

PL 1

Probabilidade: conceitos base

Palavras chave: probabilidade, estimação de probabilidade, experiência aleatória, espaço de amostragem, eventos, casos favoráveis, simulação, Matlab.

Responda às seguintes questões utilizando sempre o Matlab para efetuar os cálculos necessários:

1. Considere a experiência aleatória de lançar **3 vezes** uma moeda equilibrada. Pretende-se estimar por simulação a probabilidade de se obter **2 caras** no fim dos **3 lançamentos**.

Para estimar a probabilidade por simulação, é necessário executar várias vezes a experiência aleatória de lançar 3 vezes uma moeda equilibrada e calcular a percentagem de vezes em que o resultado deu 2 caras. Em Matlab, uma forma possível de implementar este simulador é a seguinte (assumindo que a experiência é executada 10000 vezes):

```
%% Código 1

% Gerar uma matriz com 3 linhas e 10000 colunas de números aleatórios
% entre 0.0 e 1.0 (ou seja, cada coluna representa uma experiência):
experiencias = rand(3,10000);
% Gerar uma matriz com 3 linhas e 10000 colunas com o valor 1 se o valor
% da matriz anterior for superior a 0.5 (ou seja, se saiu cara) ou com o
% valor 0 caso contrário (ou seja, saiu coroa):
lançamentos = experiencias > 0.5; % 0.5 corresponde a 1 - prob. de caras
% Gerar um vetor linha com 10000 elementos com a soma dos valores de cada
% coluna da matriz anterior (ou seja, o número de caras de cada experiência):
resultados= sum(lançamentos);
% Gerar um vetor linha com 10000 elementos com o valor 1 quando o valor do
% vetor anterior é 2 (ou seja, se a experiência deu 2 caras) ou 0 quando é
% diferente de 2:
sucessos= resultados==2;
% Determinar o resultado final dividindo o número de experiências com 2
% caras pelo número total de experiências:
probSimulacao= sum(sucessos)/10000
```

Note-se que o código proposto está desenvolvido passo a passo para mais fácil compreensão. Muitas das operações podem ser combinadas por forma a evitar o uso de matrizes intermédias e tornar a execução do código mais eficiente. Além disso, é útil usar variáveis iniciais para os parâmetros do problema para ser mais fácil alterar o código e adaptá-lo a outros casos de interesse. Assim, uma outra forma de implementar o mesmo simulador é, por exemplo, a seguinte:

```

%% Código 1 - segunda versão

N= 1e5; %número de experiências
p = 0.5; %probabilidade de cara
k = 2; %número de caras
n = 3; %número de lançamentos
lancamentos = rand(n,N) > p;
sucessos= sum(lancamentos)==k;
probSimulacao= sum(sucessos)/N

```

(a) Implemente no Matlab as 2 versões de código fornecidas.

(b) Estime, usando as 2 versões do código, a probabilidade de obter 2 caras em 3 lançamentos de uma moeda equilibrada (execute várias vezes a simulação).

2. Estime a probabilidade de obter 6 caras em 15 lançamentos de uma moeda equilibrada? ¹
3. Qual é a probabilidade de obter pelo menos 6 caras em 15 lançamentos de uma moeda equilibrada?
4. Para facilitar o cálculo de outras situações similares às que tratou nos pontos anteriores, crie uma função em Matlab que permita estimar a probabilidade por simulação. A função deve ter os seguintes parâmetros de entrada: p , número de lançamentos, número de caras pretendidas e número de experiências a realizar. Deve utilizar nomes adequados para a função e para os parâmetros de entrada.
 - (a) Aplique a função para voltar a estimar as probabilidades das questões anteriores assim como estimar as probabilidades para todo o espaço de amostragem² para os seguintes números de lançamentos: 20, 40 e 100.
 - (b) Faça 3 gráficos, usando a função `stem`, das probabilidades estimadas para 20, 40 e 100 lançamentos.
5. Pretende-se agora calcular de forma analítica as probabilidades estimadas nos exercícios anteriores. Considere para isso a seguinte expressão

$$P(k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$$

em que p é a probabilidade de ocorrer o acontecimento em que estamos interessados (por exemplo: se o acontecimento for "sair cara" em cada lançamento, $p = 0.5$), k é o número de acontecimentos que ocorreram em n repetições da experiência aleatória.

