# EEL 5102-47: Métodos Numéricos de Otimização I

# Introdução

Prof. Erlon Cristian Finardi, D. Eng.

erlon.finardi@ufsc.br

LabPlan

**Laboratório de Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica**

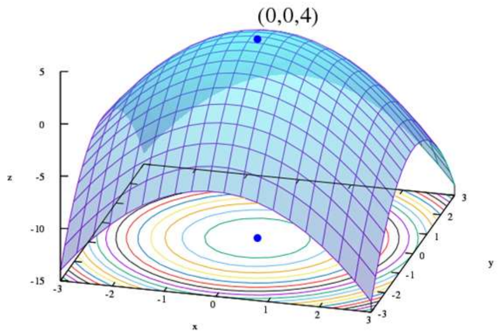
**Centro Tecnológico – Departamento de Engenharia Elétrica**

*«Cum enim mundi universi fabrica sit perfectissima atque a Creatore sapientissimo absoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minimive ratio quaepiam eluceat; quamobrem dubium prorsus est nullum, quin omnes mundi effectus ex causis finalibus ope methodi maximorum et minimorum aeque feliciter determinari queant, atque ex ipsis causis efficientibus»*

Leonhard Euler, 1744

Briefly and very freely translated:

“**Nothing in the world takes place without optimization, and there is no doubt that all aspects of the world that have a rational basis can be explained by optimization methods**”



# Otimização

- **Atividades Humanas**
  - Companhias aéreas programam operações com aeronaves e tripulações para minimizar custo
  - Investidores visam encontrar portfólios que maximizem o retorno financeiro, considerando um nível aceitável de risco
- **Natureza**
  - Sistemas físicos tendem a um estado de mínima energia
  - Raios de luz seguem um caminho que minimiza seu tempo de viagem

Importante instrumento metodológico para tomada de decisões e análise de sistemas físicos

# Utilizando a Otimização... (1)

- **Identificação de objetivo**
  - Medida de desempenho: lucro, custos, perdas ou qualquer combinação de quantidades que possa ser representada numericamente
  - Objetivo é modelado por um conjunto de variáveis ou incógnitas
- **Identificação de restrições**
  - Com frequência as variáveis apresentam restrições em seus valores – e.g., potência de uma unidade geradora de eletricidade não pode ser negativa

$$\text{Variáveis} + \text{Objetivo} + \text{Restrições}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Modelagem}$$

# Utilizando a Otimização (2)

- Modelagem: pode ser o ponto mais importante
  - (Simplicidade x precisão) e (complexidade x dificuldade de solução)
- Resolução: não existe um algoritmo universal
  - Cada algoritmo é projetado para uma classe de problemas
  - Escolha determina eficiência e quando uma solução será encontrada
- Identificar/caracterizar uma solução
  - Expressões matemáticas elegantes: condições de otimalidade
  - Se essas condições não são atendidas, pode-se obter informações importantes para melhorar a estimativa de uma nova solução candidata
- Técnicas de análise de sensibilidade
  - Detalham a sensibilidade da solução com respeito a mudanças no modelo

# Formulação Matemática

- Definição matemática
  - Minimizar ou maximizar uma função objetivo sujeito a restrições em suas variáveis

- Notação

  $x$ vetor de variáveis

  $f$ função objetivo, que depende de $x$

  $c$ vetor de restrições, que depende de $x$

- Formulação

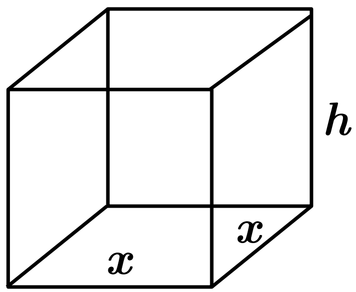
$$\min_{x \in \Re^n} f(x) \quad \text{sujeito a:} \begin{cases} c_i(x) = 0 & i \in \varepsilon \\ c_i(x) \geq 0 & i \in \mathrm{I} \end{cases}$$

