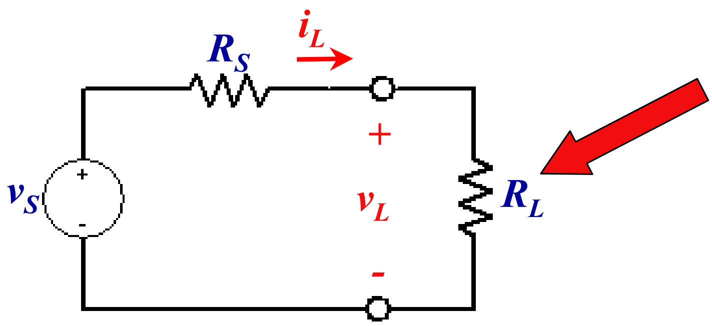
Máxima transferência de potência

Máxima transferência de potência



$$P_L = v_L . i_L$$

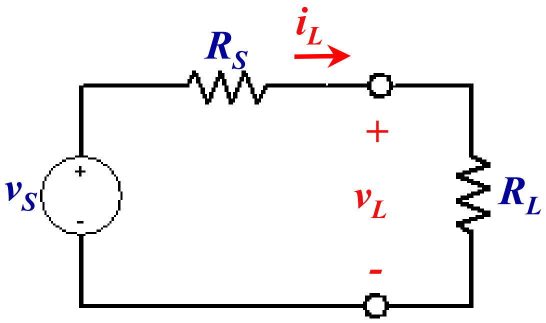
Se $R_L = 0 \quad \Rightarrow \quad P_L = 0;$

Se $R_L = \infty \quad \Rightarrow \quad P_L = 0;$

Valores mínimos e máximos de R_L traduzem-se numa potência nula.

- **Que valor de R_L irá corresponder ao valor máximo de P_L?**

Máxima transferência de potência



$$P_L = i_L^{\,2} R_L = \frac{v_S^{\,2} R_L}{(R_S + R_L)^2}$$

- **Para calcular o máximo de P_L derivamos em ordem a R_L e igualamos a 0.**

Derivada da divisão

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f(x)'.g(x) - f(x).g(x)'}{g(x)^2}$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = \frac{v_S^{\,2}(R_S + R_L)^2 - v_S^{\,2} R_L 2(R_S + R_L)}{(R_S + R_L)^4} = 0$$

$$\cancel{v_S^{\,2}}(R_S + R_L)^{\cancel{2}} = \cancel{v_S^{\,2}} R_L 2\cancel{(R_S + R_L)}$$

$$(R_S + R_L) = 2R_L$$

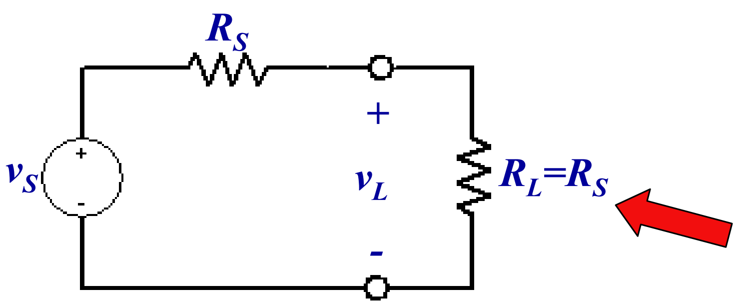
$$R_L = R_S$$

A potência P_L é máxima quando $R_L = R_S$

Teorema da máxima transferência de potência

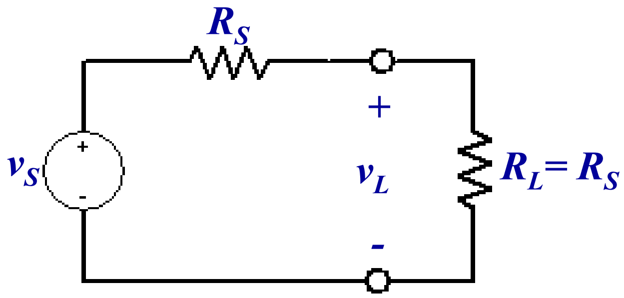
Uma fonte real de tensão com resistência interna R_S, fornece a potência máxima quando a resistência de carga tem o valor $R_L = R_S$.

Uma fonte real de corrente com resistência interna R_S, fornece a potência máxima quando a resistência de carga tem o valor $R_L = R_S$.



Condição de máxima transferência de potência.

Valor da potência máxima transferida



- **Nestas condições a potência dissipada em R_L é:**

$$P_{L\max} = P_{L(R_L=R_S)} = \frac{v_S^{\ 2} R_S}{(R_S + R_S)^2} = \frac{v_S^{\ 2}}{4R_S}$$

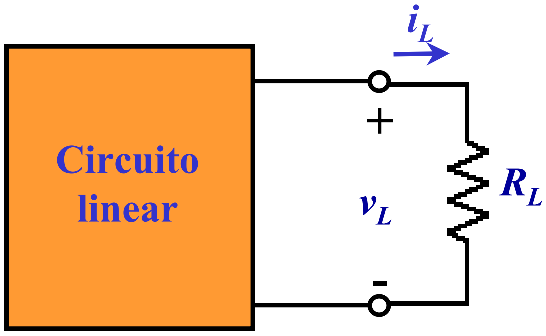
Teoremas de Thévenin e Norton

Léon Charles Thévenin
(1857 - 1926)

Edward Lawry Norton
(1898 - 1983)

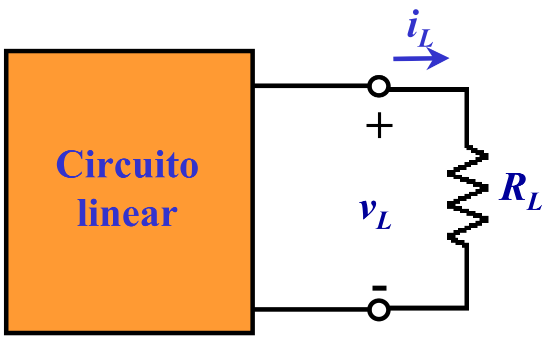
Teoremas de Thévenin e Norton

- **Duas técnicas que permitem simplificar a análise de circuitos lineares.**



- **Teoremas úteis nos casos em que estamos interessados em saber o que se passa apenas numa parte do circuito, por ex:**
  - **Qual é a potência dissipada em R_L?**
  - **Qual é o valor de v_L para diferentes valores de R_L?**

