EEL 5102-47: Métodos Numéricos de Otimização I

Fundamentos de Otimização Irrestrita

Prof.: Erlon Cristian Finardi, D. Eng.
erlon.finardi@ufsc.br

LabPlan

Laboratório de Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica
Centro Tecnológico – Departamento de Engenharia Elétrica

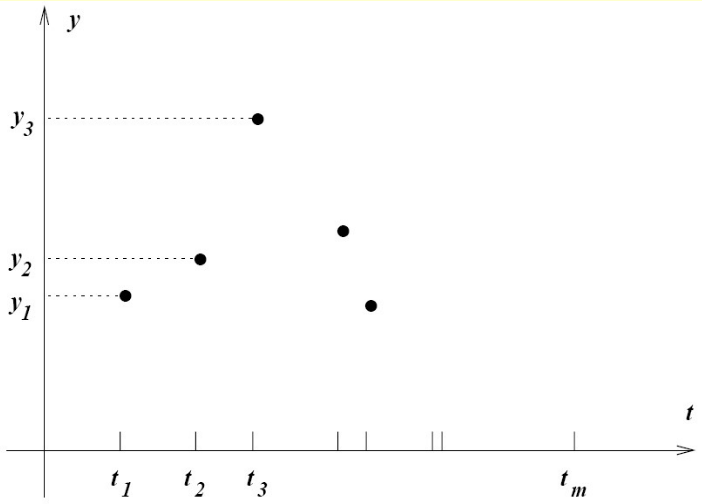
Introdução

- Problemas irrestritos
  - Minimizar uma função objetivo sem restrições nas variáveis

- Formulação $\rightarrow \min\limits_{x \in \Re^n} \ f(x)$
  - $x \in \Re^n$ é um vetor com $n \geq 1$ e $f : \Re^n \rightarrow \Re$ é uma função "suave"

- Características
  - Não está disponível uma perspectiva global de $f(x)$
  - Informação é dada por $f(x)$, e (talvez) as suas derivadas, em um conjunto de pontos x_0, x_1, x_2,...
  - Algoritmos escolhem esses pontos e procuram identificar uma solução sem muito custo computacional
  - Frequentemente $f(x)$ não é "barata" – deve-se buscar essa informação o menor número de vezes

Exemplo



- Conhecimento da aplicação – sinal exponencial e oscilatório

$$\phi(t,k) = k_1 + k_2 e^{\frac{-(k_3-t)^2}{k_4}} + k_5 \cos(k_6 t)$$

- Escolher $\boldsymbol{k_1,\ldots,k_6}$ tal que $\phi(t,k)$ seja mais próximo possível de $\boldsymbol{y_i}$

- Modelo de otimização
  - incógnitas $\rightarrow k=(k_1,\ldots,k_6)^{\mathrm{T}}$ e desvios $r_j(k)=y_j - \phi(t_j,k),\ j=1,\ldots,m$

$$\min_{k\in\Re^6} f(k) = \sum_{j=1}^{m} r_j^2(k)$$

Mínimos Quadrados

O que é uma Solução?

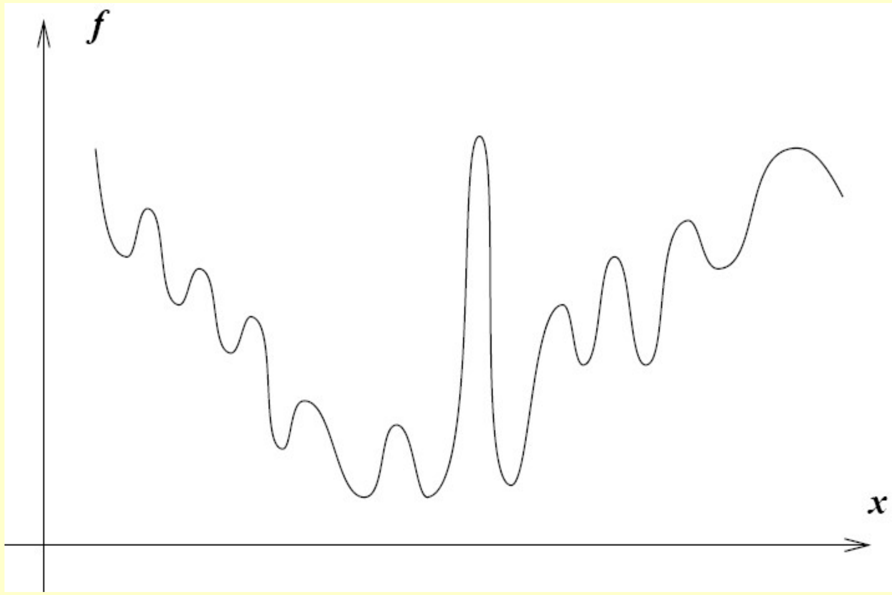
- Um ponto x^* é um ponto de mínimo global se $f(x^*) \leq f(x)$ para $\forall x$

- Um ponto x^* é um ponto de mínimo local se existe uma vizinhança N de x^* tal $f(x^*) \leq f(x)$ para $x \in$ N
  - **Ponto de mínimo local fraco**

