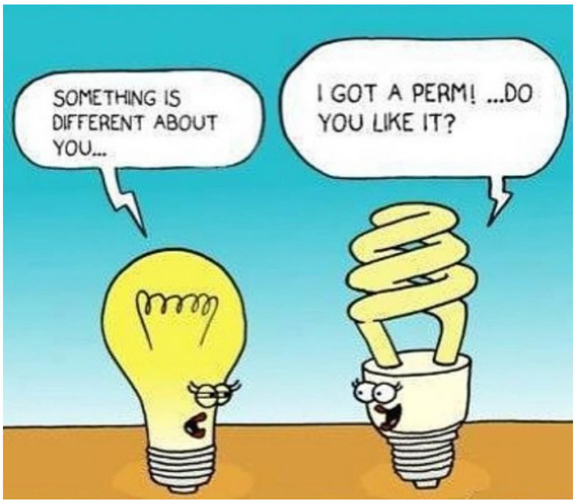
Resolução de Exercícios II



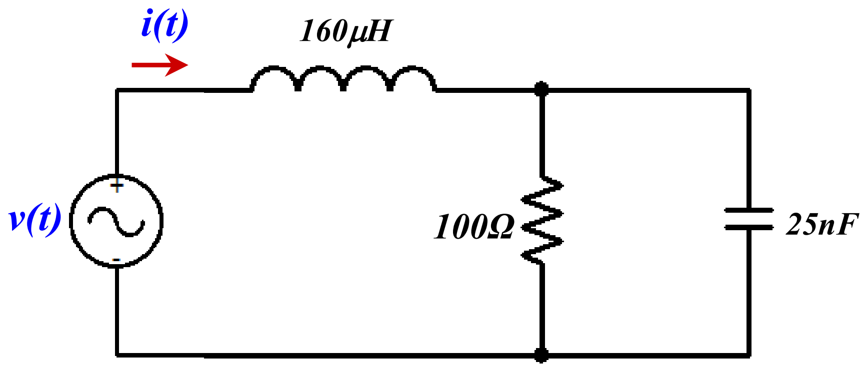
Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

Circuitos em regime sinusoidal

1 – Para o circuito representado, calcule

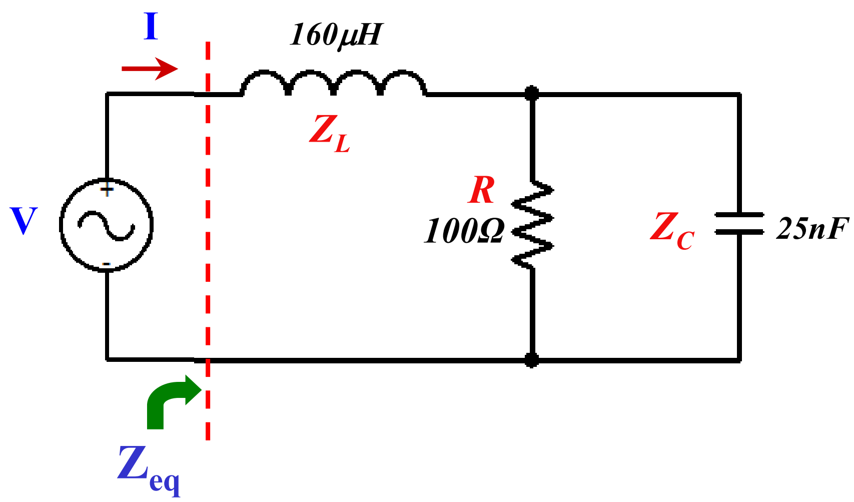
a) a frequência para a qual a tensão sinusoidal *v(t)* está em fase com *i(t)*;

b) a impedância total *vista* pela fonte *v(t)* a essa frequência.



V-1

Com fasores:



I e **V** relacionam-se por

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{eq}}$$

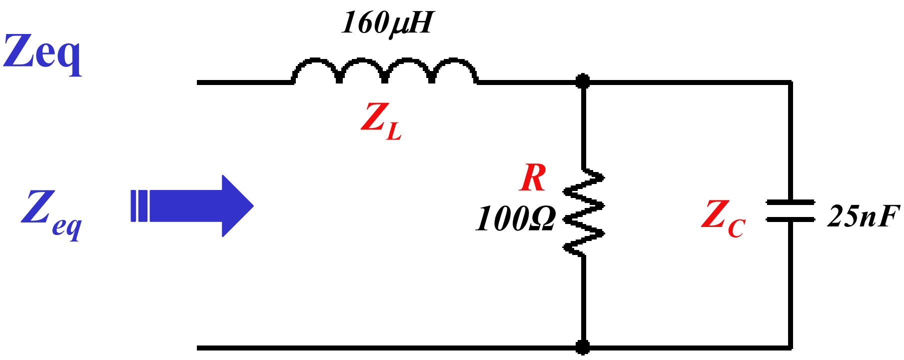
Para que os fasores **I** e **V** tenham o mesmo angulo (de forma a ter *v(t)* e *i(t)* em fase) é preciso que Zeq seja um numero real.

