Leis de Kirchhoff com fasores

Impedância

Leis de Kirchhoff com fasores

- **As Leis de Kirchhoff também se aplicam quando as tensões e as correntes são representadas por fasores.**

Tomemos a KVL. Se na expressão desta lei no domínio do tempo

$$v_1(t) + v_2(t) + \ldots + v_N(t) = 0$$

substituirmos cada tensão por uma tensão complexa com a mesma parte real dada, dividindo em seguida tudo por $e^{j\omega t}$ **obtemos**

$$\boxed{\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \ldots + \mathbf{V}_N = 0}$$

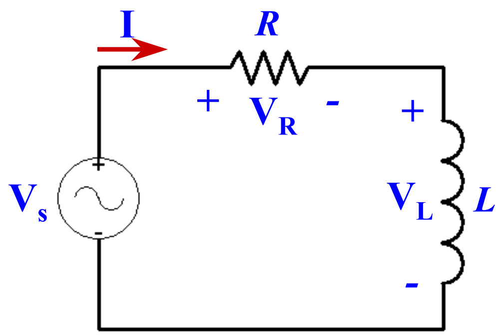
- **Usando raciocínio idêntico podemos demonstrar que a KCL também se aplica no domínio dos fasores:**

$$\boxed{\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \ldots + \mathbf{I}_N = 0}$$

Aplicação da KVL ao circuito RL

- **Agora, tensões e correntes são representadas pelo fasor correspondente.**

- **A aplicação da KVL faz-se da mesma maneira:**



$$-\mathbf{V}_S + \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L = 0$$

Substituindo pelas relações V/I obtidas antes

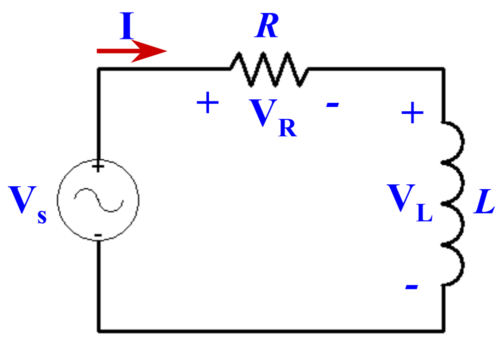
$$R\mathbf{I} + j\omega L\mathbf{I} = \mathbf{V}_S \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_S}{R + j\omega L}$$

Se a fonte é $V_s = V_m \cos\omega t$, então o fasor correspondente é

$$\mathbf{V}_S = V_m \angle 0^\circ$$

Aplicação da KVL ao circuito RL

Pelo que $\mathbf{I} = \dfrac{\mathbf{V}_S}{R + j\omega L}$ **fica**



$$\mathbf{I} = \frac{V_m \angle 0^\circ}{R + j\omega L}$$

$$\mathbf{I} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle\left(-arctg\frac{\omega L}{R}\right)$$

- **Convertendo para o domínio do tempo, a corrente será**

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - arctg\frac{\omega L}{R}\right)$$

- **Portanto, através dos fasores, chegamos ao mesmo resultado de uma maneira mais fácil.**

Impedância

- No domínio da frequência, vimos que as relações V/I para os três elementos passivos que conhecemos são

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \qquad \mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I} \qquad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$$

Escrevendo estas expressões como a razão entre os fasores de tensão e corrente

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = j\omega L = X_L \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{j\omega C} = X_C$$

verificamos que estas razões dependem apenas dos valores dos elementos e da frequência;

- Por se tratarem de razões entre V e I, estas <u>quantidades complexas</u> são expressas com unidades de Ohm. Chamam-se genericamente impedâncias e representam-se pela letra Z.

Impedância

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = j\omega L = X_L \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{j\omega C} = X_C$$

- Embora possa ser um numero complexo, a impedância não é um fasor pois não tem uma correspondência no domínio do tempo.

- A validade das leis de Kirchhoff no domínio da frequência implica que as impedâncias podem ser associadas em série e em paralelo seguindo as mesmas regras usadas nas resistências.

Associações em série

- **Assim, a impedância total de um conjunto de *N* impedâncias em série é**

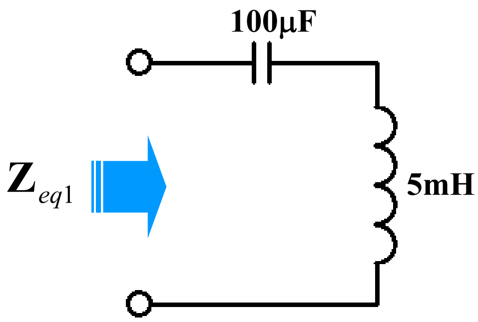
$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \ldots + \mathbf{Z}_N$$

- **Por exemplo, à frequência de *10⁴ rad/s*, o circuito série de figura apresenta uma impedância**

$$\mathbf{Z}_{eq1} = \mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_C = j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$j\omega L = j10^4\left(5\text{x}10^{-3}\right) = j50\Omega$$

