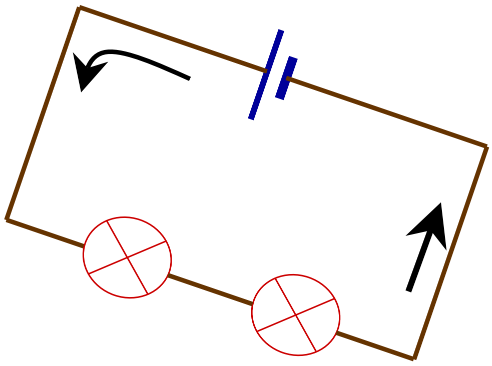
Sistemas Electrónicos

Capítulo 1 , Parte 5: Circuitos em regime sinusoidal



Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

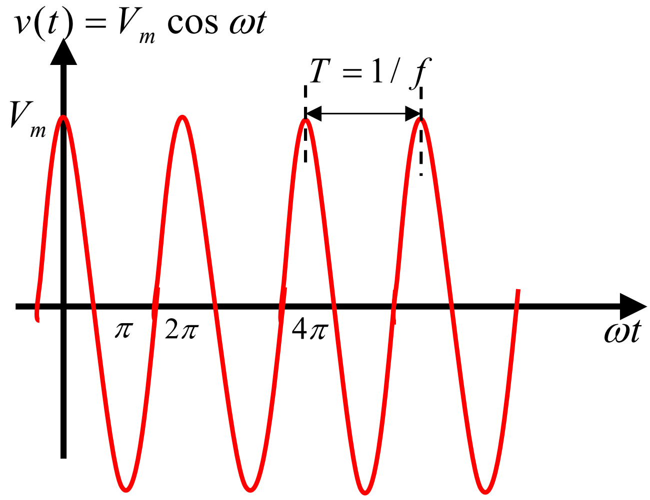
Sumário

- Introdução
- Resposta forçada a uma função sinusoidal;
- Função forçadora complexa;
- Fasores;
- Relações fasoriais para R, L e C;
- Leis de Kirchhoff com fasores;
- Impedância, admitância, condutância e susceptância
- Extensão das técnicas de análise aos circuitos em regime sinusoidal estacionário: análise nodal, análise de malhas, principio da sobreposição, transformação de fontes, teoremas de Thévenin e Norton;
- Diagramas fasoriais;
- Resposta em função da frequência;
- Potência e valor eficaz.

Introdução

- O estudo da resposta dos circuitos a uma **função forçadora** sinusoidal é importante porque:

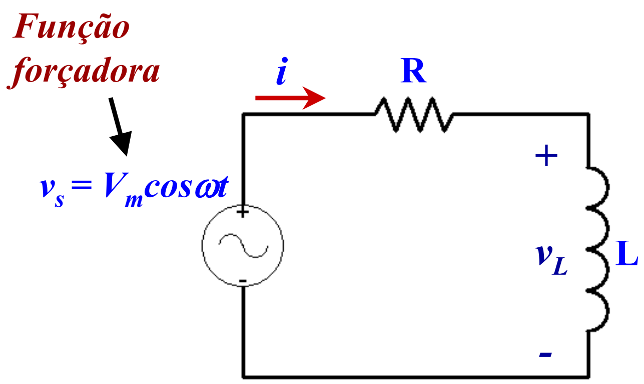
  - Muitos fenómenos naturais são descritos por sinusóides;
  - A sinusóide goza da propriedade de *manter a forma* em circuitos lineares;
  - Tensões sinusoidais são geradas facilmente; a energia eléctrica disponível é sinusoidal;
  - Qualquer função matemática periódica pode ser decomposta numa soma de sinusóides – conhecendo a resposta do circuito a cada uma das sinusóides podemos calcular a resposta à função original.



