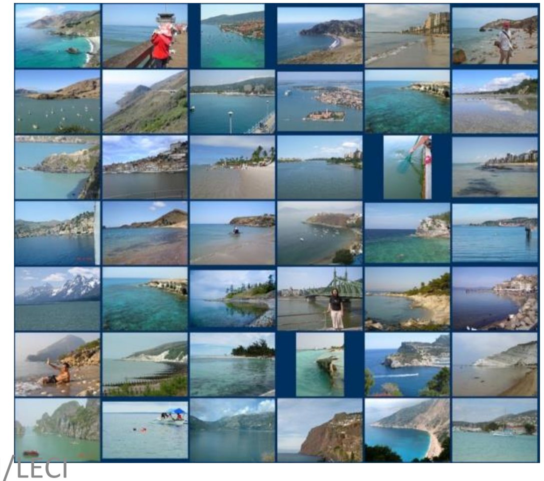
MPEI 2023-2024

Solução Probabilística

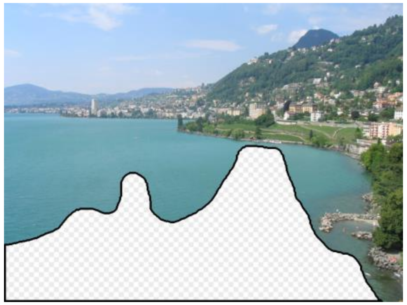
para a Procura de Similares

[Hays and Efros, SIGGRAPH 2007]

Problema Exemplo – Completar cena



Problema Exemplo – Completar cena

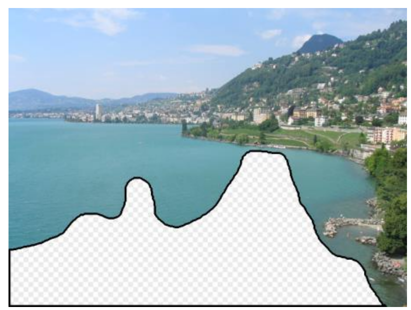


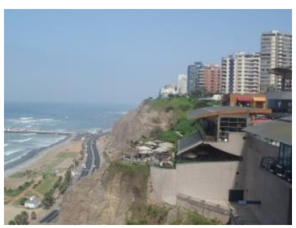
Problema Exemplo – Completar cena

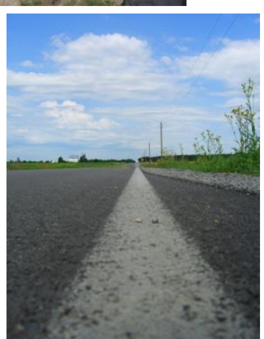
- **10 imagens mais próximas numa coleção de 20 000 imagens**





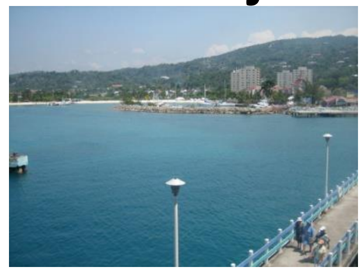




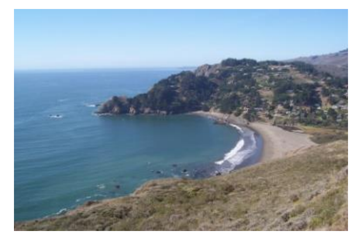
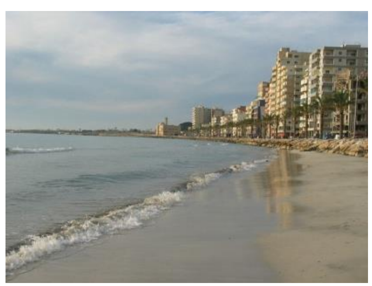

Problema Exemplo – Completar cena

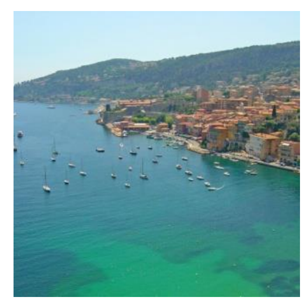
10 imagens mais próximas num conjunto de 2 milhões de imagens







Generalizando

- Muitos problemas podem ser expressos em termos da **descoberta de conjuntos similares**

- Exemplos:
  - Páginas web similares
    - para deteção de potenciais cópias
  - Clientes que compraram produtos similares
  - Imagens com características similares
  - Utilizadores que visitam sites similares
  - Clientes que compraram livros similares

Generalizando (continuação)

- Em todos estes problemas temos entidades que podem ser representadas por um conjunto
  - páginas web, compras, imagens, utilizadores, ...

- Exemplo:
  - As páginas web podem ser representadas pelo conjunto das palavras que contêm

Definição do Problema

- Tendo:
- pontos $x_1, x_{2, \ldots}$ num espaço com n dimensões
  - Exemplo: imagem é um vetor com as cores dos pixels

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow [1\ 2\ 1\ 0\ 2\ 1\ 0\ 1\ 0]$$

- E uma função de distância $d(x_1,x_2)$
  - Que quantifica a distância entre x_1 e x_2

- Objectivo: Determinar todos os pares de dados (x_i,x_j) com distância igual ou inferior a um determinado limiar s, $d(x_i,x_j) \leq s$

Solução ingénua

- **Comparar todos os pares** possíveis
- Com N pontos, teríamos complexidade $O(N^2)$

- Muito demorada ou mesmo impossível em tempo útil para N grande

- Exemplo:
  - 1 milhão de documentos ($N = 10^6$)
  - temos de calcular a similaridade para cada par
    - $N(N - 1)/2 = 5 \times 10^{11}$ comparações
  - Com 86400 s/dia e 10^6 comparações/s, levaria mais de 5 dias

  - Se tivermos 10 milhões é muito pior, demora mais de um ano.

Distância

- O objetivo é determinar os vizinhos mais próximos no espaço *n*-dimensional
- Formalmente vizinhos próximos (*near neighbors*) são pontos que se encontram a uma "pequena distância"

- Em primeiro lugar tem de se definir o que significa distância

Distâncias

- Na linguagem corrente, distância é a medida da separação de dois pontos
- Existe uma grande variedade de distâncias:
  - Distância euclidiana
  - Distância de Manhattan (Geometria do táxi)
  - Distância de Levenshtein
    - Para strings

- Precisamos de uma adequada a distância entre conjuntos

Distância e Similaridade de Jaccard

- A **similaridade** (ou semelhança) de Jaccard de 2 conjuntos é definida pelo quociente entre a dimensão da sua interseção e dimensão da sua união:

$$\boldsymbol{sim(C_1, C_2) = |C_1 \cap C_2| / |C_1 \cup C_2|}$$

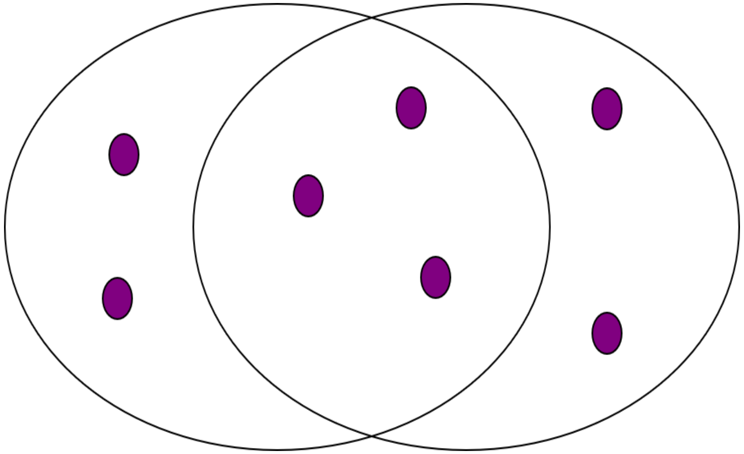
  – representando || o nº de elementos do conjunto ou cardinalidade do conjunto

- A **distância Jaccard**, d_J, é obtida diretamente da similaridade:

$$\boldsymbol{d_J(C_1, C_2) = 1 - |C_1 \cap C_2| / |C_1 \cup C_2|}$$

Exemplo

- Qual a distância de Jaccard entre os 2 conjuntos?



- Resolução
  - Temos 3 elementos na interseção e 7 na união …
  - $\boldsymbol{d}_J$ = 1- 3/7 = 4/7

Exemplo 2

- str1=*’when nine hundred years old you reach, look as good you will not.*’
- str2=*’you will not look as good when nine hundred years old*’

- Interseção (10 palavras/tokens):
  ‘when’ ‘nine’ ‘hundred’ ‘years’ ‘old’ ‘you’ ‘look’ ‘as’ ‘good’ ‘will’
- União (13 palavras)
  … ‘reach,’ ‘not’ ‘not.’

