Análise de Malhas

Análise de Malhas

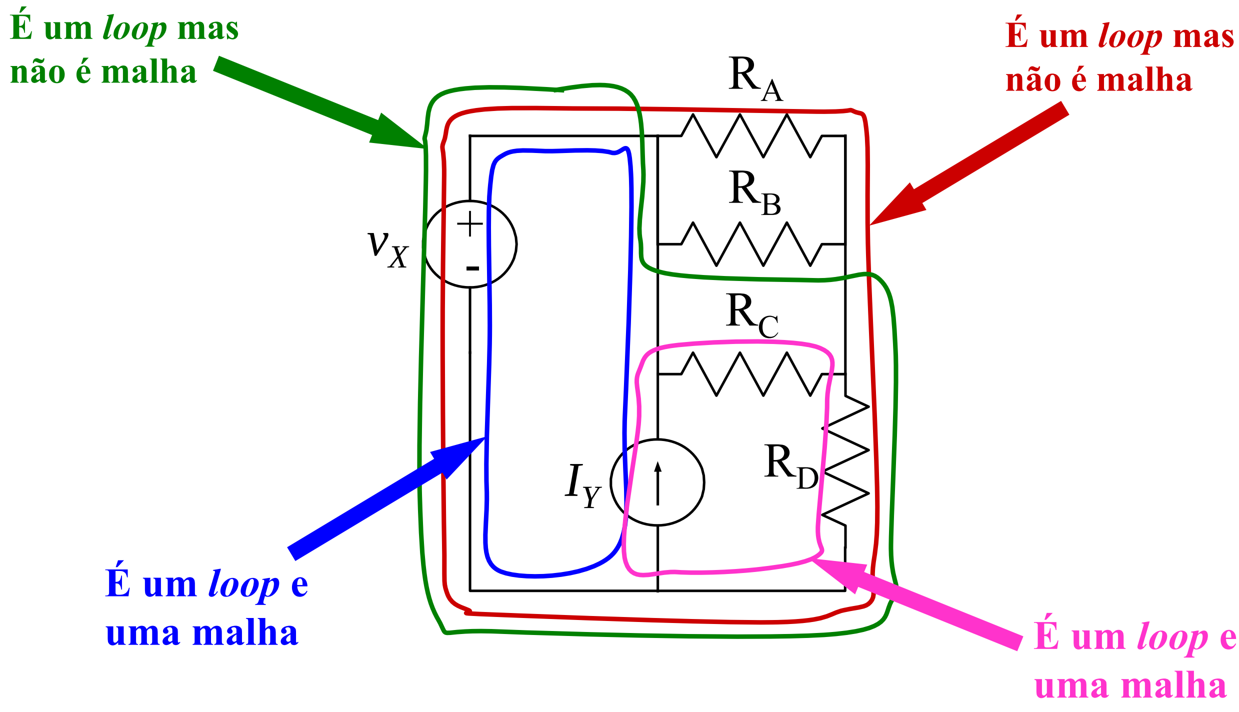
- **É um método sistemático que permite determinar as correntes em todos os ramos de um circuito;**

- **Malhas – Definem-se como caminhos fechados ou *loops* que não contêm outros *loops* dentro deles;**

Relembremos que:

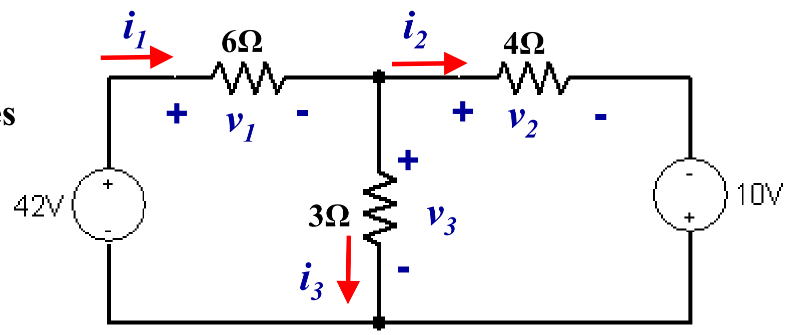
- **Caminho fechado ou *loop* – Qualquer caminho através do circuito que começa e termina no mesmo nó, sem passar mais do que uma vez pelo mesmo nó.**

Loops e malhas



Análise de um circuito simples

- **Comecemos pela análise de um circuito usando as regras que aprendemos até aqui;**



- **Começamos por marcar correntes e tensões;**
- **Notar que os sentidos das correntes e as polaridades das tensões são de referência apenas.**
- **Com base na KVL escrevemos:**

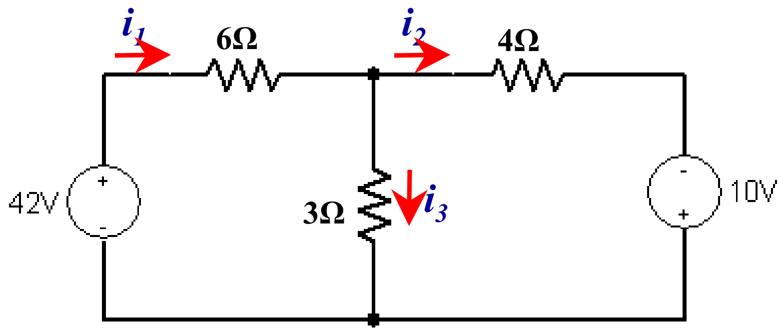
Loop da esquerda: $$-42+v_1+v_3=0 \Leftrightarrow -42+6i_1+3i_3=0$$

Loop da direita: $$-v_3+v_2-10=0 \Leftrightarrow -3i_3+4i_2-10=0$$

Análise de um circuito simples

- **Usando KCL:** $i_3 = i_1 - i_2$

Podemos eliminar a variável i_3 das duas equações anteriores:



$$-42 + 6i_1 + 3(i_1 - i_2) = 0$$

$$-3(i_1 - i_2) + 4i_2 - 10 = 0$$

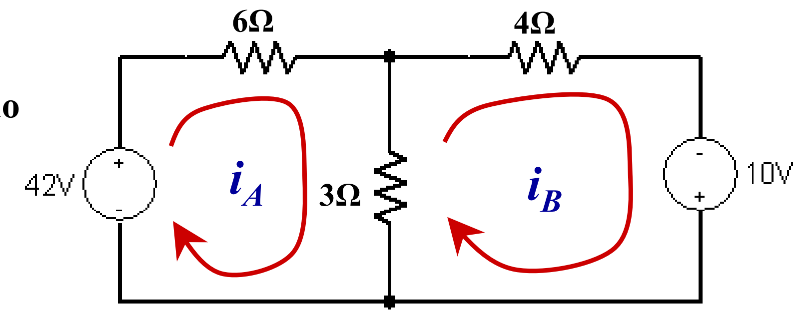
- **Que resulta num sistema de duas equações independentes com duas incógnitas**

$$\begin{cases} 9i_1 - 3i_2 = 42 \\ -3i_1 + 7i_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} i_1 &= 6A \\ i_2 &= 4A \\ i_3 &= i_1 - i_2 = 2A \end{aligned}$$

- **Façamos agora a análise de forma ligeiramente diferente, usando as chamadas correntes de malha.**

Análise de malhas

- **Para cada malha definimos uma corrente de malha com determinado sentido;**

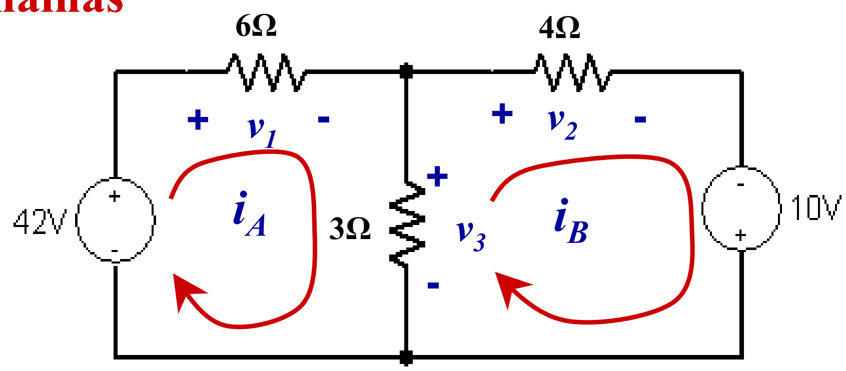


- **Depois aplicamos a KVL a cada uma das malhas;**

- **A corrente de malha é definida como a corrente que flúi na periferia da malha;**

- **Notar que a corrente num ramo pode não coincidir com a corrente de malha, por exemplo**
  - **a corrente na resistência de 6Ω é i_A;**
  - **mas a corrente na resistência de 3Ω (de cima para baixo) é i_A - i_B;**

Análise de malhas



- Aplicando então a KVL a cada uma das malhas, obtemos:

Malha A: $$-42+v_1+v_3=0 \Leftrightarrow -42+6i_A+3(i_A-i_B)=0$$

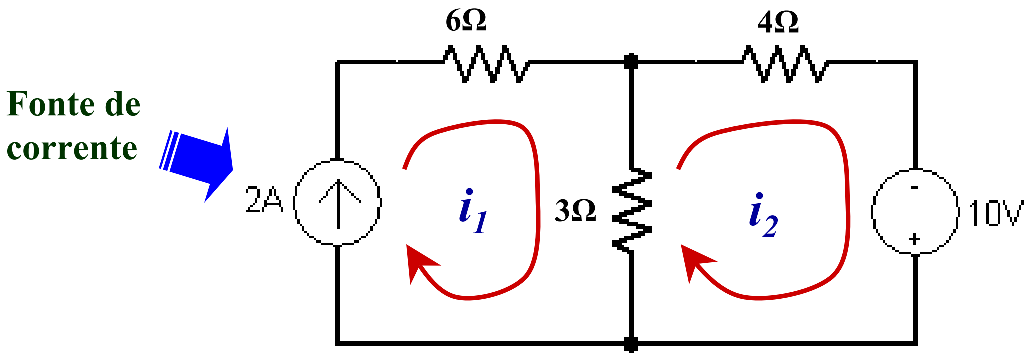
Malha B: $$-v_3+v_2-10=0 \Leftrightarrow -3(i_A-i_B)+4i_B-10=0$$

- Ou seja, duma só vez, chegamos às últimas equações que obtivemos pelo método anterior.