Resposta a uma função sinusoidal

Resposta a uma função sinusoidal

- **Aplicando KVL ao circuito:**



$$-v_s + Ri + v_L = 0$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_m \cos \omega t$$

- **Dado que a resolução desta equação passa pela derivação e pela integração da função forçadora, é de prever que a sua solução, *i(t)*, tenha a mesma forma (e a mesma frequência) da função forçadora.**

Determinação da resposta

- **Vamos portanto admitir que a solução tem a forma…**

$$i(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$ **em que *A* e ϕ são constantes a determinar.**

- **Substituindo na equação diferencial…**

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos \omega t$$

… obtemos

$$-LA\omega \sin(\omega t + \phi) + RA\cos(\omega t + \phi) = V_m \cos \omega t$$

- **Ora, da trigonometria sabemos que**

$$\cos(\omega t + \phi) = \cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi$$
$$\sin(\omega t + \phi) = \sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi$$

Determinação da resposta

- **Efectuando estas substituições e separando os termos em seno e coseno…**

$$\left(-RA\sin\phi - LA\omega\cos\phi\right)\sin\omega t + \left(RA\cos\phi - V_m - LA\omega\sin\phi\right)\cos\omega t = 0$$

Esta equação tem de ser verdadeira para todos os valores de *t*, algo que só é possível se os factores do seno e do coseno forem zero. Assim:

$$RA\sin\phi + LA\omega\cos\phi = 0 \qquad RA\cos\phi - V_m - LA\omega\sin\phi = 0$$

Conjugando as duas equações anteriores é possível chegar a:

$$A\sin\phi = -\frac{\omega L V_m}{R^2+\omega^2L^2} \qquad A\cos\phi = \frac{RV_m}{R^2+\omega^2L^2}$$

Determinação da resposta

Para determinar ϕ fazemos

$$\frac{A\sin\phi}{A\cos\phi} = tg\phi = -\frac{\omega L}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi = -arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)}$$

e para calcular *A*

$$A^2\sin^2\phi + A^2\cos^2\phi = A^2 = \frac{\omega^2L^2{V_m}^2}{\left(R^2+\omega^2L^2\right)^2} + \frac{R^2{V_m}^2}{\left(R^2+\omega^2L^2\right)^2}$$

$$\boxed{A = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}}$$

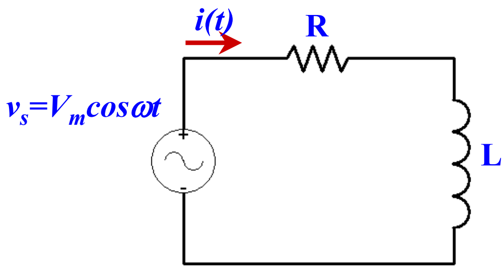
- **A solução para *i(t)* é portanto**

$$i(t) = A\cos\left(\omega t + \phi\right) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\left(\omega t - arctg\frac{\omega L}{R}\right)}$$

Conclusões

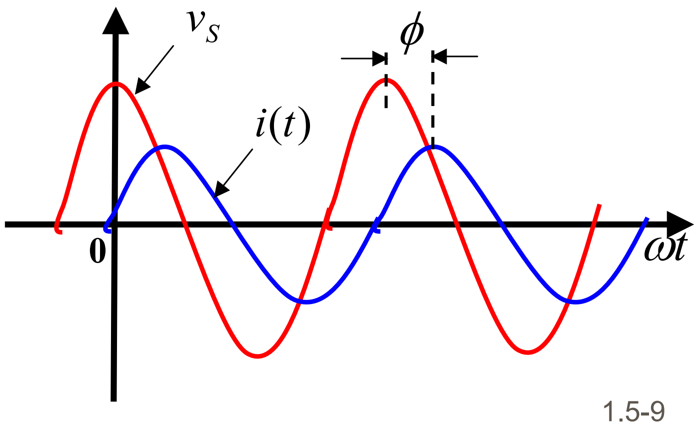
$$\boxed{i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - arctg\,\frac{\omega L}{R}\right)}$$

- **A amplitude da resposta é proporcional à amplitude da função forçadora – se assim não fosse o circuito não era linear!**

