 3: Valores obtidos para as eficiências, para $\theta=\phi=0^\circ$.

⁵ A justificação do fator multiplicativo $2 \left(\frac{l}{r} \right)^2$ encontra-se no logbook.

Nota-se o valor diminuto de eficiência geométrica, o que era de esperar, tendo em conta o valor da relação $\frac{r}{l}$, ou seja, as dimensões do detector face à área abrangida pelas emissões da fonte. Verifica-se ainda que o detector móvel possui uma eficiência ligeiramente superior à do fixo, embora os seus intervalos se intersectem, quando se consideram os respectivos erros. Finalmente, confirma-se a validade dos vários métodos utilizados para determinar a eficiência intrínseca de coincidências, dada a proximidade entre os valores obtidos para cada método, onde, novamente, os intervalos se intersectam, considerando os respectivos erros.

3.2. Detecção da emissão e coincidências em função da posição da fonte

Nesta secção, estudou-se a variação das coincidências em função da posição da fonte no porta-alvos. Este estudo permitiu-nos determinar qual a melhor posição relativa entre fontes que possibilita um bom sinograma. Considerou-se então o eixo yy como o eixo alinhado com os detetores (quando $\theta=0^\circ$), e o eixo xx como o eixo normal ao anterior. Considerou-se também a posição 0 como o centro do porta-alvos.

3.2.1 Variação das coincidências no eixo yy

Em primeiro lugar, começou-se por verificar que ao aproximar a fonte a um dos detetores no eixo yy, o número de contagens desse detetor aumentava enquanto que o do outro detetor diminuía. Isto deve-se à eficiência geométrica dos detetores, uma vez que a proximidade da fonte ao detetor implica um maior ângulo sólido de deteção. Em seguida procedeu-se ao estudo das coincidências onde se obteve o gráfico da Fig.6.

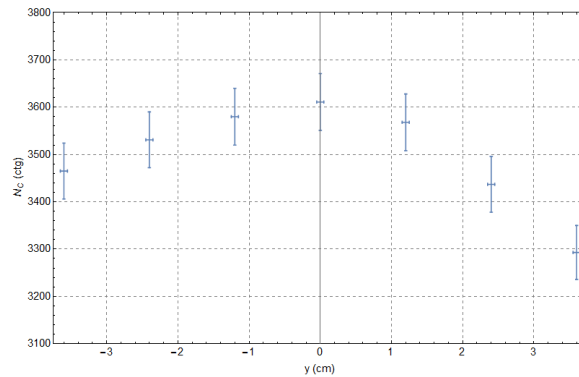


Figura 6: Variação das coincidências segundo y para um $t_{aq} = 20s$.

Verificou-se que o número de coincidências é máximo quando a fonte se encontra na posição central, o que seria de esperar, uma vez que esta é a posição que maximiza o ângulo sólido de deteção para os dois detetores. À medida que se aproxima a fonte de um dos detetores, devido à eficiência geométrica, o ângulo sólido de deteção para o detetor mais afastado diminui, sendo este responsável pela diminuição do número de coincidências detetadas. Outro facto a realçar e a ligeira assimetria mostrada, que vai, no entanto, ser desprezada, devido ao seu efeito diminuto.

3.2.2 Variação das coincidências no eixo xx

Procedeu-se então ao estudo da variação das coincidências segundo x , acrescentando agora um grau de liberdade segundo θ onde se obteve os gráficos da Fig. 7

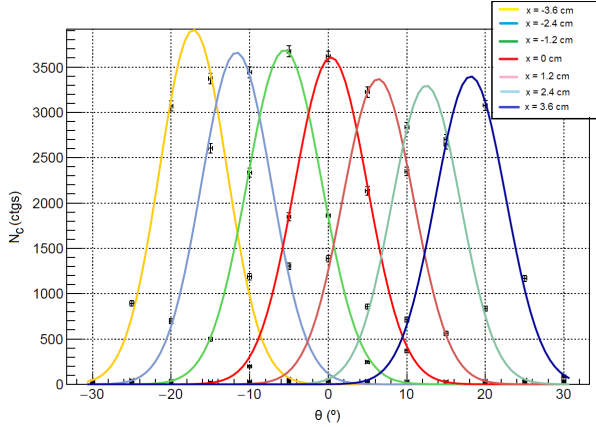


Figura 7: Variação das coincidências segundo y para um $t_{aq} = 20s$.

