

Aula 05 – Métodos de Minimização e Mapas de Karnaugh

Prof. João Fernando Mari
joaof.mari@ufv.br

Roteiro

- Mapas de Karnaugh
- EXEMPLO: Mapa de Karnaugh a partir da Tabela Verdade
- Simplificação de Funções Booleanas
- EXEMPLO: Incrementador BCD
- EXERCÍCIO: Comparador de 2 bits (Aula 03)
- Referências

Mapas de Karnaugh

- **Mapa de Karnaugh**

- Permite representar de forma conveniente uma função booleana.
 - Número **pequeno** de variáveis. Até 4 ou 6.
- Ferramenta de auxílio à **simplificação** (minimização) de **funções booleanas**.
- O mapa consiste em uma matriz de posições:
 - **Posição** → As possíveis combinações de valores de n variáveis binárias.
 - As posições deve ser listas na ordem: **00, 01, 11, 10**.

		BC			
		00	01	11	10
A	0			1	1
	1				1

(b) $F = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C}$

- **EXEMPLO:**

- Mapa de Karnaugh para representar uma função booleana de 3 variáveis:
 - $F(A,B,C) = A'BC' + A'BC + ABC'$

Mapas de Karnaugh

Funções booleanas:

1 variável

$$F = A'$$

2 variáveis

$$F = AB' + A'B$$

3 variáveis

$$F = A'BC' + A'BC + ABC'$$

4 variáveis

$$F = A'B'CD + AB'C'D + ABC'D'$$

Mapas de Karnaugh:

A	
0	1

AB			
00	01	11	10

		BC			
		00	01	11	10
A	0				
	1				

		CD			
		00	01	11	10
AB	00				
	01				
	11				
	10				

Mapas de Karnaugh

Funções booleanas:

1 variável

$$F = A'$$

2 variáveis

$$F = AB' + A'B$$

3 variáveis

$$F = A'BC' + A'BC + ABC'$$

4 variáveis

$$F = A'B'CD + AB'C'D + ABC'D'$$

Mapas de Karnaugh:

A

0	1

AB

00	01	11	10

BC

	00	01	11	10
A 0				
A 1				

CD

	00	01	11	10
AB 00				
AB 01				
AB 11				
AB 10				

Mapas de Karnaugh

- Como o mapa de Karnaugh pode representar uma função booleana?
 - Cada posição corresponde a um produto da expressão na forma de **soma de produtos** (**mintermos**).
 - 1 corresponde ao valor da variável
 - 0 corresponde ao valor da variável negada (NOT)

$$F = A'$$

A

0	1
1	

$$F = AB' + A'B$$

AB

00	01	11	10
	1		1

$$F = A'BC' + A'BC + ABC'$$

BC

	00	01	11	10
A 0			1	1
A 1				1

$$F = A'B'CD + AB'C'D + ABC'D'$$

CD

	00	01	11	10
AB 00			1	
AB 01				
AB 11	1			
AB 10		1		

EXEMPLO: Mapa de Karnaugh a partir da Tabela Verdade

- Converter uma expressão booleana para um mapa:
 - Escrever a expressão em uma forma canônica:
 - Mintermos (soma de produtos) ou Maxitermos (produto de somas).
 - Escolheremos Mintermos .

Tabela Verdade					
L	A	B	C	F	Mintermos
0	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	
2	0	1	0	1	
3	0	1	1	1	
4	1	0	0	0	
5	1	0	1	0	
6	1	1	0	1	
7	1	1	1	0	

EXEMPLO: Mapa de Karnaugh a partir da Tabela Verdade

- Converter uma expressão booleana para um mapa:
 - Escrever a expressão em uma forma canônica:
 - Mintermos (soma de produtos) ou Maxitermos (produto de somas).
 - Escolheremos Mintermos .