$f$ e $c_i$ funções escalares de $x$

$\varepsilon$ e $\mathrm{I}$ conjuntos de índices

# Exemplo Inicial

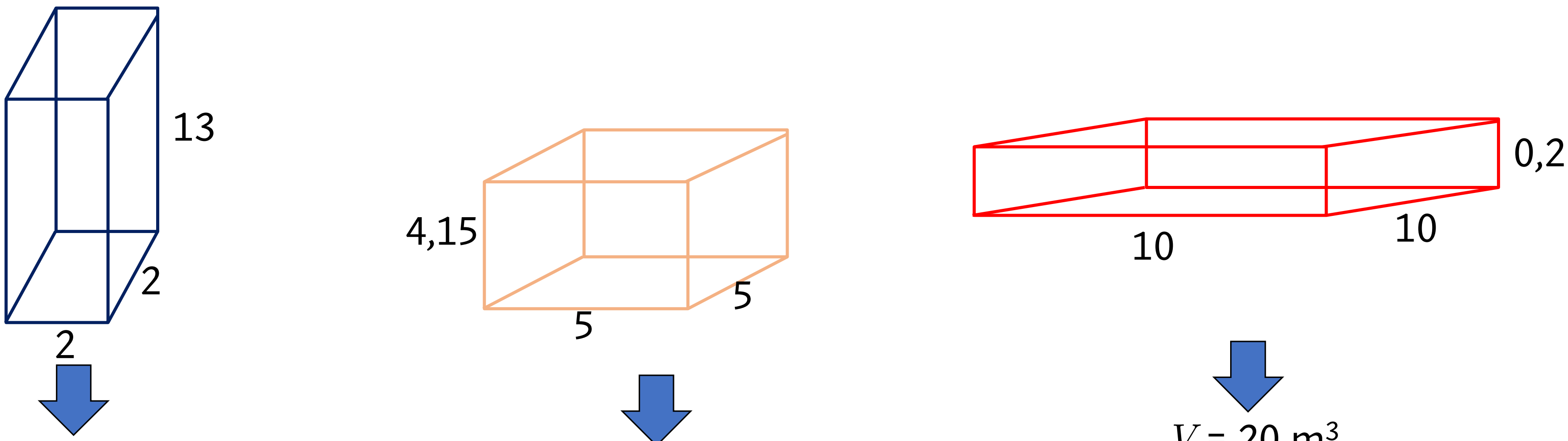
- Deseja-se maximizar o volume de uma caixa
  - Com a base quadrada
  - Área total limitada em 108 $m^2$




$$\begin{aligned} &\text{maximizar } x^2 \cdot h \\ &\text{sujeito a: } \quad x^2 + 4 \cdot x \cdot h = 108 \\ &\qquad\qquad\quad\; x \geq 0, \;\; h \geq 0 \end{aligned}$$

# Análise do Problema

- Variação do volume em função de diferentes configurações construtivas
  - ✓ Todas com área total de 108 $m^2$



