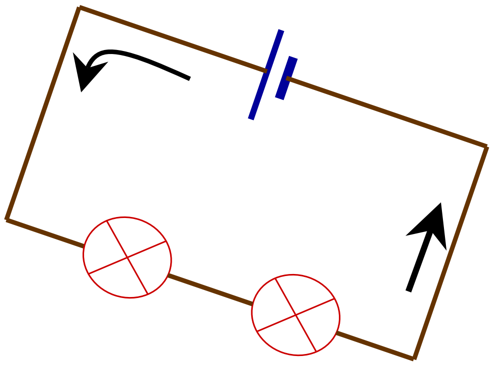
Sistemas Electrónicos

Capítulo 1 , Parte 6: Circuitos básicos RL e RC

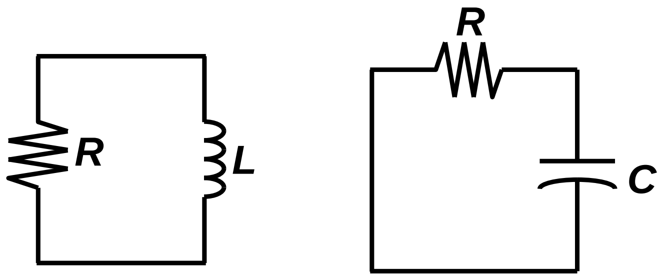


Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

Sumário

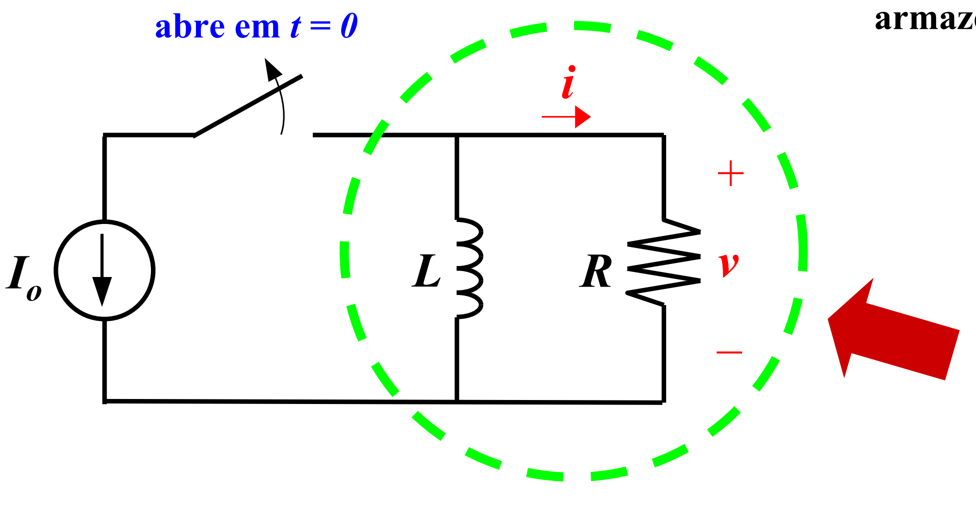
- **Resposta natural do circuito RL**
- **Energia no circuito RL;**
- **Propriedades da resposta exponencial**
- **Distinção entre $t = 0^-$ e $t = 0^+$**
- **Circuitos RL com várias bobinas e resistências**
- **Resposta natural do circuito RC**
- **Circuitos RC com vários condensadores e resistências**
- **Resposta completa de circuitos RL e RC;**
- **Função degrau unitário**

Resposta natural de circuitos RL e RC



Resposta natural de circuitos RL e RC

- **O termo resposta natural (resposta livre ou resposta transitória) refere-se ao comportamento que o circuito exibe (em termos de correntes e tensões) quando a energia armazenada na bobina ou condensador é libertada;**

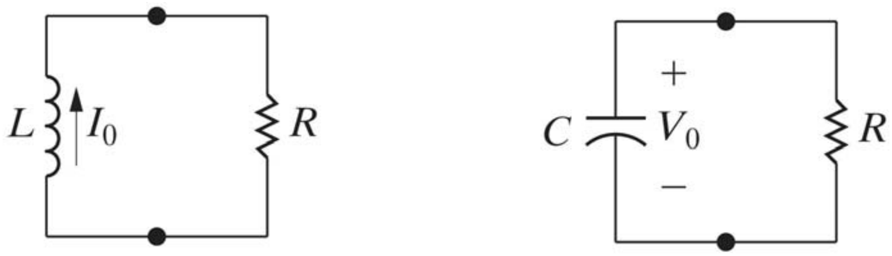


- **Em $t = 0$ a energia armazenada na bobina é:**

$$W_0 = \frac{1}{2} L I_0^{\ 2}$$

Queremos saber o que se passa aqui para $t > 0$

Resposta natural de circuitos RL e RC



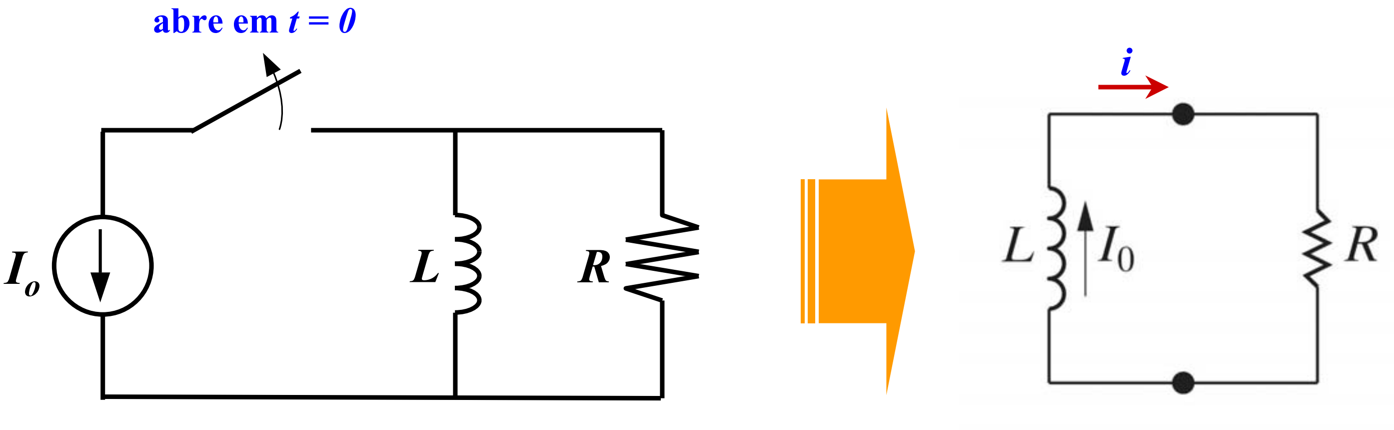
- Como o circuito não tem para já fontes externas, o seu comportamento é ditado apenas pela sua própria natureza e pelos valores de ***L*** ou ***C*** e de ***R;***

