

MOVIMENTO HARMÓNICO SIMPLES (MHS)

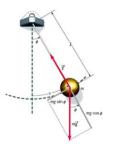
Se a força que atua sobre um corpo:

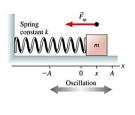
- é proporcional ao deslocamento em relação à posição de equilíbrio
- aponta sempre para a posição de equilíbrio

O corpo tem movimento **periódico**, **harmónico**, **oscilatório** ou **vibratório**

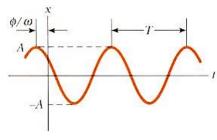
Ex: Bloco preso a uma mola, baloiço (pêndulo), corda a vibrar, moléculas a vibrar num sólido, etc...

$$\omega = 2\pi f$$
 (rad/s)



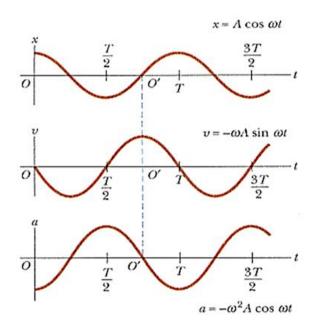


$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$



MCE_IM_2022-2023





MCE_IM_2022-2023

3

Pêndulo simples

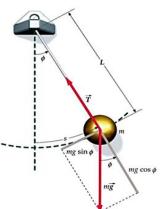


 $-mg\sin\phi$

aceleração tangencial:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$-mg\sin\phi = m\frac{d^2s}{dt^2} = mL\frac{d^2\phi}{dt^2}$$



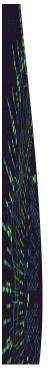
$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\phi \approx -\frac{g}{L}\phi \text{ se } \phi \ll 1$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega^2\phi \quad \text{com} \quad \omega^2 = \frac{g}{L}$$

solução: $\phi = \phi_0 \cos(\omega t + \delta)$

MCE_IM_2022-2023

4

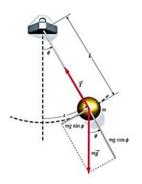


Pêndulo simples

Para pequenos ângulos

sen $\phi \approx \phi$

Para pequenas oscilações, tem-se:



eq. movimento:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega^2\phi \quad \text{com} \quad \omega^2 = \frac{g}{L}$$

solução:

$$\phi = \phi_0 \cos(\omega t + \delta)$$

período:

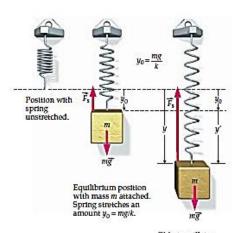
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

MCE_IM_2022-2023

5 5

5

Sistema massa-mola

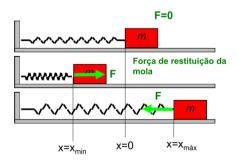


Object oscillates around the equilibrium position with a displacement $y'=y-y_0$.

MCE_IM_2022-2023

6

Sistema massa-mola



F: Força restauradora F = -kx

k: constante da mola

Equação do movimento

$$F = -kx = ma_{x} \quad \Longrightarrow \quad a_{x} = -\frac{k}{m}x$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d^{2}x}{dt^{2}} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d^{2}x}{dt^{2}} + \omega^{2}x = 0$$

definimos
$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$
 or $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ω: frequência angular (radianos/s)

MCE_IM_2022-2023

COMPARANDO...

Circuito LC

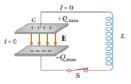
A intensidade da corrente I é análoga à velocidade v

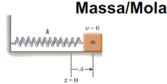


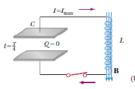
$$v = \frac{dx}{dt}$$

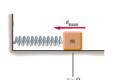


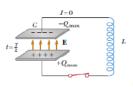
$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = 0$$
 $m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$

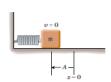






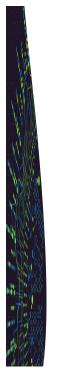






MCE IM 2022-2023

8



Energia no Movimento Harmónico Simples (MHS)

Num M.H.S. a Energia Mecânica é constante:

$$E = \frac{1}{2} kA^2$$

Energia potencial elástica:

E_{pe}(0)=0 (posição de equilíbrio)

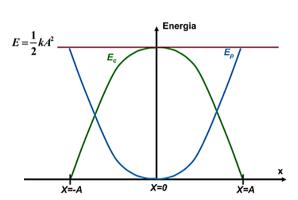
$$E_{Pe} = \frac{1}{2}kx^2$$

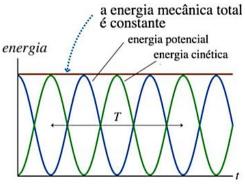
Energia cinética:
$$E_c = E - E_{pe} = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

MCE_IM_2022-2023

Energia no MHS em função de x

Energia no MHS em função de t





$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2 = \text{constante}$$

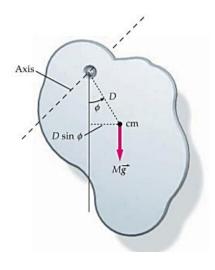
MCE_IM_2022-2023



Pêndulo físico ou Pêndulo composto

Para pequenos ângulos

sen
$$\phi \approx \phi$$



$$\tau = -MgDsen\varphi \approx -MgD\varphi$$

$$\tau = I \alpha = -MgD\phi \quad \cos \alpha = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MgD}}$$

