Unidade Curricular: Mecânica e Campo Eletromagnético (MCE)

Ano Letivo 2022/23

Trabalho – Movimento de Projéteis

Relatório

Guilherme Santos, João Gaspar

107961, 107708

Grupo: 4

Turma: PL6

20/10/2022

Sumário

Este relatório pretende aprofundar o nosso conhecimento sobre os conteúdos relativos à Cinemática, mais especificamente, ao lançamento oblíquo. Esperamos também, aprender/recordar as fórmulas do movimento de um projétil como por exemplo, posição do projétil, alcance máximo, etc. Apenas através da observação e análise comportamental do projétil durante o seu lançamento seremos capazes de calcular o valor da velocidade inicial através das equações do movimento (Parte A), de analisar como o alcance varia de acordo com a variação do ângulo de lançamento (Parte B) e por fim determinar novamente a velocidade inicial do projétil, porém utilizando um pêndulo balístico (Parte C).

1. Introdução Teórica

A posição de um projétil, de massa M e velocidade inicial v_0, que se desloca no plano *x, y* é dada por:

$$x = x_0 + \ v_0 t \cos \theta_0$$

$$y = y_0 + \ v_0 t \cos \theta_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

onde g é a aceleração da gravidade, t é o tempo, x_0 e y_0 são as coordenadas da posição inicial do projétil e θ_0 é a inclinação do vetor velocidade inicial relativamente ao eixo dos *x*. Eliminando a variável t das equações, obtém-se uma nova equação para o alcance x em função do ângulo que permite determinar o ângulo correspondente ao alcance máximo, θ_{amax}. Se um corpo é lançado de uma altura y_i e atinge uma altura final y_f, θ_{amax} é dado por:

$$\theta_{amax} = arctg \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2g(y_i - \ y_f)}{v_0^2}}}$$

Se o valor da altura inicial for igual ao da altura final (y_i = y_f) então, $tg\theta_{amax} = 1$ pelo que $\theta_{amax} \ = 45^o$.

Pêndulo Balístico:

O pêndulo balístico consiste numa massa *M* suspensa de um fio ou uma barra. Se um projétil de massa m (*m*<<*M*) for disparado contra a massa *M* e nela ficar retido, então o conjunto adquire energia cinética, E_C, que, à medida que o pêndulo se move, vai sendo transformada em energia potencial gravítica, E_p. A altura máxima, *h*, atingida será tal que a energia potencial gravítica máxima iguala a energia cinética inicial, devido à conservação da energia mecânica. Considerando v_0 a velocidade inicial do projétil e v_2 a velocidade do conjunto massa + projétil, logo após a colisão, obtém-se:

$$E_C(inicial) = \ \frac{1}{2}(m + M)v_2^2 = (m + M)gh = \ E_p(máx)$$

A conservação de momento linear na colisão implica que:

$$mv_0 = (m + M)v_2$$

de onde se tira a relação entre a velocidade inicial v_0 e a altura *h:*

$$v_0 = (\frac{m + M}{m})\sqrt{2gh}$$

2. Procedimento experimental

2.1. Parte A

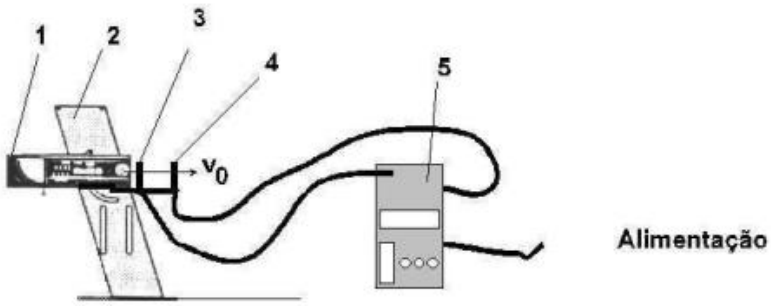
Na primeira parte deste trabalho, nós queremos determinar a velocidade inicial de uma esfera metálica. Para isso, usamos lançador de projeteis (1) na posição horizontal. Fixamos a base de fixação (2) à mesa com um grampo adequado e colocamos o sensor de passagem inicial (3) na saída do lançador de projeteis e o sensor de passagem inicial (4) mais à frente do sensor de passagem inicial. Ligamos os dois sensores de passagem (3) e (4) ao sistema de controlo (5), cujo deve estar ligado à fonte de alimentação e encontrado desligado.

Antes de iniciar o experimento, deve-se medir a distância entre os dois sensores de movimento (3) e (4), s, que será usado para o cálculo da velocidade.

