Definição de seno hiperbólico e cosseno hiperbólico

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercícios. 1. Verifica que:

1. tal como sin, sinh é uma função ímpar;
2. tal como cos, cosh é uma função par;
3. em vez da fórmula $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ($x^2 + y^2 = 1$ círculo) é válida a fórmula $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$;

ramo direito de $x^2 - y^2 = 1$ hipérbole

$(\sinh x)'' = (\cosh x)' = \sinh x$ quadros de variações:

x	
$f(x)$	
$f'(x)$	
$f''(x)$	

2. Esboça o gráfico de sinh e cosh com base no conhecimento do gráfico da exponencial, verificando que, contrariamente a sin e cos, sinh e cosh não são periódicas. • Comparar com o resultado dado pelo software

3. Usa a "Álgebra das funções contínuas" para provares que sinh e cosh são funções contínuas $\mathbb{R} \xrightarrow{-(\,)} \mathbb{R} \xrightarrow{\exp} \mathbb{R} \xrightarrow{\frac{1}{(\,)}}$

Álgebra das funções contínuas ⇝ projetar do wxMaxima

1. As funções constantes e a função identidade são contínuas
2. Se f e g forem contínuas num ponto a comum aos seus domínios, então $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ e f/g (neste último caso supondo também que $g(a) \neq 0$) são também contínuas em a.
3. Se $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ e $h : B \to \mathbb{R}$ forem contínuas, respectivamente em $a \in A$ e em $f(a) \in B$, então a função composta $h \circ f$ é também contínua em a.

Aulas 4, 5   1.2 Universo das funções (complemento)

X (nome de 8)

Funções trigonométricas inversas

$x > \sin x \ \forall_{x>0}$

$\Uparrow$

$\forall_{x \in]0, \frac{\pi}{2}[} \ (x - \sin x)' = 1 - \cos x > 0$

Função arco seno

É a inversa da restrição principal $\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]}$ da função seno.

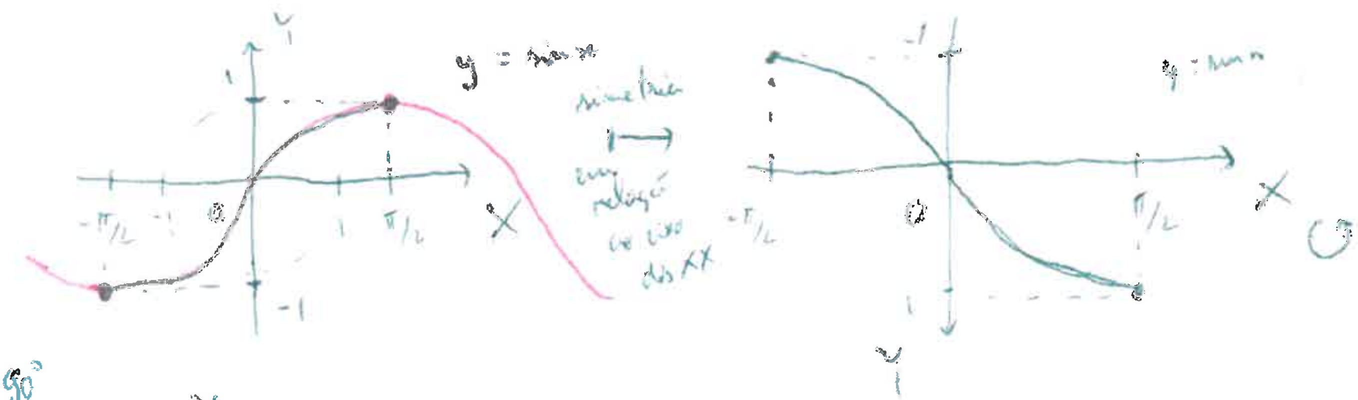
$$\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2] \subset \mathbb{R}$$

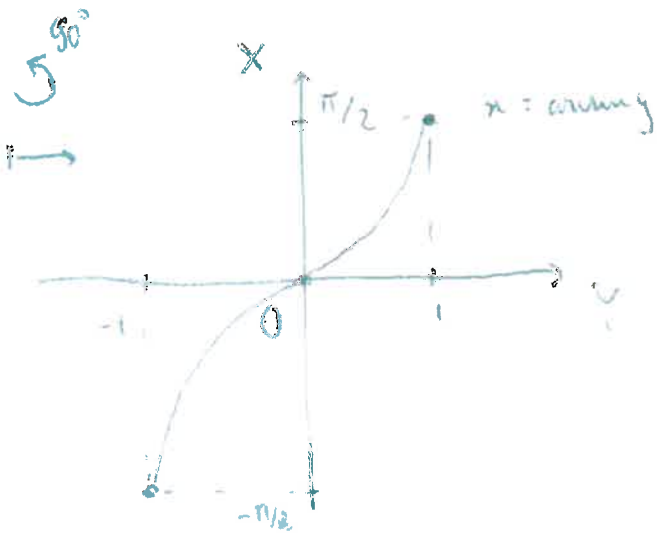
$$\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]} : [-\pi/2, \pi/2] \xrightarrow[\text{bijeção}]{\cong} [-1,1] \subset \mathbb{R}$$

