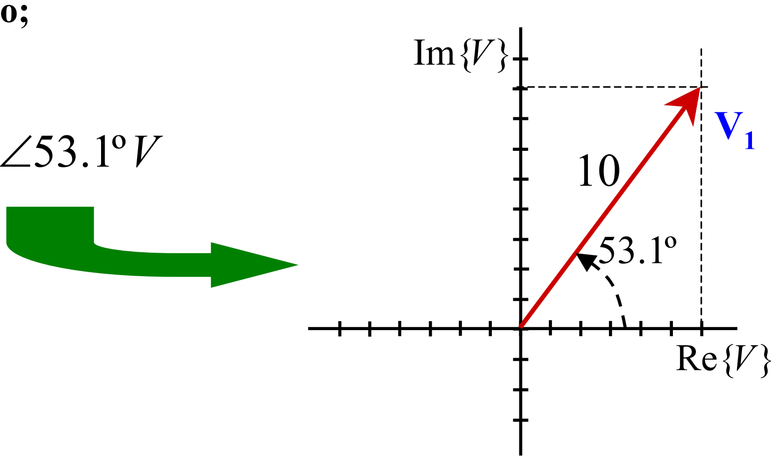
Diagramas fasoriais

Diagramas fasoriais

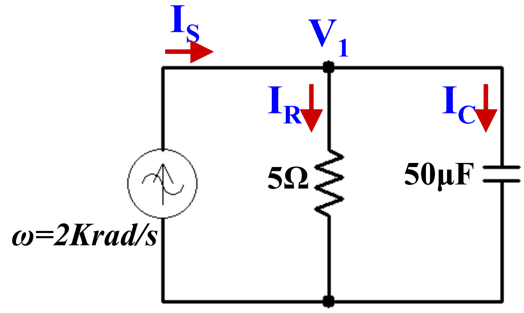
- **Fasores são números complexos, e como tal podem ser representados graficamente no plano complexo;**

$$\mathbf{V}_1 = 6 + j8 = 10\angle 53.1^{o}\, V$$



- **Os diagramas de fasores, ou fasoriais, permitem**
  - **evidenciar as relações de fase entre as tensões e correntes num circuito;**
  - **efectuar vectorialmente operações entre fasores (soma, subtração, multiplicação, divisão).**

Exemplo 8 – Obter vectorialmente a corrente $\mathbf{I}_s$, supondo $\mathbf{V}_1 = 1\angle 0^o\, V$



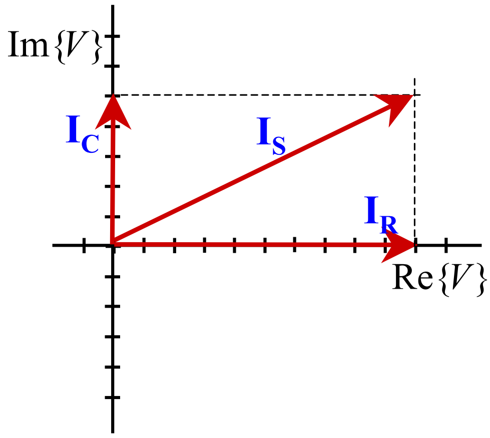
Calculemos primeiro $\mathbf{Z}_c$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{(2000)(50)(10^{-6})} =$$

$$-j10 = 10\angle -90^o\,\Omega$$

$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_C} = \frac{1\angle 0^o}{10\angle -90^o} = 0.1\angle 90^o \;\; A$$

$$\mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{V}_1}{R} = \frac{1\angle 0^o}{5} = 0.2\angle 0^o \;\; A$$



Do diagrama fasorial vemos que

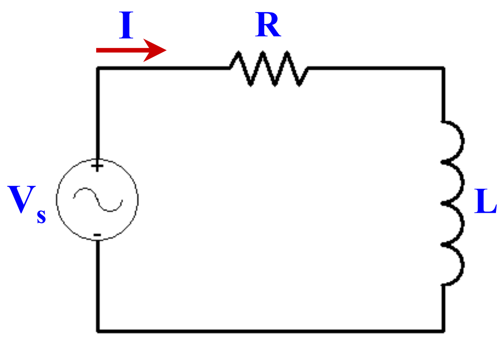
$$\mathbf{I}_S = (0.2 + j0.1) \;\; A$$

Resposta em frequência

Resposta em frequência

● **Em muitos problemas da Engenharia interessa obter a resposta de um circuito em função da frequência;**