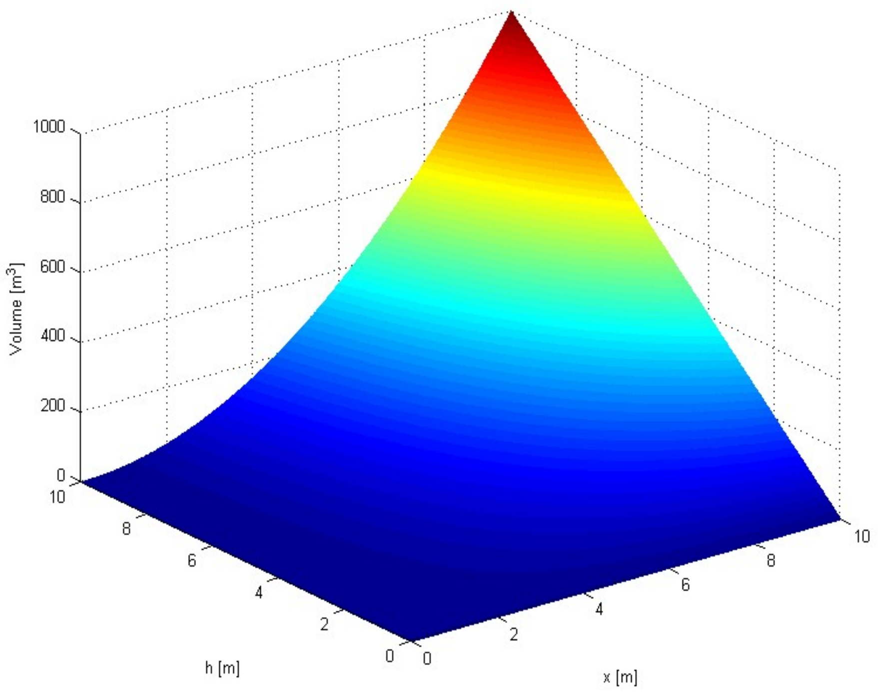

$V$ = 52 $m^3$

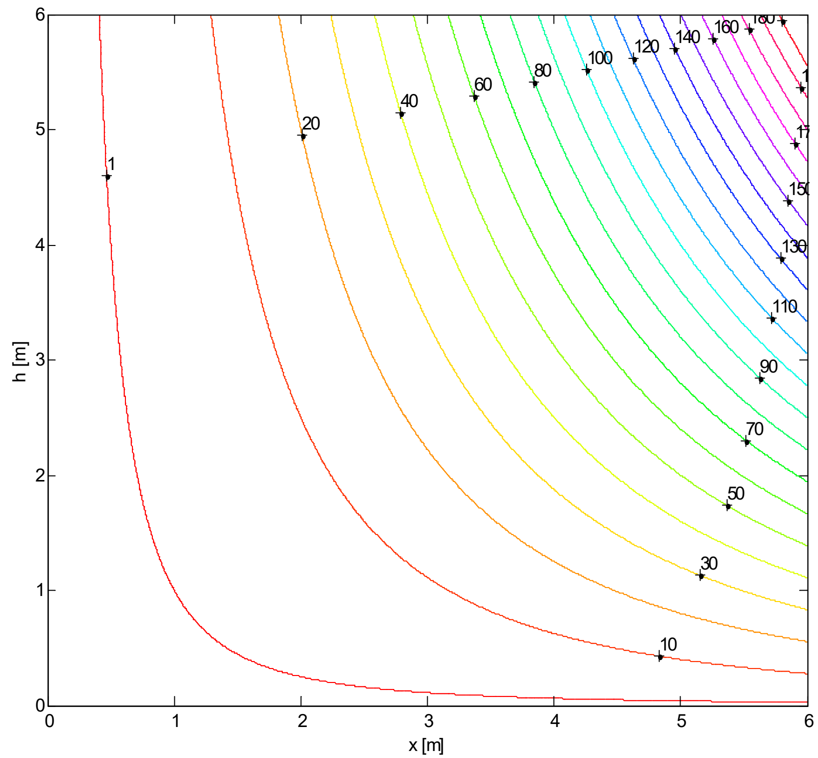
$V$ = 103,7 $m^3$

$V$ = 20 $m^3$

# Representação Geométrica

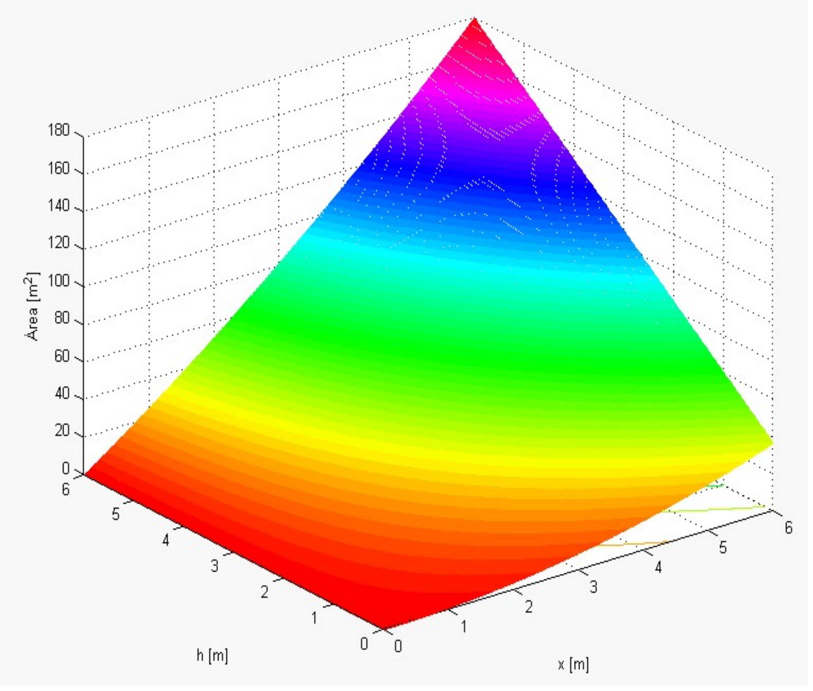
**Função objetivo: volume da caixa**

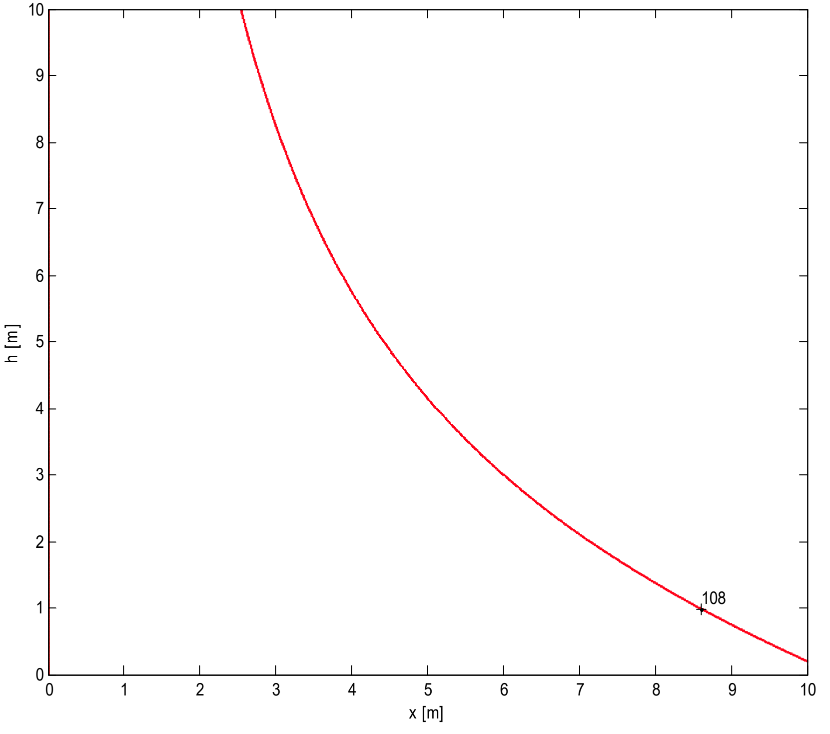