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j10^4\left(100\text{x}10^{-6}\right)} = \frac{1}{j}\Omega$$



$$\mathbf{Z}_{eq1} = j50 - j1 = j49\Omega$$

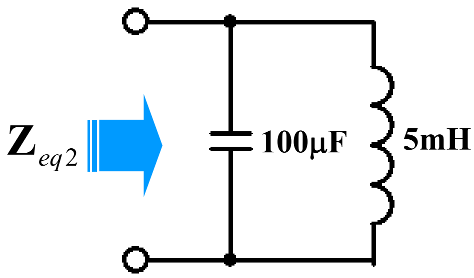
Associações em paralelo

Para o caso de *N* impedâncias em paralelo temos $\frac{1}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \ldots + \frac{1}{\mathbf{Z}_N}$

e para o caso de $N = 2$: $\mathbf{Z}_{eq} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}$

- **Por exemplo, à frequência de *10⁴ rad/s*, o circuito paralelo da figura apresenta uma impedância**

$$\mathbf{Z}_{eq2} = \frac{\mathbf{Z}_L\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_C} = \frac{(j50)(-j1)}{j50 - j1} = \frac{50}{j49} = -j1.020\Omega$$



Notar que este valor de impedância só é válido para esta frequência!

Associações em paralelo

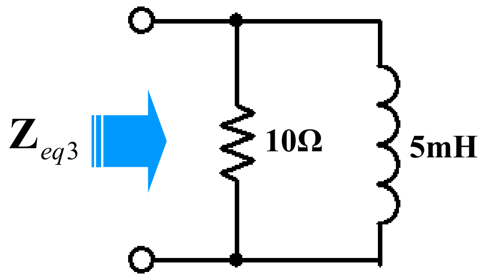
- **Também para *10^4 rad/s*, o circuito RL apresenta**

$$\mathbf{Z}_{eq3} = \frac{R\mathbf{Z}_L}{R+\mathbf{Z}_L} = \frac{10(j50)}{10+j50} = \frac{10(j50)}{10+j50}\left(\frac{10-j50}{10-j50}\right) =$$
$$= (9.62 + j1.92)\Omega$$

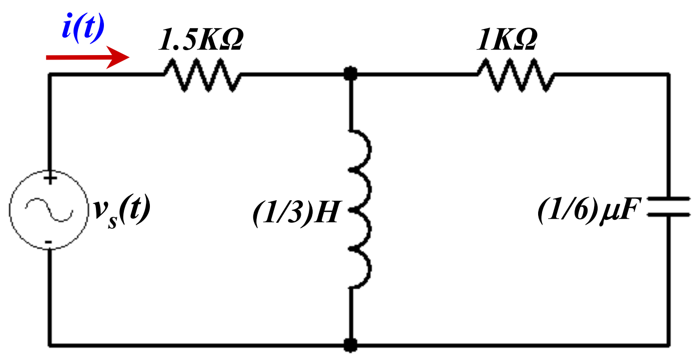
… que podemos exprimir também na forma polar

$$\mathbf{Z}_{eq3} = \sqrt{9.62^2 + 1.92^2}\angle\left(arctg\,\frac{1.92}{9.62}\right)$$

$$\mathbf{Z}_{eq3} = 9.81\angle 11.3^{\circ}\,\Omega$$



Exemplo 1 – Determinar *i(t)* no circuito sabendo que *$v_s(t)$ = 40sin(3000t) [Volts]*



- **Comecemos por calcular o fasor da função forçadora.**

$$v_s(t) = 40\sin 3000t \;= 40\cos(3000t - 90^{\circ}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{V_S} = 40\angle -90^{\circ}\,V$$

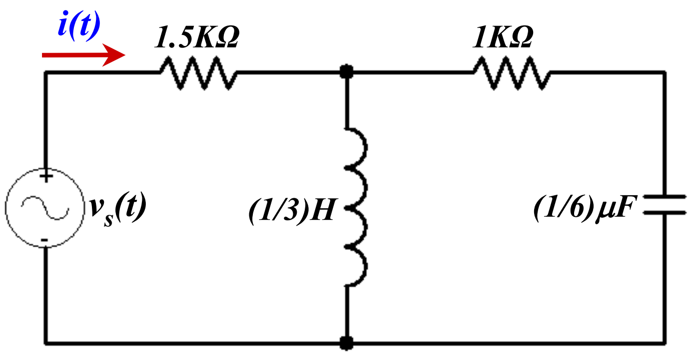
- **À frequência de *3000rad/s*, as impedâncias da bobina e do condensador são:**

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = j(3000)(1/3) = j1K\Omega$$

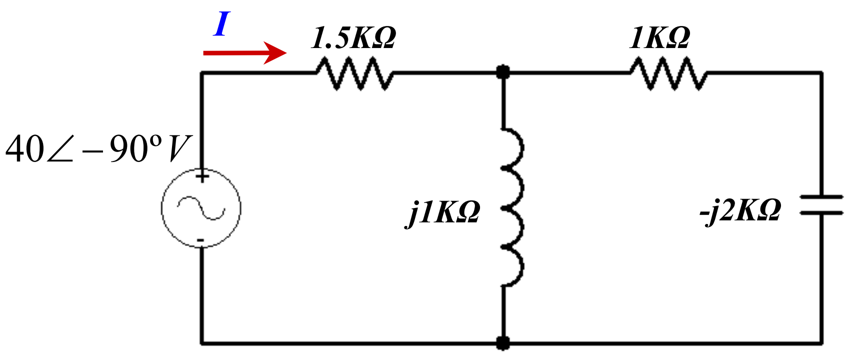
$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{(3000)(1/6)10^{-6}} = -j2K\Omega$$

Exemplo 1

- Desenhamos agora o **circuito no domínio na frequência**.

