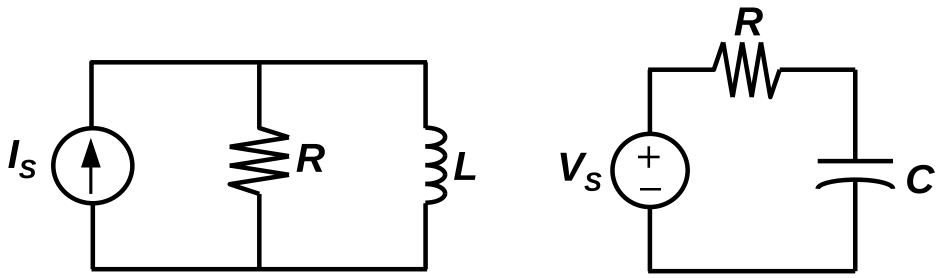
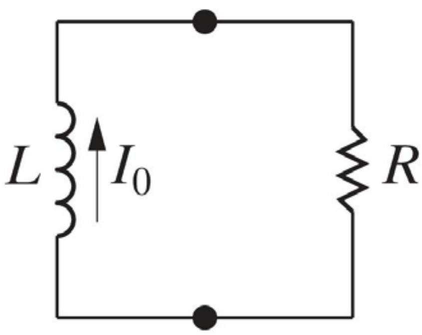
Resposta completa de circuitos RL e RC



Resposta natural de circuitos RL e RC

- **Até agora estudamos o comportamento dos circuitos RL e RC sem fontes de energia aplicadas;**

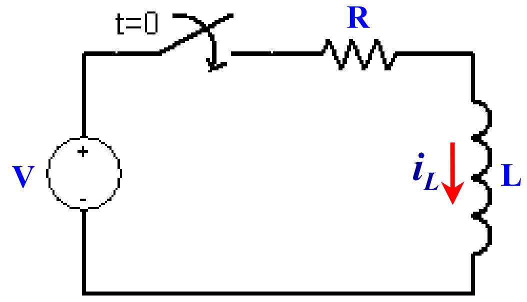


- **As fontes de tensão ou corrente que apareciam nos exemplos que vimos eram usadas só para estabelecer condições iniciais; depois o circuito era abandonado a si próprio;**

- **A resposta que observamos – a Resposta Natural – depende apenas da *natureza* do próprio circuito.**

Resposta completa de circuitos RL e RC

- Vamos ver agora como é que estes circuitos se comportam quando são ligados a uma fonte externa – uma **função forçadora**;



- Em particular queremos saber o que acontece quando os **ligamos bruscamente a uma fonte de tensão ou corrente DC**.

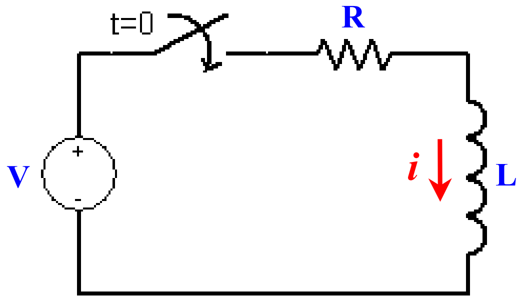
- A resposta que iremos obter é a **Resposta Completa** – depende do circuito e da função forçadora.

Sistemas Electrónicos – 2020/2021

Resposta completa do circuito RL

Resposta completa de circuitos RL

Aplicando KVL :



$$i(0)=0$$

$$-V + Ri + L\frac{di}{dt} = 0$$

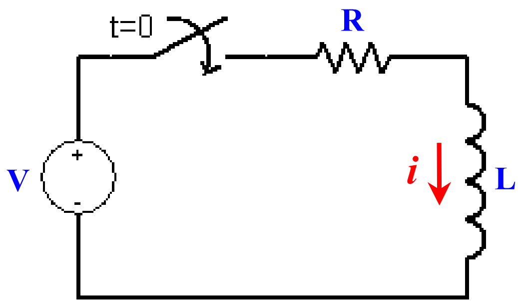
$$Ri + L\frac{di}{dt} = V \quad \Leftrightarrow \quad \frac{L}{V-Ri}di = dt$$

$$L\int_{i(0)}^{i(t)} \frac{1}{V-Ri}di = \int_0^t dt$$

$$\boxed{\int \frac{1}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx)}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{L}{R}\ln(V-Ri)\Big|_{i(0)}^{i(t)} = t\Big|_0^t$$

Resposta completa de circuitos RL



$$i(0)=0$$

$$-\frac{L}{R}\ln(V-Ri)\Big|_{i(0)}^{i(t)} = t\Big|_0^t$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{L}{R}\left[\ln(V-Ri(t)) - \ln(V-Ri(0))\right] = t$$

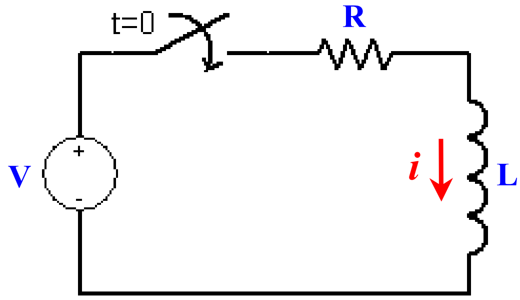
$$\Leftrightarrow \quad \ln\frac{V-Ri(t)}{V} = -\frac{R}{L}t \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{V-Ri(t)}{V} = e^{-Rt/L} \quad \Leftrightarrow \quad V - Ve^{-t/\tau} = Ri(t)$$

