universidade de aveiro

departamento de física

MECÂNICA E CAMPO ELETROMAGNÉTICO

ano letivo 2022/2023

Capítulo 3. Campos elétrico e magnético

1ª série

Distribuições de carga

1. A densidade linear de carga dum bastão de comprimento **L** é dada por : $\lambda = \lambda_0 + 2x$ (onde $0 \leq x \leq L$). Qual é a carga total do bastão?

Solução: $Q = \lambda_0 L + L^2$

2. Um disco de raio **R** tem uma densidade de carga dada por **σ** = 3r. Calcule a carga total do disco.

Solução: $Q = 2\pi R^3$

3. Uma coroa esférica de raios **r₁** e **r₂** ($r_1<r_2$) tem uma densidade de carga que é inversamente proporcional ao raio. Sabendo que a carga total da coroa é **Q**, obtenha uma expressão para a densidade de carga.

Solução: $\rho = \frac{Q}{2\pi\,(r_2^2 - r_1^2)\,r}$

Lei de Coulomb. Campo e Potencial Elétricos

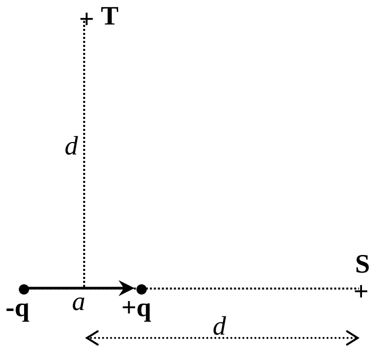
4. Quatro cargas +q,+q, –q,–q estão colocadas nos vértices dum quadrado de lado **a**.

a) Determine, para os dois casos de distribuição das cargas, o campo elétrico e o potencial no centro do quadrado.

b) Escolha uma linha apropriada e verifique que $\int_\Gamma \vec{E}\,.\,\vec{dl} = 0$

Solução: $\vec{E} = \frac{q\sqrt{2}}{\pi\varepsilon_o a^2}\ \hat{k}\ e\ V = 0\ ;\ \vec{E} = \vec{0}\ e\ V = 0$

5. Duas cargas iguais e de sinais contrários, com uma distância constante entre si constituem um dipolo (ver figura).



a) Mostre que o campo elétrico em **S** é paralelo ao vetor $\vec{a}$, e em **T** tem o sentido contrário.

b) Determine o campo elétrico em **T** e em **S**, fazendo aproximações adequadas (***d>>a***). Introduza no resultado o vector momento dipolar elétrico, $\vec{P} = q\vec{a}$

c) Mostre que um dipolo colocado num campo elétrico uniforme $\vec{E}$ fica sujeito a um binário cujo momento é dado por $\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E}$.

Solução: $\vec{E}(S) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\vec{p}}{d^3}\ \ ;\ \ \vec{E}(T) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\vec{p}}{d^3}$

6. Considere um anel de raio **R** carregado uniformemente com uma carga total **Q**.

a) Calcule o campo elétrico no centro do anel.

b) Calcule o campo elétrico num ponto do eixo do anel, distante de **d** do seu centro

i) a partir da lei de Coulomb.

ii) A partir do potencial

Solução: $\vec{E}(O) = \vec{0}\ \ ;\ \ E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q\,d}{(R^2+d^2)^{3/2}}\ \ ;\ \ V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{(R^2+d^2)^{1/2}}$

7. Um fio semi-circular de raio **R** está uniformemente carregado com uma carga total **Q**. Encontre o vetor campo elétrico no centro de curvatura.

Solução: $E = \frac{Q}{2\varepsilon_o \pi^2 R^2}$

8. Determine a partir da lei de Coulomb o campo e o potencial criados por um fio infinito, carregado com uma densidade linear de carga constante **λ**.

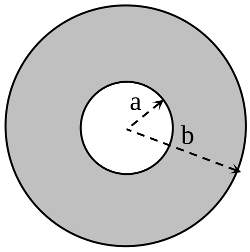
Solução: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\ \hat{u}_r\ \ e\ \ V = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_o} \ln r + const.$ há cargas no infinito…

9. Determine, a partir da lei de Coulomb o, campo e o potencial criados num ponto do eixo (à distância **x**) dum disco de raio **R**, uniformemente carregado com uma densidade superficial de carga ☐☐☐Estude o caso limite $R \rightarrow \infty$?