- A resposta natural do circuito é dada pela solução da equação diferencial (linear homogénea de 1ª ordem) que o caracteriza;

- RL e RC são circuitos de 1ª ordem porque são descritos por equações lineares de 1ª ordem.

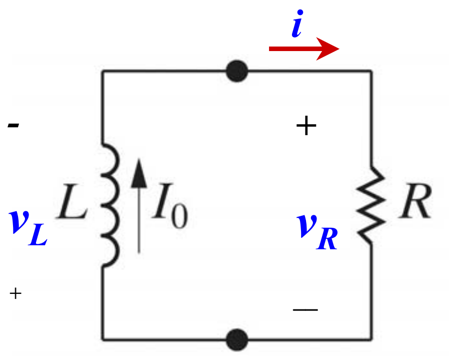
Resposta natural do circuito RL

Resposta natural do circuito RL



$$I_0 = i_{(t=0)}$$

Resposta natural do circuito RL



$$I_0 = i_{(t=0)}$$

- **Aplicando KVL:**

$$v_L + v_R = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad L\frac{di}{dt} + \mathrm{R}i = 0$$

- **Há várias maneiras de determinar uma expressão para *i(t)* que satisfaça a equação diferencial. Uma dela é o método das variáveis separáveis.**

Método das variáveis separáveis

$$L\frac{di}{dt}+\mathrm{Ri}=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{di}{dt}=-\frac{R}{L}i \;\Leftrightarrow\; \frac{di}{i}=-\frac{R}{L}dt$$

Integrando

$$\int_{I_0}^{i(t)}\frac{di}{i}=\int_0^t-\frac{R}{L}dt \;\Leftrightarrow\; \ln i\Big|_{I_0}^{i(t)}=-\frac{R}{L}t\Big|_0^t \;\Leftrightarrow\; \ln i(t)-\ln I_0=-\frac{R}{L}t$$

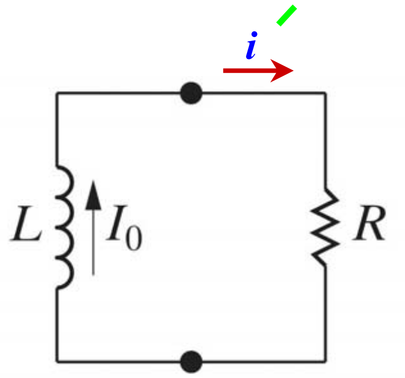
$$\Leftrightarrow\; \ln\frac{i(t)}{I_0}=-\frac{R}{L}t$$

A solução da equação diferencial é $i(t)=I_0e^{-\frac{R}{L}t}$

que confirma *i(0) = I₀*

Energia no circuito RL

$$i(t)=I_0e^{-\frac{R}{L}t}$$



- **Em *t = 0* a energia armazenada na bobina é**

$$W_0=\frac{1}{2}LI_0^{\,2}$$

- **Para *t > 0*, esta energia é transferida para a resistência onde é transformada em calor;**

- **A energia total que é entregue à resistência é:**

$$W_R=\int_0^\infty P_R dt=\int_0^\infty Ri^2dt$$

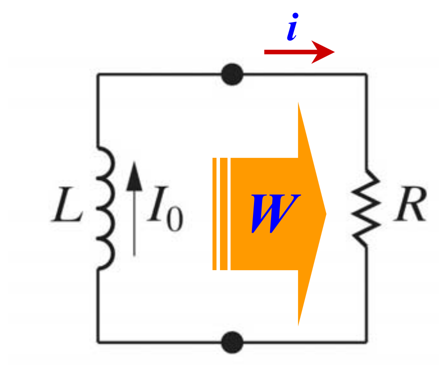
Energia no circuito RL

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$W_R = \int_0^\infty Ri^2 dt = \int_0^\infty R\left(I_0 e^{-\frac{R}{L}t}\right)^2 dt = RI_0^{\,2}\int_0^\infty e^{-2\frac{R}{L}t}dt$$

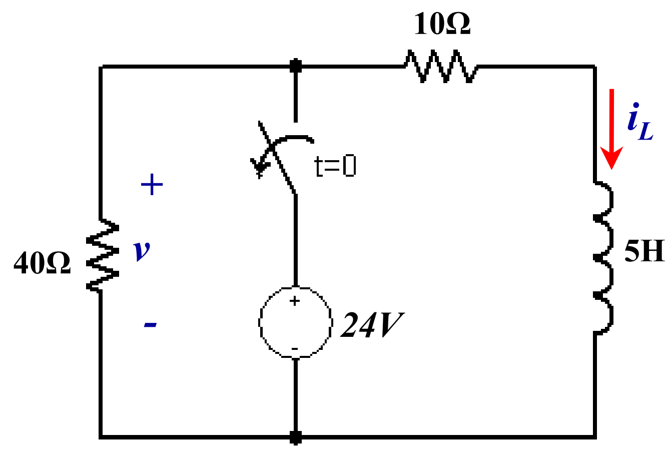
$$W_R = RI_0^{\,2}\left(-\frac{L}{2R}\right)e^{-2\frac{R}{L}t}\Big|_0^\infty$$

$$W_R = \frac{1}{2}LI_0^{\,2}$$



- **Ou seja, a energia total entregue à resistência é igual à energia inicial na bobina.**

Exemplo 1 - Calcular a tensão *v* para *t = 0.2s*.



