Cálculo I, Agrupamento IV, 2021/22

João Xarez, xarez@ua.pt, gabinete 11.3.2

Aula 1

→ Horário da turma (e horários da tutorial e atendimento a definir mais tarde).

→ Programa, bibliografia e avaliação: elearning.

→ Texto base:

http://calculo.wikidot.com:

Objeto de estudo ↦ Introdução;

Matéria dos ensinos básico e secundário ↦ pré-requisitos;

Matemática elementar e pré-requisitos não irão ser dados, com duas pequenas excepções,

1) resolução de inequações, ⇝ quadros de variação de funções ou quadros de sinais

2) determinação de contradomínios e extremos.

→ Pacotes SCORM: deixar para o fim da aula

Revisão sobre Matemática Elementar;

Revisão sobre Limites e Derivadas.

TPC

(Aconselhar os alunos a obter 2/3 de respostas correctas nestes pacotes, para poderem aceder a outros pacotes)

1.1. Ponto de partida (wikidot)

→ Inequações (revisão)

Exemplo: $\frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1-x}{x} \leq 0 \mapsto$ quadro de sinais ou quadro de variação das funções

Parte final de 1.1 Ponto de partida

resolução alternativa do exemplo (não recomendada):

(Com referência a alguma matéria de revisão constante da secção Linguagem lógica e limites).

$\frac{1}{x} \leq 1$: 1º caso $x > 0$, $1 \leq x$; $\therefore x \in]-\infty, 0[\cup [1, \infty[$

2º caso $x < 0$, $1 \geq x$.

Exercícios

Determina, no universo $\mathbb{R}$, os conjuntos das soluções das seguintes inequações:

1. $\frac{4x-1}{2x+3} > 1$; 2. $e^{\frac{1}{x}} + 2 < 2 + e$;

número de Neper (irracional e transcendente, base da função exponencial e da sua inversa - o logaritmo natural)

3. $0 < \frac{x+1}{x^2+1} < 2$; 4. $\frac{2x^2+1}{2\sqrt{2}\,x} \leq 1$;

5. $\frac{1}{\sqrt{x-1}} > \frac{1}{x}$; 6. $\frac{\ln(x+e)+x}{x+1} < 1$;

7. $\ln x > \frac{x-1}{\sqrt{x}}$

Soluções e resolução: 1. $]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]2, \infty[$.

esta passagem evita ter de considerar os casos $2x+3>0$, $2x+3$ ... $2x+3=$ ...

$\frac{4x-1}{2x+3} > 1 \Leftrightarrow \frac{4x-1}{2x+3} - \frac{2x+3}{2x+3} > 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2x-4}{2x+3}}_{f(x)} > 0$

$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, $2x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3/2$

quadro de variação das funções: ou quadro de sinais

x		$-3/2$		2	
$2x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	ND	$-$	0	$+$

ND = Não definido

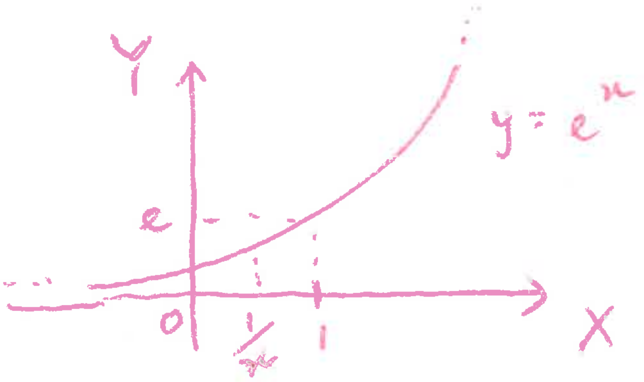
2. $e^{\frac{1}{x}} + 2 < 2 + e \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} < e^1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} < 0$

x	$-$	0	$+$	1	$+$
$1-x$	$+$	1	$+$	0	$-$
$\frac{x}{1-x}$	$-$	0	$+$	ND	$-$

$x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

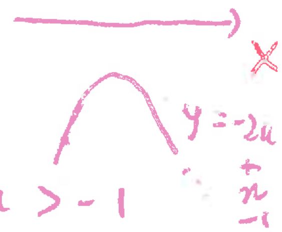
porque a função exponencial é estritamente crescente



outra notação para a conjunção $\begin{cases} \frac{x+1}{x^2+1} > 0 \\ \frac{x+1}{x^2+1} < 2 \end{cases}$