Exercícios

1. Obtém um esboço do gráfico de arcsin.   ver com o software Desmos

Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à reta $y = x$





2. Determina $\arcsin\left(\sin \frac{3\pi}{2}\right)$

$\arcsin\left(\sin \frac{3\pi}{2}\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\pi\right)\right) =$

$= \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{\pi}{2}$

Função arco cosseno

É a inversa da restrição principal $\cos|_{[0,\pi]}$ da função cosseno

$$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$

TP4-C 21/10

Exercícios

1. Obtém um esboço do gráfico de arccos. ver com o software Desmos

2. Determina $\arccos\left(\cos \frac{3\pi}{2}\right) = \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \arccos\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

3. Estabelece para o cosseno e o arco cosseno propriedades correspondentes a : $\sin(\arcsin x) = x, \ \forall x \in [-1,1]$;
$\arcsin(\sin y) = y, \ \forall y \in [-\pi/2, \pi/2]$.

4. Verifica que $\sin^2(\arccos x) = \cos^2(\arcsin x) = 1 - x^2, \ \forall x \in [-1,1]$.

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$

5. Mostra que a relação $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}, \ \forall x \in [-1,1]$, é uma consequência da conhecida relação $\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos y, \ \forall y \in \mathbb{R}$.

$y := \arccos x, \ x \in [-1,1]$

Função arco tangente

$\frac{1}{\cos^2 x} = (\tan x)' > (x)' = 1$ $\forall x \in]0, \pi/2[$

$\Rightarrow \tan x > x \quad \forall x > 0$

É a inversa da restrição principal $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ da função tangente.

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[$$

Exercícios

1. Obtém um esboço do gráfico de arctan. Desmos

2. Determina $\arctan(\tan \pi) = \arctan(\tan 0) = 0$

3. Estabelece para a tangente e o arco tangente propriedades correspondentes a:
$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \forall x \in [-1,1];$$
$$\arcsin(\sin y) = y, \quad \forall y \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

4. Verifica que $\tan^2(\arcsin x) = \frac{x^2}{1-x^2}, \quad \forall x \in]-1,1[$.
(conferir o exercício 4 acima)

5. Verifica que $\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\sin^2(\arctan x) + \underbrace{\cos^2(\arctan x)}_{\neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}} = 1 \Rightarrow \tan^2(\arctan x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\arctan x)}$$

Função arco cotangente

É a inversa da restrição principal $\cot|_{]0,\pi[}$ da função cotangente.

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to]0,\pi[\,.$$

Exercícios

1. Faz um esboço do gráfico de arccot. Desmos

2. Determina $\operatorname{arccot}\left(\cot \frac{7\pi}{4}\right)$. $= \operatorname{arccot}\left(\cot\left(\frac{7\pi}{4}-\pi\right)\right) = \frac{3\pi}{4}$

3. Estabelece para a cotangente e o arco cotangente propriedades correspondentes a: $\sin(\arcsin x) = x, \forall x \in [-1,1]$, $\arcsin(\sin y) = y, \forall y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

4. Verifica que $\cot^2(\arccos x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}, \forall x \in]-1,1[$.
   (conferir o exercício 4 acima) $\sin^2(\arccos x) + \cos^2(\arccos x) = 1$

5. Mostra que a relação $\operatorname{arccot} x + \arctan x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$, é uma consequência da conhecida relação

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cot y, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$y := \operatorname{arccot} x \in]0,\pi[$

Mais exercícios

1. Mostra, com a ajuda do "Teorema da inversão", que as funções arcsin, arccos, arctan e arccot são contínuas.

Teorema da inversão. Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua e injetiva. Então, f e f^{-1} são ambas estritamente crescentes ou ambas estritamente decrescentes, a imagem $f([a,b]) =: J$ é um intervalo limitado e fechado e $f^{-1}: J\to\mathbb{R}$ é contínua.

$$\boxed{\begin{array}{l} J \ni d = f(c) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \\ \lim\limits_{y\to d} f^{-1}(y) = \lim\limits_{x\to c} f^{-1}(f(x)) = c = f^{-1}(d) \end{array}}$$

2. Determina k por forma a que a função f seja contínua no seu domínio:

$$f(x) = \begin{cases} \arccos \frac{2}{x} & \text{se } x \geq 2, \\ 2k e^{x-2} & \text{se } x < 2. \end{cases}$$

R: $k=0$

3. Calcula, caso exista,

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \arccos \frac{1}{n} = \pi/2$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan(1-n) = -\frac{\pi}{2}$

Derivadas - parte 2 (revisão)

Derivada da composição de funções (regra da cadeia)

Sejam $f: A \subset \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ diferenciável num ponto interior a de A e $g: B \to \mathbb{R}$ diferenciável em $f(a)$ (naturalmente, suposto ponto interior de B).