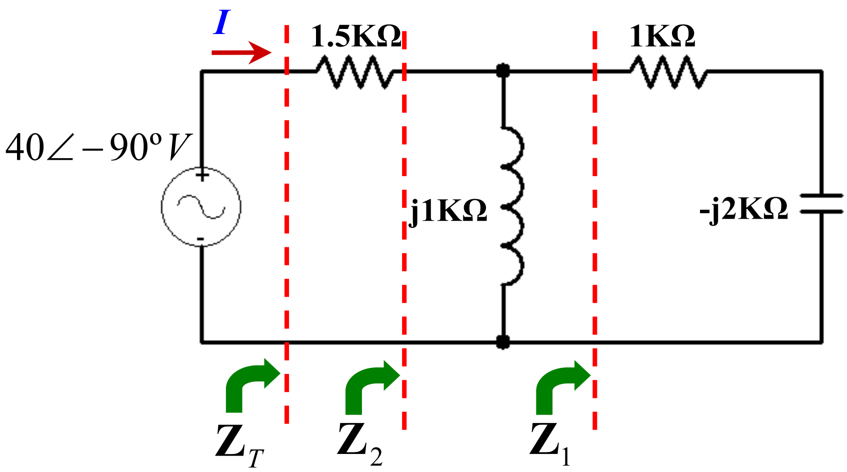


Toda a análise é feita agora neste circuito!



Exemplo 1

- Calculamos agora a impedância total vista pela fonte



$$\mathbf{Z}_1 = 1 - j2K\Omega$$

$$\mathbf{Z}_2 = j1 // \mathbf{Z}_1 = \frac{j1(1-j2)}{j1+1-j2}$$
$$= (0.5 + j1.5)K\Omega$$

$$\mathbf{Z}_T = 1.5 + \mathbf{Z}_2 = (2 + j1.5)K\Omega$$

Convertendo para a forma polar $\mathbf{Z}_T = 2.5\angle 36.87^{o}\,K\Omega$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_S}{\mathbf{Z}_T} = \frac{40\angle -90^{o}}{2.5\angle 36.87^{o}} = 16\angle -126.9^{o}\ \ mA$$

- O que transformando de volta para o **domínio do tempo** resulta em

$$i(t) = 16\cos(3000t - 126.9^{o})\quad mA$$

Impedância e admitância

- **Como já vimos, quando expressa na forma rectangular (ou algébrica) a impedância apresenta duas componentes:**

$$\mathbf{Z} = R + jX$$

em que *R* é a resistência e *X* a reactância, sendo ambas expressas em unidades de *Ohm*.

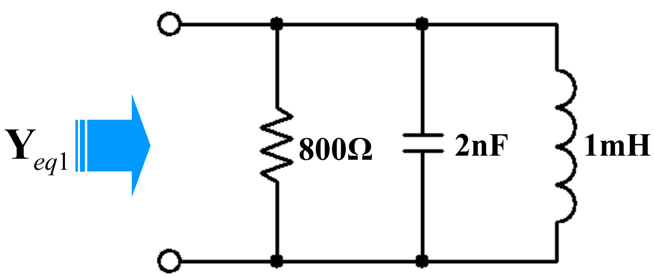
- **O inverso da impedância é a admitância**

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{R + jX} = G + jB$$

A parte real de Y (*G*) é a condutância e a parte imaginária (*B*) é a susceptância, ambas expressas em unidades de *Siemens*.

Exemplo 2 – Determinar a admitância equivalente à frequência de $10^6 rad/s$.

- **Calculamos primeiro as admitâncias individuais**



$$\mathbf{Y}_R = G_R = \frac{1}{800} = 1.25mS$$

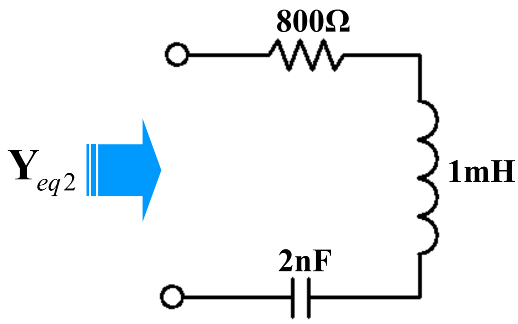
$$\mathbf{Y}_C = j\omega C = j(10^6)(2\text{x}10^{-9}) = j2mS$$

$$\mathbf{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} = \frac{-j}{(10^6)(10^{-3})} = -j1mS$$

… e por fim a admitância total

$$\mathbf{Y}_{eq1} = \mathbf{Y}_R + \mathbf{Y}_C + \mathbf{Y}_L = (1.25 + j1)mS$$

Exemplo 3 – Determinar a admitância equivalente à frequência de $10^6 rad/s$.