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$

$$i(t) = \frac{V}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

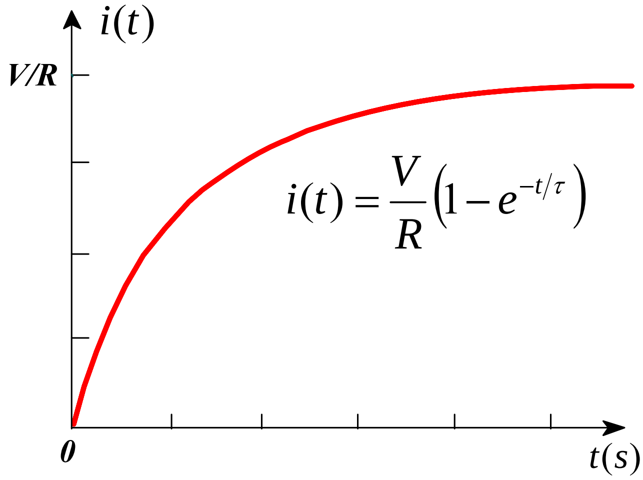
$$i(t) = -\frac{V}{R} e^{-t/\tau} + \frac{V}{R}$$



- **Interpretemos esta equação:**

Termo exponencial **– tem a forma da resposta natural: tende para zero e caracteriza-se pela constante de tempo *L/R*. A amplitude depende da função forçadora.**

Termo constante **– é a resposta forçada que fica presente muito tempo depois da variação brusca, e que se deve apenas à função forçadora.**



Resposta Completa = resposta natural + resposta forçada

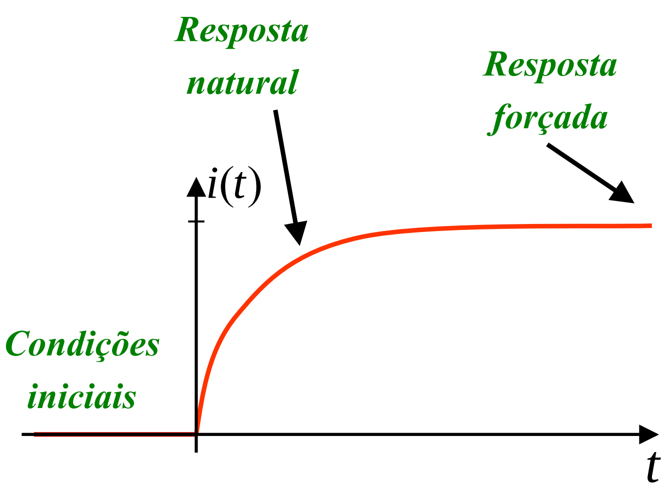
$$i = i_n + i_f$$

$$\boxed{i_f = \frac{V}{R}}$$

Resposta forçada – Determinada pela função forçadora e pelo circuito. É a resposta que prevalece assim que a resposta natural desaparece (para *t*=∞).

$$\boxed{i_n = -\frac{V}{R} e^{-t/\tau}}$$

Resposta natural - Determinada pelo circuito e não pela fonte. É a resposta que estudamos anteriormente.
Também se chama de resposta transitória porque corresponde ao período (transitório) durante o qual a corrente varia entre o valor ditado pelas condições iniciais e o valor final imposto pela função forçadora.

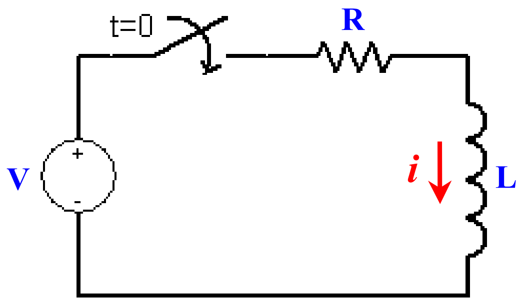


Determinação da resposta completa

- Método sistemático -

Determinação da resposta completa – método sistemático

- **Partindo das observações anteriores, podemos chegar à resposta completa de qualquer circuito RL. Atentemos ainda no circuito RL simples dado como exemplo.**



$$i(0^-) = 0$$

- **Sabemos que a resposta completa em corrente tem de ser dada por**

$$i = i_n + i_f$$

Em que i_n é a resposta natural, que tem a forma

$$i_n = Ke^{-t/\tau} \qquad \tau = L/R$$

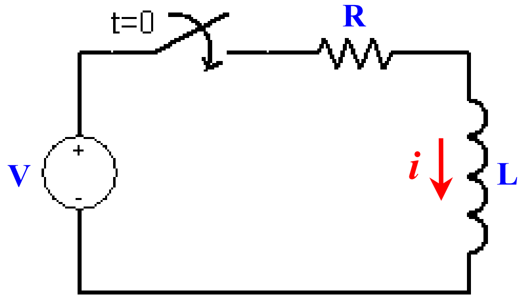
A constante K deve ser determinada por $i(0^+)$, assim que obtivermos a expressão da resposta completa.