Zeq tem de ser, portanto, uma impedância resistiva.

a) Calculemos então Zeq

$$Z_L = j\omega L$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$



$$Z_{eq} = Z_L + \left(R // Z_C\right) = j\omega L + \frac{R\left(1/ j\omega C\right)}{R + \left(1/ j\omega C\right)}$$

Multiplicando a fracção pelo complexo conjugado do denominador e simplificando, obtemos

$$Z_{eq} = \frac{R + j\omega\left[\left(\omega^2 R^2 C^2 + 1\right)L - R^2 C\right]}{\omega^2 R^2 C^2 + 1}$$

$$Z_{eq} = \frac{R + j\omega\left[\left(\omega^2 R^2 C^2 + 1\right)L - R^2 C\right]}{\omega^2 R^2 C^2 + 1}$$

Para que Z_{eq} seja real, é preciso que a parte imaginária seja nula, donde

$$\omega\left[\left(\omega^2 R^2 C^2 + 1\right)L - R^2 C\right] = 0$$

portanto

$$\omega = 0 \quad \vee \quad \left[\left(\omega^2 R^2 C^2 + 1\right)L - R^2 C\right] = 0$$

Resolvendo a segunda igualdade em ordem a ω…

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{R^2 C^2}}$$

L = 160μH,
R = 100Ω
C= 25nF

$$\omega = 300 Krad/s$$

$$f = 47.7 KHz$$

b) impedância à frequência ω calculada?

$$Z_{eq} = \frac{R + j\omega\left[\left(\omega^2R^2C^2+1\right)L - R^2C\right]}{\omega^2R^2C^2+1}$$

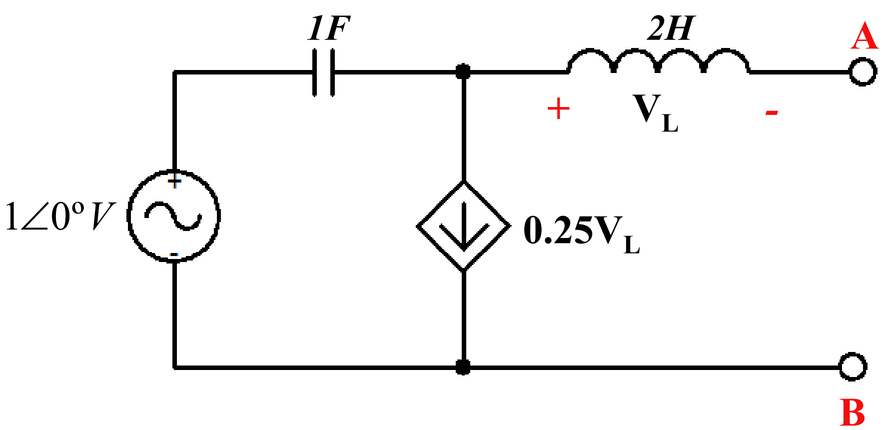
A *300krad/s* a parte imaginária da impedância é nula pelo que fica

$$Z_{eq(300Krad/s)} = \frac{R}{\left(0.3x10^6\right)^2R^2C^2+1}$$

Substituindo valores obtemos

$$Z_{eq(300Krad/s)} = 64\Omega$$

2 – Calcule o equivalente de Norton entre os terminais A e B, considerando *ω = 1rad/s*.

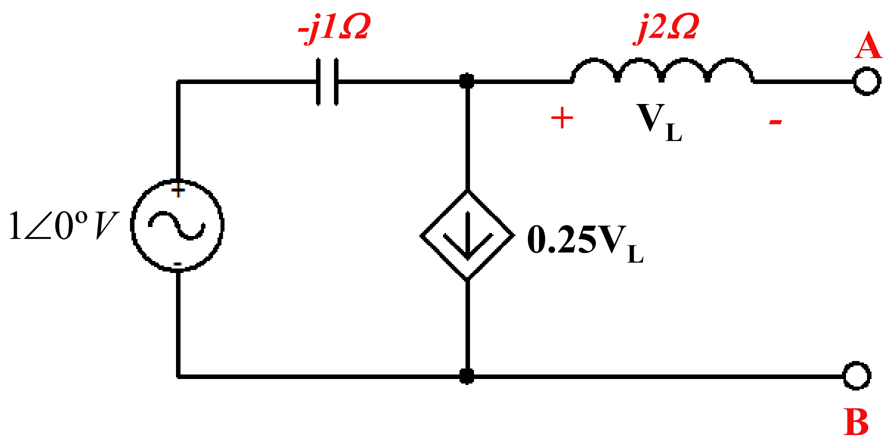


V-3

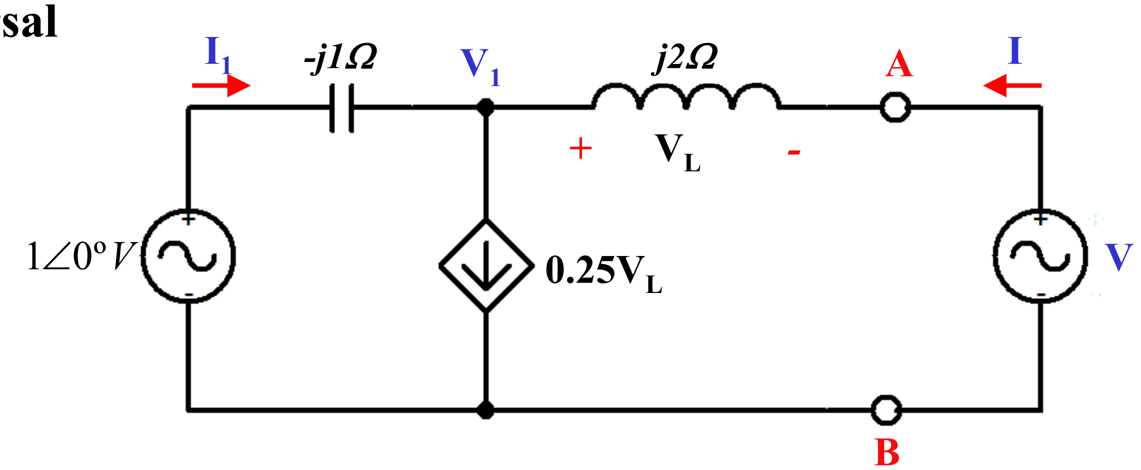
Calculamos primeiro as impedâncias do condensador e da bobina

$$\omega = 1 rad/s \qquad \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{1\text{x}1} = -j1\Omega$$