Em Matlab, esta expressão é determinada da seguinte forma:

```

%% Codigo 2- cálculo analítico de probabilidade em séries experiências de Bernoulli
% Dados relativos ao problema 1
p = 0.5;
k = 2;
n = 3;
prob= nchoosek(n,k)*p^k*(1-p)^(n-k); % nchoosek(n,k)= n!/(n-k)!/k!

```

Calcule o valor analítico para cada um dos problemas anteriores e compare os resultados obtidos com os valores estimados.

6. Considere um processo de produção fabril que produz torneiras em que a probabilidade de cada torneira ser produzida com defeito é de 30%. No processo de controlo de qualidade, é selecionada uma amostra de 5 peças.
 - (a) Calcule analiticamente e por simulação a probabilidade de 3 peças da amostra serem defeituosas.
 - (b) Calcule analiticamente e por simulação a probabilidade de, no máximo, 2 das peças da amostra serem defeituosas.
 - (c) Baseado em simulação, construa no Matlab o histograma representativo da distribuição de probabilidades do número de peças defeituosas da amostra.

¹Adapte o Código 1 e/ou a segunda versão do código 1 de forma apropriada para resolver as questões de 2 a 4

²O espaço de amostragem, S , é o conjunto de todos os resultados possíveis para a experiência aleatória. Por exemplo, no problema 1 $S = \{0, 1, 2, 3\}$.

Para revisão, responda, sozinho, às seguintes questões. Sempre que apropriado deve utilizar simulação ou análise combinatória para chegar à(s) resposta(s):

- R1 Quantas sequências diferentes de 10 bits há? E de n bits?
- R2 Quantas sequências diferentes de 10 símbolos do alfabeto (A,C,G,T) há? E de n símbolos do mesmo alfabeto?
- R3 Um teste tem n perguntas com respostas possíveis Verdadeiro ou Falso. Forneça uma expressão para calcular o número de maneiras diferentes de responder ao teste. Qual a probabilidade de acertar todas as respostas, escolhendo-as à sorte com igual probabilidade?
- R4 Quantas chaves distintas pode ter o Totoloto antigo (5 números em 49)? E o Euromilhões (5 números em 50 e duas estrelas em 11)?
- R5 Considere um baralho com 20 cartas. Dessas cartas, 10 são vermelhas e numeradas de 1 a 10. As restantes 10 são pretas e também numeradas de 1 a 10.
- (a) De quantas maneiras diferentes se podem dispor as 20 cartas numa fila?
 - (b) Calcule a probabilidade de se obter uma sequência constituída alternadamente por cartas pretas e vermelhas.
- R6 Lançam-se dois dados e toma-se nota da soma de pontos obtida.
- (a) Indique o espaço de amostragem (conjunto de valores possíveis) da soma.
 - (b) Calcule a probabilidade de se obter a soma 9.
- R7 Um conjunto de 50 peças contém 8 peças defeituosas. Escolhem-se aleatoriamente 10 peças. Qual a probabilidade de encontrar 3 defeituosas?
- R8 Quantas *passwords* diferentes se podem obter nas seguintes situações:
- (a) comprimento 5 e cada posição contendo um dígito entre 0 e 9;
 - (b) comprimento 5 e cada posição contendo uma letra minúscula sem acentos.
 - (c) Qual a probabilidade de acertar em cada um dos dois casos anteriores escolhendo uma password aleatoriamente ?
 - (d) Qual a alteração ao valor destas probabilidades de fizermos 3 tentativas completamente independentes?