Solução: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\ \hat{u}_x\ \ e\ \ V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}(\sqrt{x^2+R^2} - |x|)$

quando $R \rightarrow \infty$, $E \rightarrow \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ como o caso do plano infinito (σ)

10. Um anel circular, de raio interior **a** e de raio exterior **b** (a<b), tem uma densidade superficial de carga $\boldsymbol{\sigma}$ constante.



a) Calcule o potencial num ponto P do eixo da coroa, à distância **x** do centro.
b) Deduza a expressão do campo elétrico em P.
c) Verifique que no limite em que a → 0, as expressões acima tendem para o caso do disco uniformemente carregado.

Solução:
$V(P) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(\sqrt{x^2+b^2} - \sqrt{x^2+a^2}\right)$ e $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}\right)\ \hat{u}_x$

11. Uma superfície hemisférica fina de raio **R**, com a base situada no plano **xy**, tem uma carga **Q** uniformemente distribuída. Encontre o campo elétrico e o potencial no centro de curvatura **O**, origem do sistema de eixos.

Solução: $\vec{E}(O) = -\frac{\sigma}{4\varepsilon_o}\ \hat{u}_z = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_o R^2}\ \hat{u}_z\ ;\ V(O) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\ R$

12. Um fio de comprimento **L**, centrado na origem dum sistema de eixos **xy** e paralelo ao eixo-**xx**, está carregado uniformemente com uma densidade de cargas dada por ***λ Cm⁻¹***.
a) Determine a expressão do campo elétrico num ponto genérico ao longo do fio, fora e dentro do fio.
b) Determine o campo elétrico nos pontos que se situam ao longo da reta que é perpendicular ao fio e passa pelo ponto médio deste.

Solução: $E_{fora}(x) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x-\frac{L}{2}} - \frac{1}{x+\frac{L}{2}}\right]\ ;\ E_{dentro}(x) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\frac{L}{2}-x} - \frac{1}{\frac{L}{2}+x}\right]\ ;\ E(y) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{L}{y(L^2+4y^2)^{1/2}}\right]$

Aplicações do teorema de Gauss

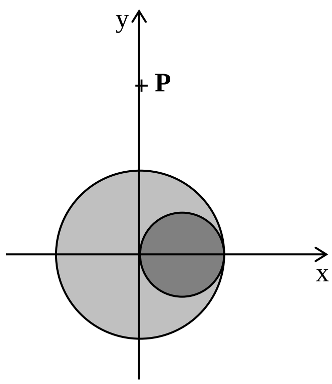
13. Uma esfera de centro A e de raio **a** está carregada com uma densidade volúmica uniforme ρ, exceto numa cavidade esférica de centro B e de raio **b,** que não contem cargas. Mostre que o campo eléctrico dentro da cavidade é uniforme e encontre uma expressão para ele.

Solução: $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\ \vec{AB}$

14. Linhas de *força* emergem radialmente duma superfície esférica e têm uma densidade uniforme ao longo da superfície. Quais são as possíveis distribuições de carga dentro da esfera?

Solução: $\rho(r)\ ;\ \sigma(r)$

15. Considere uma esfera isoladora de raio **R** que tem uma carga distribuída uniformemente com densidade volúmica ρ, exceto numa região esférica de raio **R/2**, como se representa na figura. Nessa região a densidade volúmica é **2ρ**.

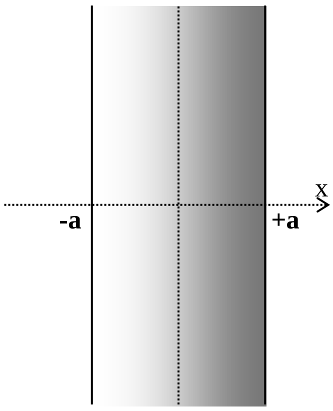


a) Calcule o campo elétrico em qualquer ponto do eixo ***xx***. Considere as várias regiões onde o campo é diferente.
b) Calcule o campo elétrico no ponto **P** do eixo ***yy***, à distância ***2R***, do centro da esfera.
c) Qual o valor do campo elétrico no ponto ***P***, se a esfera de raio **R/2** fosse comprimida até ficar com raio nulo, mantendo a carga total das duas regiões constante.
d) Determine o fluxo através de uma esfera concêntrica com a esfera na origem, e que passa por **P**.