$$j\omega L = j1\text{x}2 = j2\Omega$$



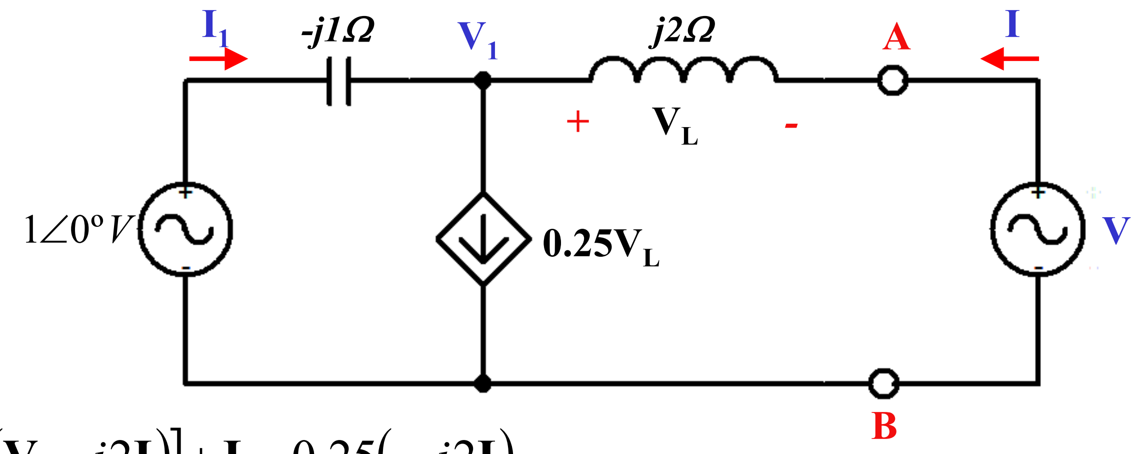
Calculamos agora o equivalente de Thévenin pelo método universal



Usando KCL no nó V_1: $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I} = 0.25\mathbf{V}_L \quad \Leftrightarrow \frac{1-\mathbf{V}_1}{-j} + \mathbf{I} = 0.25\mathbf{V}_L$

Sabendo que $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V} + \mathbf{V}_L$ **e** $\mathbf{V}_L = -j2\mathbf{I}$

Substituindo estas igualdades em cima $j[1-(\mathbf{V}-j2\mathbf{I})] + \mathbf{I} = 0.25(-j2\mathbf{I})$



$$j[1-(\mathbf{V}-j2\mathbf{I})]+\mathbf{I}=0.25(-j2\mathbf{I})$$

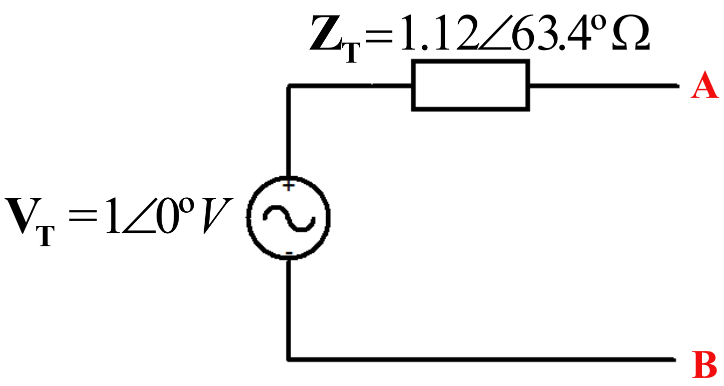
De onde se obtém $\mathbf{V}=(0.5+j)\mathbf{I}+1$

Dos coeficientes da equação tiramos

$$\mathbf{Z_T}=(0.5+j)\Omega \quad \text{e} \quad \mathbf{V_T}=1V$$

ou $$\mathbf{Z_T}=1.12\angle 63.4^{\circ}\,\Omega \quad \text{e} \quad \mathbf{V_T}=1\angle 0^{\circ}\,V$$

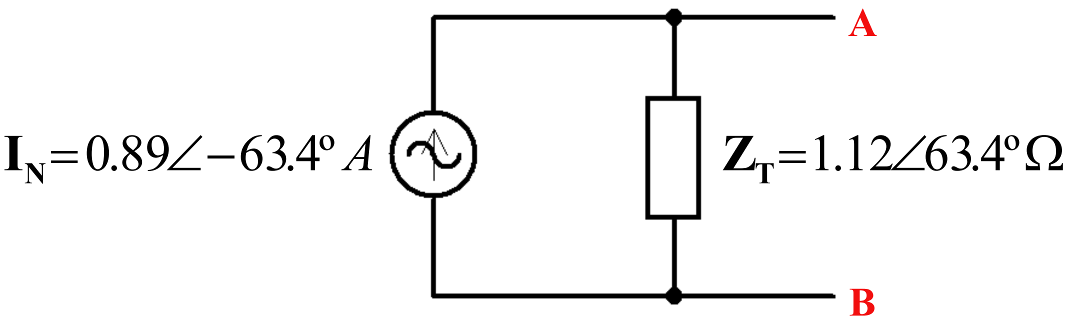
Equivalente de Thévenin



A corrente do equivalente de Norton obtém-se por:

$$\mathbf{I_N}=\frac{\mathbf{V_T}}{\mathbf{Z_T}}$$

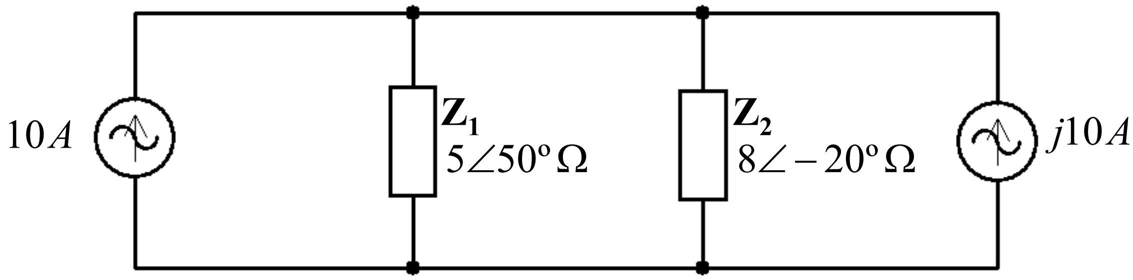
Equivalente de Norton



3 – Relativamente ao circuito abaixo, calcule as potências médias…

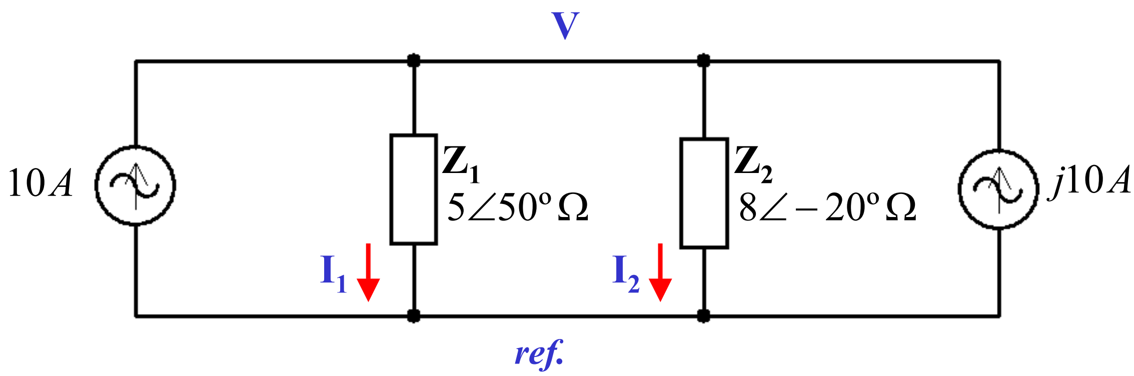
a) … dissipadas em $\mathbf{Z_1}$ e $\mathbf{Z_2}$;

b) … fornecidas pelas fontes.



V-4

Usando análise nodal, começamos por determinar a tensão V no circuito



$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 10 + j10 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathbf{V}}{5\angle 50^{\circ}} + \frac{\mathbf{V}}{8\angle -20^{\circ}} = 10(1+j)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{8/5\angle -70^{\circ}\,\mathbf{V}}{8\angle -20^{\circ}} + \frac{\mathbf{V}}{8\angle -20^{\circ}} = 10\sqrt{2}\angle 45^{\circ}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{V}\left(1 + 8/5\angle -70^{\circ}\right) = 80\sqrt{2}\angle 25^{\circ}$$

$$\Leftrightarrow \ \mathbf{V}\left(1+8/5\angle -70^{o}\right)=80\sqrt{2}\angle 25^{o}$$

$$\Leftrightarrow \ \mathbf{V}\left[1+\left(8/5\right)\left(\cos(-70^{o})+j\sin(-70^{o})\right)\right]=80\sqrt{2}\angle 25^{o}$$

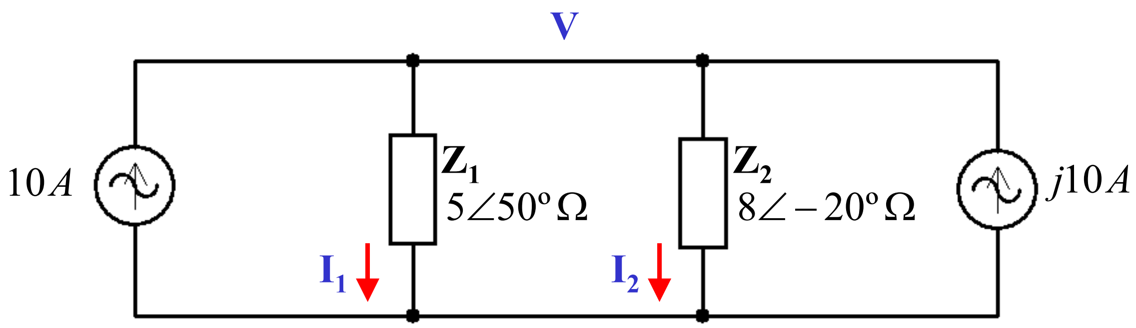
$$\Leftrightarrow \ \mathbf{V}\left(1.55-j1.5\right)=80\sqrt{2}\angle 25^{o}$$

$$\Leftrightarrow \ \mathbf{V}=\frac{80\sqrt{2}\angle 25^{o}}{2.16\angle -44.1^{o}} \ = 52.5\angle 69.1^{o}\,V$$

A potência média num elemento de circuito é dada por

$$P=\frac{1}{2}V_m I_m \cos\left(\theta-\phi\right)$$

Sendo θ e ϕ as fases da tensão e corrente, respectivamente.



Note-se que para obter as potência em $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ não precisamos de calcular as correntes respectivas, dado que:

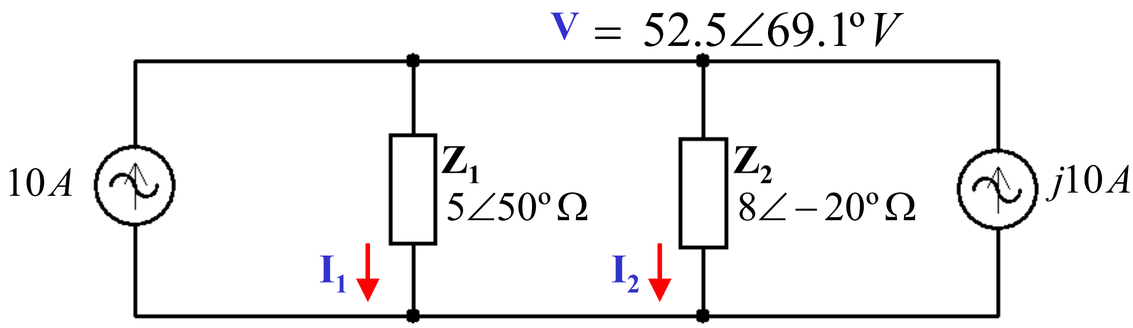
$$\Leftrightarrow \ \mathbf{Z}=\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \ \Leftrightarrow \ |Z|\angle Z=\frac{V_m}{I_m}\angle\left(\theta-\phi\right)$$