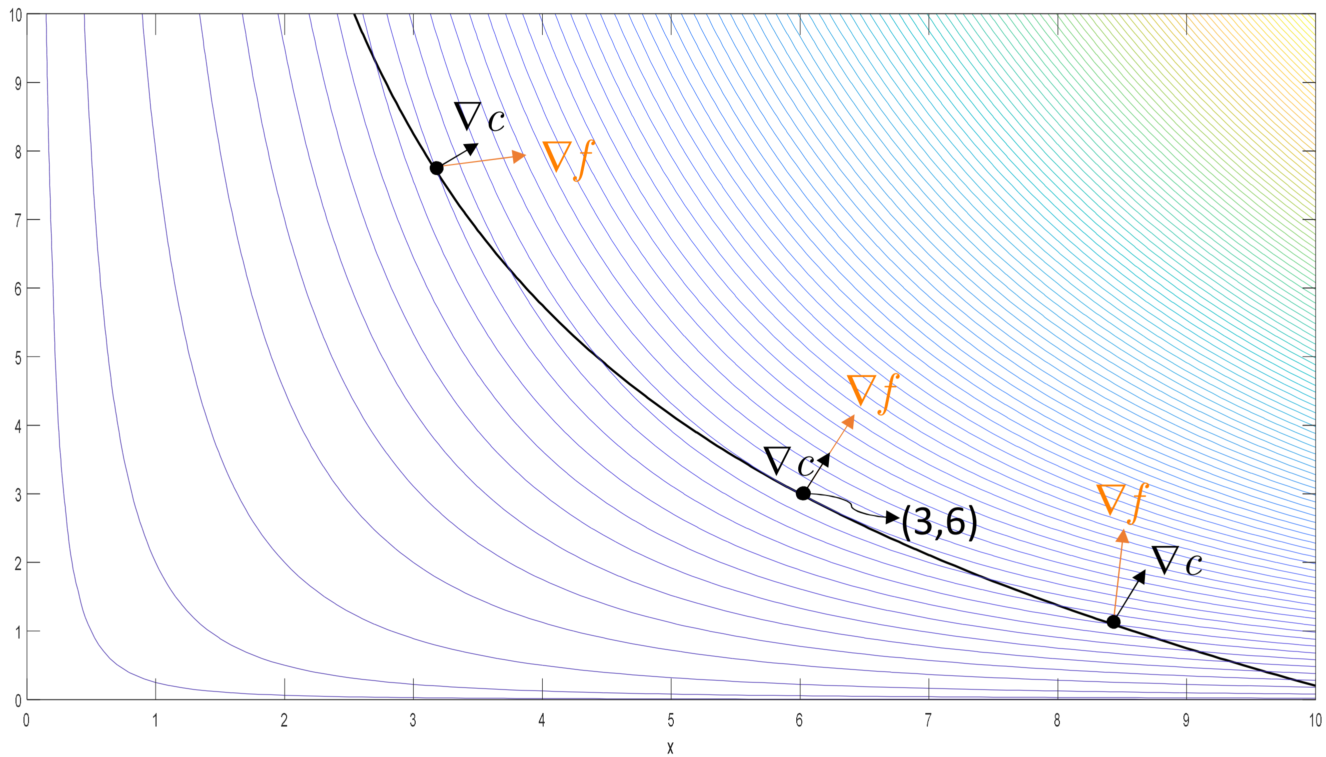
# Representação Geométrica

**Restrição: área da caixa**



# Representação Geométrica



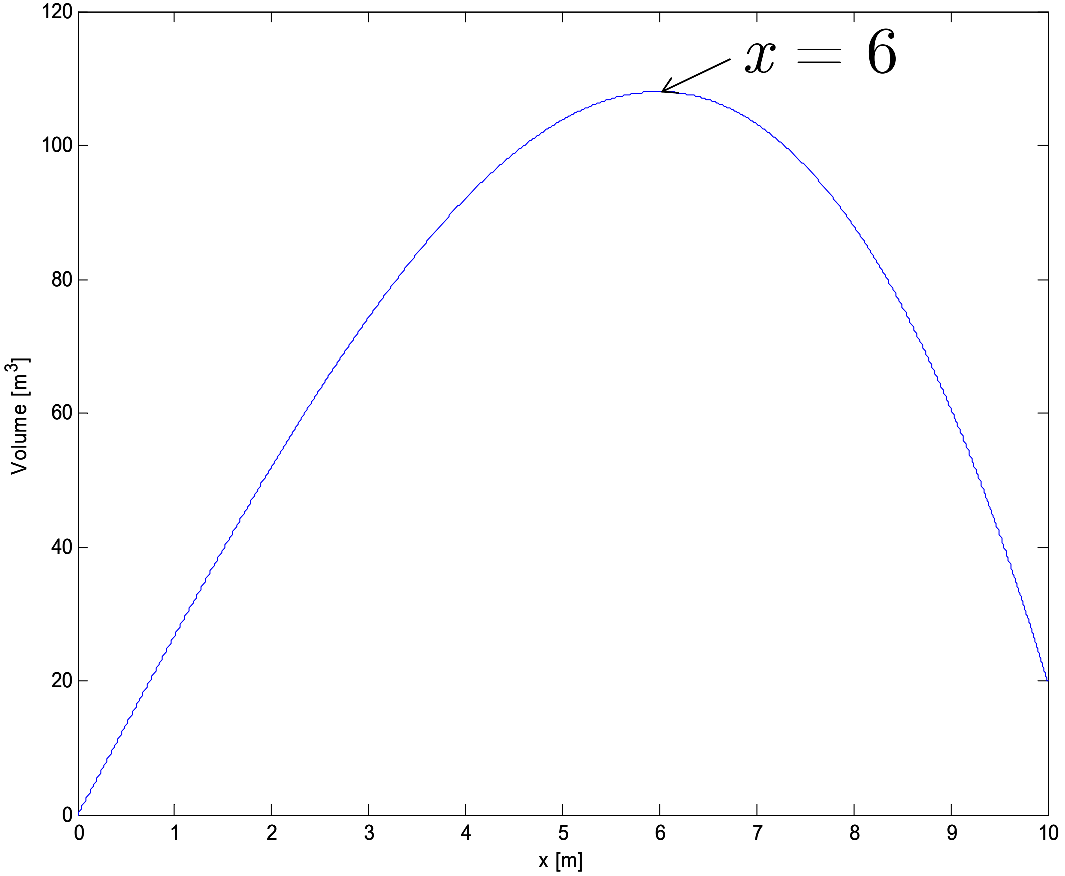
# Caso Irrestrito

$$\text{maximizar } x^2 \cdot h$$
$$\text{sujeito a: } \quad x^2 + 4 \cdot x \cdot h = 108$$