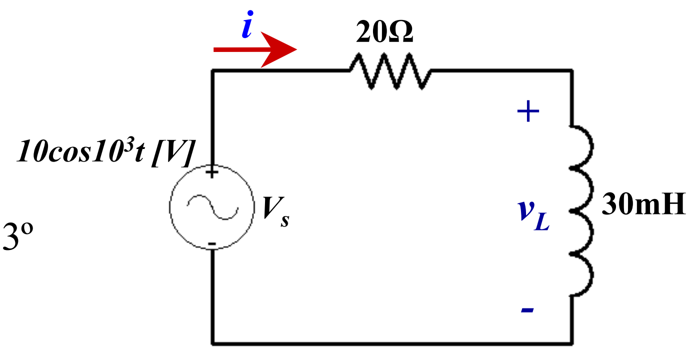


- **A amplitude da resposta diminui com *R*, *L* e *ω*, mas não de forma proporcional;**

- **A corrente está atrasada em relação à tensão de um ângulo, *ϕ*, entre e *0* e *90º*:**
  - ***L = 0*** **- corrente está em fase com a tensão;**
  - ***R = 0*** **- corrente está atrasada 90º.**



Exemplo 1 – Determinar $i(t)$ e $v_L(t)$



$$\phi = -arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right) =$$

$$-\,arctg\left(\frac{10^3(0.03)}{20}\right) = -0.9828rad = -56.3^{\circ}$$

$$A = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{10}{\sqrt{20^2 + 30^2}} = 277mA$$

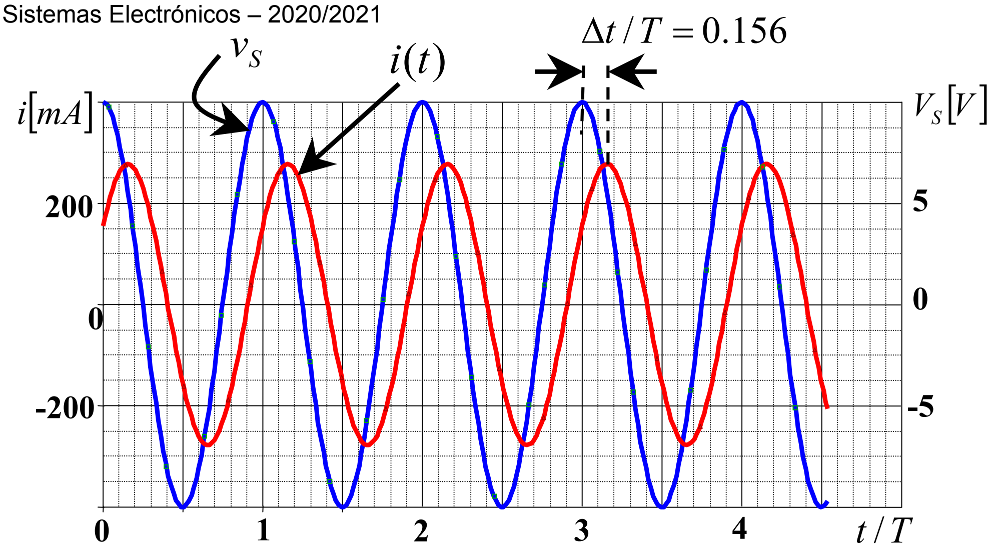
A corrente no circuito é portanto

$$i = 277\cos\left(10^3 t - 56.3^{\circ}\right) \quad [mA]$$

e a tensão na bobina

$$v_L = L\frac{di}{dt} = -(0.03)0.277\left(10^3\right)\sin\left(10^3 t - 56.3^{\circ}\right) = \text{-}8.31\sin\left(10^3 t - 56.3^{\circ}\right)$$