- Para o circuito série é melhor determinar primeiro as impedâncias individuais

$$\mathbf{Z}_R = R = 800\Omega$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{\mathbf{Y}_C} = -j500\Omega$$

$$\mathbf{Z}_L = \frac{1}{\mathbf{Y}_L} = j1000\Omega$$

… depois a impedância total e, por fim, a admitância total

$$\mathbf{Z}_{eq2} = \mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_L = (800 + j500)\Omega$$

$$\mathbf{Y}_{eq2} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{eq2}} = (0.899 - j0.562)mS$$

Análise de circuitos em regime sinusoidal estacionário.

Extensão das técnicas estudadas até aqui.

Análise de circuitos em regime sinusoidal estacionário

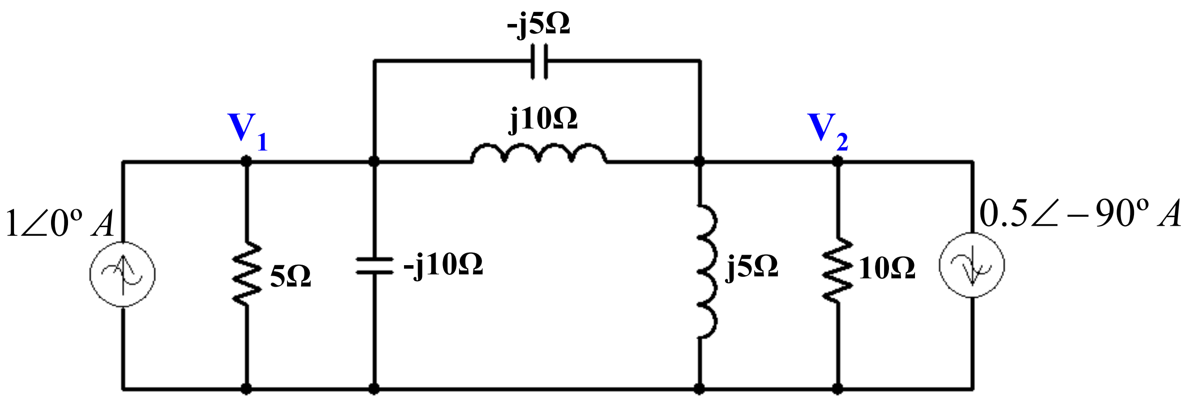
- **Já vimos que as duas leis de Kirchhoff (KVL e KCL) também se aplicam quando as tensões e as correntes são representadas por fasores (no domínio da frequências);**

- **Vimos também que as relações entre os fasores de tensão e corrente nos elementos passivos (resistência, bobina e condensador) são do tipo da lei de Ohm;**

- **Não será pois grande surpresa constatar que as técnicas de Análise Nodal e Análise de Malhas são também aplicáveis no domínio da frequência;**

- **O mesmo pode ser dito em relação às outras ferramentas de análise que estudamos: Principio da Sobreposição, Transformações de fontes e teoremas de Thévenin e Norton.**

Análise nodal: Exemplo 4 – Calcular $v_1(t)$ e $v_2(t)$



- **Aplicando KCL aos dois nós, obtemos:**

nó 1: $$\frac{\mathbf{V}_1}{5}+\frac{\mathbf{V}_1}{-j10}+\frac{\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2}{-j5}+\frac{\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2}{j10}=1\angle 0^\circ=1+j0$$

nó 2: $$\frac{\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1}{-j5}+\frac{\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1}{j10}+\frac{\mathbf{V}_2}{j5}+\frac{\mathbf{V}_2}{10}=-0.5\angle -90^\circ=j0.5$$

Exemplo 4

- **Simplificando, obtém-se o sistema:**

$$\begin{cases} (0.2+j0.2)\mathbf{V_1} - j0.1\mathbf{V}_2 = 1 \\ -j0.1\mathbf{V}_1 + (0.1-j0.1)\mathbf{V}_2 = j0.5 \end{cases}$$

que podemos expressar na habitual forma matricial

$$\begin{bmatrix} (0.2+j0.2) & -j0.1 \\ -j0.1 & (0.1-j0.1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ j0.5 \end{bmatrix}$$

e resolver pela Regra de Cramer

$$\mathbf{V_1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -j0.1 \\ j0.5 & (0.1-j0.1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0.2+j0.2) & -j0.1 \\ -j0.1 & (0.1-j0.1) \end{vmatrix}} = 1-j2 \qquad \mathbf{V}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} (0.2+j0.2) & 1 \\ -j0.1 & j0.5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0.2+j0.2) & -j0.1 \\ -j0.1 & (0.1-j0.1) \end{vmatrix}} = -2+j4$$