$$x \geq 0, \quad h \geq 0$$

$$h = \left( \frac{108 - x^2}{4x} \right)$$

$$\max \; x^2 \cdot \left( \frac{108 - x^2}{4x} \right) = \max \; -\frac{x^3}{4} + 27x$$

# Ilustração – Caso Irrestrito




$$h = \left( \frac{108 - x^2}{4x} \right)$$

$$h = \left( \frac{108 - 6^2}{4 \cdot 6} \right)$$

$$h = 3$$

# Exemplo 2

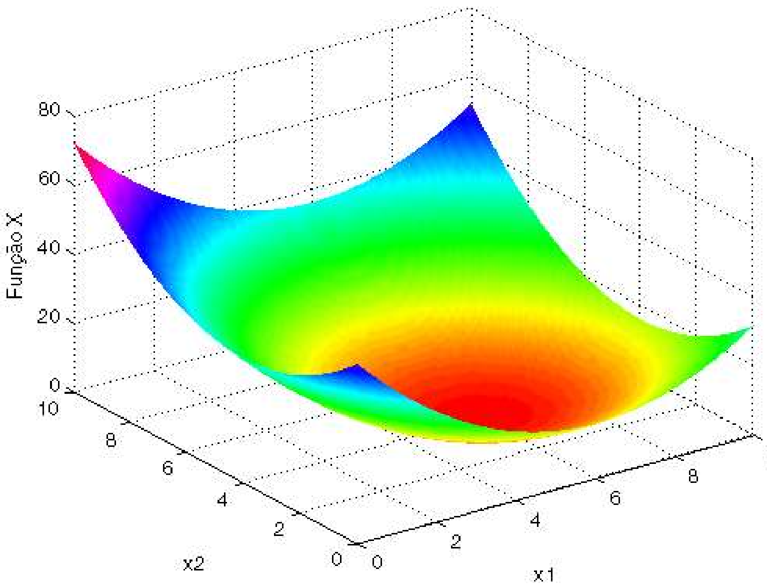
$$\min f(x) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 4)^2$$

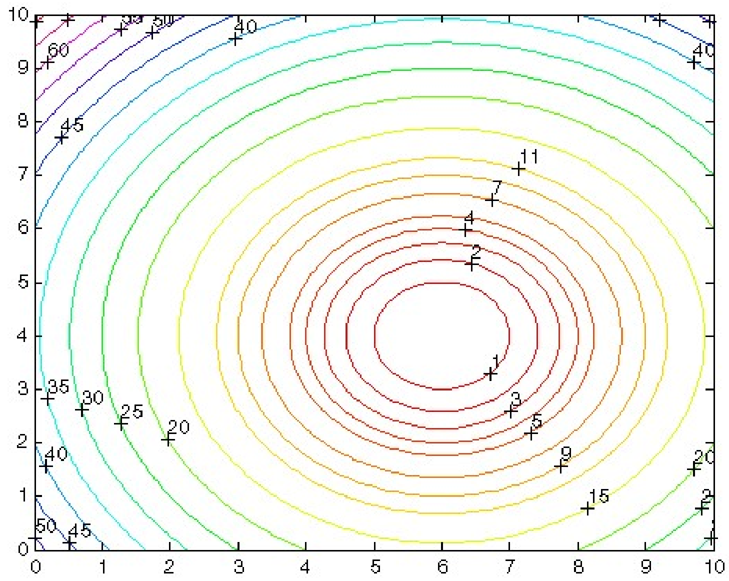
$$\text{s.a:} \quad x_2 - x_1^2 \geq 0$$

