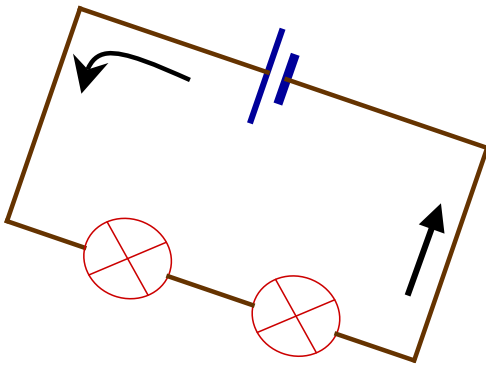


Sistemas Electrónicos



Capítulo 1, Parte 3: Técnicas uteis de Análise de Circuitos



Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro



Sistemas Electrónicos – 2020/2021

Sumário

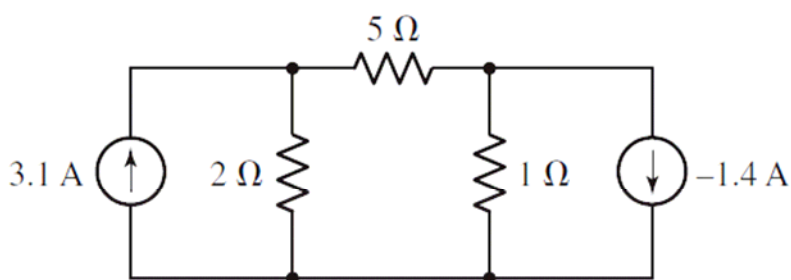
- Análise de Nodal;
- Análise de malhas;
- Linearidade e sobreposição;
- Transformação de fontes;
- Teorema da máxima transferência de potência;
- Teoremas de Thevenin e Norton.

Análise Nodal

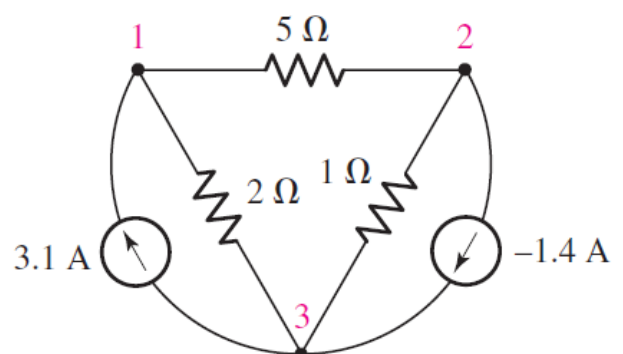
1.3-3

Análise de Nodal

- Método sistemático que permite determinar as tensões em todos os nós de um circuito;
- **nó** – Ponto de ligação de dois ou mais elementos num circuito;



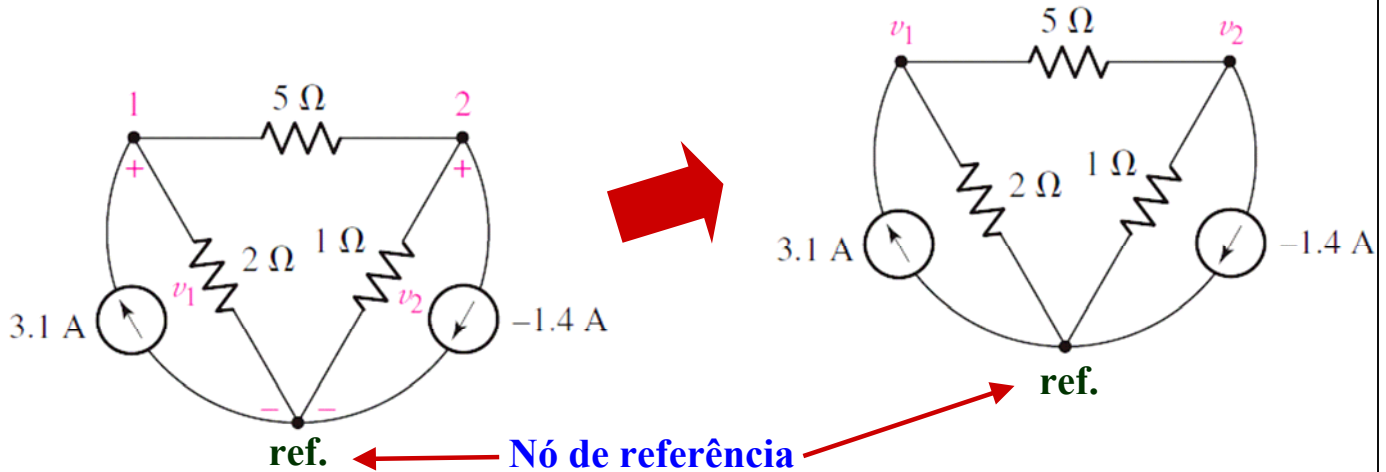
Circuito com 3 nós



1.3-4

Análise de Nodal – nó de referência

- Dado que uma tensão é sempre definida entre dois nós, designamos um dos nós do circuito como **Nó de Referência** – em relação ao qual todas as tensões são medidas.



- Quando referirmos, por exemplo, a tensão v_1 , estaremos a referir-nos na realidade à tensão entre o **nó 1** e o **nó de referência**.

