

## Aplicações lineares

1. Averigue se são aplicações lineares as funções definidas por

- (a)  $\phi(x, y) = (x + 1, y, x + y)$ ; (b)  $\phi(x, y, z) = (x + y, y, x - z)$ ;  
 (c)  $\phi(x, y, z) = (x + y, 0, 2x - z)$ ; (d)  $\phi(x, y, z) = (x - y, x^2, 2z)$ ;  
 (e)  $\phi(at^2 + bt + c) = at + b + 1$ ; (f)  $\phi(at^2 + bt + c) = a + (t + 1)(bt + c)$ .

2. Seja  $\phi : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  definida por

$$\phi(A) = \begin{cases} A^{-1} & \text{se } A \text{ não é singular} \\ 0 & \text{se } A \text{ é singular} \end{cases}$$

para  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Averigue se  $\phi$  é uma aplicação linear.

3. Dada uma matriz  $A$   $n \times n$ , defina-se  $\phi : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  por  $\phi(B) = AB - BA$  para  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Averigue se  $\phi$  é uma aplicação linear.

4. Seja  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação linear, satisfazendo  $\phi(1, 1) = (2, -3)$  e  $\phi(0, 1) = (1, 2)$ . Determine

- (a)  $\phi(3, -2)$ ; (b)  $\phi(a, b)$ .

5. Seja  $\phi : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_3$  uma aplicação linear tal que  $\phi(1) = 1$ ,  $\phi(t) = t^2$  e  $\phi(t^2) = t^3 + t$ . Determine

- (a)  $\phi(2t^2 - 5t + 3)$ ; (b)  $\phi(at^2 + bt + c)$ .

## Matriz de uma aplicação linear

6. Seja  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma aplicação linear definida por

$$\phi(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x - y, 2y + z).$$

Seja  $\mathcal{C}$  a base canónica de  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$  uma base de  $\mathbb{R}^3$ . Determine a matriz representativa de  $\phi$  relativamente

- (a) à base  $\mathcal{C}$ ; (b) às bases  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{B}$ ; (c) às bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ ; (d) à base  $\mathcal{B}$ ;

e determine  $\phi(1, 1, -2)$  usando cada uma das matrizes obtidas em (a)–(d).

7. Seja  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma aplicação linear definida por

$$\phi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Sejam  $\mathcal{S} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$  e  $\mathcal{T} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$  bases de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , respetivamente.

- (a) Determine a matriz representativa de  $\phi$  relativamente às bases canónicas de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .  
 (b) Determine a matriz representativa de  $\phi$  relativamente às bases  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{T}$  i. diretamente e ii. usando matrizes de mudança de base.  
 (c) Determine  $\phi\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$ , usando cada uma das matrizes obtidas anteriormente.

8. Seja  $\phi : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$  uma aplicação linear definida por

$$\phi(at^2 + bt + c) = (a + 2c)t^2 + (b - c)t + (a - c)$$

e sejam  $\mathcal{S} = (t^2, t, 1)$  e  $\mathcal{T} = (t^2 - 1, t, t - 1)$  bases de  $\mathcal{P}_2$ .

(a) Encontre a matriz representativa de  $\phi$  relativamente às bases  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{T}$ .

(b) Determine  $\phi(2t^2 - 3t + 1)$  usando a alínea anterior.

9. Dada a matriz  $C$   $n \times n$ , considere-se  $\phi : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  definida por  $\phi(A) = CA$  para  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

(a) Mostre que  $\phi$  é uma aplicação linear.

(b) Considerando  $n = 2$ , sejam  $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{S} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$  uma base de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  e  $\mathcal{C}$  a base canónica de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Determine a matriz representativa de  $\phi$  relativamente

i. à base  $\mathcal{C}$ ;      ii. às bases  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{S}$ ;      iii. às bases  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{C}$ ;      iv. à base  $\mathcal{S}$ .

10. Sejam  $X_1 = t + 1$ ,  $X_2 = t - 1$ ,  $Y_1 = t^2 + 1$ ,  $Y_2 = t$ ,  $Y_3 = t - 1$  e  $\phi : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$  a aplicação linear tal que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

é a matriz que representa  $\phi$  relativamente às bases  $\mathcal{S} = (X_1, X_2)$  e  $\mathcal{T} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ . Determine

- (a) os vetores das coordenadas de  $\phi(X_1)$  e  $\phi(X_2)$  na base  $\mathcal{T}$ ;      (b)  $\phi(X_1)$  e  $\phi(X_2)$ ;  
(c)  $\phi(2t + 1)$ ;      (d)  $\phi(at + b)$ .