Para iniciar o experimento deve-se colocar o lançador de projeteis (1) na posição de tiro curto, “SHORT RANGE” e inserir a esfera na boca do lançador de projeteis (1) e empurrá-la para o interior com a ajuda da vareta de carregar até ao indicar amarelo do lançador de projeteis (1). Deve-se também ligar o sistema de controlo (5) e colocá-lo na posição de “TWO GATES”.

Para realizar o experimento, devemos disparar o lançador (1) puxando o fio dispensador com suavidade e registar o tempo indicado pelo sistema de controlo (5). Para manter uma precisão nos cálculos, deve-se realizar este experimento num total de 3 vezes.

Durante o experimento devemos ter o cuidado de verificar se o lançador de projeteis (1) se mantém na horizontal, e se a distância entre os sensores se mantém constante.



2.2. Parte B

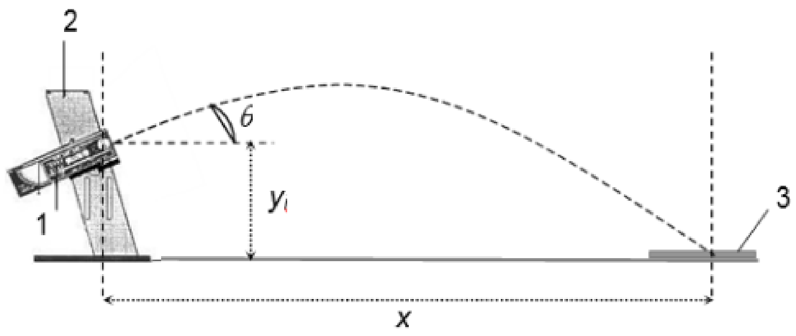
Na segunda parte do experimento, nós queremos analisar a dependência do alcance com o ângulo de disparo. Para isso, usamos o lançador de projeteis (1) em diferentes posições com diferentes ângulos. Fixamos a base de fixação (2) à mesa com um grampo adequado e colocamos inicialmente o lançador de projeteis (1) a fazer um ângulo de 30° com a horizontal. Colocamos o alvo (3) a uma distância tal que a esfera caia sobre a sua superfície. Carregamos o lançador de projeteis (1) na posição de tiro curto, “SHORT RANGE”, com a esfera e disparamo-lo.

Registamos o alcance entre a projeção da posição inicial da esfera na superfície e a posição marcada no alvo pela bola, x, e registamos o ângulo de lançamento, θ. Devemos disparar a bola com o mesmo ângulo num total de 3 vezes.

Para analisar a dependência do alcance com o ângulo de disparo, devemos repetir os passos anteriores para os ângulos 34°, 38°, 40° e 43°.

Para determinar a altura inicial da esfera, yi, deve-se medir rigorosamente em relação à bancada a que a esfera é lançada.

Durante o experimento devemos ter o cuidado de verificar se o ângulo de lançamento se mantém constante.



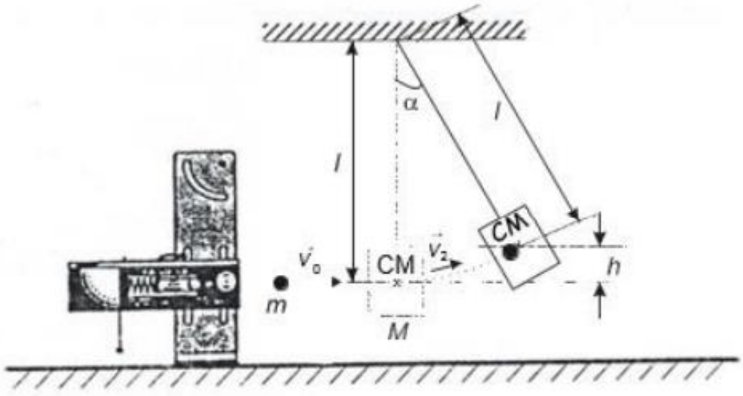
2.3. Parte C

Na terceira e última parte do experimento, queremos determinar a velocidade inicial de um projétil com um método alternativo. Para isso, devemos fixar a base de fixação à mesa com um grampo adequado e colocar o lançador de projeteis à frente do pêndulo.

Antes de iniciar o experimento deve-se medir as massas do projétil, m, e do pêndulo, M, e medir o comprimento do pêndulo, l.

Para realizar o experimento, devemos carregar o lançador de projeteis na posição de tiro curto, "SHORT RANGE", efetuar o disparo e medir o ângulo máximo, α, descrito pelo pêndulo. Para manter uma precisão nos cálculos, deve-se realizar este experimento num total de 5 vezes.

