

Sinais e Sistemas Electrónicos

Problemas resolvidos IV

Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

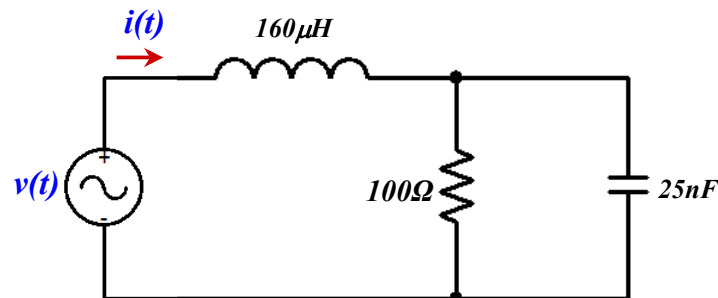


Sinais e Sistemas Electrónicos – 2022/2023

Circuitos em regime sinusoidal

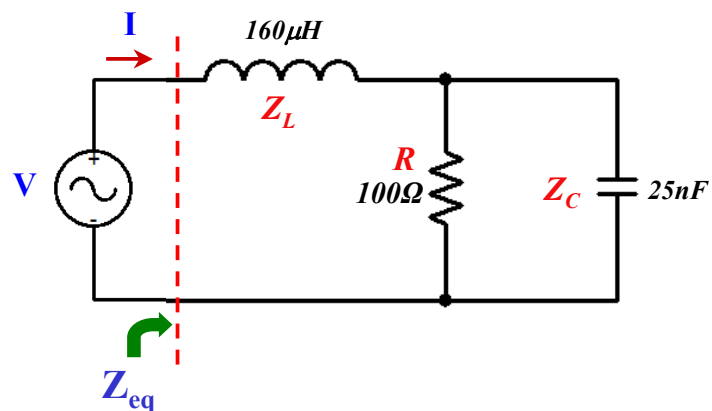
1 – Para o circuito representado, calcule

- a **frequência** para a qual a tensão sinusoidal $v(t)$ está em fase com $i(t)$;
- a **impedância** total vista pela fonte $v(t)$ a essa frequência.



IV-3

Com fasores:



I e V relacionam-se por

$$I = \frac{V}{Z_{eq}}$$

Para que os fasores I e V tenham o mesmo ângulo (de forma a ter $v(t)$ e $i(t)$ em fase) é preciso que Z_{eq} seja um número real.

Z_{eq} tem de ser, portanto, uma impedância **resistiva**.

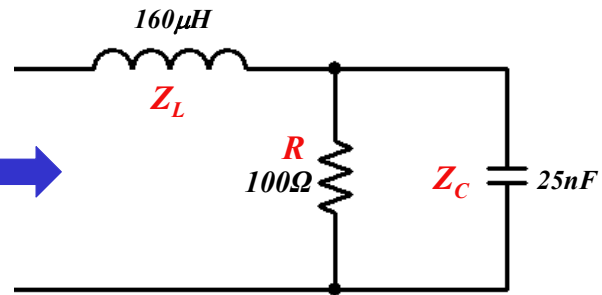
IV-4

a) Calculemos então Z_{eq}

$$Z_L = j\omega L$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Z_{eq} 



$$Z_{eq} = Z_L + (R // Z_C) = j\omega L + \frac{R(1/j\omega C)}{R + (1/j\omega C)}$$

Multiplicando a fracção pelo complexo conjugado do denominador e simplificando, obtemos

$$Z_{eq} = \frac{R + j\omega[(\omega^2 R^2 C^2 + 1)L - R^2 C]}{\omega^2 R^2 C^2 + 1}$$

IV-5

$$Z_{eq} = \frac{R + j\omega[(\omega^2 R^2 C^2 + 1)L - R^2 C]}{\omega^2 R^2 C^2 + 1}$$

Para que Z_{eq} seja real, é preciso que a parte imaginária seja nula, donde

$$\omega[(\omega^2 R^2 C^2 + 1)L - R^2 C] = 0$$

portanto

$$\omega = 0 \quad \vee \quad [(\omega^2 R^2 C^2 + 1)L - R^2 C] = 0$$

Resolvendo a segunda igualdade em ordem a ω ...