Análise de malhas passo a passo

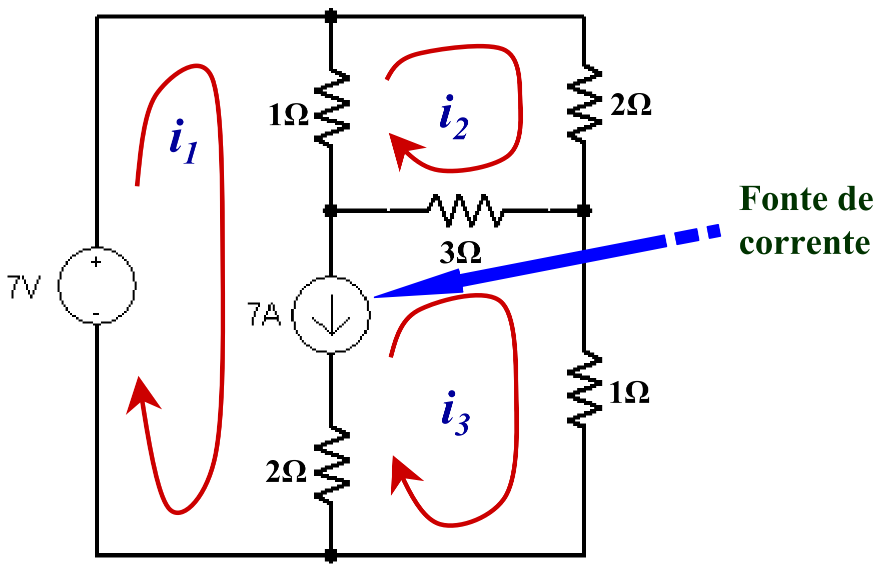
- **Contar o número de malhas, *M*;**
- **Marcar tensões em todos os elementos do circuito;**
- **Marcar uma corrente por malha (por exemplo no sentido horário) e atribuir designações: i_1, i_2,…i_M;**
- **Usando KVL, escrever *M* equações de malha.**

Análise de malhas – com fonte de corrente na periferia



- Neste caso escrevemos apenas a equação da malha da direita, dado que relativamente à da esquerda já sabemos que $i_1 = 2A$;

Análise de malhas – com fonte de corrente comum a duas



- Neste caso, em lugar de considerar as malhas 1 e 3 em separado, devemos considerar o *loop* que envolve essas duas malhas – uma supermalha – e escrever uma só equação para esse *loop*.

Análise de malhas – com fonte de corrente comum a duas

- **Aplicando KVL obtemos:**

Supermalha:

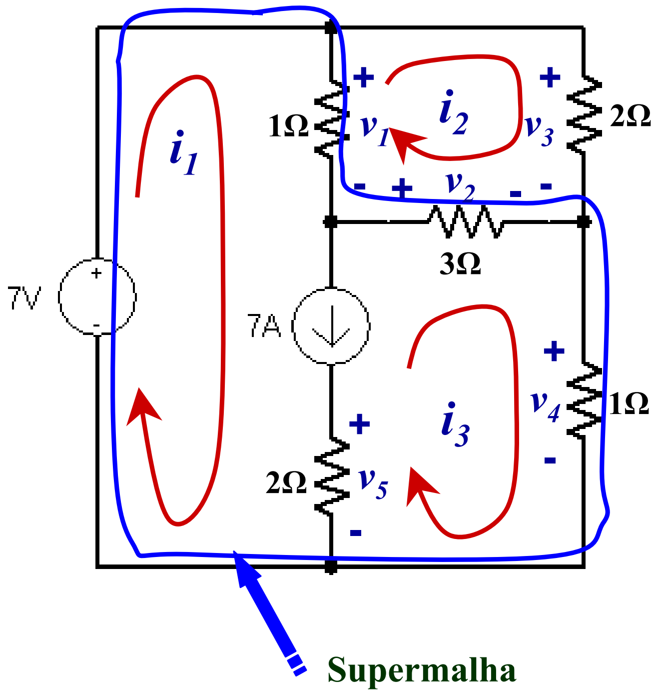
$$-7+v_1+v_2+v_4=0$$

$$-7+1(i_1-i_2)+3(i_3-i_2)+1i_3=0$$

Malha 2:

$$-v_1+v_3-v_2=0$$

$$-1(i_1-i_2)+2i_2-3(i_3-i_2)=0$$



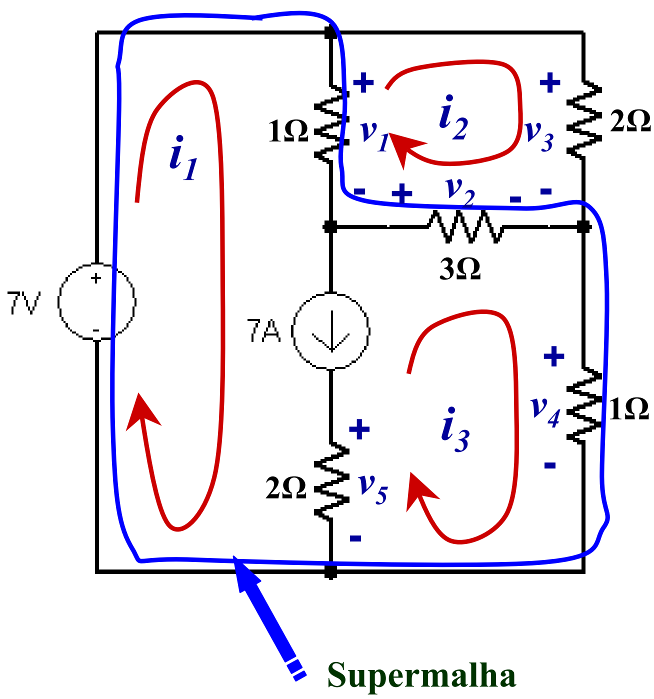
Análise de malhas – com fonte de corrente comum a duas

- **E aplicando KCL no nó inferior**

$$i_3+7=i_1$$

- **Ficamos então com:**

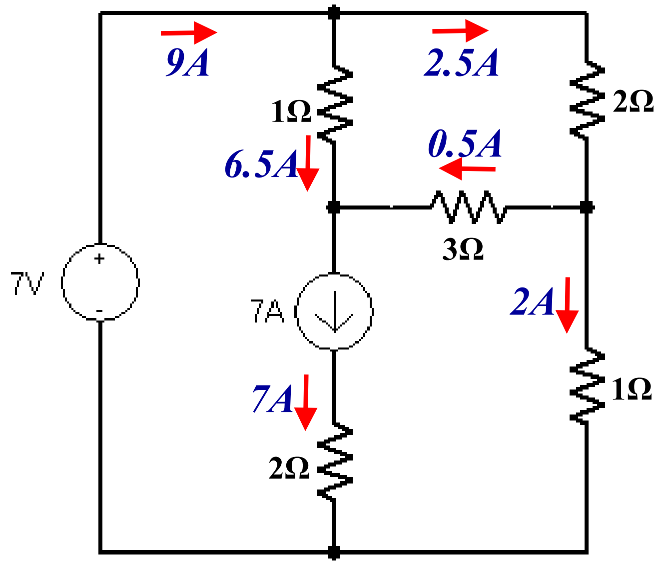
$$\begin{cases} i_1-4i_2+4i_3=7 \\ -i_1+6i_2-3i_3=0 \\ i_1-i_3=7 \end{cases}$$



Análise de malhas – com fonte de corrente comum a duas

- Resolvendo o sistema, obtemos as correntes de malha:

$$\begin{cases} i_1 = 9A \\ i_2 = 2.5A \\ i_3 = 2A \end{cases}$$



Análise de malhas (com supermalhas)

- **Contar o número de malhas, *M*;**
- **Marcar uma corrente por malha e atribuir designações: $i_1, i_2, \ldots i_M$;**
- **Marcar tensões em todos os elementos;**
- **Se existirem fontes de corrente partilhadas por duas malhas, considerar uma supermalha que envolva as duas malhas;**
- **Usando KVL, escrever uma equação por cada malha ou supermalha;**
- **Se uma malha incluir uma fonte de corrente na sua periferia, não é preciso escrever equação para essa malha.**

Linearidade e Sobreposição

Linearidade

- **Circuito linear – É um circuito composto apenas por:**
  - **Elementos lineares;**
  - **Fontes independentes;**
  - **Fontes dependentes lineares.**

- **Elemento linear – É um elemento passivo que tem uma relação linear entre a tensão aos seus terminais e a corrente que o percorre. Exemplo:**
  - **Resistência: $v = R.i$;**
  - **Condensador e bobina.**

- **Fonte dependente linear – Tem uma saída (tensão ou corrente) proporcional apenas à primeira potência de uma tensão ou corrente no circuito, ou à sua soma. Exemplo:**
  - $i_S = 5v_3$; $v_S = 0.6i_1 - 14v_2 \Rightarrow$ **são fontes lineares**
  - $v_S = 7.9i_1^2$; $i_S = 2.4i_1.v_2 \Rightarrow$ **Não são fontes lineares!**

Princípio da Sobreposição

- **É a consequência mais importante da linearidade.**

- **Principio da Sobreposição: A resposta de um circuito com mais do que uma fonte pode obter-se como a soma das respostas individuais devidas a cada uma das fontes, actuando sozinhas.**

- **Em termos formais, podemos expressar o Principio da Sobreposição como:**

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$$

Em que

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **são as fontes;**
- $f()$ **são as respostas.**

Sistemas Electrónicos – 2020/2021

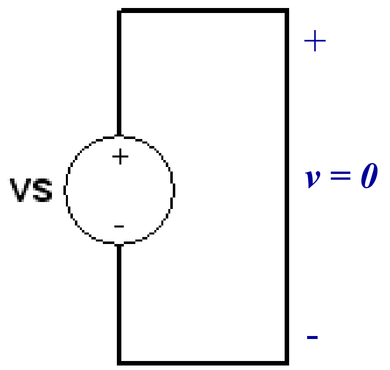
Princípio da Sobreposição

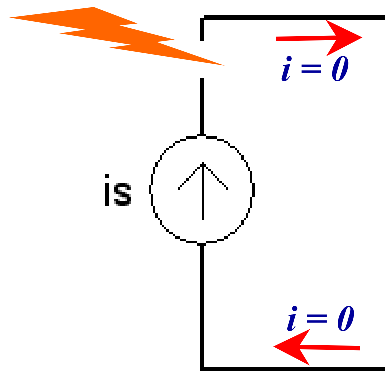
Em termos mais concretos, pode ser enunciado como

Em qualquer circuito linear contendo várias fontes, as tensões/correntes em qualquer nó/ramo podem ser calculadas adicionando as tensões/correntes individuais provocadas por cada uma das fontes actuando sozinhas.