- Similaridade de Jaccard (simJ) = 10 / 13

Exemplo em Matlab

- Qual a similaridade entre as seguintes strings
- str1='When nine hundred years old you reach, look as good you will not.'
- str2='You will not look as good when nine hundred years old'

- C1=unique(strsplit(lower(str1)));
- C2=unique(strsplit(lower(str2)));

- simJ=length(intersect(C1,C2))/ length(union(C1,C2))

- Resultado: simJ = 0.7692

Applicação Exemplo #1 (Matlab)

- Detetar textos similares

- Exemplo para demonstração (toy example)
  - Apenas alguns textos muito pequenos

- Conjuntos serão as palavras (únicas) dos textos
  - Sem pós-processamento

- Aplicação direta da distância de Jaccard

Applicação Exemplo #1 Tarefas principais

1. Criar Conjuntos com as palavras de todos os documentos

```
Sets{1}=getSetOfWordsFromFile('texto1.txt')
Sets{2}=getSetOfWordsFromFile('texto2.txt')
…
```

2. Calcular a distância de Jaccard para todos os pares

```
distJ=calcDistancesJ(Sets);
```

3. Determinar os pares que têm distância inferior a um certo limiar

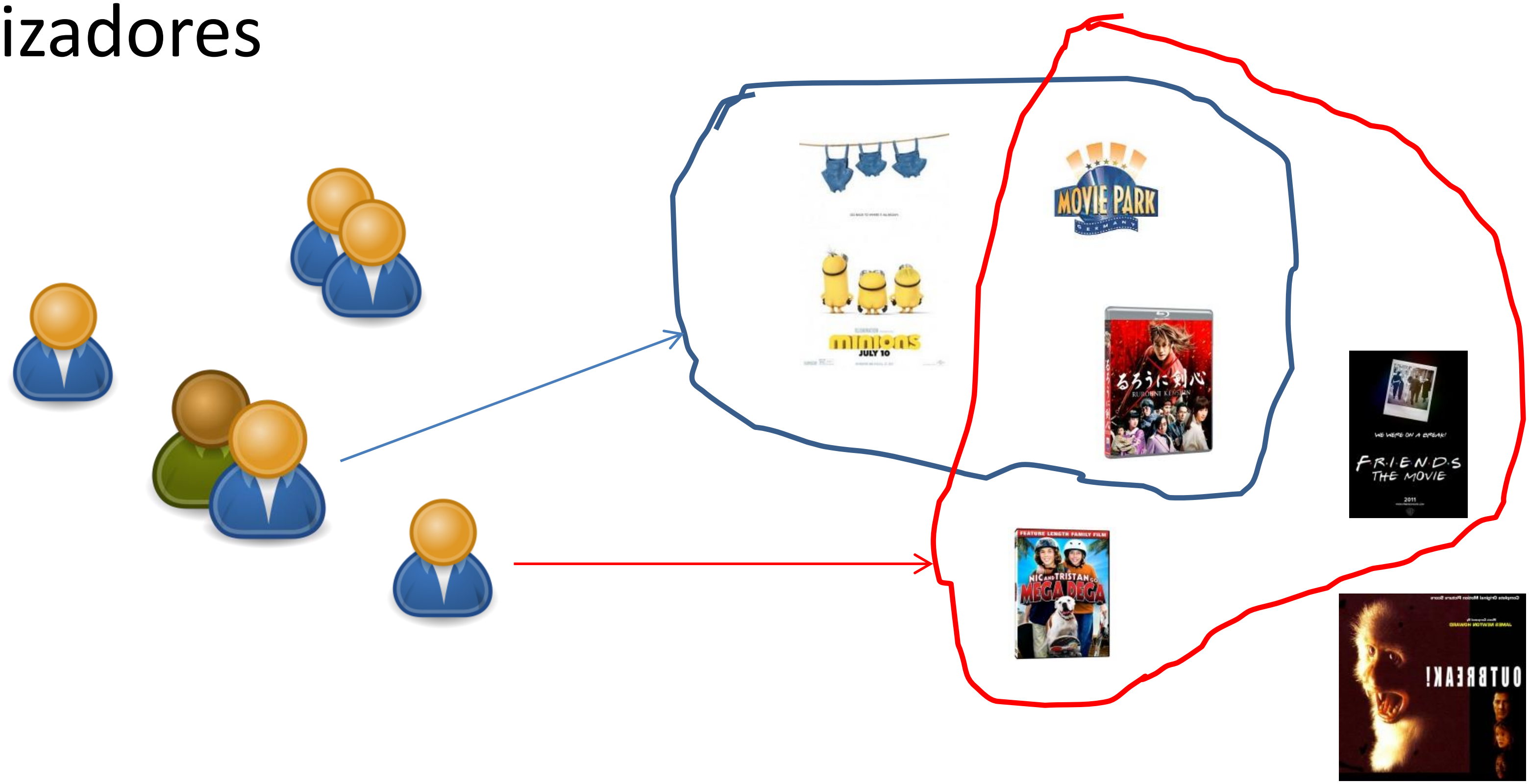
```
Similar=findSimilar(distJ,threshold,ids);
```

4. Mostrar resultados

MATLAB

Applicação Exemplo #2

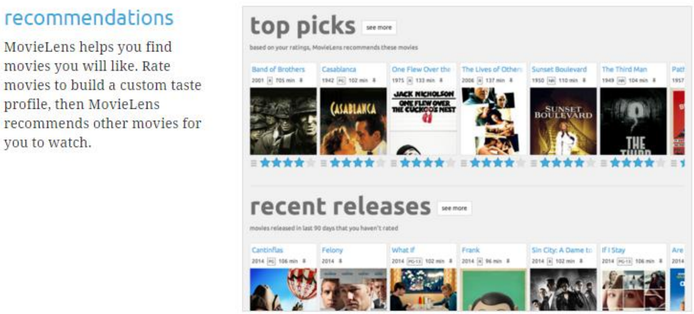
- Determinar conjuntos de filmes avaliados por utilizadores



- Assunto de um dos Guiões Práticos

MovieLens

- MovieLens (http://movielens.org) é um site que ajuda na selecção de filmes a ver
  - Tem muitos utilizadores registados



Conjuntos de dados MovieLens

- GroupLens Research criou e disponibilizou conjuntos de dados (data sets) do site MovieLens
  - Disponíveis em: http://grouplens.org/datasets/movielens/
- Os dados foram recolhidos ao longo de diferentes períodos de tempo
- Existem vários conjuntos, de vários tamanhos:
  - **MovieLens 100K Dataset**
  - MovieLens 1M Dataset
  - …

Conjunto de dados MovieLens 100K

- Conjunto de dados estável e usado como padrão (benchmark)
  - Disponibilizado em 4/1998

- Aprox. 100 000 avaliações
  - de 943 utilizadores, sobre 1682 filmes

- README

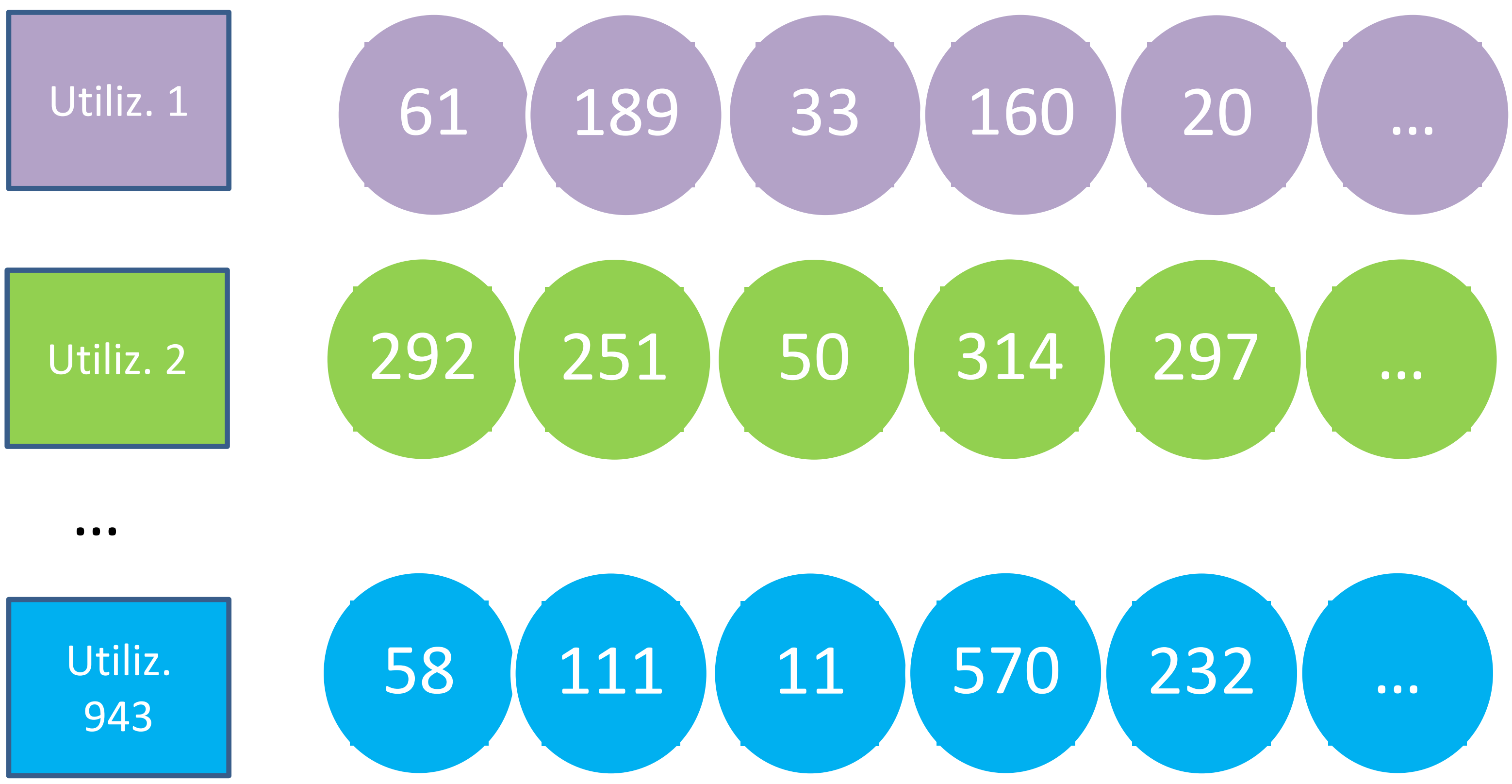
- Link: http://grouplens.org/datasets/movielens/100k/