x (cm)	μ (θ)	σ (θ)	Amp (10^3 ctgs)	χ^2/n_{gl}
-3.6	-17.18 ± 0.11	4.190 ± 0.087	3.96 ± 0.13	3.69
-2.4	-11.72 ± 0.13	4.32 ± 0.092	3.71 ± 0.10	5.13
-1.2	-6.17 ± 0.12	4.231 ± 0.059	3.842 ± 0.087	17.77
0	0.42 ± 0.14	4.443 ± 0.076	3.626 ± 0.062	2.20
1.2	6.41 ± 0.14	4.342 ± 0.092	3.416 ± 0.089	4.55
2.4	12.47 ± 0.12	4.245 ± 0.085	3.34 ± 0.10	3.98
3.6	18.14 ± 0.12	4.369 ± 0.080	3.423 ± 0.094	1.77

Tabela 4: Parâmetros de ajuste de cada curva.

Uma vez que nesta secção não nos interessa fazer um estudo rigoroso da realidade física em questão descrita aproximadamente pela Eq.4, mas sim determinar o valor médio e o σ de cada curva de forma a tirar conclusões sobre a distância máxima a que as fontes podem estar do centro para que ainda haja detecção de coincidências, ajustaram-se as curvas a gaussianas onde se obtiveram os parâmetros da Tab.4.

Em primeiro lugar, como a função de resposta não é verdadeiramente uma gaussiana, é normal não haver nenhum $\chi^2/n_{gl} = 1$, sendo, no entanto, todos aceitáveis, à exceção de $R = -1.2\text{cm}$. Verifica-se também que o desfasamento entre as curvas é de aproximadamente 6° para todas as distâncias medidas e que a dispersão destas é aproximadamente igual e $\mu \pm 3\sigma$ ronda os 30° para as posições mais extremas, o que permite concluir que até uma distância ligeiramente inferior a $|x| = 3.6$ é possível ter gaussianas bem definidas, o que será especialmente útil na escolha das posições das fontes para a obtenção do sinograma. Por último, através da amplitude, é visível que há uma ligeira assimetria, mas que não é um fator determinante para o resto do laboratório, pelo que vai ser desprezada.

3.2.3 Variação das coincidências em função do ângulo ϕ

Resta então saber como varia o número de coincidências com o ângulo ϕ do porta-alvos. De forma a aumentar a dispersão dos dados experimentais fez-se este estudo com duas fontes de ^{22}Na com atividades de $10\mu\text{C}$ e $5\mu\text{C}$. Cada fonte foi colocada independentemente em três raios distintos no porta-alvos e foi feito um varrimentos angular em ϕ em passos de 10° . O número de coincidências obtido para cada fonte foi posteriormente somado e representado no gráfico da Fig. 8. Decidiu-se fazer os ensaios independentes e não colocar as fontes em simultâneo na mesma posição de forma a garantir que o ângulo sólido de detecção

fosse o mesmo⁶.

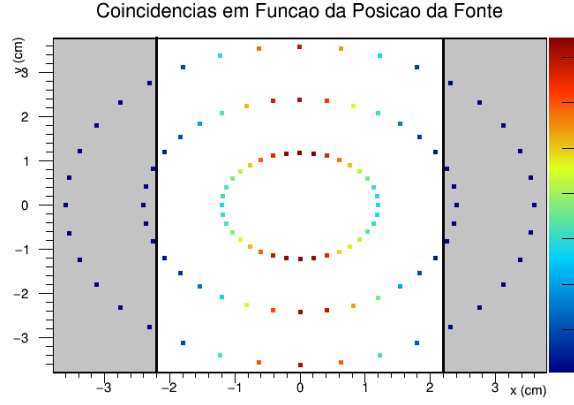


Figura 8: Variação das coincidências segundo ϕ para 3 raios diferentes, com $t_{aq} = 30s$.