Desactivação das *outras* fontes

- Para determinar o efeito provocado por uma fonte, devemos desactivar todas as outras fontes independentes:
  - Fontes de tensão devem ser curto-circuitadas, anulando assim a sua tensão;
  - Fontes de corrente devem ser abertas, anulando assim a sua corrente.

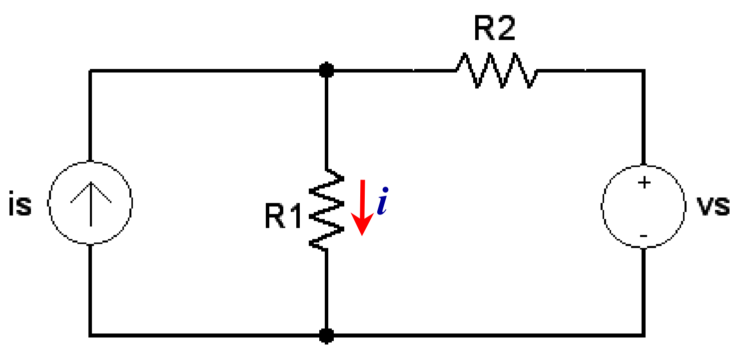




Nota: fontes dependentes não se desactivam!

Aplicação do Princípio da Sobreposição

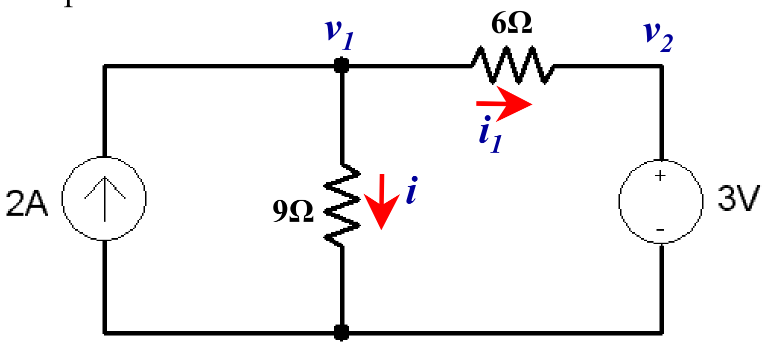
- Para o circuito dado, se
  - i_1 for a corrente em *R1* produzida só por i_S, e
  - i_2 for a corrente em *R1* produzida só por v_S, então
  - a corrente produzida pelas duas fontes em simultâneo será $i = i_1 + i_2$



Exemplo: Para o circuito dado, calcular *i*

Calculemos, primeiro, *i* usando os métodos que estudámos até aqui:

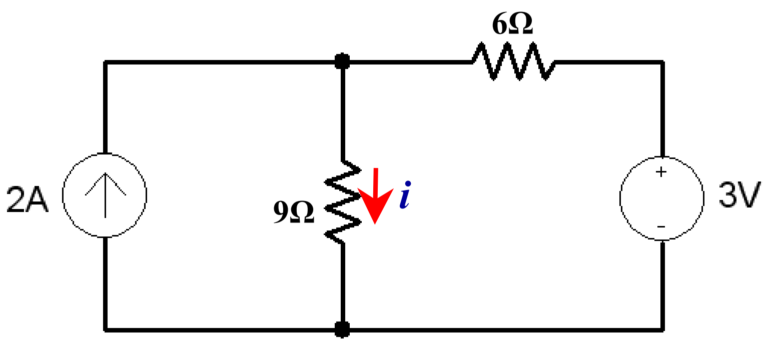
- **Aplicando KCL ao nó 1:** $2 = i + i_1$



$$2 = \frac{v_1}{9} + \frac{v_1 - v_2}{6}$$
$$v_2 = 3V$$

- **Resolvendo, obtém-se** $v_1 = 9V$ logo $i = \frac{9}{9} = 1A$

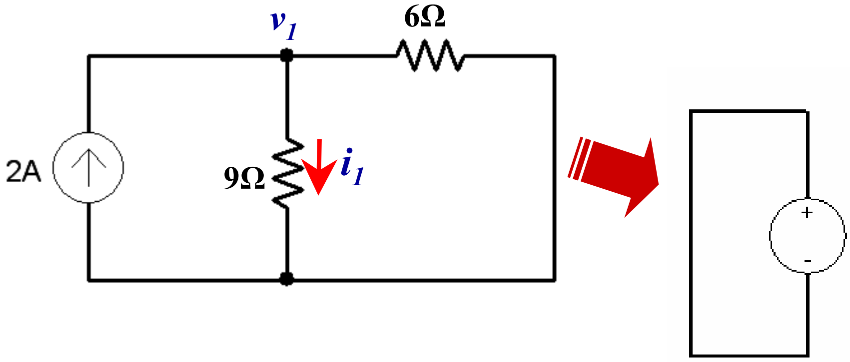
Exemplo - Resolução usando o Principio da Sobreposição



Exemplo - Resolução usando o Principio da Sobreposição

1º passo: Consideremos primeiro só o efeito da fonte de corrente:

- **Desactivamos a fonte de tensão.**



Fonte de tensão foi desactivada!

$$v_1 = 2(6//9) = 7.2V$$

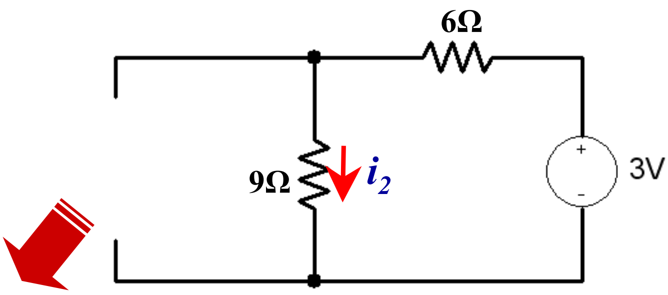
com $6//9 = \frac{6x9}{6+9}$

$$i_1 = \frac{v_1}{9} = \frac{7.2}{9} = 0.8A$$

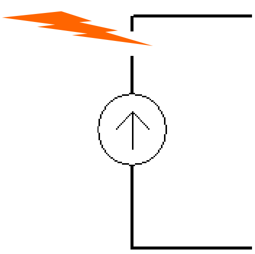
Exemplo - Resolução usando o Principio da Sobreposição

2º passo: Consideremos agora só o efeito da fonte de tensão:

- **Desactivamos a fonte de corrente;**



$$i_2 = \frac{3}{6+9} = 0.2A$$

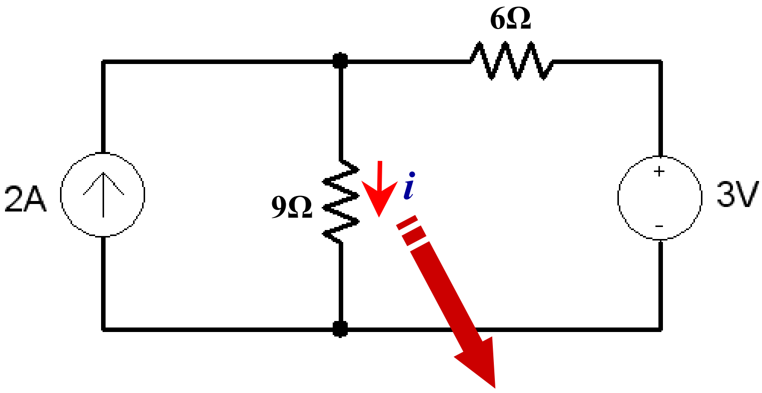


Fonte de corrente foi desactivada!

Exemplo - Resolução usando o Principio da Sobreposição

3º passo: Aplicamos o Principio da Sobreposição

- i vai ser dada pela soma dos contributos i_1 e i_2 de cada uma das fontes



$$i = i_1 + i_2 = 0.8 + 0.2 = 1A$$

Princípio da Sobreposição – algumas notas

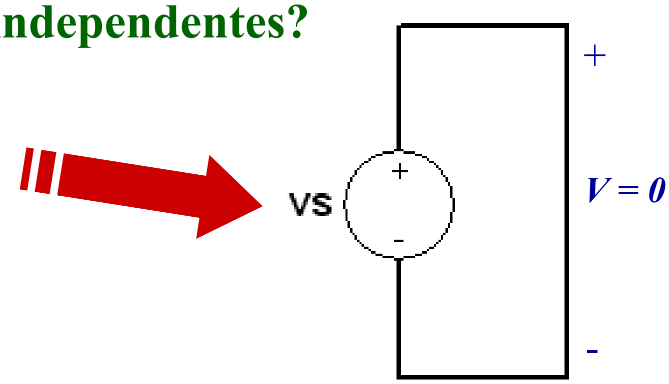
- Se tivermos N fontes independentes, o circuito será analisado N vezes considerando uma fonte de cada vez;

- Contudo, nada obriga a que apenas uma fonte esteja activa em cada análise, embora essa seja a situação mais fácil;

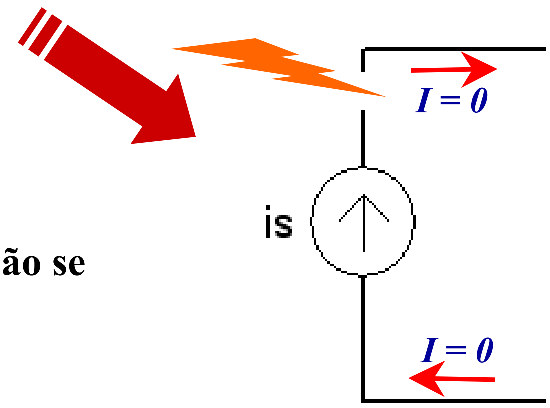
Principio da Sobreposição – não esquecer!

Como se desactivam as fontes independentes?

- Fontes de tensão são curto-circuitadas $\Rightarrow$ $V = 0$;



- Fontes de corrente são abertas $\Rightarrow$ $I = 0$;

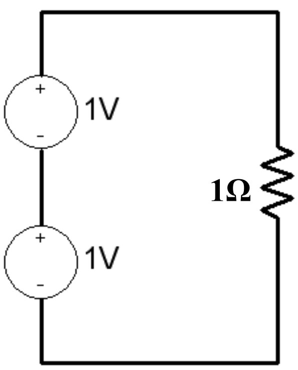


- Fontes dependentes não se desactivam.