Ficheiro u.data

196	242	3	881250949
186	302	3	891717742
22	377	1	878887116
244	51	2	880606923
166	346	1	886397596
298	474	4	884182806
115	265	2	881171488
253	465	5	891628467
305	451	3	886324817
…			

- 1ª coluna contém o ID do utilizador
- 2ª coluna o ID do filme
  - avaliado pelo utilizador da 1ª coluna
- Avaliação na 3ª coluna
- 4ª coluna é Informação de tempo (timestamp)

Conjuntos de filmes
(avaliados por cada utilizador)



Demonstração

- Primeira “solução”
  - Utilização direta da distância de Jaccard

- Muito lento ☹

Resultado

- Results (similar sets):

  328 788 distance = 0.327

  408 898 distance = 0.161

  489 587 distance = 0.370

Conjuntos Grandes e Gigantes

- **Objetivo:**

Dado um grande número de documentos (N), determinar pares "quase iguais"

  - N = **milhões, milhares de milhões, biliões, …**

Conjuntos Grandes e Gigantes

- **Problemas:**
- Demasiados documentos para se compararem todos os pares
- Muitas partes de um documento podem aparecer por outra ordem noutro
- Documentos são tão grandes ou número elevado que não cabem em memória

Conjuntos Grandes e Gigantes Solução

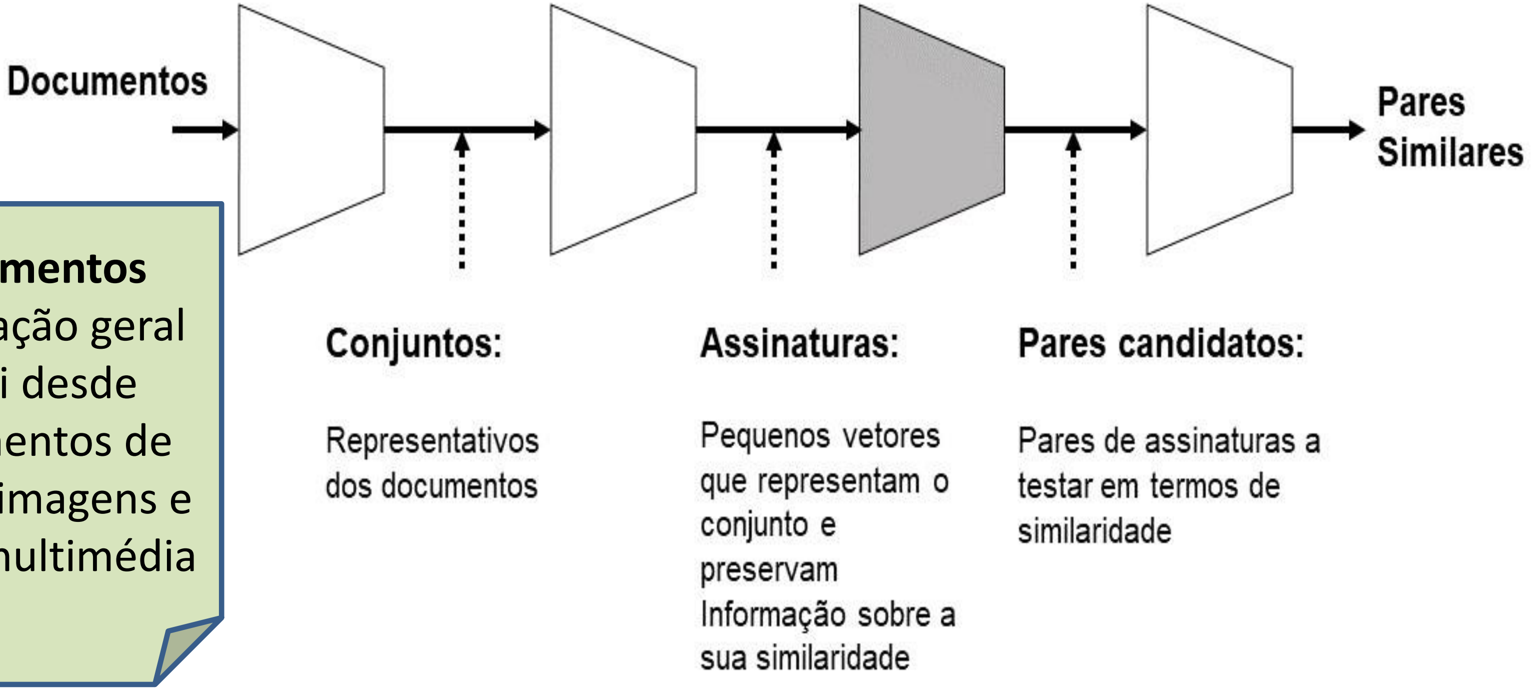
- Para *N* grande ou muito grande a solução passa por:

1. Reduzir a dimensão dos conjuntos
   – mantendo a informação essencial à determinação de distância entre eles
2. Reduzir o tempo de cálculo da distância e/ou reduzir os pares a que se tem de aplicar essa distância.

- A resolução destes problemas é habitualmente feita em sequência

Abordagem probabilística
Visão geral

- Processo de determinação de documentos similares:



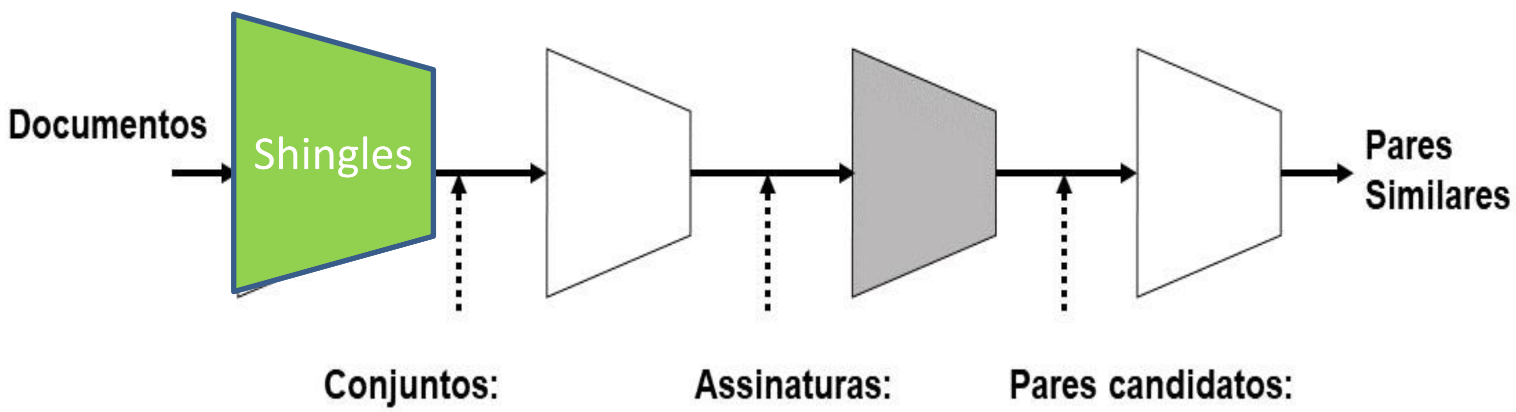
Documentos
Designação geral
Inclui desde documentos de texto a imagens e dados multimédia

Processo

- O processo consiste nas seguintes etapas sequenciais:
  1. Obtenção dos conjuntos representativos
  2. Redução desses conjuntos a conjuntos de dimensão fixa e pequena

     O resultado é usualmente designado por assinatura
  3. (opcional) Processamento das assinaturas por forma a identificar pares potencialmente similares
  4. Cálculo de similaridade dos pares de conjuntos
     - todos ou os resultantes do passo anterior

1 - Conversão dos documentos em conjuntos



Criação dos conjuntos representativos

- O objetivo desta primeira etapa é criar os conjuntos representativos dos documentos
  - A informação relevante a reter depende obviamente do tipo de documento

- Sem perda de generalidade, consideraremos documentos constituídos por palavras
  - ou para sermos mais precisos, sequências de caracteres

- A aplicação a outro tipo de documentos pode fazer-se adaptando o apresentado para sequências de caracteres
  - Por exemplo, no caso de imagens pode considerar-se como equivalente à palavra o valor de cada pixel (valor inteiro ou triplo RGB)

Soluções

- As soluções mais simples são:
  1. conjunto de palavras que ocorrem no documento
  2. conjunto das palavras "importantes".
- Ambas sofrem do mesmo problema:
  - não preservam informação sobre a ordem de ocorrência

- A ordem de ocorrência pode ser tida em conta utilizando sequências de palavras (ou de caracteres), ideia na base dos ***k*-gramas**
  - também conhecidos por *k-shingles*
  - ou simplesmente ***Shingles***

Shingles

- Um *k*-shingle (ou *k*-grama) para um documento é uma sequência de *k* símbolos que aparecem no documento