● **A resposta em corrente do circuito RL é expressa pela relação matemática que existe entre a corrente I e o valor da função forçadora $\mathbf{V}_S$**



Já sabemos que essa relação é

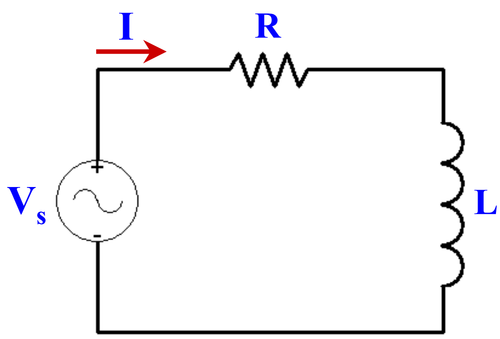
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_S}{R + j\omega L}$$

● **Mas quando se trata da Resposta em Frequência a variável independente que devemos considerar é a frequência (ω).**

Sistemas Electrónicos – 2020/2021

Resposta em frequência

● **A resposta (I) em função da frequência (ω) à função de excitação sinusoidal ($\mathbf{V}_S$) é expressa pela função**



$$\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}_S} = \mathbf{Y}(\omega) = \frac{1}{R + j\omega L}$$

A esta função chamamos Função de Transferência.

Esta função complexa é habitualmente representada em módulo e fase.

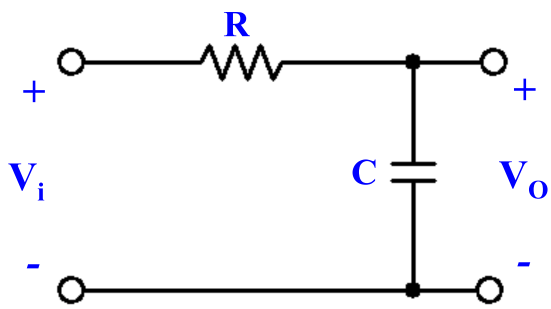
$$\mathbf{Y}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle\left(-arctg\,\frac{\omega L}{R}\right)$$

Resposta em frequência do circuito RC (passa-baixo)

- **Consideremos o circuito RC. Pretendemos obter a resposta Vo para uma excitação sinusoidal V_i, em função da frequência (ω).**

Usando a relação do divisor de tensão, podemos escrever

$$\mathbf{V_o}(\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C}\mathbf{V_i}(\omega)$$



Neste caso, a função de transferência é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V_o}(\omega)}{\mathbf{V_i}(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Notar que a função de transferência é adimensional

em módulo e fase…

$$\left|\mathbf{H}(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \qquad \angle\mathbf{H}(\omega) = -arctg\left(\omega RC\right)$$

Resposta em frequência do circuito RC (passa-baixo)

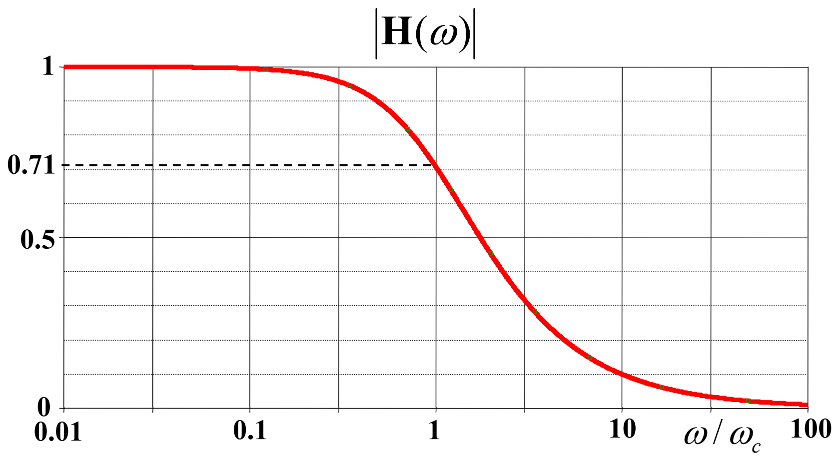
$$\left|\mathbf{H}(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \qquad \angle\mathbf{H}(\omega) = -arctg\left(\omega RC\right)$$