Princípio da Sobreposição – nota final

- Como o princípio só se aplica a respostas lineares, então NÃO se aplica à determinação da potência!

Exemplo: Potência dissipada na resistência? $P = \frac{v^2}{R} = \frac{(1+1)^2}{1} = 4W$



Se pretendêssemos aplicar o Princípio da Sobreposição considerando que $P = P_1 + P_2$, sendo P_1 e P_2 as potências devidas a cada uma das fontes a actuar em separado, teríamos

$$P_1 = \frac{1^2}{1} = 1W \qquad P_2 = \frac{1^2}{1} = 1W$$

o que resultaria num valor errado da potência na resistência:

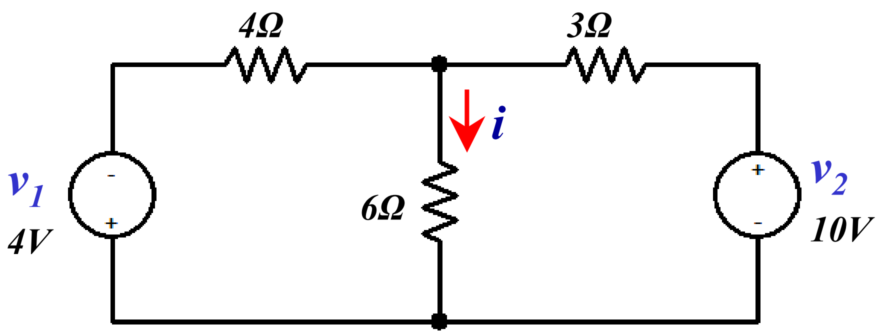
$$P = P_1 + P_2 = 2W$$

Sobreposição não funciona com potências!

Teorema da Sobreposição – Exercício

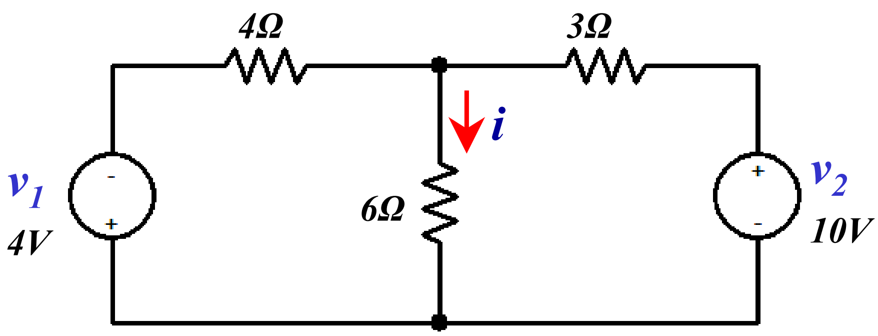
a) **Usando o teorema da sobreposição calcule i;**

b) **Determine o valor que a fonte de tensão v_1 deve ter, para que a corrente i duplique.**



Teorema da Sobreposição – Exercício

a)



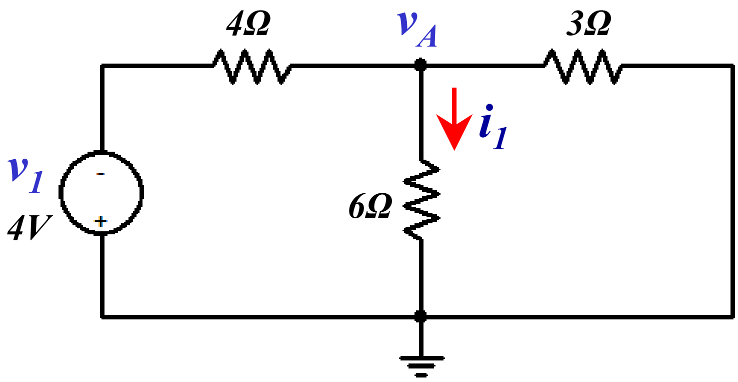
- **Cada uma das fontes, v_1 e v_2, vai contribuir para a corrente i:**
  - **i_1 a corrente produzida só por v_1, e**
  - **i_2 a corrente produzida só por v_2**

$$i = i_1 + i_2$$

Teorema da Sobreposição – Exercício

a)

- **Calculemos o contributo da fonte v_1**



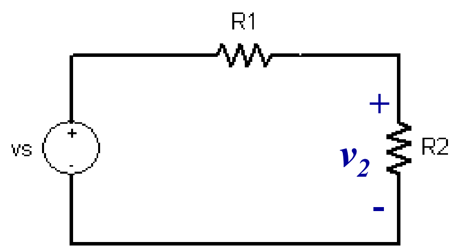
Usando a fórmula do divisor de tensão:

$$v_A = -\frac{3//6}{3//6+4} v_1$$

$$i_1 = \frac{v_A}{6}$$

$$i_1 = -\frac{3//6}{3//6+4} v_1 \frac{1}{6} = -\frac{v_1}{18}$$

Divisor de tensão



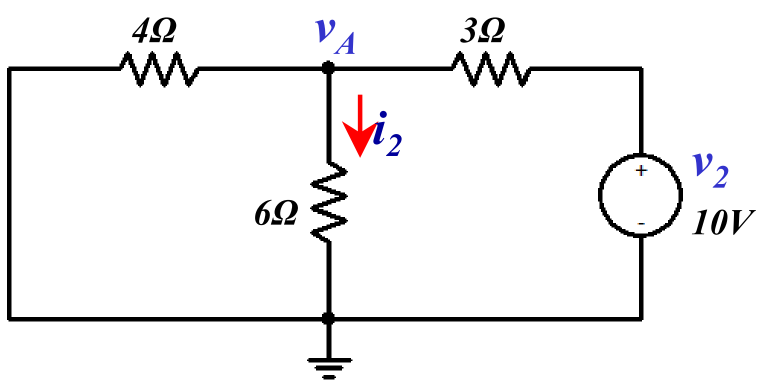
$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s$$

Teorema da Sobreposição – Exercício

a)

- **E agora o contributo da fonte v_2**

$$v_A = \frac{4//6}{4//6+3} v_2$$

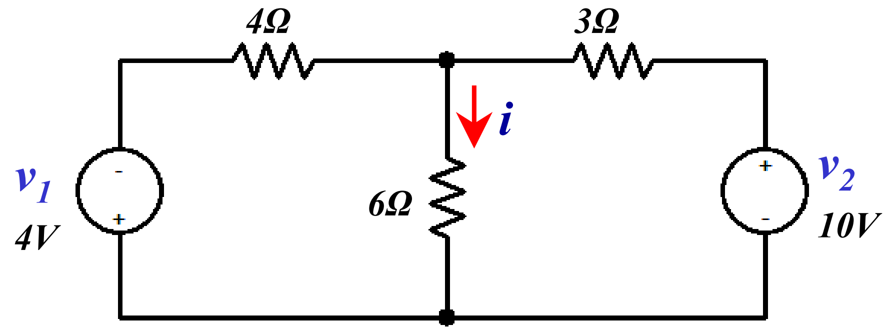


- **Para $v_2 = 10V$**

$$i_2 = v_A \frac{1}{6} = \frac{4//6}{4//6+3} 10 \frac{1}{6} = \frac{20}{27} A$$

Teorema da Sobreposição – Exercício

a)



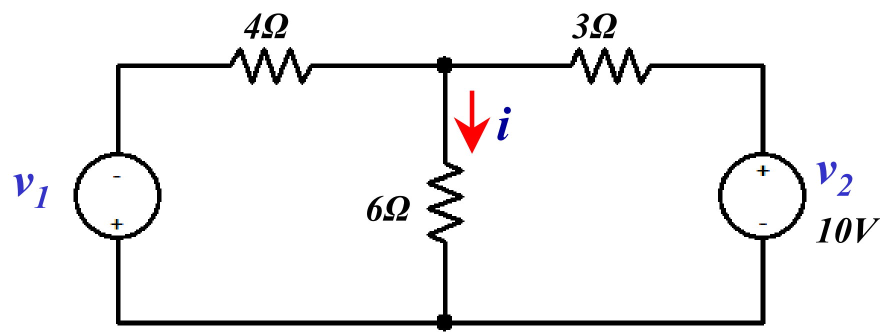
- **Aplicando agora Sobreposição, calculamos a corrente *i*:**

$$i = i_1 + i_2 = -\frac{v_1}{18} + \frac{20}{27}$$

O que para $v_1 = 4V$ dá $$i = \frac{14}{27}A$$

Teorema da Sobreposição – Exercício

b) Calculemos agora o valor de v_1 que duplica o valor da corrente *i*.



- **Para isso basta resolver a equação**

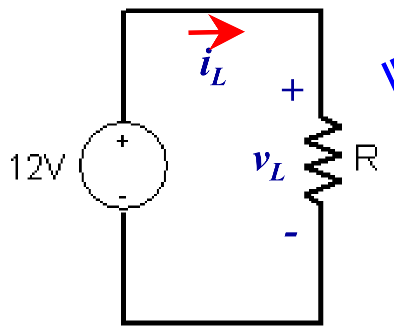
$$-\frac{v_1}{18} + \frac{20}{27} = 2\text{x}\left(\text{valor obtido em } a\right) = 2\text{x}\frac{14}{27}$$

que dá $$v_1 = -\frac{16}{3} = -5.33V$$

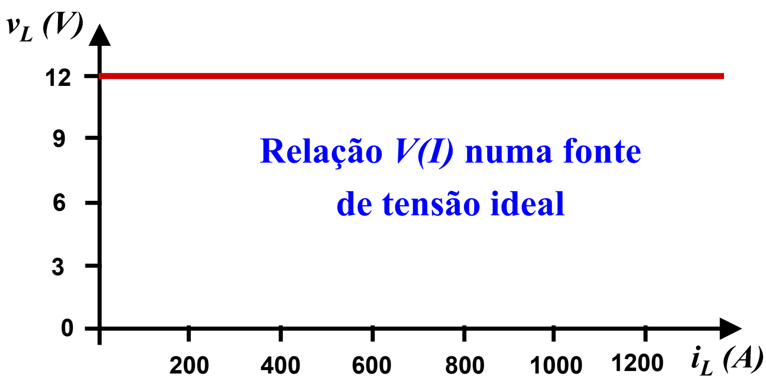
Transformação de Fontes

Transformação de Fontes

- **Até agora temos usado sempre fontes ideais de tensão e corrente.**
- **Recordemos que numa fonte independente de tensão ideal**
  - **Tensão aos seus terminais é independente da corrente que a atravessa;**
  - **Pode fornecer uma corrente (e portanto energia) ilimitada.**



