Aulas 8, 9, 10, 11 e 12

Primitivas de produtos de potências de seno e de cosseno

1. Potências ímpares ($\in \mathbb{N}$) de $\sin x$ ou $\cos x$: destaca-se uma unidade à potência ímpar e transforma-se o fator resultante usando $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Exercícios (a) $\int \cos^3 x \, dx$ (b) $\int \sin^3 x \, dx$

(c) $\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx = -\int -\sin x (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x \, dx$ $(u = \cos x)$

2. Potências pares ($\in \mathbb{N}$) de $\sin x$ ou $\cos x$:

usam-se as fórmulas $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ ou $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

Exercício $\int \sin^2 x \, dx$

3. Produtos onde existem fatores tipo $\sin(mx)$ ou $\cos(nx)$, com $m, n \in \mathbb{Z}$: aplicam-se as fórmulas,

- $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$,
- $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)$,
- $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)$.

$$\left[\begin{array}{l} \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos y \sin x \\ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{array}\right] \Leftarrow \left[\begin{array}{l} e^{i\theta} = \operatorname{cis}\theta = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy} \end{array}\right]$$

Exercício $\int \sin 2x \sin 3x \, dx$

4. Potências pares e ímpares de $\tan x$ ou $\cot x$:
destaca-se $\tan^2 x$ ou $\cot^2 x$ e aplicam-se as fórmulas

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 \quad \text{ou} \quad \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$$

Exercício. $\int \tan^2 x \, dx$

5. Potências pares de $\sec x$ ou $\operatorname{cosec} x$:
destaca-se $\sec^2 x$ ou $\operatorname{cosec}^2 x$ e ao fator resultante aplicam-se as fórmulas

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x \quad \text{ou} \quad \operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x.$$

Exercício $\int \sec^4 x \, dx$

6. Potências ímpares de $\sec x$ ou $\operatorname{cosec} x$:
destaca-se $\sec^2 x$ ou $\operatorname{cosec}^2 x$ e primitiva-se por partes escolhendo esse fator para primitivar.

Exercício $\int \sec^3 x \, dx =$ Conferir matéria a seguir, exercício 2 em (17)

$= \int \sec^2 x \cdot \sec x \, dx \overset{PP}{=} \tan x \cdot \sec x - \int \tan^2 x \cdot \sec x \, dx$

$= \tan x \cdot \sec x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx$

$\Rightarrow \int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \left(\tan x \sec x + \underbrace{\int \sec x \, dx}_{= \ln |\sec x + \tan x| + C} \right)$

Primitivação do produto de duas funções

wiki:
2.1 Primitivas-[illegible]

Primitivação por partes (p p p)

Sejam f e g diferenciáveis em $]a, b[$.
Se $f' \cdot g$ é primitivável em $]a, b[$ então também $f \cdot g'$ o é, e

$$P(fg') = f \cdot g - P(f'g) \text{ em }]a, b[.$$

Em notação alternativa,

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx.$$

Demonstração (forma de rapidamente recuperar a fórmula da ppp)

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \qquad (fg)' = f'g + fg'$$

$$\Rightarrow \int (f(x) \cdot g(x))'\, dx = \int f'(x) \cdot g(x)\, dx + \int f(x) \cdot g'(x)\, dx \qquad fg = \int f'g + \int f[illegible]$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx = \int f(x) \cdot g'(x)\, dx \quad \square \qquad \int fg' = fg - \int[illegible]$$

Exercícios 1. (a) $\int x \sec^2 x\, dx$

$$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$

$$\ln|u| = \begin{cases} \ln u, & u > [illegible] \\ \ln(-u), & u < [illegible] \end{cases}$$

(b) $\int e^x \sin x\, dx$ $\begin{cases} 1.^\text{o} \text{ passo: iterar normalmente} \\ 2.^\text{o} \text{ passo: resolver equação} \end{cases}$

(c) $\int \overbrace{\ln x}^{=f(x)} \overbrace{1}^{=g'(x)}\, dx$

(d) $\int \overbrace{\arctan x}^{=f(x)} \overbrace{1}^{=g'(x)}\, dx$

(e) $\int \sin(5x)\cos(3x)\,dx \overset{(1)}{=} -\frac{1}{16}\cos(8x) - \frac{1}{4}\cos(2x) + c$