- Os símbolos podem ser caracteres, palavras ou outra informação, dependendo da aplicação
  - ex: código de cor de um pixel

- Assume-se que documentos que têm muitos *Shingles* em comum são semelhantes

- Utilizando *Shingles*, um documento *D* é representado pelo conjunto dos seus k-gramas $C = S(D)$

Exemplo

- Quais os Shingles do documento contendo a sequência de caracteres ‘abcab’ considerando k=2

- Conjunto se 2-shingles: S(D) = {ab,bc,ca}

- Se aceitamos repetições: S’(D)={ab,bc,ca,ab}
  - ab aparece 2 vezes

Similaridade para Shingles

- Representando um documento D_i pelo seu conjunto de k-shingles $C_i=S(D_i)$
- Uma medida natural de similaridade é a similaridade de Jaccard
  - calculada com base nos conjuntos de Shingles representativos dos documentos

$$\boldsymbol{sim}(D_1, D_2) = \boldsymbol{sim}(C_1, C_2) = |C_1 \cap C_2| / |C_1 \cup C_2|$$

Escolha de k

- A escolha de *k* não é trivial
- Deve escolher-se *k* suficientemente grande para evitar que a maioria dos documentos tenha a maioria dos *Shingles*
  – evitando desta forma que a generalidade dos documentos sejam representados pelo mesmo conjunto.
- Na prática:
  – *k* = 5 é bom para documentos curtos
  – e *k* = 10 é mais adequado para documentos longos.

Representação binária

- Para simplificar cálculo de interseção e união, os documentos podem ser representado por um vetor de zeros e uns no espaço de k-gramas (vetor binário)
  - em que cada Shingle/k-grama é uma dimensão
- Nesta representação a interseção e união são operações de bits (AND e OR)
- Os vetores de um conjunto de documentos formam uma **matriz**

Exemplo

- 4 documentos:
  - D1='aab'
  - D2='bcd'
  - D3='cda'
  - D4='cd'

- 2-shingles (sem repetição) existentes nos 4 documentos:
  - S(D) = {aa, ab, bc, cd, da}

- Usando as linhas para os diferentes shingles e pela ordem em S(D) temos a matriz:

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} aa \\ ab \\ bc \\ cd \\ da \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix} \\
 & \begin{array}{cccc} D1 & D2 & D3 & D4 \end{array}
\end{array}
$$

Exemplo (continuação)

- $d(D_2,D_3) = ?$
- $= d(C_2,C_3) = ?$

- $C_2 = 00110$
- $C_3 = 00011$
- |Interseção| = 1
  - Bitwise AND
- |União| = 3
  - Bitwise OR

- Sim Jaccard = 1/3
- $d(C_2,C_3) = 1 – simJ = 2/3$

$$\begin{array}{cc} \text{aa} & \\ \text{ab} & \\ \text{bc} & \\ \text{cd} & \\ \text{da} & \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} D1 & D2 & D3 & D4 \end{array}$$

Outro Exemplo

- **Cada documento é uma coluna**
  - C_i representa o Documento i

- **Exemplo: sim(C_1 ,C_2) = ?**

- Comprimento da interseção = 3
- Comprimento da união = 6
- Similaridade de Jaccard similarity (não é a distância) = 3/6

- **d(C_1,C_2) = 1 – (similaridade Jaccard) = 3/6**

Documentos

Shingles

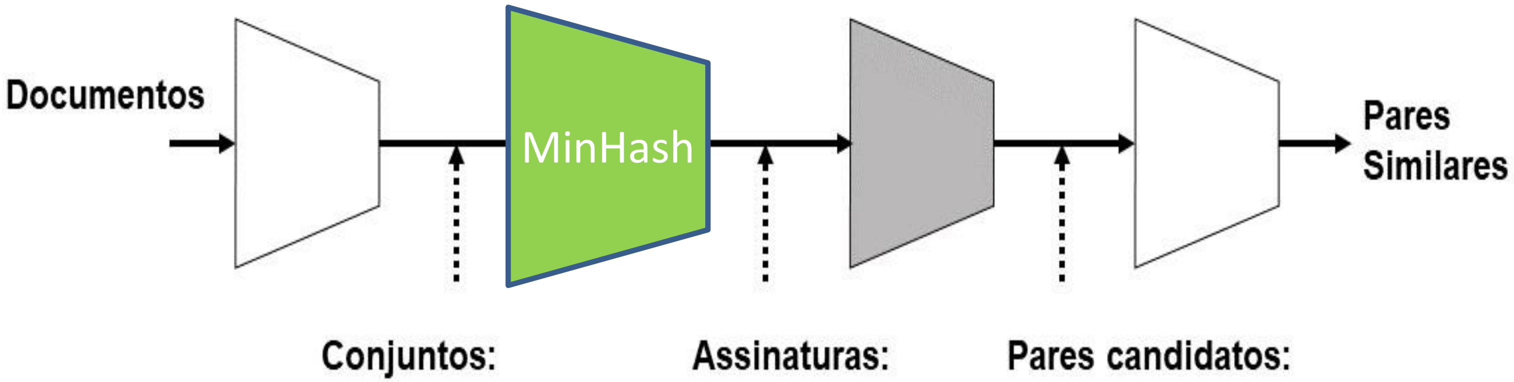
1	1	1	0
1	1	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0
1	0	1	0

A seguir: Descobrir Colunas Similares

- **Até agora:**
  - Documentos $\rightarrow$ Conjuntos de Shingles
  - Representação dos conjuntos por vetores booleanos numa matriz

- **Próximo objectivo: Descobrir colunas similares usando representações compactas (assinaturas)**

2 - Cálculo das Assinaturas



Assinaturas

- Uma das etapas importantes do processo é a redução da representação dos conjuntos

- Ideia base:
- Mapear cada conjunto C_i para uma pequena assinatura $Sig(C_i)$ através de funções rápidas, tal que:

  1. $Sig(C)$ é suficientemente pequena para que a assinatura de um número muito grande de conjuntos possa ser mantida em memória RAM

  2. A similaridade das assinaturas $Sig(C_1)$ e $Sig(C_2)$ é aproximadamente igual à $sim(C_1, C_2)$

Desafio

- Obter uma função de dispersão h() tal que:
  - Se $sim(C_1, C_2)$ é elevada, então com elevada probabilidade $h(C_1) = h(C_2)$
  - Se $sim(C_1, C_2)$ é baixa, então $h(C_1) \neq h(C_2)$ com elevada probabilidade
- A função *h*() depende da métrica de similaridade
- Para a similaridade de Jaccard a função MinHash cumpre os requisitos

Redução do conjunto usando permutações

- Uma forma de reduzir o conjunto C representativo de um documento é considerar apenas um subconjunto

- A seleção pode ser feita usando permutações aleatórias:
  - Aplicação de uma permutação aleatória π às linhas da matriz booleana
  - Reter o valor do índice da primeira linha (na ordem permutada) correspondente a um Shingle (ou equivalente) existente

Mínimo da função

- Esta operação pode ser vista como a aplicação de uma **função de dispersão $h_\pi(C)$ = índice da primeira linha** (na ordem permutada) na qual a coluna C tem valor 1

$$h_\pi(C) = min_\pi \pi(C)$$

- Repetir para várias permutações independentes, por exemplo 100, para obter um vetor (assinatura)
  - Este processo de repetição com permutações independentes pode ser visto como a aplicação de várias funções $h_\pi()$

Exemplo

2º elemento da permutação é o primeiro a mapear para um 1

Permutação π

2	4	3
3	2	4
7	1	7
6	3	2
1	6	6
5	7	1
4	5	5

Matriz de Entrada (Shingles x Documentos)

1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	1	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	0	1	0

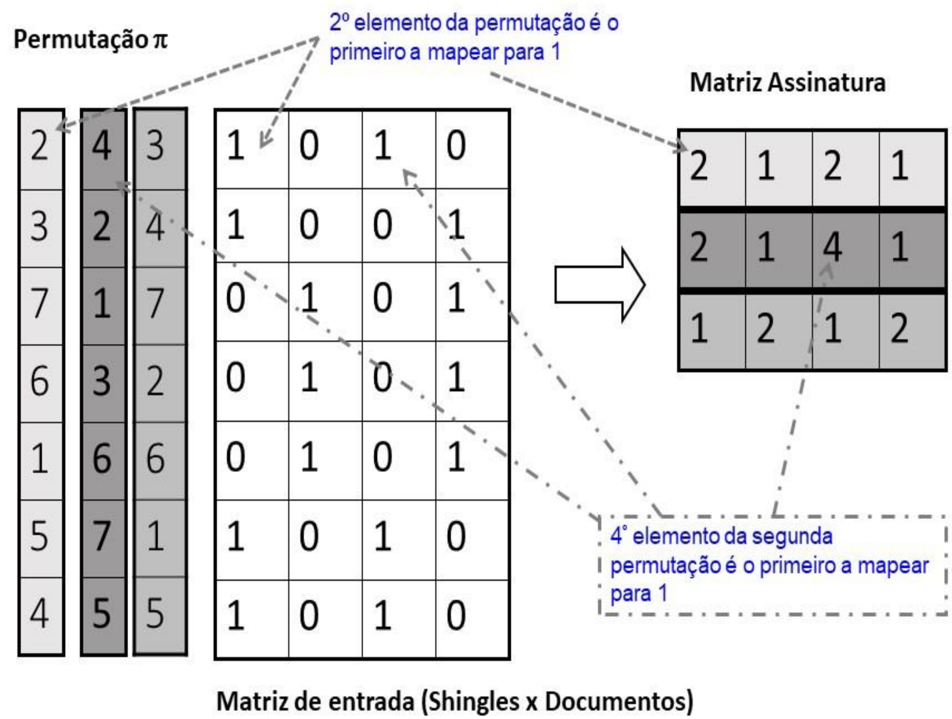
Matriz de Assinaturas *M*

2	1	2	1
2	1	4	1
1	2	1	2

4º elemento da permutação é o primeiro a mapear para um 1

Exemplo (continuação)