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{R^2 C^2}} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} L = 160 \mu H, \\ R = 100 \Omega \\ C = 25 nF \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \omega = 300 \text{ Krad} / s \\ f = 47.7 \text{ KHz} \end{matrix}$$

IV-6

b) impedância à frequência ω calculada?

$$Z_{eq} = \frac{R + j\omega[(\omega^2 R^2 C^2 + 1)L - R^2 C]}{\omega^2 R^2 C^2 + 1}$$

A **300krad/s** a parte imaginária da impedância é nula pelo que fica

$$Z_{eq(300Krad/s)} = \frac{R}{(0.3 \times 10^6)^2 R^2 C^2 + 1}$$

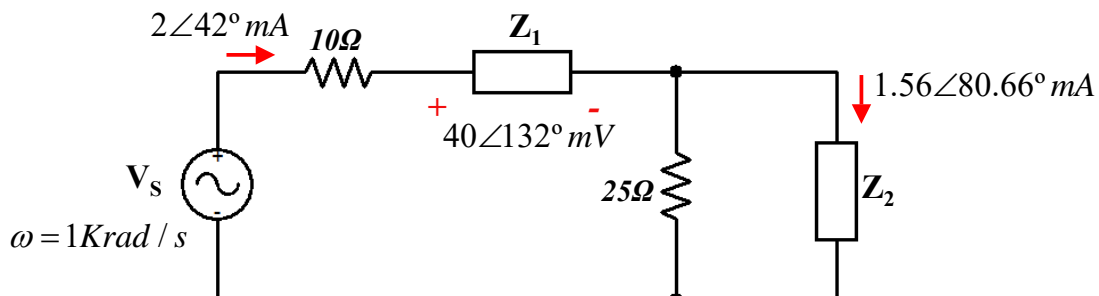
Substituindo valores obtemos

$$Z_{eq(300Krad/s)} = 64\Omega$$

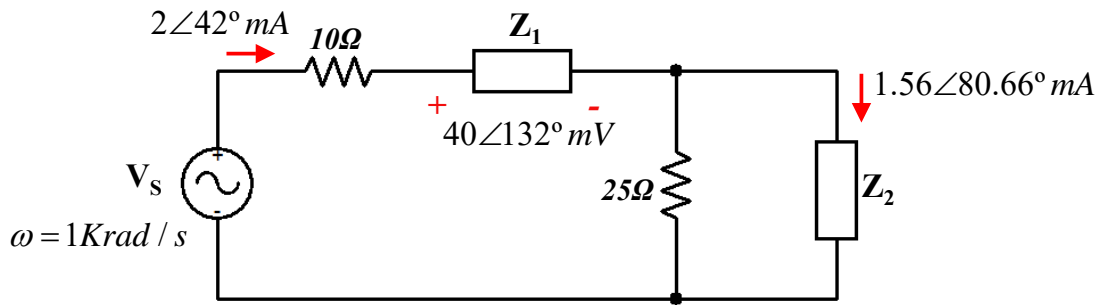
IV-7

2 – Considere o circuito representado na figura.

- De que tipo (resistência, condensador ou bobina) é o elemento Z_1 .
- Determine o seu valor.
- Calcule o valor de Z_2 .



IV-8

a) Tipo de Z_1 ?

$$Z_1 = \frac{V}{I} = \frac{40 \angle 132^\circ}{2 \angle 42^\circ} = 20 \angle 90^\circ \Omega \quad \Rightarrow \quad \text{Com uma fase de } 90^\circ, Z_1 \text{ tem de ser uma bobina}$$