1.3-5

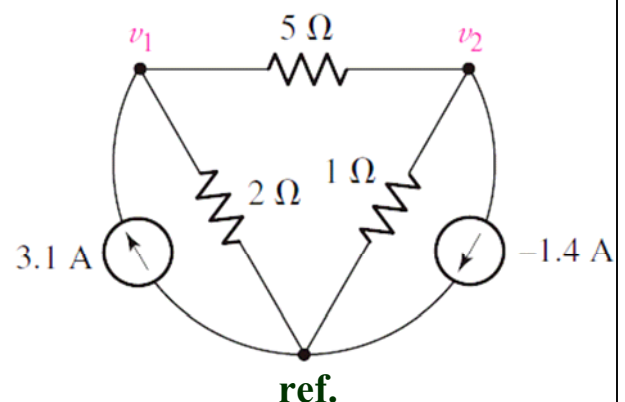
Análise de Nodal

- Para todos os efeitos práticos, o potencial eléctrico no nó de referência é considerado nulo;

- Um circuito com N nós tem $N-1$ tensões – as **Tensões Nodais**;

- A polaridade de referência das tensões nodais é geralmente considerada positiva (+) em cada nó e negativa (-) no nó de referência;

- Aplicando KCL a todos os nós **excepto o de referência**, obtemos um sistema de $N-1$ equações com $N-1$ incógnitas que nos permite determinar as tensões nodais.

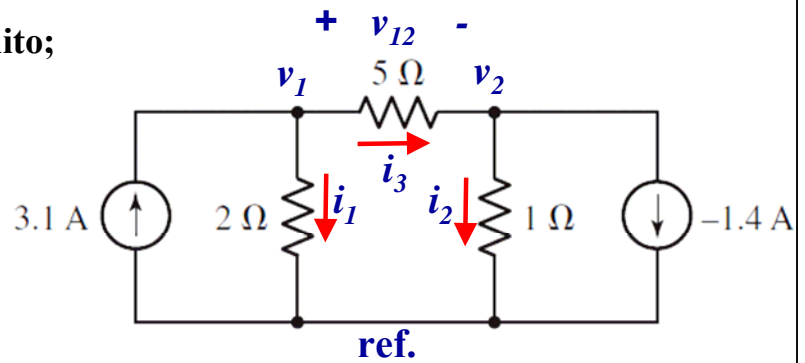


1.3-6

Análise Nodal – exemplo 1

- Apliquemos KCL aos nós do circuito;

KCL: “A soma das correntes que entram num nó é igual à soma das correntes que saem desse nó”



nó 1: $3.1 = i_1 + i_3$

nó 2: $i_3 = i_2 - 1.4$

- Expressimos agora cada uma das correntes em função das tensões:

$$i_1 = v_1 / 2 \quad i_2 = v_2 / 1 \quad i_3 = v_{12} / 5 = (v_1 - v_2) / 5$$

- Substituindo acima obtém-se

$$3 = 0.5v_1 + 0.2(v_1 - v_2)$$

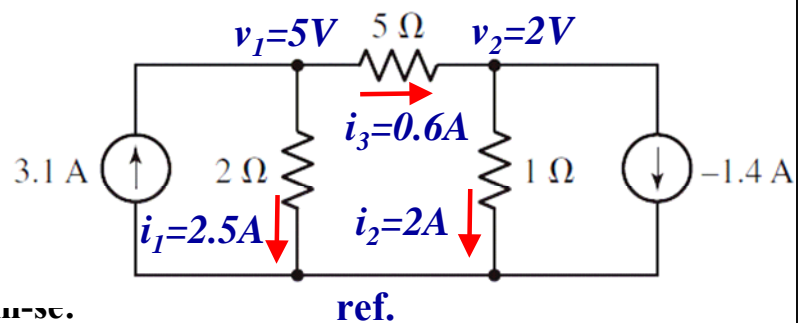
$$0.2(v_1 - v_2) = 1v_2 - 2$$

1.3-7

Análise Nodal – exemplo 1

- O que, rearranjando, dá o sistema

$$\begin{cases} 3.5v_1 - v_2 = 15.5 \\ -v_1 + 6v_2 = 7 \end{cases}$$



- Resolvendo por substituição obtém-se.

