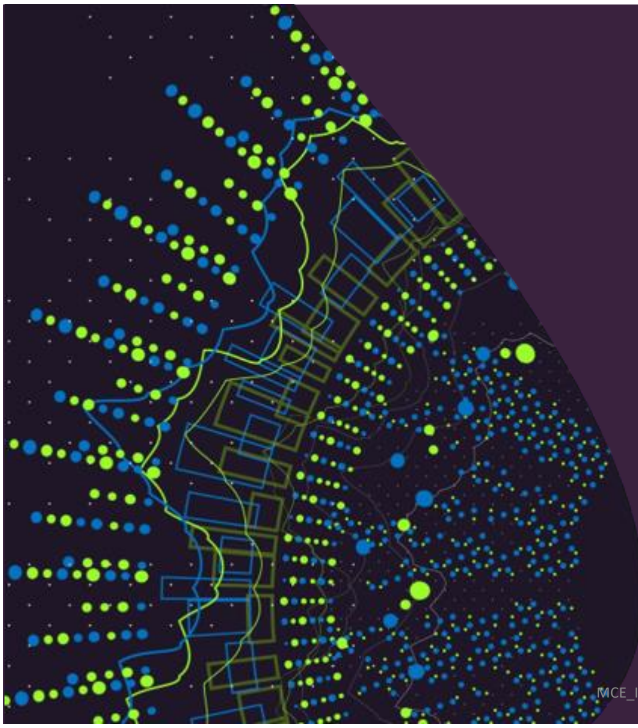


Mecânica e Campo Eletromagnético

Aula 4 – 11 e 17 Out 10 22

1.4 Dinâmica de um sistema de partículas

Momento linear do sistema. Conservação do Momento linear.
Centro de massa. Colisões.
Momento de uma força. Dinâmica de rotação.
Momento angular. Conservação do momento angular.
Momento de inércia.
Cinemática e energia cinética de rotação.

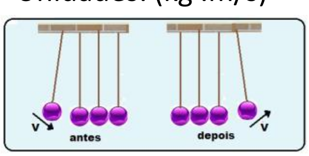
Isabel Malaquias
imalaquias@ua.pt
Gab. 13.3.16

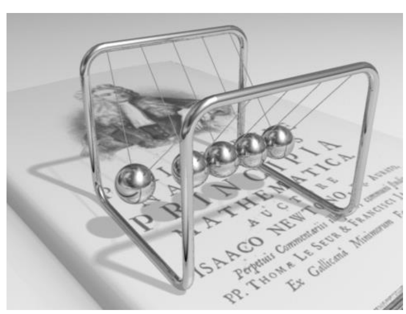
1

Momento linear
ou Quantidade de movimento

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Unidades: (kg .m/s)





Quanto maior é o momento linear de um corpo, mais difícil é travá-lo e maior será o efeito provocado se for posto em repouso por impacto ou colisão.

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e8/Newtons_cradle_animation_book.gif

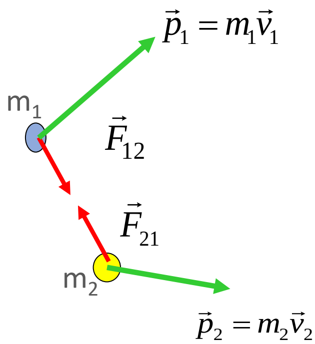
2ª LEI DE NEWTON

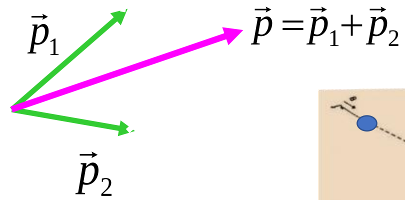
$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

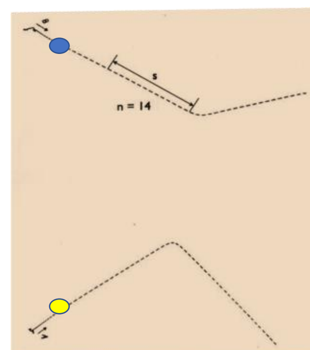
A força resultante aplicada sobre uma partícula é igual à **variação temporal do seu momento linear**

2

Sistema Isolado:
Lei de Conservação do Momento Linear







O que acontece ao momento linear de cada partícula?
E do conjunto?