- **Na representação em módulo e fase, a função de transferência indica a atenu-ação e o desfasamento introduzido pelo circuito na sinusóide de frequência ω.**

- **Comportamento na frequência**
  - **Para frequências muito baixas** $\left|\mathbf{H}(0)\right| \approx 1 \quad \angle\mathbf{H}(0) \approx 0$
    pelo que $Vo \approx Vi$
  - **Para $\omega = 1/RC$, temos** $\left|\mathbf{H}(\omega_c)\right| = 1/\sqrt{2} \qquad \angle\mathbf{H}(\omega_c) = -45^o$
  - **Para frequências muito elevadas** $\left|\mathbf{H}(\infty)\right| = 0 \quad \angle\mathbf{H}(\infty) = -90^o$
    pelo que $Vo \approx 0$

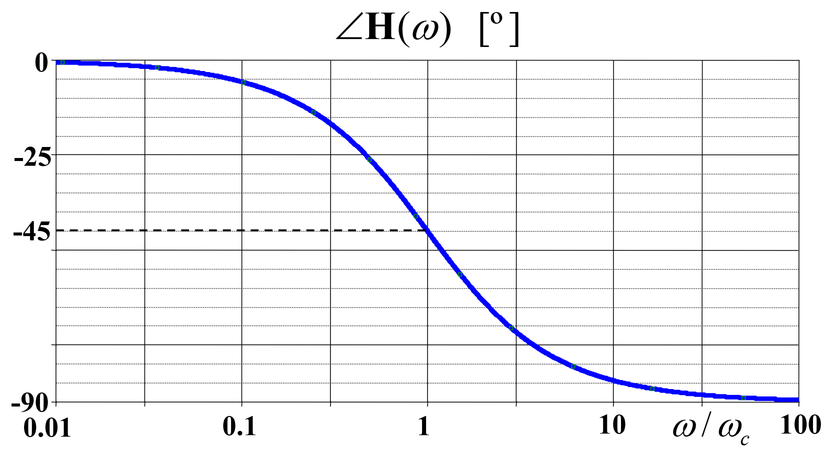
Assim, este circuito é conhecido como filtro passa-baixo.

Comportamento na frequência do RC passa baixo



Frequência de corte

$$\omega_c = \frac{1}{\mathrm{RC}}$$



Notar:

- **Eixo X normalizado;**
- **Escalas logarítmicas em X e Y.**

Exemplo 9 – Filtro passa-baixo simples

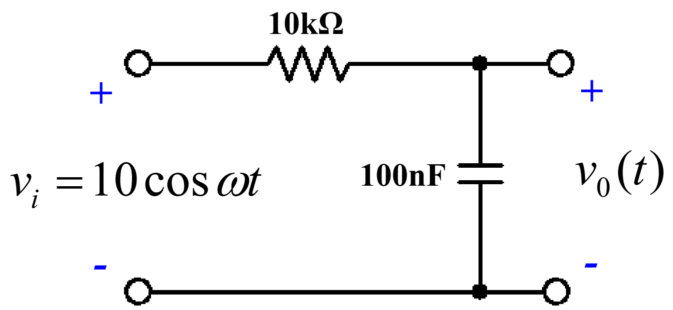
$$\mathbf{V_i} = 10\angle 0^{o}\,V$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V_0}}{\mathbf{V_i}}$$

$$\mathbf{V_0} = \mathbf{V_i}\mathbf{H}(\omega) = 10\mathbf{H}(\omega)$$

$$\mathbf{V_0} = 10\left|\mathbf{H}(\omega)\right|\angle\mathbf{H}(\omega)$$

$$v_o(t) = 10\left|\mathbf{H}(\omega)\right|\cos\left(\omega t + \angle\mathbf{H}(\omega)\right)$$



$$\omega_c = \frac{1}{RC} = 1000\mathrm{rad/s}$$

ω	$v_o(t)$
0	10
$0.1\omega_c$	$9.95\cos(0.1\omega_c t - 5.71^o)$
ω_c	$7.07\cos(\omega_c t - 45^o)$
$10\omega_c$	$3.02\cos(10\omega_c t - 84.3^o)$
∞	0