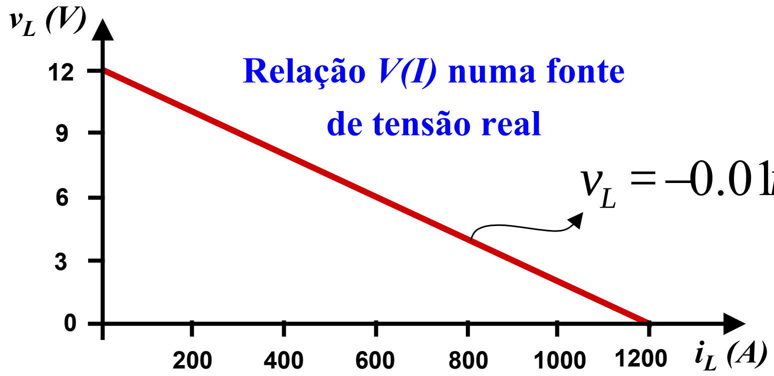
Se $R=1\Omega$, então $i_L = 12A$;
Se $R=0.01\Omega$, então $i_L = 1200A$

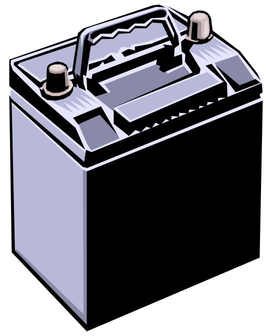


Na realidade uma fonte de tensão não se comporta assim.

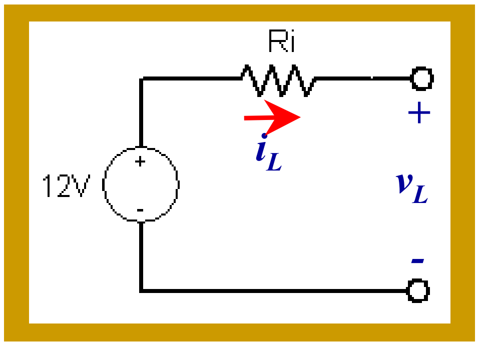
Fonte de tensão real

- Numa fonte de tensão real (e.g. bateria de automóvel) a tensão aos terminais diminui à medida que solicitamos mais corrente.



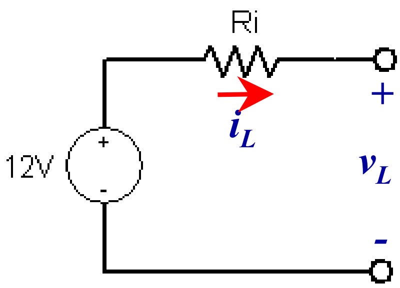


- Como v_L varia linearmente com I, o comportamento da fonte real pode ser modelado usando uma fonte ideal com uma resistência em série:



Modelo da fonte de tensão real

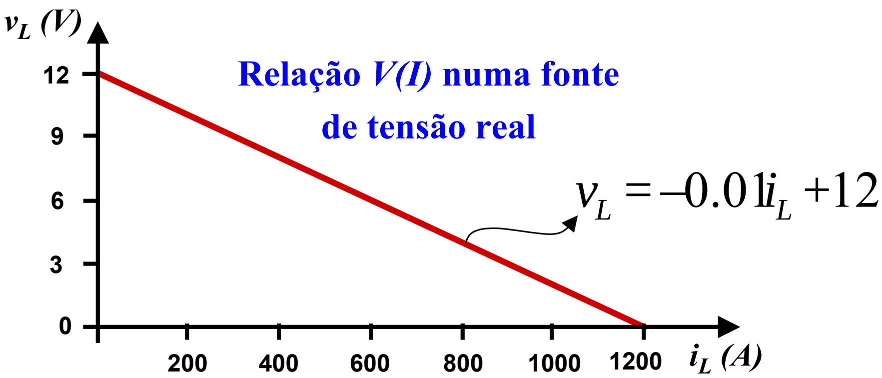
Fonte de tensão real



- Aplicando KVL ao circuito:

$$-12 + R_i i_L + v_L = 0$$

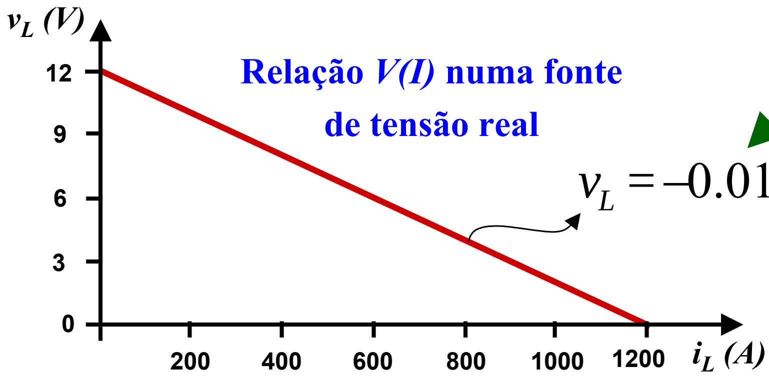
$$v_L = -R_i i_L + 12$$



- A comparação desta equação com a equação do gráfico $V(I)$ da fonte real de tensão permite concluir que

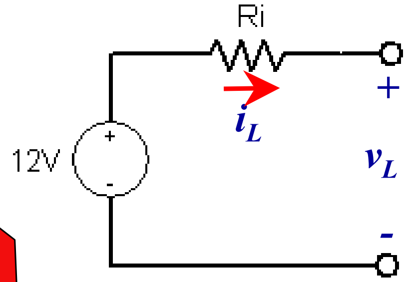
$$R_i = 0.01\Omega$$

Fonte de tensão real

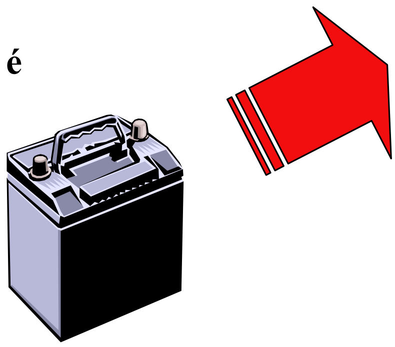


$$v_L = -0.01 i_L + 12$$

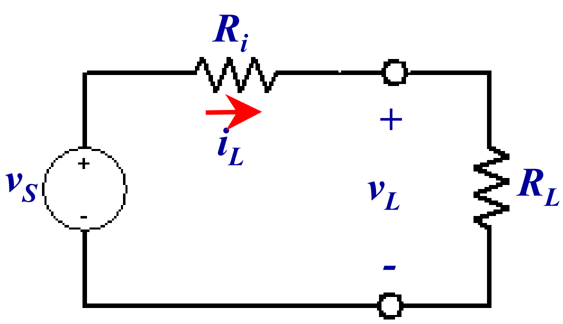
- R_i **representa a resistência interna ou resistência de saída da fonte real;**

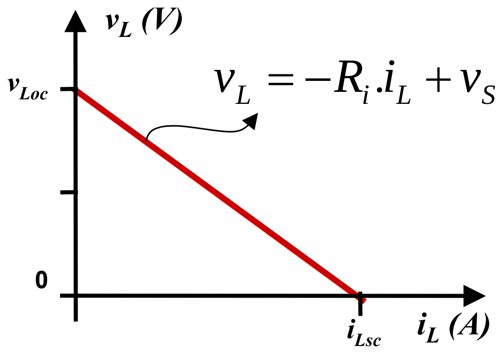


- **Assim, para efeitos de cálculos, a bateria de automóvel pode ser substituída por este circuito que é um modelo equivalente.**



Fonte de tensão real com carga

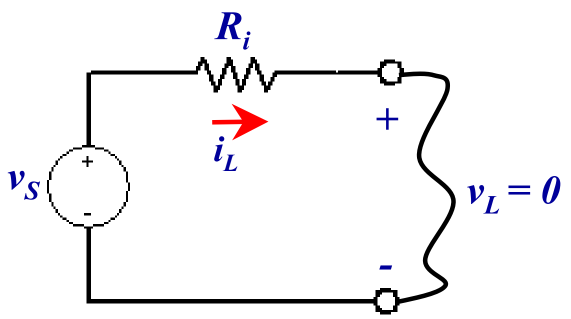


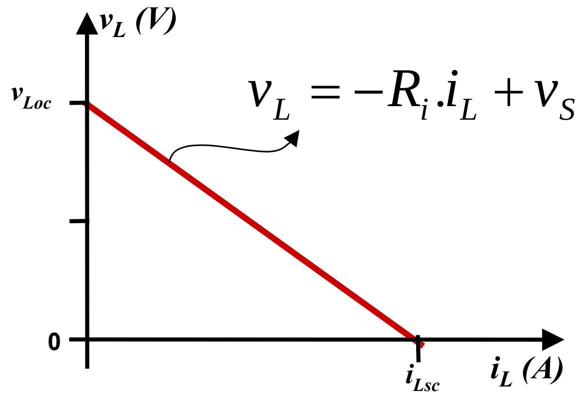


- **Com uma resistência ligada à saída, v_L e i_L são:**

$$v_L = \frac{R_L}{R_i + R_L} v_S \qquad i_L = \frac{v_S}{R_i + R_L}$$

Fonte de tensão real em curto circuito





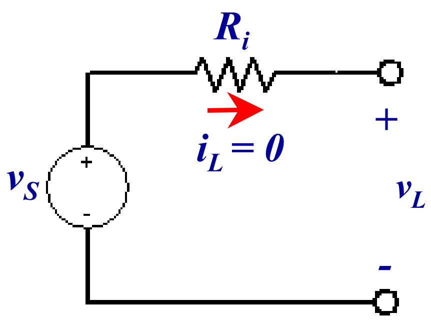
- Se $R_L=0$ (curto-circuito) $\Rightarrow v_L = 0$

$$i_L = i_{Lsc} = \frac{v_S}{R_i}$$

- Esta é a chamada **corrente de curto circuito.**

Sistemas Electrónicos – 2020/2021

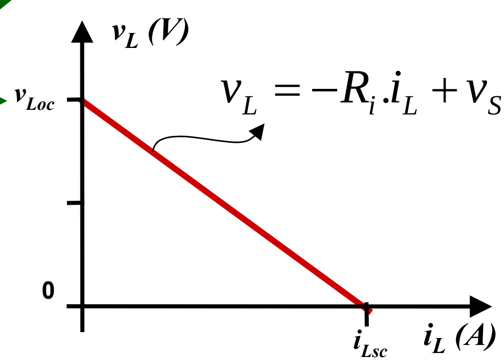
Fonte de tensão real em aberto



$$v_L = \frac{R_L}{R_i + R_L} v_S = \frac{1}{R_i / R_L + 1} v_S$$

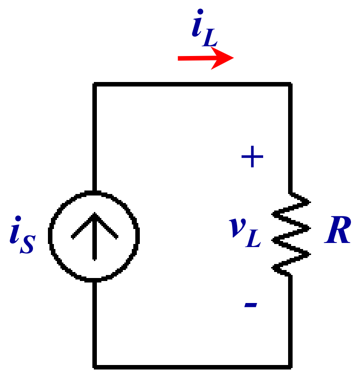
- Se $R_L=\infty$ (circuito aberto) $\Rightarrow v_L = v_S = v_{Loc}$