3

Sistema Isolado:
Lei de Conservação do Momento Linear

<u>O momento linear total de um sistema</u>, composto de 2 (ou mais) partículas sujeitas somente às suas interacções mútuas, <u>permanece constante</u>

$$\sum \vec{p_i} = \sum \vec{p_f} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{P_i} = \vec{P_f}$$

LEI DE CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR

num Sistema Isolado

- é um dos conceitos mais importantes na Física

A 3 DIMENSÕES: $P_{xi} = P_{xf}$ $\quad P_{yi} = P_{yf}$ $\quad P_{zi} = P_{zf}$

4

Colisões

- numa colisão há forte interacção entre 2 corpos
- as forças impulsivas são normalmente muito superiores a qualquer força externa
- poderá ou não existir contacto físico

De acordo com A 3ª LEI DE NEWTON:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\vec{p}_1 \Rightarrow -\Delta\vec{p}_2$$

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = \vec{0}$$

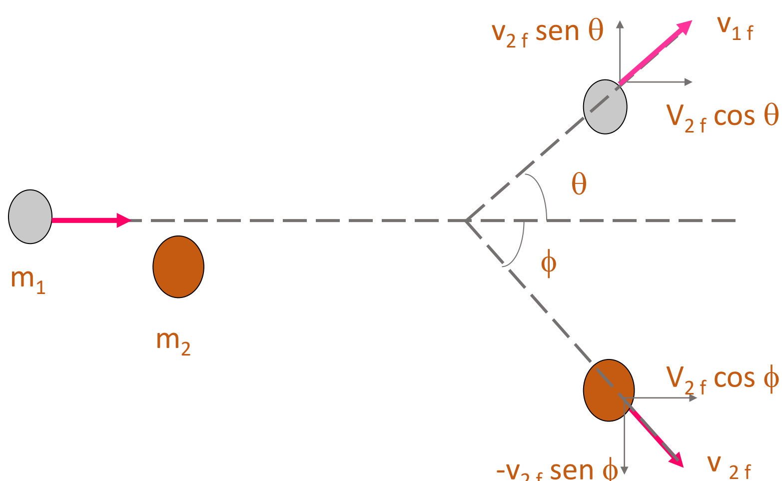
A variação do momento linear do sistema devido à colisão é zero!

TIPOS DE COLISÕES

- ELÁSTICAS: colisões que conservam momento linear + energia cinética
- INELÁSTICAS: colisões que só conservam o momento linear
  - COLISÕES PERFEITAMENTE INELÁSTICAS: os objectos mantêm-se juntos após a colisão

Colisão a 2D

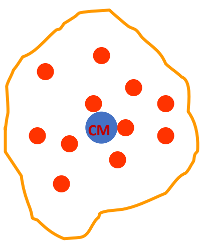
Uma bola de massa m_1 desloca-se com uma velocidade $v_{1\,i}$ e colide lateralmente com uma bola de massa m_2, inicialmente em repouso



Centro de massa

Para qualquer sistema de partículas existe um ponto que se move sob a acção das forças aplicadas ao sistema, como se toda a sua massa desse sistema estivesse concentrada nesse ponto:

o centro de massa (CM)



Independentemente dos movimentos individuais neste grupo de partículas, a dinâmica do centro de massa obedece à 2ª Lei de Newton

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM}$$

Centro de massa e equilíbrio

Tipos de equilíbrio

Para que um corpo fique em equilíbrio é necessário que a linha que contém o Centro de Massa não saia da base de sustentação do corpo

Equilíbrio estável - o corpo regressa à posição inicial se deslocado. Acontece quando o ponto de sustentação está acima do centro de gravidade

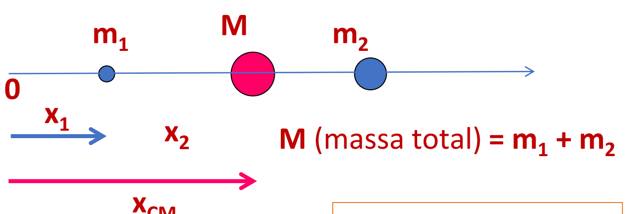
Equilíbrio instável - o corpo afasta-se, se deslocado da sua posição

Equilíbrio indiferente - o corpo mantém a sua posição, se deslocado

Centro de massa

Um corpo no espaço, longe da atracção gravitacional de qualquer planeta, possui centro de massa, mas não centro de gravidade, CG.