- Um ponto x^* é um ponto de mínimo local estrito se existe uma vizinhança N de x^* tal $f(x^*) < f(x)$ para $x \in$ N, com $x \neq x^*$
  - **Ponto de mínimo local forte**

Exemplos

- Para $f(x) = 2$ cada ponto x é um ponto de mínimo local fraco que também é global
- Por sua vez, $f(x) = (x-2)^4$ possui um ponto de mínimo local forte em $x = 2$ que também é global

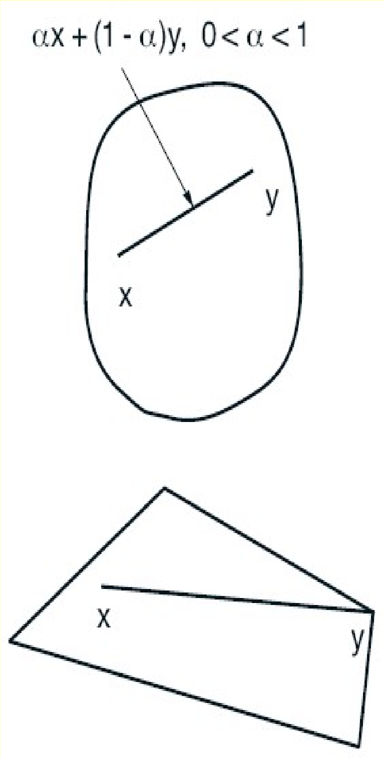


- Múltiplos mínimos locais
- Difícil encontrar o mínimo global
- As vezes tem-se informações sobre comportamento “global” de $f(x)$
- Importante ferramenta: análise da convexidade de $f(x)$

Análise de Convexidade

Funções

Conjuntos Convexos

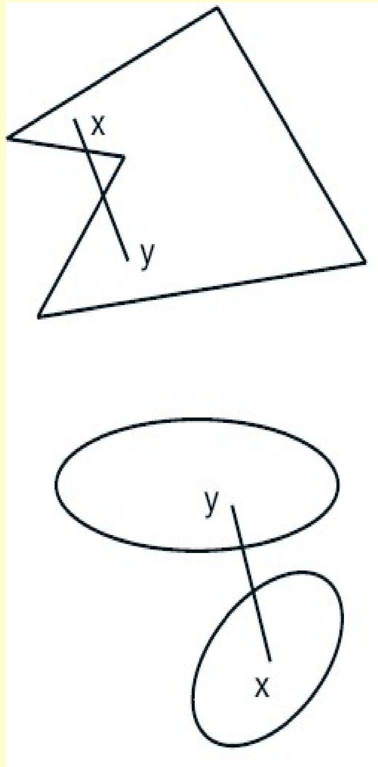


Convexos

- Um subconjunto C no $\Re^n$ é convexo se

  $$\alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y \in C,\ \ \forall x, y \in C, \forall \alpha \in (0,1)$$

- Operações que mantém a convexidade
  - intersecção, multiplicação por escalar, soma de vetores, etc.

