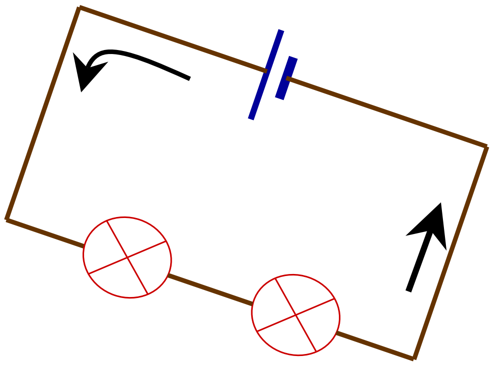
Sistemas Electrónicos

Capítulo 1 , Parte 4: Capacidade e Indutância



Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

Sumário

- **Capacidade;**
- **Indutância;**
- **Combinação de bobinas e condensadores;**
- **Linearidade;**
- **Dualidade.**

Elementos activos e passivos

- **A capacidade e a indutância são propriedades de dois novos elementos de circuito: o condensador e a bobina, respectivamente;**

- **Apesar de passivos, este dois elementos têm a capacidade de armazenar e fornecer quantidades finitas de energia, pelo que a sua introdução requer uma definição mais rigorosa de elemento activo e passivo.**

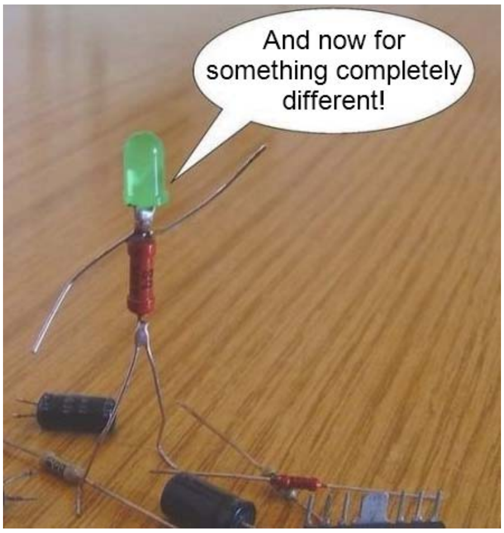
Sistemas Electrónicos – 2020/2021

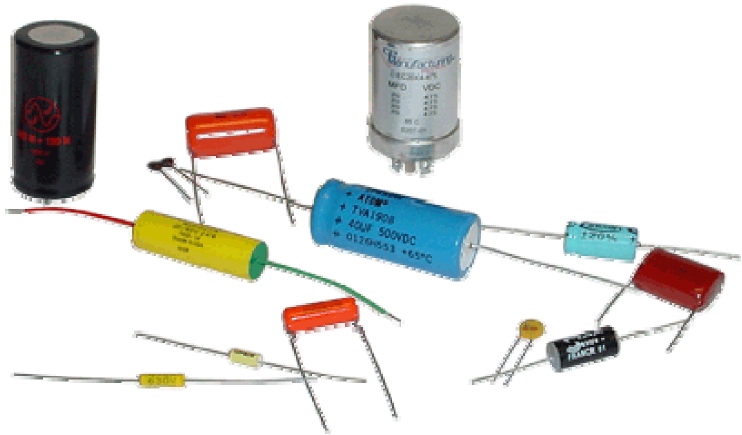
Elemento activo e passivo – NOVA DEFINIÇÃO

- **Elemento activo – é capaz de fornecer uma potência média > 0 durante um período de tempo infinito;**

- **Elemento passivo – não é capaz de fornecer uma potência média > 0 durante um período de tempo infinito.**

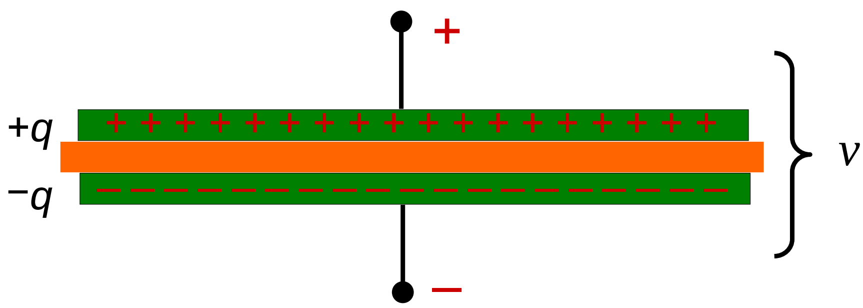
Condensador





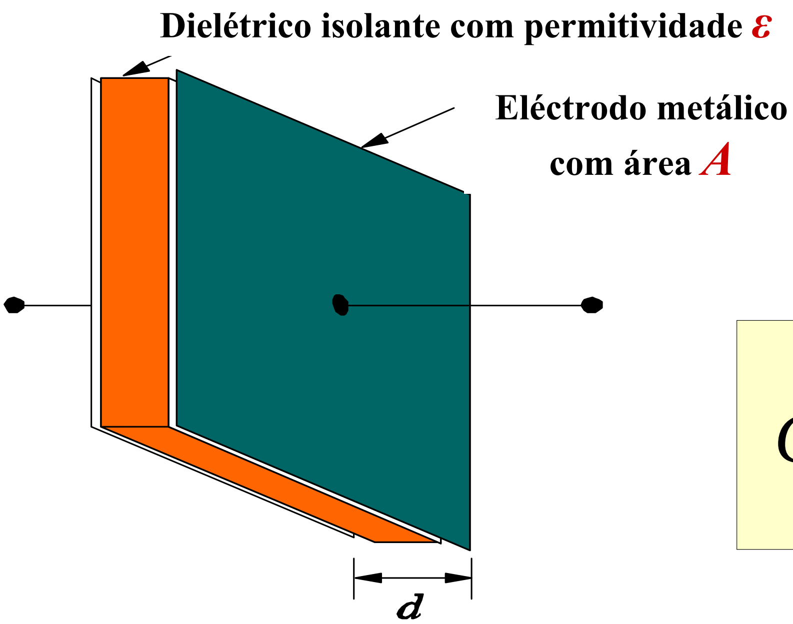
Condensador fisico

- **Constituído por duas superfícies condutoras paralelas separadas por um isolador.**