$\overset{(2)}{=} -\frac{3}{16}\sin(3x)\sin(5x) - \frac{5}{16}\cos(3x)\cos(5x) + c$

(1) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$

(2) ~~ppp~~ como em (b)

2. Sabendo que $\ln|\sec x + \tan x|$ é uma primitiva de $\sec x$, e usando a fórmula trigonométrica $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$, mostre que

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\left(\tan x \sec x + \ln|\sec x + \tan x|\right) + c.$$

$\sec^3 x = \sec^2 x \cdot \sec x = (1 + \tan^2 x)\sec x =$

$= \sec x + (\tan x \sec x)\tan x$

$= \sec x + (\sec x)' \tan x$

Primitivação de funções racionais

Acompanha a explicação a seguir até ao passo 2.3. com a 1ª alínea do exercício abaixo.

1. No caso do grau do numerador ser maior ou igual ao grau do denominador, começamos por efetuar a divisão de polinómios e aplicar a regra de primitivação por decomposição, sendo que
ver ex. 1. da folha 14
uma das parcelas, dada por um polinómio, tem primitivação imediata. Assim, reduzimos o problema ao da primitivação de uma função dada por uma expressão $\frac{f(x)}{g(x)}$ onde o polinómio $f(x)$ tem grau inferior ao grau do polinómio $g(x)$, que tratamos a seguir:

1(a) $\displaystyle\int \frac{x^4+2x+1}{x^3-x^2-2x}\,dx = \frac{x^2}{2}+x+\int \frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x}\,dx$

2. Caso de $\frac{f(x)}{g(x)}$ ser função racional própria:

2.1. Decompomos o denominador em

(Teorema Fundamental da Álgebra)

$$g(x) = d \cdot (x-r_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x-r_p)^{\alpha_p} \cdot [(x-a_1)^2+b_1^2]^{\beta_1} \ldots [(x-a_q)^2+b_q^2]^{\beta_q}$$

onde $r_1, \ldots, r_p$ são as raízes reais de $g(x)$, respectivamente de multiplicidades $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ e $a_1 \pm i b_1, \ldots, a_q \pm i b_q$ são os pares de raízes complexas conjugadas de $g(x)$, respetivamente de multiplicidades $\beta_1, \ldots, \beta_q$.

$$(x-a_k)^2 + b_k^2 = (x-(a_k+ib_k))(x-(a_k-ib_k))$$

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x+1)(x-2)$$

2.2. Por cada fator do tipo $(x-r)^\alpha$ consideramos uma expressão da forma

primitivar ($\alpha \in \mathbb{N}$)

$$\frac{R_1}{(x-r)^\alpha} + \frac{R_2}{(x-r)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{R_\alpha}{(x-r)}$$

e por cada fator do tipo $[(x-a)^2+b^2]^\beta$ consideramos uma expressão da forma

primitivar ($\beta \in \mathbb{N}$, $b > 0$)

$$\frac{A_1 x + B_1}{[(x-a)^2+b^2]^\beta} + \frac{A_2 x + B_2}{[(x-a)^2+b^2]^{\beta-1}} + \ldots + \frac{A_\beta x + B_\beta}{[(x-a)^2+b^2]},$$

onde $R_1, R_2, \ldots, R_\alpha, A_1, A_2, \ldots, A_\beta, B_1, B_2, \ldots, B_\beta$ são constantes reais a determinar.

$\frac{A}{x}, \frac{B}{x+1}, \frac{C}{x-2}$

2.3. Determinamos as constantes anteriores através do método dos coeficientes indeterminados, de modo a que se verifique a igualdade

$$\frac{f(x)}{g(x)} = S,$$ onde S é a soma de todas as expressões que considerámos na alínea anterior (há um resultado da Álgebra que nos garante que isto é possível).

$$S = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}, \quad A = -\frac{1}{2}, \; B = 0, \; C = 7/2$$

2.4. Aplicamos a regra de primitivação por decomposição à expressão da alínea anterior.

$$\int \frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x}\,dx = \int \frac{-1/2}{x} + \frac{7/2}{x-2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{7}{2}\ln|x-2|$$

Exercícios

1. Em cada caso, reduz a função racional a uma soma de frações simples (mais um polinómio, se a função racional inicial não for própria).