3. $0 < \frac{x+1}{x^2+1} < 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2+1} > 0 \wedge \frac{x+1}{x^2+1} < 2$

$\Leftrightarrow x + 1 > 0 \wedge \frac{x+1-2x^2-2}{x^2+1} < 0$



$\Leftrightarrow x > -1 \wedge -2x^2 + x - 1 < 0 \Leftrightarrow x > -1$

Notas: $x^2 + 1 > 0 \ \forall_{x \in \mathbb{R}}$; $-2x^2 + x - 1 = 0$ não tem solução.

4. $\frac{2x^2+1}{2\sqrt{2}\,x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2+1}{2\sqrt{2}\,x} - \frac{2\sqrt{2}\,x}{2\sqrt{2}\,x} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1}{2\sqrt{2}\,x} \leq 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} > \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} - \dfrac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-\sqrt{x-1}}{x\cdot\sqrt{x-1}} > 0$

$\Leftrightarrow x - \sqrt{x-1} > 0 \ \wedge \ x > 1$

$\Leftrightarrow (x-\sqrt{x-1})\underbrace{(x+\sqrt{x+1})}_{>0} > 0 \wedge x > 1$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2 - (x-1) > 0 \ \wedge \ x > 1$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 > 0 \ \wedge \ x > 1 \Leftrightarrow x > 1$

Nota: $x^2 - x + 1 = 0$ não tem solução.

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ fórmula resolvente

6. $\dfrac{\ln(x+e)+x}{x+1} < 1 \Leftrightarrow \underbrace{\dfrac{\ln(x+e) - \ln(e)}{x+1}}_{f(x)} < 0$

$x + e > 0 \Leftrightarrow x > -e$

$x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Nota: a função logarítmica, de é crescente (estritamente) em todo o seu domínio $\mathbb{R}^+$.

Quadro de variação ou quadro de sinais

x	$-e$		-1		0	
$\ln(x+e)-\ln(e)$	ND	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	ND	$+$	ND	$-$	0	$+$

$]-1, 0[$

7. $\ln x > \frac{x-1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \ln x - \frac{x-1}{\sqrt{x}} > 0$ $\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab +$

$f(x) = \ln x - \frac{x-1}{\sqrt{x}}$, $f'(x) = -\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}$

$D_f = \mathbb{R}^+ = D_{f'}$ $\qquad f'(x) < 0 \ \forall_{x \in D_f \setminus \{1\}}$

x	0		1	
$f'(x)$	ND	$-$	0	$-$
$f(x)$	ND	$\searrow$	0	$\searrow$

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1\sqrt{x} - (x-1)\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}}{x}$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0,1[$

$\boxed{\text{Aula 2,3}}$ Linguagem, lógica matemática e limites (wiridot)

Funções regulares

→ Pacotes SCORM :

Revisão sobre Linguagem e Lógica

deixar para fim da aula?

(Aconselhar os alunos a obter 2/3 de respostas correctas nestes pacotes, para poderem aceder a outros pacotes)

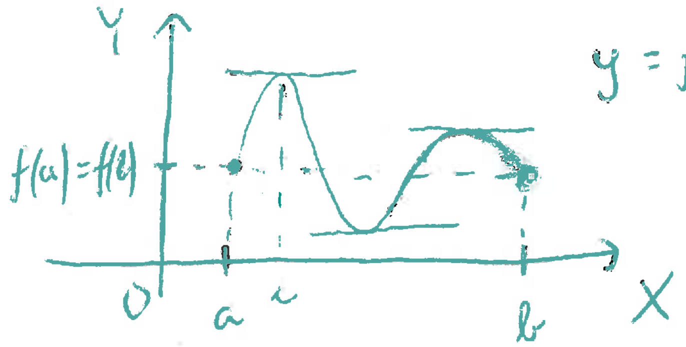
Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diz-se regular se for contínua (em $[a, b]$) e diferenciável em $]a, b[$.