Tabela Verdade					
L	A	B	C	F	Mintermos
0	0	0	0	0	$A'B'C'$
1	0	0	1	0	$A'B'C$
2	0	1	0	1	$A'BC'$
3	0	1	1	1	$A'BC$
4	1	0	0	0	$AB'C'$
5	1	0	1	0	$AB'C$
6	1	1	0	1	ABC'
7	1	1	1	0	ABC

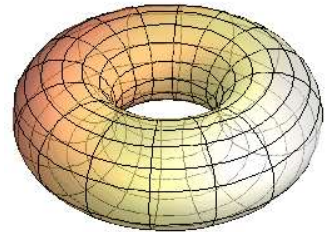
$$F(A,B,C) = A'BC' + A'BC + ABC'$$

		BC			
		00	01	11	10
A	0			1	1
	1				1

$$(b) F = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}$$

Simplificação de Funções Booleanas

- A partir do Mapa de Karnaugh é possível escrever uma expressão equivalente mais simples.
 - Quaisquer posições adjacentes diferem em apenas uma variável.
 - Podemos agrupar 2, 4, 8, ou até 16 posições adjacentes (potência de 2).
 - O conceito de adjacência inclui um giro em torno das extremidades do mapa.
 - Toróide.**
- Se duas posições adjacentes possuem valor 1:
 - Podemos combinar os dois termos, eliminando a variável que difere.



		BC			
		00	01	11	10
A	0			1	1
	1				1

(b) $F = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + ABC\bar{C}$

$\rightarrow A'BC' + A'BC = A'B$

$\rightarrow A'BC' + ABC' = BC'$

$F = A'BC' + A'BC + ABC' = A'B + BC'$

Simplificação de Funções Booleanas

- 2 posições adjacentes em um Mapa de Karnaugh

		CD			
		00	01	11	10
AB	00				
	01		1	1	
	11				
	10				

(a) $\bar{A}BD$

$F = A'BC'D + A'BCD$

		CD			
		00	01	11	10
AB	00		1		
	01				
	11				
	10		1		

(b) $\bar{B}\bar{C}D$

$F = A'B'C'D + AB'C'D$

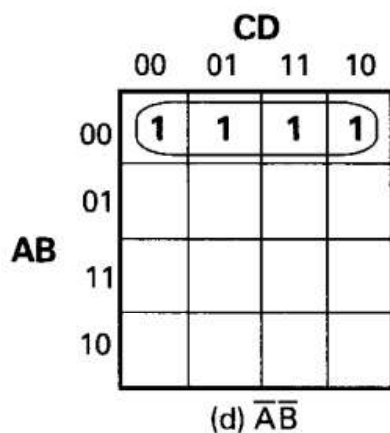
		CD			
		00	01	11	10
AB	00				
	01	1			1
	11				
	10				

(c) $\bar{A}B\bar{D}$

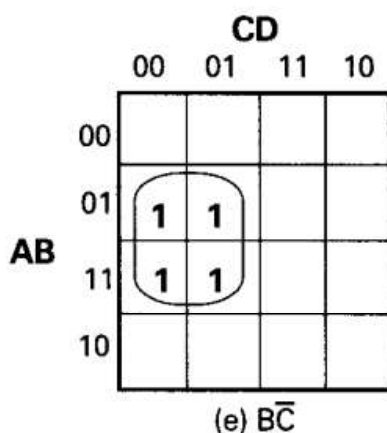
$F = A'BC'D' + A'BCD'$

Mapa de Karnaugh – Simplificação de Funções Booleanas

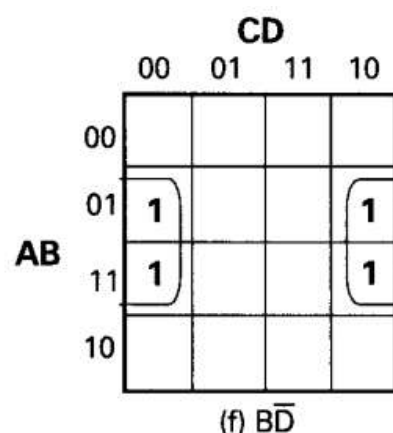
- 4 posições adjacentes em um Mapa de Karnaugh