Resposta em frequência do circuito RC passa-alto

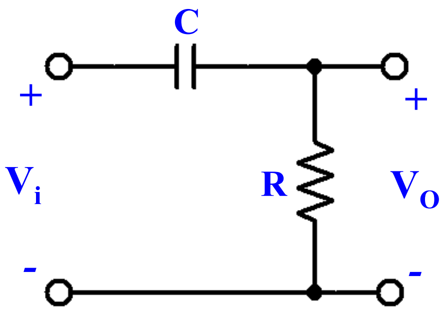
- **Trocando as posições de R e C, obtemos o correspondente filtro passa-alto.**

$$\mathbf{H}(\omega)=\frac{\mathbf{V_O}(\omega)}{\mathbf{V_i}(\omega)}=\frac{R}{R+1/j\omega C}=\frac{1}{1+1/j\omega RC}$$

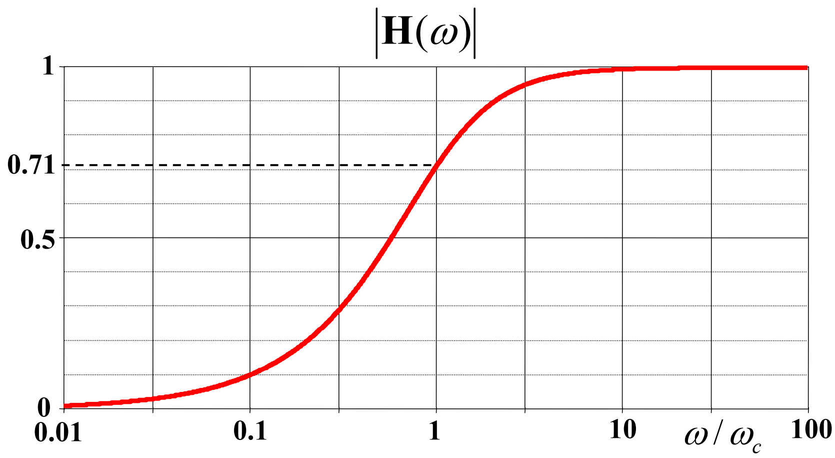
$$\omega_c=\frac{1}{RC}$$

$$|\mathbf{H}(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega_c/\omega)^2}}$$

$$\angle\mathbf{H}(\omega)=arctg(\omega_c/\omega)$$

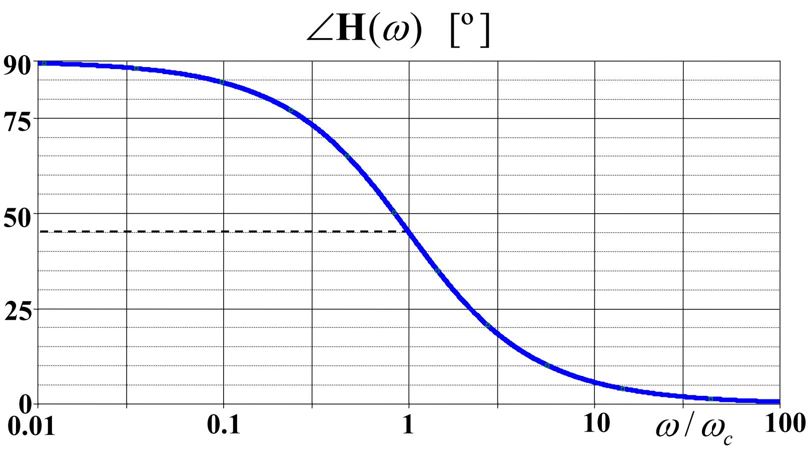


Comportamento na frequência do RC passa alto



Frequência de corte

$$\omega_c=\frac{1}{\mathrm{RC}}$$



Notar:

- **Eixo X normalizado;**
- **Escalas logarítmicas em X e Y.**

Potência em regime sinusoidal

Valor eficaz

Potência

- **Potência instantânea**

$$p(t) = v(t)i(t)$$

- **Potência média - é a média da potência instantânea calculada num período:**

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$$

Potência média em regime sinusoidal

- **Admitamos que a tensão e a corrente num dado elemento de circuito é dada por:**

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad \textbf{e} \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

- **A potência instantânea nesse elemento é portanto**

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \theta)\cos(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta + \phi)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos\alpha\cos\beta = \\ &= 1/2\cos(\alpha+\beta) + \\ &+ 1/2\cos(\alpha-\beta)\end{aligned}}$$

- **Ou seja, *p(t)* inclui duas parcelas**
  - **Uma que é constante e independente do tempo;**
  - **Outra que varia ao dobro da frequência de operação**