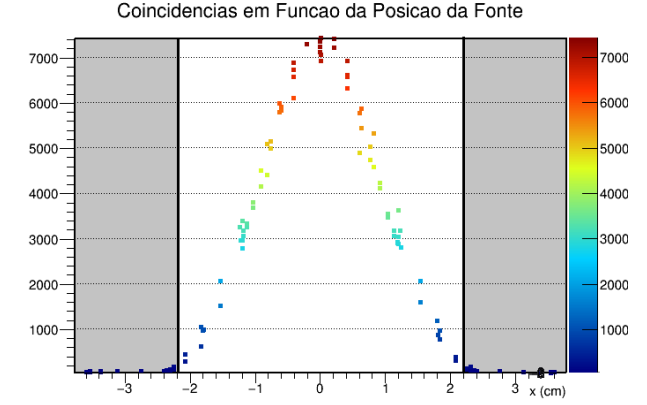


Figura 9: Escolha da zona de deteção com base num critério a 3σ .

Em primeiro lugar, verifica-se que para $r = 1.2cm$ o número de coincidências é significativamente alto para qualquer ϕ , pelo que o limite da zona de deteção será superior a esta distância. A partir da análise do gráfico da Fig. 9 verifica-se que na zona a sombreado, o número de coincidências é substancialmente baixo pelo que os limites desta zona correspondem à zona de deteção. Considerou-se então, que a menos de 3σ , a região onde a eficiência geométrica dos detetores permite que hajam contagens significativas em simultâneo será $x \in [-2.2; 2.2]cm$. Este resultado empírico está em concordância com o esperado da expressão teórica deduzida. De facto, o número de coincidências será tanto maior à medida que x se aproxima do valor nulo, o que corresponde a $\phi = 90^\circ$ e $\phi = 270^\circ$. Em termos da curva de resposta $R(\theta)$, isto corresponde a ter $\theta = 0^\circ \implies R(\theta - \frac{2R}{l}\cos(\phi)) = R(-\frac{2R}{l}\cos(\phi)) = R(0) = 1$, que corresponde ao seu valor máximo. De igual forma, a curva de resposta anula-se para $\phi = 0^\circ$ e $\phi = 180^\circ$ quando $\frac{2R}{l} \geq \frac{2r}{l} \iff R \geq r$. Sendo o raio do detetor $r = 2.54cm$ espera-se que para posições da fonte com $R > r$ a curva de resposta se anule nestes ângulos, o que de facto se verifica.

De forma a verificar a validade da aproximação da função de resposta em função de ϕ ajustou-se os dados apresentados nas Figuras 8 e 9 a $R\left(-\frac{2P_0}{r}\cos(\phi - P_1)\right)$, com $P_0 = R$, $P_1 = r$, $P_2 = \phi_0$ e P_3 o fator de escala, obtendo-se o seguinte gráfico e parâmetros. Note-se que, devido à descontinuidade de R foi necessário aplicar duas funções de resposta para $R=2,4cm$ e $R=3,6cm$. Outro pormenor de interesse, é que foram realizados dois ajustes, um com r livre, e outro com R livre, só tendo variado estas duas constantes entre ajustes, visto estes estarem sempre associados através de $\frac{R}{r}$.

⁶De facto, ao colocar uma fonte em cima da outra, varia-se a posição da fonte de cima em z , o que leva a uma diminuição considerável do ângulo solido de deteção de coincidências