$$x_2 + x_1 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

# Função Objetivo

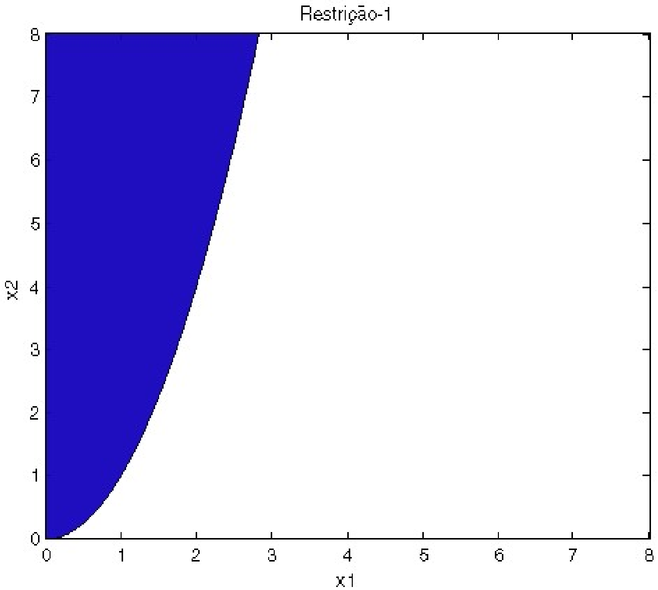


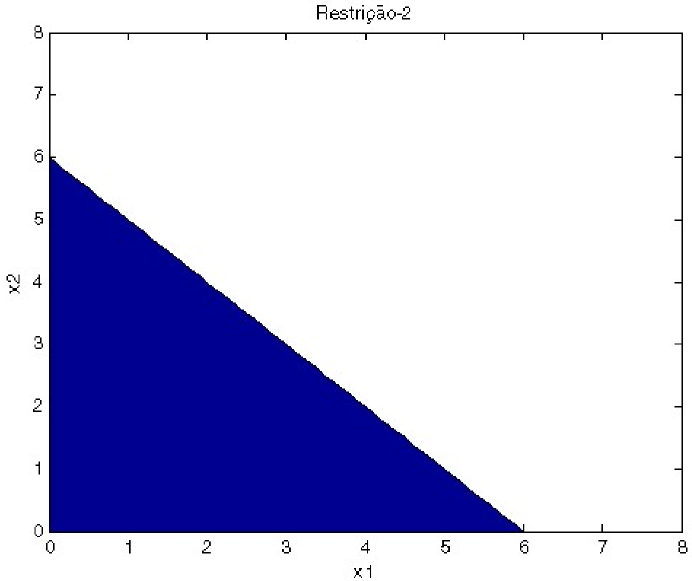



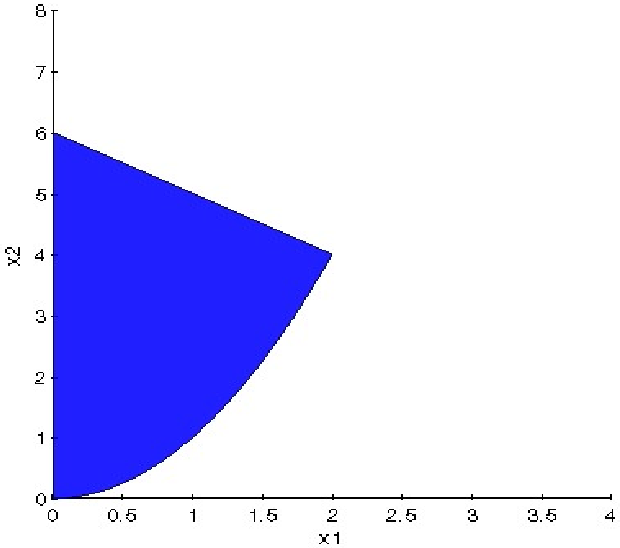
# Restrições e Conjunto Viável

Restrição: $x_2 - {x_1}^2 \geq 0$