b) Valor de Z_1 ? $Z_1 = 20 \angle 90^\circ \Omega = j20\Omega = j\omega L$

Com $\omega = 1 \text{ Krad/s}$, vem $L = 20 \text{ mH}$

IV-9

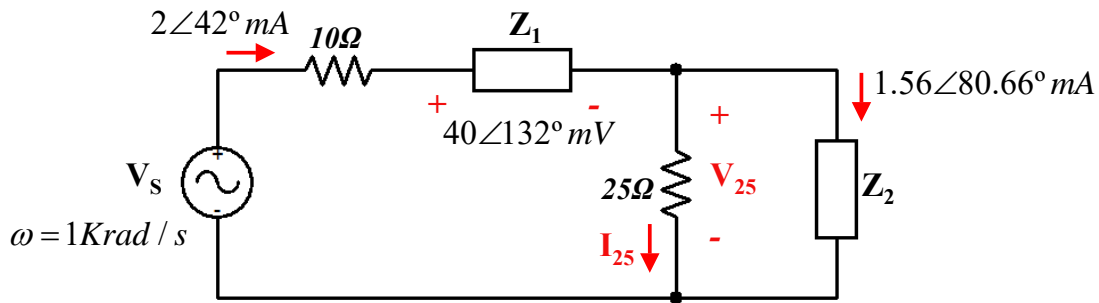
Antes de resolver a alínea c) recordemos a...

Fórmula de Euler:

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

... que iremos usar para converter fasores da forma polar para a representação algébrica.

IV-10

c) Valor de Z_2 ?

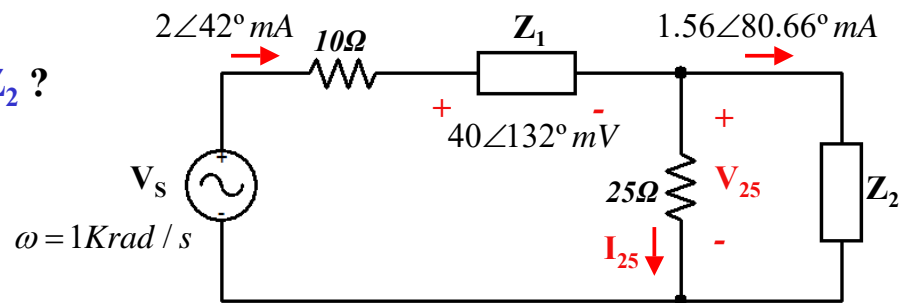
Usando KCL: $I_{25} = 2\angle 42^\circ - 1.56\angle 80.66^\circ$

$$= 2(\cos 42^\circ + j \sin 42^\circ) - 1.56(\cos 80.66^\circ + j \sin 80.66^\circ)$$

$$= 1.233 - j0.2 \text{ [mA]}$$

$$V_{25} = 25I_{25} = 30.83 - j5 \text{ [mV]}$$

IV-11

c) Valor de Z_2 ?

$$V_{25} = 30.83 - j5 \text{ [mV]}$$

$$V_{25} = \sqrt{30.83^2 + (-5)^2} \angle \arctan(-5/30.83) = 31.23 \angle -9.21^\circ \text{ [mV]}$$

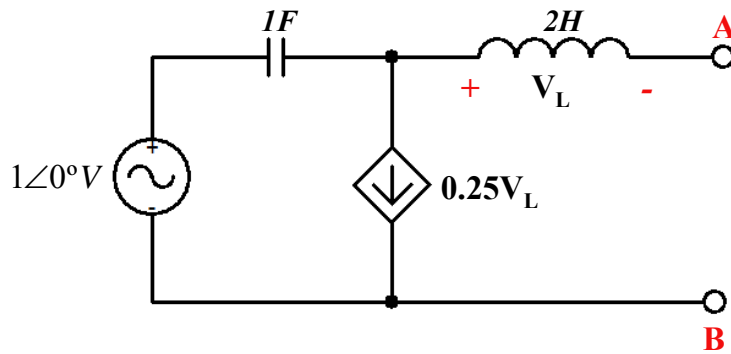
$$Z_2 = \frac{V_{25}}{1.56\angle 80.66^\circ} = 20 \angle -90^\circ \Omega$$

Com uma fase de -90° , Z_2 tem de ser um **condensador**

$$Z_2 = -j20\Omega = 1/j\omega C \quad \text{Com } \omega = 1\text{Krad/s, vem } C = 50\mu\text{F}$$

IV-12

3 – Calcule o **equivalente de Thévenin** entre os terminais **A** e **B**, considerando $\omega = 1 \text{ rad/s}$.