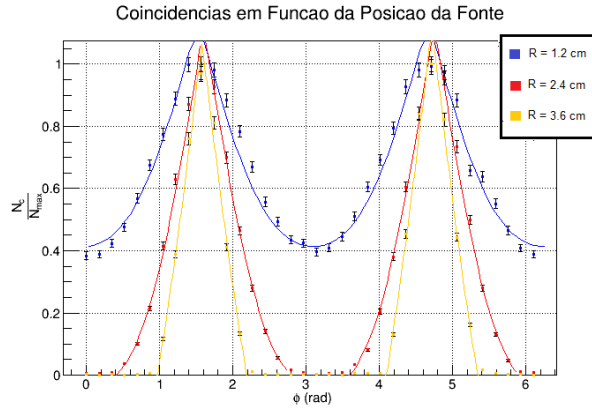


Figura 10: Ajuste das coincidências à função de resposta

R_{real} (cm)	$R(r \text{ fixo})$ (cm)	r (R fixo) (cm)	ϕ_0 (10^{-2} rad)	P_3 (%)	χ^2/ngl
1.20 ± 0.05	1.485 ± 0.013	2.052 ± 0.018	-4.10 ± 0.62	114.30 ± 0.91	5.58
2.40 ± 0.05	2.5263 ± 0.0052	2.3570 ± 0.0048	3.10 ± 0.33	112.5 ± 1.1	4.15
2.40 ± 0.05	2.6051 ± 0.0048	2.3401 ± 0.0043	3.88 ± 0.32	112.48 ± 0.11	6.37
3.60 ± 0.05	3.672 ± 0.024	2.490 ± 0.017	0.96 ± 0.30	106.8 ± 1.6	6.72
3.60 ± 0.05	3.608 ± 0.025	2.535 ± 0.018	0.76 ± 0.30	112.3 ± 1.6	9.46

Tabela 5: Parâmetros de ajuste da correlação angular.

É possível verificar que a aproximação vai perdendo a sua validade à medida que R aumenta, através dos valores de χ^2/ngl , que, à exceção do ajuste em $]0; \pi[$ para $R = 2.4\text{cm}$, aumenta, como era previsto, dado que se considerou que o ângulo sólido se mantinha constante para variações em y , e l seria igual para ambos os detetores. Comparando com o ajuste da figura ??, também se nota que χ^2/ngl é sempre superior, pelas mesmas razões. No entanto, R , e consequentemente r , obtidos através do ajuste aproximam-se do valor real à medida que R aumenta, o que pode sugerir que o raio de detecção interior efetivo não é realmente 2.56cm, mas ligeiramente inferior.

3.3. Tomografia PET: Sinograma

Após todo o estudo circundante à detecção de partículas γ , aqui teve-se como objetivo determinar a posição de 3 fontes de ^{22}Na com recurso aos valores das coincidências em função dos ângulos ϕ e θ .

Como estudámos 3 fontes, decidiu-se colocá-las o mais afastadas possível, entre si, em termos de ϕ , visto ser esperado um comportamento sinusoidal no sinograma, como já foi verificado na função de resposta, e colocá-las a 120° entre si proporciona a maior diferença de fase possível. Para além disto também se colocou as fontes o mais afastadas do centro o possível, para tentar obter uma dispersão maior em torno de θ , garantindo que R nunca seria superior a 3.6cm, para podermos conter toda a dispersão proveniente de uma fonte no sinograma, tendo sempre em atenção que a distância entre fontes teria de ser superior a 2.2cm, para não haver dispersões excessivamente sobrepostas.

Deste modo, após se terem recolhido os dados, criou-se o sinograma apresentado na figura 11, que revela claramente 2 das 3 fontes utilizadas, juntamente com o esperado comportamento sinusoidal, descrito pelos máximos de contagens ao longo dos eixos. Devido à dificuldade de detecção criou-se, também, um sinograma com as coincidências em escala logarítmica, representado na figura 12, onde já é possível verificar a presença de uma 3ª fonte.