11. Determine a matriz representativa da aplicação linear  $\phi : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$  definida por  $\phi(p(t)) = p''(t) + p(0)$  relativamente à

(a) base canónica de  $\mathcal{P}_3$ ;

(b) base  $\mathcal{T} = (t^3, t^2 - 1, t, 1)$  de  $\mathcal{P}_3$ , diretamente e usando matrizes de mudança de base.

12. Se  $\text{id}_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  é a aplicação identidade definida por  $\text{id}_{\mathcal{V}}(X) = X$  para qualquer  $X \in \mathcal{V}$ , mostre que a matriz de  $\text{id}_{\mathcal{V}}$  relativamente a qualquer base de  $\mathcal{V}$  é a matriz identidade  $I_n$  com  $n = \dim \mathcal{V}$ .

## Núcleo e imagem de uma aplicação linear

13. Seja  $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma aplicação linear definida por  $\phi(x, y, z, w) = (x + y, z + w, x + z)$ .

(a) Determine o núcleo e a imagem de  $\phi$ .

(b) Encontre uma base para o núcleo e uma base para a imagem de  $\phi$ .

(c) Averigue se  $\phi$  é injetiva e/ou sobrejetiva.

(d) Verifique o Teorema das Dimensões.

14. Seja  $\phi : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$  uma aplicação linear definida por  $\phi(at^2 + bt + c) = (a + c)t^2 + (b + c)t$ .

(a) Verifique se os elementos  $t^2 - t - 1$  e  $t^2 + t - 1$  pertencem a  $\ker(\phi)$ .

(b) Verifique se os elementos  $2t^2 - t$  e  $t^2 - t + 2$  pertencem a  $\text{im}(\phi)$ .

(c) Determine uma base para  $\ker(\phi)$  e uma base para  $\text{im}(\phi)$ .

(d) Diga, justificando, se  $\phi$  é injetiva e/ou sobrejetiva.

15. Encontre uma base para o núcleo e uma base para a imagem da aplicação linear  $\phi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  definida por

$$(a) \quad \phi \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a - b & b - c \\ a - d & b - d \end{bmatrix}; \quad (b) \quad \phi(A) = A^T.$$

16. Considere a aplicação linear  $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\phi(X) = AX$ , sendo  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

- (a) Verifique que a matriz de  $\phi$  relativamente às bases canônicas de  $\mathbb{R}^4$  e  $\mathbb{R}^2$  é a matriz  $A$ .
- (b) Sem determinar o núcleo de  $\phi$ , verifique que  $\dim \ker(\phi) \geq 2$ .
- (c) Sejam  $\mathcal{S} = ((1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1))$  e  $\mathcal{T} = ((1, 1), (1, -1))$  bases de  $\mathbb{R}^4$  e  $\mathbb{R}^2$ , respectivamente. Determine a matriz de  $\phi$  relativamente

i. à base  $\mathcal{S}$  e à base canônica  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^2$ ;

ii. às bases  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{T}$ ,

17. Seja  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma aplicação linear representada relativamente à base canônica de  $\mathbb{R}^3$  pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine  $\phi(1, 2, 3)$  e  $\phi(x, y, z)$  para  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- (b) Averigue se  $\phi$  é um isomorfismo.
- (c) Determine a imagem de  $\phi$  e uma sua base, o núcleo de  $\phi$  e uma sua base.
- (d) Determine a matriz de  $\phi$  relativamente à base  $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 0))$

i. por definição;

ii. usando matrizes de mudança de base.

18. Seja  $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$  e considere a transformação linear  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\phi(1, 1, 1) = (-1, 1),$$

$$\phi(1, 1, 0) = (1, 1),$$

$$\phi(1, 0, 0) = (0, 2).$$

- (a) Determine a matriz de  $\phi$  relativamente à base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  e à base canônica  $\mathbb{R}^2$ .
- (b) Calcule  $\phi(X)$  sabendo que  $[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ .
- (c) Determine a matriz de  $\phi$  relativamente às bases canônicas de  $\mathbb{R}^3$  e de  $\mathbb{R}^2$ .
- (d) Determine  $\phi(x, y, z)$  para um elemento genérico  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$ .
- (e) Determine o núcleo de  $\phi$  e indique uma base para este subespaço de  $\mathbb{R}^3$ .
- (f) Diga, justificando, se  $\phi$  é injetiva.
- (g) Sem determinar a imagem de  $\phi$ , diga qual a dimensão deste subespaço, usando i. a característica de uma das matrizes representativas de  $\phi$  e ii. o Teorema das Dimensões.
- (h) Usando a dimensão da imagem de  $\phi$  como justificção, diga se  $\phi$  é sobrejetiva.
- (i) Determine a imagem de  $\phi$ , assim como uma base para este subespaço de  $\mathbb{R}^2$  a partir i. da matriz calculada em (c) e ii. da imagem do elemento genérico  $\phi(x, y, z)$  calculada em (d).