16. Determine o campo elétrico em qualquer ponto do espaço devido a um plano infinito uniformemente carregado:
a) A partir da lei de Coulomb.
b) Usando a lei de Gauss.
Justifique o cálculo.

Solução: $\boldsymbol{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}}$

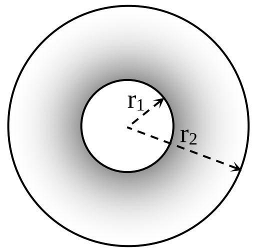
17. Considere que no espaço limitado por dois planos infinitos e paralelos (***x=a*** e ***x=-a***), existe uma distribuição de carga $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\alpha x}$.



a) Determine a carga por unidade de área existente entre os planos.
b) Mostre que o campo no exterior é nulo.
c) Determine o campo em cada ponto no interior dos planos.
d) Represente graficamente $|\vec{E}|$ em função de ***x***.
e) Que densidade de carga $\boldsymbol{\sigma}$ deveria ter a superfície dos planos, sem carga no interior, para o campo ter o mesmo valor em ***x=0*** que na situação anterior?

Solução: a) Q=0 ; b) $\vec{E}_{ext} = \vec{0}$; c) $E\,\frac{\alpha}{2\varepsilon_o}(a^2 - x^2)_{int}$
d) porção de parábola para $-a \le x \le +a$; e) $\sigma = \frac{\alpha a^2}{2}$

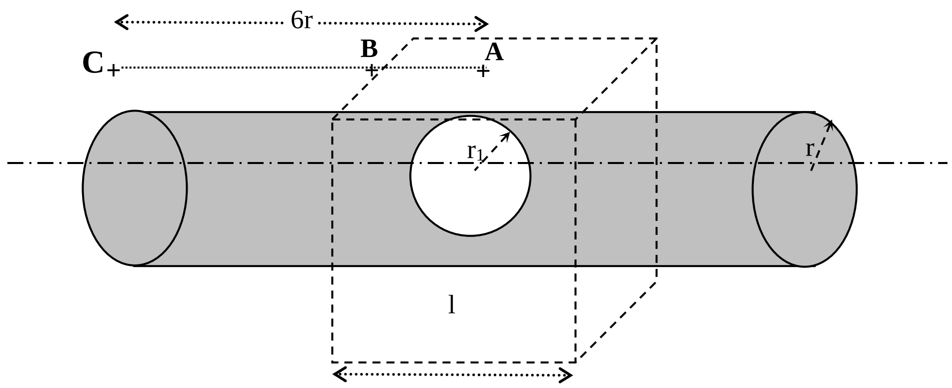
18. Considere uma coroa esférica de raios interno $\boldsymbol{r_1}$ e externo $\boldsymbol{r_2}$ com uma densidade de carga $\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{r}}$.



a) Determine o campo elétrico em qualquer ponto do espaço.
b) Que tipo de distribuição poderia criar um campo uniforme no interior da coroa esférica?

Solução: $r < r_1 \Rightarrow E=0$; $r_1 < r < r_2 \Rightarrow E = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0 r^2}(r^2 - r_1^2)$
$r > r_2 \Rightarrow E = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0 r^2}(r_2^2 - r_1^2)$

19. Considere a seguinte distribuição de cargas $\boldsymbol{\rho}$ num cilindro infinito de raio ***r***, onde existe um vazio esférico de raio $\boldsymbol{r_1 < r}$ e com centro sobre o eixo.



a) Determine o fluxo do campo elétrico através de um cubo de aresta $\boldsymbol{l > 2r}$, de tal modo que o cilindro o atravesse, nos casos em que:
i - no interior do cubo se encontra o espaço vazio.
ii - o interior do cubo não inclui esse espaço.
b) Mostre que estes cálculos não lhe permitem calcular o campo $\vec{\boldsymbol{E}}$ em qualquer ponto do espaço.
c) Usando o princípio da sobreposição determine o campo elétrico nos pontos ***A***, ***B*** e ***C***.