$$\begin{cases} v_1 = 5V \\ v_2 = 2V \end{cases}$$

- Com as tensões nodais podemos agora calcular todas as correntes no circuito

$$i_1 = v_1 / 2 = 2.5A$$

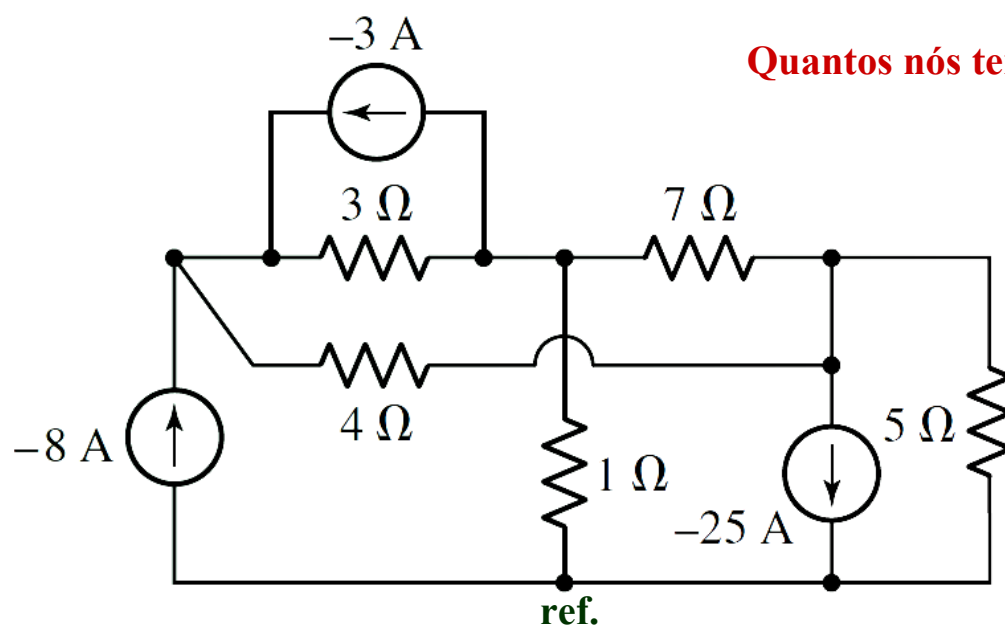
$$i_2 = v_2 / 1 = 2A$$

$$i_3 = (v_1 - v_2) / 5 = 0.6A$$

1.3-8

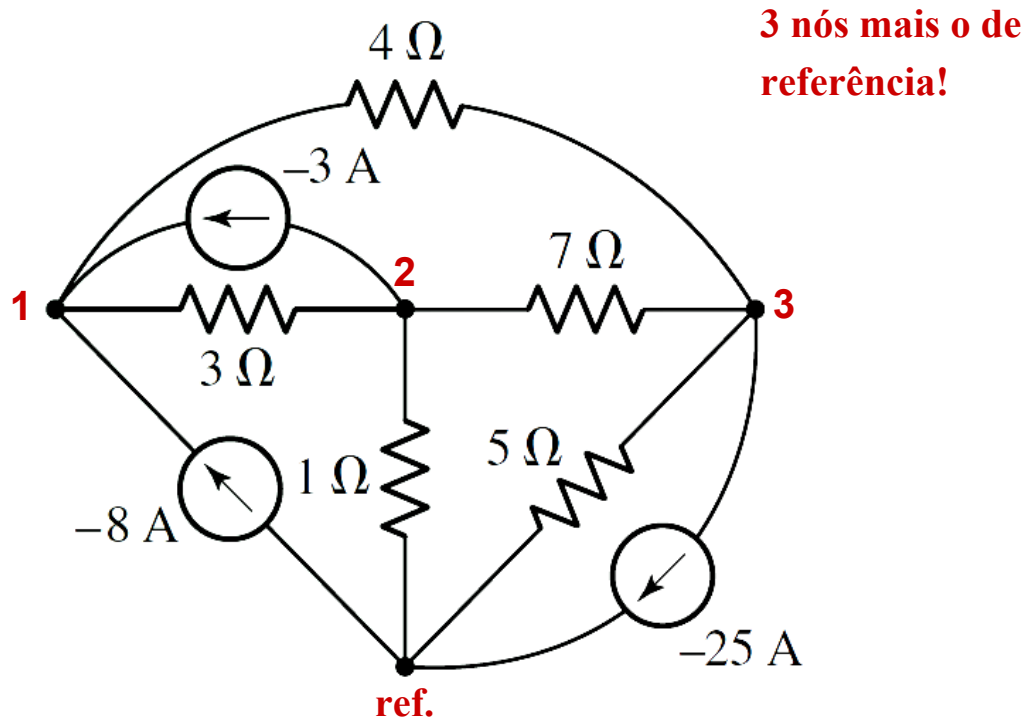
Análise Nodal – exemplo 2

- Determinar as tensões nodais no circuito dado.



1.3-9

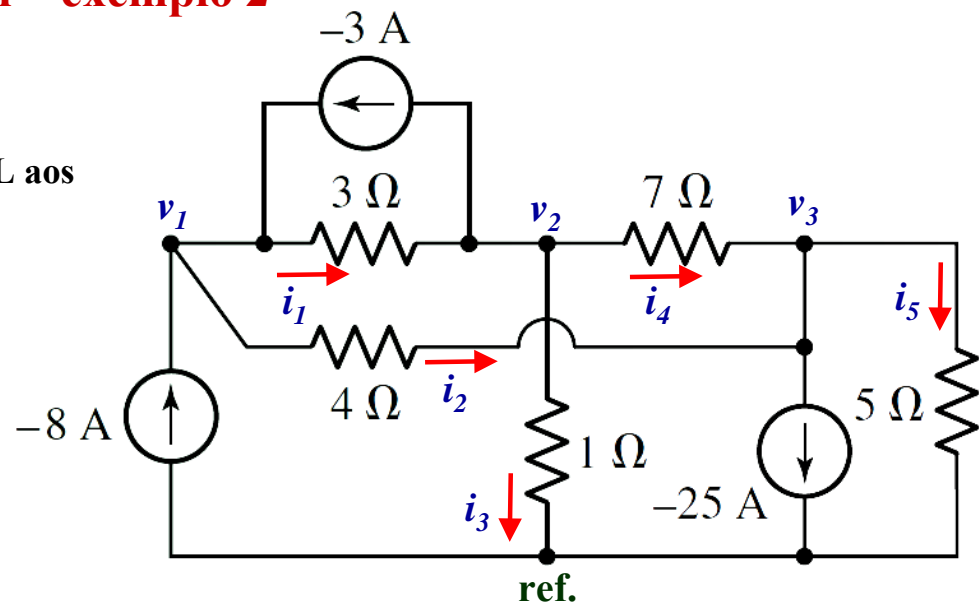
Análise Nodal – exemplo 2



1.3-10

Análise Nodal – exemplo 2

- Aplicando KCL aos três nós:



nó 1: $-8 - 3 = i_1 + i_2$

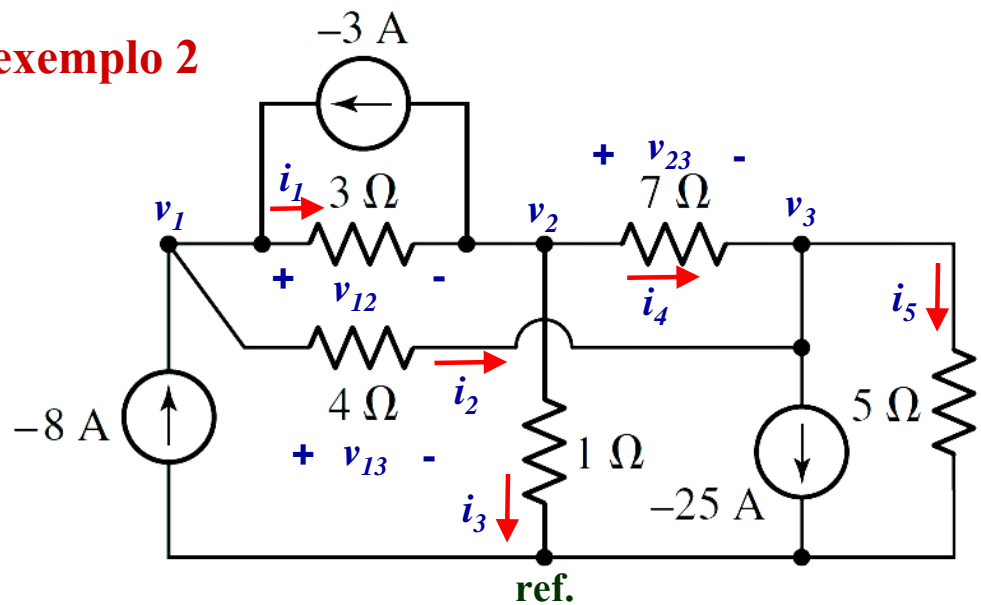
nó 2: $i_1 = -3 + i_3 + i_4$

nó 3: $i_4 + i_2 = -25 + i_5$

1.3-11

Análise Nodal – exemplo 2

- Relacionando as correntes com as tensões, obtemos:



nó 1:

$$-8 - 3 = i_1 + i_2$$

$$-8 - 3 = v_{12}/3 + v_{13}/4 = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4}$$

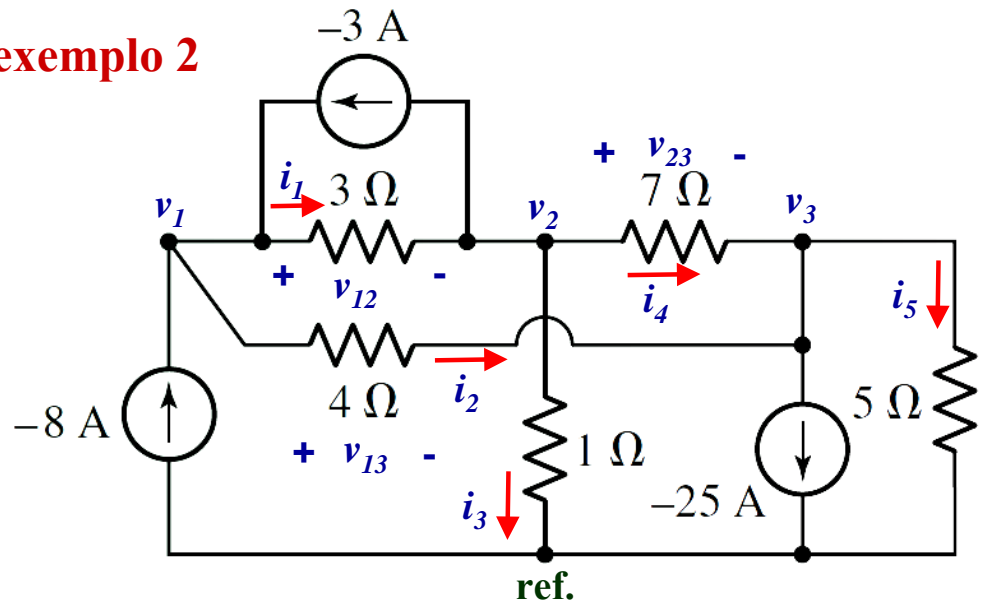
$$7v_1 - 4v_2 - 3v_3 = -132$$

1.3-12

Análise Nodal – exemplo 2

- Relacionando as correntes com as tensões, obtemos:

nó 2:



$$i_1 = -3 + i_3 + i_4$$

$$v_{12}/3 = -3 + v_2/1 + v_{23}/7 \Leftrightarrow \frac{v_1 - v_2}{3} = -3 + \frac{v_2}{1} + \frac{v_2 - v_3}{7}$$