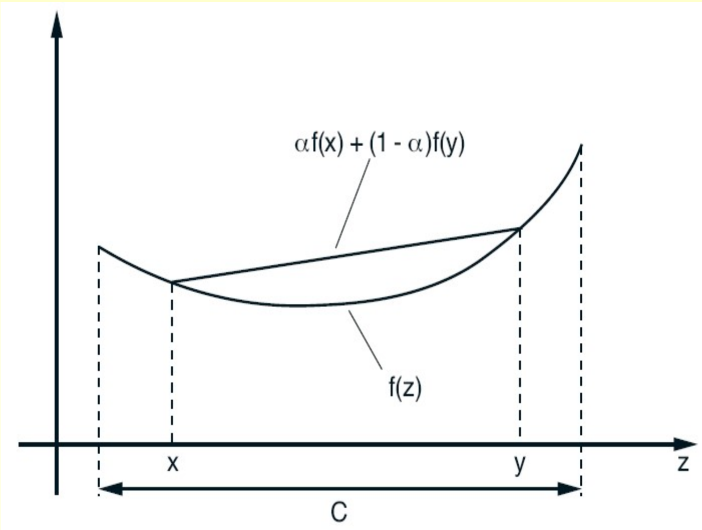


Não-Convexos

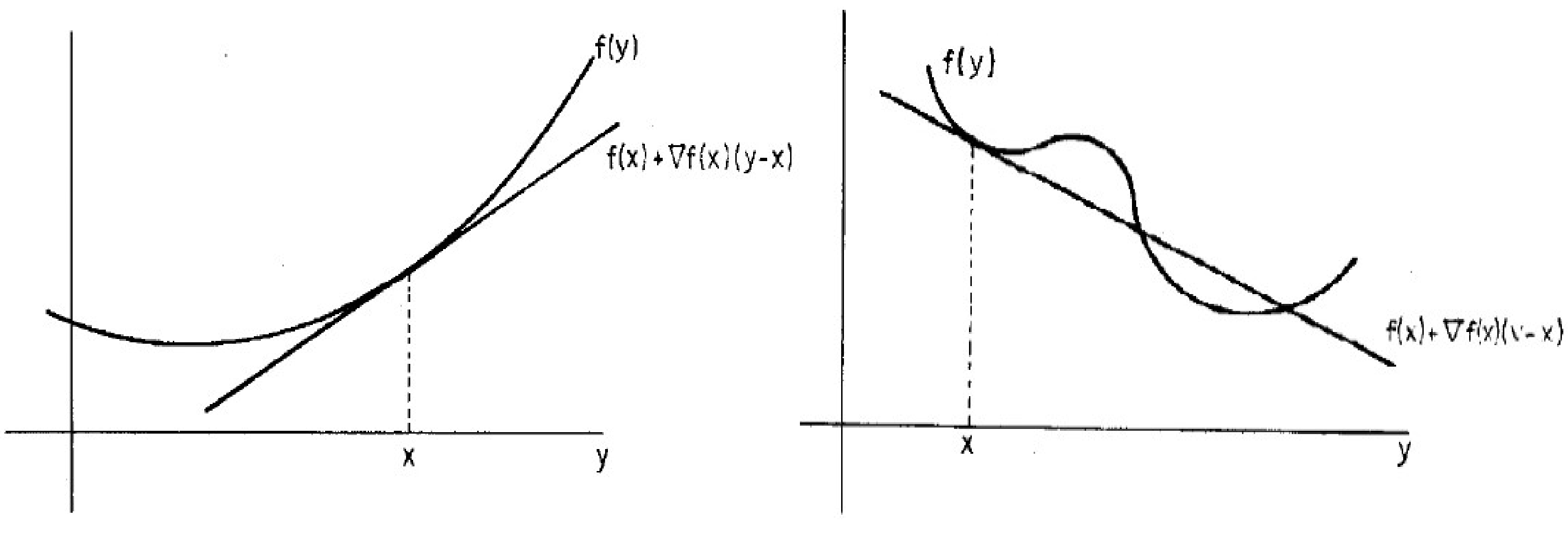
Funções Convexas

- Seja C um conjunto convexo do $\Re^n$. A função f: C$\rightarrow$ $\Re$ é convexa se

$$f(\alpha \cdot x + (1-\alpha)\cdot y) \leq \alpha \cdot f(x) + (1-\alpha)\cdot f(y), \forall x, y \in C$$



Ilustração



FUNÇÃO CONVEXA

FUNÇÃO NÃO-CONVEXA

Teorema

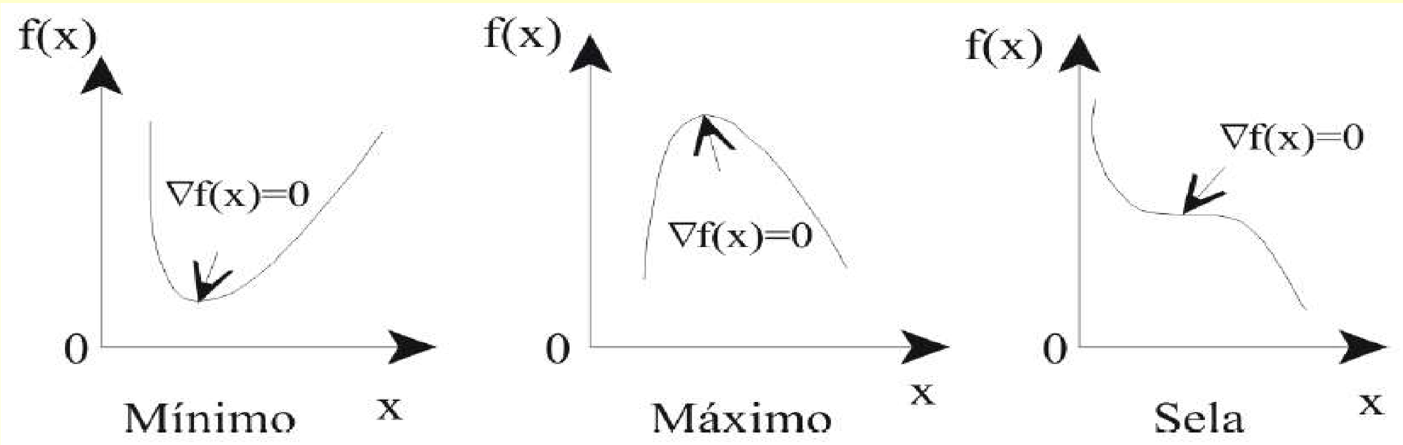
- Se $f(x)$ tem primeira e segunda derivadas parciais contínuas, então os seguintes itens são equivalentes
  - $f(x)$ é convexa
  - Para quaisquer dois pontos tem-se $f(y) \geq f(x) + \nabla^t f(x)(y - x)$
  - A matriz de derivada parcial de segunda ordem é semidefinida positiva para todos os pontos de x

Definição de Matrizes

- Uma matriz $A \in \Re^{nxn}$ é simétrica se $A = A^T$
- Uma matriz simétrica A é definida positiva se $x^{\mathrm{T}} A x > 0$ para $\forall x \in \Re^n$
- A matriz simétrica é semidefinida positiva se a relação acima é atendida em $x^{\mathrm{T}} A x \geq 0$ para $\forall x \in \Re^n$
- Uma matriz simétrica definida positiva possui todos os autovalores positivos (reais)
- Uma matriz semidefinida positiva possui pelo menos um autovalor nulo e os demais são positivos