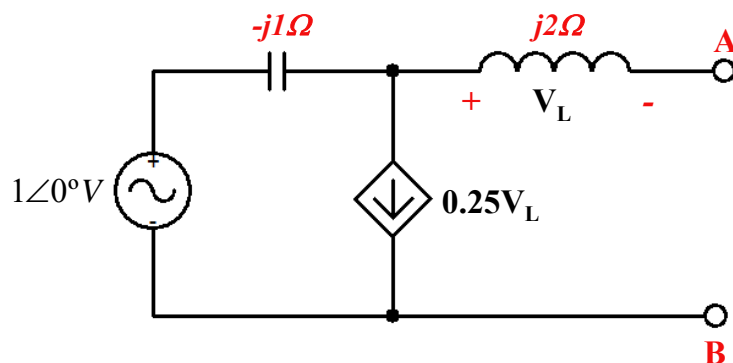
Ficha “Circuitos em regime sinusoidal”, prob. 6.

IV-13

Calculamos primeiro as impedâncias do condensador e da bobina

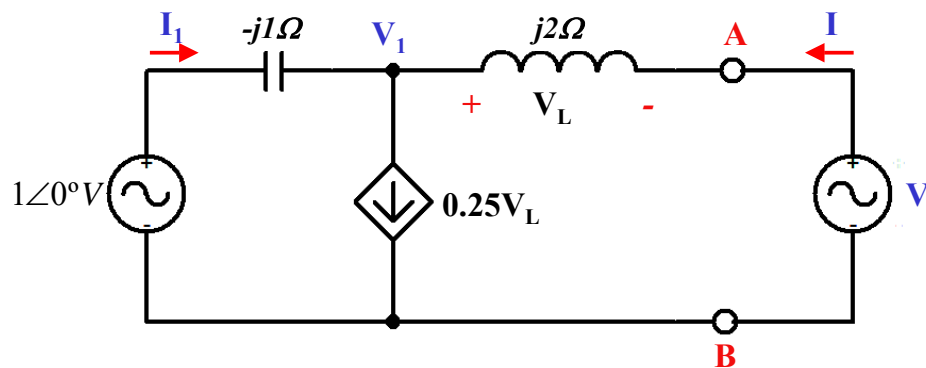
$$\omega = 1 \text{ rad/s} \quad \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{1 \times 1} = -j1\Omega$$

$$j\omega L = j1 \times 2 = j2\Omega$$



IV-14

Calculamos agora o equivalente pelo método universal

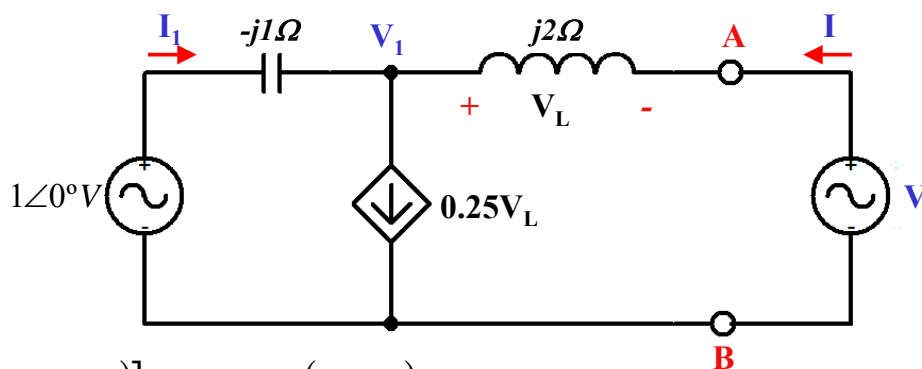


Usando KCL no nó V_1 : $I_1 + I = 0.25V_L \Leftrightarrow \frac{1 - V_1}{-j} + I = 0.25V_L$

Sabendo que $V_1 = V + V_L$ e $V_L = -j2I$

Substituindo estas igualdades em cima $j[1 - (V - j2I)] + I = 0.25(-j2I)$

IV-15



$$j[1 - (V - j2I)] + I = 0.25(-j2I)$$

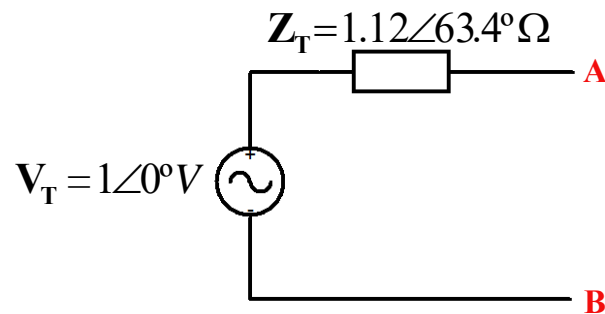
De onde se obtém $V = (0.5 + j)I + 1$

Dos coeficientes da equação tiramos

$$\mathbf{Z_T} = (0.5 + j)\Omega \quad \text{e} \quad \mathbf{V_T} = 1V$$

ou $\mathbf{Z_T} = 1.12\angle 63.4^\circ \Omega \quad \text{e} \quad \mathbf{V_T} = 1\angle 0^\circ V$