- **Quando submetido a uma tensão, *v*, o condensador carrega com uma quantidade de carga, *q*, determinada pela sua capacidade, *C*.**

Condensador fisico



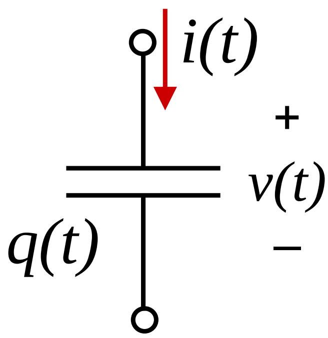
$$C = \varepsilon \frac{A}{d}$$

Condensador – modelo matemático

- **A capacidade do condensador define-se como:**

$$C = \frac{q}{v}$$

$$1 Coulomb / 1 Volt = 1\ Farad$$



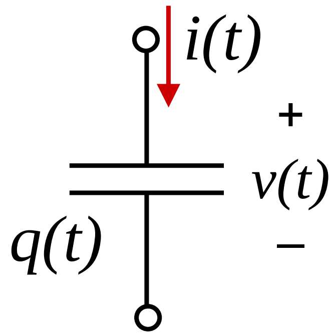
Símbolo

- **Uma relação idêntica é:**

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

Condensador – modelo matemático

$$\boxed{i = C\frac{dv}{dt}}$$



Símbolo

- **Desta relação podemos desde logo concluir que:**
  - **Uma tensão constante aos terminais de um condensador corresponde a uma corrente nula – o condensador é pois um circuito aberto para DC;**
  - **Uma variação brusca de tensão aos terminais de um condensador requer uma corrente infinita. Como não temos nunca correntes infinitas, segue-se daqui que um condensador não permite variações bruscas de tensão.**

Relação corrente-tensão

$$i = C\frac{dv}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad dv = \frac{1}{C}idt$$

- **Integrando ambos os lados da igualdade entre um instante inicial, t_0, e t, obtém-se**

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} idt \quad \Leftrightarrow \quad v(t) - v(t_0) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} idt$$

$$\boxed{v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} idt + v(t_0)}$$

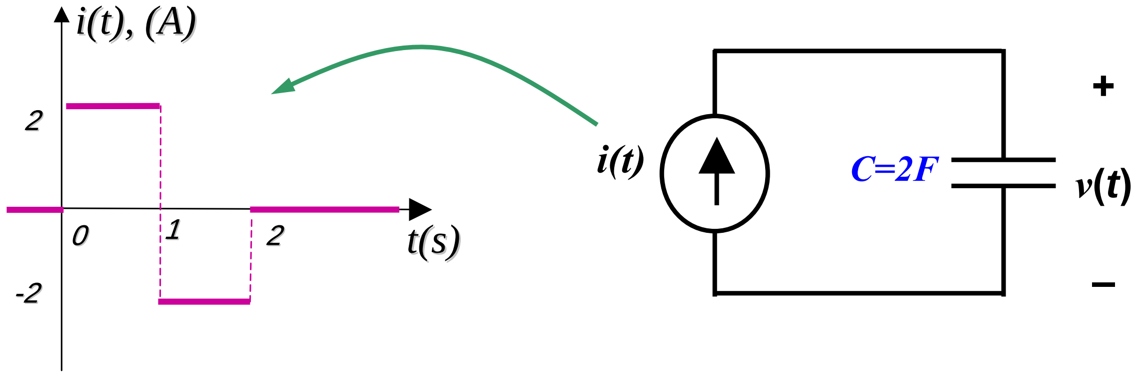
- **Em muitas situações pode seleccionar-se, $t_0 = -\infty$ e $v(-\infty) = 0$, o que reduz o integral a**

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} idt$$

Note-se que todas estas relações assumem a Convenção de Sinais de Elemento Passivo – a corrente entra no condensador pelo terminal marcado pela polaridade (+).

Exemplo 1

Calcular a tensão no condensador, *v(t)*, sabendo que *v(t = 0) = -0.5V*.