Determinação da resposta completa – método sistemático

$$i = i_n + i_f$$

Como i_n tende para zero, i_f é o valor de i para $t = \infty$. Dado que a função forçadora é constante, i_f tem de ser constante. Para $t = \infty$ não pode haver tensão na bobina (bobina é um curto-circuito para DC), pelo que

$$i_f = \frac{V}{R}$$



$$i(0^-) = 0$$

- **A resposta completa é portanto**

$$i = i_n + i_f = Ke^{-t/\tau} + \frac{V}{R}$$

Determinação da resposta completa – método sistemático

- **Para calcular K fazemos**

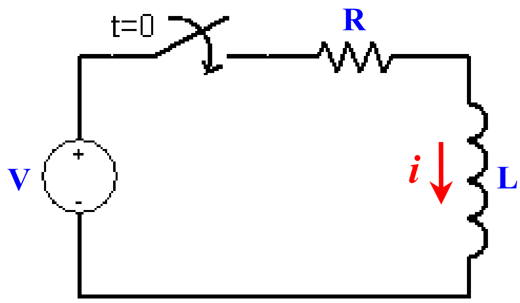
$$i(0^+) = Ke^{-(0)/\tau} + \frac{V}{R}$$

Sabendo que $i(0^-) = 0$ e que nas bobinas temos SEMPRE $i_L(0^-) = i_L(0^+)$

$$i(0^+) = Ke^{-(0)/\tau} + \frac{V}{R} = i(0^-) = 0$$

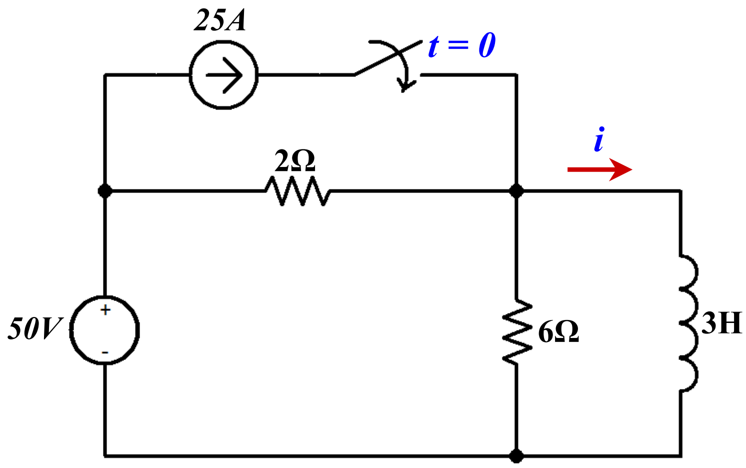
pelo que $K = -\frac{V}{R}$

Donde $i = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$



$$i(0^-) = 0$$

Exemplo 4 - Determinar *i(t)*.



- **A corrente deverá ter a forma**

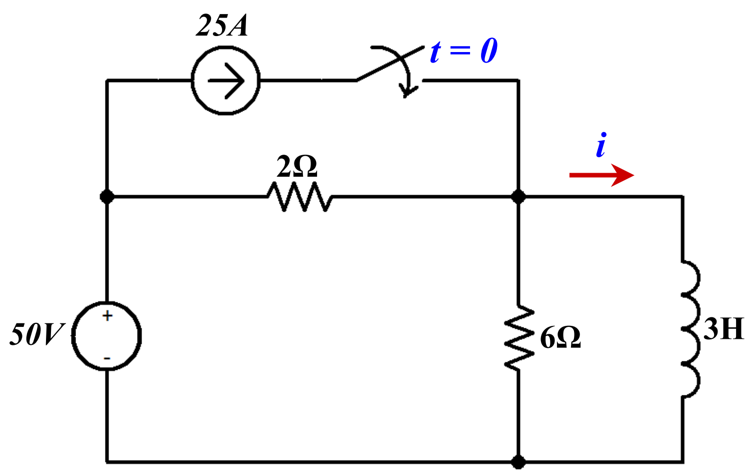
$$i = i_f + i_n$$

em que $i_n = Ke^{-t/\tau}$

e $\tau = \dfrac{L}{R_{eq}}$

- **Note-se que R_{eq} é a resistência *vista* pela bobina para $t > 0$, depois de todas as fontes serem desactivadas. Ou seja, é**

$$R_{eq} = 2 // 6 = \frac{2\text{x}6}{2+6} = 1.5\Omega \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{3}{1.5} = 2s$$