Começamos por calcular a corrente na bobina para $t \leq 0$

A bobina é um curto-circuito para DC, portanto

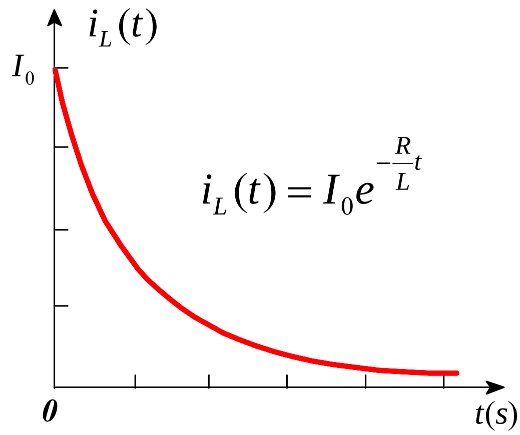
$$i_L(0) = \frac{24}{10} = 2.4A = I_0$$

Para $t > 0$ sabemos que a corrente vai variar de acordo com a expressão

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

Em que $R = 10 + 40 = 50\Omega$ e $L = 5H$ $\qquad i_L(t) = 2.4e^{-10t} \qquad t \geq 0$

Exemplo 1



$$i_L(t) = 2.4e^{-10t}$$

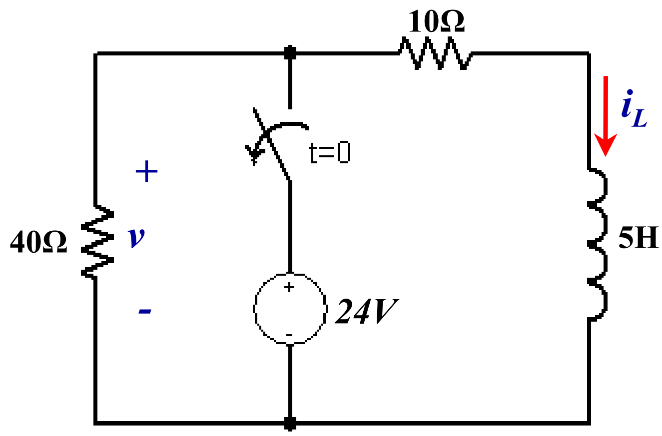
A tensão *v* é

$$v(t) = 40(-i_L(t))$$

$$v(t) = -96e^{-10t} \qquad t \geq 0$$

Para *t = 0.2s* teremos

$$v(0.2s) = -96e^{-10(0.2)} = -13V$$

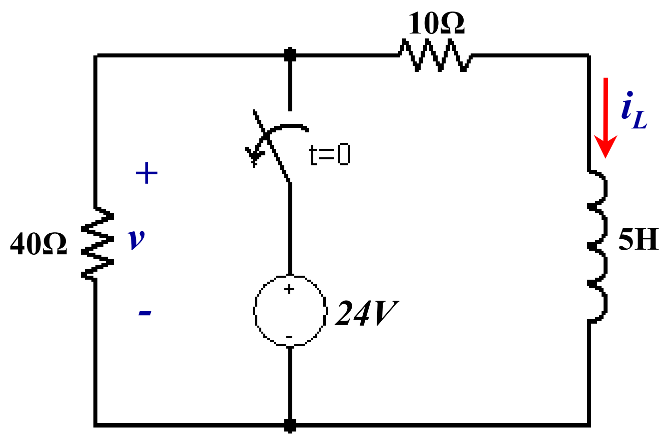


Solução básica do circuito RL

No exemplo anterior vimos que

$$i_L(t) = 2.4e^{-10t}$$

$$v(t) = -96e^{-10t}$$



- **A expressão de $i_L(t)$ é a chamada solução básica do problema.**

- **Duma forma geral, todas as correntes e tensões num circuito *RL* terão a forma genérica**

$$Ke^{-\frac{R}{L}t}$$

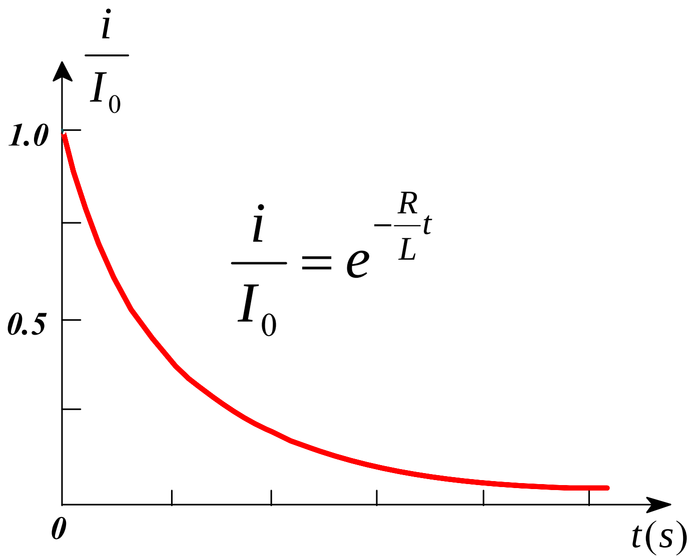
sendo *K* uma constante determinada através das condições iniciais de cada tensão ou corrente.