Exemplo 4

$$\mathbf{V_1} = 1-j2 \qquad \mathbf{V}_2 = -2+j4$$

- **Exprimindo na forma polar**

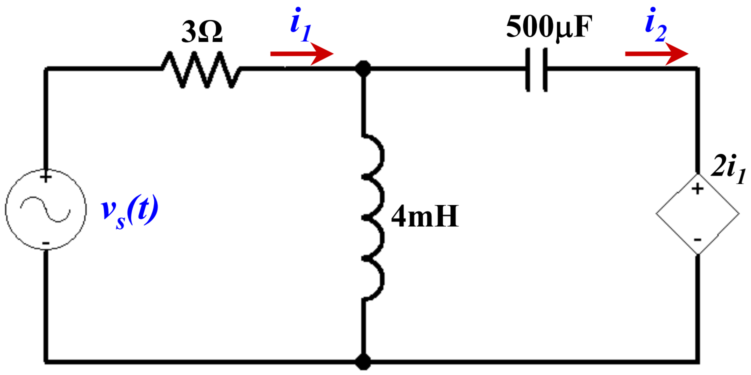
$$\mathbf{V_1} = \sqrt{1^2+(-2)^2}\angle arctg(-2/1) = 2.24\angle -63.4^o \qquad \mathbf{V}_2 = 4.47\angle 116.6^o$$

- **E convertendo para o domínio do tempo, resulta em**

$$v_1(t) = 2.24\cos(\omega t - 63.4^o) \quad V$$
$$v_2(t) = 4.47\cos(\omega t + 116.6^o) \quad V$$

- **Notar que se assume (sempre!) que as duas fontes de corrente operam à mesma frequência.**

Análise de malhas: Exemplo 5 – Calcular $i_1(t)$ e $i_2(t)$ com $v_s(t) = 10\cos(10^3 t)$



- Calculamos primeiro o **fasor** da função forçadora.

$$v_s(t) = 10\cos\left(10^3\right)t \quad \rightarrow \quad \mathbf{V_S} = 10\angle 0^\circ V$$

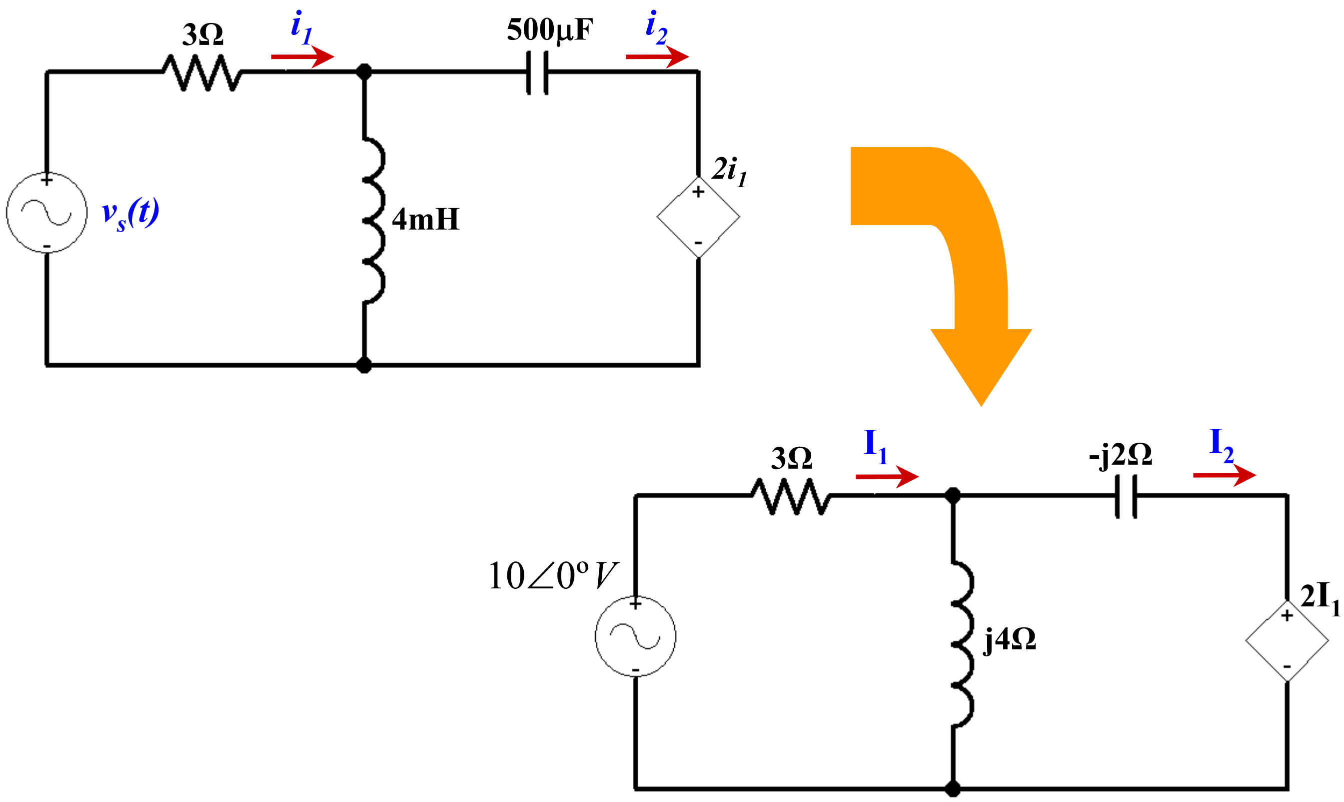
- À frequência de *1000rad/s*, as impedâncias da bobina e do condensador são:

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = j(10^3)(0.004) = j4\Omega$$