Teoremas de Thévenin e Norton

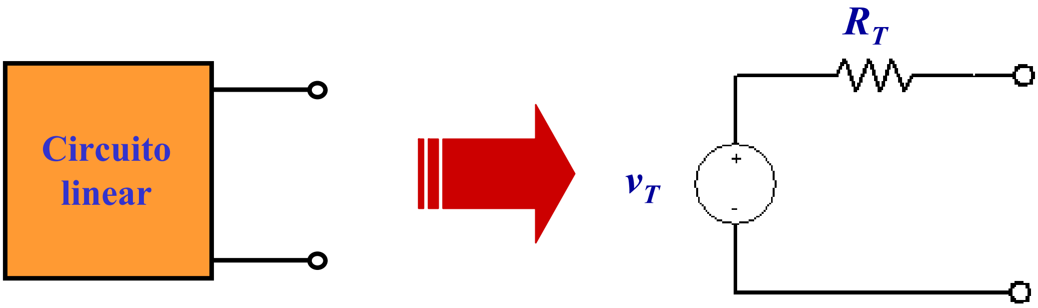


- **Segundo o teorema de Thévenin e o teorema de Norton, podemos substituir todo o circuito linear por um circuito equivalente mais simples;**

- **A análise do que se passa em R_L prossegue depois usando este circuito equivalente.**

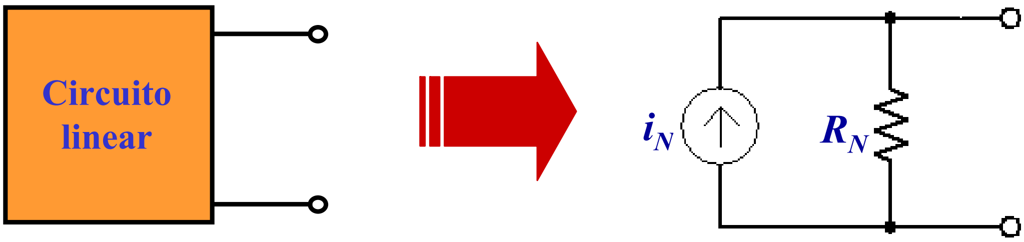
Teorema de Thévenin

- Segundo o Teorema de Thévenin, o circuito equivalente é constituído por uma fonte de tensão com uma resistência em série.



Teorema de Norton

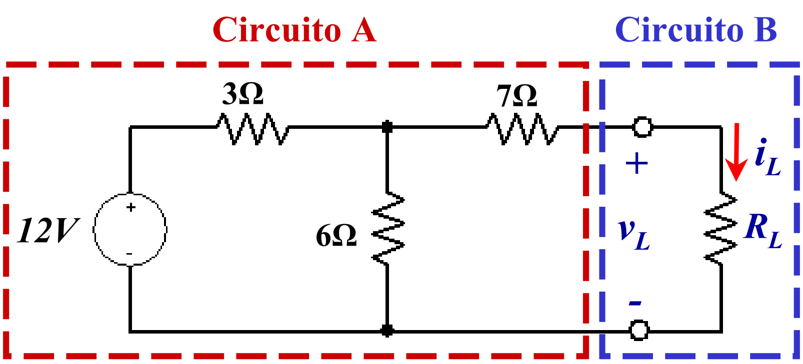
- Segundo o Teorema de Norton, o circuito equivalente é constituído por uma fonte de corrente com uma resistência em paralelo.



Teorema de Thévenin

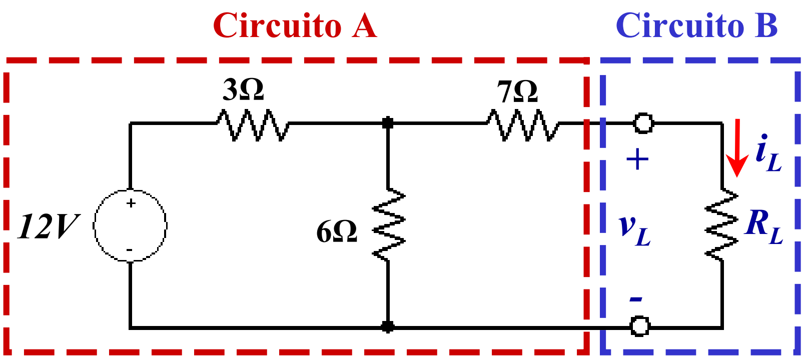
- A aplicação dos teoremas de Thévenin (e Norton), pressupõe que conseguimos dividir o circuito em duas partes:
  - Circuito A: o circuito que pretendemos simplificar – o tal circuito linear;
  - Circuito B: o circuito que queremos manter – pode ser uma resistência, mas também pode ser um circuito com mais elementos.

- Se estivermos apenas interessados em saber o que se passa em R_L, então...



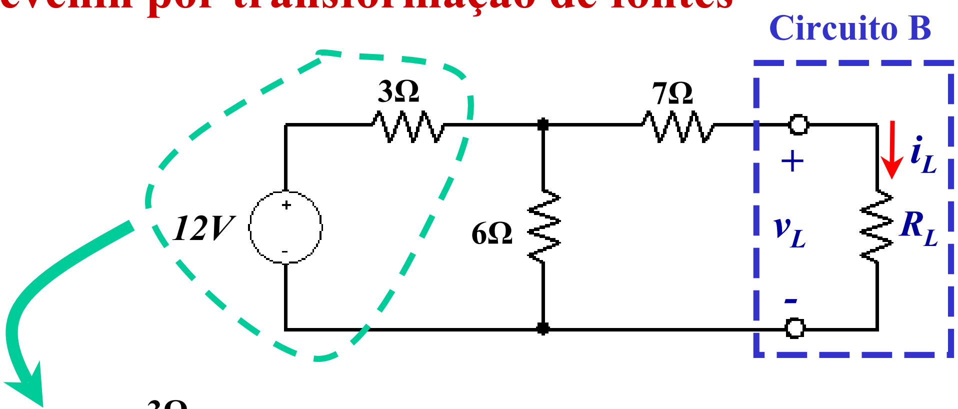
Teorema de Thévenin

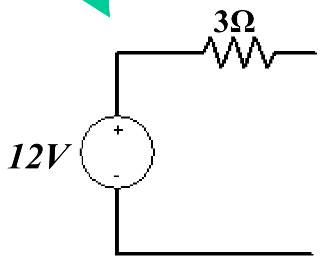
- Vamos então determinar o equivalente de Thévenin do Circuito A.