Localização do Centro de Massa a 1D



M (massa total) **= m_1 + m_2**

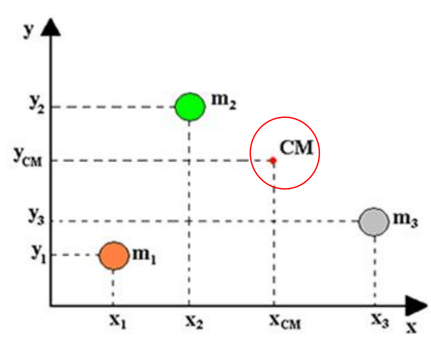
$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}$$

Para *n* partículas *i*

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum m_i x_i$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \sum m_i y_i$$

Localização do Centro de Massa (2D)



Localização do Centro de Massa a 3 D

Posição do centro de massa para um sistema de partículas i:

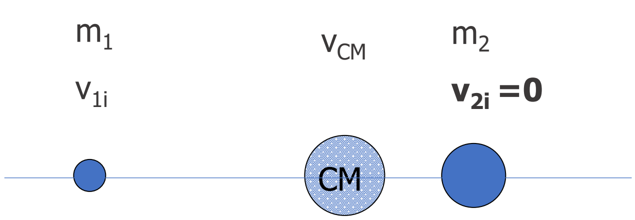
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$com \quad \vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k} \;\; e \;\; M = \sum m_i$$

A posição do CM, para uma distribuição contínua de massa, será dada por:

$$\vec{r}_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

Velocidade do centro de massa (CM)



Momento linear do CM = momento linear de m_1 + momento linear de m_2

$(m_1 + m_2)\, V_{CM} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}$

$$V_{CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

É constante!

Movimento de um sistema de partículas

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{dr_i}{dt} = \frac{\sum m_i v_i}{M}$$

$$M\vec{v}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{p}_i = \vec{P}$$

Movimento de um sistema de partículas

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{M}$$

$$M\vec{a}_{CM} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i$$

F_i são as forças aplicadas ao sistema (externas e internas)

$\Downarrow$

de acordo com a 3ª lei de Newton, anulam-se

Movimento de um sistema de partículas

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Diz-nos que:

- Se a resultante das forças externas aplicadas é igual a zero:

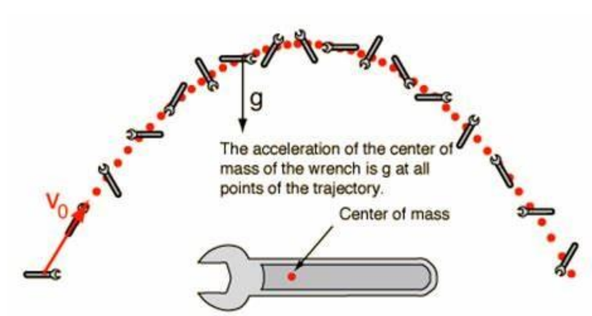
$a_{CM}=0$? o sistema está em repouso OU em movimento uniforme

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = M\vec{v}_{CM} = const.$$

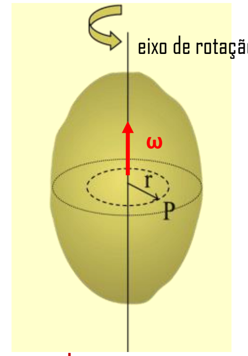
- O momento linear total do sistema conserva-se, quando não há forças externas aplicadas ao sistema (sistema isolado)

Corpo Rígido

Um corpo rígido é um sistema de partículas cujas distâncias relativas, ao longo do tempo, permanecem constantes, mantendo a forma. O movimento de um corpo rígido pode ser descrito, em geral, como a combinação de um MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO (normalmente analisado em termos do Centro de Massa) e um MOVIMENTO DE ROTAÇÃO.