Primitiva em seguida as funções racionais dadas.

(a) $\dfrac{x^4+2x+1}{x^3-x^2-2x}$ (b) $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3}$

(c) $\dfrac{x^2+x+1}{(2x+1)(x^2+1)} = \dfrac{3/10}{x+\frac{1}{2}} + \dfrac{1/5\,x + 2/5}{x^2+1}$

(d) $\dfrac{x}{x^2+2x+15} = \dfrac{x}{(x+1)^2+(\sqrt{14})^2}$ (é, à partida, uma fracção simples) (faltava completar o quadrado; arctan)

(e) $\dfrac{5x^3-3x^2+7x-3}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x+0}{(x^2+1)^2} + \dfrac{5x-3}{x^2+1}$

(f) $\dfrac{x^4+4x^3+12x^2+14x+10}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \dfrac{5/4}{x+1} + \dfrac{3/2\,x-\frac{1}{2}}{[(x+1)^2+2]^2} + \dfrac{-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}}{(x+1)^2+2}$

usar o programa "WolframAlpha"

$$\int \frac{1}{(1+u^2)^2}\,du = \int \frac{1+u^2}{(1+u^2)^2} - \frac{u^2}{(1+u^2)^2}\,du = \int \frac{1}{1+u^2}\,du - \left(-\frac{1}{2}\int \frac{\overset{f(u)}{u}\,\overset{g'(u)}{(-2u)}}{1+u^2}\,du\right)$$

p.p.

(g) $\dfrac{1}{x^7-4x^6+14x^5-20x^4+25x^3} = \dfrac{1}{x^3(x^2-2x+5)^2}$

2. Prova a seguinte <u>fórmula de recorrência</u>: para $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ e $a \neq 0$,

$$\int \frac{1}{(u^2+a)^m}\,du = \frac{1}{a}\left(\frac{u}{2(m-1)(u^2+a)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{1}{(u^2+a)^{m-1}}\,du\right)$$

A primitivação de frações racionais

$$\int \frac{1}{(x-r)^{\alpha}}\,dx = \begin{cases} \ln|x-r| + c, & \alpha = 1 \\ \dfrac{(x-r)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + c, & \alpha > 1 \end{cases} \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{[(x-a)^2+b^2]^{\beta}}\,dx : \ b>0 \quad (a \pm i b) \ ;$$

$$\beta = 1, \quad \int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b}\int \frac{1}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1}\,\frac{1}{b}\,dx =$$

$$= \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R} \ ;$$

$$\beta > 1, \quad \int \frac{1}{[(x-a)^2+b^2]^{\beta}}\,dx = \frac{1}{b^2}\int \frac{(x-a)^2+b^2-(x-a)^2}{[(x-a)^2+b^2]^{\beta}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{[(x-a)^2+b^2]^{\beta-1}}\,dx + \frac{1}{2b^2(\beta-1)}\,\frac{x-a}{[(x-a)^2+b^2]^{\beta-1}} +$$

$$+ \frac{1}{2b^2(\beta-1)}\int \frac{1}{[(x-a)^2+b^2]^{\beta-1}}\,dx =$$

fórmula por recorrência

$$= \frac{1}{2b^2(\beta-1)}\,\frac{x-a}{[(x-a)^2+b^2]^{\beta-1}} + \frac{1}{b^2}\,\frac{2\beta-1}{2\beta-2}\,\boxed{\int \frac{1}{[(x-a)^2+b^2]^{\beta-1}}\,dx}$$

$$\int \frac{x}{[(x-a)^2+b^2]^\beta}\,dx \;:\; b>0 \;(a\pm ib);$$

$$\beta=1, \quad \int \frac{x}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,dx + \frac{a}{b}\int \frac{1}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1}\,\frac{1}{b}\,d$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left((x-a)^2+b^2\right) + \frac{a}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c, \; c\in\mathbb{R}$$

$$\beta>1, \quad \int \frac{x}{[(x-a)^2+b^2]^\beta}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{[(x-a)^2+b^2]^\beta}\,2(x-a)\,dx +$$

$$+\, a\int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^\beta} = \frac{1}{2}\,\frac{[(x-a)^2+b^2]^{-\beta+1}}{-\beta+1} + a\boxed{\int \frac{1}{[(x-a)^2+b^2]^\beta}\,dx}$$