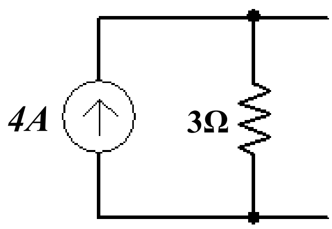
- Para já vamos fazer isso através de sucessivas transformações de fontes.

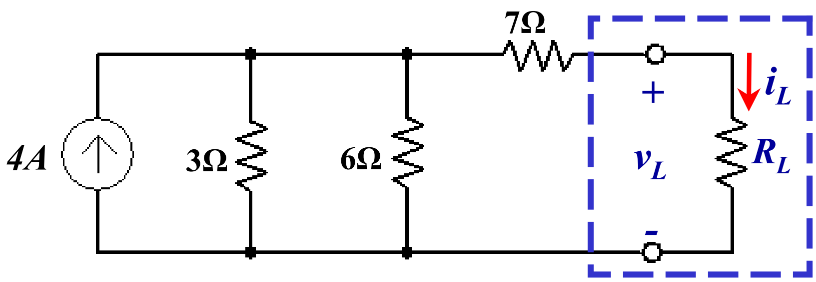
Thévenin por transformação de fontes





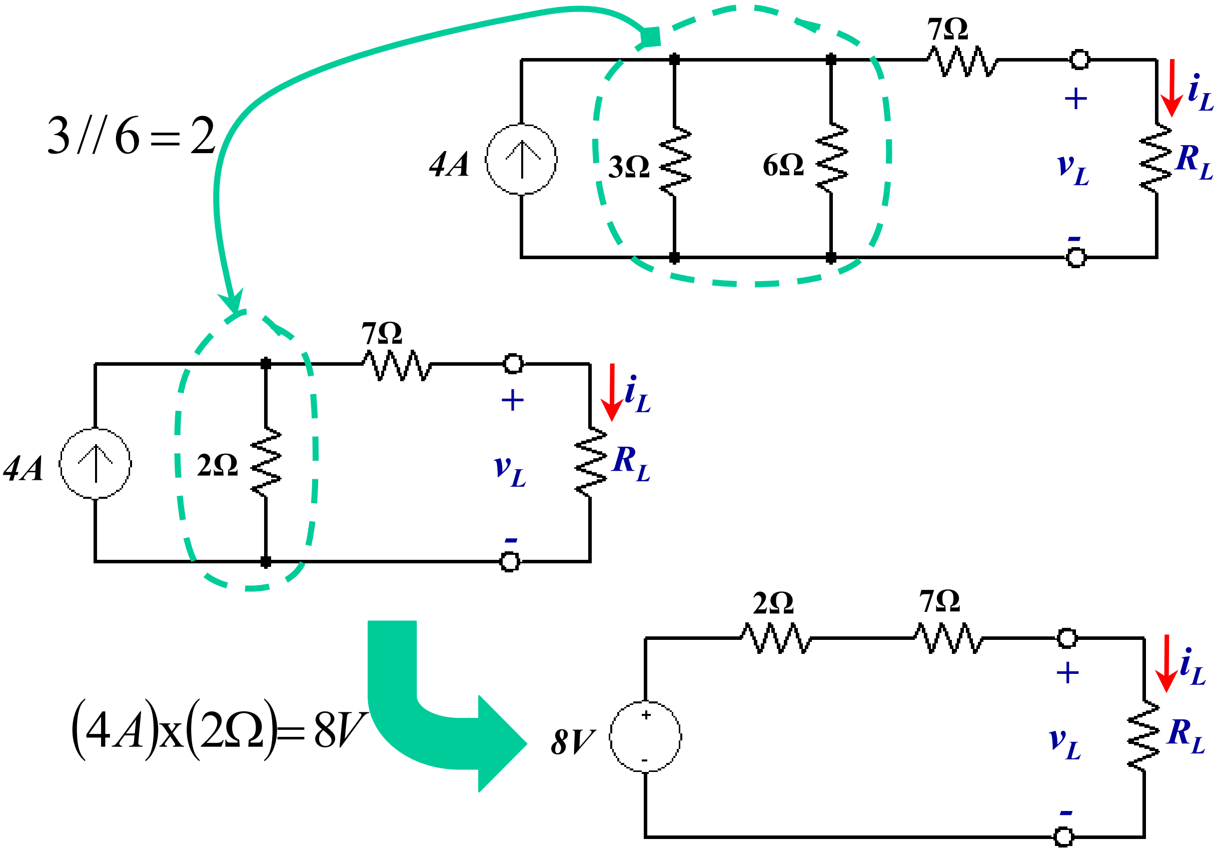
$$R_P = R_S; \quad i_S = \frac{v_S}{R_S}$$



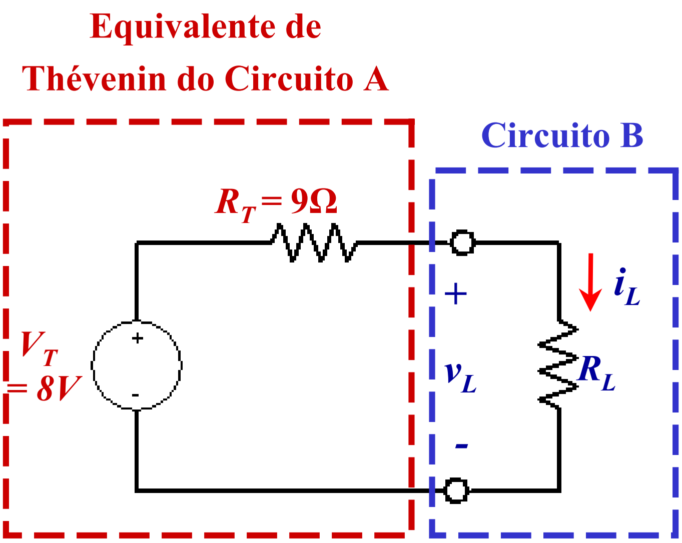


Thévenin por transformação de fontes

- … e repetimos o procedimento até obter o equivalente de Thévenin.