Identificando um Mínimo Local...(1)

- **Condição Necessária de 1° Ordem**
  - Se x^* é um mínimo local e $f(x^*)$ é diferenciável em x^*, então $\nabla f(x^*)=0$
  - Considere $f(x^*+p)=f(x^*)+\nabla f(x^*)^{\mathrm{T}}p$, onde $\nabla f(x)$ é a direção de maior variação de $f(x)$. Se $\nabla f(x^*) = 0$, a taxa de variação da função em qualquer direção p é nula
  - Um mínimo local deve ser um ponto estacionário de $f(x)$



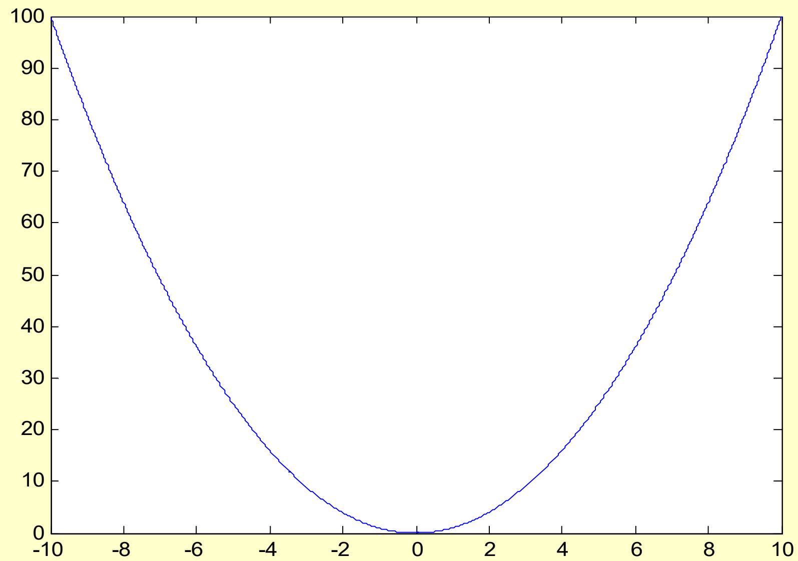
Identificando um Mínimo Local...(2)

- **Condição Necessária de 2° Ordem**
  - Se x^* é mínimo local de $f(x)$ e $\nabla^2 f(x)$ é contínua na vizinhança de x^*, então $\nabla f(x^*) = 0$ e $\nabla^2 f(x^*)$ é semidefinida positiva
  - Dado que $f(x^*+p)=f(x^*)+\nabla f(x^*)^{\mathrm{T}}p+0{,}5p^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(x^*)p$, tem-se $\nabla f(x^*) = 0$ e então $p^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(x^*)p \geq 0$

- **Condição Suficiente de 2° Ordem**
  - Se $\nabla f(x^*) = 0$ e $\nabla^2 f(x^*)$ é definida positiva, isto é $p^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(x^*)p > 0$, então x^* é um mínimo local estrito

Exemplo (I)

$$f(x) = x^2$$



Condição 1° ordem (necessária)

$$\frac{df}{dx} = 2x = 0 \xrightarrow{\text{candidato}} x = 0$$

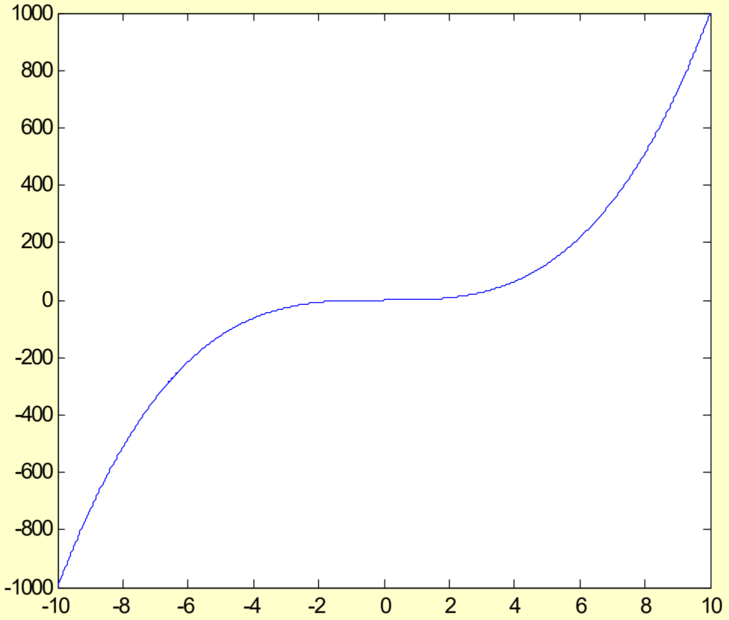
Condição 2° ordem (suficiente)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$$

- Matriz Hessiana é definida positiva para qualquer valor de x
- Função estritamente convexa: (único) ponto de mínimo local e global

Exemplo (II)

$$f(x) = x^3$$



Condição 1° ordem (necessária)

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 = 0 \xrightarrow{\text{candidato}} x = 0$$