Corpo Rígido: rotação

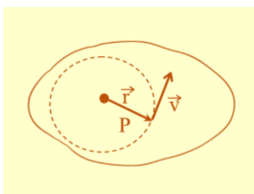


SITUAÇÃO MAIS SIMPLES - movimento é apenas de rotação, em torno de um eixo.

A trajectória de cada partícula vai ser circular.

A trajectória de P é uma circunferência de raio r, a distância de P ao EIXO de ROTAÇÃO

Vendo de topo, ao longo do eixo de rotação, temos, no plano perpendicular ao eixo e que contém o ponto P



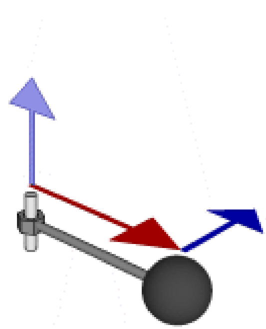
Cinemática de rotação

Distância e ângulo descrito	$s = r\theta$
Velocidade linear e Velocidade angular	$v = r\omega$
Aceleração centrípeta e Velocidade angular	$a_c = r\omega^2$
Aceleração tangencial e Aceleração angular	$a_t = r\alpha$

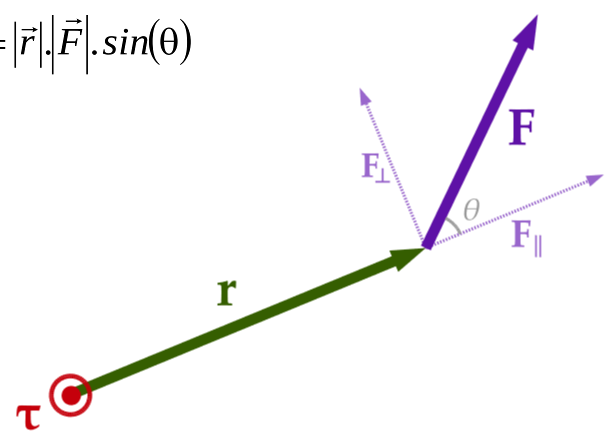
Momento de uma Força ou Torque

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

$$\left|\vec{\tau}\right| = \left|\vec{r}\right| . \left|\vec{F}\right| . sin(\theta)$$



$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$



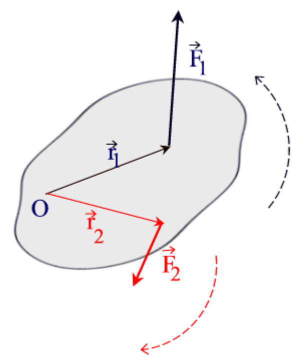
Momento angular **L**

Rotação e Momento de uma força

O que acontece <u>se tivermos mais do que uma força aplicada</u>?
Como analisar o efeito conjunto?

<u>O movimento do sistema vai ser determinado pelo **momento resultante**</u>, que é dado por

$$\vec{\tau} = \sum \vec{\tau}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$



Neste exemplo, os dois vectores têm sentidos opostos.

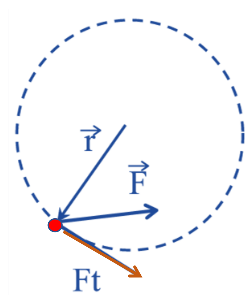
Em que sentido vai rodar o corpo em torno de O?

Rotação e Momento de uma força

Consideremos o caso simples de uma partícula de massa **m**, com movimento circular de raio **r** e sujeita a uma força **F**.