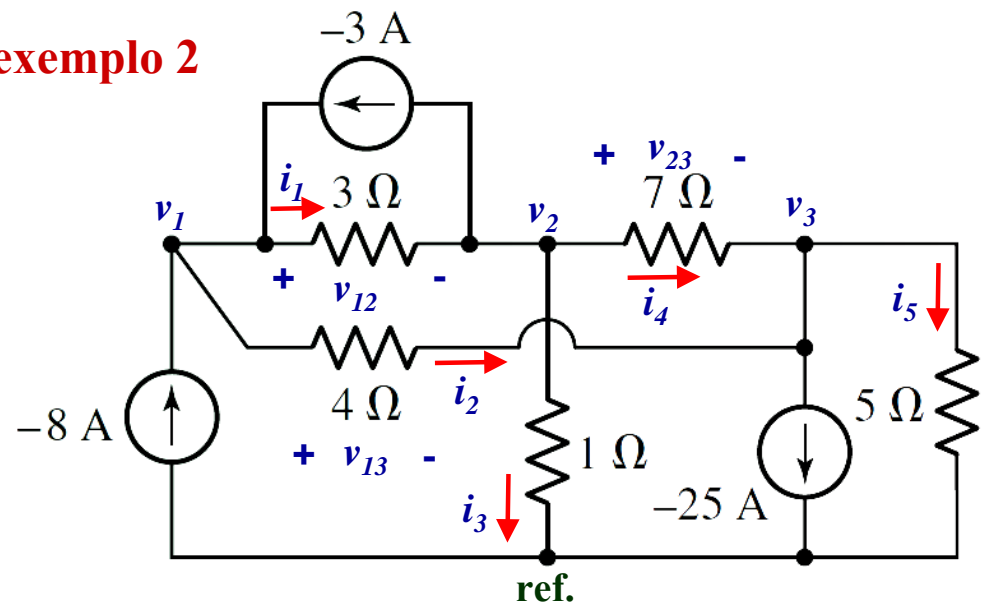
$$7v_1 - 31v_2 + 3v_3 = -63$$

1.3-13

Análise Nodal – exemplo 2

- Relacionando as correntes com as tensões, obtemos:

nó 3:



$$i_4 + i_2 = -25 + i_5$$

$$v_{23}/7 + v_{13}/4 = -25 + v_3/5 \Leftrightarrow \frac{v_2 - v_3}{7} + \frac{v_1 - v_3}{4} = -25 + \frac{v_3}{5}$$

$$35v_1 + 20v_2 - 83v_3 = -3500$$

1.3-14

Análise Nodal – exemplo 2

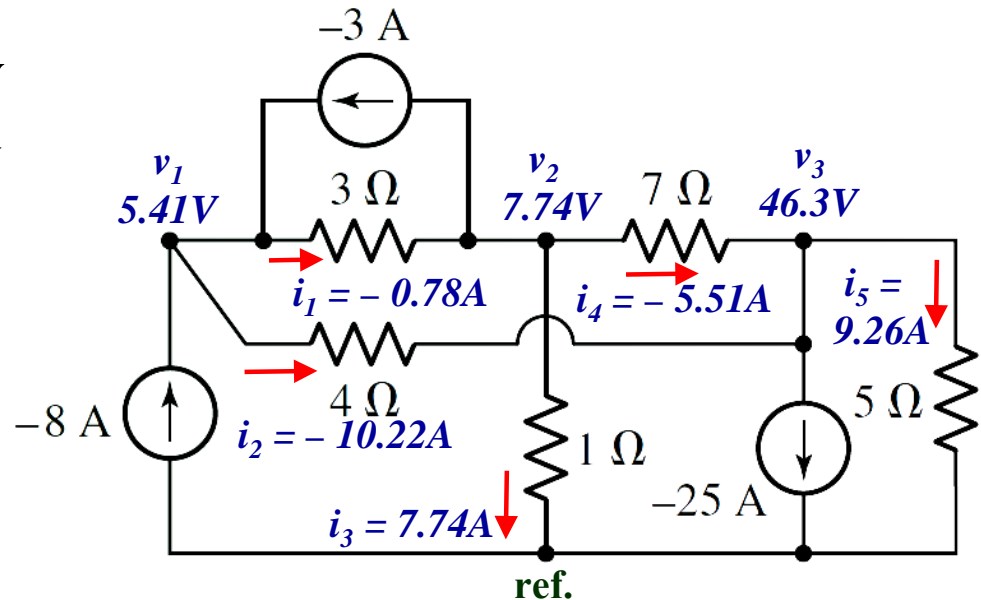
- O sistema de equações é:

$$\begin{cases} 7v_1 - 4v_2 - 3v_3 = -132 \\ 7v_1 - 31v_2 + 3v_3 = -63 \\ 35v_1 + 20v_2 - 83v_3 = -3500 \end{cases}$$

- Resolvendo obtém-se:

$$\begin{cases} v_1 = 5.41V \\ v_2 = 7.74V \\ v_3 = 46.3V \end{cases}$$

- Com as tensões nodais, podemos agora calcular todas as correntes.



Análise Nodal passo a passo

1. Contar o número de nós N ;
2. Escolher um dos nós como **nó de Referência**;
3. Atribuir tensões aos nós: v_1, v_2, \dots, v_{N-1} ;
4. Marcar correntes em todos os ramos;
5. Usando a Lei das Correntes de Kirchhoff (KCL), escrever **$N-1$ equações nodais**.



Análise Nodal – Com fontes de tensão no meio

Como resolver?