$\exists_{]c,d[\subseteq A} \quad a \in]c,d[$

Então, $g \circ f$ é diferenciável em a e
$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Demonstração (não dar)

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x \to a} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right]$$
$\neq 0$?

Notações alternativas: notação diferencial,

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a), \quad g'(b) = \frac{dg}{dy}(b),$$

regra da cadeia $\quad \dfrac{d(g \circ f)}{dx}(a) = \dfrac{dg}{dy}(f(a)) \cdot \dfrac{df}{dx}(a)$;

mnemónica para a regra da cadeia (omitindo os pontos onde as derivadas são calculadas),

$$y = f(x), \quad z = g(y), \quad z = g \circ f(x), \quad \boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}}.$$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = f(x) \longmapsto z = g(y) = g(f(x))$$

Derivada da inversa de uma função

1.3 Derivadas (complemento) - Derivada da inversa de uma função

$f : [c, d] \to \mathbb{R}$ contínua e injetiva. $f^{-1} : J = f([c,d]) \to \mathbb{R}$

Se f é diferenciável em $a \in \,]c, d[$ e $f'(a) \neq 0$, então $b = f(a)$ é um ponto interior de J, f^{-1} é diferenciável em b e

$$\boxed{(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}} \qquad (1)$$

$a = f^{-1}(b)$

<u>Nota</u> Se tanto f como f^{-1} são diferenciáveis nos interiores dos intervalos respetivos, então a fórmula (1) é uma consequência simples da regra da cadeia:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in \,]c, d[$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \forall x \in \,]c, d[$$

$\neq 0$ porque $(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$

$$\Leftrightarrow \boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}, \quad \forall x \in \operatorname{int}(J).$$

$$\frac{df^{-1}}{dx}(x) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(f^{-1}(x))}$$

mnemónica : $y = f^{-1}(x)$, $x = f(y)$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} .$$

$$\boxed{(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)\big|_{y=f^{-1}(x)}}}$$

Exemplo / Exercício

Calcule $(\ln x)'$ usando a derivada da inversa.

$x > 0$ ($x \in D_{\ln} = \mathbb{R}^+$) : $\ln = \exp^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$(\ln x)' = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x} .$$

Exercícios II

1. Verifica, para $x \in \mathbb{R}^+$, que a regra de derivação da função potência x^n ($(x^n)' = n x^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$) vale também quando o expoente é da forma $\frac{1}{m}$, com $m \in \mathbb{N}$.

$f(x) = x^m$, $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{m}}$ $\qquad \mathbb{R}^+ \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^+$

$$(x^{\frac{1}{m}})' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(x^{\frac{1}{m}})} = \frac{1}{m(x^{\frac{1}{m}})^{m-1}} = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1}$$

2. Combina agora o resultado anterior com a regra da cadeia e mostra que a referida regra da potência vale para qualquer expoente $n \in \mathbb{Q}$ (nota: de facto é verdade para $n \in \mathbb{R}$).

$n = \frac{p \in \mathbb{Z}}{q \in \mathbb{N}}$: $x^n = (x^{\frac{1}{q}})^p$

3. Verifica que a regra de derivação da exponencial de base $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ segue da regra geral de derivação da inversa, uma vez sabendo a regra de derivação da função logaritmo de base a (ou vice-versa).

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad ; \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

4. Determina as derivadas das funções trigonométricas inversas

(a) arcsin, (b) arccos, (c) arctan, (d) arccot.

(a) $$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'|_{y=\arcsin x}} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \; x \in]-1,1[$$

(c) $$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'|_{y=\arctan x}} = \frac{1}{\sec^2(\arctan x)} = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

→ Tabela das derivadas no fim de: Derivadas - parte 1 (revisão)

Cálculo I - agr 1 (teste facultativo), 2017/18, Exercício 1.

Considera a função real de variável real dada pela expressão

$$f(x) := \pi/2 - \arccos(1 + x - x^2).$$

(a) Determina o domínio D_f de definição de f.

$D_f = [-1, 0] \cup [1, 2]$

(b) Determina, caso existam, os extremos absolutos e os extremantes absolutos de f

(se achares que não existem, deves explicar porquê)

Máximo absoluto $= \pi/2$. Maximizantes absolutos: $0, 1$.

Mínimo absoluto $= -\pi/2$, Minimizantes absolutos: $-1, 2$.

→ pacote SCORM Exercícios sobre domínios e extremos

não haverá tempo!