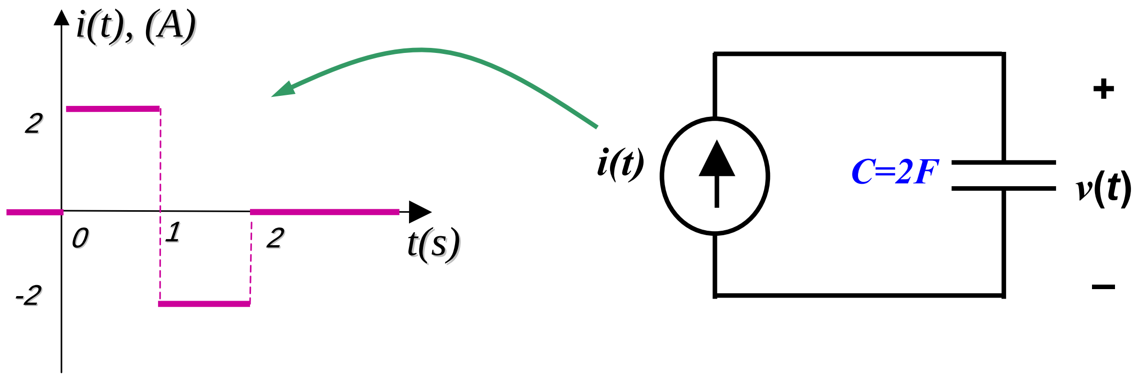


- **Consideremos primeiro o intervalo *0* a *1s*:**

$$v_1(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i dt + v(0) = \frac{1}{2}\int_0^t 2dt - 0.5$$

$$v_1(t) = t - 0.5 \qquad 0 \le t \le 1$$

Exemplo 1



- **… e agora o intervalo *1* a *2s*:**

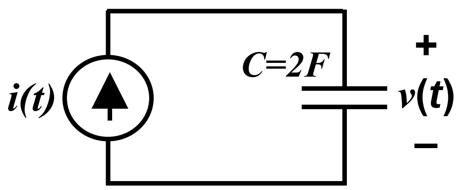
$$v_2(t) = \frac{1}{C}\int_1^t i dt + v_1(1) = \frac{1}{2}\int_1^t (-2)dt + 0.5 = \frac{1}{2}(-2t+2) + 0.5$$

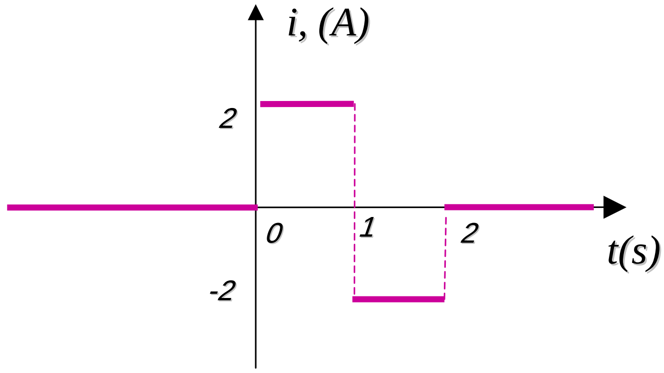
$$v_1(1) = 1 - 0.5 = 0.5V$$

$$v_2(t) = -t + 1.5 \qquad 1 \le t \le 2$$

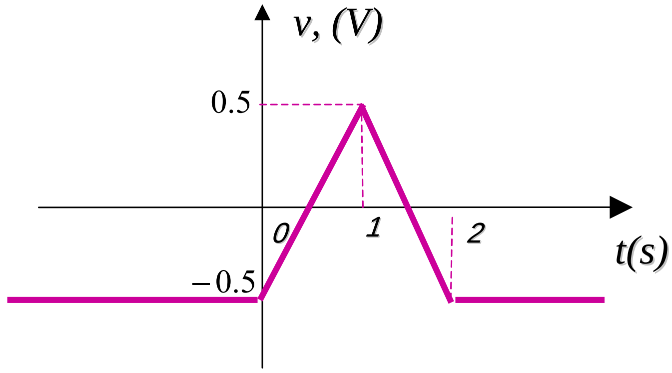
Exemplo 1

- **Obtemos então**





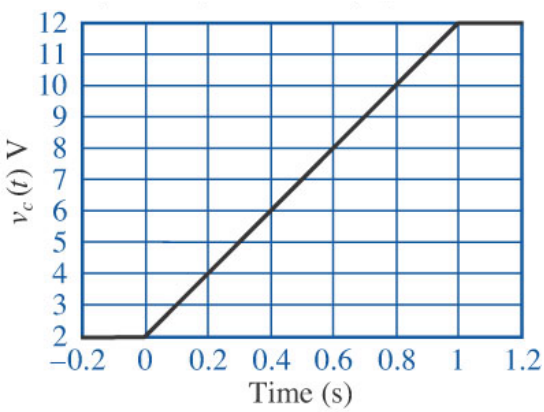
$$v(t)=\begin{cases}-0.5 & t\le 0\\ t-0.5 & 0\le t\le 1\\ -t+1.5 & 1\le t\le 2\\ -0.5 & t\ge 2\end{cases}$$



- ***v(1)* é igual à área do primeiro rectângulo de corrente x *1/C* mais *v(0)*.**

Exemplo 2

- **Calcular a corrente num condensador de *1mF* cuja tensão varia de acordo com o gráfico seguinte.**



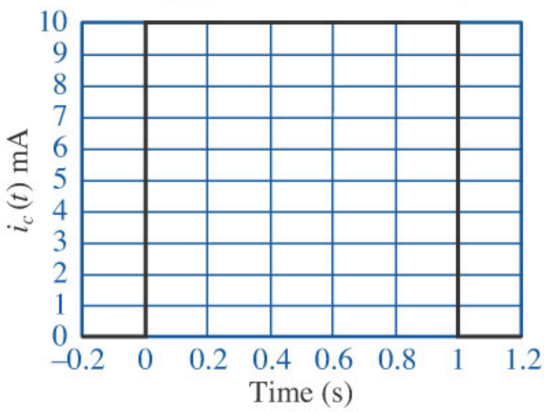
Para *$t < 0$* e *$t > 1$* a corrente é nula dado que a tensão é constante.