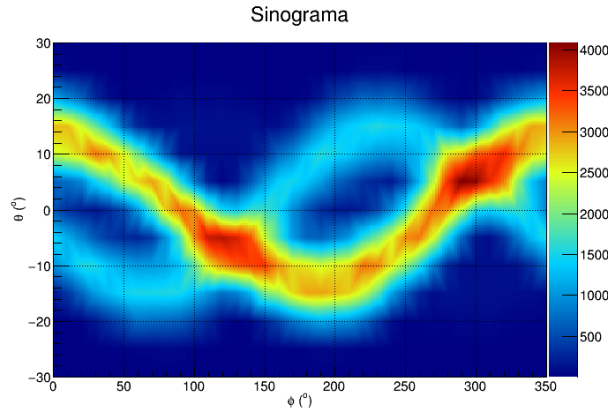


Figura 11: Coincidências em função de θ e ϕ

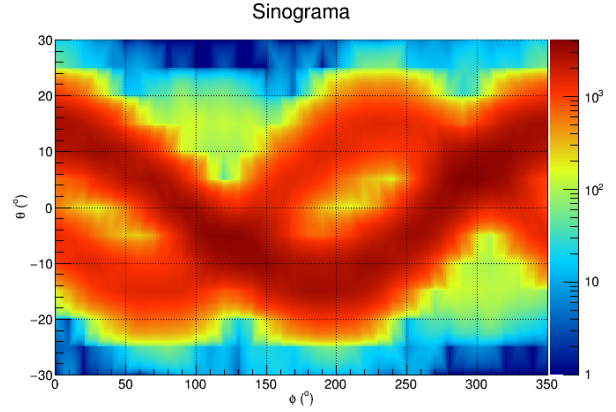


Figura 12: Coincidências em função de θ e ϕ , em escala logarítmica

De seguida, com os mesmos dados, utilizando uma transformada inversa de Radon, foi possível reconstruir a posição das fontes em função dos ângulos ω e α^7 , e, consequentemente, a posição das mesmas em função de x e y , segundo as seguintes equações:

$$x = l.tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{tg\left(\frac{\omega}{2}\right) + 1}{1 + tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) tg\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (13)$$

$$y = -l.tg\left(\frac{\omega}{2}\right) \frac{tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1}{1 + tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) tg\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (14)$$

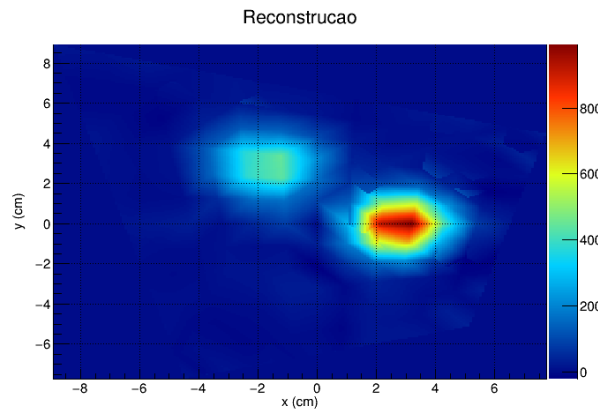


Figura 13: Reconstrução das posições das fontes em função de x e y

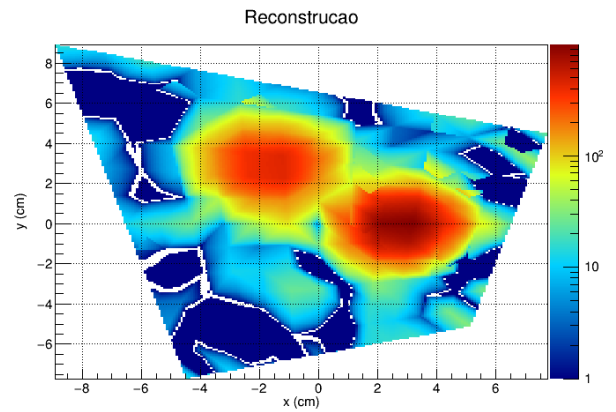


Figura 14: Reconstrução das posições das fontes em função de x e y , em escala logarítmica

⁷Os ângulos estão explicados em mais detalhe no logbook

A partir da figura 13 não é possível verificar a existência de uma 3ª fonte, mas em escala logarítmica já é possível verificar algo que se assemelha a uma possível 3ª fonte perto de $(-1, -3)$, não sendo, no entanto, o suficiente para dizer com certeza que é uma fonte (só se pode dizer com certeza que é o efeito de uma fonte porque sabe-se que tinha sido colocado lá uma).