Potência média em regime sinusoidal

- **A potência média é portanto**

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta + \phi)\right] dt$$

- **Como o valor médio de um coseno (ou seno) num período é zero, segue-se que**

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$$

Apliquemos este resultado às situações em que o elemento em causa é

- **uma resistência;**
- **um elemento reactivo: bobina ou condensador.**

Potência absorvida por uma resistência

$$P_R = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$$

- **Como numa resistência**
  - **a corrente e a tensão estão em fase:** $\theta - \phi = 0$
  - **e** $V_m = I_m R$

então

$$P_R = \frac{1}{2} I_m{}^2 R = \frac{1}{2} \frac{V_m{}^2}{R}$$

Potência absorvida por uma bobina ou um condensador

- **Numa bobina temos** $\theta - \phi = 90^\circ$

- **Numa condensador temos** $\theta - \phi = -90^\circ$

Em qualquer dos casos temos $\cos(\theta - \phi) = 0$

logo $P_L = 0$ **e** $P_C = 0$

A potência média fornecida a um circuito contendo apenas bobinas e condensadores é zero.

Valor eficaz

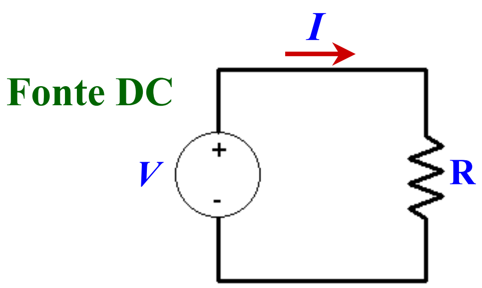
- Como sabemos, a energia elétrica chega a nossas casas na forma de uma tensão alternada sinusoidal com o valor de 220V. 220V é o chamado valor eficaz da tensão;

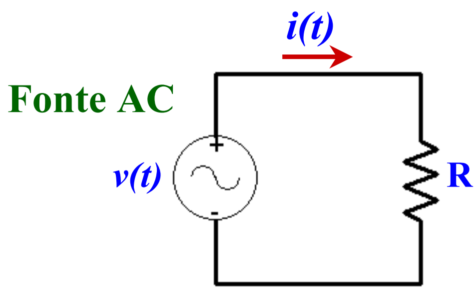
- O valor eficaz de uma tensão ou corrente periódica, é uma medida da eficácia dessa tensão ou corrente de fornecer potência a uma carga;

Valor eficaz de um corrente periódica: é igual ao valor da corrente DC que, ao fluir através de uma dada resistência, fornece a mesma potência média que a corrente periódica.

Valor eficaz

Vejamos como calcular o valor eficaz de uma corrente (ou tensão) sinusoidal atendendo à definição.





$$P_{DC} = I^2 R$$

$$P_{AC} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2 R dt$$

Igualando as duas potências, definimos o valor eficaz da corrente

$$I_{eff}{}^2 R = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2 R dt \quad \Rightarrow \quad I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2 dt}$$

Valor eficaz

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2\,dt}$$

- **O valor eficaz é, assim, obtido tirando a raiz quadrada à média do quadrado da corrente. Por esse motivo é habitualmente chamado de valor RMS (*Root-Mean-Square*).**

- **Se *i(t)* for a corrente sinusoidal**

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) \qquad \textbf{com} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

O seu respectivo valor eficaz será

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^{\,2}\cos^2(\omega t + \phi)\,dt}$$

Valor eficaz

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^{\,2}\cos^2(\omega t + \phi)\,dt}$$

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\frac{I_m^{\,2}}{2}\int_0^T [1 + \cos(2\omega t + 2\phi)]\,dt}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

$$= I_m\sqrt{\frac{\omega}{4\pi}\int_0^{2\pi/\omega}[1 + \cos(2\omega t + 2\phi)]\,dt} \qquad = I_m\sqrt{\frac{\omega}{4\pi}[t]_0^{2\pi/\omega}}$$

$$\Rightarrow \quad I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Valor eficaz

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

- **O valor eficaz é portanto independente da fase da corrente ou tensão;**

- **A corrente $\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi)$ tem o valor eficaz de *1A*, e por isso fornece a uma resistência a mesma potência média que uma corrente DC de *1A*;**

- **Notar que o factor $\sqrt{2}$ só é válido para ondas sinusoidais.**