Para *$0 \le t \le 1$* temos:

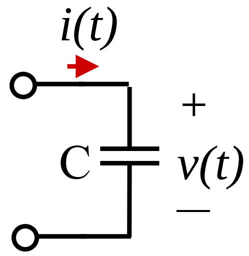
$$i=C\frac{dv}{dt}=10^{-3}\,\frac{12-2}{1\mathrm{s}}=10\mathrm{mA}$$

Assim:

$$i(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 10\mathrm{mA} & 0\le t\le 1\\ 0 & t>1\end{cases}$$



Energia armazenada num condensador



- **A potência fornecida ao condensador é:**

$$p = vi = vC\frac{dv}{dt}$$

- **Como *p = dW/dt*, a energia armazenada no campo eléctrico é:**

$$dw = pdt \Leftrightarrow \int_{W(t_0)}^{W(t)} dw = \int_{t_0}^{t} pdt = C\int_{t_0}^{t} v\frac{dv}{dt}dt = C\int_{v(t_0)}^{v(t)} vdv$$

$$\int_{W(t_0)}^{W(t)} dw = C\left(\frac{v^2}{2}\right)_{v(t_0)}^{v(t)}$$

$$W(t) - W(t_0) = \frac{1}{2}C\left(v(t)^2 - v(t_0)^2\right)$$

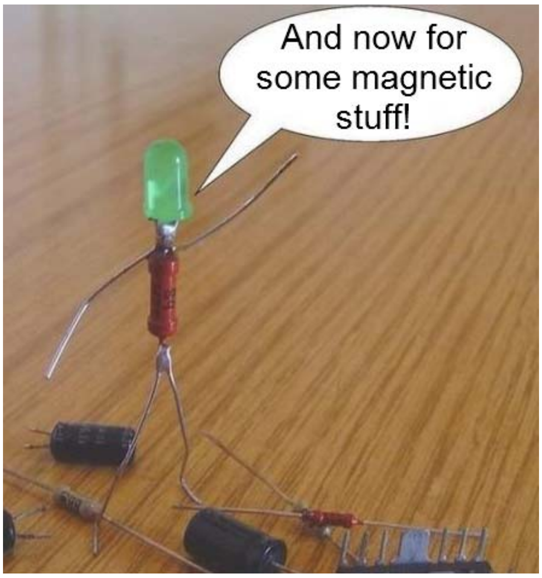
- **Se seleccionarmos t_0 de forma a que a tensão e a energia sejam ambos zero:**

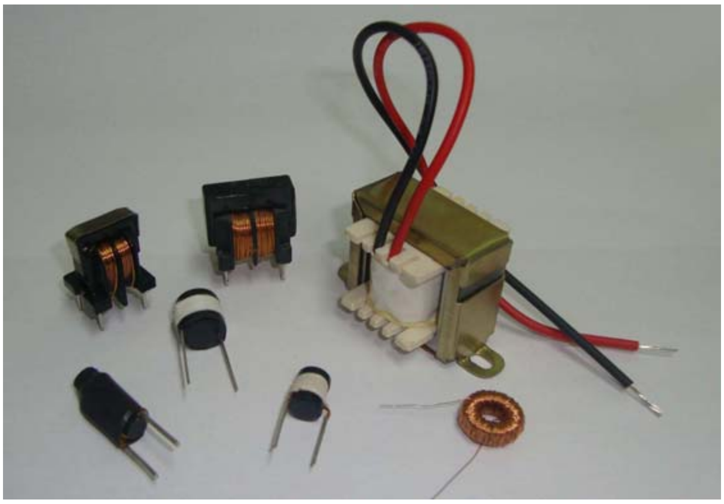
$$W(t) = \frac{1}{2}Cv(t)^2$$

Condensador ideal – aspectos a reter

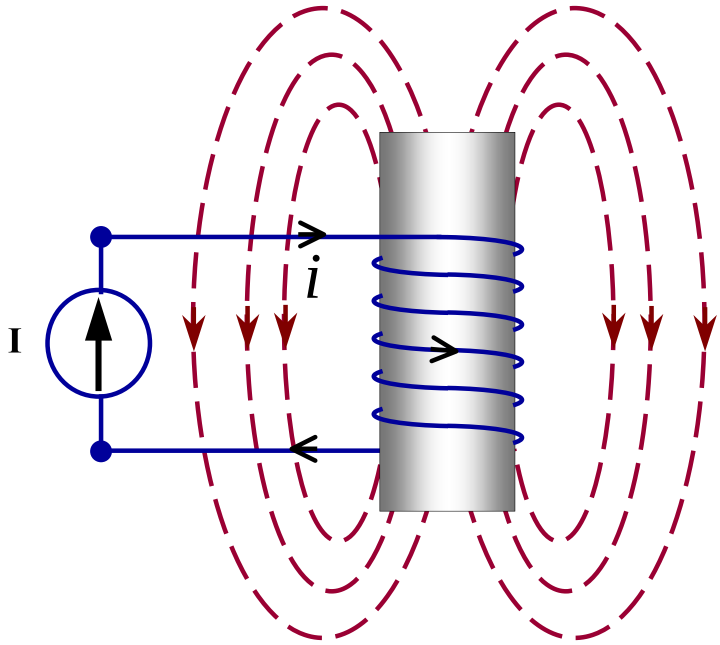
- **Se a tensão aos terminais de um condensador não varia com o tempo, então a corrente através dele é nula – o condensador é um circuito aberto em DC;**
- **Uma quantidade finita de energia pode ser armazenada num condensador mesmo quando *i = 0*;**
- **É impossível variar instantaneamente (i.e. em tempo zero) a tensão aos terminais de um condensador pois isso requer uma corrente infinita; Um condensador resiste a uma variação abrupta de tensão tal como uma mola resiste a uma mudança brusca no deslocamento;**
- **Ao contrário da resistência, um condensador não dissipa energia; apenas a armazena.**