$$F = A'B'C'D' + A'B'C'D + A'B'CD + A'B'CD'$$



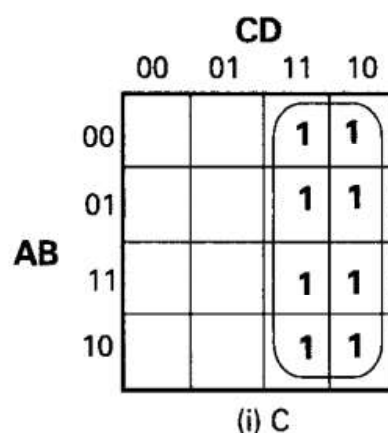
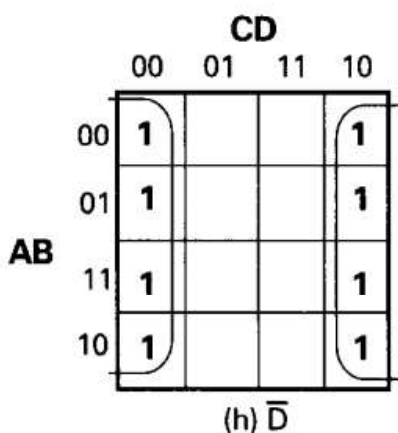
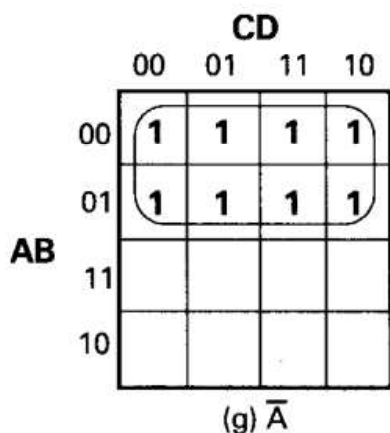
$$F = A'BC'D' + A'BC'D + ABC'D' + ABC'D$$



$$F = A'BC'D' + A'BC'D + ABC'D' + ABCD'$$

Simplificação de Funções Booleanas

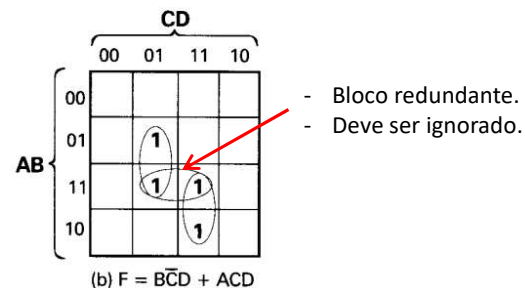
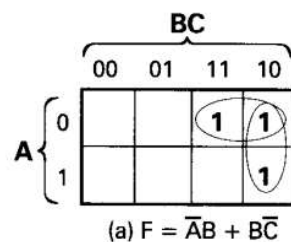
- 8 posições adjacentes em um Mapa de Karnaugh



Simplificação de Funções Booleanas

- As regras para a simplificação:
 - Selecione o maior bloco possível (com 1, 2, 4 ou 8 posições) composto exclusivamente por posições marcadas (valor 1).
 - Contorne esses blocos.
 - Continue selecionando blocos de posições marcadas, que sejam tão grandes quanto possível.
 - Contorne os blocos.
 - Até que todas as posições marcadas estejam incluídas em pelo menos 1 contorno.
 - O número de blocos contornados deve ser o menor possível.
 - Uma posição pode pertencer a mais de 1 contorno diferente.

Exemplos:



Simplificação de Funções Booleanas

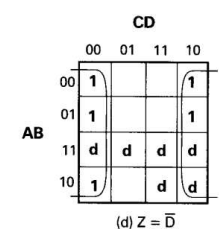
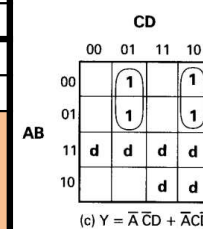
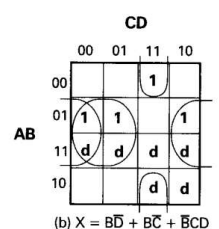
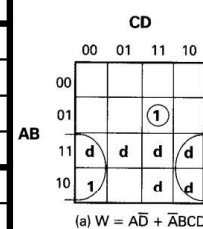
- Em alguns casos certas combinações de valores de variáveis nunca ocorrem.
 - Portanto nunca ocorre uma saída correspondente.
- São denominados casos “negligenciáveis”
 - Don't care*.
 - Utilizamos a letra “d” na posição correspondente.
- Para a simplificação, cada “d” pode ser tratado como 1 ou como 0.
 - Escolhemos o valor que resulta na expressão mais simples.