$a < b$

- pode-se desenhar o gráfico sem levantar a mão do quadro.
- existe tangente não em cada ponto do gráfico $(x, f(x))$ com $x \in]a, b[$.

Teorema de Rolle

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função regular tal que $f(a) = f(b)$. Então, existe $c \in]a; b[$ tal que $f'(c) = 0$.



Demonstração: a dar no futuro

Exercícios I (Linguagem, lógica matemática e limites), w.kidt

1. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função regular.

(a) Porque é que entre dois zeros de f existe pelo menos um zero de f'?

(b) E porque é que entre dois zeros consecutivos de f' existe no máximo um zero de f?

2. Considere a função dada por $f(x) = \underbrace{3x - 3 + \overbrace{\sin}^{\text{ou "sen"}}(x-1)}$.

usar ~ Desmos

$f'(x) = 3 + \cos(x-1)$

(a) Calcula $f(1)$.

(b) Mostra que f tem um único zero em $\mathbb{R}$.

Não resolver (falta tempo, mas já estão resolvidos).

1(b): usar na resolução da questão seguinte

3. Utiliza o Teorema de Rolle para provares que:

(a) O polinómio $x^{102} + ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tem no máximo duas raízes reais.

(b) O polinómio $x^{101} + ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tem no máximo três raízes reais.

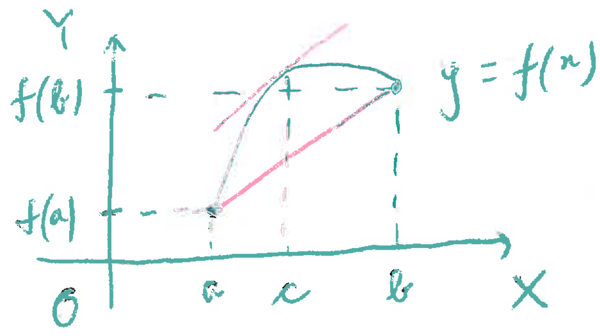
Teorema de Lagrange (ou do valor médio, ou dos acréscimos finitos)

← lógicamente equivalente ao T. de Rolle.

Seja f uma função (real, de variável real) regular em $[a, b]$

Existe $c \in \,]a, b[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Demonstração



$$(b-a) f'(c) - \big(f(b) - f(a)\big) = 0$$

$$F'(c) = (b-a) f'(c) - \big(f(b) - f(a)\big)$$

$$F(x) = (b-a) f(x) - \big(f(b) - f(a)\big) x$$

Considerações auxiliares

$$F(a) = b\, f(a) - f(b)\, a = F(b) \quad \square$$

Nota. O Teorema de Lagrange permite provar facilmente o conhecido:

Critério de Monotonia

$\forall [d,c] \in [a,b]$

Seja f regular em $[a,b]$. Então,

1. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x)=0 \Rightarrow f$ é constante em $[a,b]$,

2. 3. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ é ~~estritamente~~ crescente em $[a,b]$,

4. 5. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) < 0 \Rightarrow f$ é ~~estritamente~~ decrescente em $[a,b]$.

TP 4-8 18/outubro/2021

Generalização do Teorema de Lagrange: (fazer $g(x) = x$)

Teorema de Cauchy (logicamente equivalente ao T. de Rolle)

Se f, g são funções regulares em $[a,b]$ com g' diferente de zero em $]a,b[$, então existe $c \in]a,b[$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Demonstração: Exercício II

Considerações auxiliares:

$g(b)-g(a) \neq 0$ pelo T. de Rolle;

$$h'(c) = (g(b)-g(a))f'(c) - (f(b)-f(a))g'(c) = 0$$

$$h(x) = (g(b)-g(a))f(x) - (f(b)-f(a))g(x)$$

$$h(a) = g(b)f(a) - f(b)g(a) = h(b) \quad \square$$

Não dar (falta tempo)

Cálculo de limites

O Teorema de Cauchy permite provar a seguinte regra prática para o levantamento de indeterminações

$$\frac{0}{0}\,,\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad \text{ou} \quad \frac{\pm\infty}{\mp\infty}\,.$$

Regra de Cauchy (L'Hôpital's rule) (teorema!)