Resposta natural do circuito RL

Propriedades da resposta exponencial

Propriedades da resposta exponencial

- **A resposta do circuito depende apenas da razão *L/R*;**
- **Quanto maior for *L/R*, mais tempo leva *i* a decair para zero;**
- **Para quantificar esta dependência, calculamos o tempo que i/I_0 levaria para chegar a zero, se decaísse à taxa inicial;**



- **A taxa inicial de decaimento é dada pela derivada de i/I_0 em $t = 0$:**

$$\left.\frac{d}{dt}\left(\frac{i}{I_0}\right)\right|_{t=0} = -\left.\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\right|_{t=0} = -\frac{R}{L}$$

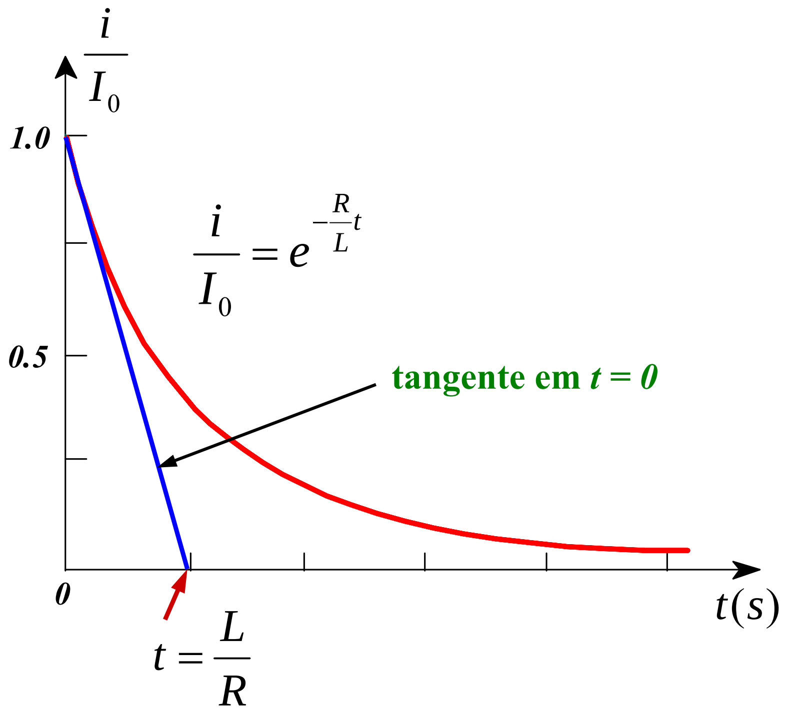
- Se i/I_0 decaísse constantemente a esta taxa, a sua equação seria:

$$\frac{i}{I_0} = -\frac{R}{L}t + 1$$

e a corrente anular-se-ia no instante $t = L/R$;

- Este valor designa-se por **constante de tempo**:

$$\tau = \frac{L}{R}$$



- A constante de tempo dum circuito dá uma ideia quantitativa da velocidade a que o circuito reage.

- Calculemos i/I_0 para $t = \tau$

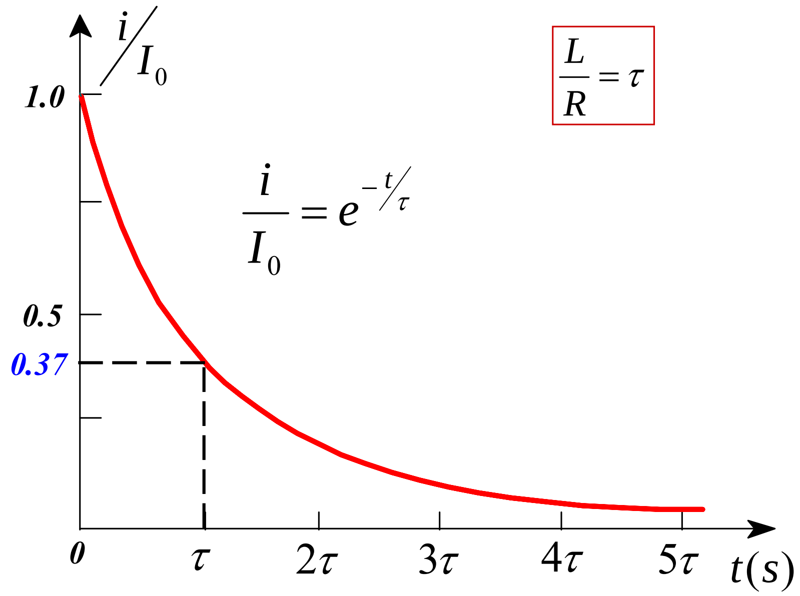
$$\left. e^{-\frac{R}{L}t} \right|_{t=\tau} = e^{-1} = 0.368$$

- Ou seja, para $t = \tau$ a corrente i decai para *36.8%* do seu valor inicial;

- Para outros valores de t, i/I_0 é:

t	i/I_0
τ	0.368
2τ	0.135
3τ	0.0498
4τ	0.0183
5τ	0.0067

$$\boxed{\frac{L}{R} = \tau}$$



- Para $t = 5\tau$ a corrente corresponde a menos que *1%* do seu valor inicial;

- Em circuitos práticos considera-se que para $t \geq 5\tau$ a corrente é nula.

Distinção entre $t = 0^-$ e $t = 0^+$

Distinção entre $t = 0^-$ e $t = 0^+$

- **Na resolução destes problemas é comum distinguir-se *dois instantes*:**
  - **$t = 0^-$ → o instante *imediatamente antes* da abertura do interruptor;**
  - **$t = 0^+$ → o instante *imediatamente depois* da abertura do interruptor.**

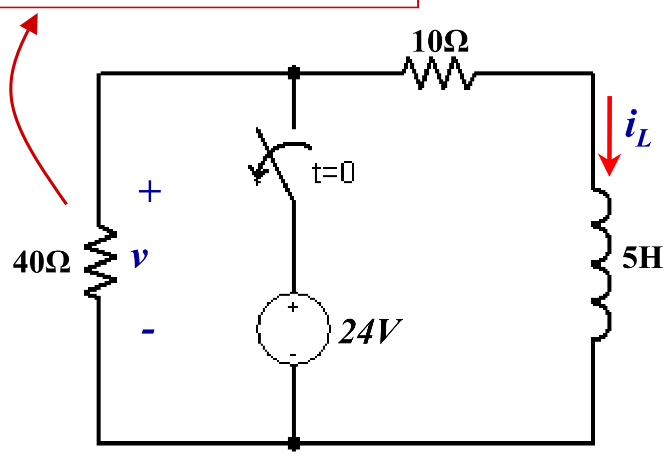
$$\boxed{v(t) = -96e^{-10t} \qquad t \geq 0}$$