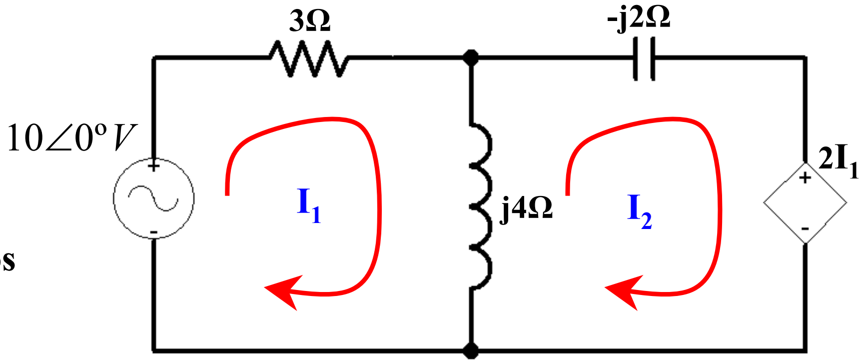
$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{(10^3)(0.0005)} = -j2\Omega$$

Exemplo 5

- Desenhamos agora o **circuito no domínio na frequência**.



Exemplo 5



- **Com base na KVL escrevemos equações para as duas malhas:**

malha 1: $$3\mathbf{I}_1 + j4(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = 10\angle 0^o = 10$$

malha 2: $$j4(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) - j2\mathbf{I}_2 + 2\mathbf{I}_1 = 0$$

- **Simplificando**

$$\begin{cases} (3+j4)\mathbf{I}_1 - j4\mathbf{I}_2 = 10 \\ (2-j4)\mathbf{I}_1 + j2\mathbf{I}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} (3+j4) & -j4 \\ (2-j4) & j2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5

- **o que dá**

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -j4 \\ 0 & j2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (3+j4) & -j4 \\ (2-j4) & j2 \end{vmatrix}} = \frac{14+j8}{13} = 1.24\angle 29.7^o\ A$$

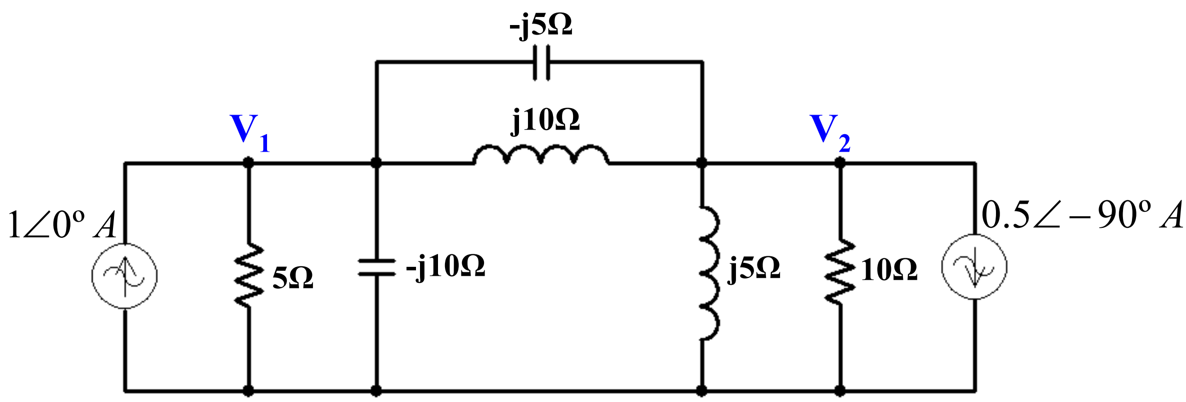
$$\mathbf{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{20+j30}{13} = 2.77\angle 56.3^o\ A$$