Pelo que

$$I_m=\frac{V_m}{|Z|} \quad \text{e} \quad \left(\theta-\phi\right)=\angle Z$$

e portanto

$$P=\frac{1}{2}V_m I_m \cos\left(\theta-\phi\right) \ =\frac{1}{2}\frac{V_m^{\ 2}}{|Z|}\cos\left(\angle Z\right)$$



$$P_1 = \frac{1}{2}\frac{V_m{}^2}{|Z_1|}\cos(\angle Z_1) = \frac{1}{2}\frac{52.5^2}{5}\cos(50^{o}) = 177.2W$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\frac{52.5^2}{8}\cos(-20^{o}) = 161.9W$$

Potências absorvidas

$$P_{10} = \frac{1}{2}(52.5)(10)\cos(69.1^{o}-0) = 93.6W$$

$$P_{j10} = \frac{1}{2}(52.5)(10)\cos(69.1^{o}-90^{o}) = 245.3W$$

Potências fornecidas

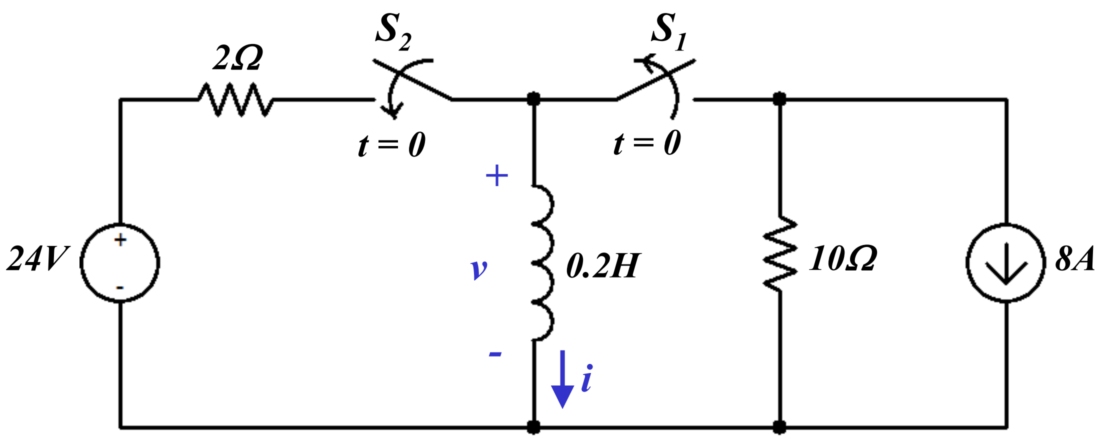
Circuitos RL e RC em regime transitório

4 – No circuito abaixo, S_1 esteve fechado e S_2 esteve aberto durante muito tempo. Em $t = 0$ os dois interruptores mudam de estado. Calcule:

a) $i(t)$ para $t \geq 0$;

b) O tempo que é preciso esperar até que a tensão na bobina atinja o valor $24V$.

V-9



a) $i(t) = ?$

Em regime estacionário a corrente na bobina vai ser $\neq 0$. O que vamos calcular é portanto a resposta completa, dada por

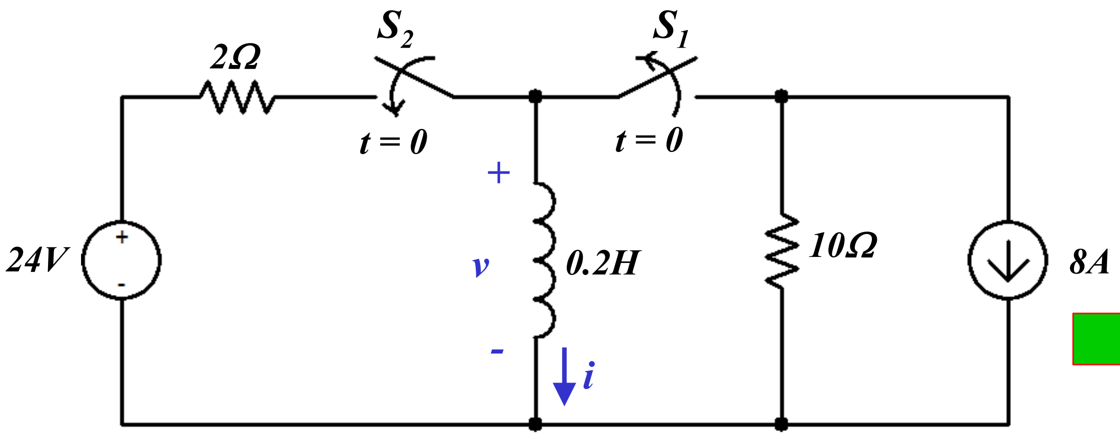
$$i(t) = i_f + i_n$$

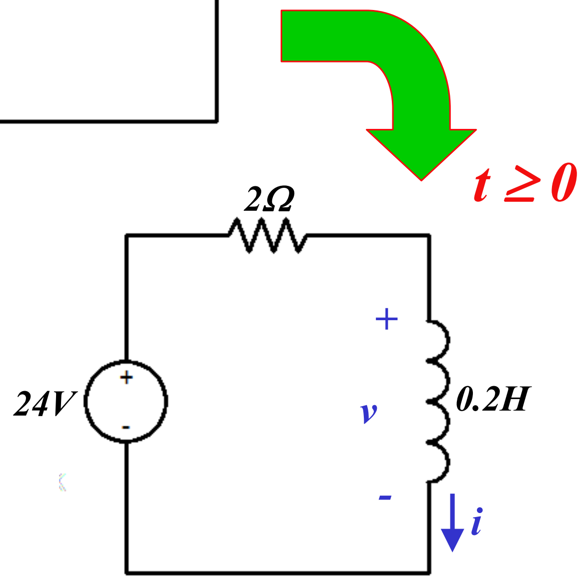
i_f **é a resposta forçada e corresponde a** $i(\infty)$