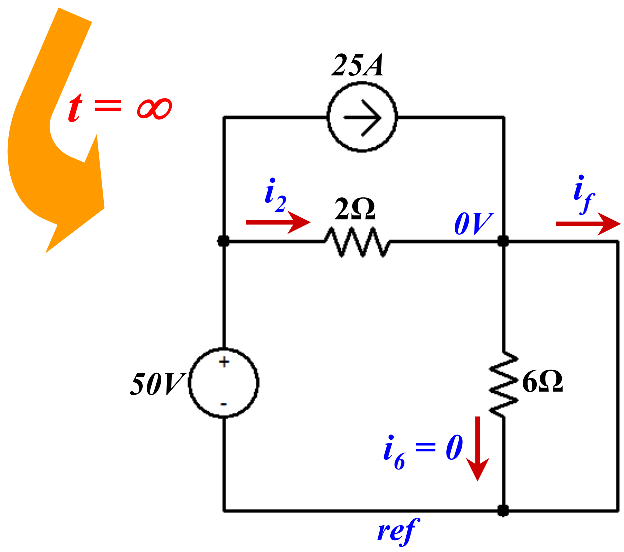


$$i = i_f + i_n$$

- **i_f é o valor de i para $t = \infty$.**

$$i_f = 25 + i_2$$

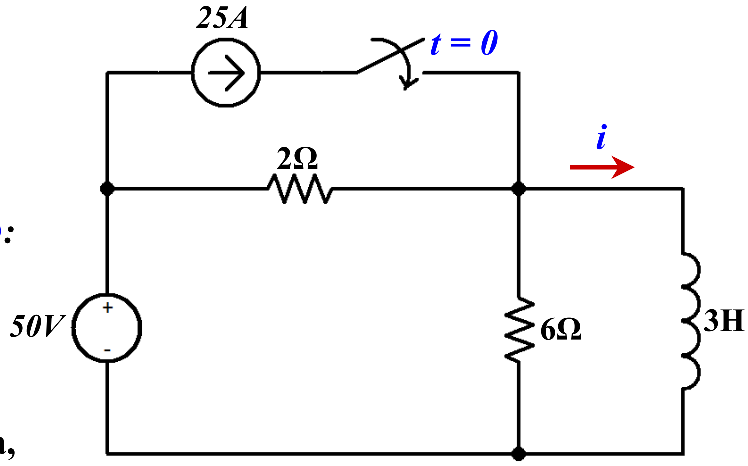
$$i_f = 25 + \frac{50-0}{2} = 50A$$



- **A resposta completa é portanto**

$$i = i_n + i_f = Ke^{-t/2} + 50$$

$$i = i_n + i_f = Ke^{-t/2} + 50$$

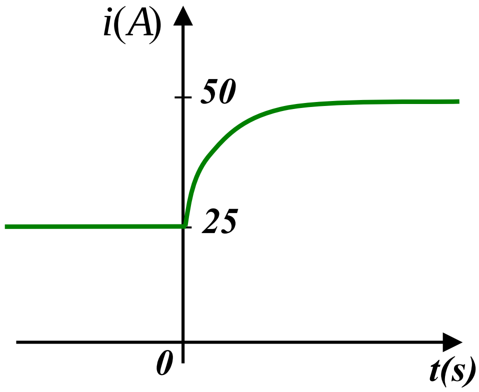


A constante K é determinada por $i(0^+)$:

$$i(0^+) = Ke^{-(0)/2} + 50$$

Tratando-se da corrente numa bobina, sabemos que $i(0^-) = i(0^+)$

Do circuito tiramos $i(0^-) = \dfrac{50}{2} = 25A$



$$i(0^+) = Ke^{-(0)/2} + 50 = i(0^-) = 25$$

pelo que $K = -25A$

Donde $i(t) = 50 - 25e^{-t/2} \qquad t \geq 0$

Determinação da resposta completa de circuitos RL

1- Para $t > 0$, e com todas as fontes independentes desactivadas, determinar $\tau = L_{eq}/R_{eq}$;

2- Considerando L_{eq} como um curto-circuito, determinar $i_L(0^-)$, a corrente na bobina imediatamente antes da descontinuidade;

3- Ainda considerando L_{eq} como um curto-circuito, determinar a resposta forçada, ou seja, o valor da resposta, $f(t)$, para $t = \infty$;

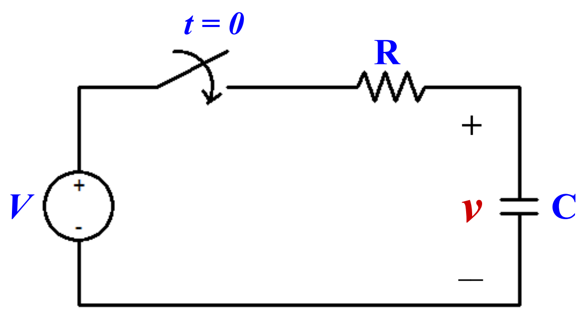
4- A resposta completa é: $f(t) = f(\infty) + Ke^{-t/\tau}$

5- Calcular $f(0^+)$ usando $i_L(0^+) = i_L(0^-)$. Com excepção da corrente na bobina, todas as outras tensões e correntes podem variar bruscamente;

6- Com base no valor de $f(0^+)$ determinar K: $f(0^+) = f(\infty) + K$

Resposta completa do circuito RC

Resposta completa de circuitos RC



- **Como já vimos, o circuito RC é dual do circuito RL, portanto a análise é muito parecida e os resultados também;**

- **A resposta completa também pode ser obtida por:**

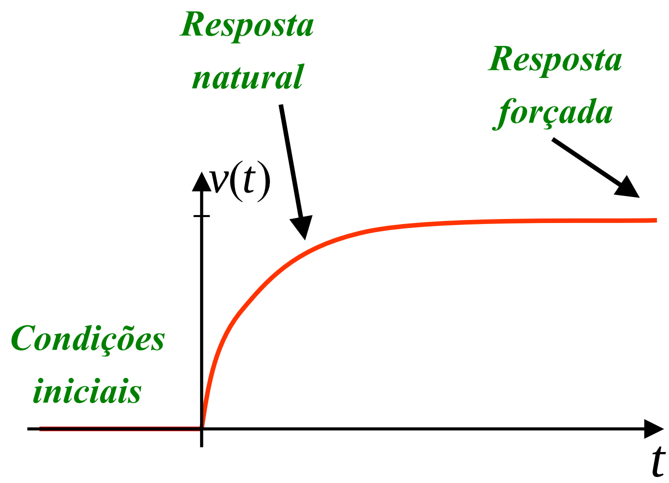
$$v = v_n + v_f$$

Resposta natural

Determinada pelo circuito e não pela fonte. Corresponde ao período em que a tensão varia entre o valor ditado pelas condições iniciais e o valor final.

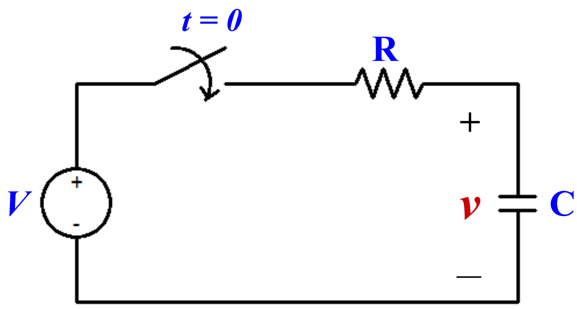
Resposta forçada

Determinada pela função forçadora e pelo circuito. Prevalece assim que a resposta natural desaparece.