- **Convertendo para o domínio do tempo, obtemos**

$$i_1(t) = 1.24\cos(10^3 t + 29.7^o) \quad A$$

$$i_2(t) = 2.77\cos(10^3 t + 56.3^o) \quad A$$

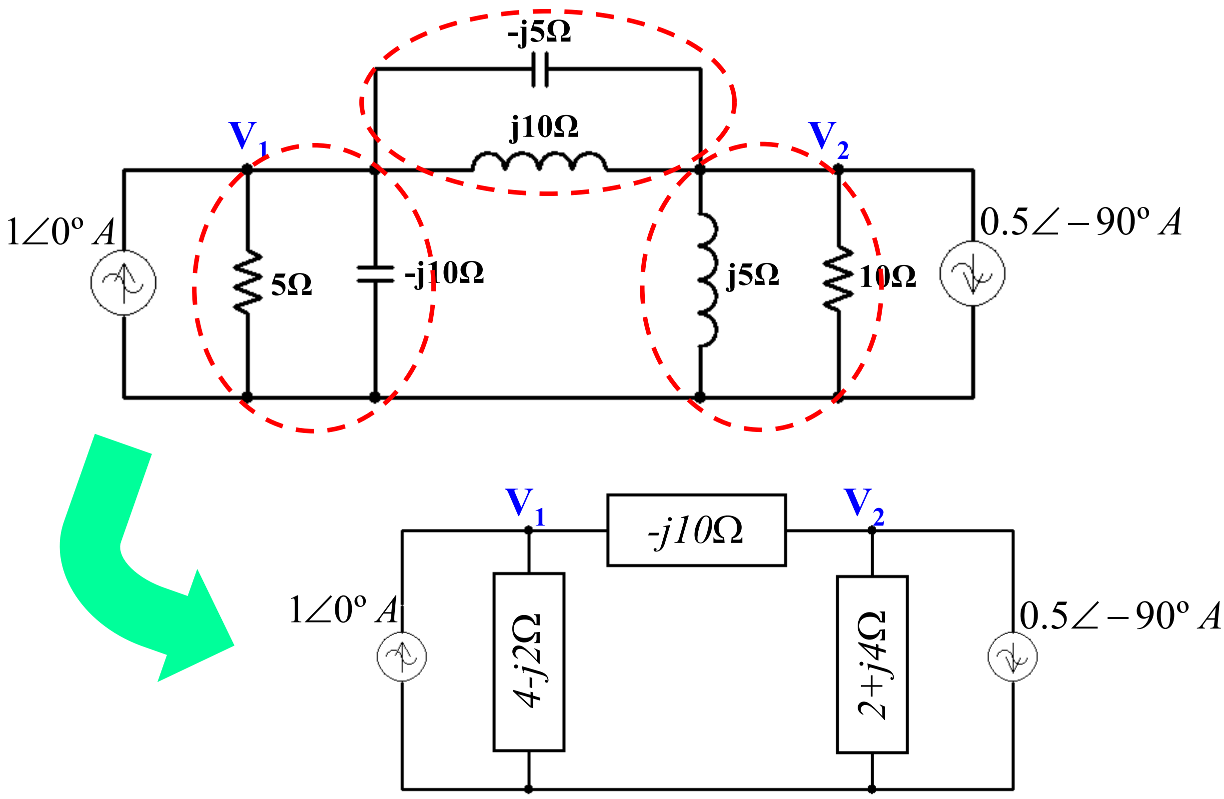
Principio da sobreposição: Exemplo 6 – Calcular V_1



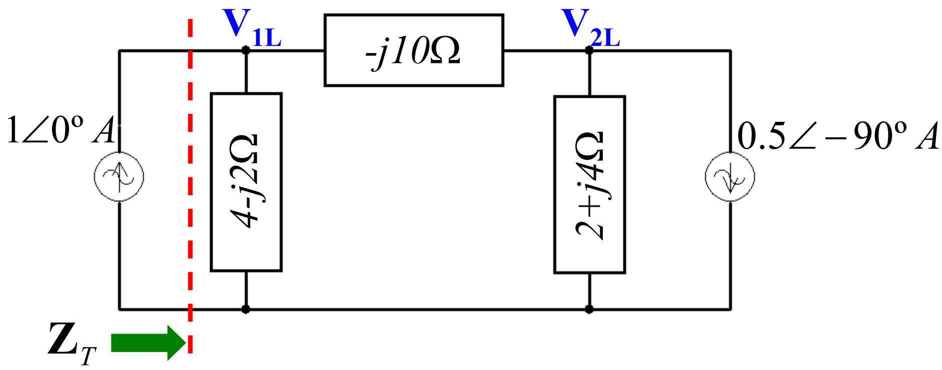
- **Para simplificar, o circuito já é dado com fasores e impedâncias calculadas - é o circuito no domínio na frequência.**

Principio da sobreposição: Exemplo 6 – Calcular V_1

- **Começamos por associar os três pares de impedâncias ligados aos nós 1 e 2.**



Principio da sobreposição: Exemplo 6 – Calcular $\mathbf{V}_1$



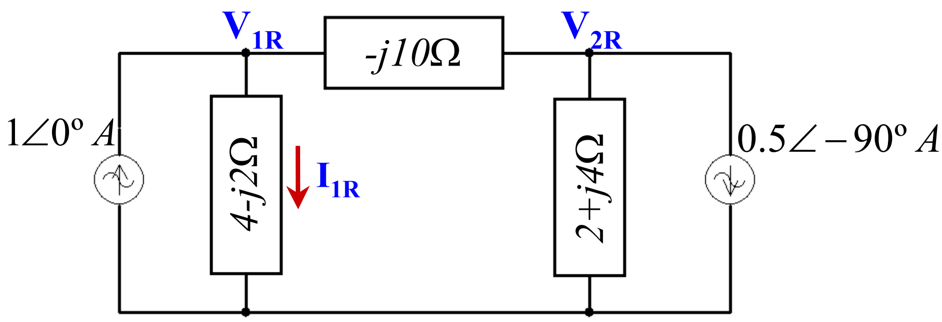
- **Consideramos agora cada uma das fontes a actuar em separado.**

- **Considerando só a fonte da esquerda e desactivando a da direita.**

$$\mathbf{V}_{1L} = 1\angle 0^{\circ}\,\mathbf{Z}_T$$

$$\mathbf{Z}_T = \frac{(4-j2)(-j10+2+j4)}{4-j2-j10+2+j4} \quad \rightarrow \quad \mathbf{V}_{1L} = (2-j2)V$$

Exemplo 6 (conclusão)