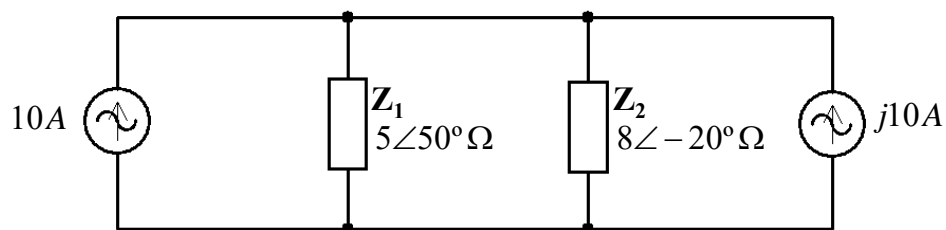
IV-16

Equivalente de Thévenin

IV-17

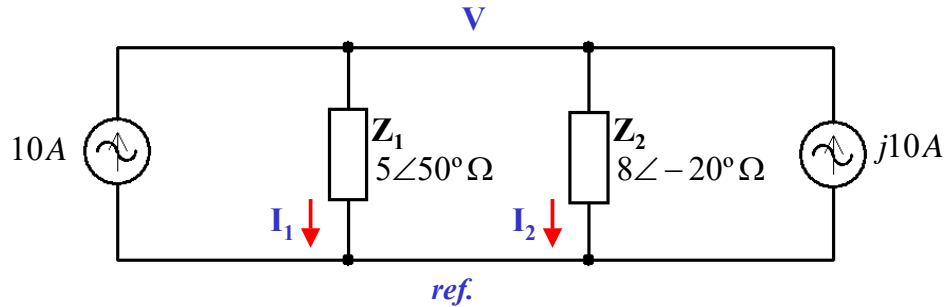
4 – Relativamente ao circuito abaixo, calcule as potências médias...

- a) ... dissipadas em Z_1 e Z_2 ;
- b) ... fornecidas pelas fontes.



IV-18

Usando análise nodal, começamos por determinar a tensão **V** no circuito



$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 &= 10 + j10 \Leftrightarrow \frac{\mathbf{V}}{5\angle 50^\circ} + \frac{\mathbf{V}}{8\angle -20^\circ} = 10(1 + j) \\ \Leftrightarrow \frac{8/5\angle -70^\circ \mathbf{V}}{8\angle -20^\circ} + \frac{\mathbf{V}}{8\angle -20^\circ} &= 10\sqrt{2}\angle 45^\circ \\ \Leftrightarrow \mathbf{V}(1 + 8/5\angle -70^\circ) &= 80\sqrt{2}\angle 25^\circ \end{aligned}$$

IV-19

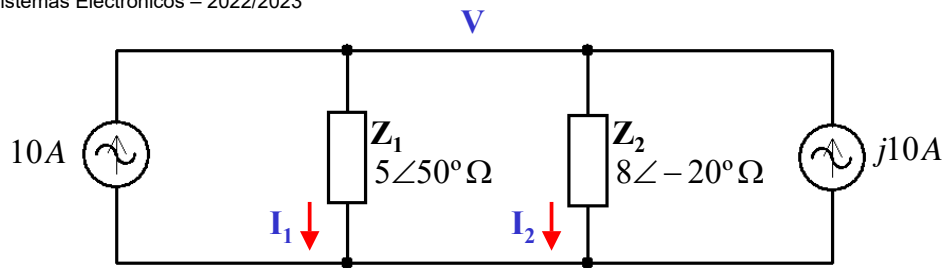
$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \mathbf{V}(1 + 8/5\angle -70^\circ) &= 80\sqrt{2}\angle 25^\circ \\ \Leftrightarrow \mathbf{V}[1 + (8/5)(\cos(-70^\circ) + j\sin(-70^\circ))] &= 80\sqrt{2}\angle 25^\circ \\ \Leftrightarrow \mathbf{V}(1.55 - j1.5) &= 80\sqrt{2}\angle 25^\circ \\ \Leftrightarrow \mathbf{V} = \frac{80\sqrt{2}\angle 25^\circ}{2.16\angle -44.1^\circ} &= 52.5\angle 69.1^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