- 4 documentos representados num espaço de 7 *Shingles* diferentes
- Na primeira permutação, a primeira linha da matriz será a quinta, a segunda a primeira, etc.
- Em consequência, na primeira permutação, o valor a considerar para o primeiro documento será 2, primeira linha da permutação com 1 na primeira coluna da matriz dos documentos
- De forma similar se obtém o resto da primeira linha da matriz assinatura
- As outras 2 linhas da matriz assinatura são obtidas usando as outras duas permutações



Propriedade de h_π

- A função $h_\pi()$ permite obter assinaturas pois estas mantêm informação sobre a similaridade dos documentos devido à seguinte propriedade

- **Para uma permutação aleatória, π**

$$P\,[h_\pi(C_1) = h_\pi(C_2)] = sim(C_1,C_2)$$

“Demonstração”

- Considere-se o documento $\boldsymbol{D}$ (conjunto de *shingles*), e $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{D}$ um shingle

- Como é igualmente provável que qualquer $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{D}$ seja mapeado para o mínimo

- Então: $\boldsymbol{P[\pi(s) = min(\pi(D))] = 1/|D|}$

“Demonstração” (cont.)

- O universo dos valores de $min(\pi(C_1 \cup C_2))$ é $|C_1 \cup C_2|$
- Em consequência temos $|C_1 \cup C_2|$ casos possíveis
  - Todos os Shingles podem ser o mínimo

- Por outro lado, em $|C_1 \cap C_2|$ casos temos $\min(\pi(C_1))=\min(\pi(C_2))$
  - Ou seja $|C_1 \cap C_2|$ casos favoráveis

- Tendo em conta a equiprobabilidade, o que interessa é a dimensão dos conjuntos, temos:

$$\mathbf{Pr[\min(\pi(C_1))=\min(\pi(C_2))]=|C_1 \cap C_2|/|C_1 \cup C_2|}$$

  - A Similaridade de Jaccard

Propriedade de h_π

- Para duas colunas A and B:

- h(A) = h(B) quando o mínimo da função de hash faz parte da interseção A ∩ B.

A	B
0	0
0	0
1	**1**
0	0
0	1
1	0

Confirmação por Simulação

- A propriedade do MinHash anterior pode ser comprovada através de simulação

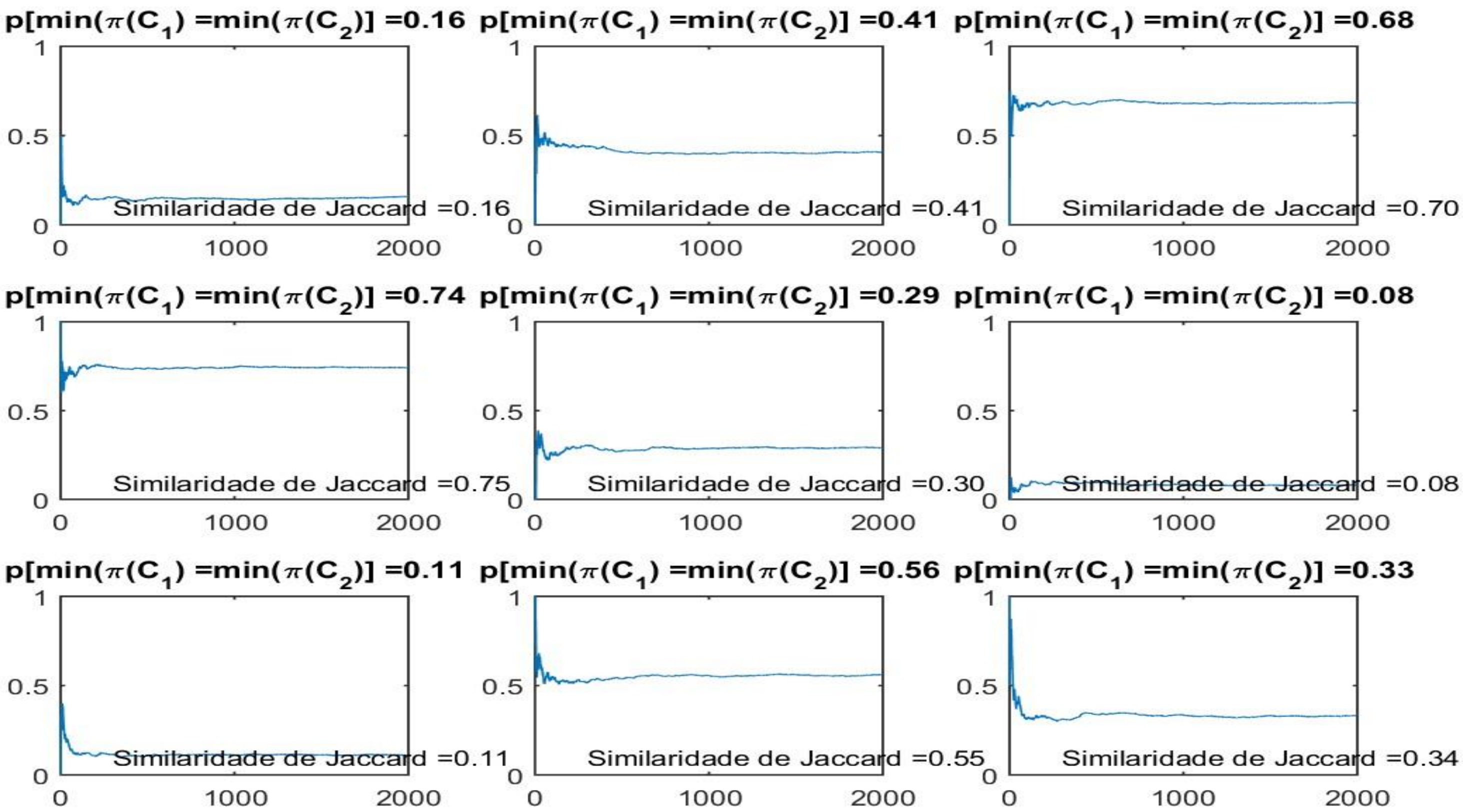
```
%% criar dois conjuntos C1 e C2  (colunas de bits)
limiar1=rand(); limiar2=rand();
C1=rand(NS,1)>limiar1;
C2=rand(NS,1)>limiar2;

%% calcular distância de Jaccard
% (com operações com bits)

I= C1 & C2; %  interset
U= C1 | C2;
dJaccard=1-(sum(I)/sum(U));
fprintf(1,'distância Jaccard=%.4f\n',dJaccard);
```

Confirmação por Simulação

```
%%  estimar com permutações
EXPERIMENTS=10000; cfav=0;     p=zeros(1,EXPERIMENTS);

for i=1:EXPERIMENTS
    % permutar
    pi1=C1(randperm(NS));   pi2=C2(randperm(NS));

    % mínimos
    min1=min(find(pi1>0));  min2=min(find(pi2>0));

    % se minimos iguais
    if (min1==min2) cfav=cfav+1; end
    p(i)=cfav/i;
end

figure(1);
plot(1:i,p(1:i)); title(['p[min(\pi(C_1) =min(\pi(C_2)] =' …
                                              sprintf('%.3f',p(i))]);

sim=cfav/EXPERIMENTS;   distancia=1-sim;

fprintf(1,'Distância por simulação=%.4f\n',distancia);
```

Confirmação por Simulação

- Exemplo de resultados



Assinaturas

- Seleccione k permutações aleatórias das linhas
- Pense na assinatura ***sig*(C)** como um vetor

- ***sig*(C)[i] = índice da primeira linha** da coluna C que contém 1 de quando aplicada a permutação *i* a essa linha

$$sig(C)[i] = \min(\pi_i(C))$$

- **Notq:** A **assinatura de um documento é pequena**
  - **~100 bytes para k=100** ☺

- **Atingimos um dos nossos objetivos!**
  - **"Comprimimos" vetores de bits longos em pequenas assinaturas**

Similaridade das Assinaturas

- Vimos que: **$\Pr[h_\pi(C_1) = h_\pi(C_2)] = sim(C_1, C_2)$**

- **Generalizando para várias funções**

- A **similaridade de 2 assinaturas** é a **fração de funções em que concordam**

- **Nota:** Devido à propriedade de h_π, a similaridade das colunas é a mesma que a similaridade esperada das suas assinaturas

Exemplo de aplicação

Permutações π

2	4	3
3	2	4
7	1	7
6	3	2
1	6	6
5	7	1
4	5	5

Matriz (Shingles x Documentos)

1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	1	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	0	1	0

Matriz de assinaturas *M*

2	1	2	1
2	1	4	1
1	2	1	2

Similaridades:

	1-3	2-4	1-2	3-4
Col/Col	0.75	0.75	0	0
Assin	0.67	1.00	0	0

Na prática...