Thévenin por transformação de fontes

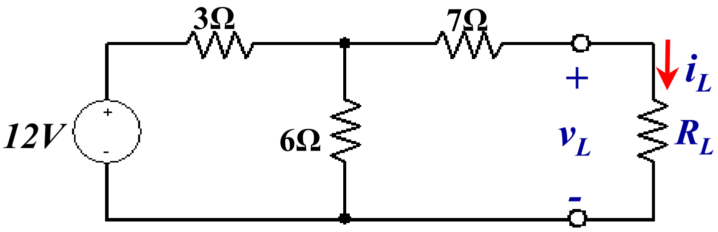


- Com este circuito é muito mais fácil de determinar o que sucede ao circuito B, por exemplo, para vários valores de R_L;

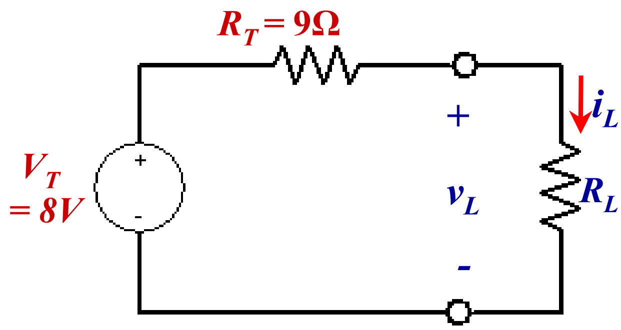
- Com o equivalente de Thévenin é possível obter informações úteis que não estão disponíveis de imediato no circuito original.

Teorema de Thévenin

Circuito original



Circuito c/ equivalente de Thévenin



- **Informações disponíveis de imediato no circuito com equivalente de Thévenin :**
  - **O valor máximo de v_L (tensão de circuito aberto) é $8V$;**
  - **O valor máximo de i_L (corrente de curto-circuito) é $(8/9)A$;**
  - **O circuito A fornece a potência máxima quando $R_L = 9\Omega$.**

Teorema de Thévenin

ATENÇÃO

A obtenção do equivalente de Thévenin usando as regras de transformação de fontes só é praticável para circuitos pequenos e sem fontes dependentes.

Para circuitos mais complexos o que fazemos é usar as regras expressas no enunciado do teorema.

Teorema de Thévenin - enunciado

- **Dado um circuito linear, rearranje-se o circuito de maneira a deixar claro**
  - **a porção que interessa simplificar - o circuito A;**
  - **a porção a manter - o circuito B.**

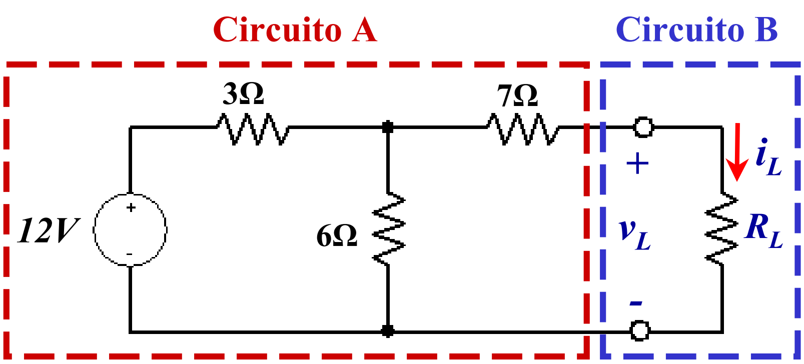
- **Em seguida, defina-se:**
  - v_{oc} **– a tensão que aparece aos terminais do circuito A em circuito aberto, ou seja, depois de B ser desligado;**
  - R_{eq} **– a resistência equivalente vista aos terminais do circuito A quando este é desativado, ou seja, quando todas as fontes independentes de tensão são curto-circuitadas e todas as fontes independentes de corrente são abertas (as fontes dependentes mantêm-se).**

- **O equivalente de Thévenin do circuito A é constituído por uma fonte de tensão de valor** $v_T = v_{oc}$**, em série com uma resistência de valor** $R_T = R_{eq}$ **.**

Aplicação do teorema de Thévenin

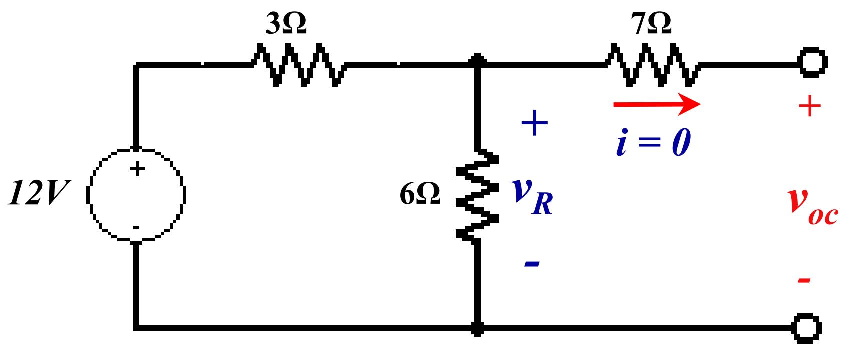
Apliquemos então estas regras ao circuito anterior.

1- Identificação dos circuitos A e B.