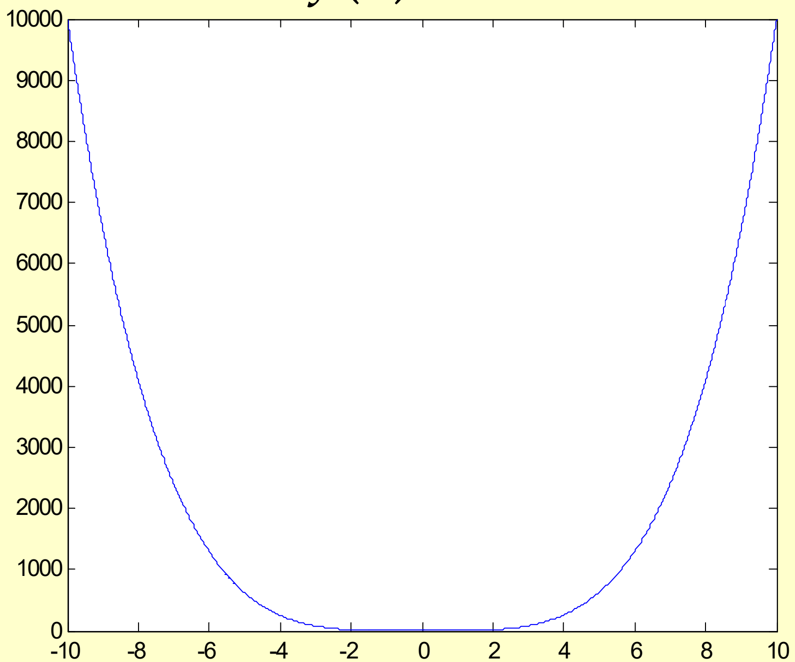
Condição 2° ordem (necessária)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \mapsto \begin{cases} x > 0 & \text{DP} \\ \boxed{x = 0 \quad \text{SPD}} \\ x < 0 & \text{DN} \end{cases}$$

- Definição da Matriz Hessiana depende de x
- Condições de 1° e de 2° ordem (necessária) são verificadas
- Contudo, ponto candidato não é um mínimo

Exemplo (III)

$$f(x) = x^4$$



Condição 1° ordem (necessária)

$$\frac{df}{dx} = 4x^3 = 0 \xrightarrow{\text{candidato}} x = 0$$

Condição 2° ordem (necessária)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 \mapsto \begin{cases} x \neq 0 & \text{DP} \\ \boxed{x = 0 \quad \text{SDP}} \end{cases}$$

- Definição da Matriz Hessiana depende de x
- Condições de 1° e 2° ordem (necessária) são verificadas
- Ponto é um mínimo local e global (resultado da convexidade de f)

Exemplo (IV)

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 + 2x_2$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 8x_1 + 4x_2 + 1 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{solução}} x = \begin{bmatrix} 0,0625 \\ -0,3750 \end{bmatrix}$$

Condição 1° ordem **ponto candidato**

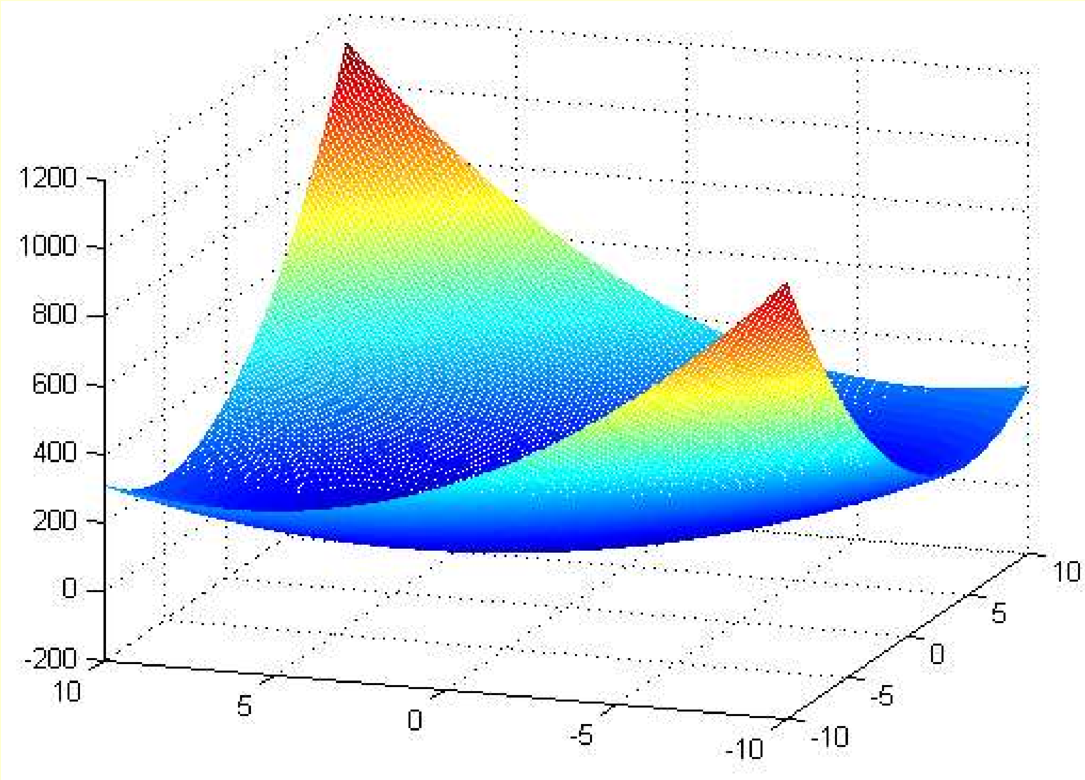
$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{autovalores}} \lambda_1 = 2,88 \quad \lambda_2 = 11,12$$

