



FICHA DE EXERCÍCIOS 2

SUCESSÕES E SÉRIE DE FUNÇÕES; SÉRIES DE POTÊNCIAS(REVISITADAS) E SÉRIES DE FOURIER

1. Considere a série de funções

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}.$$

- (a) Mostre que a série converge uniformemente em \mathbb{R} .
(b) Justifique que a função (soma) $S(x)$ é contínua em \mathbb{R} .
2. Obtenha uma representação em série de potências (de Taylor) para cada uma das seguintes funções, a partir dos desenvolvimentos conhecidos das funções exponencial, seno, co-seno e $\frac{1}{1-x}$. Em cada caso, indique o maior conjunto onde é válida a representação.

(a) e^{-x^2} ; (b) $\cosh x$; (c) $\sinh(3x)$; (d) $2\cos^2 x$; (e) $\frac{1}{4+x^2}$.

3. Calcule a (função) soma das séries seguintes:

(a) $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$
(b) $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots + (-1)^n x^{3n} + \dots$

4. (a) Determine o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $\ln(x+1)$.
(Sugestão: desenvolva primeiro a função $\frac{1}{x+1}$ em série de MacLaurin).
(b) Calcule a soma da série

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{x^5}{5 \cdot 4} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

5. Calcule a soma das séries indicadas (a soma corresponde a $f(a)$, onde a é um número óbvio e f é dada por uma série de potências. Em geral, a série deverá ser manipulada até se encontrar uma série de potências conhecida):

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)}$; (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}$.

6. (a) Verifique que a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$ tem raio de convergência igual a 2.

(b) Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$, $-2 < x < 2$. Explicite $f(x)$.

(Sugestão: use a representação em série de potências de $\frac{1}{1-x}$).

7. Usando representações adequadas em série de potências, justifique que:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 ; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

8. Considere a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$.

(a) Determine o maior subconjunto de \mathbb{R} no qual a série é absolutamente convergente.

(b) Calcule $f'(4)$, onde $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$ (f definida no domínio de convergência da série).

9. Sabendo que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

(a) obtenha uma representação em série de potências para a função $f(x) = xe^{x^3}$ e indique o maior subconjunto de \mathbb{R} em que esta representação é válida;

(b) obtenha uma representação em série numérica do integral $\int_0^1 xe^{x^3} dx$.

10. Usando a representação em série de MacLaurin da função exponencial, justifique a igualdade

$$\left(e^{x^2}\right)' = 2x e^{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

11. Seja $f(x) = xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Desenvolva $f(x)$ em série de MacLaurin.

(b) Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)2^n}{n!}$

(Sugestão: Começar por derivar a série obtida em (a)).

(c) Usando a fórmula de MacLaurin com resto de Lagrange, obtenha um majorante para o erro que se comete ao aproximar $f(x)$ por $T_0^2 f(x)$ no intervalo $]0, 0.1]$.

Séries de Fourier:

12. Determine a série de Fourier das seguintes funções:

(a) $f(x) = x + x^2$, $x \in [-\pi, \pi[;$

(b) $g(x) = e^x$, $x \in [-\pi, \pi[;$

(c) $h(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

13. Considere a função constante $f(x) = 2$ no intervalo $[0, \pi]$. Determine a série de Fourier de senos e a série de Fourier de cossenos de f e represente graficamente as respectivas somas no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

14. Determine a série de Fourier de senos da função f dada $f(x) = \cos x$ em $[0, \pi]$. Qual será a sua série de Fourier de cossenos?
15. Considere a função f , 2π -periódica, definida por $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$.
- (a) Determine a série de Fourier de f .
- (b) Mostre que

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

- (c) Usando a representação de f em série de Fourier, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

- (d) Verifique que a série de Fourier de f é uniformemente convergente em \mathbb{R} .
- (e) Justifique que

$$\frac{x^3 - \pi^2 x}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^3} \operatorname{sen}(nx), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Soluções