Um dos cuidados a ter neste experimento é verificar o ângulo marcado pelo pêndulo na posição inicial, pois caso este não seja 0, terá de ser descontado no ângulo máximo obtido.



α
l
l
CM
$\vec{v}_0$
CM
$\vec{v}_2$
h
m
M

3.Apresentação de Resultados

3.1. Parte A – Determinação da velocidade inicial

Primeiramente, começámos por medir a distância, *s*, entre os sensores e obtivemos o valor de 0,099 $\pm \Delta s$ metros. O erro, Δs foi obtido através do valor da menor divisão do instrumento utilizado, neste caso uma fita métrica, normalmente é metade do valor da menor divisão, mas como usámos dois sensores é necessária a multiplicação desse valor por 2. Obtivemos Δs = 0,001 metros. Calculámos também a média das distâncias visto que fizemos 3 medições, o desvio e a incerteza.

Distância				
L (m)	ΔL (m)	média L (m)	Desvio (m)	Incerteza (m)
0,099	0,001	0,0993	0,0003	0,0007
0,099			0,0003	
0,100			0,0007	

De seguida e após a acertada colocação do projétil no lançador de projéteis, é feito o seu lançamento e a leitura dos valores obtidos pelo sistema de controlo dos sensores. Os seguintes tempos, *t*, são respetivos do ângulo $\theta = 0°$. O erro associado ao tempo, t_0, é dado por $\pm\Delta t = 0{,}00005$ segundos (vindo da menor divisão do instrumento de medida).

Tempo				
t (s)	Δt (s)	média t (s)	desvio (s)	Incerteza t (s)
0,0458	0,00005	0,0457	0,0001	0,0004
0,0453			0,0004	
0,0459			0,0002	

3.2. Parte B – Dependência do alcance com o ângulo de disparo

Nesta parte foram realizadas medições para a obtenção do alcance para os diferentes ângulos de lançamento, θ, associados e foi feita a medição da altura, y_{ii} em que o projétil é lançado.

Ângulo (°)	Distância (m)		
$30°$	0,748	0,745	0,753
$34°$	0,755	0,757	0,753
$38°$	0,754	0,753	0,752
$40°$	0,753	0,752	0,753
$43°$	0,743	0,742	0,744

3.3. Parte C – Pêndulo Balístico: Método alternativo para determinação da velocidade inicial de um projétil

Nesta última parte, começámos por medir a massa do projétil, m = 63,5 ± 0,1 gramas, a massa do pêndulo balístico, M = 263,5 ± 0,1 g e o seu comprimento também, comprimento = 0,351 ± 0,001 centímetros (erro provindo da menor divisão da escala do instrumento de medida, neste caso a balança). Após 5 disparos, foram obtidos os valores apresentados na tabela seguinte.

Ângulo Máximo
θ (°)
16
16,5
15,5
15,5
15,5

4. Análise de Resultados

4.1. Parte A - Determinação da velocidade inicial

Na primeira parte do experimento foi calculada a média da distância, L, e a média do tempo, t:

$$L_m = \frac{99 + 99 + 100}{3} = 99.3\ mm$$

$$t_m = \frac{0{,}0458 + 0{,}0453 + 0{,}0459}{3} = 0{,}0457\ s$$

Com estes dados, consegue-se calcular a velocidade inicial média, V:

$$v = \frac{99{,}3 * 0{,}001}{0{,}0457} = 2{,}1752\ m/s$$

Para calcular a incerteza da distância, fizemos as seguintes operações:

$$x_1 = |99{,}3 - 99| = 0{,}3\ mm$$

$$x_2 = |99{,}3 - 99| = 0{,}3\ mm$$

$$x_3 = |99{,}3 - 100| = 0{,}7\ mm$$

$$incx = \max(x1, x2, x3) = 0{,}7\ mm$$

Para calcular a incerteza do tempo, fizemos as seguintes operações:

$$y_1 = |0{,}0457 - 0{,}0458| = 0{,}0001\ mm$$

$$y_2 = |0{,}0457 - 0{,}0453| = 0{,}0004\ mm$$

$$y_3 = |0{,}0457 - 0{,}0459| = 0{,}0002\ mm$$

$$incy = \max(y1y2, y3) = 0{,}0004\ mm$$

Para calcular o erro da velocidade, fizemos a seguinte operação:

$$\Delta v = 2{,}1752 * \left(\frac{0{,}7}{99{,}3} + \frac{0{,}0004}{0{,}0457}\right) = 0{,}03206$$