Determinação da resposta completa – método sistemático

$$v = v_n + v_f$$



v_n **tem a forma**

$$v_n = Ke^{-t/\tau} \qquad \tau = RC$$

Aqui K deve ser determinada por $v(0^+)$, assim que obtivermos a expressão da resposta completa.

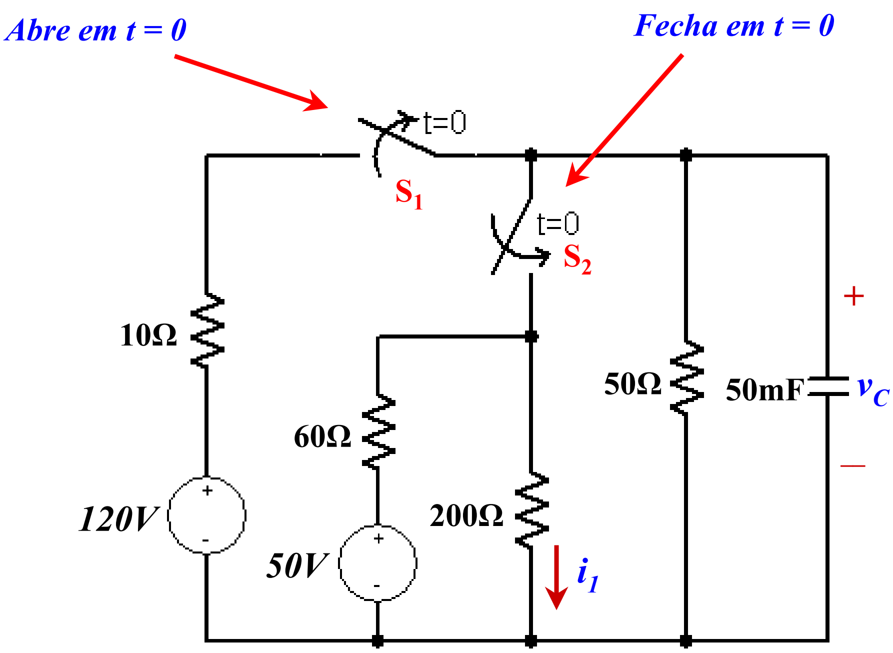
Como v_n tende para zero, v_f é o valor de v para $t = \infty$. Neste caso $v_f = V$

A resposta completa é portanto $v = Ke^{-t/\tau} + V$

K é calculado por $v(0^+) = Ke^{-(0)/\tau} + V$

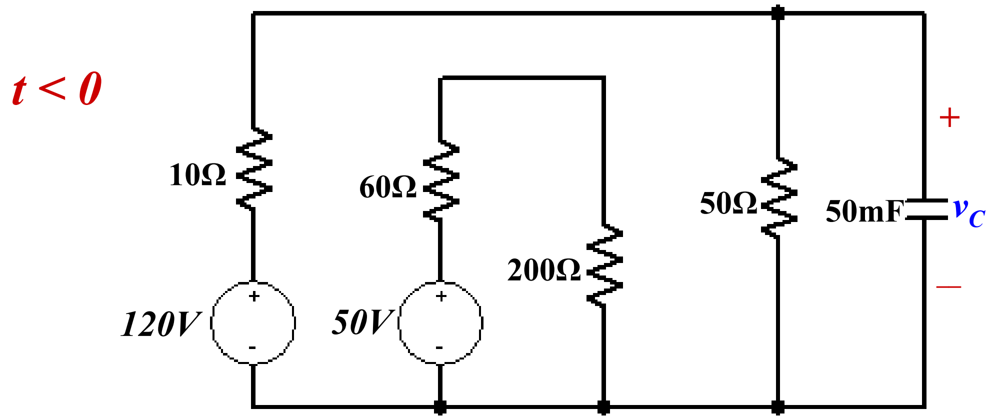
Tratando-se da tensão num condensador temos SEMPRE $v(0^+) = v(0^-)$.

Exemplo 5 - Determinar $v_C(t)$ e $i_1(t)$.



Calculo de $v_C(t)$

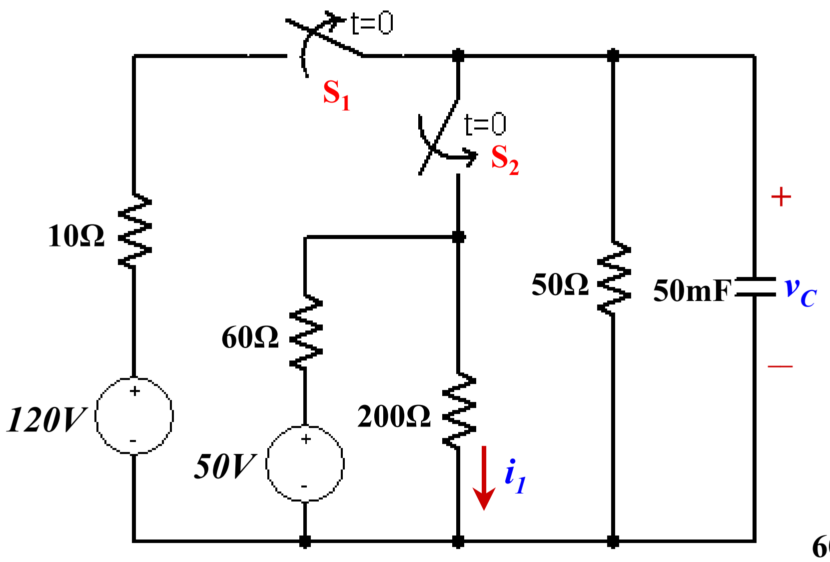
Para $t < 0$ temos S_1 fechado e S_2 aberto. O circuito equivalente é