Por exemplo, a tensão v em $t = 0^+$ é

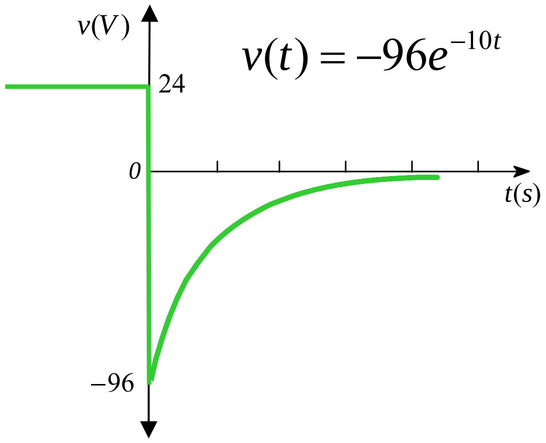
$$v(0^+) = v(0) = -96V$$

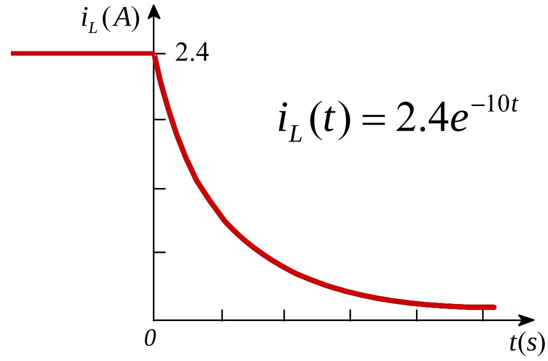
e em $t = 0^-$ o valor de v é

$$v(0^-) = 24V$$

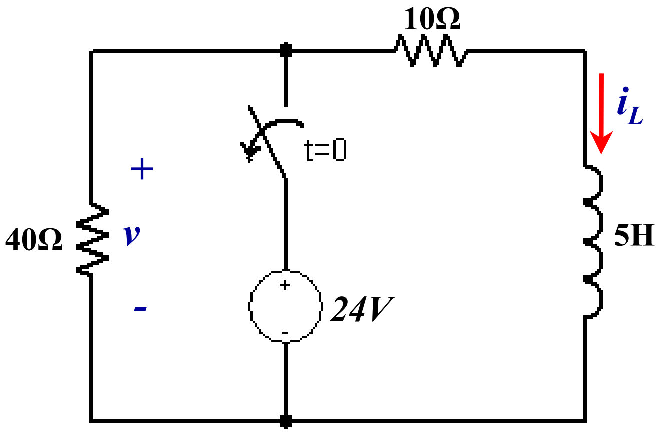


Distinção entre $t = 0^-$ e $t = 0^+$





Temos portanto $v(0^-) \neq v(0^+)$
(acontece por vezes)



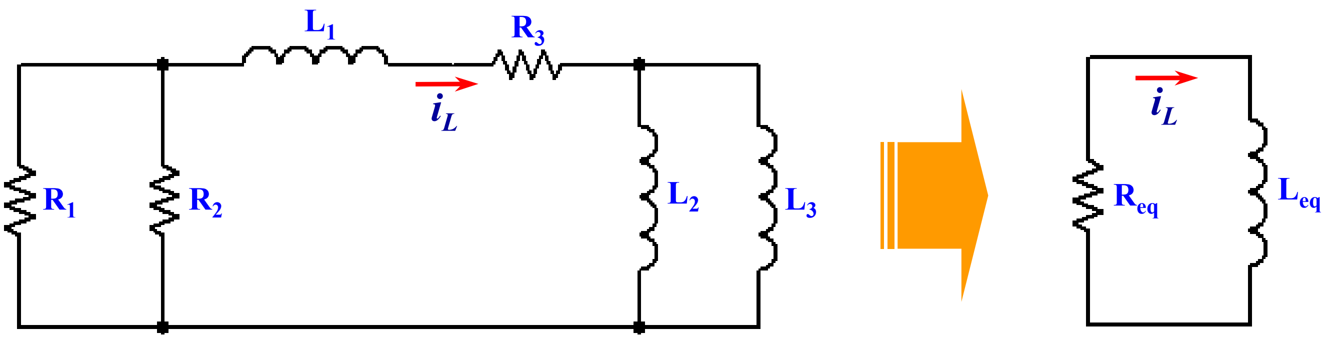
- **Mas nas bobinas temos SEMPRE!**

$$i_L(0^-) = i_L(0^+)$$

(caso contrário di_L/dt seria infinito para $t = 0$)

Circuitos RL com mais bobinas e resistências

- **Podemos estender os resultados anteriores a circuitos com várias bobinas e resistências:**

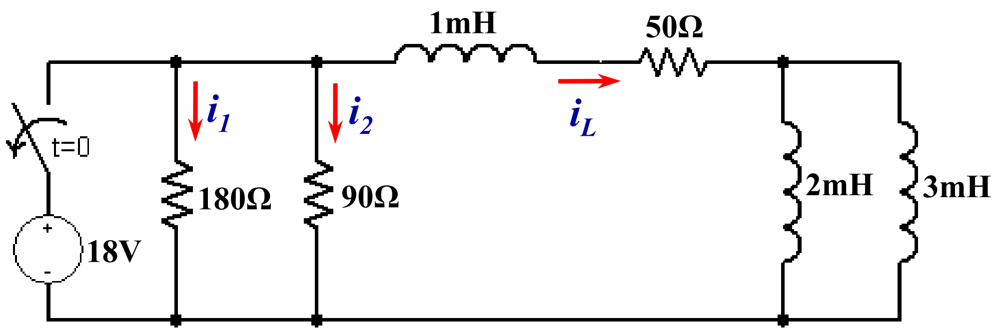


em que $L_{eq} = L_1 + \dfrac{L_2 L_3}{L_2 + L_3}$ e $R_{eq} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3$

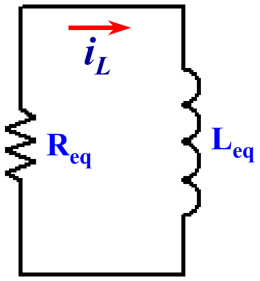
- **A constante de tempo do circuito é** $\tau = \dfrac{L_{eq}}{R_{eq}}$

$$\boxed{i_L(t) = i_L(0)e^{-t/\tau}}$$

Exemplo 2 - Calcular $i_L(t)$ e $i_2(t)$ para todo o t.