A aceleração tangencial da partícula é dada por

$$F_t = ma_t$$



O momento de F resulta apenas da componente tangencial de F (porquê?)

$$|\vec{\tau}| = rF_t = ma_t r$$

Relacionando com a aceleração angular, obtém-se

$$\tau = mr^2\alpha \quad \text{isto é,} \quad \boxed{\tau = I\alpha}$$

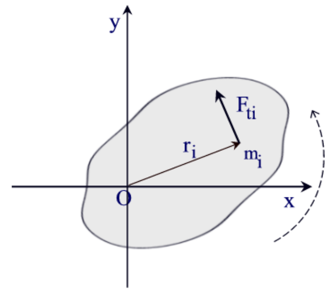
em que **I** é o **MOMENTO DE INÉRCIA** da partícula

Rotação e Momento de uma força

A expressão anterior é generalizável para um sólido constituído por **muitas partículas**, rodando em torno dum eixo Z.

Para cada partícula de massa m_i temos

$$F_{ti} = m_i a_{ti}$$



O momento (componente Z) aplicado a cada uma corresponde a:

$$\tau_i = m_i r_i^2 \alpha$$

Somando sobre todas as partículas, e como todas têm a mesma aceleração e velocidade angulares, obtém-se:

Momento de inércia (ver à frente)

$$\tau = \sum_i \tau_i = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\alpha \rightarrow \tau = \boxed{I}\alpha$$

Rotação e Momento de uma força

$$\tau = \sum_i \tau_i = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\alpha$$

Nesta soma, só contribuem as forças exteriores aplicadas ao corpo, pois as forças entre partículas (interiores) dão contribuições que cancelam aos pares, devido à lei de acção-reacção.

A lei de movimento para a rotação em torno dum eixo tem uma forma que é análoga à da 2ª lei de Newton para a translação, usando as grandezas correspondentes

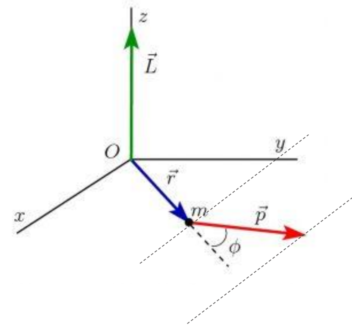
$$F = ma \leftrightarrow \boxed{\tau = I\alpha}$$

Em cada caso, F e t são as resultantes das forças e momentos exteriores.

MOMENTO ANGULAR

O momento angular de uma partícula m em relação a um ponto O é definido como o momento do vector momento linear, **p**

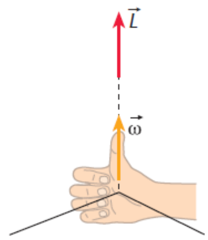
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$



As suas unidades SI são kg.m^{2}s^{-1}

De acordo com as regras do produto vectorial (ϕ ângulo entre r e v)

$$\left|\vec{L}\right| = mvr\,sen\phi$$



pª determinar o sentido do vector L, usa-se a regra da mão direita

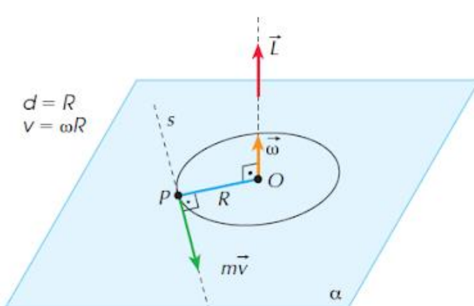
MOMENTO ANGULAR

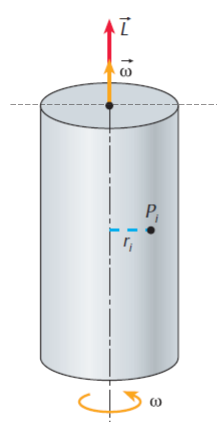
- **MOVIMENTO CIRCULAR**

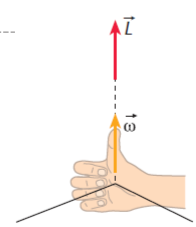
v = r ω

Neste caso ϕ=90º e fica

$$L = mvr = m\omega r^2$$

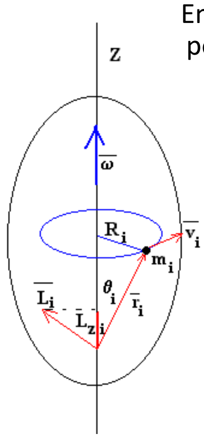






MOMENTO ANGULAR DE UM CORPO RÍGIDO

Para o caso dum corpo rígido em rotação em torno dum eixo fixo, vamos obter uma expressão que relaciona directamente $\vec{L}$ com a velocidade angular $\vec{\omega}$.