Processo 1

- marcar uma corrente na fonte de tensão: i_f

- aplicar KCL aos 3 nós

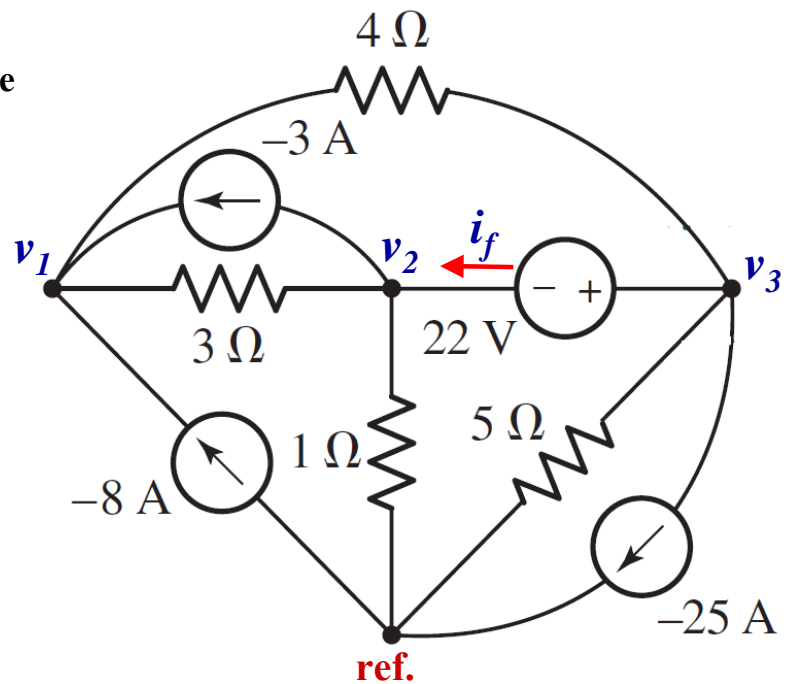
- aplicar KVL aos nós 2 e 3:

$$v_3 - v_2 = 22$$

Resultado:

4 equações com 4 incógnitas

MUITO COMPLICADO!!



1.3-17

Análise Nodal – Com fontes de tensão no meio

Processo 2

- tratar os nós 2 e 3 mais a fonte de tensão como um só nó: **um super nó**

- aplicar KCL ao nó 1 e ao super-nó

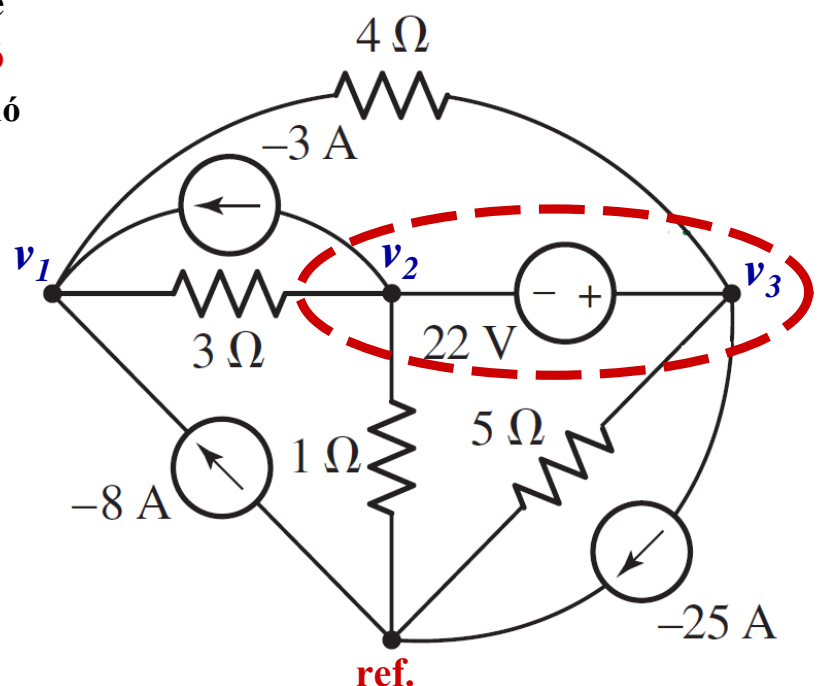
- aplicar KVL aos nós 2 e 3:

$$v_3 - v_2 = 22$$

Resultado:

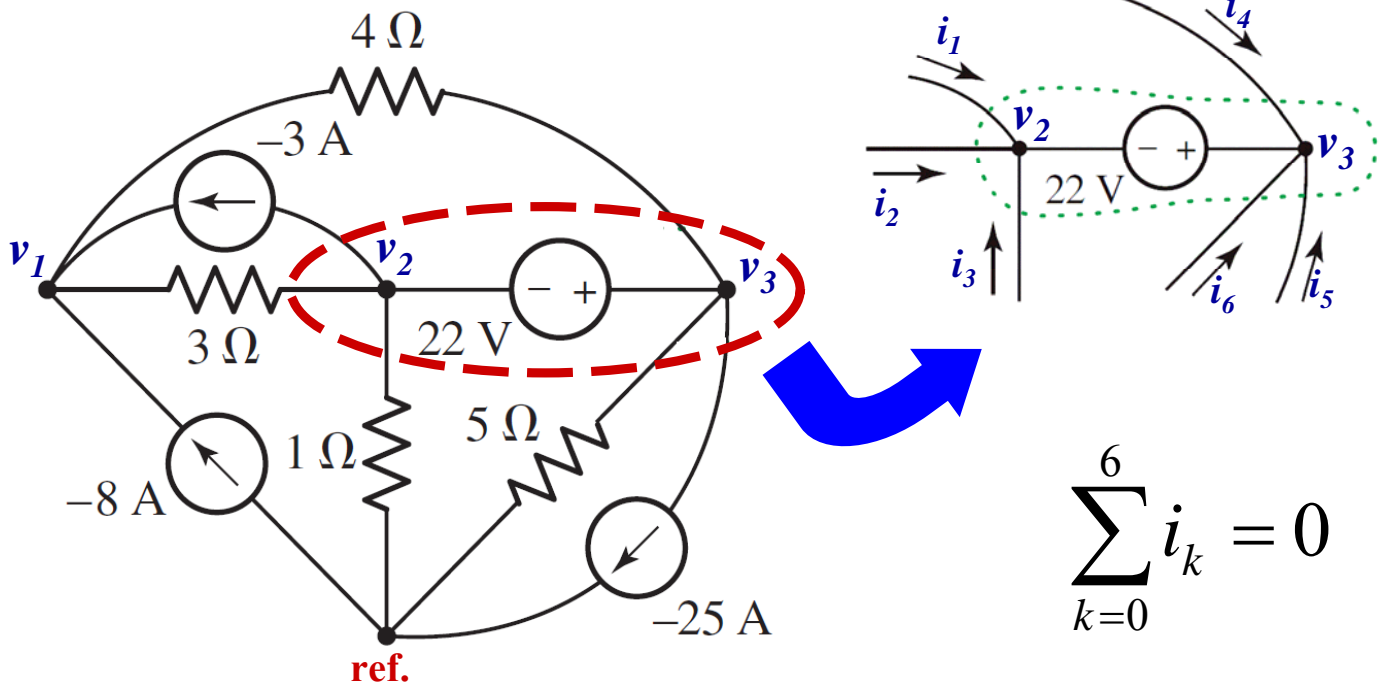
3 equações com 3 incógnitas

PROCESSO MAIS SIMPLES!!



1.3-18

Análise Nodal – com super-nó



- Se a soma das correntes que entram no nó v_2 é zero e a soma das correntes que entram no nó v_3 é zero, então a soma das correntes que entram **nos dois nós** também tem de ser zero.

1.3-19

Análise Nodal – com super-nó

- Apliquemos então KCL

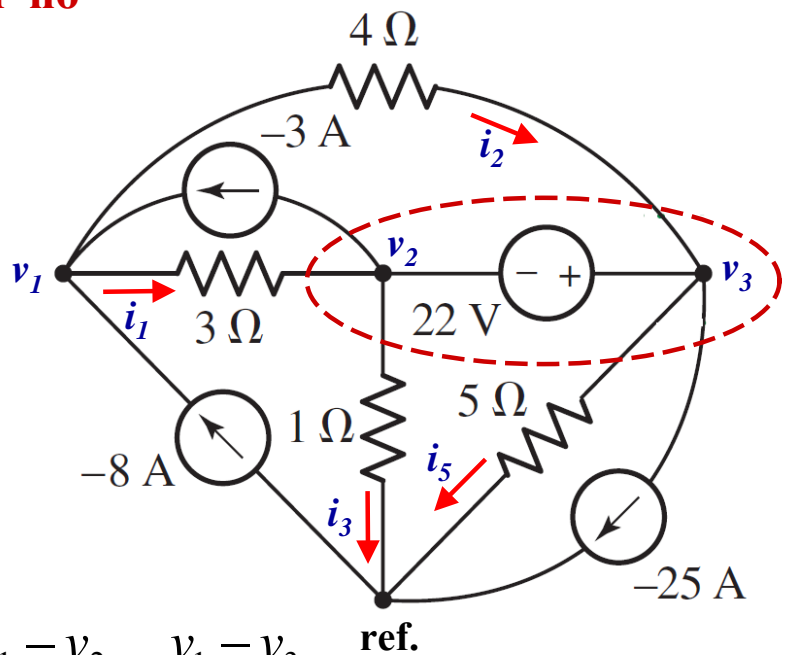
nó 1:

$$-8 - 3 = i_1 + i_2$$

$$-8 - 3 = v_{12}/3 + v_{13}/4 = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4}$$

$$7v_1 - 4v_2 - 3v_3 = -132$$

... é a mesma equação do exemplo anterior



1.3-20

Análise Nodal – com super-nó

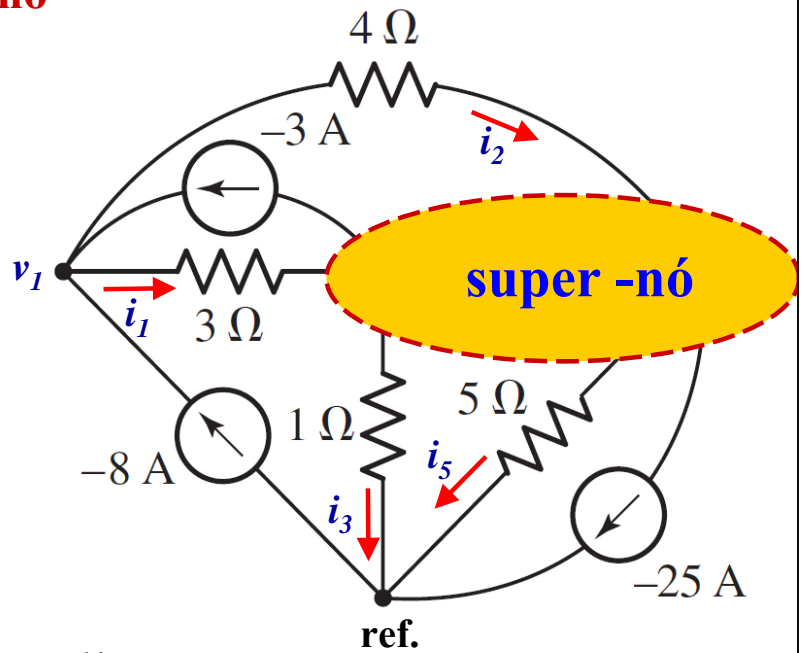
NOTA: O super-nó inclui a fonte de tensão + os dois nós aos quais a fonte está ligada

super -nó:

$$i_1 + i_2 = -3 + i_3 + i_5 - 25$$

$$\frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4} = -28 + \frac{v_2}{1} + \frac{v_3}{5}$$

$$35v_1 - 80v_2 - 27v_3 = -1680$$



1.3-21

Análise Nodal – com super-nó

● Finalmente, aplicamos KVL ao super-nó:

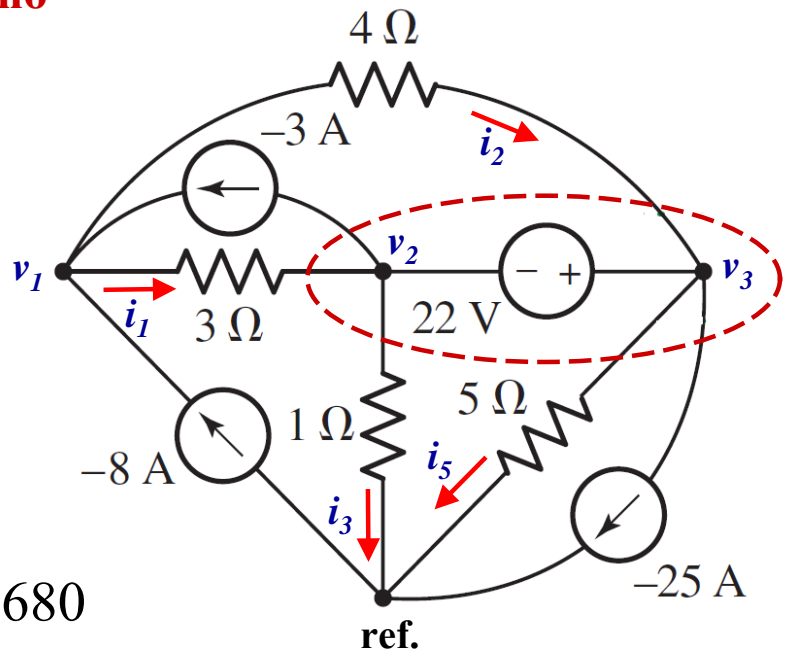
$$v_3 - v_2 = 22$$

● pelo que o sistema de equações final é

$$\begin{cases} 7v_1 - 4v_2 - 3v_3 = -132 \\ 35v_1 - 80v_2 - 27v_3 = -1680 \\ v_3 - v_2 = 22 \end{cases}$$

● Resolvendo obtém-se:

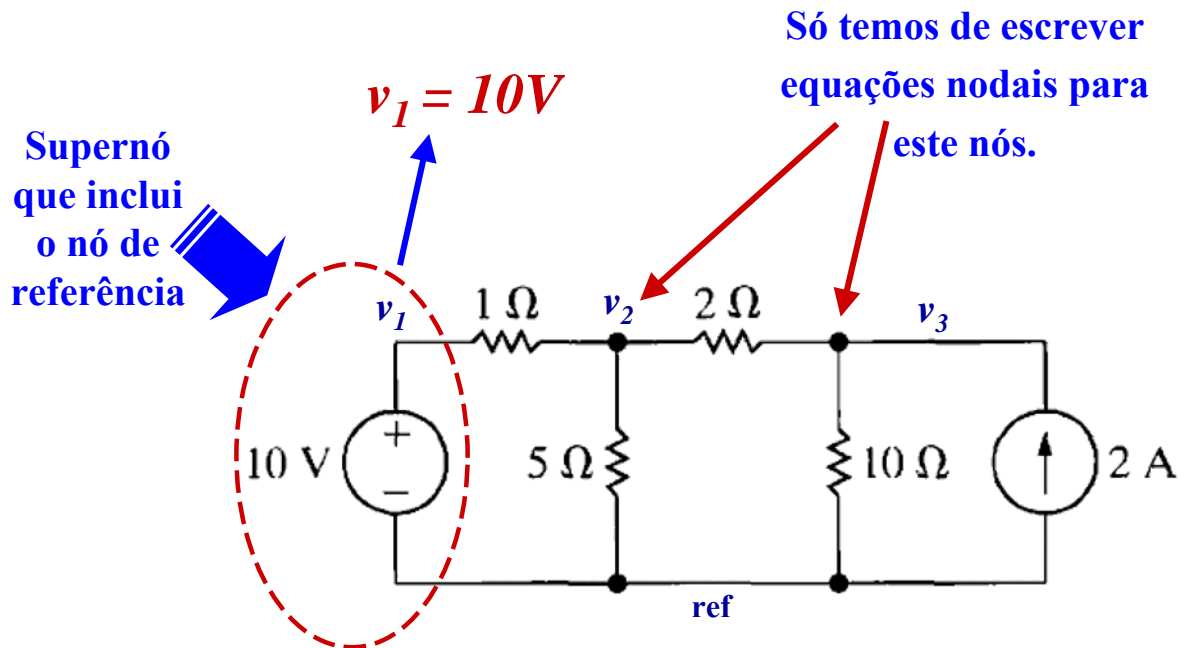
$$\begin{cases} v_1 = 1.07V \\ v_2 = 10.5V \\ v_3 = 32.5V \end{cases}$$



1.3-22

Análise Nodal – super-nó que contém o nó de referência

- Quando o super-nó inclui o nó de referência a análise fica mais fácil!



1.3-23

Análise Nodal passo a passo (com super-nós)

1. Contar o número de nós N ;
2. Escolher **nó de Referência**;
3. Atribuir tensões aos nós: v_1, v_2, \dots, v_{N-1} ;
4. Marcar correntes em todos os ramos;
5. Se o circuito contiver fontes de tensão, formar **super-nós** que contenham essas fontes e os nós a que estão ligados;
6. Usando KCL, escrever uma equação para cada nó (excepto o de referência) e para cada super-nó que não contenha o nó de referência;
7. Usando KVL relacionar a tensão de cada fonte com as tensões nodais.

1.3-24