i_n **é a resposta natural e tem a forma** $i_n = Ke^{-t/\tau}$

$$i(t) = i(\infty) + Ke^{-t/\tau}$$

Consideremos o circuito equivalente para $t \geq 0$



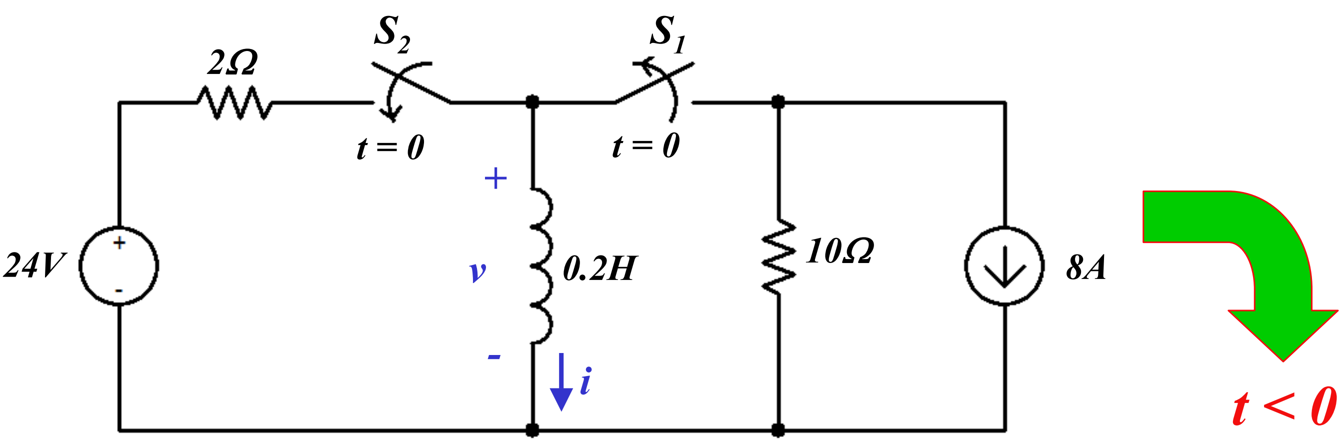


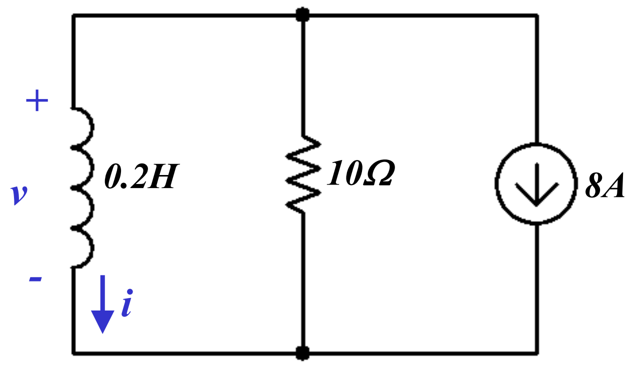
$$i(\infty) = \frac{24}{2} = 12A$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.2}{2} = 0.1s$$

Portanto $\quad i(t) = i(\infty) + Ke^{-t/\tau} = 12 + Ke^{-t/0.1}$

Para calcular K precisamos do valor de $i(0^+) = i(0^-)$





$$i(0^-) = -8A = i(0^+)$$

$$12 + Ke^{-0/0.1} = -8 \quad \rightarrow \quad K = -20$$

$$i(t) = 12 - 20e^{-10t} \quad [\text{A}]$$

b) Pretendemos agora determinar o instante t_1, tal que $v(t_1) = 24V$

Calculemos primeiro então $v(t)$

$$v(t) = L\frac{di}{dt} = 0.2\frac{d}{dt}\left(12 - 20e^{-10t}\right) = 0.2(-20)(-10)e^{-10t}$$

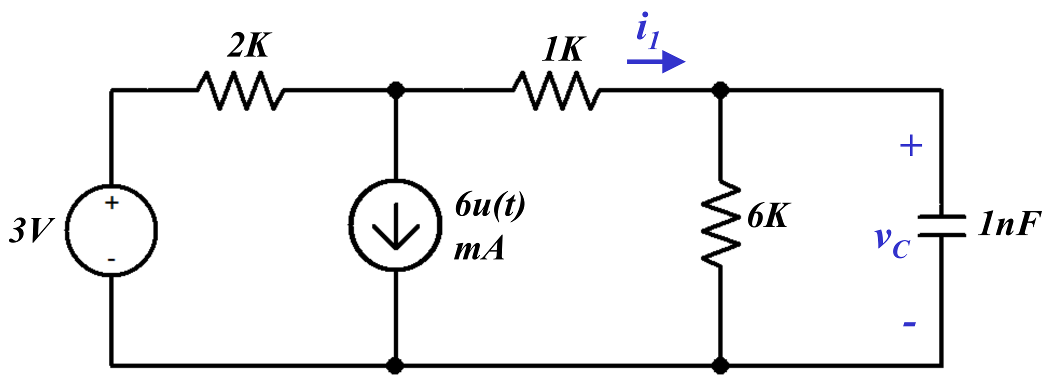
$$v(t) = 40e^{-10t} \ \text{[V]}$$

E agora obtemos t_1

$$24 = 40e^{-10t_1} \Leftrightarrow e^{10t_1} = \frac{40}{24} \Leftrightarrow t_1 = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{40}{24}\right)$$