Aplicação do teorema de Thévenin

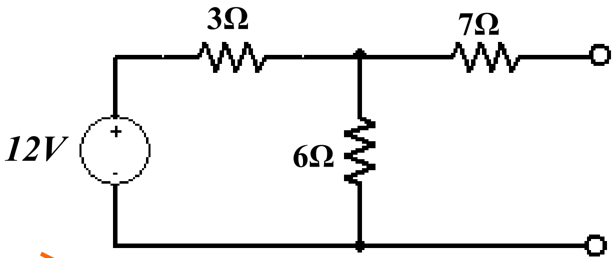
2- Determinação de v_{oc}, a tensão em circuito aberto do circuito A.



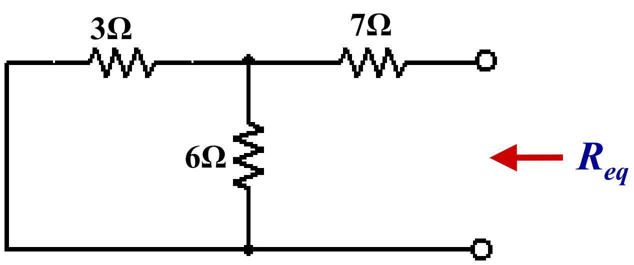
$$v_{oc} = v_R = \frac{6}{6+3}12 = 8V$$

Aplicação do teorema de Thévenin

3- Determinação de R_{eq}, a resistência equivalente ou de saída.



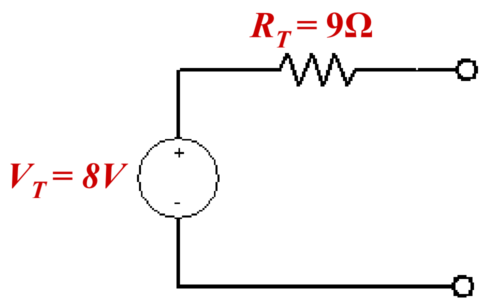
Desactivação das fontes…



$$R_{eq} = 3//6 + 7 = \frac{3x6}{3+6} + 7 = 9\Omega$$

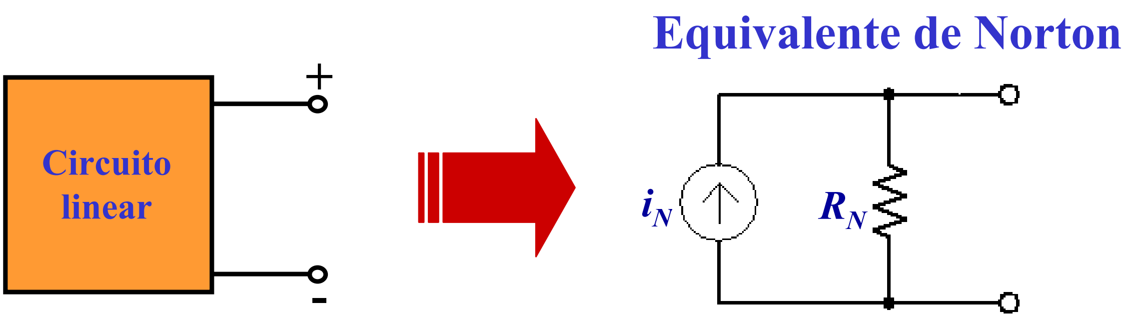
Aplicação do teorema de Thévenin

- **O equivalente de Thévenin do circuito A é portanto:**



Teorema de Norton

- **O Teorema de Norton permite substituir o circuito A por uma fonte de corrente com uma resistência em paralelo.**



Teorema de Norton - enunciado

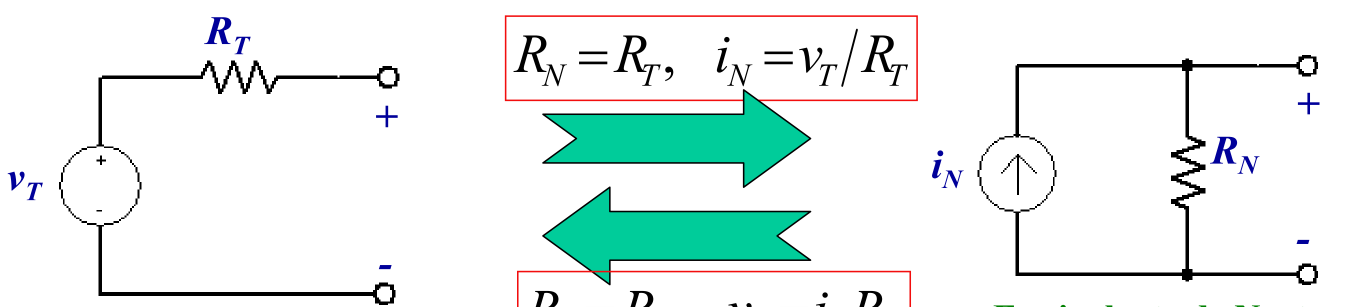
- **Dado um circuito linear, rearranje-se o circuito de maneira a deixar claro**
  - **a porção que interessa simplificar - o circuito A;**
  - **a porção a manter - o circuito B.**

- **Em seguida, defina-se:**
  - i_{sc} **– a corrente que flúi entre os terminais do circuito A quando estes são curto-circuitados, depois de B ser desligado;**
  - R_{eq} **– a resistência equivalente vista aos terminais do circuito A quando este é desativado, ou seja, quando todas as fontes independentes de tensão são curto-circuitadas e todas as fontes independentes de corrente são abertas (as fontes dependentes mantêm-se).**

- **O equivalente de Norton do circuito A é constituído por uma fonte de corrente de valor $i_N = i_{sc}$, em paralelo com uma resistência de valor $R_N = R_{eq}$.**