$$v_L = 8.31\cos\left(10^3 t - 56.3^{\circ} + 90^{\circ}\right) \qquad [V]$$



$\omega = 10^3 rad/s$

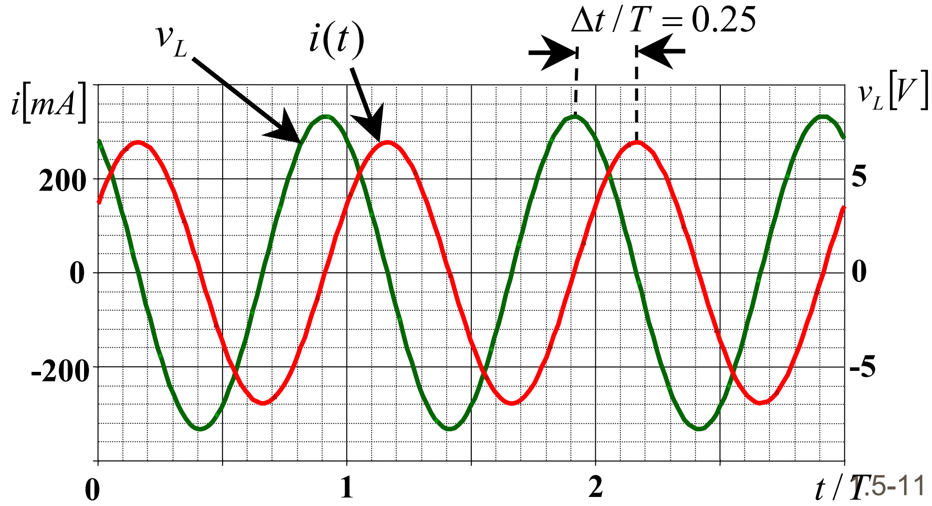
$T = 6.28ms$

- **O desfasamento entre v_S e a corrente na bobina é**

$0.156 \text{x} 6.28 = 0.98ms$

$0.156 \text{x} 360^o = 56.3^o$

- **O desfasamento entre a tensão na bobina e a corrente é de *90º* (já que a tensão é proporcional à derivada da corrente).**



Função forçadora complexa

Função forçadora complexa

- **O método de análise anterior é demasiado complexo para ter utilidade em cálculos à mãos!**

- **As contas ficam muito mais simples se, em lugar de usar esta função forçadora,**

$$v_S = V_m \cos \omega t$$ **Função forçadora sinusoidal**

usarmos antes esta:

$$v_S = V_m e^{j\omega t}$$ **Função forçadora complexa**

E porque é que esta mudança para a função complexa faz sentido?

Função forçadora complexa

… Porque segundo a *Fórmula de Euler*:

$$\underbrace{V_m e^{j\omega t}}_{\text{Função forçadora complexa}} = \underbrace{V_m \cos \omega t}_{\text{Função forçadora real dada}} + \underbrace{jV_m \sin \omega t}_{\text{Função forçadora imaginária}}$$

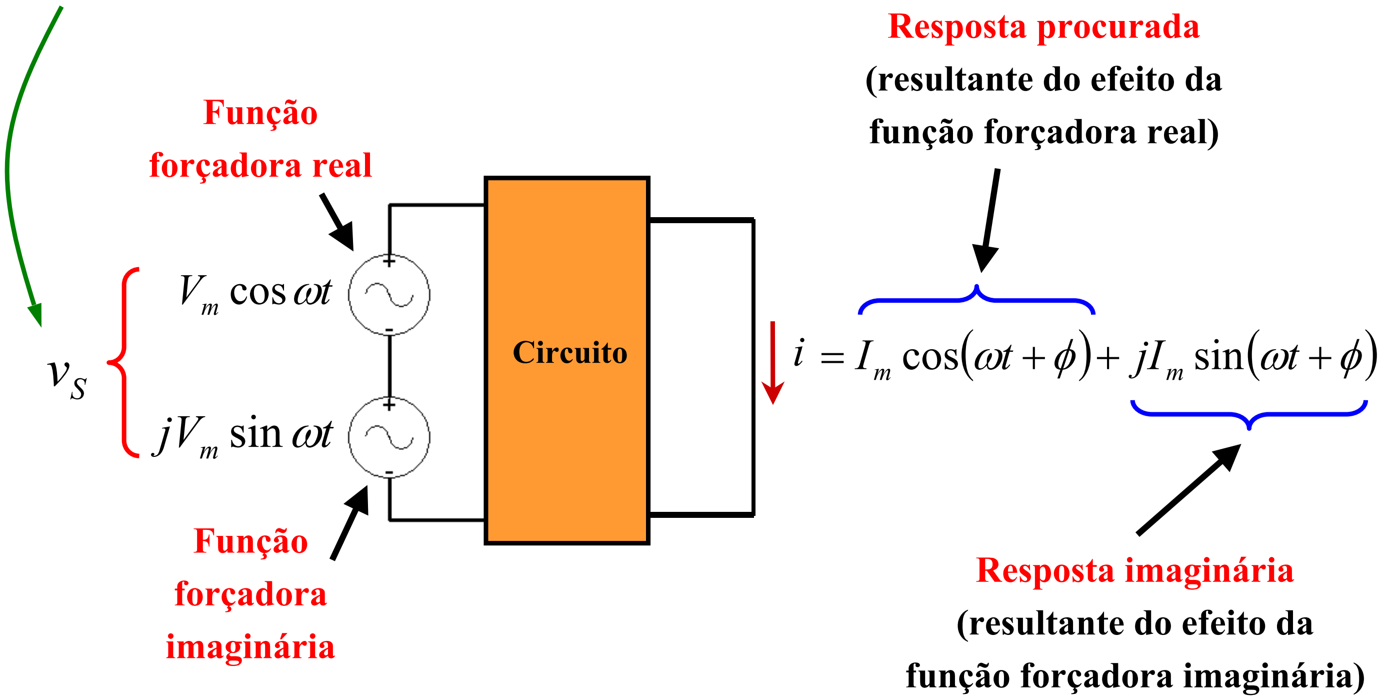
- **Portanto, ao aplicar a função forçadora complexa estamos, de facto, a aplicar, em simultâneo, duas funções:**
  - **A função forçadora sinusoidal usada no circuito real;**
  - **Uma função forçadora imaginária.**