A **potência média** num elemento de circuito é dada por

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$$

Sendo θ e ϕ as fases da **tensão** e **corrente**, respectivamente.

IV-20



Note-se que para obter as potência em Z_1 e Z_2 não precisamos de calcular as correntes respectivas, dado que:

$$\Leftrightarrow \mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \Leftrightarrow |Z| \angle Z = \frac{V_m}{I_m} \angle(\theta - \phi)$$

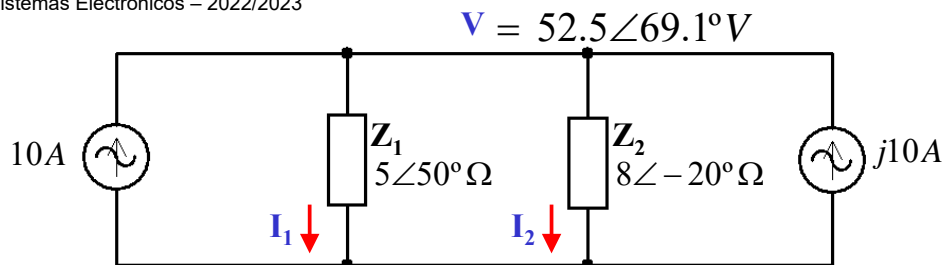
Pelo que

$$I_m = \frac{V_m}{|Z|} \quad \text{e} \quad (\theta - \phi) = \angle Z$$

e portanto

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{|Z|} \cos(\angle Z)$$

IV-21



$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{|Z_1|} \cos(\angle Z_1) = \frac{1}{2} \frac{52.5^2}{5} \cos(50^\circ) = 177.2W$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \frac{52.5^2}{8} \cos(-20^\circ) = 161.9W$$

Potências
absorvidas

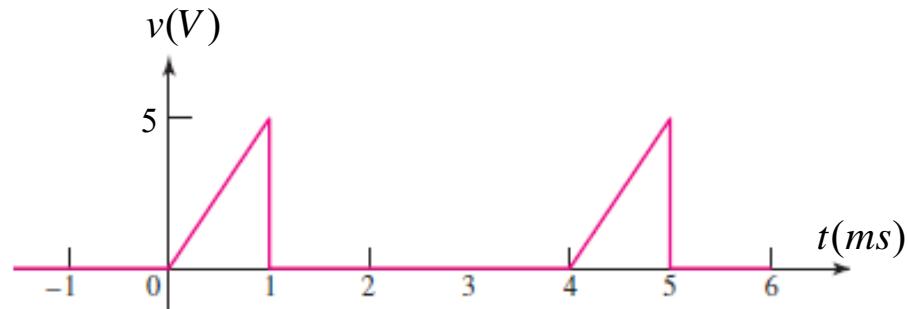
$$P_{10} = \frac{1}{2} (52.5)(10) \cos(69.1^\circ - 0) = 93.6W$$

Potências
fornecidas

$$P_{j10} = \frac{1}{2} (52.5)(10) \cos(69.1^\circ - 90^\circ) = 245.3W$$

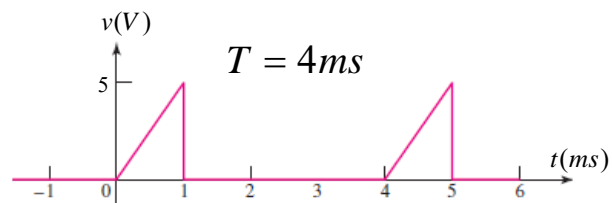
IV-22

5 – Determine os valores médio e eficaz da tensão periódica representada na figura abaixo.



Ficha “Circuitos em regime sinusoidal”, prob. 10-b).