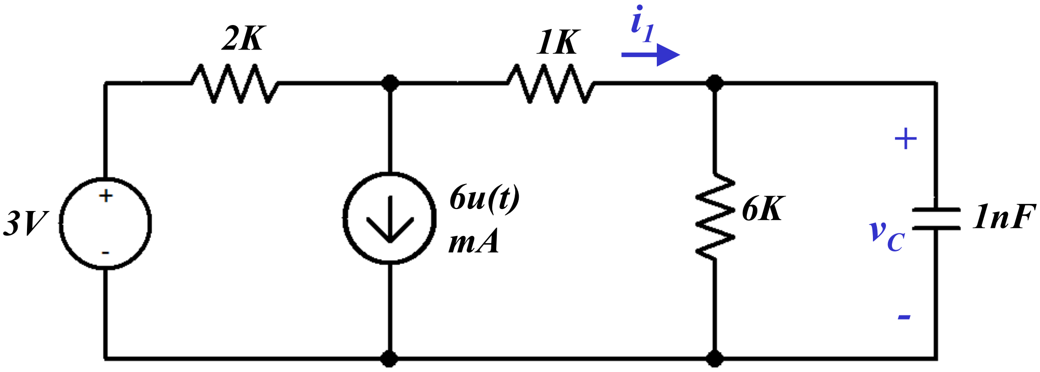
$$t_1 = 51.1ms$$

5 – O circuito abaixo inclui uma fonte de corrente em degrau: é 0 para $t < 0$ e tem o valor $6mA$ para $t \geq 0$. Determine os valores $i_1(-2\mu s)$ e $i_1(2\mu s)$.

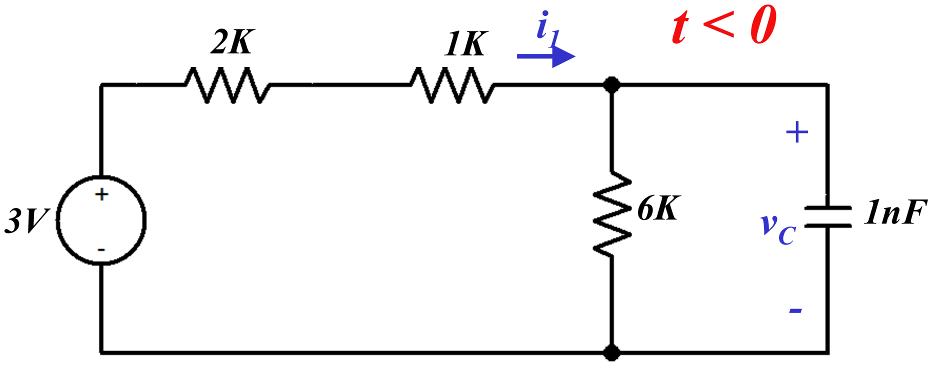


V-10

A corrente $i_1(-2\mu s)$ calcula-se do circuito para $t < 0$:



$t < 0$



$$i_1(t<0) = \frac{3}{2+1+6}$$

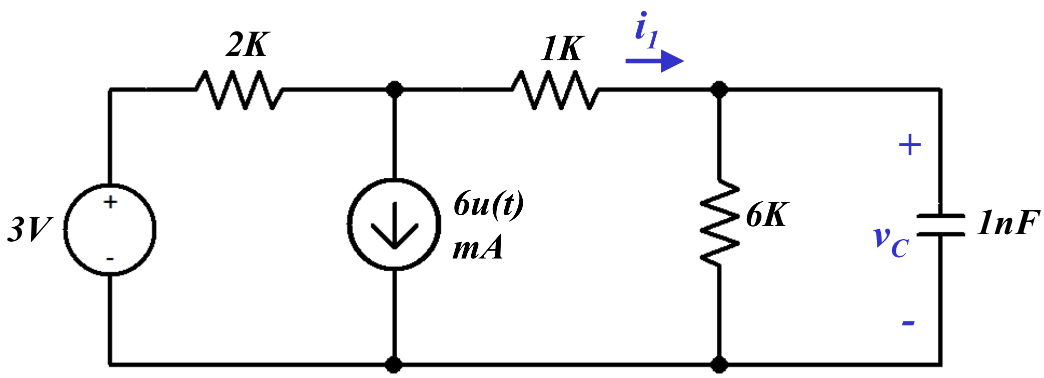
$$i_1(t<0) = \frac{1}{3} mA$$

$$= i_1(-2\mu s)$$

$$v_C(t<0) = \frac{6}{2+1+6} 3 = 2V \quad = v_C(0^-)$$

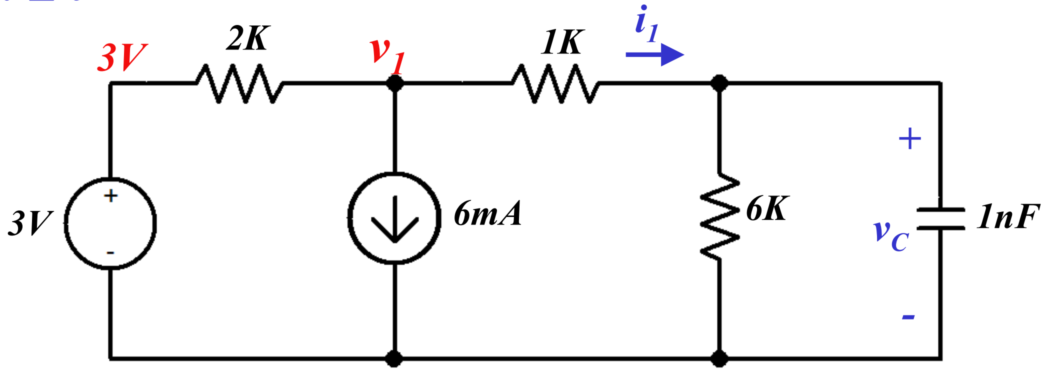
Em regime estacionário a corrente i_1 vai ser $\neq 0$. Devemos calcular, portanto, a resposta completa, dada por