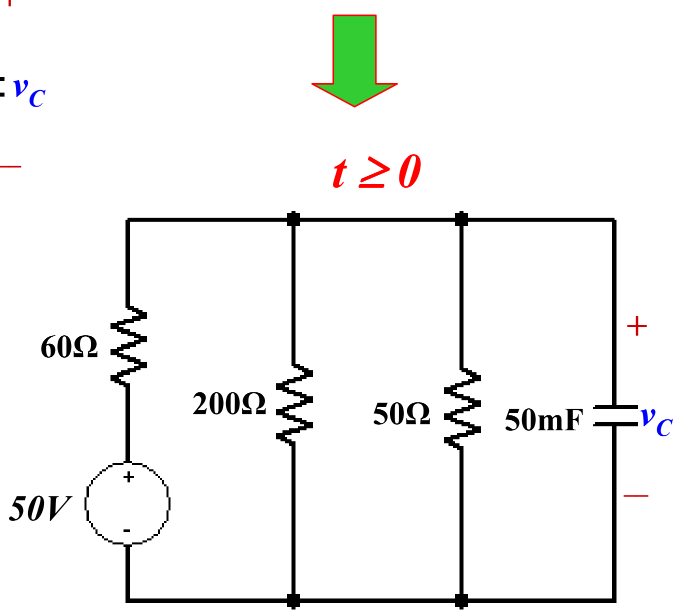
A tensão no condensador é:

$$v_C(0^-) = \frac{50}{50+10}(120) = 100V$$

Calculo de $v_C(t)$

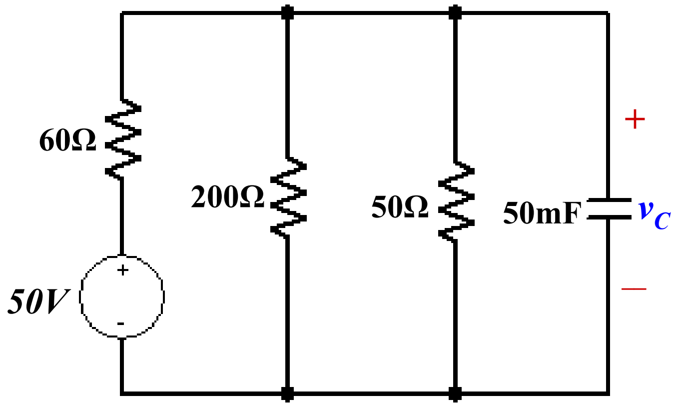


Em $t = 0$ S_1 abre e S_2 fecha. O circuito equivalente é:



Calculo de $v_C(t)$

$t \geq 0$



Para $t \geq 0$ a resposta completa é

$$v_C = v_{Cn} + v_{Cf}$$

em que $v_{Cn} = K_1 e^{-t/\tau}$

e $\tau = R_{eq} C$

$$= (60 // 200 // 50)(0.05) = 1.2s$$

Notar que a **constante de tempo** é sempre calculada no circuito para $t \geq 0$, com as **fontes desactivadas**!

e v_{Cf} será a tensão no condensador para $t = \infty$

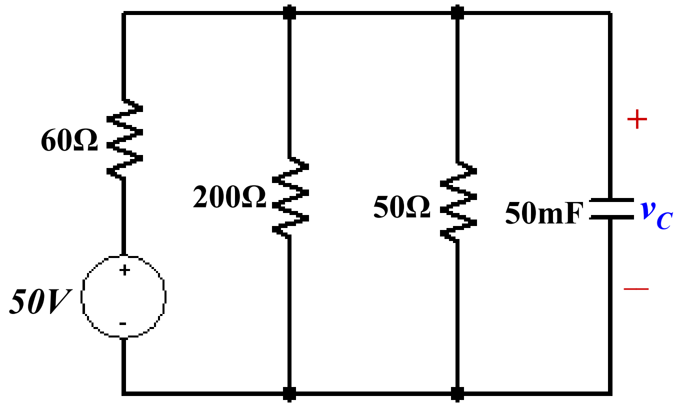
$$v_{Cf} = \frac{200 // 50}{200 // 50 + 60}(50) = 20V$$

- A **resposta completa** será portanto

$$v_C = K_1 e^{-t/1.2} + 20 \qquad t \geq 0$$

Calculo de $v_C(t)$

$t \geq 0$



$$v_C = K_1 e^{-t/1.2} + 20 \qquad t \geq 0$$

A constante K_1 é determinada por

$$v_C(0^+) = K_1 e^{-(0)/1.2} + 20$$

Como sabemos que $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 100V$

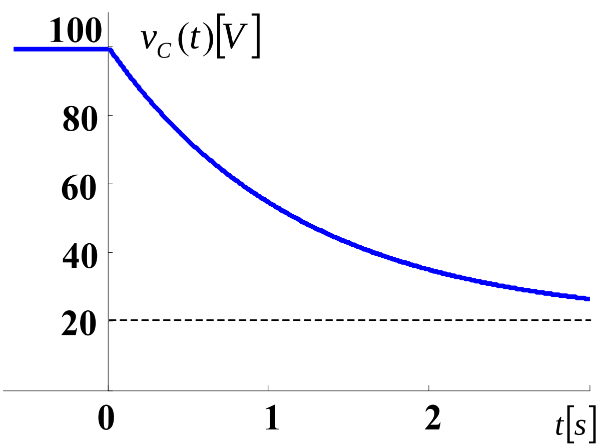
$$v_C(0^+) = K_1 e^{-(0)/1.2} + 20 = 100$$