1. Aplicar o Critério de Weierstrass (alínea (a)) e as propriedades da convergência uniforme (alínea (b)).
2. (a) $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$
(b) $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$
(c) $\sinh(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 3x + \frac{3^3}{3!} x^3 + \cdots + \frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$
(d) $2 \cos^2 x = 1 + \cos(2x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$
 $= 2 - \frac{4}{2!} x^2 + \frac{2^4}{4!} x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$
(e) $\frac{1}{4+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n} = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4^2} + \frac{x^4}{4^3} - \cdots + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n} + \cdots, \quad x \in]-2, 2[.$
3. (a) $e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R};$
(b) $\frac{1}{1+x^3}, \quad x \in]-1, 1[.$
4. (a) $\ln(x+1) = \int_0^x \frac{1}{t+1} dt = \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in]-1, 1[.$
(Observação: a igualdade é também válida no ponto $x = 1$; a justificação pode ser encontrada no Texto de Apoio).
(b) $(x+1) \ln(x+1) - x, \quad x \in]-1, 1[$
(por integração termo a termo da série da alínea anterior).
5. (a) 1; (b) $\cosh(1)$; (c) $-3 \ln(2/3)$; (d) $2\sqrt{e}$.
6. (a) —
(b) $f(x) = \frac{2x}{(2-x)^2}.$
7. —
8. (a) $]1, 5[.$
(b) $f'(4) = 1.$
9. (a) $xe^{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$
(b) $\int_0^1 xe^{x^3} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)n!}.$
10. Representar e^{x^2} em série de MacLaurin e derivar a série termo a termo.
11. (a) $xe^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1) 2^n}{n!} = -1 - e^{-2}.$$

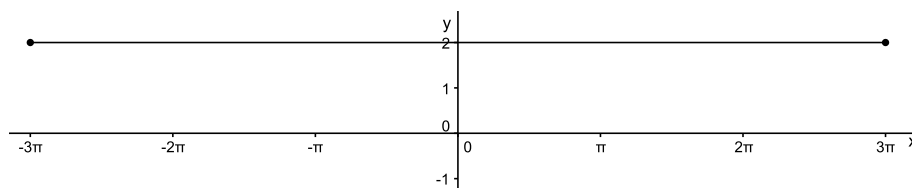
$$(c) |R_0^2 f(x)| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}.$$

$$12. (a) f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) + (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx) \right];$$

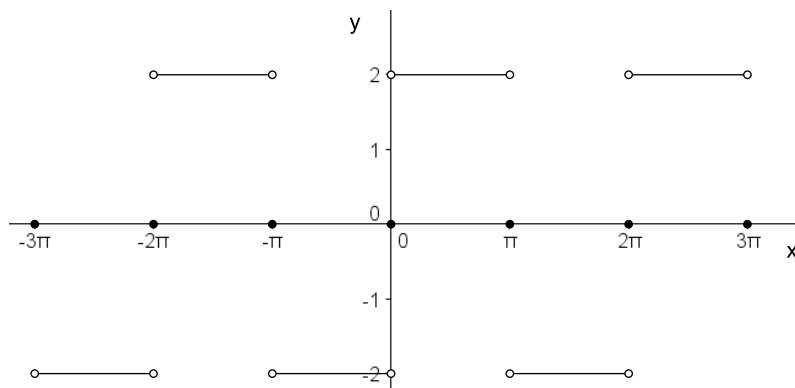
$$(b) g(x) \sim \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \left[\frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + 1} \sin(nx) \right];$$

$$(c) h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin((2n-1)x).$$

13. Soma da série de cossenos: $s(x) = 2$;



$$\text{Soma da série de senos: } S(x) = \begin{cases} -2 & , \quad x \in]-\pi + 2k\pi, 2k\pi[\\ 0 & , \quad x = k\pi \\ 2 & , \quad x \in]2k\pi, \pi + 2k\pi[\end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



$$14. \text{ Série de Fourier de senos: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{k}{4k^2 - 1} \sin(2kx).$$

A série de Fourier de cossenos reduz-se à função $\cos x$.

$$15. (a) f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) A função f é contínua e seccionalmente diferenciável em \mathbb{R} . Portanto, a soma da série coincide com a própria função f (em \mathbb{R}). Notar que $f(x) = x^2$ em $[-\pi, \pi]$.

(c) Tomar, em particular, $x = 0$ na representação indicada na alínea (b).

(d) Sugestão: aplique o Critério de Weierstrass.

(e) Integrar ambos os membros da igualdade em (b), tendo em conta o resultado indicado em (d).