6ª e 7ª aula

Extremos absolutos de funções contínuas

Wikilet: 1.4 Continuidade (complemento)

Lema.
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a) < 0 < f(b)$. Então,

f possui um zero em $]a, b[$.

Demonstração

$$a \in X = \{x \in [a,b] \mid f(x) < 0\} \neq \emptyset,$$

b é majorante de X. $c = \sup(X)$, $c \in [a, b]$.

1) $f(c) < 0 \Rightarrow c < b$, $\exists_{\varepsilon > 0} \forall_{x \in]c, c+\varepsilon[\subset [a,b]} \ f(x) < 0$

$\Rightarrow c$ não é majorante de X. Contradição

2) $f(c) > 0 \Rightarrow c > a$, $\exists_{\varepsilon > 0} \forall_{x \in]c-\varepsilon, c[\subset [a,b]} \ f(x) > 0$

$\Rightarrow c$ não é o menor dos majorantes de X. Contradição

$\therefore f(c) = 0$, com $c \in]a, b[$ $\square$

Teorema dos valores intermédios (ou de Bolzano-Cauchy)

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então f não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios.

Demonstração $f(a) < k < f(b)$, $g(x) = f(x) - k$,

aplicar o Lema $\square$

Nota: no caso de funções contínuas injetivas, o Teorema da Inversão garante que intervalos limitados e fechados são transformados em intervalos limitados e fechados; o Teorema seguinte (de Weierstrass) garante este resultado mesmo na ausência da injetividade.

não dar

explicar...

Teorema de Fermat. Se $f(c)$ é um extremo local de uma função f cuja derivada existe no ponto interior c do domínio de f, então $f'(c)=0$.

$\exists\ ]a,b[\ \subset D_f \quad c\in\ ]a,b[$

c diz-se ponto crítico ou de estacionaridade de f

Demonstração. $f(c)$ máximo local:

$$x\in\ ]c-\varepsilon,c[\ \Rightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0\ ;$$

$$x\in\ ]c,c+\varepsilon[\ \Rightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0\ .$$

Donde, $f'(c)=f'_e(c)\geq 0\geq f'_d(c)=f'(c)\Rightarrow f'(c)=0$ $\square$

Teorema de Weierstrass. Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua, então o contradomínio de f é um intervalo limitado e fechado (isto é, $f([a,b])=[c,d]$).

Estes dois últimos teoremas conjugados mostram que, no caso de $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, os extremos absolutos (que existem, pelo Teorema de Weierstrass) ocorrem ou nos extremos do intervalo, ou nos pontos críticos de f ou nos pontos de $]a,b[$ onde não haja derivada.

mostrar antes $\boxed{\text{algoritmo}}$ no wikiciet

TP4-6 28/10/2021

Exemplo/Exercício. $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, com $x \in [-1,1]$.

aplicar o algoritmo

Exercícios II 1. Determina os extremos absolutos das seguintes funções contínuas nos intervalos indicados. Depois indica também os respectivos contradomínios.

(a) $f(x) = x^3 + 2x + 1$ em $[-2,1]$

(b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ em $[-1, \frac{1}{2}]$

(c) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ em $[-1,1]$

(d) $f(x) = x - 2\arctan x$ em $[0,4]$

2. Demonstra o Teorema de Rolle usando o Teorema de Weierstrass e o Teorema de Fermat.

refazer alínea (b) do exercício 1 de 2017/2018

Primitiva de uma função

2.1 Primitivas - parte 1

$f: D \to \mathbb{R}$, com D aberto (formado apenas por pontos interiores).

Chama-se (função) primitiva de f a qualquer função $F: D \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$, $\forall_{x \in D}$, caso exista.

No caso de existência de uma primitiva de f, diz-se que f é primitivável.

Diremos também que f é primitivável em A (subconjunto aberto de D) com o significado de $f|_A$ ser primitivável e diremos que uma primitiva de $f|_A$ é uma primitiva de f em A.

<u>Teorema</u>. Se F é uma primitiva de f em $]a, b[$, $\{(F+c) : c \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto de todas as primitivas de f em $]a, b[$.

explicar

$(F+c)(x) := F(x) + c$

<u>Demonstração</u>.

Critério da monotonia

$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, $\forall_{x \in]a,b[}$ $\Longrightarrow$ $G(x) - F(x) = c$, $\forall_{x \in]a,b[}$

Exercício. Determina o conjunto das primitivas de $f:]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]1,\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x)=0$.

Notação: usam-se os símbolos

$$Pf \quad \text{ou} \quad \int f(x)\,dx$$

notação diferencial de primitiva

para designar o conjunto de todas as primitivas ou a expressão geral das primitivas de f em subintervalos abertos do seu domínio

Exemplo / Exercício: $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$.

Exercícios

$$\boxed{P(\alpha f+\beta g) = \alpha Pf+\beta Pg}$$

1. Mostra a validade do método de primitivação por decomposição: se f e g forem primitiváveis em $]a,b[$ então $f+g$ também é primitivável em $]a,b[$ e

soma de conjuntos?

$$P(f+g) = Pf + Pg \quad \text{em }]a,b[$$

$$= F+G+c, \quad c\in\mathbb{R}$$

2. Mostra que se F é uma primitiva de f em $]a,b[$, λ é uma constante dada e c é uma constante arbitrária, então $\lambda F + c$ é a expressão geral das primitivas de λf em $]a,b[$.

Primitivas imediatas

Chamam-se primitivas imediatas às funções cujas derivadas são funções elementares básicas conhecidas.

Exemplo/Exercício. $\frac{x^4}{4}$ é uma primitiva imediata de x^3.

Em subintervalos abertos do domínio de cada função:

→ tabela de primitivas imediatas no moodle!

$\boxed{\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c}$ explicar:

$x \in \mathbb{R}^-$, $(\ln(-x))' = \frac{1}{x}$

Exercícios Calcula:

(a) $\int (5x^3 + 2\cos x)\, dx$; (b) $\int \left(8t^3 - 6\sqrt{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt$;

(c) $\int \frac{(x^2-1)^2}{x^2}\, dx$; (d) $\int \frac{1}{\cos x \cot x}\, dx$; (e) $\int \left(\sqrt{3}\sin x + \frac{1}{2x}\right) dx$.

$\sin x \cos^{-2} x$

Primitivas quase imediatas

Se $F'(u) = f(u)$ então, pela regra da cadeia,

$$F(\varphi(x))' = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

donde

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = F(\varphi(x)) + c.$$

Dum modo informal,

$$\varphi'(x)\, dx = \frac{d\varphi(x)}{dx}\, dx = d\varphi(x),$$

$$\int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = \int f(\varphi(x))\, d\varphi(x) =$$

$$= \int f(u)\, du, \quad \text{fazendo } u = \varphi(x)$$

$u = \varphi(x)$

$du = \varphi'(x)\, dx$

$$= F(u) + c$$

$$= F(\varphi(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemplo / Exercício: $\int (\sin x)^3 \cos x \, dx$

Exercícios. 1. Calcula (a) $\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx$ (b) $\int \sqrt{\sin x}\, \cos x\, dx$

(c) $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\, dx$ (d) $\int 2x\, e^{x^2}\, dx$ (e) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx$

$(\sqrt{x})^2$

2. Calcula $\int \cos^3 x\, dx$.

Nota: $\cos^3 x = (1 - \sin^2 x) \cos x$.