pelo que $K_1 = 80$

e portanto $v_C = 80e^{-t/1.2} + 20 \qquad t \geq 0$

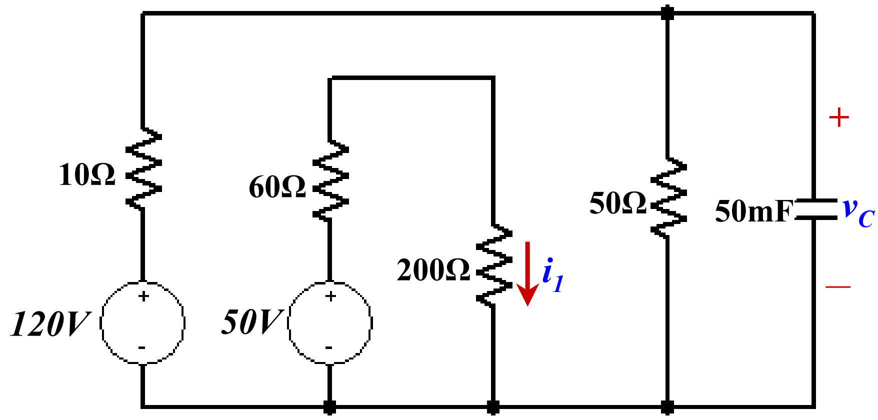
Ou melhor

$$v_C = \begin{cases} 100 & t < 0 \\ 20 + 80e^{-t/1.2} & t \geq 0 \end{cases}$$



Calculo de $i_1(t)$

Circuito equivalente para $t < 0$



Para $t < 0$, i_1 é:

$$i_1(0^-) = \frac{50}{60+200} = 0.19A$$

Calculo de $i_1(t)$

- **Para $t \geq 0$ a corrente i_1 terá a forma :**

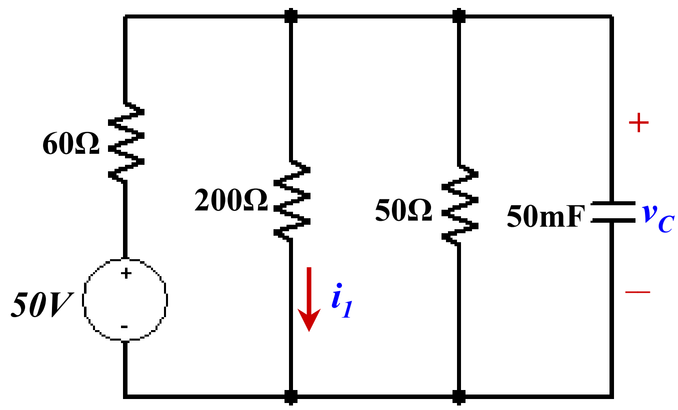
$$i_1 = i_{1n} + i_{1f}$$

sendo $i_{1n} = K_2 e^{-t/1.2}$

e i_{1f} a corrente para $t = \infty$.

$$i_{1f} = \frac{v_{Cf}}{200} = 0.1A$$

Circuito equivalente para $t \geq 0$



$$\tau = 1.2s$$

A resposta completa será portanto

$$i_1 = K_2 e^{-t/1.2} + 0.1 \qquad t \geq 0$$

Para determinar a K_2 precisamos de ter $i_1(0^+)$:

$$i_1(0^+) = K_2 e^{-(0)/1.2} + 0.1$$

Mas $i_1(0^+)$ NÃO PODE ser igualado a $i_1(0^-)$!

Calculo de $i_1(t)$

- Devemos calcular $i_1(0^+)$ a partir de $v_C(0^+)$ pois v_C não varia em $t = 0$

$$i_1(0^+) = \frac{v_C(0^+)}{200} = \frac{100}{200} = 0.5A$$

portanto

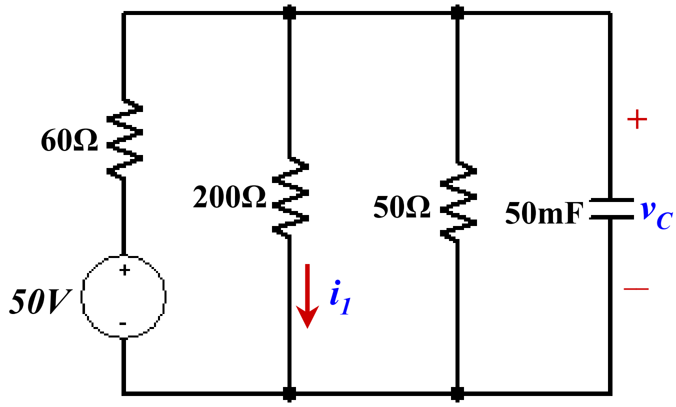
$$i_1(0^+) = K_2 e^{-(0)/1.2} + 0.1 = 0.5$$

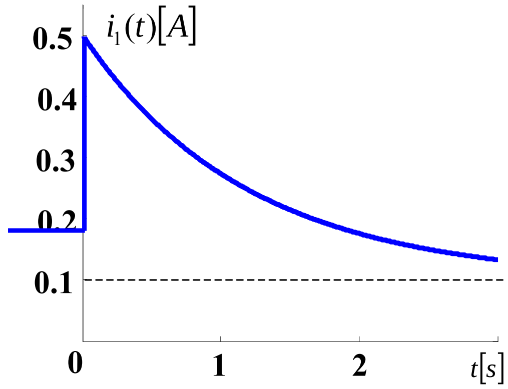
pelo que $K_2 = 0.4$

$$i_1 = \begin{cases} 0.19\text{A} & t < 0 \\ 0.1 + 0.4e^{-t/1.2}\text{A} & t \geq 0 \end{cases}$$

Notar a descontinuidade de i_1 em $t = 0$!