- **Considerando agora só a fonte da direita**

$$\mathbf{V}_{1R} = \mathbf{I}_{1R}(4-j2)$$

$$\mathbf{I}_{1R} = -(0.5\angle -90^{\circ})\frac{2+j4}{4-j2-j10+2+j4} = \frac{-2+j}{6+j8} \quad \rightarrow \quad \mathbf{V}_{1R} = -1V$$

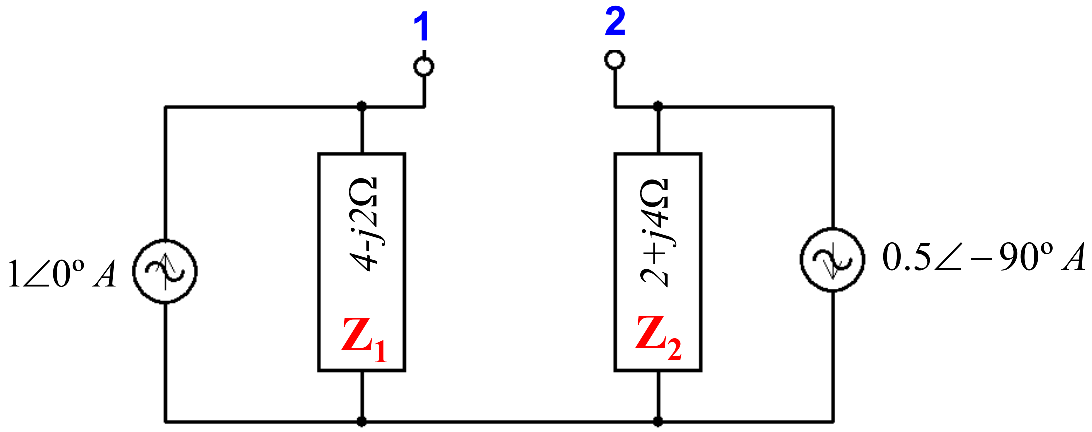
- **O valor de $\mathbf{V}_1$ é portanto**

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{1L} + \mathbf{V}_{1R} = 2-j2-1 = (1-j2)V$$

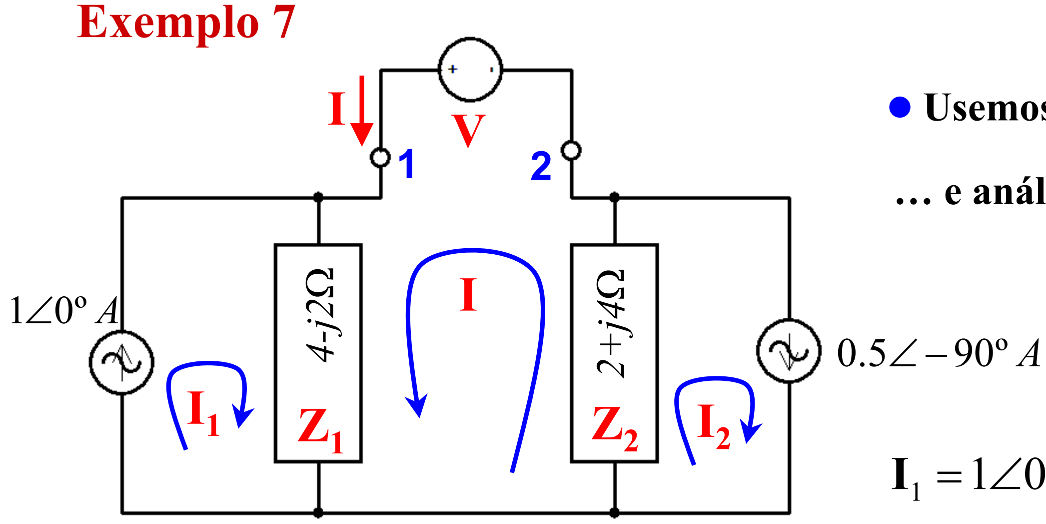
…de acordo com o resultado do Exemplo 4

Teorema de Thévenin: Exemplo 7

Determinar o equivalente de Thévenin entre os nós 1 e 2?



Exemplo 7



- **Usemos o Método Universal**

… e análise de malhas

$$\mathbf{I}_1 = 1\angle 0^{o} = 1A$$
$$\mathbf{I}_2 = 0.5\angle -90^{o} = -j0.5A$$

- **Escrevendo a equação da malha do meio**

$$Z_2(\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}) - \mathbf{V} + Z_1(\mathbf{I} + \mathbf{I}_1) = 0$$

$$(2 + j4)(-j0.5 + \mathbf{I}) - \mathbf{V} + (4 - j2)(\mathbf{I} + 1) = 0$$

$$\mathbf{V} = (6 + j2)\mathbf{I} + (6 - j3)$$

Exemplo 7

$$\mathbf{V} = (6 + j2)\mathbf{I} + (6 - j3)$$

$$v = ai + b$$

$$\mathbf{Z}_T = a \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_T = b$$

Portanto…

$$\mathbf{Z}_T = (6 + j2)\Omega$$

$$\mathbf{V}_T = (6 - j3) = 6.71\angle -26.57^\circ V$$

Equivalente de Thévenin