NB - O período do pêndulo físico depende da distribuição de massa, mas não da massa total, M. O momento de inércia I é proporcional a M, pelo que <u>a razão</u> I/M é independente de M

MCE_IM_2022-2023

11

11

Oscilador amortecido



Na ausência de forças externas, a AMPLITUDE de um oscilador DIMINUI no tempo, devido a forças dissipativas (atrito,

viscosidade, etc)

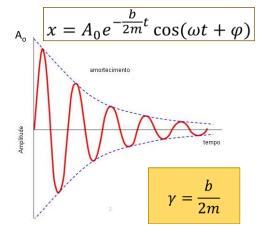
$$\overrightarrow{F_a} = -b\overrightarrow{v}$$

Se A diminui, a Energia
Mecânica diminui também

$$\omega = \sqrt{\left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2\right]}$$

Diz-se que o movimento é amortecido

MCE_IM_2022-2023

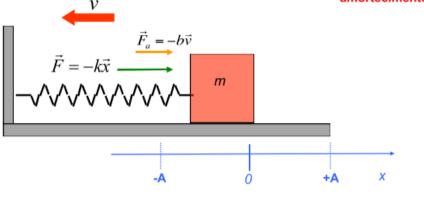




Exemplo de força dissipativa: $\vec{F}_a = -b\vec{v}$

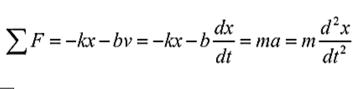
Força devida à viscosidade de um fluido

Coeficiente de amortecimento



MCE_IM_2022-2023

13



$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{com} \qquad \qquad \gamma = 0$$

MCE_IM_2022-2023

1<u>1</u>4



Capítulo 2

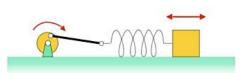
- 8. Um pêndulo 1 m de comprimento é largado com um ângulo de 15,0°. Após 1000 s, a sua amplitude foi reduzida para 5,5°. Qual é o coeficiente de amortecimento?
- 13. Um pêndulo simples tem um período de 2 s e uma amplitude de 2°. Depois de 10 oscilações completas, a sua amplitude foi reduzida para 1,5°. Calcular o coeficiente de amortecimento. Discuta a influência da viscosidade do ar no período do pêndulo.

MCE_IM_2022-2023 1515



Oscilador Forçado





"mola" ligada a um "motor"

MCE IM 2022-2023

16



Oscilador Forçado

- Para manter um sistema a oscilar na presença de forças dissipativas, temos de fornecer energia, aplicando uma força externa. Ao fim de algum tempo, o movimento terá a frequência da força externa.
- Nessa altura, a energia fornecida (numa oscilação) será igual à dissipada, a amplitude mantém-se constante, e o seu valor depende da frequência externa.

Este movimento designa-se

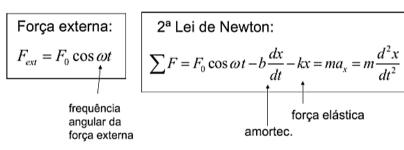
Oscilação Forçada

MCE_IM_2022-2023

. . .

17

Equações do movimento



$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \qquad \cos \omega t$$

MCE_IM_2022-2023 188

Solução geral

solução: $x(t) = x_t(t) + x_p(t)$

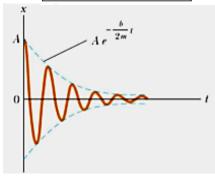
solução transiente:

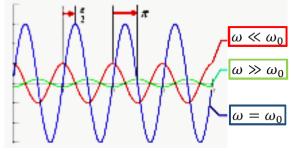
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$



solução permanente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$



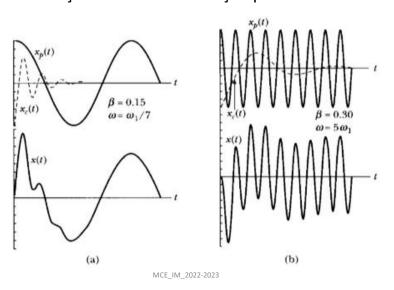


MCE IM 2022-2023

19

Solução transiente + solução permanente





20

10



Solução permanente

$$X_p(t) = A\cos(\omega t - \delta)$$

com
$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$
 amplitude

$$\delta = \arctan \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \begin{array}{l} \text{desfasamento entre a} \\ \text{posição x e a força} \\ 0 \leq \delta \leq \pi \end{array}$$

MCE_IM_2022-2023

OSCILADOR FORÇADO

Força externa: $F_{\text{ext}}(t) = F_0 \cos(\omega t)$

Posição: $\mathbf{X}_{p}(t) = \mathbf{A}\cos(\omega t - \delta)$

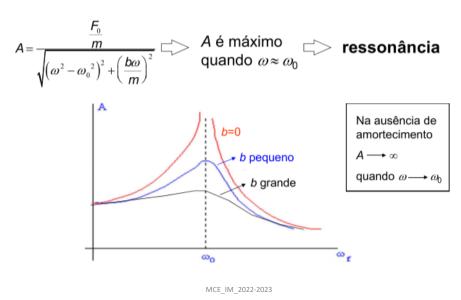
Mesma frequência!