- **O resultado obtido da análise, terá também uma parte real e uma parte imaginária. A parte real será a resposta desejada. A parte imaginária deve ser ignorada.**

Aplicação de uma função forçadora complexa

- **Este método funciona graças ao Principio da Sobreposição.**

$$v_S = V_m e^{j\omega t}$$

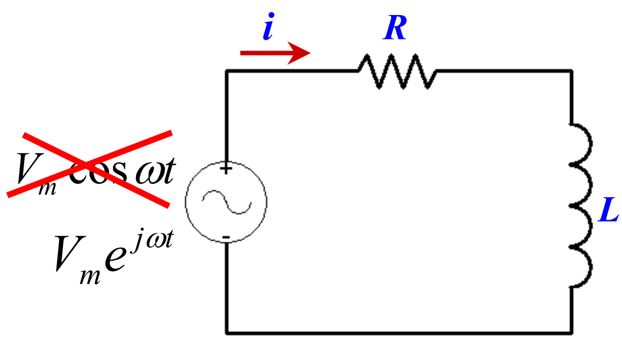


Determinação da resposta à função forçadora complexa

Será que esta alteração na função forçadora conduz de facto a uma simplificação da análise?

Voltemos ao circuito RL …

e troquemos a função forçadora real pela complexa.



- **A resposta complexa para *i* que esperamos obter deverá ter a forma**

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) + jI_m \sin(\omega t + \phi)$$

que se pode escrever como $i(t) = I_m e^{j(\omega t + \phi)}$

Determinação da resposta à função forçadora complexa

- **Considerando então como função forçadora a função complexa. A equação diferencial fica**

$$L\frac{di}{dt} + Ri = v_S = V_m e^{j\omega t}$$

… e vamos portanto admitir que a solução para *i(t)* tem a forma…

$$i(t) = I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

em que I_m e ϕ são constantes a determinar.