Solução: a) *i*) $\varphi = \frac{\rho\pi}{\varepsilon_0}\left(r^2 l - \frac{4}{3}r_1^3\right)$ a) *ii*) $\varphi = \frac{\rho\pi}{\varepsilon_0}r^2 l$
b) $\vec{E}_A = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{l} - \frac{4}{3}\frac{r_1^3}{l^2}\right)\hat{r}$; $\vec{E}_B = \left(-\frac{\rho\, r_1^3\sqrt{2}}{3\varepsilon_0 l^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{r^2}{l}\right)\hat{r}_{cil} \pm \frac{\rho\, r_1^3\sqrt{2}}{3\varepsilon_0 l^2}\hat{z}$
$\vec{E}_C = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{l} - \frac{r_1^3 l}{6\,(l^2/4+36r^2)^{3/2}}\right)\hat{r}_{cil} \pm \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{2r_1^3 r}{(l^2/4+36r^2)^{3/2}}\hat{z}$

Relações campo-potencial e equações locais do campo

20. Uma esfera de raio **R** contém uma distribuição volúmica de cargas ρ, de simetria esférica.

a) Determine a função □□ sabendo que o campo elétrico dentro da esfera é radial com um módulo constante $\mathbf{E_0}$:

   i) aplicando a forma local do teorema de Gauss.

   j) aplicando a forma integral do teorema de Gauss.

b) Calcule a carga total **Q** contida na esfera e determine o campo elétrico ao exterior da esfera. Verifique a continuidade do campo na fronteira interior/exterior da esfera.

Solução: $\rho(r) = \frac{2\varepsilon_o}{r} E_0$; $Q = 4\pi\varepsilon_o E_0 R^2$; $E(r) = \frac{E_0 R^2}{r^2}$

21. O chamado "potencial de Yukawa" é uma maneira de representar as forças nucleares, cujo alcance é muito mais curto do que as forças coulombianas:

$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{exp(-r/a)}{r}$ onde a >0 representa o alcance da interação.

Determine a distribuição volúmica de carga $\boldsymbol{\rho}$ que cria este potencial.

Solução: $\rho = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{exp(-r/a)}{ra^2}$

22. O espaço entre dois cilindros coaxiais infinitos, de raios $\mathbf{R_1 < R_2}$, está carregado com uma densidade volúmica de carga $\boldsymbol{\rho = a/r}$.

a) Determine o campo elétrico em qualquer ponto do espaço.

b) Deduza as expressões do potencial elétrico, sob a hipótese que $V(R_1) = 0$.

Solução:

a) $E_I = 0$; $E_2 = \frac{a}{\varepsilon_o}\frac{r-R_1}{r}$; $E_3 = \frac{a}{\varepsilon_o}\frac{R_2-R_1}{r}$

b) $V_I = 0$; $V_2 = \frac{a}{\varepsilon_o}\left(R_1 Ln\frac{r}{R_1} - r + R_1\right)$; $V_3 = \frac{a}{\varepsilon_o}\{(R_1 - R_2)(1 + Lnr) - R_1 LnR_1 + R_2 LnR_2\}$

23. Um longo cilindro de raio **a** tem uma carga uniforme por unidade de comprimento **Q** C/m. Encontre a d.d.p. entre dois pontos situados à distância $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ do eixo do cilindro ($\mathbf{a} < \mathbf{r_1} < \mathbf{r_2}$).

Solução: $V_1 - V_{2_1} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o} Ln\frac{r_2}{r_1}$

24. Ao longo de um plano o potencial é dado por: $V = \frac{a\ cos\,\theta}{r^2} + \frac{b}{r}$ em que **r** e θ são as coordenadas polares de um ponto do plano e **a** e **b** são duas constantes.

Encontre as componentes E_ρ e E_θ do campo elétrico, em qualquer ponto.

Solução: $E_r = -\frac{2a\cos\theta}{r^3} - \frac{b}{r^2}$; $E_\theta = -\frac{asen\theta}{r^3} + \frac{b}{r^2}$

25. Dada a função vectorial de componentes:

$$A_x = 6xy \qquad A_y = 3x^2 - 3y^2 \qquad A_z = 0$$

Calcule o integral de linha de $\vec{A}$, do ponto ***(0,0,0)*** para o ponto ***(2,4,0)***, através do caminho mais curto. Repita o cálculo para um caminho parabólico. Tire conclusões.