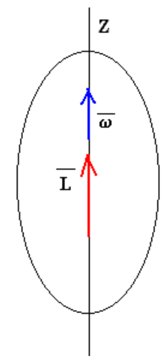
Em relação ao eixo, o movimento de cada partícula é circular, portanto

$$L_i = m_i\, v_i\, r_i = m_i \omega r_i^{\,2}$$

A soma sobre todas as partículas só terá componente segundo o eixo de rotação (Z)

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i \left(m_i r_i^{\,2}\right)\omega = I\omega_z$$

$$\boxed{L_z = I\omega_z}$$



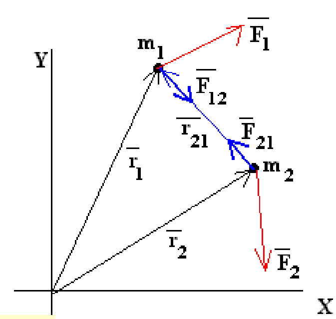
para um eixo de simetria que passe pelo CM

Numa situação geral, a relação é mais complexa!

CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$
$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$

Vamos verificar este resultado para um SISTEMA DE DUAS PARTÍCULAS, sujeitas a forças exteriores e interiores (interacção)



Para cada partícula, vimos que

$$\frac{d\,\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_{i\,ext} + \vec{F}_{i\,int}\right)$$

$$\frac{d\,\vec{L}}{dt} = \frac{d\,\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\,\vec{L}_2}{dt} = \vec{r}_1 \times \left(\vec{F}_{1ext} + \vec{F}_{1int}\right) + \vec{r}_2 \times \left(\vec{F}_{2ext} + \vec{F}_{2int}\right) =$$
$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_{1ext} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2ext} + \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \times \left(\vec{F}_{1int}\right) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i\,ext}$$

PELA LEI DA ACÇÃO-REACÇÃO $\boxed{\vec{F}_{1int} = -\vec{F}_{2int}}$ **que são paralelas a** $r_2 - r_1$ $[=\overrightarrow{r_{21}}]$

CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

Se tivermos um sistema de partículas, o resultado é generalizável. Cada partícula está sujeita a forças exteriores e interiores ao sistema. A contribuição destas últimas, somada sobre todas as partículas, é nula (devido à lei de acção-reacção).

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i\,ext} = \sum_i \frac{d\,\vec{L}_i}{dt} = \frac{d\,\vec{L}}{dt}$$

$$\boxed{\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d\,\vec{L}}{dt}}$$

NUM SISTEMA ISOLADO (sem forças exteriores aplicadas), **O MOMENTO ANGULAR É CONSTANTE.**

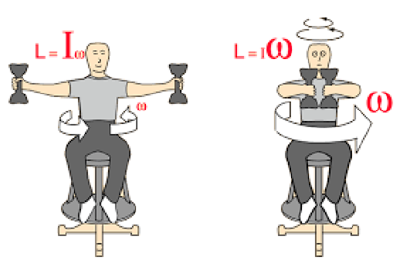
Se **r** e **F** forem colineares, **L** é constante – **acção de Forças Centrais**

CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

Num sistema isolado, o momento angular mantém-se constante.