Circuito equivalente para $t \geq 0$





Determinação da resposta completa de circuitos RC

1- Para $t > 0$, e com todas as fontes independentes desactivadas, determinar $\tau = R_{eq} C_{eq}$;

2- Considerando C_{eq} como um circuito aberto, determinar $v_C(0^-)$, a tensão no condensador imediatamente antes da descontinuidade;

3- Ainda considerando C_{eq} como um circuito aberto, determinar a resposta forçada, ou seja, o valor da resposta, $f(t)$, para $t = \infty$;

4- A resposta completa é: $f(t) = f(\infty) + Ke^{-t/\tau}$

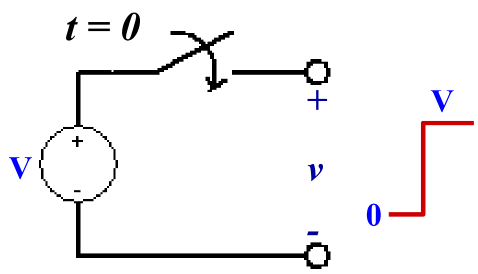
5- Calcular $f(0^+)$ usando $v_C(0^+) = v_C(0^-)$. Com excepção da tensão no condensador, todas as outras tensões e correntes podem variar bruscamente;

6- Com base no valor de $f(0^+)$ determinar K: $f(0^+) = f(\infty) + K$

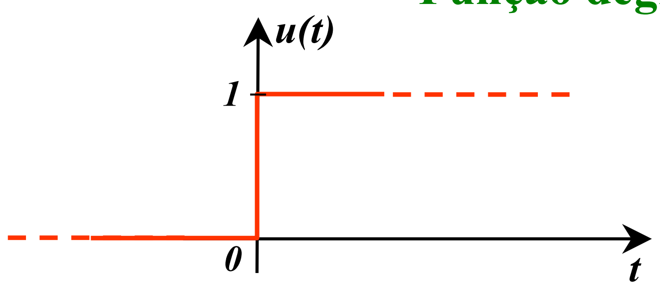
Função degrau unitário

Função degrau unitário

- **A ligação brusca (i.e. em tempo nulo) de uma fonte DC produz uma variação em degrau que pode ser representada pela *Função Degrau Unitário*;**



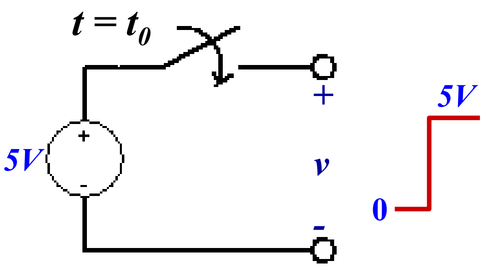
Função degrau unitário



$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Função degrau unitário

- A função degrau unitário é 0 para todos os valores em que o seu argumento é < 0, e 1 para todos os valores em que o seu argumento é > 0;



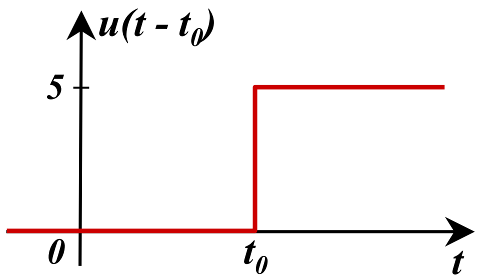
$$5u(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 5 & t > t_0 \end{cases}$$

- Notar que $u(t - t_0)$ não é definida para $t = t_0$. No entanto:
  - $t = t_0^- \rightarrow u(t - t_0) = 0$ e
  - $t = t_0^+ \rightarrow u(t - t_0) = 1$.

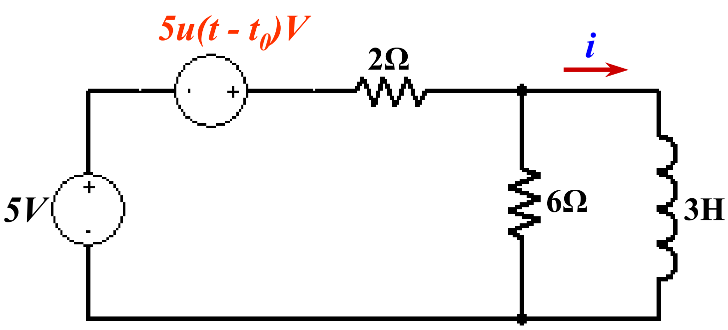
Função degrau unitário

- Se quisermos representar, por exemplo, uma fonte de tensão de $5V$ que liga em $t = t_0$, escrevemos

$$v(t) = 5u(t - t_0)V$$



Exemplo:



Desta forma evitamos o uso de interruptores nos esquemas.

FIM

CIRCUITOS ELÉCTRICOS

2019/2020