EXEMPLO: Incrementador BCD

- Gerar uma função booleana para um circuito que soma 1 a um número BCD. A operação é modulo 10 ($9+1 = 0$).
- Note que das possíveis entradas, 6 produzem resultado “negligenciáveis”
 - Não correspondem a dígito BCD valido. São marcados com “d”.

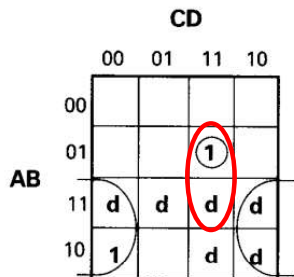
EXEMPLO: Incrementador BCD

Entrada						BCD(A,B,C,D)					F(A,B,C,D) = BCD(A,B,C,D) + 1				
L	A	B	C	D	Decimal	W	X	Y	Z	Decimal	W	X	Y	Z	Decimal
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	2
2	0	0	1	0	2	0	0	1	0	2	0	0	1	1	3
3	0	0	1	1	3	0	0	1	1	3	0	1	0	0	4
4	0	1	0	0	4	0	1	0	0	4	0	1	0	1	5
5	0	1	0	1	5	0	1	0	1	5	0	1	1	0	6
6	0	1	1	0	6	0	1	1	0	6	0	1	1	1	7
7	0	1	1	1	7	0	1	1	1	7	1	0	0	0	8
8	1	0	0	0	8	1	0	0	0	8	1	0	0	1	9
9	1	0	0	1	9	1	0	0	1	9	0	0	0	0	0
10	1	0	1	0	Casos Negligenciáveis	d	d	d	d	Casos Negligenciáveis	d	d	d	d	Casos Negligenciáveis
11	1	0	1	1		d	d	d	d		d	d	d	d	
12	1	1	0	0		d	d	d	d		d	d	d	d	
13	1	1	0	1		d	d	d	d		d	d	d	d	
14	1	1	1	0		d	d	d	d		d	d	d	d	
15	1	1	1	1		d	d	d	d		d	d	d	d	

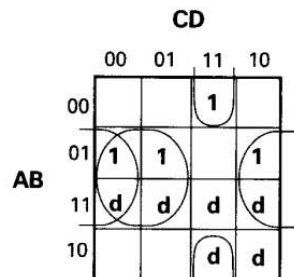


EXEMPLO: Incrementador BCD (Mapas de Karnaugh)

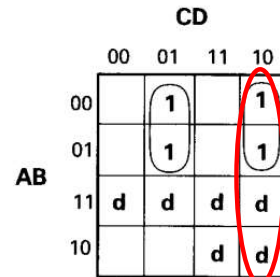
- Os blocos em vermelho mostram grupos que poderiam ser expandidos ainda mais escolhendo valores adequados para as posições com "d".
 - Resultando é uma simplificação maior das expressões.