Uma situação interessante ocorre quando o momento de inércia varia.

$$\boxed{\overrightarrow{L_{início}} = \overrightarrow{L_{fim}}}$$



$$\boxed{(I\,\omega)_{\text{início}} = (I\,\omega)_{\text{fim}}}$$

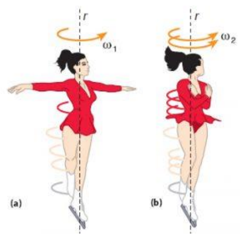
https://youtu.be/5cRb0xvPJ2M

MOMENTO DE INÉRCIA

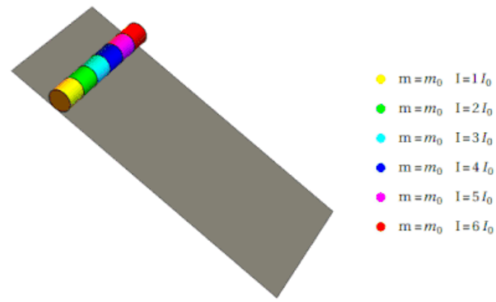
Atrás fizemos referência ao Momento de Inércia de uma partícula $I = mr^2$
e de um conjunto de partículas, a propósito do Momento de Força resultante:

$$\tau = \sum_i \tau_i = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \alpha$$

Como percepcionamos o Momento de Inércia?



A bailarina ao abrir os braços, diminui a velocidade de rotação



32

Cálculo do **Momento de inércia** - corpos extensos

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

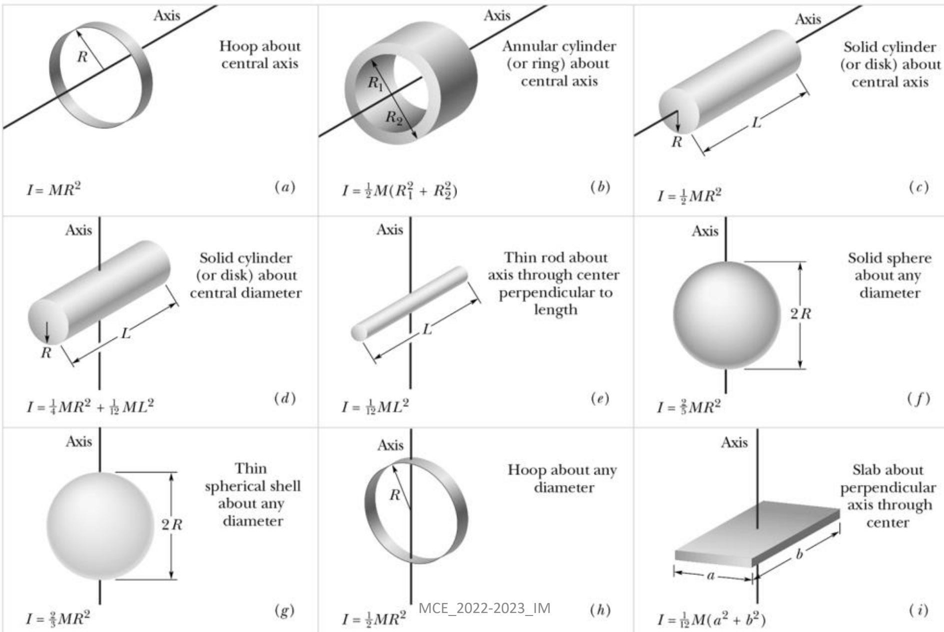
Para calcular concretamente os momentos de inércia temos que relacionar a variável massa com as coordenadas espaciais (a 3D o volume e a massa volúmica)

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV} \quad \Rightarrow \quad dm = \rho\, dV$$

$$I = \int \rho r^2 dV$$

33

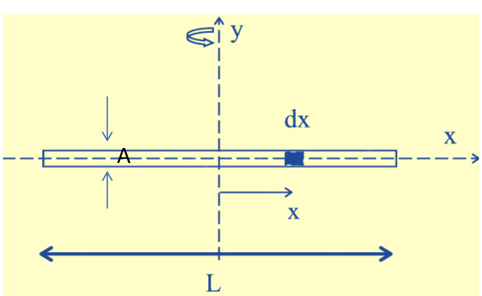
Tabela de Momentos de Inércia para eixos que passam no Centro de Massa



34

Exemplo - Barra homogénea 1

Momento de Inércia relativamente ao eixo perpendicular (transversal) que passa pelo centro de massa da barra