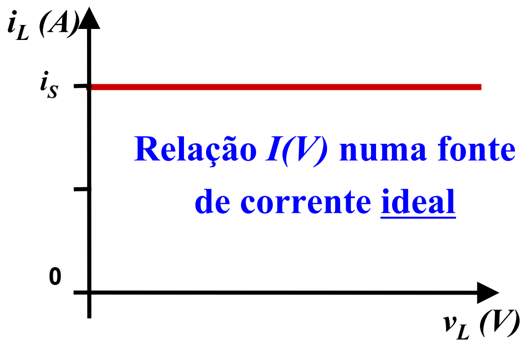
- Esta é a chamada **tensão de circuito aberto.**



Fonte de corrente real

- **Recordemos que numa fonte independente de corrente ideal**
  - **Corrente que a atravessa é independente da tensão aos seus terminais;**
  - **Pode apresentar aos terminais uma tensão de valor ilimitado.**

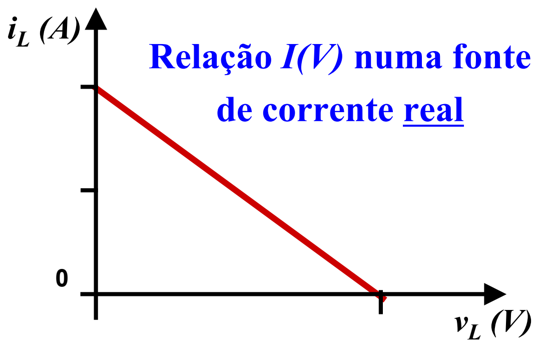




Sistemas Electrónicos – 2020/2021

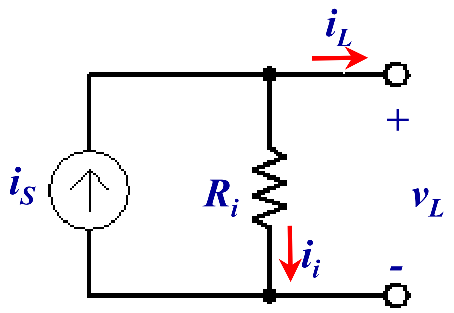
Fonte de corrente real

- **Tal como nas fontes de tensão, nas fontes de corrente reais o valor da corrente decresce à medida que a tensão aumenta.**



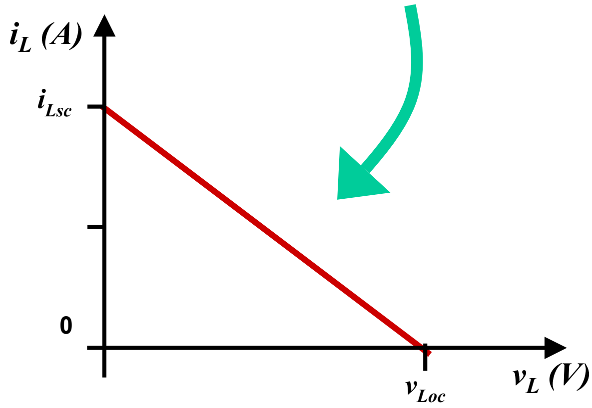
Fonte de corrente real

- **De forma análoga à fonte de tensão, a fonte de corrente real pode ser modelada usando uma fonte ideal de <u>corrente</u> com uma resistência em <u>paralelo</u>.**



- **Aplicando KCL ao nó superior:**

$$i_L = -i_i + i_S = -\frac{1}{R_i} v_L + i_S$$

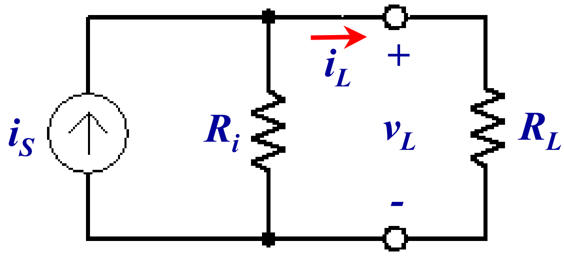


Fonte de corrente real com carga

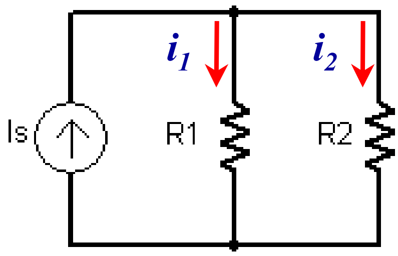
- **Com uma resistência ligada à saída, i_L e v_L são:**

$$i_L = \frac{R_i}{R_i + R_L} i_S$$

$$v_L = (R_i // R_L) i_S$$

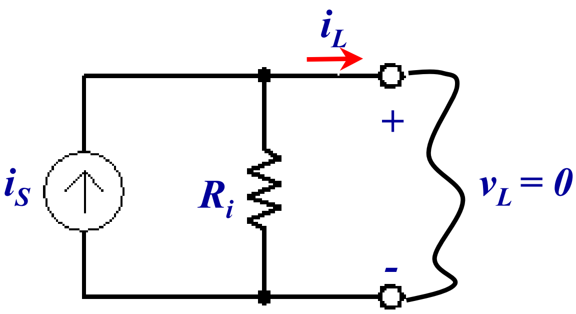


Divisor de corrente



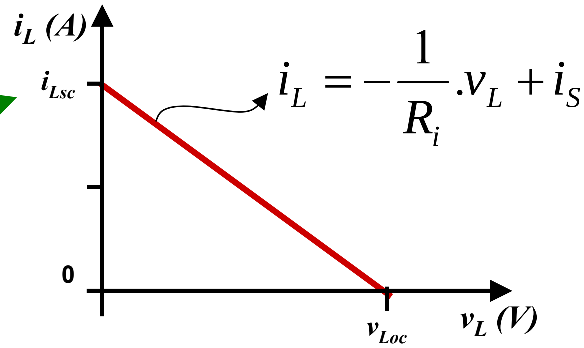
$$\boxed{i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_s}$$

Fonte de corrente real em curto-circuito



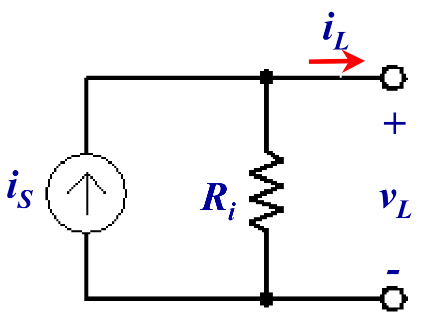
- Se $R_L=0$ (curto-circuito) $\Rightarrow$ $v_L = 0$

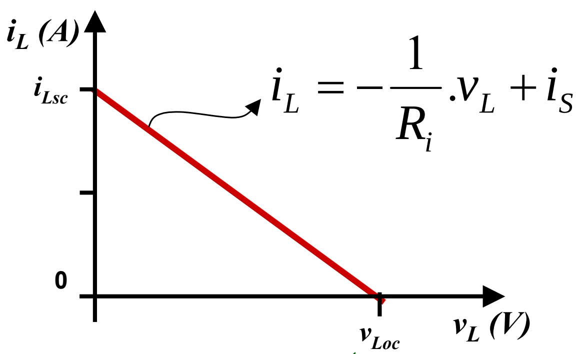
$$i_L = i_{Lsc} = i_s$$



- É a chamada **corrente de curto circuito.**

Fonte de corrente real em aberto



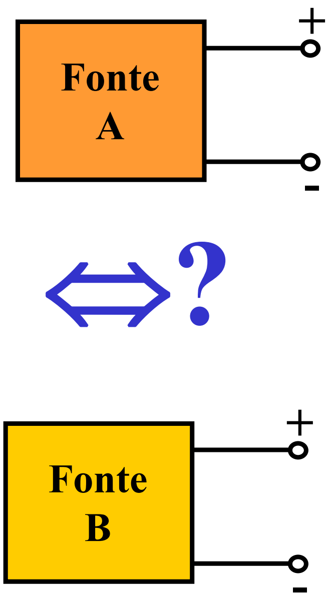


- Se $R_L=\infty$ (circuito aberto) $\Rightarrow$ $i_L = 0$

$$v_L = v_{Loc} = i_S.R_i$$

- É a chamada **tensão de circuito aberto.**

Equivalência entre fontes

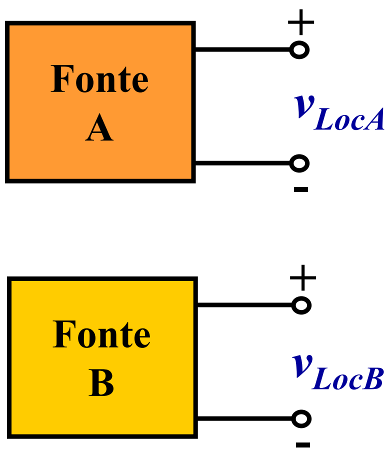


- **Quando é que podemos dizer que estas duas fontes são equivalentes?**

R: Duas fontes dizem-se equivalentes se produzem na mesma resistência os mesmos valores de corrente (i_L) e tensão (v_L)