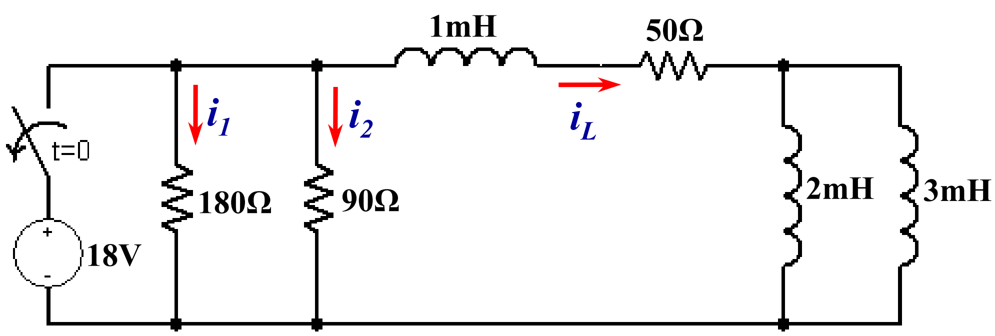
Começamos por calcular L_{eq}, R_{eq} e a constante de tempo, τ :



$$L_{eq} = 1 + \frac{(2).(3)}{2+3} = 2.2mH \qquad R_{eq} = \frac{(180).(90)}{180+90} + 50 = 110\Omega$$

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}} = \frac{0.0022}{110} = 20\mu s \qquad \frac{1}{\tau} = 50000 s^{-1}$$

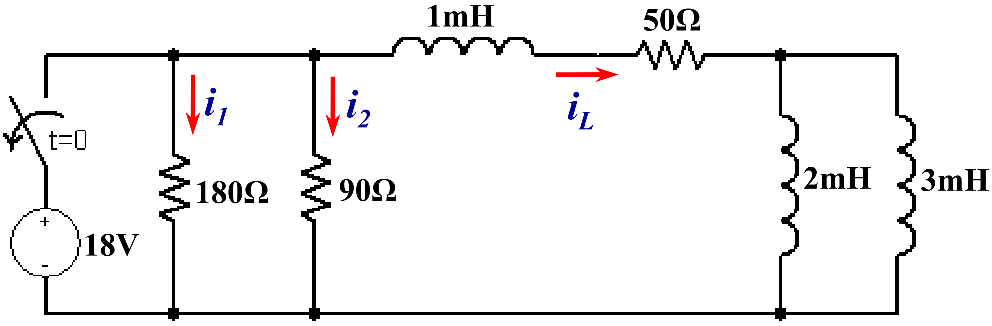
Note-se que, apesar de termos calculado os valores de L_{eq} e R_{eq}, vamos continuar com o circuito original para não perdermos de vista $i_2(t)$.



Depois do interruptor abrir, qualquer corrente ou tensão no circuito será dada por

$$Ke^{-t/\tau} = Ke^{-50000t}$$

Em particular, para a corrente $i_L(t)$ $\quad K = i_L(0^+) = i_L(0^-)$



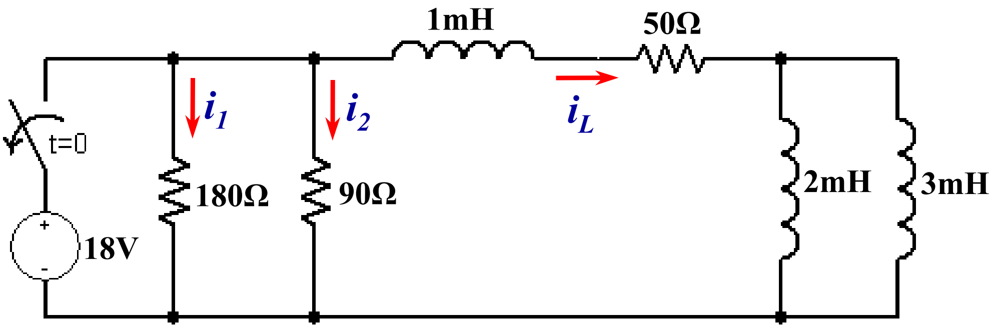
$$i_L(0^-) = \frac{18}{50} = 0.36A = i_L(0^+) \quad \Rightarrow \quad i_L = \begin{cases} 0.36\ A & t < 0 \\ 0.36e^{-50000t}\ A & t \geq 0 \end{cases}$$

A corrente $i_2(t)$ para $t > 0$ será dada por $i_2(0^+)e^{-50000t}$

Imediatamente antes do interruptor abrir, sabemos que $i_2(0^-) = \dfrac{18}{90} = 0.2A$

Mas $i_2(0^-)$ não nos permite determinar $i_2(0^+)$!

Sistemas Electrónicos – 2020/2021



$i_2(0^+)$ deve ser calculado partindo de $i_L(0^+)$

usando a fórmula do divisor de corrente:

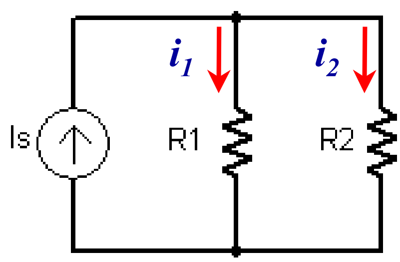
$$i_2(0^+) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}(-i_L(0^+))$$

$$= \frac{180}{180+90}(-0.36) = -0.24A$$

pelo que

$$i_2 = \begin{cases} 0.2\ A & t < 0 \\ -0.24e^{-50000t}\ A & t \geq 0 \end{cases}$$