- Permutar linhas para conjuntos de dimensão elevada é demorado e em geral proibitivo

- No entanto, o que necessitamos é de uma função que determine os índices e calcular o seu mínimo
- Uma solução eficiente é utilizar uma função de dispersão
  - evitando ao máximo colisões
  - O mapeamento efetuado pela função dá-nos a permutação aleatória

- Como a solução consiste na determinação do mínimo dos valores de uma função de dispersão (hash) é conhecido por MinHash

A propriedade mantém-se ?

- Mantemos a propriedade usando as funções de dispersão?
- Sim.
- Seja $h()$ essa função de dispersão que mapeia os membros de C_1 e C_2 para inteiros distintos
- Seja $h_{min}(C)$ o membro x de C com o valor mínimo
- Se aplicarmos $h_{min}()$ a C_1 e C_2, **obteremos o mesmo valor** exatamente quando o elemento da união $C_1 \cup C_2$ com valor **mínimo da função de dispersão estiver na intersecção** $C_1 \cap C_2$
- A probabilidade disso ser verdade é

$$|C_1 \cap C_2| / |C_1 \cup C_2|$$

- e portanto:

$$\boldsymbol{P\,[h_{min}(C_1) = h_{min}(C_2)] = sim_J(C_1,C_2)}$$

Múltiplas funções de dispersão

- Definindo a variável aleatória ***X*** como um quando $h_{min}(C_1) = h_{min}(C_2)$ e como zero caso contrário, então ***X*** é um estimador não enviesado (unbiased) da similaridade de Jaccard
- Por assumir apenas os valores zero ou um, ***X*** tem uma variância muito elevada para ser útil na prática

- Como reduzir a variância?
- Utilizando várias variáveis contruídas da mesma forma

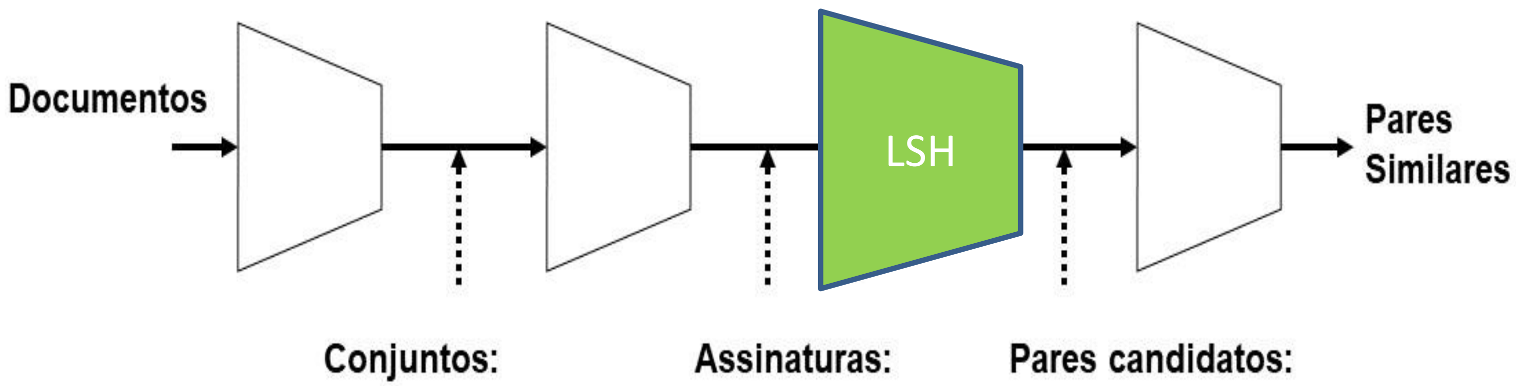
- A estimativa para a distância é igual à fração de funções de dispersão que concordam

Aplicação exemplo

- Não está convencido?

- Apliquemos ao exemplo das avaliações de filmes (MovieLens)
  - Estimando a similaridade usando o mínimo dos hash codes

3 - Determinação de pares candidatos



Pares candidatos

- Mesmo com a redução drástica obtida com as assinaturas, ter de comparar todos os pares é algo que tem de ser evitado

- Precisamos de reduzir o número de pares a comparar

- O nosso objetivo é encontrar documentos com similaridade, de Jaccard, superior a um determinado limiar
  - por exemplo, s = 0.8 (ou distância inferior a 0.20).

Candidatos Segundo o MinHash

- **Selecionar um limiar de semelhança *s* (0 < *s* < 1)**
- As colunas ***x*** e ***y*** da matriz de assinaturas são um **par candidato** se as suas assinaturas concordarem em pelo menos uma fração *s* das suas linhas

  $\boldsymbol{M(i, x) = M(i, y)}$ para pelo menos a fração ***s*** valores de ***i***

- Espera-se que os documentos **x** e **y** tenham a mesma similaridade (de Jaccard) que as suas assinatura

Ideia base do método LSH *(Locality-Sensitive Hashing)*

- **Objectivo: Encontrar documentos com similaridade de Jaccard de pelo menos s**
  – Para um determinado limiar, por exemplo $s = 0.8$.

- **Ideia base:**
  – Utilizar uma função de dispersão ***f*(*x,y*)** que indica se ***x*** e ***y*** constituem um par candidato
    - Par de elementos cuja similaridade tem de ser avaliada

  – Aplicar a função às colunas da matriz de assinaturas
    - Cada par de colunas que resultam no mesmo valor da função de dispersão é um par candidato

LSH aplicado à matriz de MinHash

- **Grande ideia: Aplicar funções de dispersão às colunas da matriz <u>várias vezes</u>**

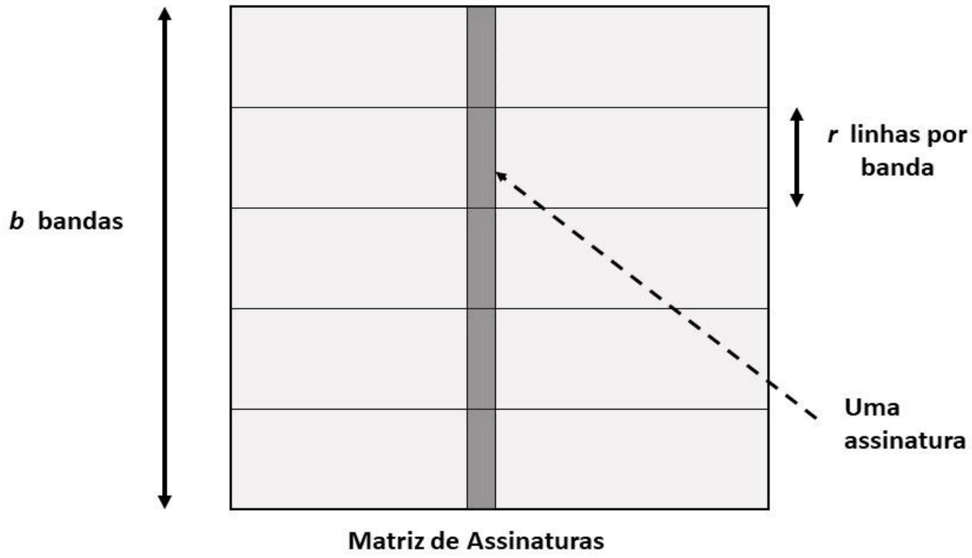
- Fazer com que (apenas) colunas similares tenham elevada probabilidade de terem o mesmo hash code

- **Pares candidatos são aqueles que resultam no mesmo hash code**

LSH na prática

- Na prática aplica-se a cada coluna várias funções de dispersão

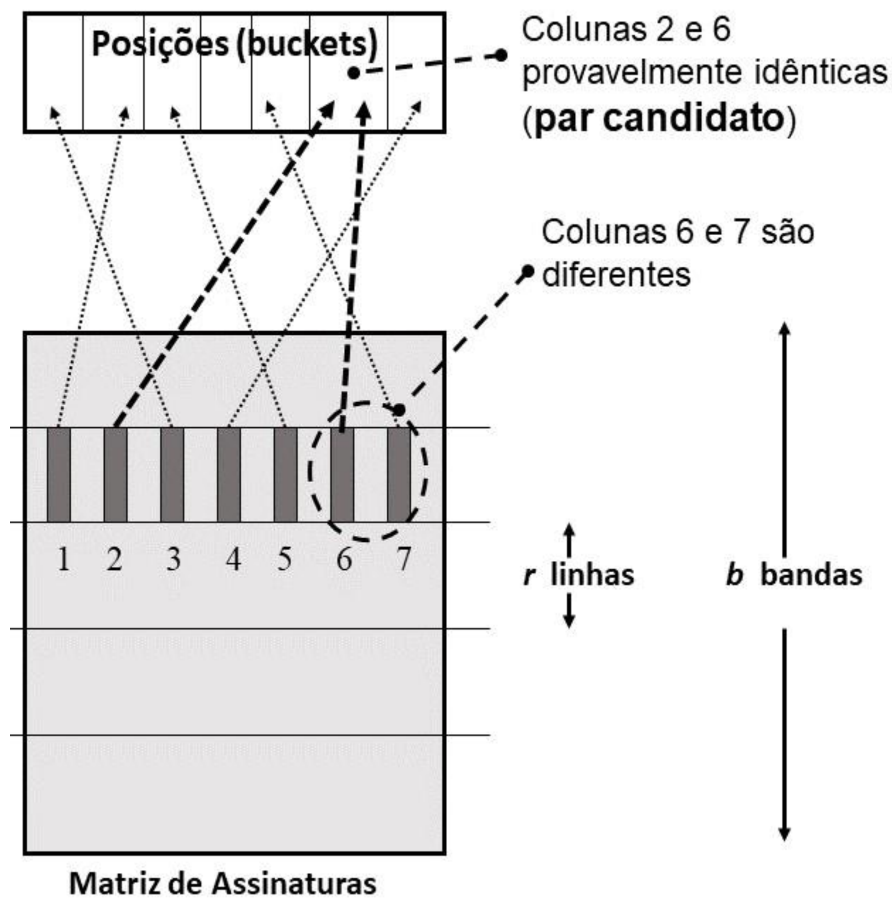
- Divide-se a matriz de assinaturas em *b* bandas
  - de *r* linhas