19. Considere a aplicação linear  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $\phi(1, 1) = (3, 0, 2)$  e  $\phi(1, -1) = (1, 0, 2)$ .

- (a) Determine  $\phi(x, y)$  para um elemento genérico  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ .
- (b) Determine uma base para a imagem de  $\phi$ . Diga, justificando, se  $\phi$  é sobrejetiva.
- (c) Sem determinar o núcleo de  $\phi$ , indique a sua dimensão. Diga, justificando, se  $\phi$  é injetiva.
- (d) Determine a matriz que representa  $\phi$  relativamente às bases

$$\mathcal{S} = ((1, 1), (1, -1)) \quad \text{e} \quad \mathcal{T} = ((0, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)).$$

- (e) Calcule  $[X]_{\mathcal{S}}$  sabendo que  $[\phi(X)]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

20. Considere a transformação linear  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

relativamente à base canônica de  $\mathbb{R}^3$ .

- (a) Indique qual é o transformado  $\phi(x, y, z)$  de um elemento genérico  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Determine a imagem de  $\phi$  e uma base para este subespaço e indique a sua dimensão.
- (c) Diga, justificando, se  $\phi$  é sobrejetiva.
- (d) Sem calcular o núcleo de  $\phi$ , indique, justificando, a sua dimensão e averigue se  $\phi$  é injetiva.
- (e) Calcule a matriz de  $\phi$  relativamente à base  $\mathcal{B} = ((1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ .

(f) Sabendo que  $[Y]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,

i. verifique que  $Y \in \text{im}(\phi)$ ;

ii. determine o vetor de coordenadas na base  $\mathcal{B}$  de  $X$ ,  $[X]_{\mathcal{B}}$ , sendo  $X$  um vetor tal que  $\phi(X) = Y$ .

21. Seja  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial real de dimensão  $n$  e  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma base de  $\mathcal{V}$ . Seja  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{V}$  definida por

$$\phi(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n.$$

Mostre que  $\phi$  é um isomorfismo.

22. Seja  $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^6$  uma aplicação linear.

- (a) Se  $\dim \ker(\phi) = 2$ , qual é a dimensão de  $\text{im}(\phi)$ ?
- (b) Se  $\dim \text{im}(\phi) = 3$ , qual é a dimensão de  $\ker(\phi)$ ?

23. Seja  $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^5$  uma aplicação linear.

- (a) Se  $\phi$  é sobrejetiva e  $\dim \ker(\phi) = 2$ , qual é a dimensão de  $\mathcal{V}$ ?
- (b) Se  $\phi$  é bijetiva, qual é a dimensão de  $\mathcal{V}$ ?

24. Seja  $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  uma aplicação linear. Mostre que

- (a)  $\dim \text{im}(\phi) \leq \dim \mathcal{V}$ ;
- (b) se  $\phi$  é sobrejetiva, então  $\dim \mathcal{W} \leq \dim \mathcal{V}$ .

25. Considere  $\phi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação linear definida por  $\phi_A(X) = AX$ , onde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

- (a) Mostre que  $\phi_A$  é injetiva se e só se  $\det(A) \neq 0$ .
- (b) Verifique que  $A$  é diagonalizável com vetores próprios linearmente independentes  $X_1, \dots, X_n$  se e só se a matriz representativa de  $\phi_A$  relativamente à base  $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$  é diagonal.
- (c) Se  $A$  é uma matriz ortogonal, mostre que  $\phi_A(X) \cdot \phi_A(Y) = X \cdot Y$ , para todo  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ .
- (d) Um subespaço  $\mathcal{W}$  de  $\mathbb{R}^n$  diz-se  $\phi_A$ -invariante se  $\phi_A(X) \in \mathcal{W}$ , para todo  $X \in \mathcal{W}$ . Mostre que
  - i. o subespaço próprio de  $A$  associado a um valor próprio  $\lambda$  é  $\phi_A$ -invariante;
  - ii. o núcleo e a imagem de  $\phi_A$  são subespaços  $\phi_A$ -invariantes.
- (e) Considerando  $n = 3$  e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

determine uma matriz diagonal  $D$  representativa da aplicação linear  $\phi_A$  relativamente a uma base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$ , indicando essa base.

1. (a) Não; (b) sim; (c) sim; (d) não; (e) não; (f) sim.