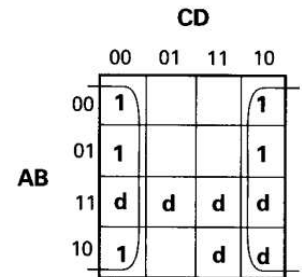
(a) $W = A\bar{D} + \bar{A}BCD$



(b) $X = B\bar{D} + B\bar{C} + \bar{B}CD$

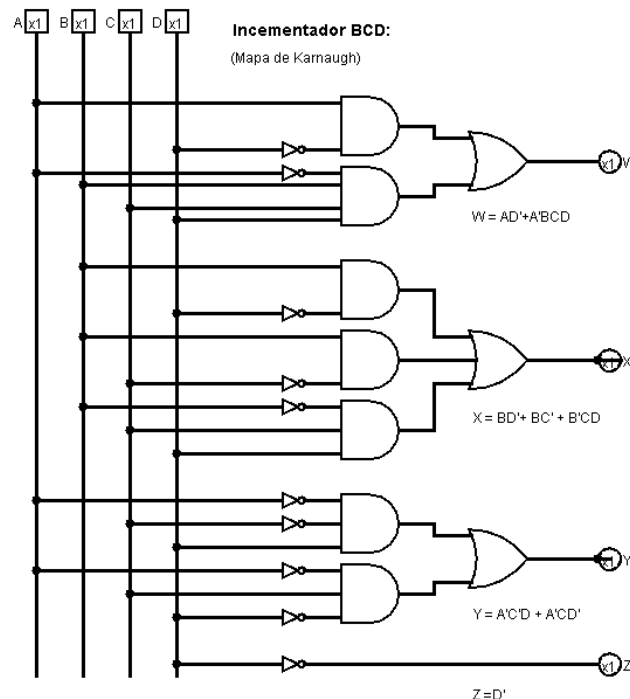


(c) $Y = \bar{A}\bar{C}D + \bar{A}C\bar{D}$



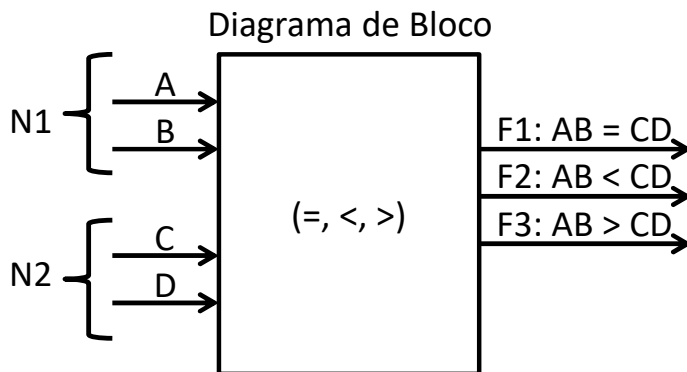
(d) $Z = \bar{D}$

EXEMPLO: Incrementador BCD



EXERCÍCIO: Comparador de 2 bits (Aula 03)

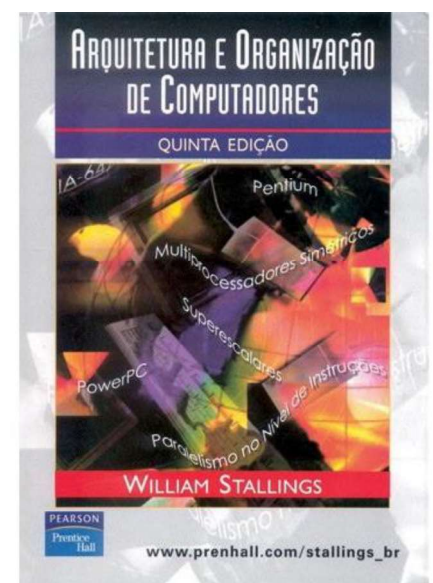
- Coloque as funções F1, F2 e F3 na forma padrão de mintermos (soma de produtos).
- Represente as funções F1, F2 e F3 utilizando Mapas de karnaugh.
- Simplifique as funções booleanas.
- Represente graficamente o circuito resultante.



L	A	B	C	D	F1	F2	F3	Mintermos
0	0	0	0	0	1	0	0	A'B'C'D'
1	0	0	0	1	0	1	0	A'B'C'D
2	0	0	1	0	0	1	0	A'B'CD'
3	0	0	1	1	0	1	0	A'B'CD
4	0	1	0	0	0	0	1	A'BC'D'
5	0	1	0	1	1	0	0	A'BC'D
6	0	1	1	0	0	1	0	A'BCD'
7	0	1	1	1	0	1	0	A'BCD
8	1	0	0	0	0	0	1	AB'C'D'
9	1	0	0	1	0	0	1	AB'C'D
10	1	0	1	0	1	0	0	AB'CD'
11	1	0	1	1	0	1	0	AB'CD
12	1	1	0	0	0	0	1	ABC'D'
13	1	1	0	1	0	0	1	ABC'D
14	1	1	1	0	0	0	1	ABCD'
15	1	1	1	1	1	0	0	ABCD

Referências

- STALLINGS, W. **Arquitetura e Organização de Computadores**, 5. Ed., Pearson, 2010.
– Apêndice A



FIM – Aula 05