LSH na prática (continuação)

- Aplica-se a função de dispersão a cada banda
  – Que mapeia numa de *k* posições
    - com *k* suficientemente grande

- **Pares candidatos** são mapeados para a mesma posição pela função de dispersão para pelo menos uma das bandas
  – No nosso exemplo: (2,6)



Análise do LSH

Análise do processo

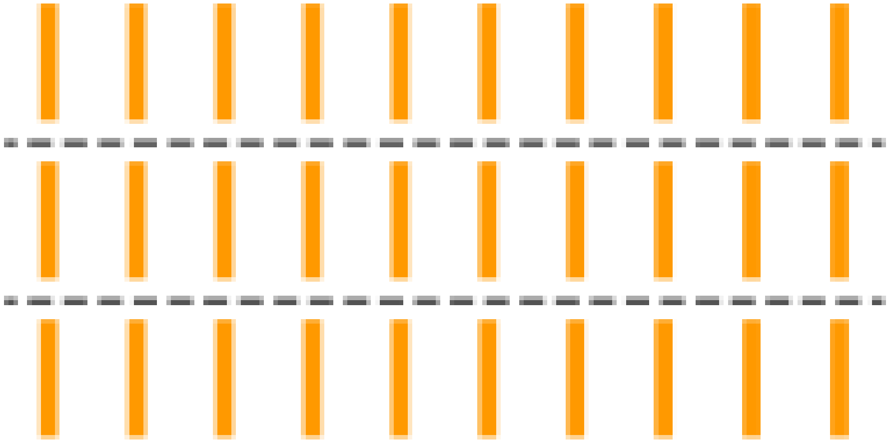
- Assumimos que:
  - existem **posições** (*buckets*) **suficientes** para que as colunas não sejam suscetíveis de mapeamento para a mesma posição a menos que sejam **idênticas** num banda específica

- Em consequência, assumimos que "**mesma posição**" significa "**idêntico nessa banda**"

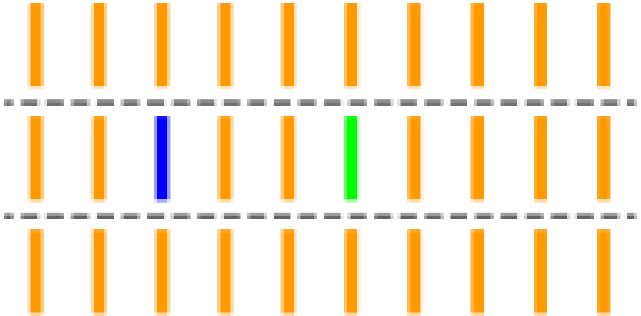
- Esta simplificação é necessária **apenas para simplificar a análise**, não para a correção do algoritmo

b bandas, r linhas/banda

- É conveniente representar as bandas de forma abreviada
- A Figura refere-se a 10 documentos (10 colunas) e 3 bandas.

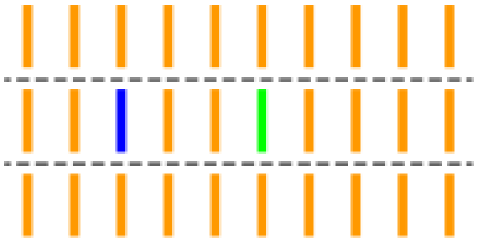


Análise (continuacão)



- Consideremos os dois blocos marcados com coloração diferente na figura
- A probabilidade de todos os elementos do bloco a azul serem iguais aos elementos do bloco verde é J^r
  - J é a similaridade de Jaccard dos dois
    - resultante de as colunas C_1 e C_2 terem semelhança J
  - r é o número de linhas de uma banda

Probabilidades



- A probabilidade de que nem todos os elementos nos dois blocos sejam iguais é

$$1 - J^r$$

- Nem todos serem iguais em b bandas tem probabilidade

$$(1 - J^r)^b$$

- Probabilidade de pelo menos uma banda idêntica:

$$P = 1 - (1 - J^r)^b$$

Exemplo de aplicação

- Consideremos o seguinte caso:

- 100 000 documentos (=> 100 000 colunas de M)
- Assinaturas de 100 inteiros (linhas)
  - Ocupam 40 Mb

- Com b = 20 bandas de r = 5 inteiros/banda
- **Objetivo:** encontrar pares de documentos que apresentem $s \geq 0.8$

Caso 1: sim(C_1, C_2) =0.8

- b = 20 bandas de r = 5 inteiros/banda.
- Vejamos primeiro o que acontecerá a dois documentos com similaridade elevada (0.8)
- Como **sim(C_1, C_2) ≥ s** pretendemos que C_1,C_2 seja um par candidato
  - Pretendemos que haja pelo menos uma banda idêntica

- Probabilidade de C_1, C_2 idênticas numa banda específica:

  $$J^r = (0.8)^5 = 0.329$$

- Probabilidade C_1, C_2 não serem semelhantes em todas as 20 bandas:

  $$(1 - 0.328)^{20} = 0.00035$$

  - Cerca de 1/3000 dos pares de colunas semelhantes a 80% são falsos negativos
- Encontraríamos 99.97% de pares de documentos verdadeiramente semelhantes

Caso 1: $\text{sim}(C_1, C_2) = 0.8$

- b = 20 bandas de r = 5 inteiros/banda.

- Considerando agora documentos com baixa similaridade

  $sim(C_1,C_2) = 0.3$

  – Pretendemos que todas as bandas sejam diferentes

- Probabilidade de C_1, C_2 idênticas numa banda:

  $$J^r = (0.3)^5 = 0.00243$$

- Probabilidade de termos C_1 e $C2$ idênticos em pelo menos uma das 20 bandas:

  $$1-(1-0.00243)^{20} = 0.0474$$

- Aproximadamente 4.74% pares de documentos com similaridade de 0.3 acabam como pares candidatos, aparecendo como falsos positivos,
  – que terão de ser analisados mas não são de fato pares similares.

Otimização do processo

- A aplicação do LSH obriga a um compromisso entre os falsos positivos e falsos negativos

- Este compromisso pode ser efetuado através de:
  1. número de funções de dispersão
     – que resultam no número de linhas da matriz de assinaturas;
  2. número de bandas
  3. número de linhas por banda

Exemplo - efeito de número de bandas

- Quais as alterações na probabilidade de falsos positivos e falsos negativos se utilizarmos apenas 15 bandas de 5 linhas, considerando os casos de $sim(C_1,C_2) = 0.8$ e $sim(C_1,C_2) = 0.3$?

- Falsos positivos
  - P[C_1, C_2 idênticos numa faixa]: $(0.3)^5 = 0.00243$.
  - P[C_1, C_2 idênticos em pelo menos 1 das 15 bandas]:

$$1-(1-0.00243)^{15} = 0.0358$$

    - Aprox. 3.6% dos pares de documentos com similaridade 0.3 falsos positivos

Diminuiu

(4.74% para b=20)

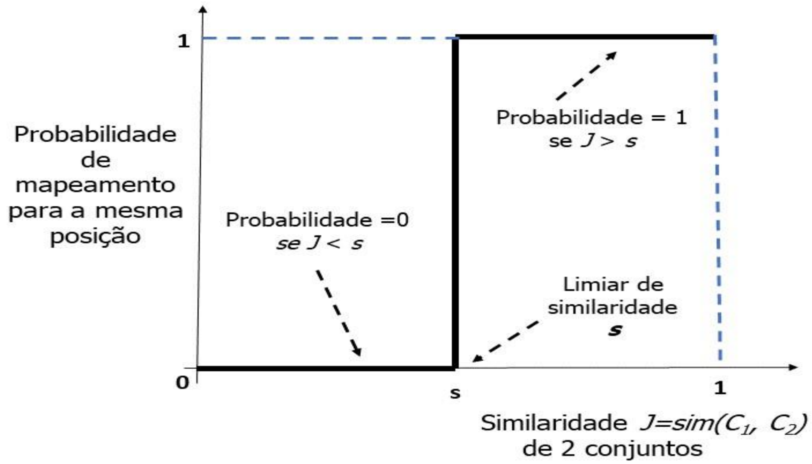
Exemplo - efeito de número de bandas

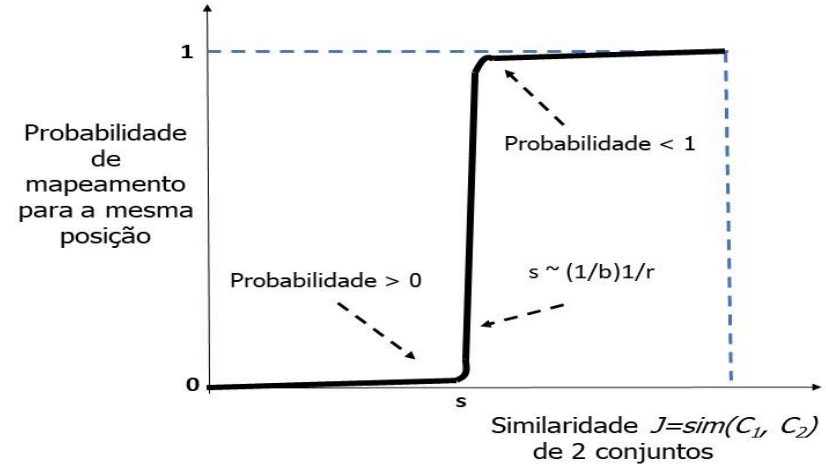
- Falsos negativos
  - P[C_1, C_2 idênticos numa faixa específica]: $(0.8)^5 = 0.328$.
  - P[C_1, C_2 não semelhantes em todas as 15 bandas]: $(1 - 0.328)^{15} = 0.0026$,
    - cerca de 1/400 dos pares semelhantes a 80% são falsos negativos

