



1. Calcule os seguintes determinantes:

$$(a) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}; \quad (d) \begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}; \quad (e) \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

## Propriedades dos determinantes

2. Mostre que se  $c$  é um número real e  $A$  é uma matriz do tipo  $n \times n$ , então  $\det(cA) = c^n \det(A)$ .

3. Se  $A$  e  $B$  são matrizes  $5 \times 5$  tais que  $|A| = 3$  e  $|B| = -5$ , determine, justificando, os seguintes determinantes:

$$(a) |A^T|; \quad (b) |AB|; \quad (c) |A^4|; \quad (d) |B^{-1}|; \quad (e) |2A|; \quad (f) |2A^{-1}|; \quad (g) |(2A)^{-1}|; \\ (h) \left| \left( (2A)^{-1} \right)^T \right|; \quad (i) |AB^{-1}A^T|.$$

4. Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $5 \times 5$ , com  $B$  invertível. Sabendo que  $\det(AB) = 24$  e  $\det(B^{-1}) = 4$ , calcule  $\det(A)$ .

5. Sabendo que  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 7$ , determine, justificando, o valor dos seguintes determinantes:

$$(a) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 4c_1 & 4c_2 & 4c_3 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} a_1 - 5c_1 & a_2 - 5c_2 & a_3 - 5c_3 \\ 10b_1 & 10b_2 & 10b_3 \\ -4c_1 & -4c_2 & -4c_3 \end{vmatrix}.$$

6. Sem calcular explicitamente os determinantes, mostre que:

$$(a) \begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0; \\ (b) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \\ (c) \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

7. Utilizando apenas propriedades dos determinantes, calcule:

$$(a) \begin{vmatrix} a_1+2b_1 & a_2+2b_2 & a_3+2b_3 \\ 3c_1+b_1 & 3c_2+b_2 & 3c_3+b_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \end{vmatrix}, \text{ sabendo que } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1; \\ (b) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ sabendo que } \begin{vmatrix} 2a_1 & a_2+a_3 & -a_3 \\ 2c_1 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 2b_1 & b_2+b_3 & -b_3 \end{vmatrix} = 10; \\ (c) \begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 & 4c_1+a_1 \\ a_2 & 2b_2 & 4c_2+a_2 \\ a_3 & 2b_3 & 4c_3+a_3 \end{vmatrix}, \text{ sabendo que } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2; \\ (d) \begin{vmatrix} a_1+a_2 & a_3 & 2a_3+5a_1 \\ b_1+b_2 & b_3 & 2b_3+5b_1 \\ c_1+c_2 & c_3 & 2c_3+5c_1 \end{vmatrix}, \text{ sabendo que } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 1.$$

**Teorema de Laplace**

8. Calcule os determinantes seguintes usando o Teorema de Laplace:

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 7 & 5 & -6 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 8 \\ 6 & 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}; \quad (d) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 2 \end{vmatrix}; \quad (e) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Matrizes invertíveis, matriz adjunta e matriz inversa**

9. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 8 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ .

- (a) Determine a matriz adjunta de  $A$ ,  $\text{adj } A$ .
- (b) Calcule o determinante de  $A$ .
- (c) Mostre que  $A(\text{adj } A) = \det(A) I_3$ .
- (d) Calcule a matriz inversa de  $A$ .

10. Calcule a adjunta da matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  e efetue o produto  $A(\text{adj } A)$ . Sem efetuar mais cálculos indique o valor do determinante de  $A$ .

11. Calcule, caso exista, a inversa das seguintes matrizes:

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad (d) \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

12. Verifique que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível e calcule o elemento (1, 2) da inversa de  $A$ .

13. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

- (a) Calcule o determinante de  $A$ .
- (b) Calcule o elemento (2, 3) da adjunta de  $A$  e o elemento (2, 3) da inversa de  $A$ .

14. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcule o elemento (4, 1) da inversa de  $A$ ,  $A^{-1}$ , sem determinar a matriz  $A^{-1}$ .

15. Determine todos os valores de  $\alpha$  para os quais a matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha - 4 & 0 & 10 \\ 4 & \alpha + 5 & 1 \\ 2 & 0 & \alpha - 3 \end{bmatrix}$$

é singular.

16. Se

$$A = \begin{bmatrix} \beta & 6 & 1 \\ 0 & \beta - 1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta + 5 \end{bmatrix},$$

determine todos os valores de  $\beta$  para os quais o sistema homogêneo  $AX = 0$  apenas admite a solução trivial.

### Regra de Cramer

17. Diga em que condições se pode usar a Regra de Cramer para resolver um sistema de equações lineares.

18. Se possível, resolva os seguintes sistemas de equações lineares, usando a Regra de Cramer:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 4x + 2y - 4z = 6 \\ 3x + 2y - z = -1 \end{cases} & \text{(b)} \quad \begin{cases} 4x - 3z = -2 \\ 2x - y = -2 \\ x - 3y + z = 4 \end{cases} \\ \text{(c)} \quad \begin{cases} -2x - y + z = -3 \\ 2x + 4y - 2z = 8 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases} & \text{(d)} \quad \begin{cases} x + 3y + 2z + w = 0 \\ 2y + z + 3w = 4 \\ 2x + y - z + 2w = 5 \\ 3x - z + 3w = 9 \end{cases} \end{array}$$

### Exercícios de aplicação das propriedades dos determinantes

19. Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  e  $B$  e  $C$  matrizes tais que  $AB = AC$ .