$$i_1(t) = i_{1f} + i_{1n} \quad = i_1(\infty) + Ke^{-t/\tau}$$



$$\tau = R_{eq}C \ = [(2+1)//6](1n) \ = 2\mu s$$

Para calcular $i_1(\infty)$ consideremos o circuito equivalente para $t \geq 0$



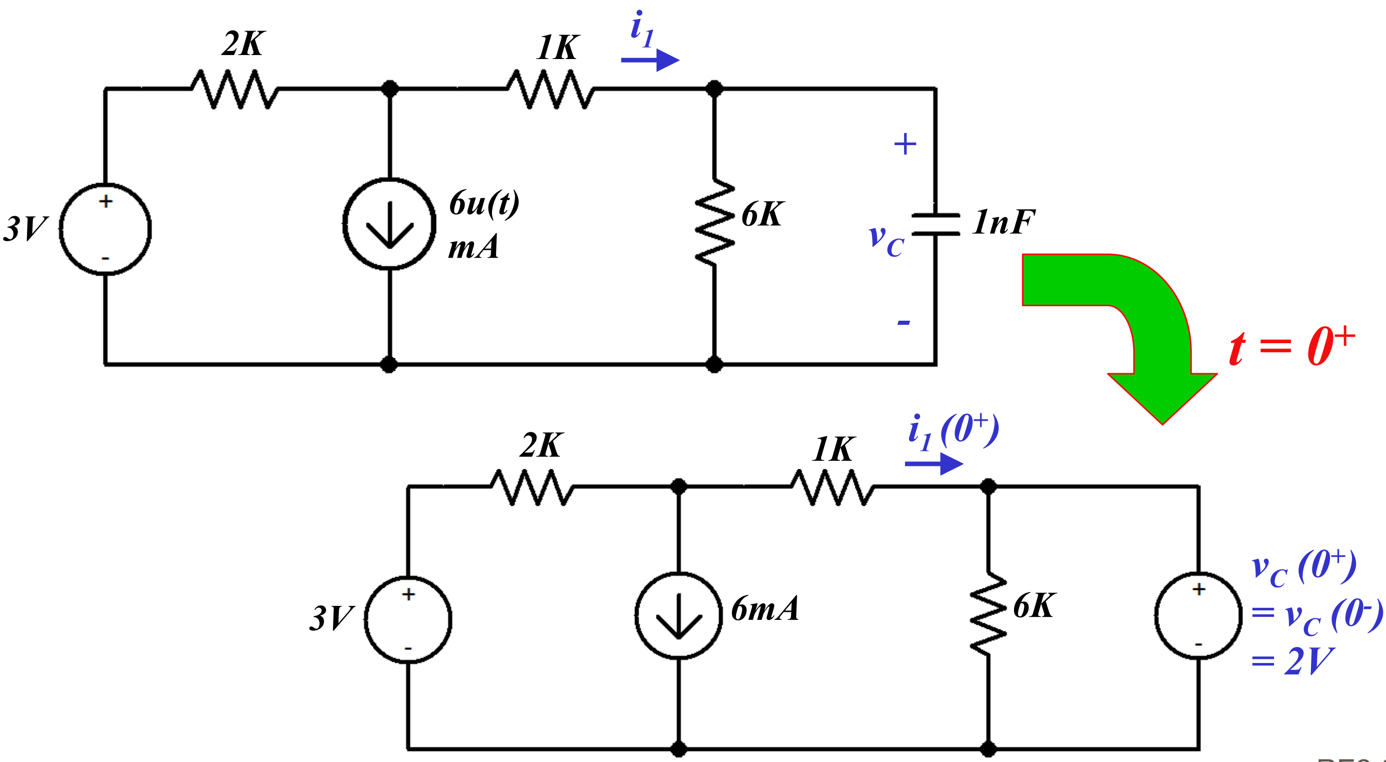
Aplicando KCL ao nó marcado com a tensão v_1:

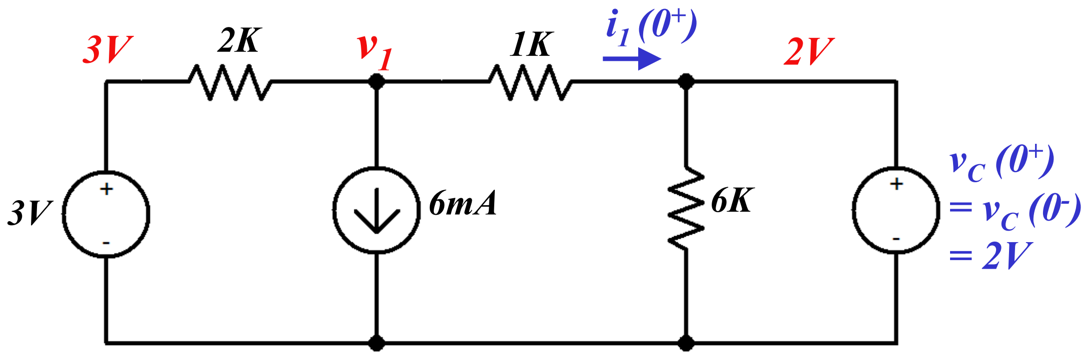
$$\frac{3 - v_1}{2} = 6 + \frac{v_1}{1+6} \quad \rightarrow \quad v_1 = -7V$$

$$i_1 = \frac{v_1}{1+6} = -1mA \quad = i_1(\infty)$$

Portanto $i_1 = i_1(\infty) + Ke^{-t/\tau} = -1 + Ke^{-t/2} \; [mA], t \text{ em } \mu s$

Para calcular K precisamos do valor de $i_1(0^+)$ que vamos obter de $v_C(0^+)$ e do circuito equivalente para $t = 0^+$:





Aplicando novamente KCL ao nó marcado com a tensão v_1:

$$\frac{3-v_1}{2} = 6 + \frac{v_1 - 2}{1} \rightarrow v_1 = -\frac{5}{3}V \qquad i_1(0^+) = \frac{v_1 - 2}{1} = -\frac{11}{3}mA$$

$$1 + Ke^{-0/2} = -\frac{11}{3} \rightarrow K = -\frac{8}{3}$$

$$i_1 = -1 - \frac{8}{3}e^{-t/2} \; [mA], t \text{ em } \mu s \qquad i_1(2\mu s) = -1.98mA$$