Bobinas





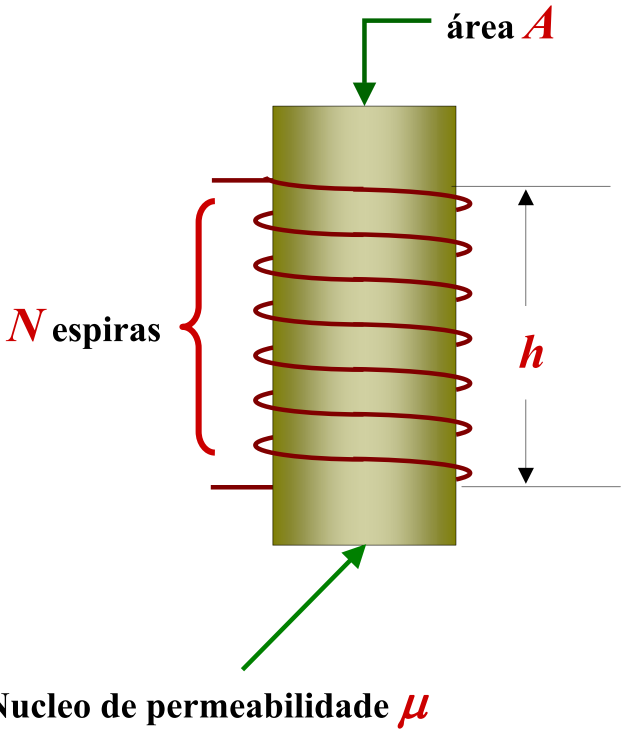
Bobina fisica



- **Constituída por um certo número de espiras de fio condutor enroladas.**

- **Quando atravessada por uma corrente, *i*, a bobina produz um campo magnético com intensidade de fluxo, *Φ*, determinada pela sua indutância, *L*.**

Bobina física



$$L = \mu \frac{N^2 A}{h}$$

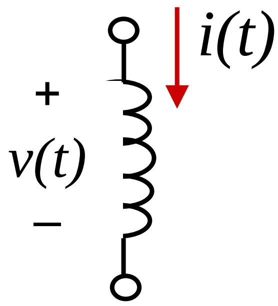
Expressão aproximada, válida só quando *h >> diâmetro*

Bobina – modelo matemático

- **A indutância da bobina define-se como:**

$$L = \frac{\phi}{i}$$

$$1Volt.1Segundo / 1Ampére = 1\ Henry$$



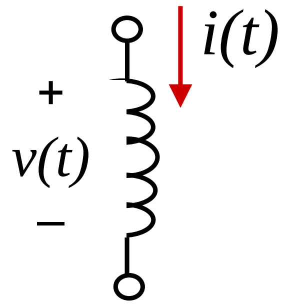
Símbolo

- **Uma relação idêntica é:**

$$v = L\frac{di}{dt}$$

Bobina – modelo matemático

$$\boxed{v = L\frac{di}{dt}}$$



Símbolo

- **Desta relação podemos desde logo concluir que:**
  - **Tensão é proporcional à taxa de variação da corrente;**
  - **Se a corrente é constante a tensão é nula - bobina é um curto-circuito para DC;**
  - **Uma variação brusca de corrente requer tensão infinita. Como não temos tensões infinitas, segue-se que uma bobina não permite variações bruscas de corrente.**

Relação corrente-tensão

$$v = L\frac{di}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad di = \frac{1}{L}vdt$$

- **Integrando ambos os lados da igualdade entre um instante inicial, t_0, e t, obtém-se**

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} di = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} vdt \quad \Leftrightarrow \quad i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} vdt$$

$$\boxed{i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} vdt + i(t_0)}$$

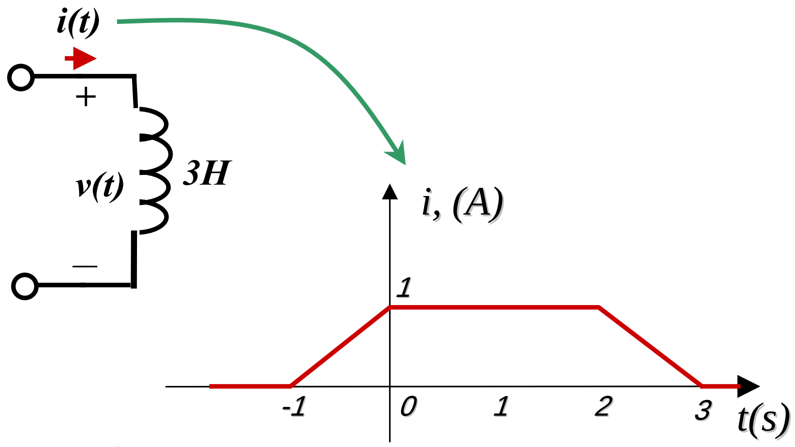
- **Em muitas situações pode seleccionar-se, $t_0 = -\infty$ e $i(-\infty) = 0$, o que reduz o integral a**

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} vdt$$

Note-se que todas estas relações assumem a Convenção de Sinais de Elemento Passivo – a corrente entra na bobina pelo terminal marcado pela polaridade (+).