2. Não.

3. Sim.

4. (a)  $(1, -19)$ ; (b)  $(a + b, -5a + 2b)$ .

5. (a)  $3 + 2t - 5t^2 + 2t^3$ ; (b)  $c + at + bt^2 + at^3$ .

6. (a)  $M(\phi, \mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ; (b)  $M(\phi, \mathcal{C}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ; (c)  $M(\phi, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ;  $M(\phi, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .  $\phi(1, 1, -2) = (1, 1, 0)$

7. (a)  $M(\phi, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ; (b)  $M(\phi, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 2/3 \\ -1 & 4/3 \end{bmatrix}$ ; (c)  $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$ .

8. (a)  $M(\phi, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ . (b)  $4t^2 - 4t + 1$ .

9. (b) i.  $M(\phi, \mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ; ii.  $M(\phi, \mathcal{C}, \mathcal{S}) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ ; iii.  $M(\phi, \mathcal{S}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ ;  
iv.  $M(\phi, \mathcal{S}, \mathcal{S}) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

10. (a)  $[\phi(X_1)]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $[\phi(X_2)]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ; (b)  $\phi(X_1) = t^2 + t + 2$ ,  $\phi(X_2) = -t + 2$ ; (c)  $\frac{3}{2}t^2 + t + 4$ ;  
(d)  $(\frac{a+b}{2})t^2 + bt + 2a$ .

11. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ; (b)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

13. (a)  $\ker(\phi) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = -y = -z = t\}$  e  $\text{im}(\phi) = \mathbb{R}^3$ . (b) Por exemplo,  $\{(1, -1, -1, 1)\}$  é uma base de  $\ker(\phi)$  e  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  é uma base de  $\text{im}(\phi)$ . (c)  $\phi$  não é injetiva e é sobrejetiva.

14. (a) O primeiro elemento não pertence e o segundo pertence. (b) O primeiro elemento pertence e o segundo não pertence. (c) Por exemplo,  $\{t^2 + t - 1\}$  é uma base de  $\ker(\phi)$  e  $\{t^2, t\}$  é uma base de  $\text{im}(\phi)$ . (d)  $\phi$  não é injetiva nem sobrejetiva.

15. (a)  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$  é uma base de  $\ker(\phi)$  e  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$  é uma base da  $\text{im}(\phi)$ . (b) O conjunto vazio é base de  $\ker(\phi)$  e a base canónica de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  é uma base da  $\text{im}(\phi)$ .

16. (c) i.  $M(\phi, \mathcal{S}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ; ii.  $M(\phi, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 7 & 7 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ .

17. (a)  $\phi(1, 2, 3) = (9, 7, 16)$  e  $\phi(x, y, z) = (x+y+2z, 2x+y+z, 3x+2y+3z)$ . (b) Não. (c)  $\text{im}(\phi) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b - c = 0\}$  e  $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$  é uma sua base;  $\ker(\phi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \text{ e } y = -3z\}$  e  $\{(1, -3, 1)\}$  é uma sua base. (d)  $\begin{bmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 5 & 8 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ .
18. (a)  $M(\phi, \mathcal{B}, \mathcal{C}_2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ . (b)  $\phi(X) = (1, 9)$ . (c)  $M(\phi, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ . (d)  $\phi(x, y, z) = (y - 2z, 2x - y)$ . (e)  $\ker(\phi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \text{ e } y = 2z\}$  e  $\{(1, 2, 1)\}$  é uma sua base. (f)  $\phi$  não é injetiva. (g) 2. (h)  $\phi$  é sobrejetiva. (i)  $\text{im}(\phi) = \mathbb{R}^2$ .
19. (a)  $\phi(x, y) = (2x + y, 0, 2x)$ . (b)  $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$  é uma base para  $\text{im}(\phi)$  e  $\phi$  não é sobrejetiva. (c)  $\dim \ker(\phi) = 0$  e  $\phi$  é injetiva. (d)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ . (e)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ .
20. (a)  $\phi(x, y, z) = (x + 2y + z, 3y + z, x - y)$ . (b)  $\text{im}(\phi) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a - b - c = 0\}$ ,  $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$  é uma base para  $\text{im}(\phi)$  e  $\dim \text{im}(\phi) = 2$ . (c)  $\phi$  não é sobrejetiva. (d)  $\dim \ker(\phi) = 1$  e  $\phi$  não é injetiva. (e)  $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ . (f) ii. Por exemplo,  $[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$ .
22. (a) 2; (b) 1.
23. (a) 7; (b) 5.
25. (e)  $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$  é a matriz representativa de  $\phi$  em relação à base  $\mathcal{B} = \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ .