

Pêndulo Amortecido Forçado

João Henrique de Sant'Ana*

Universidade de São Paulo, Instituto de Física, São Paulo, SP, Brasil

(Dated: 20 de Abril de 2020)

Neste breve trabalho, estudamos a dinâmica de um pêndulo amortecido forçado. Demonstramos que a dinâmica desse sistema é caótica para certos valores do elemento forçador. Para isso exploramos o espaço de fase e o mapa de Poincaré, calculamos o expoente de Lyapunov e fizemos uma aproximação do número de Feigenbaum.

Keywords: Dinâmica caótica, Expoente de Lyapunov, Constante de Feigenbaum, Pêndulo Amortecido Forçado

I. INTRODUÇÃO

Nas palavras de Henri Poincaré "...pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais produzam grandes diferenças nos fenômenos finais", esta é a descrição mais elementar de um movimento caótico. Sistemas físicos que possuem essa característica podem ser descritos por conjuntos de equações do tipo

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = F_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1)$$

onde $x_1 \dots x_n$ são as variáveis de interesse do sistema físico e $F_1 \dots F_n$ são funções não lineares com respeito a x_i $i = (1, \dots, n)$. Ou seja, são fenômenos determinísticos, mas que possuem um atributo de imprevisibilidade com respeito às condições iniciais $x_1(0) \dots x_n(0)$. A dinâmica de um pêndulo com amortecimento e com uma força periódica é governada por um sistema de equações desse tipo. Sistemas dinâmicos não lineares têm sido estudados por um bom tempo, mas tiveram um *boom* quando Edward Lorenz apresentou suas equações da dinâmica da atmosfera.

II. DESCRIÇÃO TEÓRICA

Um pêndulo simples é composto por um corpo de dimensões desprezíveis de massa m suspenso por um fio de comprimento l e de massa desprezível num campo gravitacional de aceleração \vec{g} . Consideramos uma força de atrito viscoso proporcional à velocidade do corpo, ou seja, $\mathcal{F}_a = \frac{1}{2}bv^2$, que é a chamada função de dissipação de Rayleigh. A configuração é descrita na figura 1. Agora estamos prontos para introduzir uma força externa¹ que possui uma forma senoidal no tempo e que terá um período de $T = \frac{2\pi}{\Omega_d}$. Podemos descrever nosso sistema físico através da coordenada generalizada θ , já que o problema possui um grau de liberdade. A equação

de *euler-lagrange*² será dada por [1]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{F}_a}{\partial \dot{\theta}} = \tau_{ext}(t) \quad (2)$$

A lagrangia pode ser escrita como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos(\theta)) \quad (3)$$

Com isso encontramos a equação de movimento para coordenadas θ , que toma a forma

$$ml^2\ddot{\theta} + bl^2\dot{\theta} + mgl\sin(\theta) = \tau_d \sin(\Omega_d t) \quad (4)$$

onde b , τ_d e Ω_d são constantes. Podemos dividir equação 4 por ml^2 e chamamos $\gamma = \frac{b}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, $F = \frac{\tau_d}{ml^2}$ e então chegamos

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = F \sin(\Omega_d t) \quad (5)$$

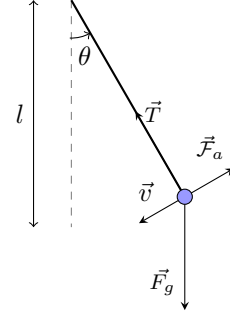


Figura 1: Pêndulo amortecido.

III. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Para entender a dinâmica do pêndulo, temos que observar como ele reage a certas mudanças nos parâmetros da equação 5, além das condições iniciais. As grandezas

* Correspondence email address: joao.henrique.santana@usp.br

¹ Essa força externa será identificada como um torque.

² A lagrangia tem dimensão de energia e θ não tem dimensão, ou seja dimensão de cada termo da equação é $[m \cdot N]$, dimensão de torque.

g , l e m serão sempre constantes, já que são propriedades do pêndulo e da terra para g , portanto nossos parâmetros de interesse serão γ , F e Ω_d . Com isso, vamos reorganizar nossa equação chamando $\omega = \dot{\theta}$, $\gamma = 1/q$, $\phi = \Omega_d t$ e vamos considerar que a frequência natural vale $\omega_0^2 = \frac{g}{l} = 1$. Com isso encontramos

$$\begin{cases} \dot{\omega} = -\frac{1}{q}\dot{\theta} - \sin(\theta) + F\sin(\phi) \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\phi} = \Omega_d \end{cases} \quad (6)$$

Estamos prontos para realizar nossa simulação numérica. Resolvemos a equação 6 via método Runge-Kutta clássico de quarta ordem. De fato, resolvemos apenas as duas primeiras equações, já que Ω_d é uma grandeza constante, pois não temos uma força com diferentes frequências em cada instante t . Bom, basicamente toda nossa análise foi realizada tomando $q = 2$ e $\Omega_d = 2/3$ e condições iniciais $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = 0$. A resolução desse problema está disponível no repositório do meu *github*³ e lá se encontram todos os script's que foram usados para estudar a dinâmica do pêndulo e seus procedimentos para rodá-los, também estão todas as figuras utilizadas nesse relatório. Utilizamos a linguagem de programação *Python 3* por ser uma linguagem simples e ao mesmo tempo poderosa. Sinta-se a vontade para utilizá-los.

IV. RESULTADOS E ANÁLISE

A. Espaço de Fase e Mapa de Poincaré

Para estudar a dinâmica do sistema, vamos construir o que chamamos de diagrama do espaço de fase, que é o espaço onde vivem as nossas variáveis de interesse, neste caso será um diagrama dada por $(\theta, \dot{\theta})$. Podemos analisar várias características do sistema através desse diagrama, como por exemplo, para sistema conservativos, as trajetórias nesse espaço nunca se cruzam para diferentes valores de energias ou, para outros sistemas, podemos ter trajetórias que acabam terminando num único ponto, este ponto se chama atrator, que é o caso de um pêndulo puramente amortecido que se encerra na posição $\theta = 0$ e velocidade angular $\dot{\theta} = 0$ para tempos longos. Nosso problema é constituído de uma força periódica e então podemos tirar fotografia estroboscopicamente do espaço de fase a cada período da força. Essa sucessão de fotos é o que chamamos de mapa de Poincaré. Se o mapa de Poincaré tiver apenas um ponto, concluímos que o sistema volta pro mesmo lugar no espaço de fase e assim o movimento não é caótico. Um mapa de Poincaré de uma dinâmica caótica é constituído por vários pontos. Plotamos ambos os diagramas para valores de $0 < F \leq 1.50$ ⁴.

Para valores de F diferente de zero o sistema é sempre caótico, mas podemos constatar que para os valores

baixo de F a dinâmica se comporta aproximadamente regular, entretanto para a região de $F = 1.20$ e $F = 1.50$ o sistema demonstra seu caráter ímpar de caoticidade. Chamamos o conjunto de pontos para $F = 1.2$ ou para $F = 1.5$ de atrator caótico, pois essa superfície no espaço de fase não depende das condições iniciais. O curioso dessa estrutura é que ela possui uma propriedade fractal.

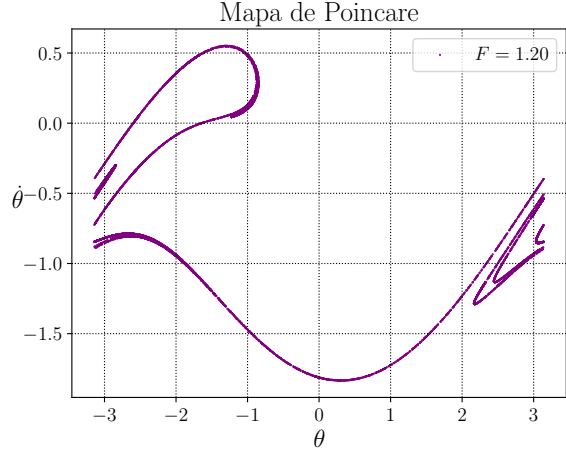


Figura 2: Condições iniciais : $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = 2$.

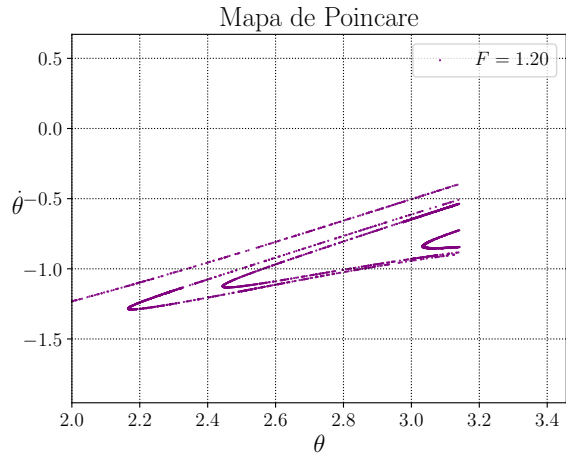


Figura 3: Estrutura fractal do atrator caótico.

B. Diagrama de bifurcação

Um fenômeno interessante que pode ser observado no diagrama do espaço de fase para $F = 1.35$, $F = 1.45$ e $F = 1.47$ é que para cada força temos o dobro de linhas no espaço de fase. Isso é observado pois quando a natureza do pêndulo tende a ir a um estado de caoticidade o período vai dobrando como resposta do elemento forçador. Esse efeito é chamado de efeito cascata e podemos observá-lo num diagrama de bifurcação (F, θ) . A Partir desse gráfico 5 podemos encontrar a constante de

³ <https://github.com/joaoenr/Pendulo-Amortecido-Forcado>

⁴ Os plots estão todos na seção Apêndice

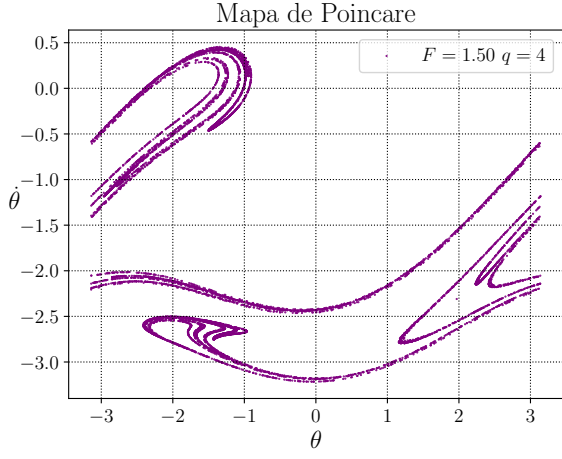


Figura 4: Atrator caótico para $q = 4$ e $F = 1.50$.

Feigenbaum definina por:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1} - F_{n-2}}{F_n - F_{n-1}} \quad (7)$$

onde F_n são os valores da força onde há uma bifurcação.

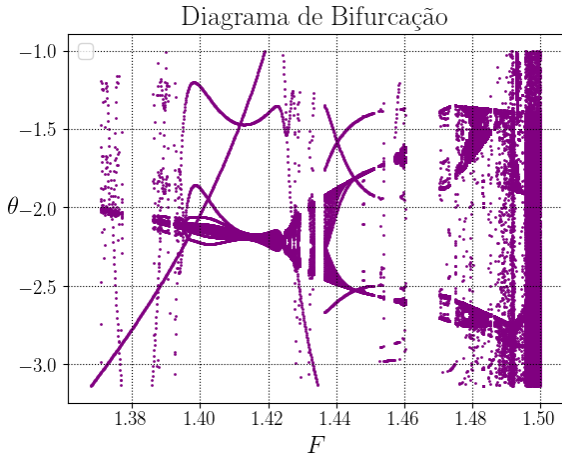


Figura 5: Diagrama de Bifurcação.

Portanto podemos fazer uma aproximação da constante calculando o primeiro δ_1

$$\delta_1 = \frac{1.45 - 1.42}{1.47 - 1.45} = 1.5 \quad (8)$$

Esse valor é uma aproximação bem grosseira, já que o valor de $\delta = 4.669\dots$

C. Expoentes de Lyapunov

Podemos utilizar outro artifício matemático para mostrar que o movimento é sensível as condições iniciais. Pensamos em dois pontos, ou dois pêndulos, $(\theta_1(0), \dot{\theta}_1(0))$ e $(\theta_2(0), \dot{\theta}_2(0))$ podemos olhar como a grandeza $\Delta\theta = |\theta_2(t) - \theta_1(t)|$ evolui no tempo. Plotamos os gráficos num escala log para $F = 0.2$ e $F = 1.20$

usando $q = 2$ e $\Omega_d = 2/3$ e condições iniciais: $\theta_1(0) = 0$ $\dot{\theta}_1(0) = 2$ e $\theta_2(0) = 0.001$ $\dot{\theta}_1(0) = 2.001$

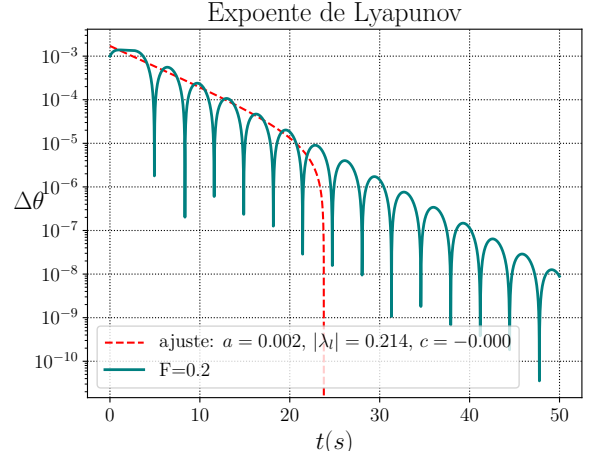


Figura 6: Regime não caótico.

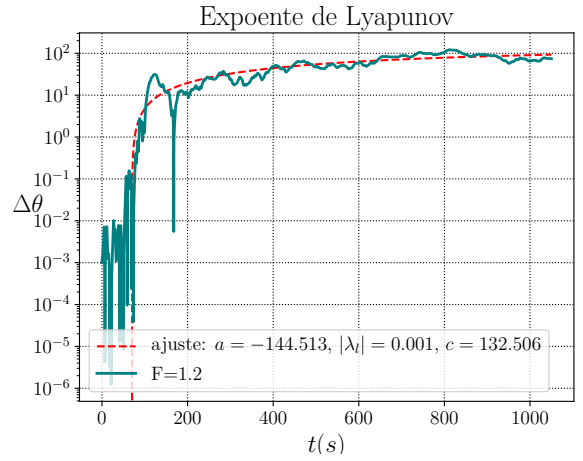


Figura 7: Regime caótico.

Com diferença de ordem de 10^{-3} nas condições iniciais. Vemos que no gráfico 6 a diferença entre a grandeza θ cai em função do tempo, e portanto estamos num regime não caótico, isto é o movimento não é imprevisível. Agora para o plot 7 observamos que a diferença de caminho entre os dois pêndulos 1 e 2 aumenta, então estamos no regime caótico em sua representação. O interessante disso é que podemos tirar uma média de $\Delta\theta$ e ajustar uma função exponencial. Digo

$$\Delta\theta \approx e^{\lambda t} \quad (9)$$

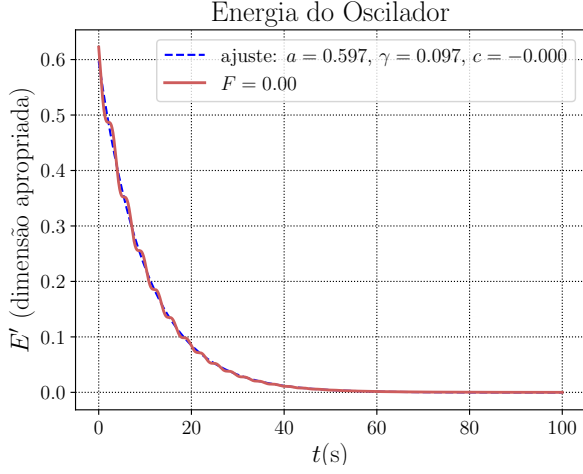
no nosso script ajustamos uma função do tipo

$$F(t) = ae^{-\lambda_l t} + c \quad (10)$$

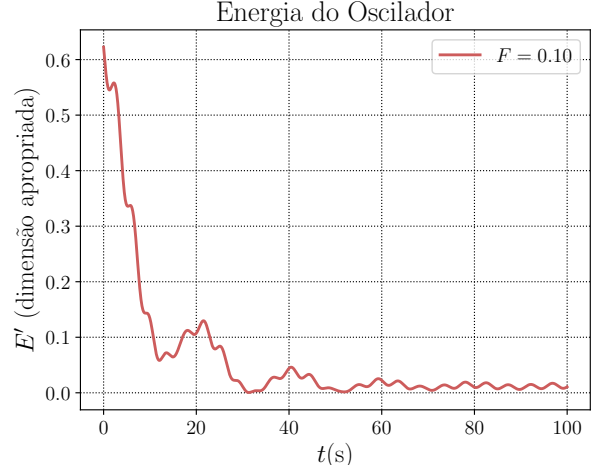
os valores de a , λ_l e c são diferentes para os dois regimes. O mais importante é que o sinal de a muda para os dois regimes. A transição de fase é caracterizada por esse sinal de a e do valor de $|\lambda_l|$ que vai para zero e em seguida tem seu aumento [2]. O expoente λ representa a taxa da divergência na diferença de caminho dos dois pêndulos.

D. Energia de Oscilação

Por último, podemos entender como o valor da energia do oscilador se comporta para cada valor do elemento forçador no tempo.

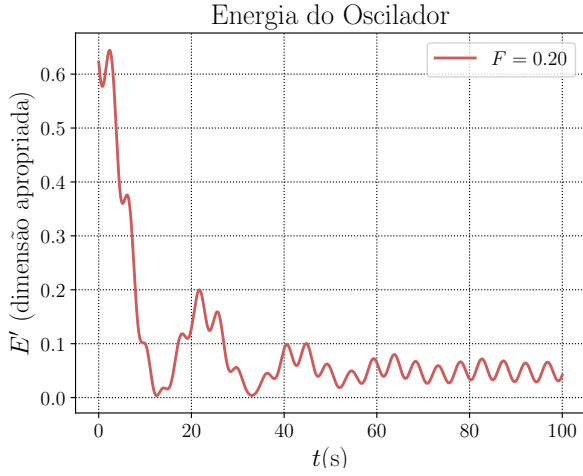


(a) Movimento puramente amortecido. $q = 10$ e $\Omega_d = 2/3$

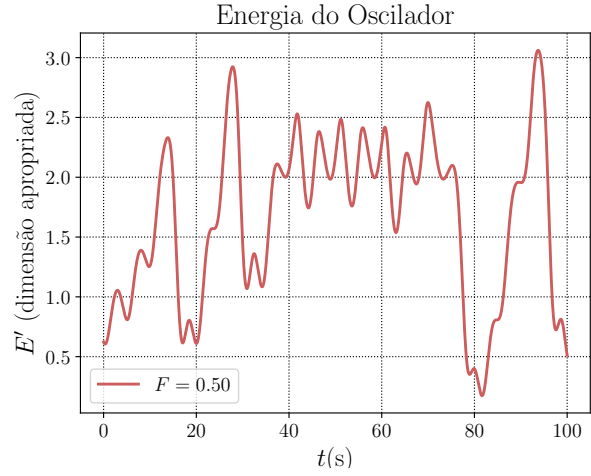


(b) $q = 10$ e $\Omega_d = 2/3$.

Figura 8: Evolução do Comportamento da Energia devido a amplitude da força.



(a) $q = 10$ e $\Omega_d = 2/3$.



(b) $q = 10$ e $\Omega_d = 2/3$.

Figura 9: Evolução do comportamento da energia devido a amplitude da força.

Os plots são realmente bastantes ricos em propriedades. Primeiro, conseguimos observar o efeito do transiente e da força ao mesmo tempo, e segundo de ver que, com o aumento da amplitude da força, o sistema responde com vários valores de frequências [2]. Com isso, a partir de amplitude de 0.5 constatamos que só o efeito da força importa para o valor da energia. Além de que, para valores de amplitude maior que 0.1 o sistema deixa de

ser puramente dissipativo. Para o oscilador puramente amortecido (sistema dissipativo) podemos ajustar uma exponencial, que no fundo é a mesma coisa que fizemos para o expoente de Lyapunov, vide IV C. Realizamos o mesmo ajuste

$$E(t) = ae^{-\gamma t} + c \quad (11)$$

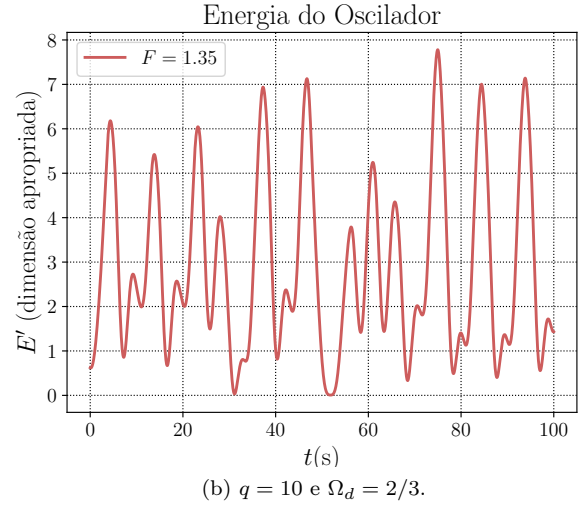
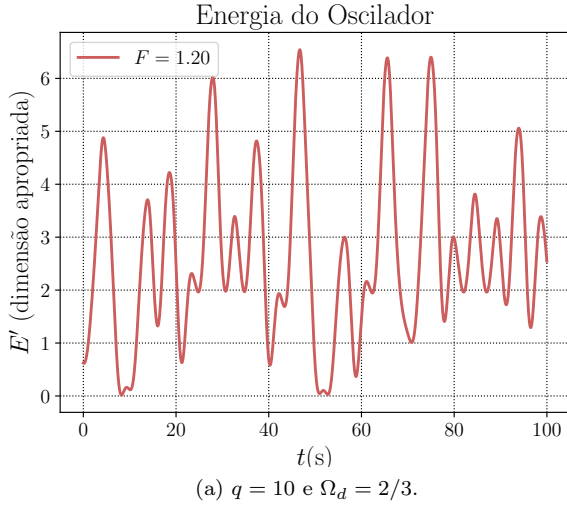


Figura 10: Evolução do comportamento da energia devido a amplitude da força.

e encontramos o valor para o expoente $\gamma = 0.097$ que representa a taxa de decaimento da energia [4]. Com esse valor podemos calcular o tempo de decaimento

$$\tau_{dec} = \frac{1}{\gamma} \quad (12)$$

que será $\tau_d \approx 10.3$. Na figura 8a podemos ver que esse valor está na região de energia próxima de 0.2.

V. CONCLUSÃO

A partir dessas 4 subseções de IV, demonstramos que o sistema é rico de propriedades para todos valores de

$0 \leq F \leq 1.50$. Deduzimos que o sistema, para valores baixos de F , é um sistema aproximadamente dissipativo e em seguida, aumentando a amplitude da força, oscila num estado de alta caoticidade e baixa caoticidade até que o valor chegue $F = 1.50$, isso para valores de $q = 2$ e $\Omega_d = 2/3$. O valor da energia está intimamente relacionado com o valor de F e que para valores muito baixo de F o fator γ é um fator característico do sistema e em contraste o sistema começa a responder para valores maiores de F .

-
- [1] Nivaldo A. Lemos, *Mecânica Analítica* (Livraria da Física, São Paulo, 2007).
 - [2] N. Giordano, *Computational physics* (Prentice Hall, 1997)
 - [3] Gregory L. Baker and Jerry P. Gollub, *Chaotic Dynamics: An Introduction* (Cambridge University Press, 1996).
 - [4] H.M. Nussenzveig, *Curso de física básica: Fluidos, Oscilações e Onda, Calor* (Blucher, São Paulo, 2013).
-

Apêndice

Para facilitar a visualização do espaço de fase e do mapa de Poincaré, colocamos no apêndice para não poluir o relatório. Os plots foram realizados com ajuste de $q = 2$ e $\Omega_d = 2/3$.

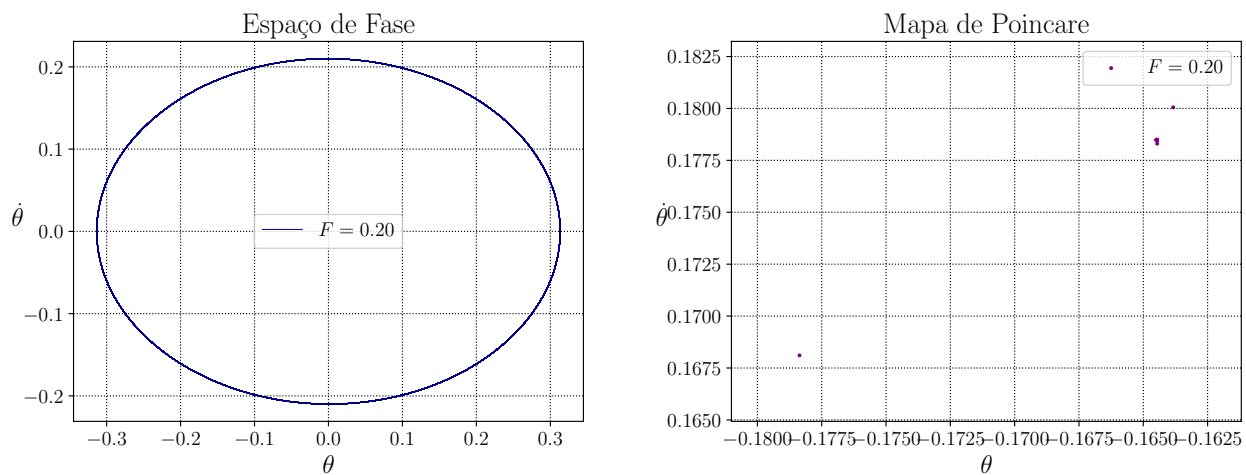
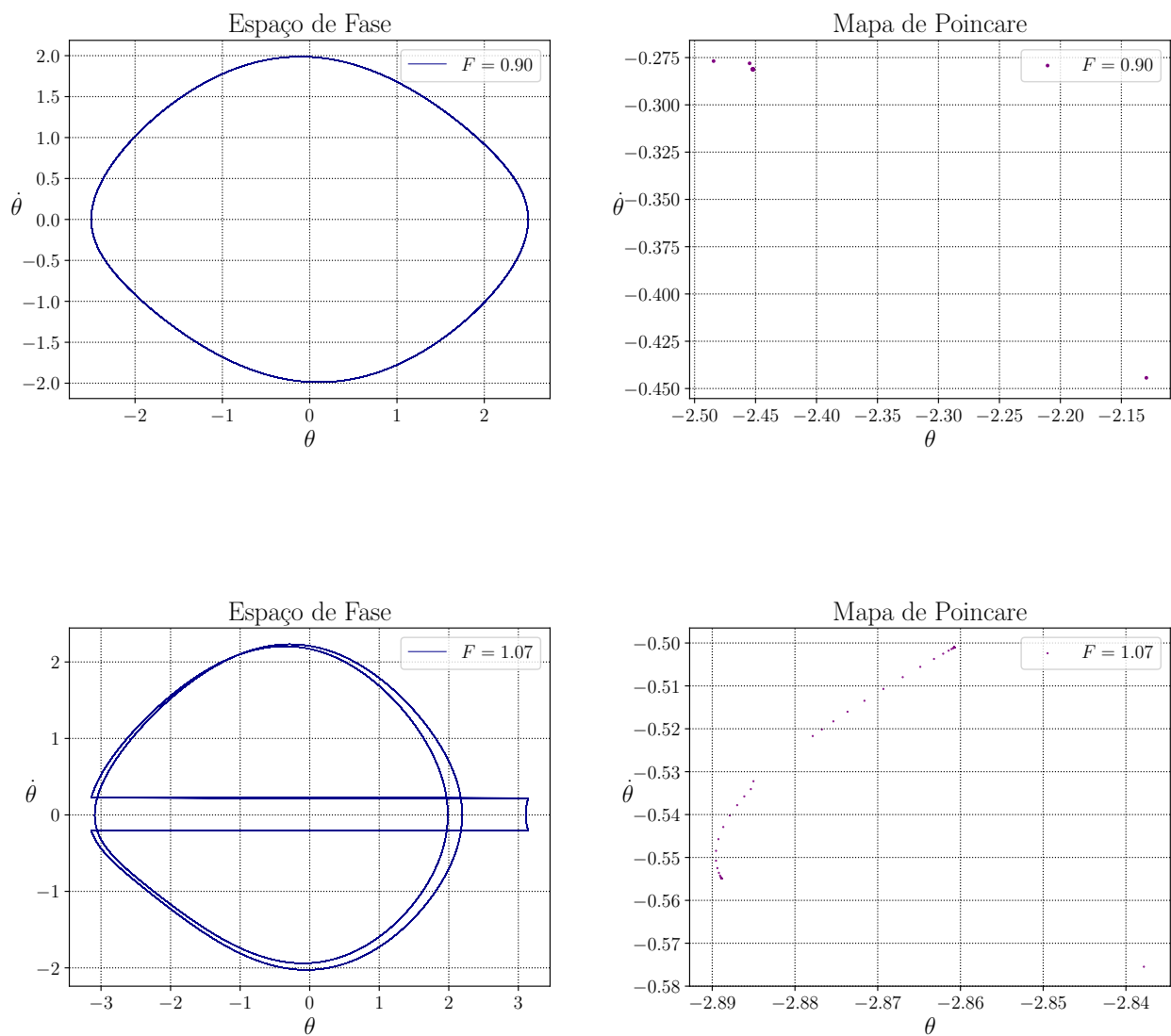


Figura 11: Vemos que para $\sin(\theta) \approx \theta$ o espaço de fase é similar a uma circunferência.



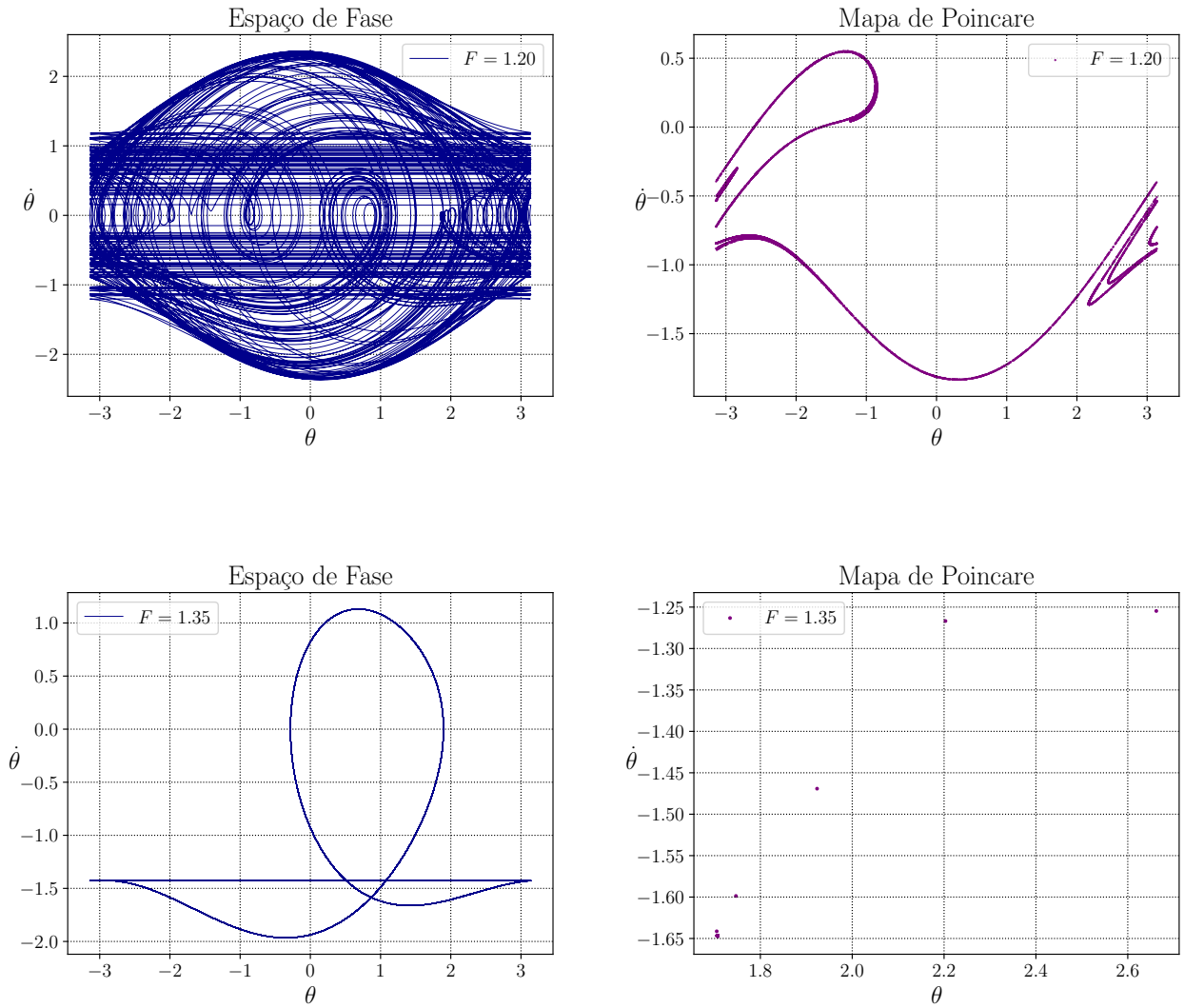


Figura 12: Vemos que pêndulo dá 1 volta no espaço de fase.

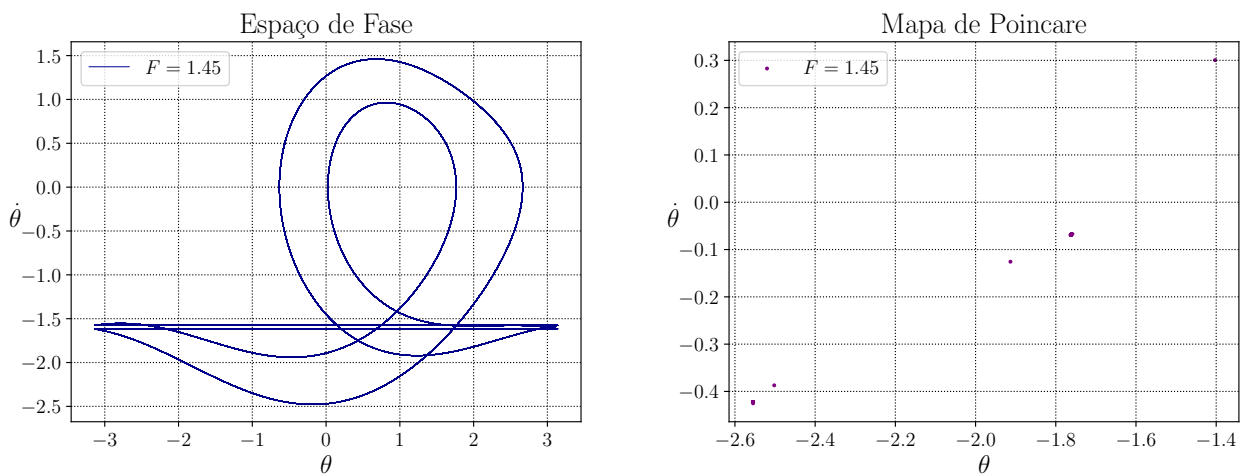


Figura 13: Vemos que o pêndulo dá 2 volta no espaço de fase.

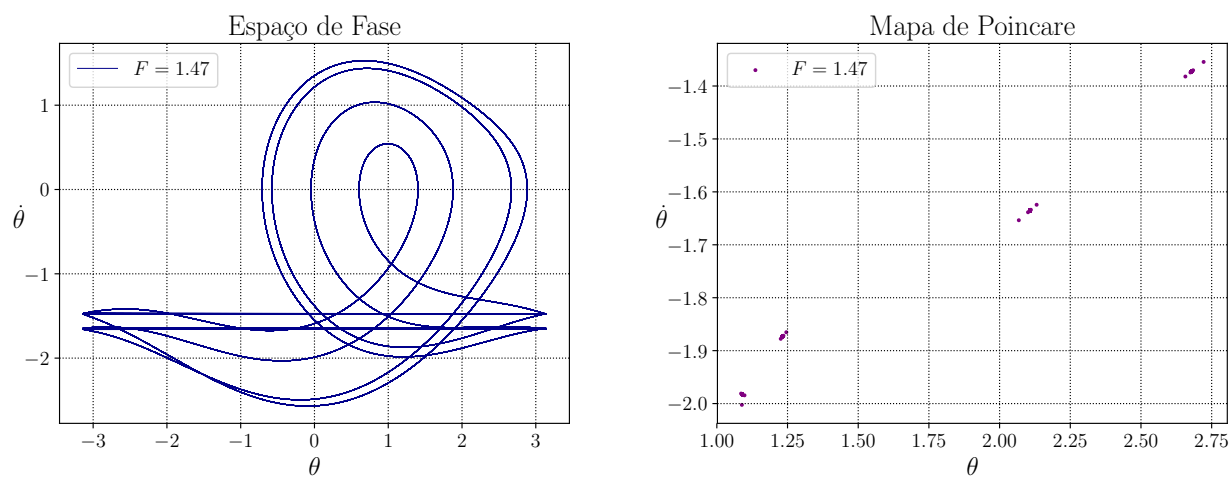


Figura 14: Vemos que o pêndulo dá 4 volta no espaço de fase.