A distância ao eixo é a coordenada x $\quad -\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2}$

densidade linear

$$dm = \frac{M}{L}dx$$

Massa Total, M

Comprimento da barra, L

dm = ρ.A.dx

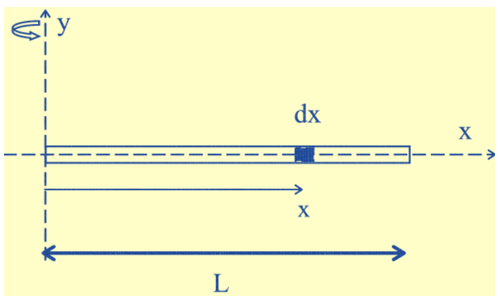
$$I_C = \int r^2 dm = \int x^2 dm = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{M}{L}\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-L/2}^{L/2}$$

$$\boxed{I_c = \frac{ML^2}{12}}$$

35

Exemplo - Barra homogénea 2

Momento de Inércia relativamente a um eixo perpendicular que passa pela extremidade da barra



A distância ao eixo é a coordenada x

$$0 \le x \le L$$

$$dm = \frac{M}{L} dx$$

Massa Total, M

Comprimento da barra, L

$I_E = 1/12\ ML^2 + M(L/2)^2$
$= (1/12+3/12)\ ML^2 = 1/3\ ML^2$

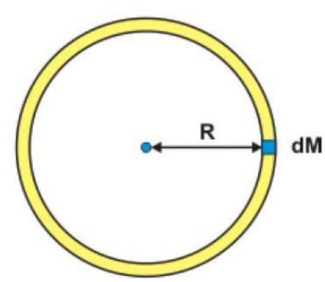
$$I_E = \int r^2 dm = \int x^2 dm = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{M}{L}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^L$$

$$\boxed{I_E = \frac{ML^2}{3}}$$

Exemplo - Anel

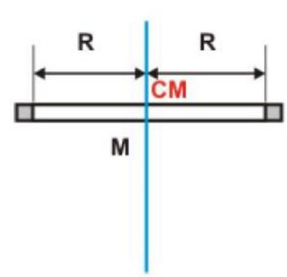
Anel fino homogéneo de massa M e raio R

relativamente a um eixo perpendicular pelo centro.



$$I = \int r^2 dm = \int R^2 dm = R^2 \int dm = R^2 M$$

O resultado é o mesmo para um cilindro oco de espessura fina!

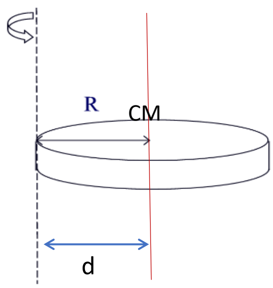


Teorema de Steiner ou do eixo paralelo

O Teorema permite que consideremos a seguinte igualdade para o momento de inércia em torno de um eixo paralelo ao eixo que passa pelo Centro de Massa

Momento de Inércia em torno de um eixo paralelo

$$\boxed{I = I_{CM} + Md^2}$$



d = distância do CM ao eixo

M = Massa do corpo

Considerando o exemplo ilustrado, obtém-se

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

$$\vec{L}_z = \sum \mathrm{I_i}\vec{\omega}$$

sendo I, o momento de inércia, $\sum m_i r^2_i$

O MOMENTO DE INÉRCIA É UMA GRANDEZA ESCALAR, que mede a resistência à variação da velocidade angular.

$EC_{partícula} = ½ \, m \, v^2$

A **ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO** é dada por

$v = r\,\omega$

$$EC_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Unidade S.I. de energia - joule, J

Variação Temporal do Momento Angular e Momento de Força

$$\frac{d\,\vec{L}}{dt} = \underbrace{\frac{d\,\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{\vec{v} \times \vec{p} = \vec{0}} + \vec{r} \times \frac{d\,\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\,\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\,\vec{L}}{dt}$$

O momento da força resultante aplicada a uma partícula é igual à variação temporal do momento angular

De notar que o momento da força e o momento angular são calculados em relação ao mesmo ponto

2ª LEI DE NEWTON DO MOVIMENTO DE ROTAÇÃO

$$\vec{\tau} = I\,\vec{\alpha}$$

MCE_IM_2022-2023

40

40