E para calcular a precisão de V, fizemos a seguinte operação:

$$prec = 1 - 0{,}03206 * 100 = 97\%$$

4.2. Parte B - Dependência do alcance com o ângulo de disparo

Para calcular a média da distância, x, de cada ângulo, θ, fizemos as seguintes operações:

$$x_m = \frac{74{,}8 + 74{,}5 + 75{,}3}{3} = 74{,}9\ mm, \quad \theta = 30^0$$

$$x_m = \frac{75{,}5 + 75{,}7 + 75{,}3}{3} = 75{,}5\ mm, \quad \theta = 34^0$$

$$x_m = \frac{75{,}4 + 75{,}3 + 75{,}2}{3} = 75{,}3\ mm, \quad \theta = 38^0$$

$$x_m = \frac{75{,}3 + 75{,}2 + 75{,}3}{3} = 75{,}3\ mm, \quad \theta = 40^0$$

$$x_m = \frac{74{,}3 + 74{,}2 + 74{,}4}{3} = 74{,}3\ mm, \quad \theta = 43^0$$

Para calcular a incerteza e o desvio de cada ângulo fizemos as seguintes operações:

$$inc = |74{,}9 - 74{,}5| = 0{,}4mm, \quad \theta = 30^0$$

$$inc = |75{,}5 - 75{,}7| = 0{,}2mm, \quad \theta = 34^0$$

$$inc = |75{,}3 - 75{,}2| = 0{,}1mm, \quad \theta = 38^0$$

$$inc = |75{,}3 - 74{,}2| = 0{,}1mm, \quad \theta = 40^0$$

$$inc = |74{,}3 - 74{,}2| = 0{,}1mm, \quad \theta = 43^0$$

4.3. Parte C - O Pêndulo Balístico

Inicialmente calculou-se a média dos ângulos registados:

$$x_m = \frac{16 + 16{,}5 + 15{,}5 + 15{,}5 + 15{,}5}{5} = 15{,}8° \ (graus)$$

Calculámos também os desvios:

$$\sigma_1 = |16 \ - 15{,}8| = 0{,}2° \ (graus)$$

$$\sigma_2 = |16{,}5 \ - 15{,}8| = 0{,}7° \ (graus)$$

$$\sigma_3 = |15{,}5 \ - 15{,}8| = 0{,}3° \ (graus)$$

$$\sigma_4 = |15{,}5 \ - 15{,}8| = 0{,}3° \ (graus)$$

$$\sigma_5 = |15{,}5 \ - 15{,}8| = 0{,}3° \ (graus)$$

$15{,}8°$ = 0,2758 radianos

$16°$ = 0,2793 radianos

$|0{,}2758 \ \ - 0{,}2793|$ = 0,0035

Para calcular a altura, *h*, fizemos:

$$h \ = \ 0{,}351 - 0{,}351 \times cos(15{,}8º) = 0{,}0133(m)$$

Agora, calculámos o erro associado onde $l = 0{,}351 \ m$:

$$\Delta h = \left|\frac{\partial h}{\partial l}\right| \Delta l + \left|\frac{\partial h}{\partial \alpha}\right| \Delta \alpha$$

$$\Leftrightarrow \Delta h = (1 - cos(\alpha))\Delta l + (l \times sin(\alpha))\Delta \alpha$$

$$\Leftrightarrow \Delta h = (1 - cos(15{,}8º)) \times 0{,}0005 + (0{,}351 \times sin(15{,}8º)) \times 0{,}0035$$

$$\Leftrightarrow \Delta h = 0.00035(\text{m})$$

h = 0,0133 +- 0,00035

Para concluir, falta apenas calcular o valor da velocidade inicial v_0e o erro associado a esta velocidade. Vamos então utilizar uma fórmula e utilizamos os valores $g = 9{,}8(m/s^2)$, $m = 63{,}5(g) \ = \ 0{,}0635(Kg)$, $M = 263{,}5(g) \ = \ 0{,}2635(Kg)$ e, para terminar, $h = 0{,}351(m)$, então:

$$v_o = \left(\frac{0{,}0635 + 0{,}2635}{0{,}0635}\right)\sqrt{2 \times 9.8 \times 0.0133} = 2{,}629(m/s)$$

5. Conclusão

Neste trabalho laboratorial, conseguimos calcular a velocidade inicial da esfera metálica quando esta é lançada na horizonta, que de acordo com a parte A, nos deu o valor $2,1752\ m/s$. Conseguimos analisar a dependência do alcance com o ângulo de disparo, pela parte B, onde analisamos que o angulo máximo é aproximadamente 34^0. Por último calculamos a velocidade inicial de um projétil com a utilização de um pêndulo, na parte C.

Este trabalho foi realizado 50%/50% pelos dois autores.