- **Substituindo na equação diferencial acima, obtemos a equação algébrica**

$$j\omega L I_m e^{j(\omega t+\phi)} + R I_m e^{j(\omega t+\phi)} = V_m e^{j\omega t}$$

- **Dividindo ambos os membros por** $e^{j\omega t}$ **obtemos …**

Determinação da resposta à função forçadora complexa

$$j\omega L I_m e^{j\phi} + R I_m e^{j\phi} = V_m \qquad \text{ou} \qquad I_m e^{j\phi} = \frac{V_m}{R + j\omega L}$$

Convertendo o denominador da forma rectangular para a forma exponencial…

$$I_m e^{j\phi} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j[-arctg(\omega L/R)]}$$

Da equação anterior identificamos facilmente I_m e ϕ

$$\boxed{I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}} \qquad \boxed{\phi = -arctg(\omega L/R)}$$

A resposta que admitimos à partida foi $i(t) = I_m e^{j(\omega t+\phi)}$ **que é, portanto**

$$I_m e^{j(\omega t+\phi)} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\omega t - arctg(\omega L/R))}$$

Determinação da resposta real

- **Mas a resposta obtida é, como vimos, uma resposta complexa com parte real e parte imaginária…**

$$i(t) = \underbrace{I_m \cos(\omega t + \phi)}_{\text{Resposta real procurada}} + \underbrace{jI_m \sin(\omega t + \phi)}_{\text{Resposta imaginária (sem significado físico)}}$$

$$\boxed{I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \qquad \phi = -arctg(\omega L / R)}$$

- **Pelo que a resposta que nos interessa é apenas**

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - arctg \frac{\omega L}{R} \right)$$

- **As vantagens da utilização da função forçadora complexa tornar-se-ão mais evidentes com a introdução do conceito de fasor.**

Fasores

O fasor

- **Uma tensão ou corrente sinusoidal é completamente caracterizada pela amplitude, pela fase e pela frequência;**

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

- **Num circuito linear a frequência é a mesma para todas as tensões e correntes, pelo que a sua indicação é supérflua;**

- **Assim, podemos caracterizar tensões e correntes usando apenas amplitudes e fases.**

O fasor

- **Assim, em lugar de representar as funções complexas, forçadora e de resposta, no formato**

$V_m e^{j\omega t}$ **para a função forçadora** $\qquad$ $I_m e^{j(\omega t+\phi)}$ **para a resposta**

… vamos adoptar antes uma representação concisa que omite a frequência:

V_m **ou** $V_m e^{j0^\circ}$ **para a função forçadora** $\qquad$ $I_m e^{j\phi}$ **para a resposta**

- **Estas quantidades complexas são geralmente escritas na forma polar:**

$V_m \angle 0^\circ$ **e** $I_m \angle \phi$

representação abreviada que se designa por fasor.

O fasor

- **Assim, a função forçadora real**

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + 0) \xrightarrow{\text{é representada pelo fasor}} \mathbf{V} = V_m \angle 0^{\circ}$$

e a resposta real

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) \xrightarrow{\text{é representada pelo fasor}} \mathbf{I} = I_m \angle \phi$$

- **Fasores são quantidades complexas; são escritos em maiúsculas e em bold;**
- **Fasores não são funções do tempo.**

i(t)
é uma representação no domínio do tempo

I
é uma representação no domínio da frequência

Relações fasoriais para R, L e C

- **Sendo representações no domínio da frequência, os fasores têm a vantagem de transformar as relações diferencias corrente-tensão das bobinas e condensadores, em simples relações algébricas, simplificando assim a análise de circuitos em regime sinusoidal estacionário;**

- **Vejamos então como ficam as relações corrente-tensão dos três elementos passivos que conhecemos, no domínio da frequência.**

Relação entre os fasores V e I na resistência

- No domínio do tempo, sabemos que

$$v(t) = Ri(t)$$

- Se *v(t)* for a função forçadora complexa $v(t) = V_m e^{j(\omega t+\theta)}$

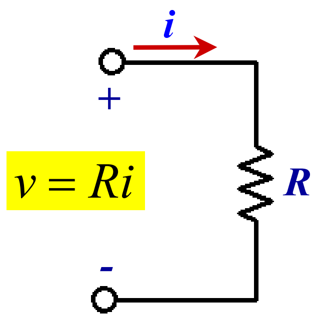
então a corrente assumirá a resposta complexa $i(t) = I_m e^{j(\omega t+\phi)}$

- Pela lei de Ohm: $V_m e^{j(\omega t+\theta)} = Ri(t) = RI_m e^{j(\omega t+\phi)}$