Aumentou

(1/3000 para b=20)

Realidade versus situação ideal





- O que gostaríamos de ter
- Probabilidade nula para similaridades até ao limiar e probabilidade igual a 1 para pares com similaridade superior a esse limiar

- Desempenho real do processo LSH
- Temos probabilidades não nulas para valores de similaridade baixos
- Não temos valores iguais a 1 para similaridades elevadas

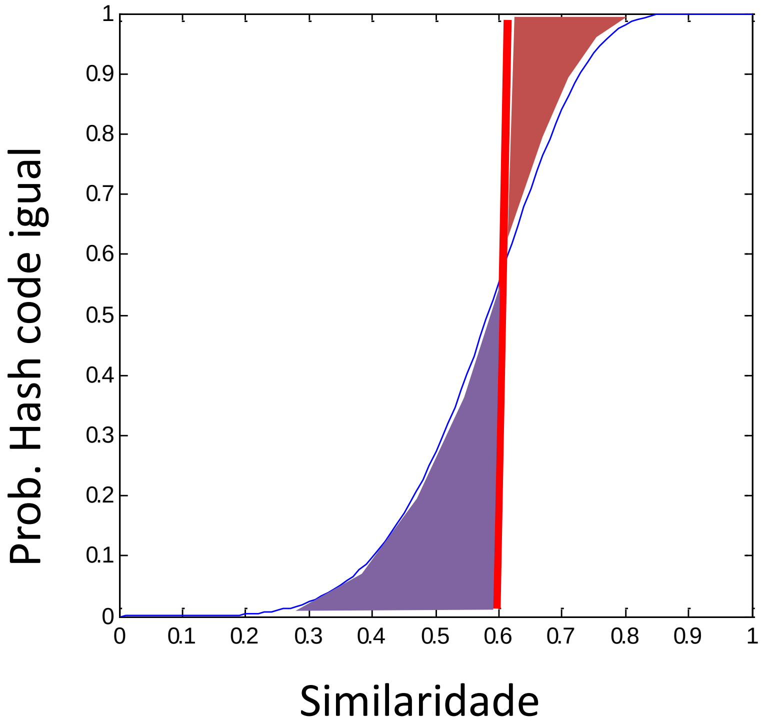
Exemplo

- $b = 20$ e $r = 5$
- Prob. de pelo menos uma banda idêntica

s	$1-(1-s^r)^b$
.2	.006
.3	.047
.4	.186
.5	.470
.6	.802
.7	.975
.8	.9996

Valores para *r* e *b*

- **Seleccionar *r* e *b* para ter a melhor curva**
  - Ex: 50 funções de dispersão (r=5, b=10)



Área azul: Falsos Negativos
Área vermelha: Falsos Positivos

Obtenção dos parâmetros b e r

- *b* e *r* podem ser obtidos através da resolução de um conjunto de equações
  - definido em termos de verdadeiros e falsos positivos considerados adequados à aplicação
    - e/ou verdadeiros e falsos negativos

Exemplo de obtenção de b e r

- Pretendemos:
  1. Falsos positivos < 1% para todos os elementos com similaridade de Jaccard <= 0.6

  2. Verdadeiros positivos >99% para elementos com similaridade >= 0.9

Exemplo de obtenção de b e r

- Sistema de equações:

$$\begin{cases} 1-(1-0.6^r)^b = 0.01 \\ 1-(1-0.9^r)^b = 0.99 \end{cases}$$

- Como resolver?

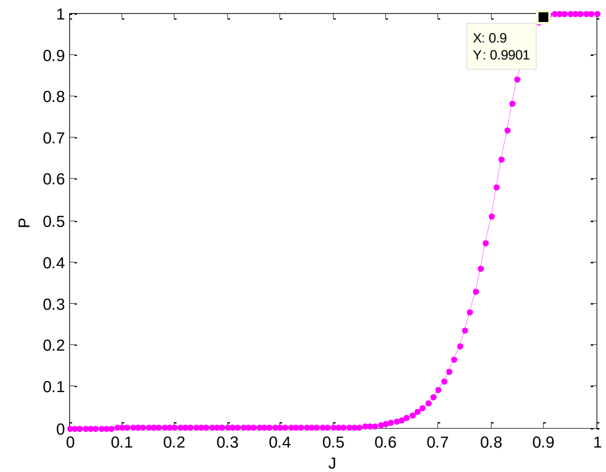
Resolução do sistema de equações

O sistema pode, por exemplo, ser resolvido em Matlab usando a Optimization Toolbox

```
fun = @probabilidade;

x0 = [randi(10),randi(10)];
x = fsolve(fun,x0);

r=fix(round(x(1)))
b=fix(round(x(2)))

%% --------
function F = probabilidade(x)

r=x(1);
b=x(2);

F(1)= 1-(1-0.6^r)^b  -0.01;
F(2)= 1-(1-0.9^r)^b - 0.99;
```

Exemplo (continuação)

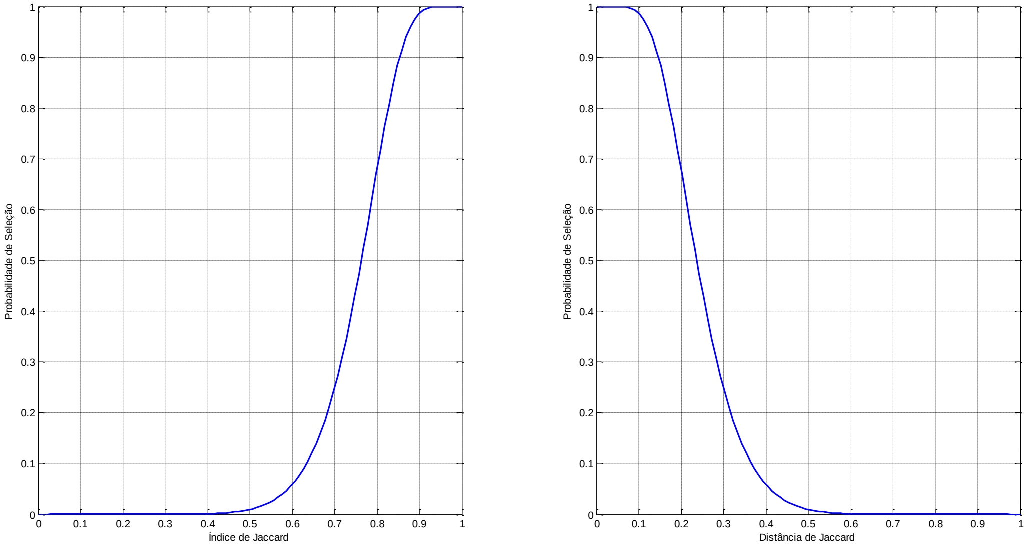
- Confirmemos os resultados…
- Curva $P(J) = 1 - (1 - J^r)^b$
  - r=15
  - b=20



- Probabilidade < 0.01 para similaridade de Jaccard <=0.6
- $1 - (1 - 0.6^{15})^{20} \approx 0.0095 \ < 0.01$
  - OK
- Probabilidade>0.99 para similaridade de Jaccard >=0.9
- $1 - (1 - 0.9^{15})^{20} \approx 0.9901 > 0.99$
  - OK

Aplicação ao MovieLens

- Processar a matriz MinHash
  - Já calculada
- Usemos, por exemplo:
  - r=10 b=NumHashFunctions /r



Comentários finais

- Afinar ***M*, *b*, *r*** para obter quase todos os pares com assinaturas similares
  - Mas eliminando a maior parte dos pares que não têm assinaturas similares

- **Testar** se os **pares candidatos** têm, de facto, **assinaturas similares**

- **Opcional:** Num outro passo, verificar se os pares candidatos remanescentes representam mesmo documentos similares

Recomendação

- Para informação adicional sobre este tópico recomenda-se a consulta de

  Mining of Massive Datasets,

  da autoria de Jure Leskovec, Anand Rajaraman e Jeff Ullman

Parte dos slides adaptados de:
Finding Similar Items: Locality Sensitive Hashing

Mining of Massive Datasets

Jure Leskovec, Anand Rajaraman, Jeff Ullman Stanford University

http://www.mmds.org