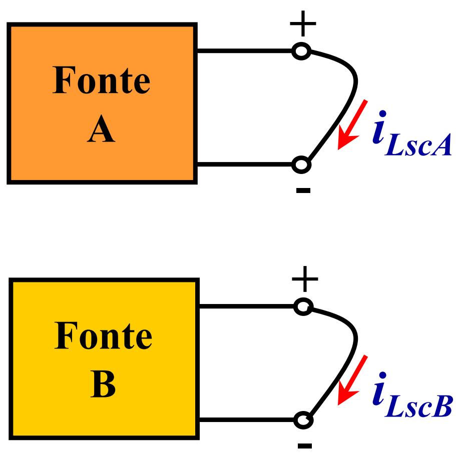
Equivalência entre fontes

$R_L = \infty$



$$v_{LocA} = v_{LocB}$$

$R_L = 0$

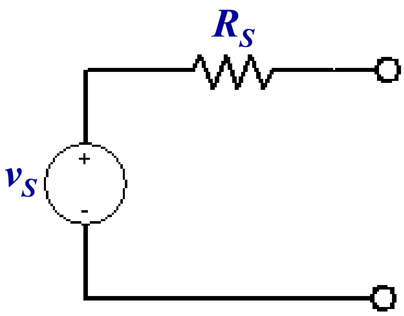


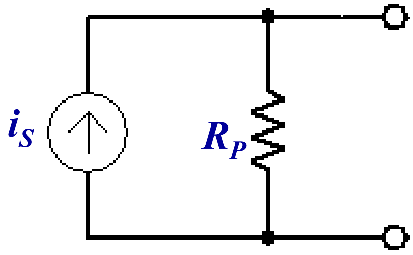
$$i_{LscA} = i_{LscB}$$

- **Duas fontes equivalentes têm os mesmos valores de tensão em circuito aberto (v_{Loc}) e corrente de curto-circuito (i_{Lsc}).**

Equivalência entre fontes reais de tensão e corrente

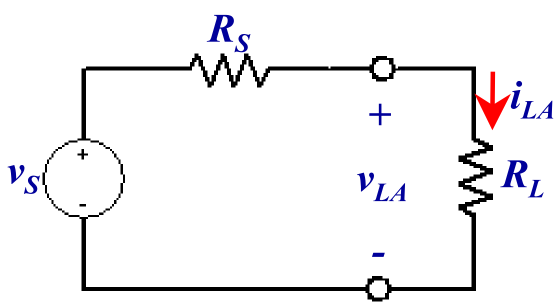
- **Quando é que estas duas fontes são equivalentes?**



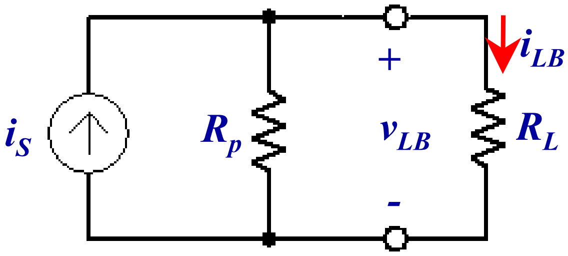


R: Serão equivalentes se produzirem na mesma resistência os mesmos valores de corrente (i_L) e tensão (v_L)

Equivalência entre fontes reais de tensão e corrente



$$v_{LA} = \frac{R_L}{R_S + R_L} v_S$$



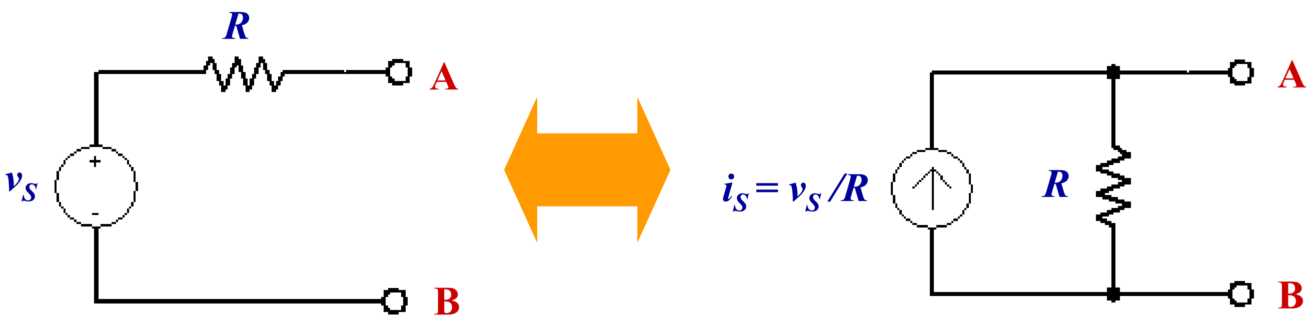
$$v_{LB} = \left(\frac{R_p}{R_p + R_L} i_S \right) . R_L$$

- **Para que $v_{LA} = v_{LB}$ (e portanto $i_{LA} = i_{LB}$) temos que ter:**

$$R_S = R_P \qquad \text{e} \qquad v_S = R_P . i_S$$

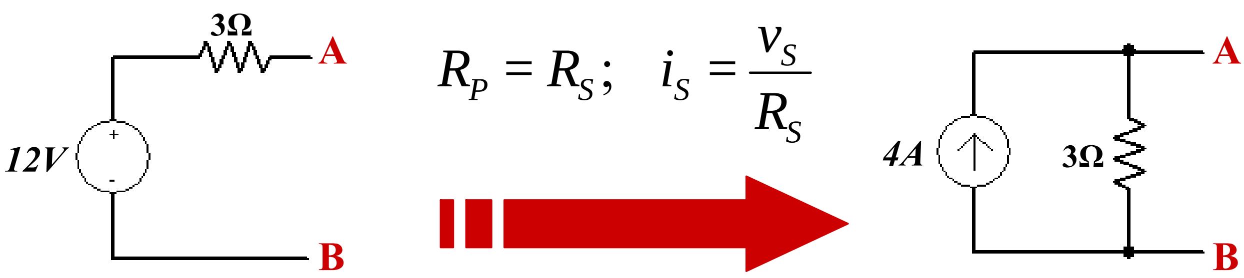
Transformação de fontes

- Assim, se as condições de equivalência se verificarem, podemos **transformar** uma fonte de tensão numa de corrente e vice-versa:



- A este processo chamamos Transformação de Fontes

Exemplo 1



$$R_P = R_S; \quad i_S = \frac{v_S}{R_S}$$

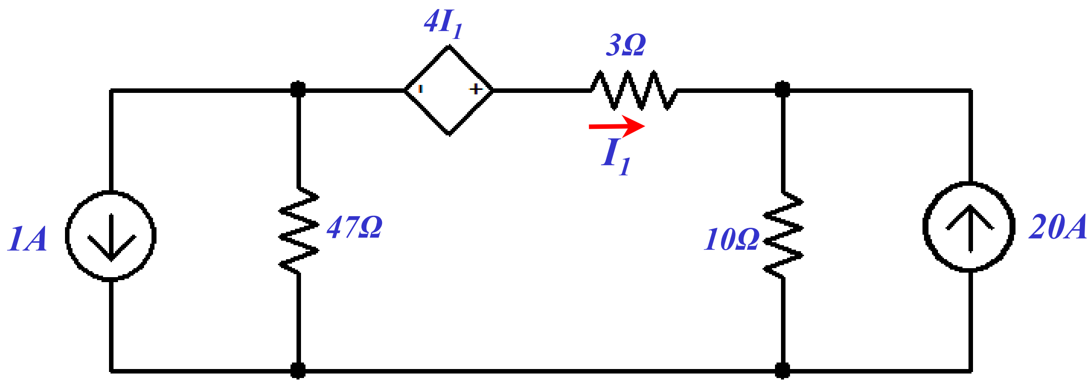
- As duas fontes são equivalentes

ou

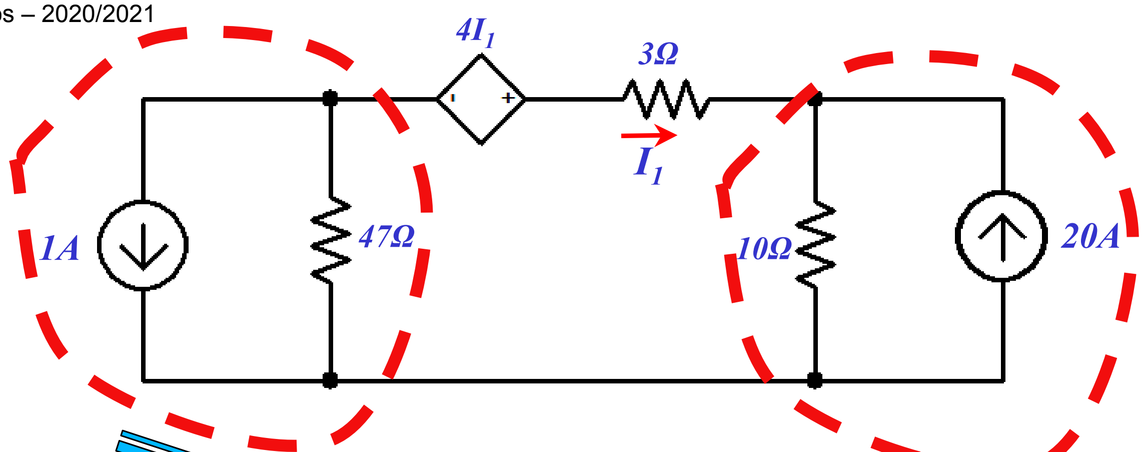
- do ponto de vista dos terminais A e B, os dois circuitos são equivalentes.

Exemplo 2 – Transformação de fontes como método de simplificação de circuitos

Q: Calcule a potência dissipada na resistência de 3Ω.