Condição 2° ordem **Hessiana é Definida Positiva (DP)**

- Função quadrática com Hessiana DP possui um (único) ponto estacionário que é mínimo local forte e global

Exemplo (IV) - Gráfico

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 + 2x_2$$

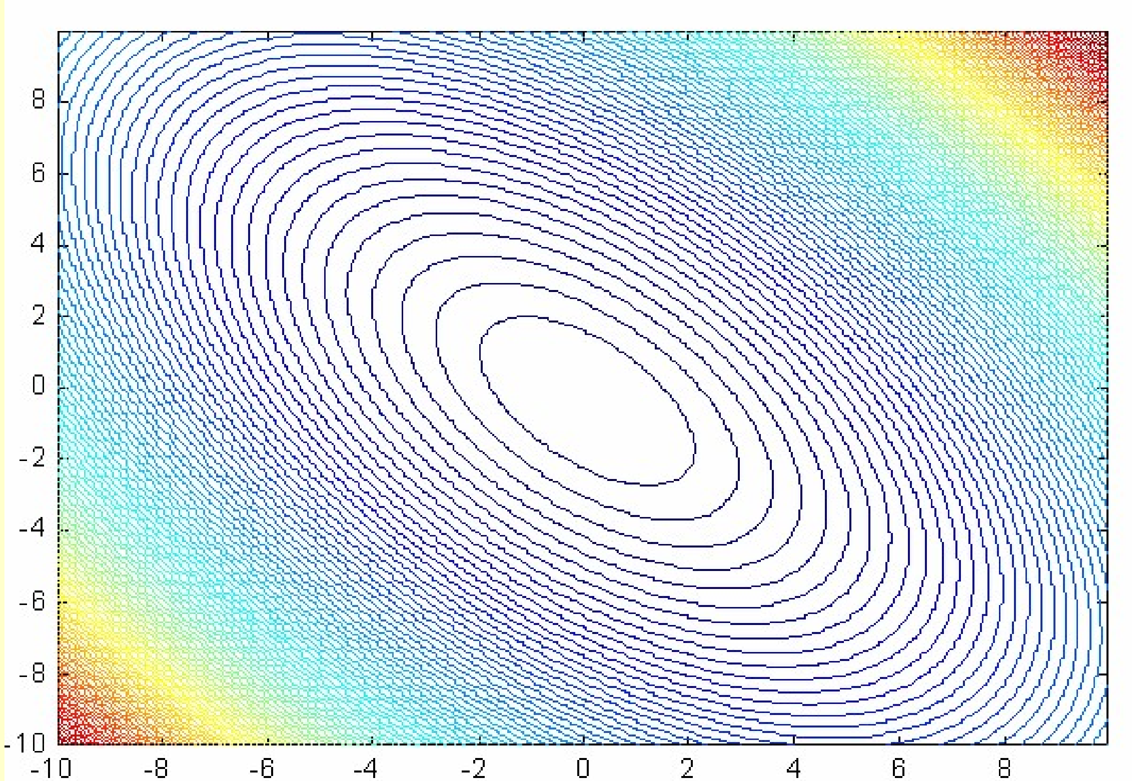


Curvas de Nível

$$f(x) = \frac{1}{2} x' H x + b' x + c,$$

$$H = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } \ c = 0$$



Exemplo (V)

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1 + 2x_2$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4x_1 + 6x_2 + 4 \\ 6x_1 + 2x_2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Condição 1° ordem