IV-23



No período que vai de 0 a 4ms, a tensão $v(t)$ é dada algebricamente por:

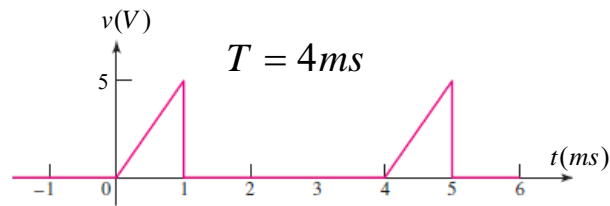
$$v(t) = \begin{cases} 5000t \text{ [V]} & 0 < t < 1\text{ms} \\ 0\text{V} & 1 < t < 4\text{ms} \end{cases}$$

Valor médio de $v(t)$:

$$\overline{v(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{1}{4 \times 10^{-3}} \int_0^{1\text{ms}} (5000t) dt$$

$$\overline{v(t)} = \frac{1}{4 \times 10^{-3}} 5000 \frac{t^2}{2} \Big|_0^{1\text{ms}} = 625\text{mV}$$

IV-24

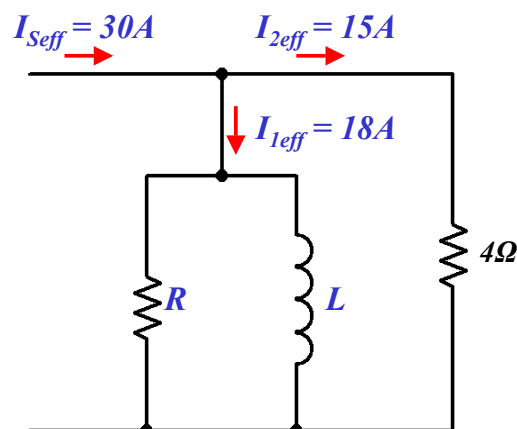


Valor eficaz de $v(t)$:

$$\begin{aligned}
 v_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{4 \times 10^{-3}} \int_0^{1ms} (5000t)^2 dt} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{4 \times 10^{-3}} (25 \times 10^6) \frac{t^3}{3} \Big|_0^{1ms}} = \sqrt{\frac{6.25}{3}} \\
 v_{eff} &= 1.44V
 \end{aligned}$$

IV-25

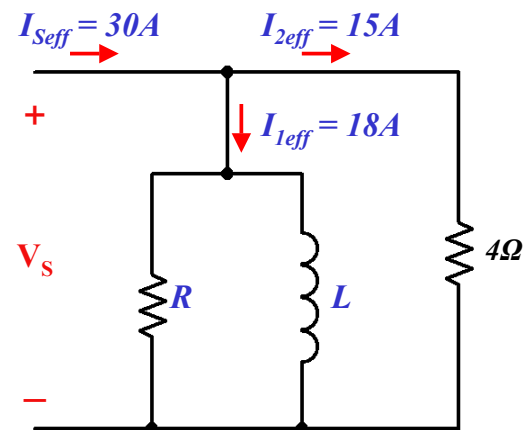
6 – Considere o circuito representado na figura e as correntes indicadas com os respectivos valores eficazes. Calcule R e o valor da impedância de L .



IV-26

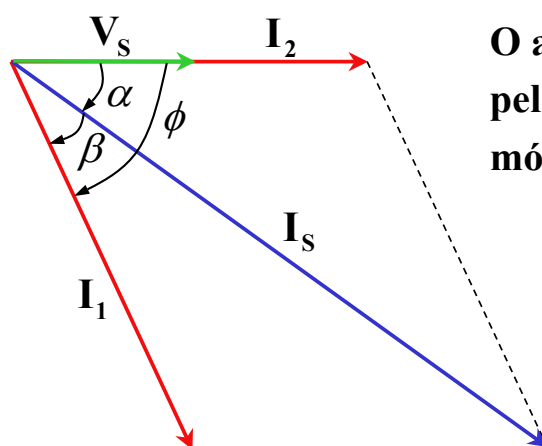
Este problema resolve-se melhor começando por traçar um **diagrama fasorial**. Para o fazer, note-se que:

- O fasor I_2 tem de estar em fase com V_S ;
- Como o paralelo de R e L é indutivo, o fasor I_1 tem de estar em atraso relativamente a V_S ;
- Finalmente, $I_S = I_1 + I_2$.