Equivalência entre Thévenin e Norton

- **Como os equivalentes de Thévenin e Norton são fontes reais de tensão/corrente, um pode ser obtido do outro através duma simples transformação de fontes;**



$$\boxed{R_N = R_T, \quad i_N = v_T / R_T}$$

$$\boxed{R_T = R_N, \quad v_T = i_N R_N}$$

Equivalente de Thévenin

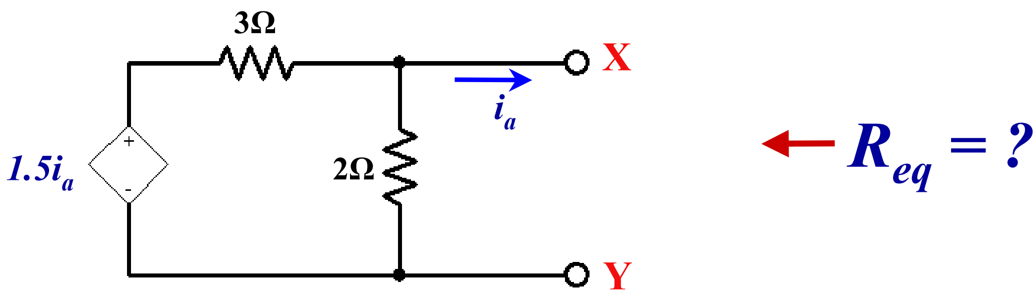
Equivalente de Norton

- **Esta relação é útil porque em circuitos com fontes dependentes é muitas vezes mais fácil determinar v_T e i_N do que R_T ou R_N.**

Equivalentes de Thévenin e Norton – dificuldades

- Em circuitos com fontes dependentes, por vezes é impossível obter os valores de R_T ou R_N.

Exemplo: determinar o equivalente de Thévenin do circuito entre X e Y.

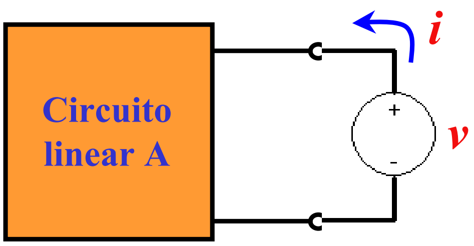


- Obter R_{eq} por simples combinação de resistências não é possível porque a fonte dependente não pode ser desactivada.

Equivalente de Thévenin - Método universal

- É um método que pode ser aplicado a todos os circuitos.

Como funciona?



- Dado o circuito A…
- … aplicamos nos terminais uma fonte de tensão de valor v, com corrente i.
- Depois analisamos o circuito de forma a obter uma expressão de v em função de i, com a forma

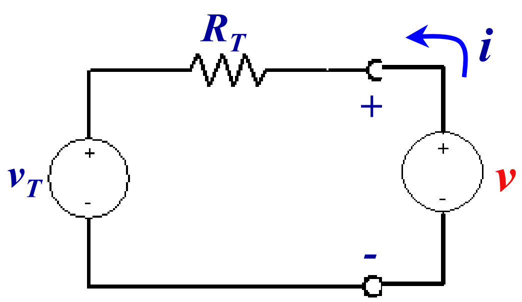
$$v = ai + b$$

- Dos coeficientes a e b tiramos

$$R_T = a \quad \text{e} \quad v_T = b$$

Método universal - demonstração

- É fácil mostrar que o Método Universal funciona recorrendo ao próprio Equivalente de Thévenin.



- Aplicamos então aos terminais uma fonte de tensão de valor v, com corrente i.
- Aplicando KVL: $-v_T - R_T i + v = 0$

$$v = R_T i + v_T$$

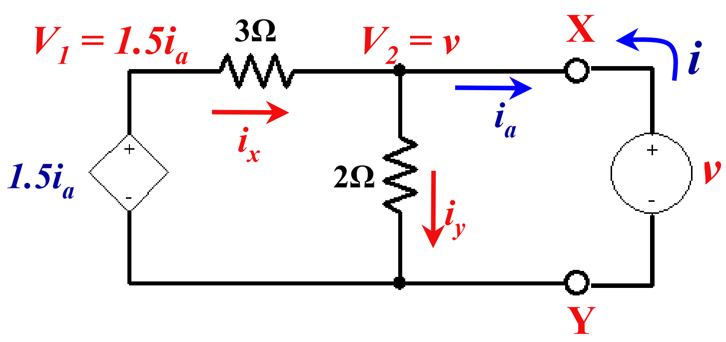
- Obtemos então uma relação de v em função de i, com a forma

$$v = ai + b$$

- Donde se conclui que $a = R_T$ e $b = v_T$.

Método universal

Exemplo 1: determinar o equivalente de Thévenin do circuito entre X e Y.



- Aplicamos a fonte de tensão.
- Marcamos tensões nodais e correntes.
- Aplicando KCL ao nó V_2: $i_x = i_y + i_a \Leftrightarrow \frac{1.5i_a - v}{3} = \frac{v}{2} + i_a$
- Como $i_a = -i$ $\Leftrightarrow \frac{-1.5i - v}{3} = \frac{v}{2} - i \quad \Leftrightarrow \quad v = 0.6i$

Método universal

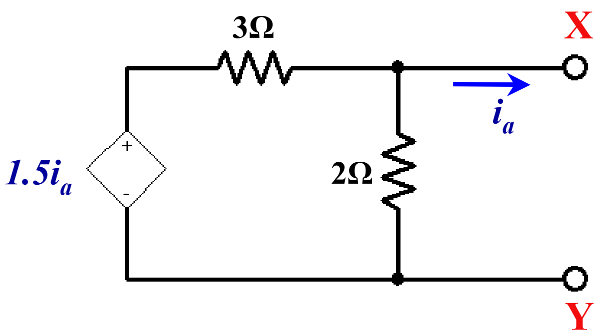
Exemplo 1: **determinar o equivalente de Thévenin do circuito entre X e Y.**