Divisor de corrente



$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_s$$

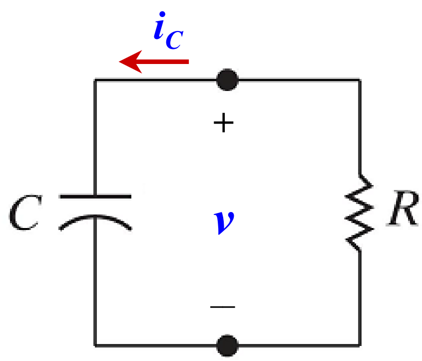
Resposta natural do circuito RC

Resposta natural do circuito RC

- **Aplicando KVL:**

$$\mathrm{i_C} = \mathrm{C}\frac{dv}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{v}{R} = \mathrm{C}\frac{dv}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{C}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$



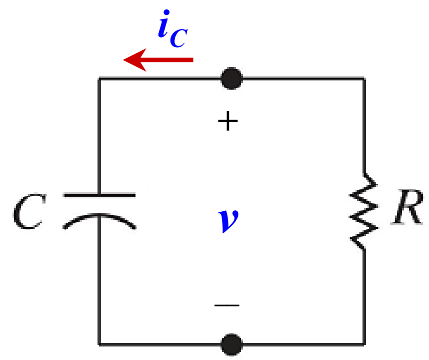
$$V_0 = v_{(t=0)}$$

… equação que é muito semelhante à do circuito RL: $$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

Se substituíssemos nesta expressão *i* por *v*, *L* por *C* e *R* por *G* (*1/R*), obteríamos a expressão correspondente ao circuito RC.

- **Isto acontece porque o circuito RC é dual do circuito RL.**

Resposta do circuito RC



$$V_0 = v_{(t=0)}$$

- **Sendo os circuitos duais, se a resposta em corrente do circuito RL é**

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

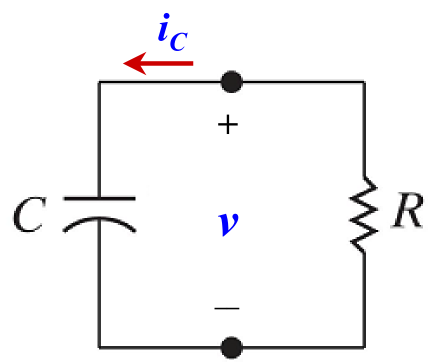
então a resposta em tensão do circuito RC será

$$v(t) = V_0 e^{-t/RC}$$

- **Ou seja, partindo do valor inicial V_0, a tensão v decai exponencialmente para zero à medida que o condensador se descarrega sobre a resistência;**

- **Todo o estudo desenvolvido até aqui para o circuito RL pode ser aplicado ao circuito RC.**

Constante de tempo



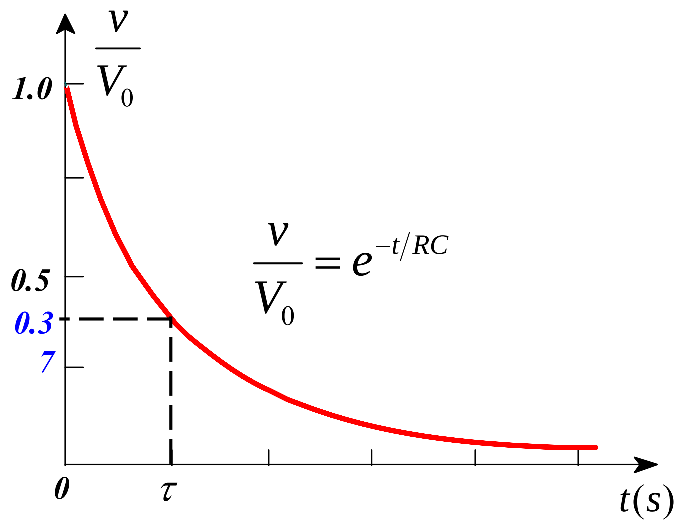
$$V_0 = v_{(t=0)}$$

- **Também por analogia, se a constante de tempo do circuito RL é**

$$\tau = \frac{L}{R}$$

então a constante de tempo do circuito RC será

$$\tau = RC$$



- **Quanto maior C, maior a carga armazenada e maior o tempo de descarga do condensador;**

- **Quanto maior R, menor a corrente de descarga, e maior o tempo de descarga do condensador.**

Circuitos RC com mais condensadores e resistências

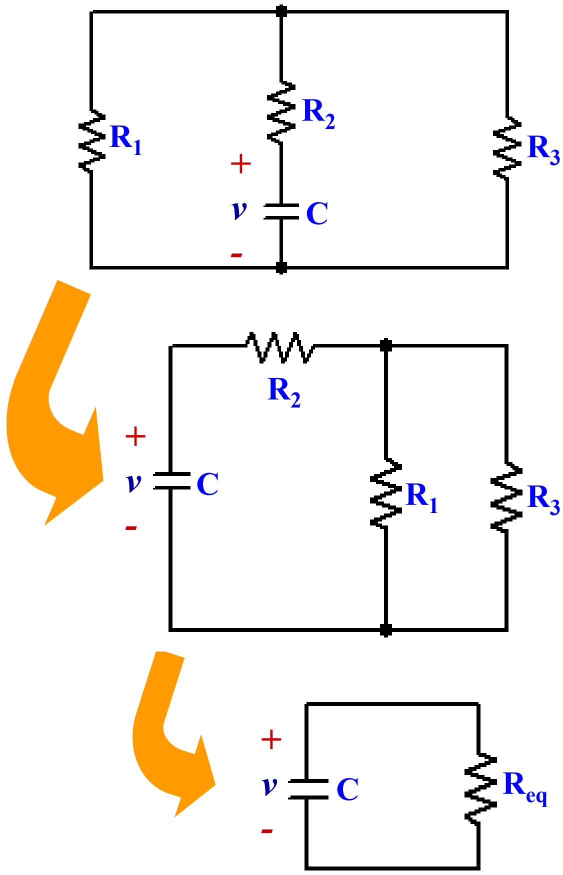
- **Para usar os resultados anteriores em circuitos com várias resistências, calculamos a resistência equivalente *vista* pelo condensador:**

$$R_{eq} = R_2 + R_1 // R_3 = R_2 + \frac{R_1.R_3}{R_1 + R_3}$$

- **A constante de tempo do circuito é** $\tau = R_{eq}C$ **e**

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$

- **Se tivéssemos mais condensadores, teríamos de calcular** C_{eq} **de forma a reduzir o problema a um circuito RC simples.**