Sejam f, g diferenciáveis num intervalo $I =]a-\varepsilon, a[$ para algum $\varepsilon > 0$, com $a \in \mathbb{R}$.

Se $\forall_{x\in I}\ g(x) \neq 0 \wedge g'(x) \neq 0$,

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}\,,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\,,\ \frac{\pm\infty}{\mp\infty}$$

e existe $\displaystyle\lim_{x\to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, então

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Esta regra também é válida quando em vez de $x \to a^-$ se considera $x \to a^+$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$, com as necessárias adaptações.

~~(a prova será feita mais tarde, com mais tempo)~~ a prova é difícil

→ $\displaystyle\lim_{x\to a} h(x) := \lim_{\substack{x\to a \\ x\in D\setminus\{a\}}} h(x)$ limite segundo um subconjunto

Exercícios III

1. Calcula os seguintes limites:

(1) $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{x\sin x}{1-\cos x}$; (2) $\lim_{x\to 1^\pm} \frac{x^4-2x^3+2x-1}{x^3-3x+2}$;

$\left(\frac{0}{0}\right)$
$= \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sin x + x\cos x}{\sin x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$= \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\cos x - x\sin x + \cos x}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$

$\left(\frac{0}{0}\right)$
$= \lim_{x\to 1^\pm} \frac{4x^3-6x^2+2}{3x^2-3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$= \lim_{x\to 1^\pm} \frac{12x^2-12x}{6x} = \frac{0}{6} = 0$

(3) $\lim_{x\to 0^\pm} (1+x)^{1/x} \overset{(1^{\pm\infty})}{=} e^{\lim_{x\to 0} \ln(1+x)\cdot\frac{1}{x}}$ $(0\times\infty)$ $= e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1}} = e^1 = e$

(4) $\lim_{x\to 0^+} x^x \overset{(0^0)}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x}$ $(0\times-\infty)$ $=$

$= e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}}$ $\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)$ $= e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}} = e^{\lim_{x\to 0^+} -x} = e^0 = 1$

2. Diz o que está errado no seguinte cálculo, onde se aplica duas vezes a regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{C}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2x} \overset{\frac{1}{0}\times}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2} = 0$$

Cálculo de inversas

1.1. Ponto de partida. Universo das funções - parte 2 (revisão)
Cálculo de inversas.

Sejam f e g duas funções reais de variável real,

$$f : D_f \to \mathbb{R} \quad , \quad g : D_g \to \mathbb{R} . \qquad D_f , D_g \subset \mathbb{R}$$

f e g são inversas uma da outra se (e só se)

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \in D_f \wedge y = f(x) \Leftrightarrow y \in D_g \wedge x = g(y) .$$

Donde,

$$CD_f \left(= f(D_f) \right) = D_g$$

e

$$CD_g \left(= g(D_g) \right) = D_f$$

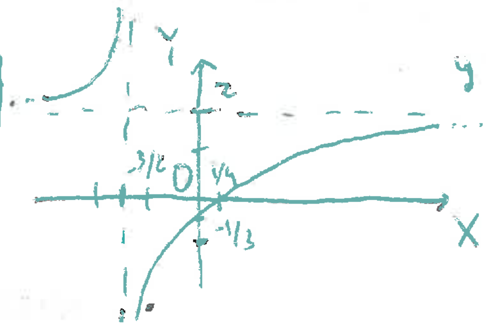
$$\mathbb{R} \supseteq CD_g = D_f \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} D_g = CD_f \subseteq \mathbb{R}$$

Exercício Em cada um dos seguintes casos, determina um domínio adequado onde possas inverter a função f e calcula a sua inversa. Indica também o contradomínio de f no domínio escolhido.

1. $f(x) = \dfrac{4x-1}{2x+3}$ 2. $f(x) = 1 + \sqrt{2+3x}$ estritamente crescente em $D_f = [-\frac{3}{2}, +\infty[$

1.

x		$-3/2$		$1/4$	
$4x-1$	$-$	-7	$-$	0	$+$
$2x+3$	$-$	0	$+$	5	$+$
$f(x)$	$+\nearrow$	ND	$-\nearrow$	0	$+\nearrow$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$



$y = \dfrac{4x-1}{2x+3}$

Desmos ?