Solução: a) –16

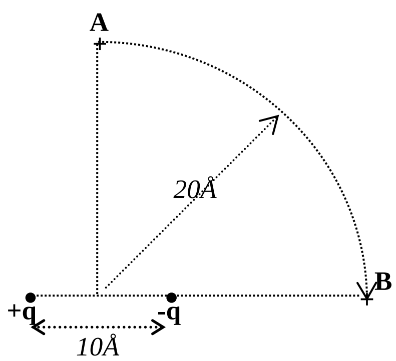
Trabalho das forças elétricas. Energia eletrostática

26. Um electrão está colocado num ponto ***A***, no campo dum dipolo de cargas ***+q*** e ***–q*** distanciadas de ***a=10 Å***.

a) Qual será o trabalho realizado se o electrão fizer uma volta circular de raio ***d=20 Å***, partindo do ponto ***A*** e voltando ao mesmo ponto. Considerando as linhas de campo dum dipolo, indique onde o trabalho é positivo ou negativo.

b) Determine o trabalho realizado no caminho circular de ***A*** para ***B***.

Solução: a) $W_{A\to A} = 0$ b) $W_{A\to B} = -e \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{d^2-(a^2/4)}$



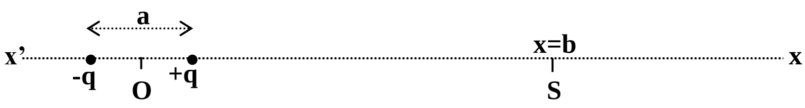
27. Calcule a energia eletrostática **W** duma esfera de raio R e de densidade de carga $\boldsymbol{\rho}$ uniforme, colocada no vácuo, pelos dois métodos seguintes

a) A partir da densidade de energia.

b) Usando a lei $W = \frac{1}{2}\int \rho V dv$ ou calculando o trabalho necessário para carregar a esfera, $W = \int_0^Q V dq$.

Solução: $W = \frac{4}{15}\,\frac{\pi\rho^2 R^5}{\varepsilon_0}$

28. Um dipolo (carga **q** e separação **a**) está colocado ao longo do eixo-**xx**.



a) Calcule o trabalho necessário para trazer uma carga **+Q** desde o infinito até ao ponto **S**, em x = b.

b) Escreva uma aproximação para o potencial em **S**, na condição b>>a.

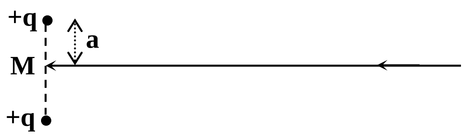
c) Use o resultado da alínea anterior para obter a amplitude e direção do campo elétrico no ponto **S**.

Solução: $W = \frac{Q\,q\,a}{4\pi\varepsilon_o(b^2 - a^2/4)}$; $V_S = \frac{q\,a}{4\pi\varepsilon_o b^2}$; $\vec{E} = \frac{2\,q\,a}{4\pi\varepsilon_o b^3}\,\hat{x}$

29. Duas cargas pontuais idênticas de valor **+q** estão separadas de uma distância **2a** como mostra a figura.
Calcule o trabalho por unidade de carga para trazer uma carga desde o infinito ao longo de uma linha representada na figura e até ao ponto **M** :

a) calculando o integral de linha

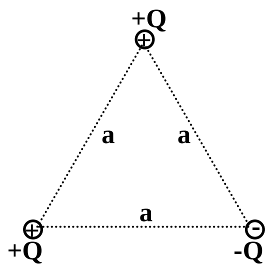
b) usando o conceito de potencial



Solução: $W = \frac{q}{2\pi\varepsilon_o a}$

30. Calcule a energia potencial do sistema de cargas ilustrado na figura.
(*Nota: a energia potencial de um sistema de cargas pontuais é igual ao trabalho necessário para trazer as cargas para as suas posições finais, desde muito longe (do infinito).*

Solução: $E_p = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o a}$



Condutores

31. Uma esfera metálica tem o raio **R** e está isolada de todos os outros corpos.

a) Expresse o potencial da superfície da esfera como função da carga nela colocada.

b) Integre a expressão da alínea anterior para determinar o trabalho necessário para carregar a esfera a um potencial **V**.

Solução: $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}$; $W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o R}$