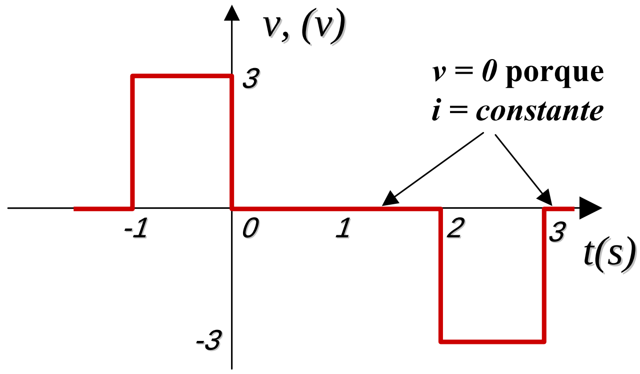
Exemplo 3

- **Efeito da velocidade de variação da corrente na tensão da bobina**



- **No intervalo *-1 < t < 0* a tensão será:**

$$v_1 = L\frac{di}{dt} = 3\frac{1\text{A}}{1\text{s}} = 3V$$

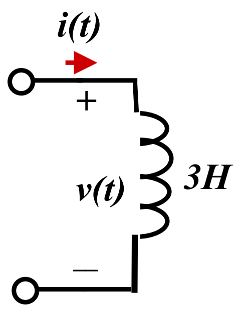


- **No intervalo *2 < t < 3* a tensão será:**

$$v_2 = L\frac{di}{dt} = 3\frac{\text{-1A}}{1\text{s}} = -3V$$

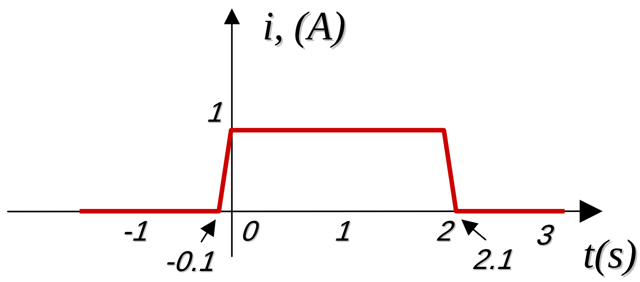
Exemplo 4

- **Se a corrente variar mais rapidamente teremos na bobina tensões de:**

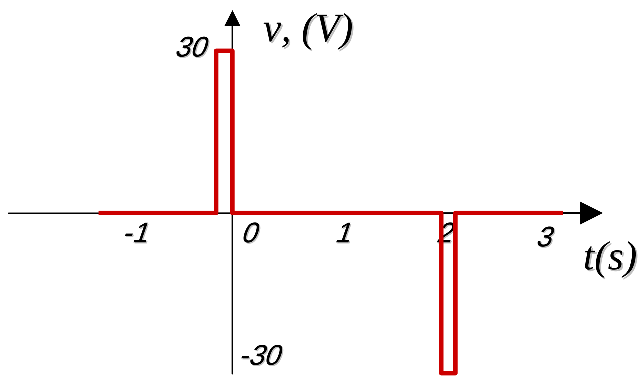


$$v_1 = L\frac{di}{dt} = 3\frac{1\text{A}}{0.1\text{s}} = 30V;$$

$$v_2 = -30V$$

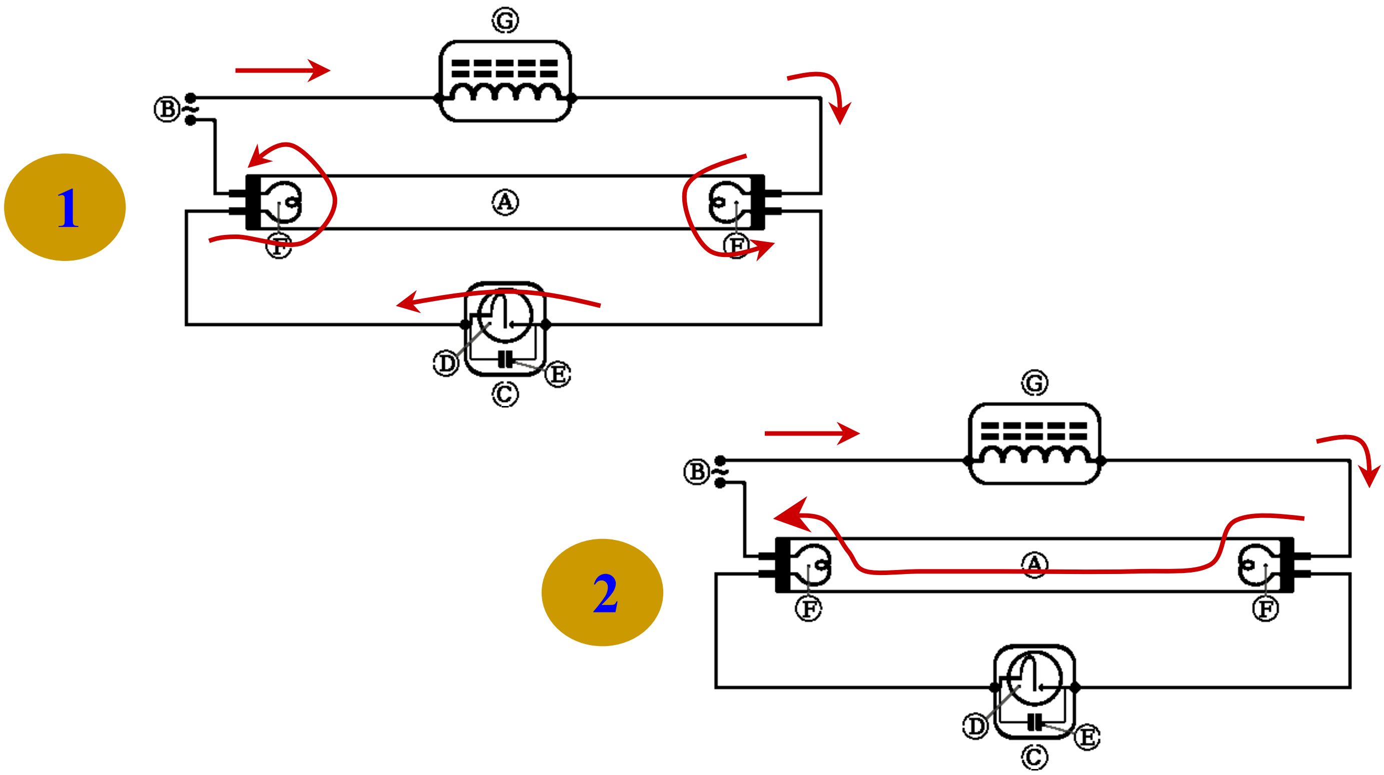


- **É por este motivo que a abertura de um interruptor num circuito indutivo causa, em geral, o aparecimento de um arco eléctrico – devido à tensão elevada que surge.**

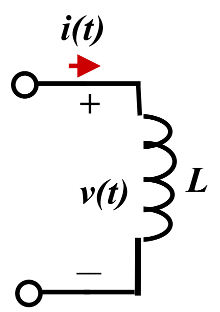


Curiosidade

- **O aparecimento de um tensão elevada devido à interrupção da corrente numa bobina constitui o principio de funcionamento das lâmpadas fluorescentes:**



Energia armazenada numa bobina



- **A potência fornecida à bobina é:**

$$p = vi = L\frac{di}{dt}i$$