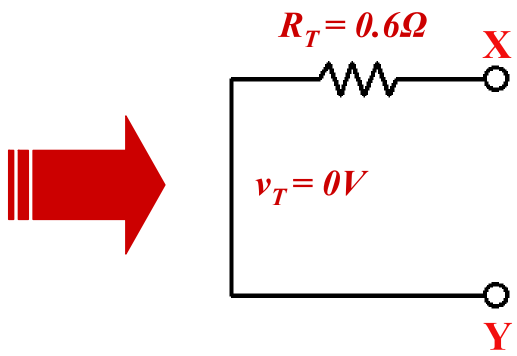
$$v = 0.6i$$

$$v = ai + b$$

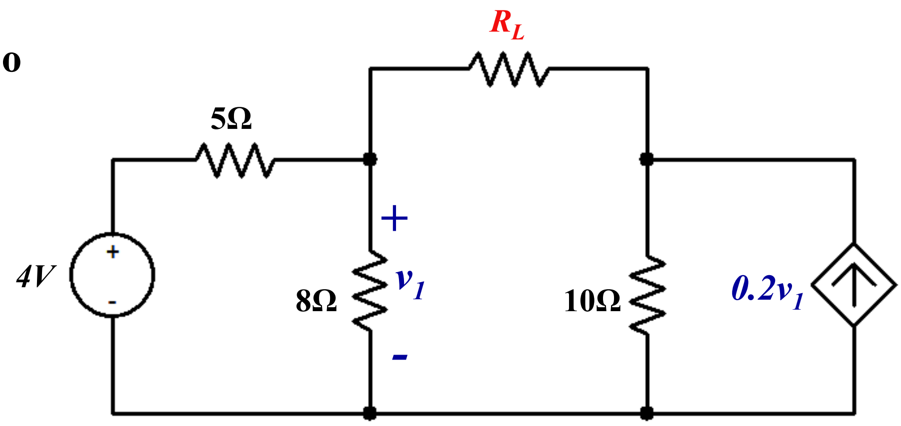
$$R_T = a \quad \text{e} \quad v_T = b$$

Equivalente de Thévenin

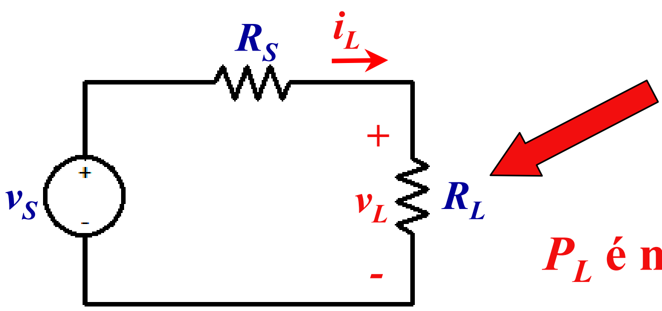




Exemplo 2: **determinar o valor de R_L que resulta na máxima potência dissipada nesta resistência.**



- **O problema remete para o Teorema da Máxima Transferência de Potência que diz…**

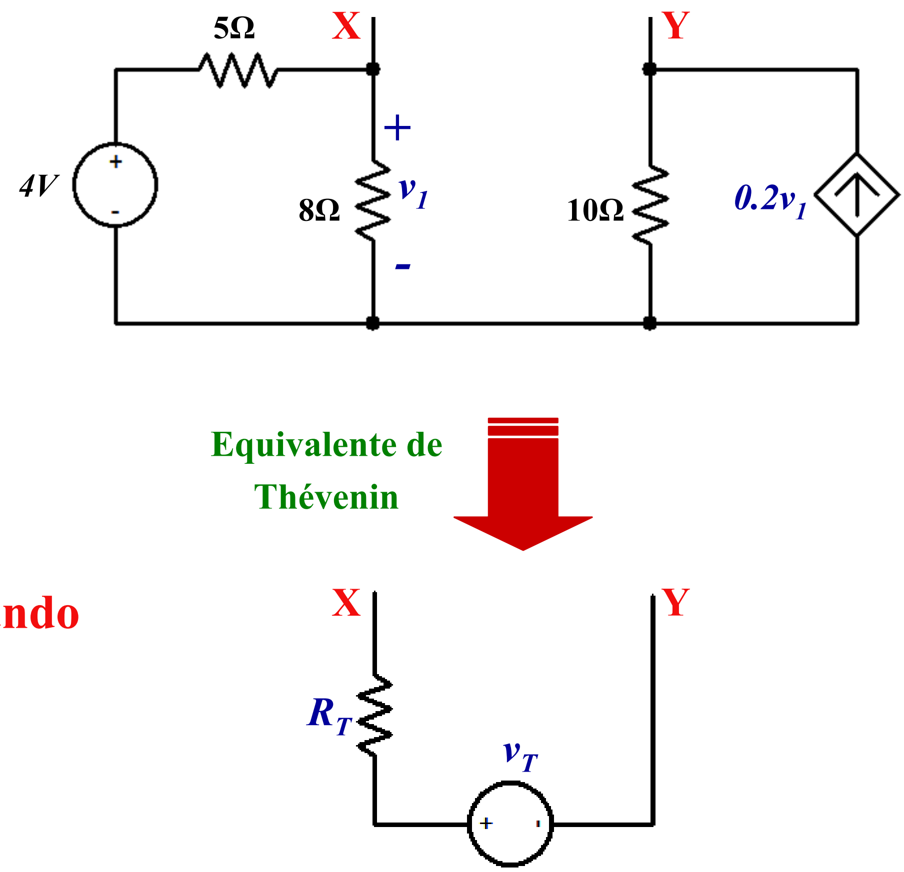


$$P_L = v_L . i_L$$

P_L é máxima quando $R_L = R_S$

Exemplo 2

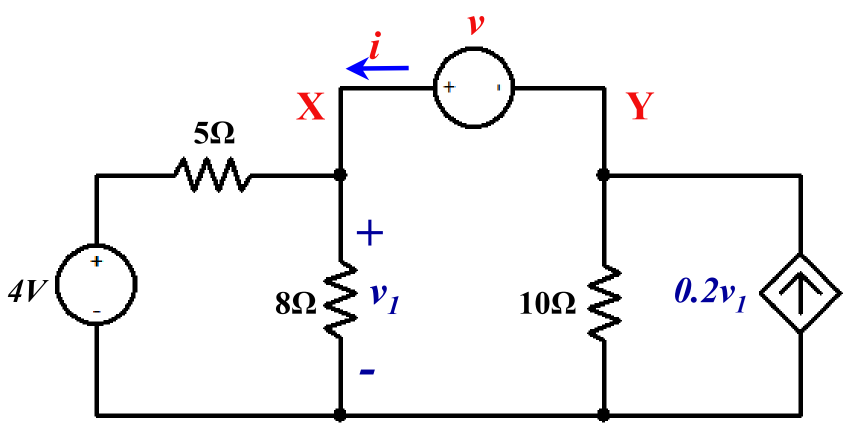
- Portanto se determinarmos o Equivalente de Thévenin entre os terminais X e Y, saberemos que…