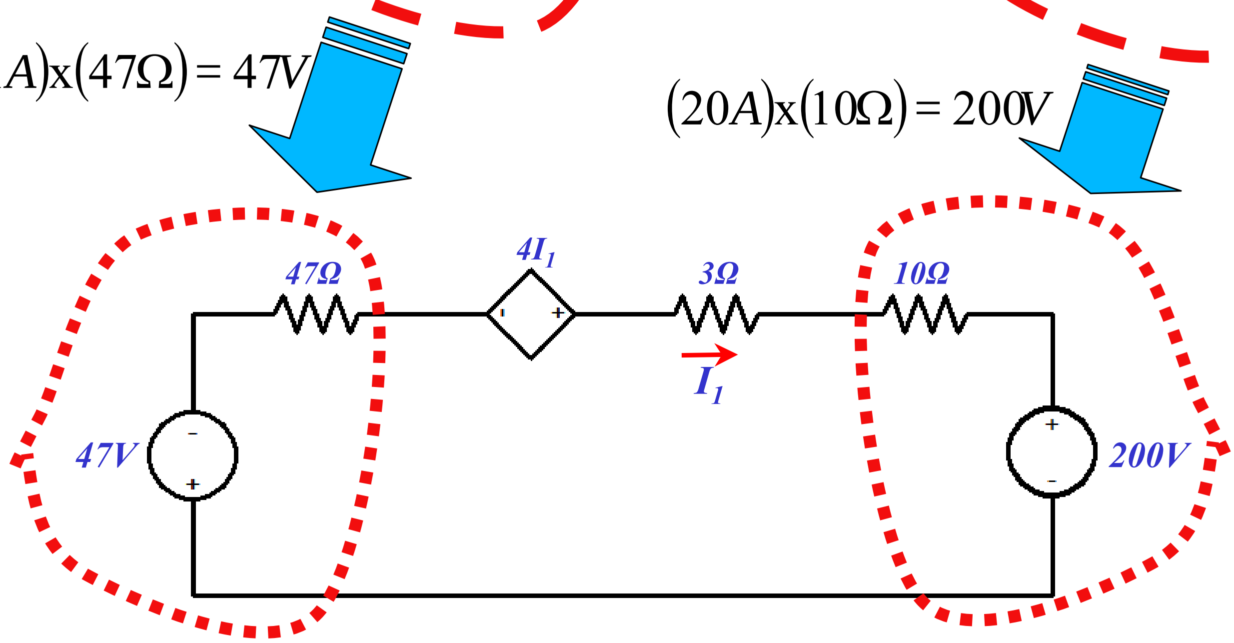


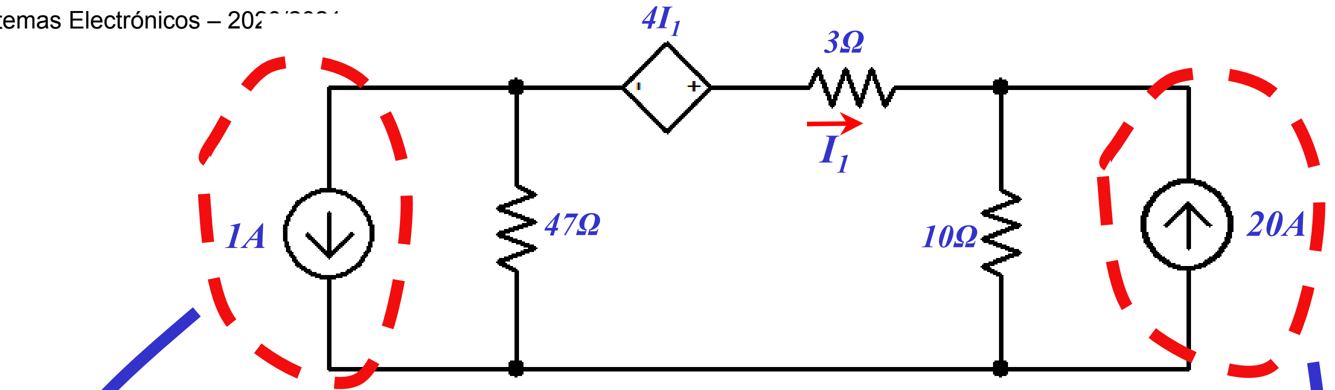
- **Para responder à questão só temos de calcular a corrente I_1.**



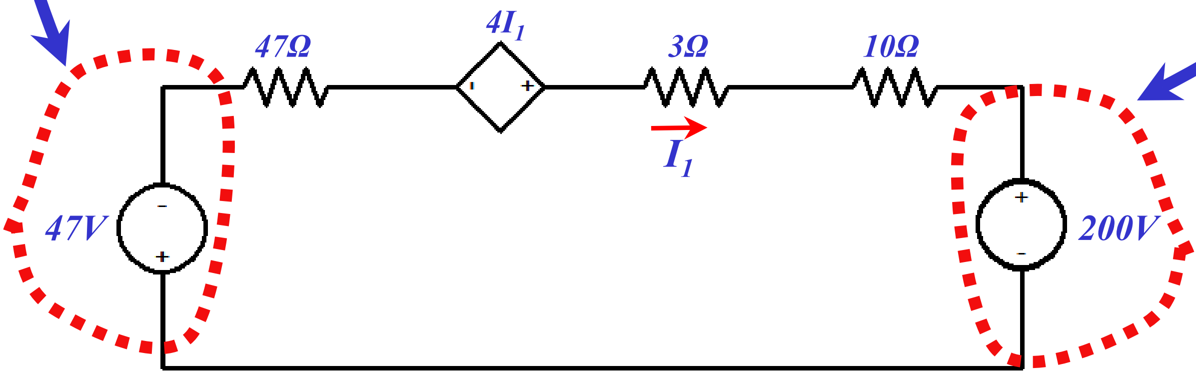
$(1A)x(47\Omega) = 47V$

$(20A)x(10\Omega) = 200V$

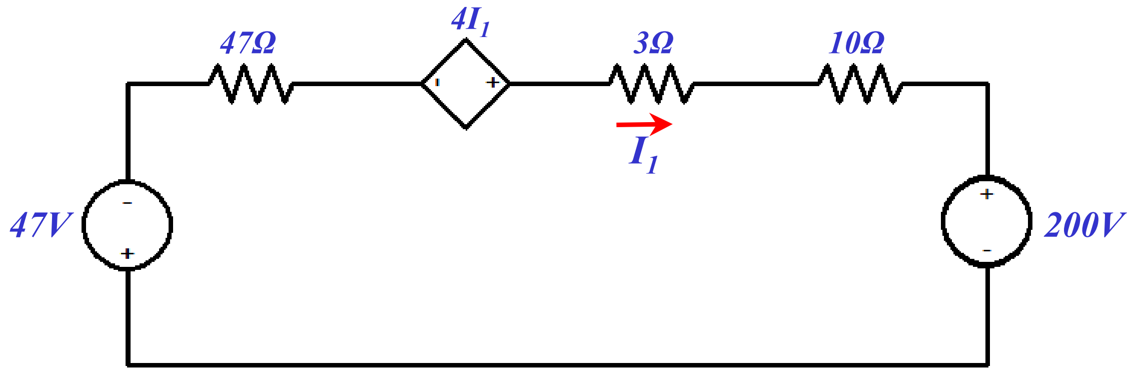




Atenção à polaridade das fontes!



Exemplo 2 – Transformação de fontes como método de simplificação de circuitos



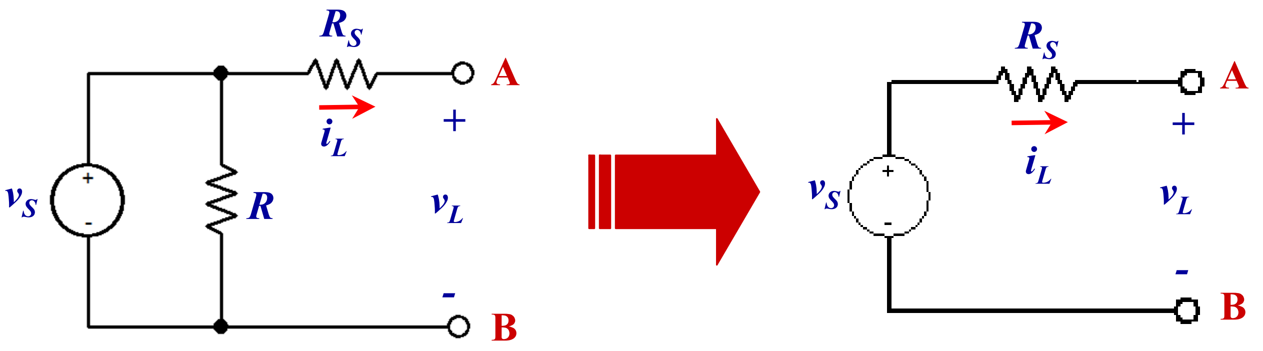
- **O circuito obtido tem apenas um loop, o que facilita o cálculo de I_1**

$$47+47I_1-4I_1+3I_1+10I_1+200=0$$
$$56I_1=-247$$
$$I_1=-4.41A$$

$$\boxed{P_{3\Omega}=R(I_1)^2=3(-4.41)^2=58.3W}$$

Resistências em posições *estranhas*

→ Resistência em paralelo com fonte de tensão



- **Aplicando KVL ao circuito:**

$$-v_S + R_S i_L + v_L = 0$$

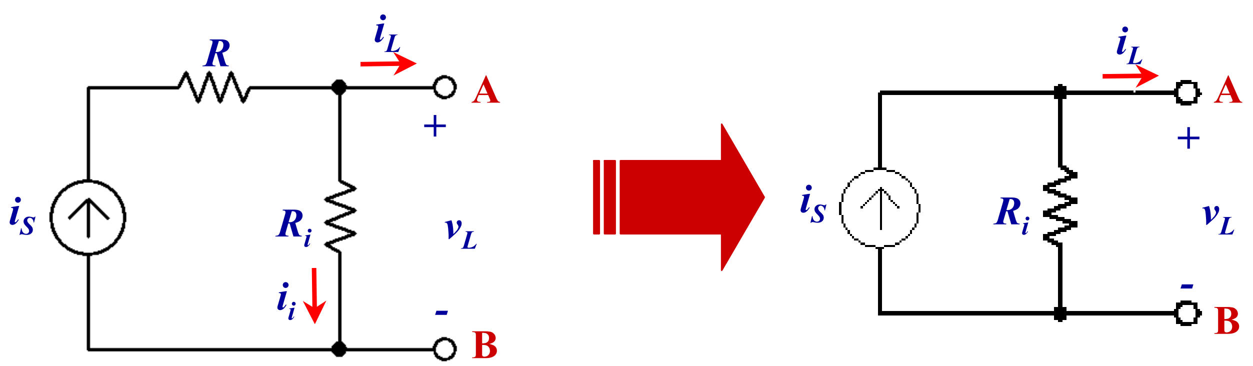
$$v_L = -R_S i_L + v_S$$

- **… igual à fonte real de tensão!**

- **Do ponto de vista dos terminais A e B, o circuito é equivalente a uma fonte real de tensão.**

Resistências em posições *estranhas*

→ Resistência em série com fonte de corrente



- **Aplicando KCL ao nó superior:**

$$i_L = -i_i + i_S = -\frac{1}{R_i} v_L + i_S$$

- **… igual à fonte real de corrente!**

- **Do ponto de vista dos terminais A e B, o circuito é equivalente a uma fonte real de corrente.**