- **Como $p=dW/dt$, a energia armazenada no campo magnético é:**

$$dw = pdt \Leftrightarrow \int_{W(t_0)}^{W(t)} dw = \int_{t_0}^{t} pdt = L\int_{t_0}^{t} i\frac{di}{dt}dt = L\int_{i(t_0)}^{i(t)} idi$$

$$\int_{W(t_0)}^{W(t)} dw = L\left(\frac{i^2}{2}\right)_{i(t_0)}^{i(t)}$$

$$W(t) - W(t_0) = \frac{1}{2}L\left(i(t)^2 - i(t_0)^2\right)$$

- **Se selecionarmos t_0 de forma a que a corrente e a energia sejam ambos zero:**

$$W(t) = \frac{1}{2}Li(t)^2$$

Bobina ideal – aspectos a reter

- A tensão aos terminais duma bobina é zero se a corrente que a atravessa não varia com o tempo – a bobina é um curto-circuito em DC;

- Uma quantidade finita de energia pode ser armazenada numa bobina mesmo quando $v = 0$ (i.e. a corrente é constante);

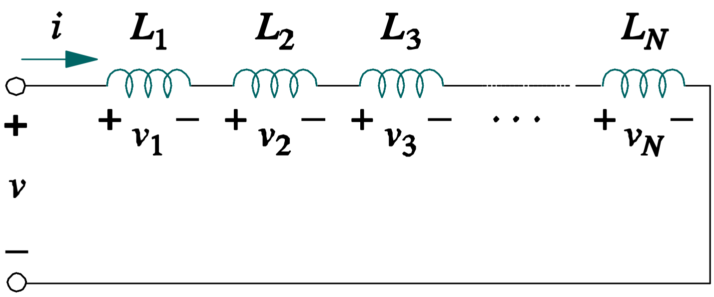
- É impossível variar instantaneamente (i.e. em tempo zero) a corrente aos terminais de uma bobina pois isso requer uma tensão infinita;
  Uma bobina resiste a uma variação abrupta de corrente assim como uma massa resiste a uma mudança brusca na velocidade;

- Ao contrário da resistência, uma bobina não dissipa energia; apenas a armazena.

Combinação de bobinas e condensadores;
Linearidade;
Dualidade.