Amplitude:
$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

MCE_IM_2022-2023

Ressonância no oscilador forçado



23

Sobre a energia

Considerando a solução permanente,

NA RESSONÂNCIA, verifica-se:

- energia máxima dissipada
- trabalho máximo realizado pelo motor
- energia mecânica máxima do oscilador

NUM PERÍODO:

energia dissipada pelo atrito = trabalho realizado pelo motor

MCE IM 2022-2023

24

Narrows Bridge Collapse

1940



https://youtu.be/7saC-DnQ9Rc?t=36

A Ponte do Estreito de Tacoma caiu em 1940, devido a torques vibracionais induzidos pelo vento, fazendo a ponte oscilar com $\omega \approx$ frequência de ressonância!

MCE_IM_2022-2023

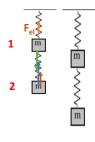
25 25

Osciladores acoplados

16 Duas molas iguais de constante K_{mola} estão penduradas e ligadas a corpos de massa m como está representado na figura ao lado. Desprezando a massa das molas calcule:

- a) as frequências dos modos normais de oscilação do sistema.
- b) a relação das amplitudes de oscilação das massas nos dois modos normais de oscilação.

Nota: não é necessário considerar a aceleração da gravidade porque esta não tem influência na oscilação.



1 $F_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$ $m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$$

$$F_2 = -k_2 x_2 - k_2 (x_2 - x_1)$$

$$F_2 = -k_2 x_2 - k_2 (x_2 - x_1) \qquad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 x_2 - k_2 (x_2 - x_1)$$

$$k_1 = k_2 = k$$

$$m_1 = m_2 = m$$

MCE IM 2022-2023

26



Osciladores acoplados

16 Duas molas iguais de constante K_{mola} estão penduradas e ligadas a corpos de massa m como está representado na figura ao lado. Desprezando a massa das molas calcule:

a) as frequências dos modos normais de oscilação do sistema.

$$\frac{1}{dt^2} = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{k}{m} (x_1 - x_2) \iff \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{k}{m} x_1 + \frac{k}{m} (x_1 - x_2) = 0$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{m}(x_1 - x_2) = 0$$

 $x_1 = A \cos \omega t$ $x_2 = B \cos \omega t$

$$\frac{dt^2}{dt^2} = -\frac{k}{m} x_2 - \frac{k}{m} (x_2 - x_1) \iff \frac{dt^2}{dt^2} + \frac{k}{m} x_2 + \frac{k}{m} (x_2 - x_1) = 0$$

$$x_2 = B \cos \omega t$$
Derivar le 2 vezes x_1 e x_2 e substituir nas equações diferenciais

1 -
$$mA\omega^2 \cos \omega t + 2kA \cos \omega t - kB \cos \omega t = 0$$

$$\iff$$

-
$$mA\omega^2 + 2kA - kB = 0$$
 $A(2k - m\omega^2) - kB = 0$
- $mB\omega^2 + 2kB - kA = 0$ $-kA + B(2k - m\omega^2) = 0$

ANÁLISE DAS SOLUÇÕES POSSÍVEIS

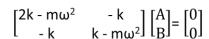
A = B = 0 o que significaria que não havia oscilação.

 $\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Resolvendo o determinante, deveremos chegar a alguma conclusão

MCE_IM_2022-2023

27



$$(2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2 = 0$$

$$k^2 - 3km\omega^2 + m^2\omega^4 = 0$$

Usando a fórmula resolvente para equações de 2º grau, obtém-se

$$\omega_1^2 = \frac{3k + \sqrt{5}k}{2m}$$

$$\omega_2^2 = \frac{3k - \sqrt{5}k}{2m}$$

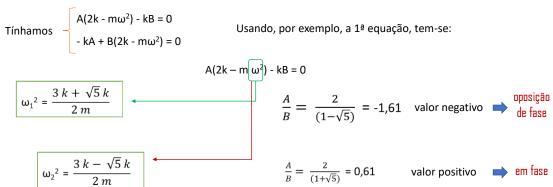
$$\omega_2^2 = \frac{3 k - \sqrt{5} k}{2 m}$$

FREQUÊNCIAS DOS **MODOS NORMAIS DE** VIBRAÇÃO DO SISTEMA $(\omega_1 e \omega_2)$

MCE IM 2022-2023



16. b) a relação das amplitudes de oscilação das massas nos dois modos normais de oscilação.



$$\frac{A}{B} = \frac{2}{(1-\sqrt{5})} = -1,61$$
 valor negativo \Rightarrow de fase

$$\frac{A}{B} = \frac{2}{(1+\sqrt{5})} = 0.61$$
 valor positivo \implies em fase

MCE_IM_2022-2023 29