Mostre que se  $\det(A) \neq 0$ , então  $B = C$ . Mostre ainda através de um exemplo não trivial que esta conclusão pode não ser válida se  $\det(A) = 0$ .

20. Mostre que:

- (a) Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , então  $\det(AA^T) \geq 0$ ;
- (b) Se  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas e  $AB = I_n$ , então  $\det(A) \neq 0$  e  $\det(B) \neq 0$ ;
- (c) Sendo  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times n$ , se  $A$  é singular, então  $AB$  também é uma matriz singular;
- (d) Se  $A$  é uma matriz não singular tal que  $A^2 = A$ , então  $\det(A) = 1$ ;
- (e) Se  $A = A^{-1}$ , então  $\det(A) = \pm 1$ ;
- (f) Se  $A$  é uma matriz quadrada de ordem 3 invertível, então  $\det(\text{adj } A) = \det(A^2)$ .

21. Diga, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa.

- (a)  $\det(AA^T) = \det(A^2)$ ;
- (b)  $\det(-A) = -\det(A)$ ;
- (c) Se  $A^T = A^{-1}$ , então  $\det(A) = 1$ ;
- (d) Se  $\det(A) = 0$ , então  $A = O$ ;
- (e) Se  $\det(A) = 7$ , então o sistema  $AX = 0$  tem apenas a solução trivial;
- (f) Se  $A^4 = I_n$ , então  $\det(A) = 1$ ;
- (g) Se  $A^2 = A$  e  $A \neq I_n$ , então  $\det(A) = 0$ ;
- (h) Se  $\det(AB) = 0$ , então  $\det(A) = 0$  ou  $\det(B) = 0$ ;
- (i) Se  $AB \neq BA$  então  $\det(AB) \neq \det(BA)$ ;

22. Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  com determinante não nulo. Mostre que  $\det(\text{adj } A) = (\det(A))^{n-1}$ .

1. (a) 1; (b) -3; (c) 1; (d) -43; (e) 3.
3. (a) 3; (b) -15; (c) 81; (d)  $-\frac{1}{5}$ ; (e) 96; (f)  $\frac{32}{3}$ ; (g)  $\frac{1}{96}$ ; (h)  $\frac{2}{3}$ ; (i)  $-\frac{9}{5}$ .
3.  $\frac{16}{3}$ .
4. 96.
5. (a) 28; (b) -7; (c) -280.
7. (a) 3; (b) 5; (c) 16; (d) 5.
8. (a) -13; (b) 37; (c) 1496; (d) -8; (e) 0.
9. (a)  $\begin{bmatrix} -14 & -2 & -11 \\ -32 & 14 & 12 \\ -40 & 50 & 15 \end{bmatrix}$ ; (b) -130; (d)  $\begin{bmatrix} \frac{7}{65} & \frac{1}{65} & \frac{11}{130} \\ \frac{16}{65} & -\frac{7}{65} & -\frac{6}{65} \\ \frac{4}{13} & -\frac{5}{13} & -\frac{3}{26} \end{bmatrix}$ .
10.  $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ;  $A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ;  $\det(A) = -2$ .
11. (a)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{15} & -\frac{11}{60} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ ; (b)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ ; (c)  $\begin{bmatrix} 3 & -\frac{39}{17} & 2 & -\frac{16}{17} \\ 0 & \frac{2}{17} & 0 & \frac{3}{17} \\ -1 & \frac{21}{17} & -1 & \frac{6}{17} \\ 0 & \frac{5}{17} & 0 & -\frac{1}{17} \end{bmatrix}$ ; (d)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix}$ .
12. O elemento  $(1, 2)$  de  $A^{-1}$  é 1.
13. (a) 2; (b) o elemento  $(2, 3)$  de  $\text{adj } A$  é 2 e o elemento  $(2, 3)$  de  $A^{-1}$  é 1
14. O elemento  $(4, 1)$  de  $A^{-1}$  é -1.
15.  $\alpha \in \{-5, -1, 8\}$ .
16.  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-2 - \sqrt{10}, 0, -2 + \sqrt{10}\}$ .
17. Se a matriz dos coeficiente do sistema é quadrada e tem determinante não nulo.
18. (a)  $x = -2, y = 1, z = -3$ ; (b)  $x = -\frac{28}{11}, y = -\frac{34}{11}, z = -\frac{30}{11}$ ; (c)  $x = -2, y = -1, z = -8$ ; (d)  $x = 1, y = -1, z = 0, w = 2$ .
19. Se  $\det(A) \neq 0$ , então  $A$  é invertível e  $AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow B = C$ .
21. (a) Verdadeira; (b) falsa; (c) falsa; (d) falsa; (e) verdadeira; (f) falsa; (g) verdadeira; (h) verdadeira; (i) falsa;