Combinações de bobinas

Bobinas em série



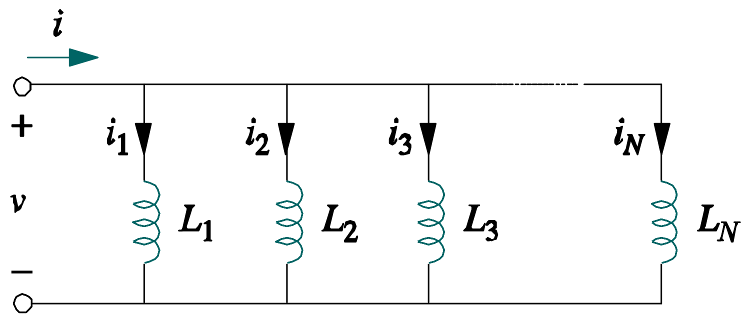
- **Num circuito série com bobinas a KVL mantêm-se válida.**

$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_N \\ &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt} + \ldots + L_N \frac{di}{dt} \\ &= \underbrace{\left(L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_N\right)} \frac{di}{dt} = L_{eq} \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

$$\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_N}$$

Bobinas em paralelo

- **Num circuito paralelo com bobinas a KCL também se mantêm válida.**



$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_N \\ &= \frac{1}{L_1}\int_{-\infty}^{t} v(t)dt + \frac{1}{L_2}\int_{-\infty}^{t} v(t)dt + \frac{1}{L_3}\int_{-\infty}^{t} v(t)dt + \ldots + \frac{1}{L_N}\int_{-\infty}^{t} v(t)dt \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \ldots + \frac{1}{L_N}\right)} \int_{-\infty}^{t} v(t)dt = \frac{1}{L_{eq}} \int_{-\infty}^{t} v(t)dt \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \ldots + \frac{1}{L_N}}$$

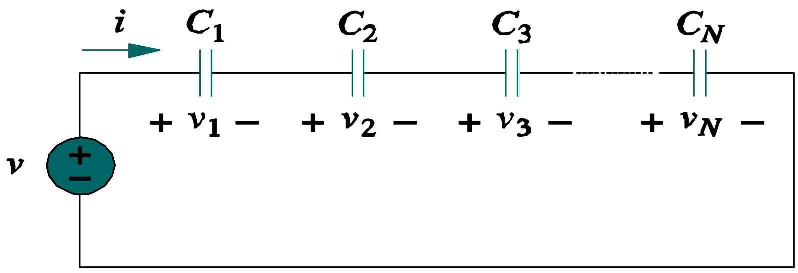
Nota: Para *N=2* a indutância equivalente é dada por:

$$L_{eq2} = \frac{L_1 . L_2}{L_1 + L_2}$$

Combinações de condensadores

Condensadores em série

- **Num circuito série com condensadores a KVL mantêm-se válida.**



$$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_N$$

$$= \frac{1}{C_1}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt + \frac{1}{C_2}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt + \ldots + \frac{1}{C_N}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N}\right)}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt = \frac{1}{C_{eq}}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt$$

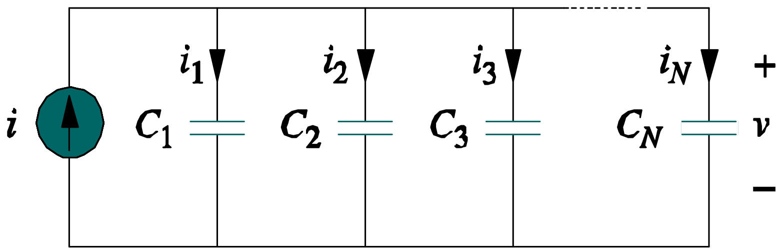
$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N}}$$

Nota: Para *N=2* a capacidade equivalente é dada por:

$$C_{eq2} = \frac{C_1.C_2}{C_1 + C_2}$$

Condensadores em paralelo

- **Num circuito paralelo com condensadores a KCL também se mantêm válida.**



$$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_N$$

$$= C_1\frac{dv}{dt} + C_2\frac{dv}{dt} + \ldots + C_N\frac{dv}{dt}$$

$$= \underbrace{(C_1 + C_2 + \ldots + C_N)}\frac{dv}{dt} = C_{eq}\frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots + C_N}$$

- **Condensadores em série associam-se como resistências (ou bobinas) em paralelo. Condensadores em paralelo associam-se como resistências em série.**

Linearidade

- Circuitos com bobines e condensadores são também lineares pois as relações entre tensão e corrente nestes elementos são lineares.

$$v = L\frac{di}{dt}$$

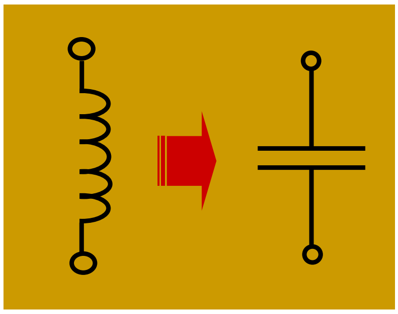
- Se i aumentar do factor k, v aumenta do mesmo factor;

- Raciocínio idêntico mostra que o condensador é também linear;

- Correntes iniciais nas bobines e tensões iniciais nos condensadores devem ser tratadas como fontes independentes (de corrente e tensão);

- Principio da Sobreposição e teoremas de Thevenin e Norton são também aplicáveis.

Dualidade



- Quando enunciamos antes as características importantes do condensador ideal e da bobina ideal demos conta da semelhança dessas características;

- Podemos obter as características do condensador substituindo apenas algumas palavras-chave nas características da bobina:
  - bobina → condensador
  - indutância → capacidade
  - corrente → tensão
  - curto-circuito → circuito aberto

- Esta propriedade resulta da característica dual destes elementos de circuito.

Dualidade

● **Circuitos Duais** – Se as **equações de malha** que caracterizam um deles têm **a mesma forma matemática** que as **equações dos nós** que caracterizam o outro;

● **Utilidade prática da dualidade**

Permite poupar trabalho na análise de alguns circuitos: os resultados da análise de um circuito são facilmente extensíveis aos seu circuito dual.