solução

$$x = \begin{bmatrix} -0,143 \\ -0,571 \end{bmatrix}$$

ponto candidato

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Condição 2° ordem

autovalores

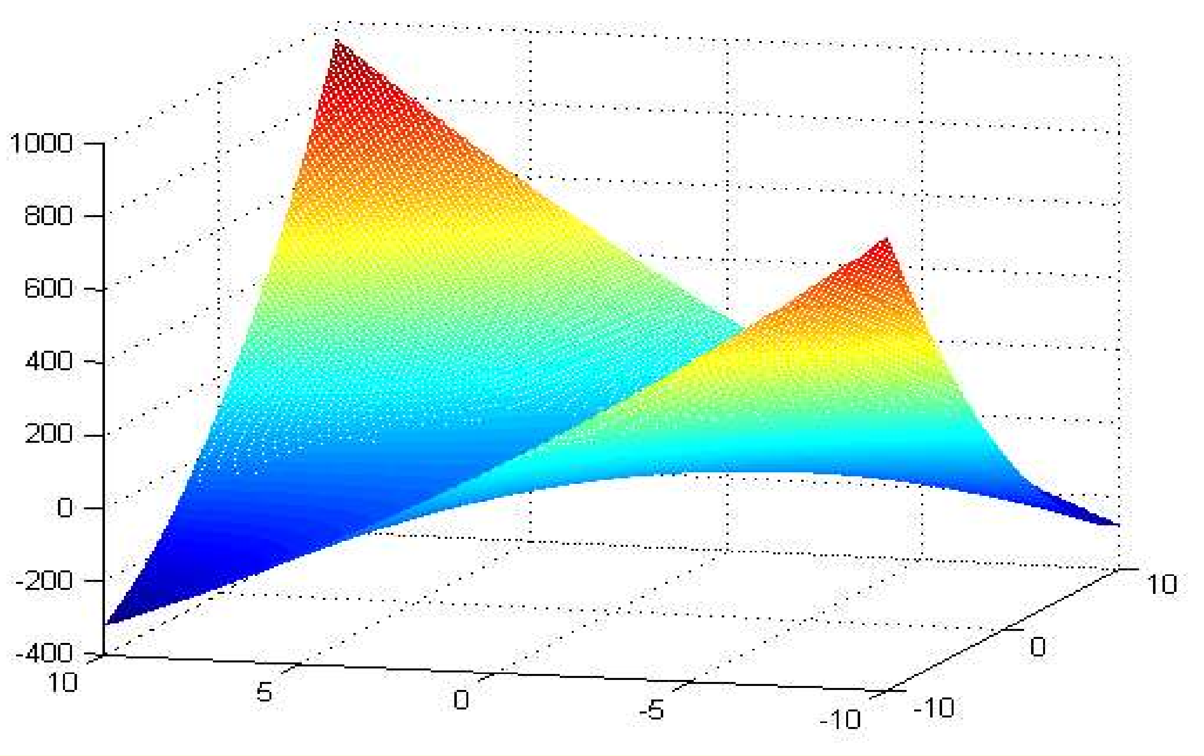
$$\lambda_1 = -3,08, \ \lambda_2 = 9,08$$

Hessiana é Indefinida

- Função quadrática com hessiana indefinida não possui ponto de mínimo

Exemplo (V) - Gráfico

$$f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1 + 2x_2$$

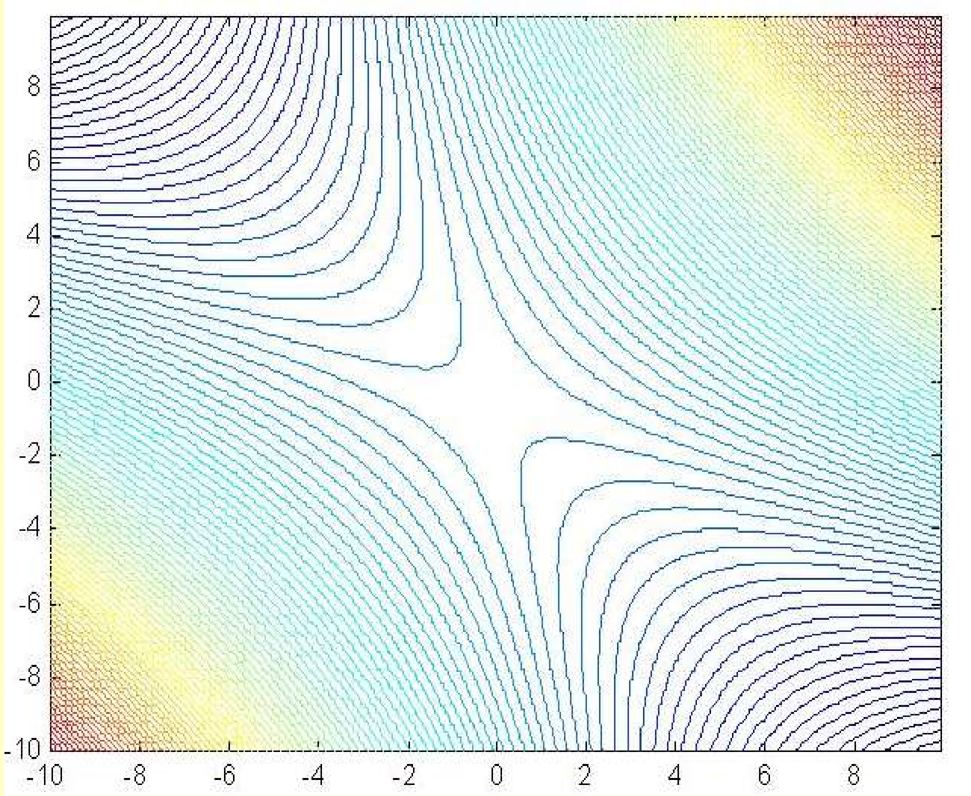


Curvas de Nível

$$f(x) = \frac{1}{2}x'Hx + b'x + c,$$

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } \quad c = 0$$



Exemplo (VI)

$$f(x_1,x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 4x_1^2(x_1^2 + x_2 - 11) + 2(x_1 + x_2^2 - 7) \\ 2(x_1^2 + x_2 - 11) + 4x_2^2(x_1 + x_2^2 - 7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{solução}} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Condição 1° ordem **ponto candidato**