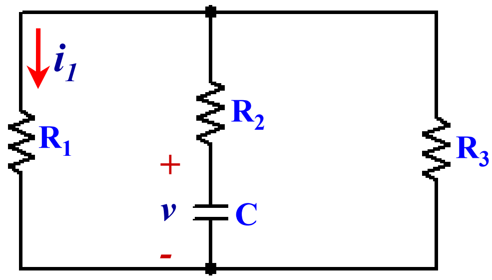


Aspectos a ter em atenção

- **Todas as correntes e tensões num circuito RC terão a forma genérica**

$$Ke^{-t/\tau}$$

sendo K **uma constante determinada através das condições iniciais de cada tensão ou corrente.**



$$\boxed{V_0 = v(t=0)}$$

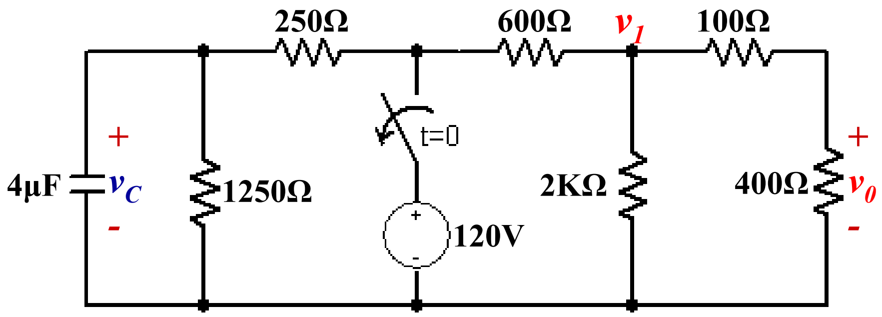
- **A tensão no condensador será** $v(t) = v(0^+)e^{-t/\tau}$

- **Havendo descontinuidades provocadas por interruptores, no condensador teremos SEMPRE** $v(0^+) = v(0^-)$

- **A corrente** $i_1(t)$ **será dada por** $i_1(t) = i_1(0^+)e^{-t/\tau}$

Mas é bem provável que $i_1(0^+) \neq i_1(0^-)$

Exemplo 3 - Determinar v_0 para $t = 0^-$, $t = 0^+$ e $t = 1.3ms$.

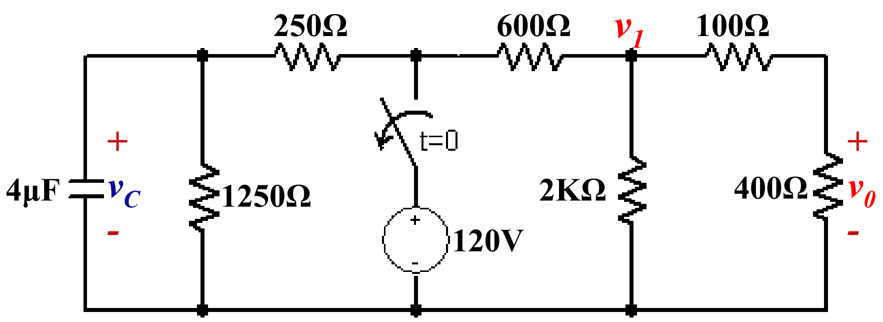


Comecemos por determinar o valor de v_0 para $t = 0^-$

Assim, antes do interruptor abrir, a tensão em v_0 é

$$v_0(0^-) = v_1(0^-)\frac{400}{100+400} \qquad v_1(0^-) = \frac{2k//(100+400)}{2k//(100+400)+600}120 = 48V$$

pelo que $$v_0(0^-) = 48\frac{400}{100+400} = 38.4V$$



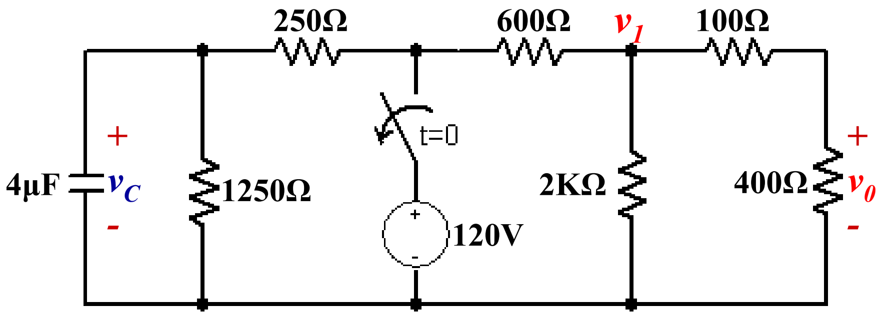
Consideremos agora o valor de v_0 para $t = 0^+$

$v_0(0^+)$ pode ser diferente de $v_0(0^-)$. Deve ser calculado a partir de $v_C(0^+) = v_C(0^-)$

$$v_C(0^-) = 120\frac{1250}{1250+250} = 100V = v_C(0^+)$$

$$v_0(0^+) = v_1(0^+)\frac{400}{100+400} \qquad v_1(0^+) = \frac{2k//(100+400)}{2k//(100+400)+600+250}v_C(0^+) = 32V$$

pelo que $v_0(0^+) = 25.6V$



- **A tensão** ***$v_0(t)$*** **é dada por** $v_0(t) = v_0(0^+)e^{-t/\tau}$ $\tau = R_{eq}C$

em que $R_{eq} = [(400+100)//2K + 600 + 250]//1250 = 625\Omega$

pelo que $\tau = R_{eq}C = (625)(4.10^{-6}) = 2.5ms$

assim $v_0(t) = (25.6)e^{-400t}$

e portanto $v_0(1.3ms) = (25.6)e^{-400(0.0013)} = 15.22V$