P_L é máxima quando $R_L = R_T$

Exemplo 2

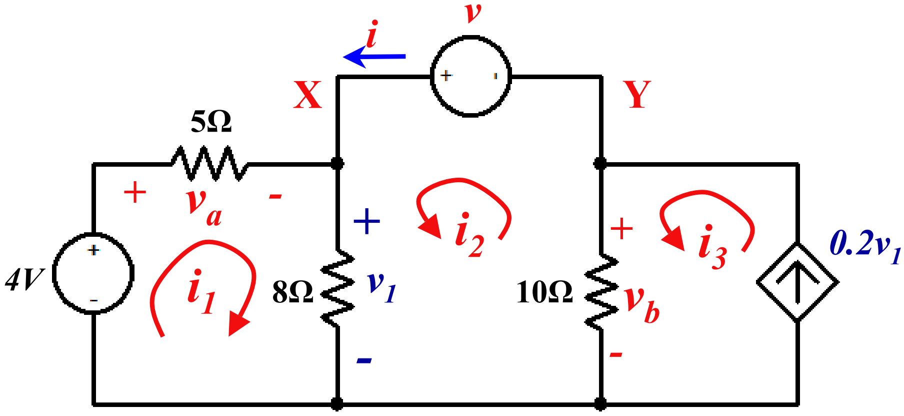
- Como o circuito tem uma fonte dependente, teremos de usar o Método Universal;



- Agora o objectivo é determinar uma relação matemática de v em função de i, com a forma

$$v = ai + b$$

Exemplo 2



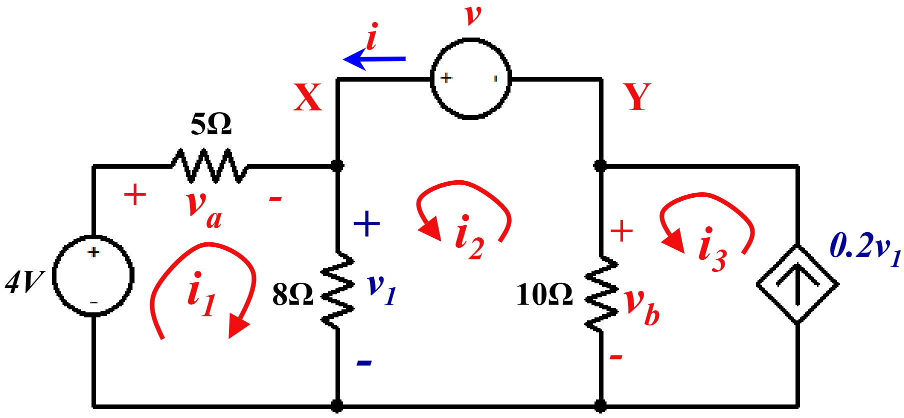
- **Vamos fazer uma Análise de Malhas;**
- **Marcamos correntes de malha…**
- **… e tensões nas resistências;**
- **Aplicando KVL:**

$$\begin{cases} -4 + v_a + v_1 = 0 \\ -v_1 + v + v_b = 0 \\ i_3 = 0.2v_1 \end{cases}$$

Sendo as tensões dadas por:

$$v_a = 5i_1$$
$$v_b = 10(-i_2 + i_3)$$
$$v_1 = 8(i_1 + i_2)$$

Exemplo 2



- **Substituindo as tensões e sabendo que $i_2 = i$:**

$$\begin{cases} -4 + 5i_1 + 8(i_1 + i) = 0 \\ -8(i_1 + i) + v + 10(-i + i_3) = 0 \\ i_3 = 0.2[8(i_1 + i)] \end{cases}$$

- **Eliminando as incógnitas i_1 e i_3, ficamos com uma expressão apenas com v e i, como pretendido**

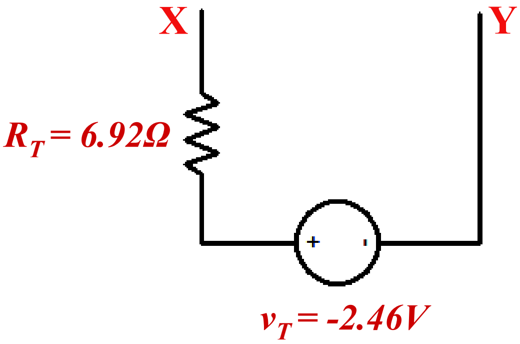
$$v = 6.92i - 2.46$$

Exemplo 2

$$v = 6.92i - 2.46$$

$$\boxed{\begin{gathered} v = ai + b \\ R_T = a \quad \text{e} \quad v_T = b \end{gathered}}$$

Equivalente de Thévenin

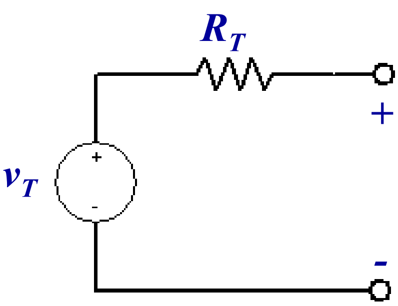


Resposta: o valor de R_L que resulta na máxima potência dissipada é portanto 6.92Ω.

Equivalente de Norton – Método Universal

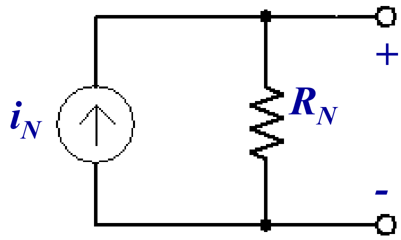
- **Se estivermos interessados no Equivalente de Norton e o circuito incluir fontes dependentes…**

- **… começamos por determinar o Equivalente de Thévenin recorrendo ao método universal… e depois obtemos o Equivalente de Norton por Transformação de fontes:**



Equivalente de Thévenin

$$\boxed{R_N = R_T, \quad i_N = v_T / R_T}$$



Equivalente de Norton