Dividindo ambos os membros por $e^{j\omega t}$

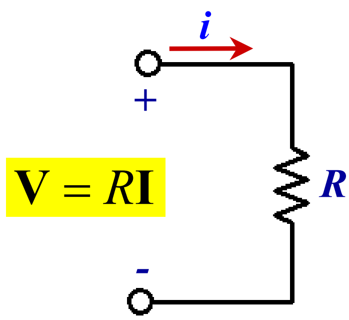
$$V_m e^{j\theta} = RI_m e^{j\phi}$$

Usando a forma polar …



Relação entre os fasores V e I na resistência

$$V_m\angle\theta = RI_m\angle\phi \quad \text{ou} \quad \mathbf{V} = R\mathbf{I}$$



- Portanto, na forma fasorial (domínio da frequência), a relação corrente-tensão na resistência é idêntica à do domínio do tempo;

- Os ângulos θ e ϕ são iguais, portanto a tensão e a corrente no circuito estão sempre em fase.

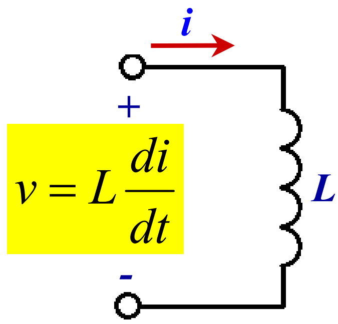
Relação entre os fasores V e I na bobina

- **Para a bobina temos, no domínio do tempo** $v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$

- **Substituindo *v(t)* pela função forçadora complexa e *i(t)* pela resposta complexa**

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = L\frac{d}{dt}\left(I_m e^{j(\omega t+\phi)}\right) = j\omega L I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

Dividindo por $e^{j\omega t}$ **obtemos** $V_m e^{j\theta} = j\omega L I_m e^{j\phi}$



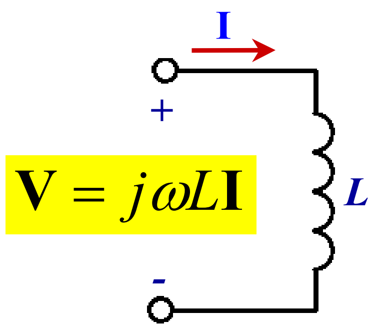
O que dá na forma polar

$$V_m \angle \theta = j\omega L I_m \angle \phi$$

A relacão fasorial é portanto $\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$

Relação entre os fasores V e I na bobina

$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$$



- **Ou seja, a relação diferencial entre *v(t)* e *i(t)* que existe no domínio do tempo, transforma-se numa relação algébrica no domínio da frequência;**

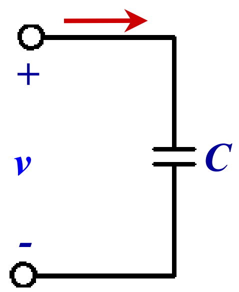
- **Como o ângulo do factor *jωL* é *90º*, a fase de *V* é igual à fase de *I* mais *90º* - ou seja, a corrente está atrasada em relação à tensão de *90º*.**

Relação entre os fasores V e I no condensador

- **Para o condensador temos**

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$i = c\frac{dv}{dt}$$



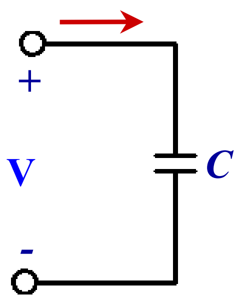
- **Por um processo idêntico ao anterior, ou seja, substituindo *v(t)* e *i(t)* pelas funções complexas forçadora e de resposta, derivando, e suprimindo obtemos a relacão fasorial** $e^{j\omega t}$

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V}$$

Relação entre os fasores V e I no condensador

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V}$$

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V}$$



- **Mais uma vez, obtemos uma relação algébrica entre os fasores de corrente e tensão no domínio da frequência;**

- **Aqui é a fase de *I* que é igual à fase de *V* mais *90º* - ou seja, a corrente está avançada em relação à tensão de *90º*.**

- **É de notar a semelhança entre as relações corrente-tensão das bobinas e condensadores no domínio da frequência e a lei de Ohm;**