IV-27

O diagrama fasorial deverá ser portanto



O ângulo α pode ser determinado pelo **teorema do cosseno**, partindo do módulo dos vectores:

$$I_1^2 = I_2^2 + I_S^2 - 2I_2I_S \cos \alpha$$

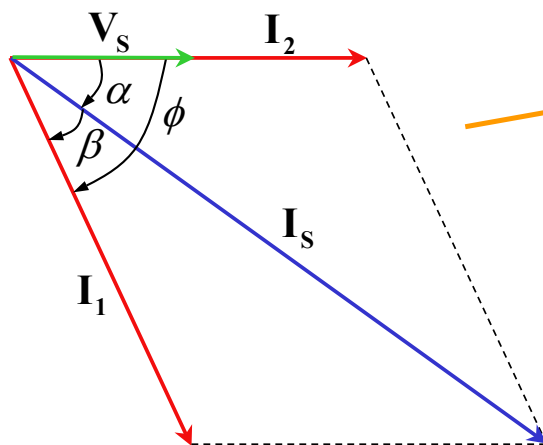
$$\alpha = \arccos \frac{15^2 + 30^2 - 18^2}{2 \times 15 \times 30}$$

$$\alpha = 27.13^\circ$$

O ângulo β é calculado da mesma maneira:

$$I_2^2 = I_1^2 + I_S^2 - 2I_1I_S \cos \beta \Rightarrow \beta = \arccos \frac{30^2 + 18^2 - 15^2}{2 \times 18 \times 30} = 22.33^\circ$$

IV-28

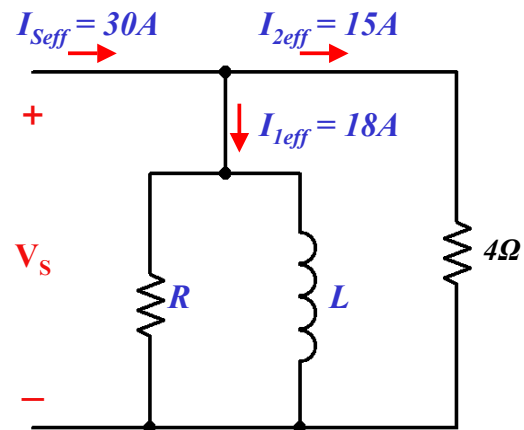


$$\phi = \alpha + \beta = 49.5^\circ$$

Os fasores \mathbf{I}_1 e \mathbf{V}_s são

$$\mathbf{I}_1 = 18\sqrt{2} \angle -49.5^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{V}_s = (4\Omega)\mathbf{I}_2 = 60\sqrt{2} \angle 0^\circ \text{ V}$$



IV-29

$$\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_s} = \mathbf{Y}_T$$

$$\mathbf{Y}_T = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}$$

$$\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_s} = \frac{18\sqrt{2} \angle -49.5^\circ}{60\sqrt{2} \angle 0^\circ}$$

$$= 0.3 \angle -49.5^\circ$$

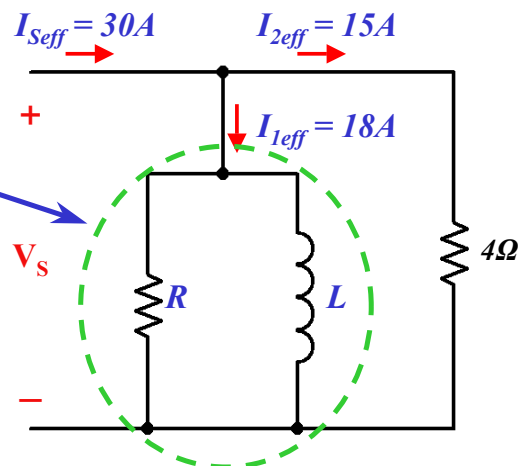
$$= (0.195 - j0.228) \Omega^{-1}$$

igualando...

$$\mathbf{Y}_T = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} = 0.195 - j0.228$$

$$R = \frac{1}{0.195} = 5.13 \Omega$$

$$X_L = \frac{1}{0.228} = 4.39 \Omega$$



IV-30