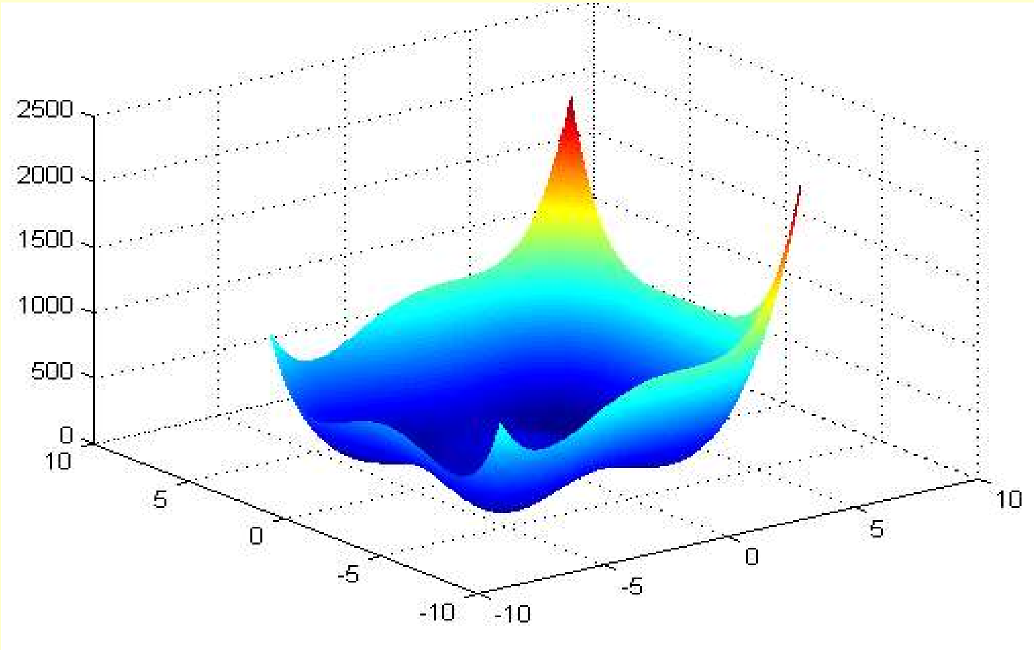
$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 12x_1^2 + 4x_2 - 42 & 4(x_1 + x_2) \\ 4(x_1 + x_2) & 12x_2^2 + 4x_1 - 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74 & 20 \\ 20 & 34 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{autovalores}} \begin{matrix} \lambda_1 = 25{,}71 \\ \lambda_2 = 82{,}28 \end{matrix}$$

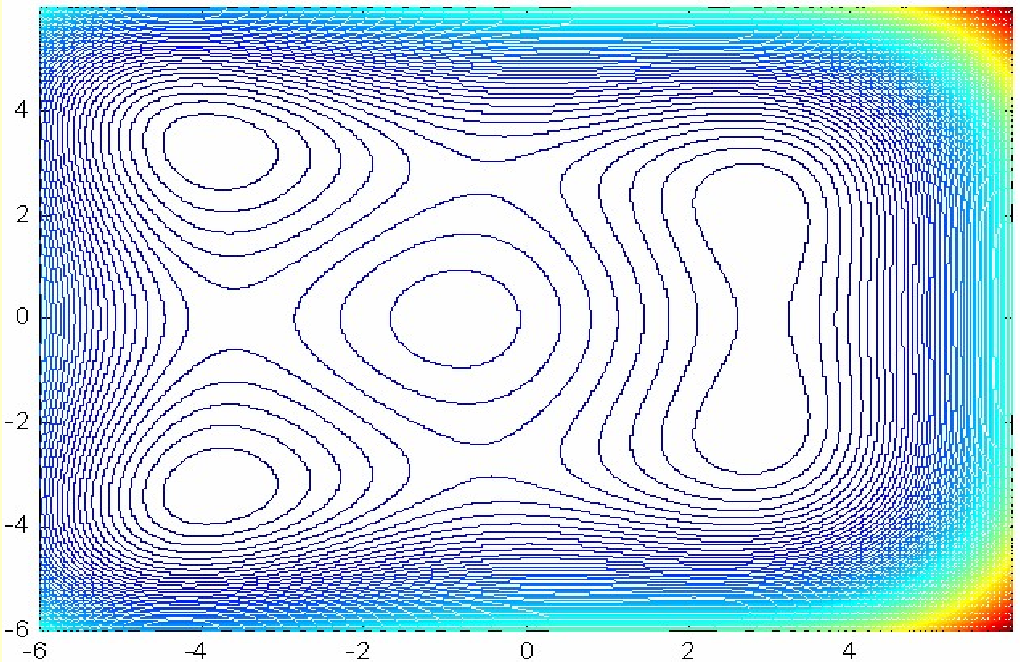
Condição 2° ordem **Hessiana é DP**

- Condição de otimalidade suficiente de 2ª ordem é atendida
  - x_c é um mínimo local
  - Mínimo global só pode ser garantido identificando os demais pontos estacionários (se existirem)
  - Além disso, $f(x)$ tem que ser limitada inferiormente

Exemplo (VI) - Gráfico

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$$





OBRIGADO!

Prof. Erlon Cristian Finardi

erlon.finardi@ufsc.br