Assim, pode-se assumir que uma das duas fontes distinguíveis está no intervalo $\{2, 4\}y$ e $\{-2.5, -0.5\}x$, e a segunda em $\{-1, 1\}y$ e $\{1.5, 4\}x$, pelo que, utilizando os valores pertencentes a estes intervalos é possível calcular as posições mais prováveis através das médias respectivas, obtendo-se as seguintes posições:

Fonte (μC)	x (cm)	y (cm)	ϕ ($^\circ$)	ϕ_{real} ($^\circ$)	desvio ($\# \sigma$)	R (cm)	R_{real} (cm)	desvio ($\# \sigma$)
10	2.69 ± 0.55	-0.05 ± 0.77	-1 ± 16	0.0 ± 0.5	-0.13	3.35 ± 0.78	3.00 ± 0.05	-0.45
5	-1.74 ± 0.60	2.86 ± 0.59	121 ± 10	120.0 ± 0.5	-0.06	2.70 ± 0.055	3.00 ± 0.05	0.56

Tabela 6: Posição das Fontes. Note-se que os erros estão em σ

Tendo em conta que todas as fontes tinham sido colocadas a 3.00 cm do centro do porta-alvos, e fazendo um ângulo de 120° entre si, podemos, por análise da tabela 6, concluir que o processo de reconstrução foi bastante satisfatório, visto que as posições reconstruídas para as duas fontes correspondem na perfeição às posições em que foram colocadas no laboratório, ou seja, em ambas um $3.00 \in R$, e um ângulo entre si de $\phi=120^\circ$. Os bons resultados obtidos tornam-se evidentes observando os desvios (em número de σ), que foram sempre inferiores a 1. É no entanto de referir que, apesar do método ter funcionado bastante bem para as duas fontes mais fortes, o mesmo já não pode ser dito para a fonte mais fraca, que não foi possível reconstruir nitidamente.

4. Conclusão e Comentários Finais

Os resultados obtidos consideram-se satisfatórios dadas as condições da experiência. Deduziu-se uma expressão teórica que dentro da sua validade ($l \gg r \gg R$) descreve muito bem o número de contagens de coincidências em função do ângulo θ . No entanto, esta expressão foi deduzida para um sistema de dois fotomultiplicadores, o que em sistemas de diagnóstico de cancro que contém um número significativamente maior de detetores deixa de ser válida. Apesar de tudo, dada a relativa simplicidade da montagem considera-se que se obteve valores consideravelmente aceitáveis. Esta expressão permitiu também obter uma nova forma de calcular a eficiência intrínseca dos detetores para coincidências onde se obteve um valor bastante próximo dos valores obtidos por métodos alternativos. Quanto à obtenção do sinograma e à respetiva reconstrução das posições das fontes no referencial considerado, verificou-se que apesar de terem sido utilizadas 3 fontes radioativas, apenas duas delas se observam com facilidade, dada a reduzida atividade da terceira fonte. No entanto, a reconstrução das posições das duas fontes observáveis considera-se bastante satisfatória, sendo que as posições obtidas para as fontes coincidem a menos de 0.6σ das posições reais onde estas foram colocadas. Esta experiência pode ser melhorada, em primeiro lugar, aumentando o número de detetores de forma a obter uma melhor resolução angular, e por sua vez, uma melhor precisão

na obtenção das posições das fontes com o sinograma. Outro fenómeno que teve pouco estudo nesta atividade e que produziu resultados ligeiramente diferentes do esperado, foi o estudo das coincidências fortuitas do ar, onde se verificou a existência de um *offset* de aproximadamente 52 contagens ao contrário do que se esperava da relação de proporcionalidade com o tempo de janela. Este fenómeno pode ser estudado, considerando outras configurações onde seria impossível obter contagens de coincidências, de forma a obter um melhor entendimento sobre o sistemático envolvido. Em suma, a experiência permitiu um melhor conhecimento acerca da fenomenologia envolvida num dos diagnósticos de cancro mais precisos e utilizados na atualidade e considera-se que os resultados foram satisfatórios.

Referências

- [1] *Coincidências $\gamma\gamma$ - PET* - Laboratório de Física Experimental Avançada, 2017