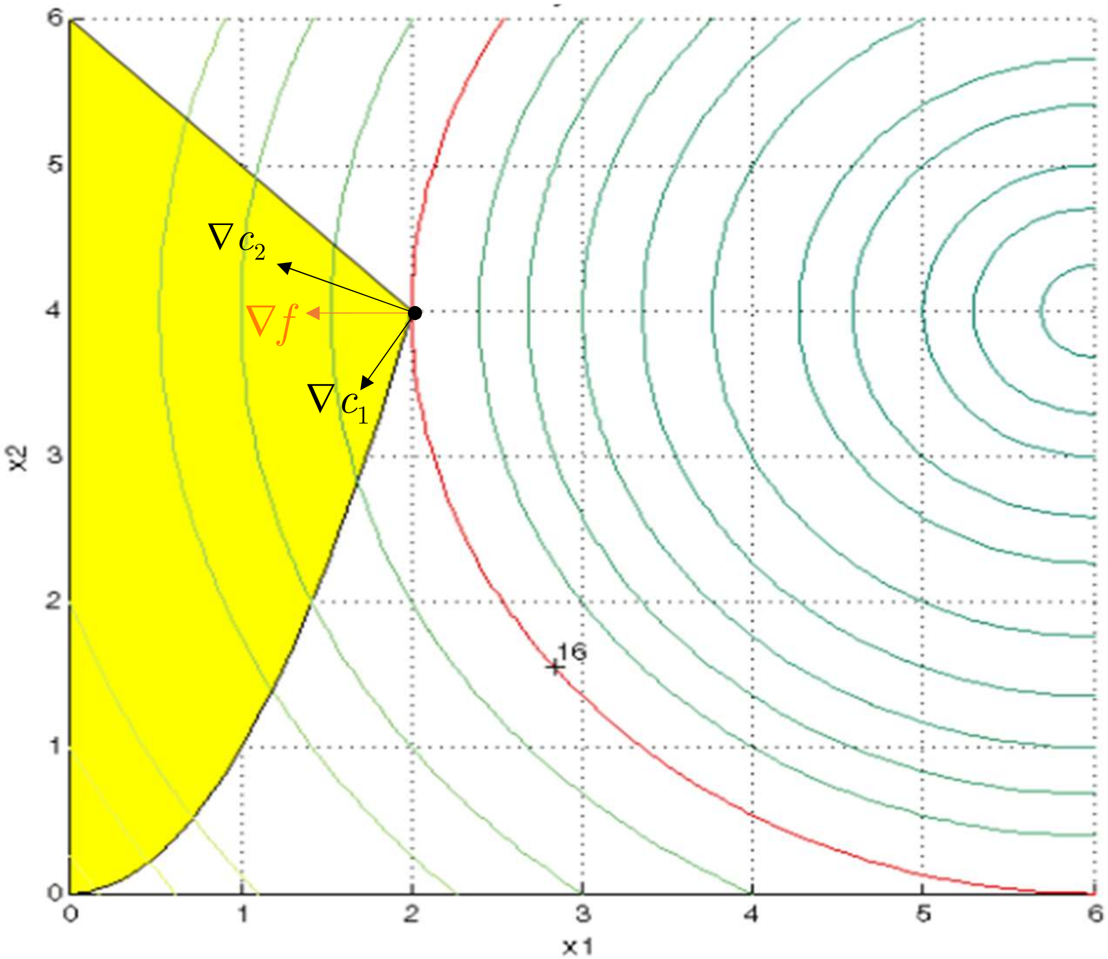
Restrição: $\boldsymbol{x_2 + x_1 - 6 \leq 0}$



# Solução Geométrica




$$\textit{Solução ótima}$$
$$f(x) = 16$$
$$x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 4$$

# Exemplo 3

$$\max\ z = 50x_{BR} + 60x_{C}$$

$$\text{s.a:} \qquad 50x_{BR} + 30x_{C} \leq 2000$$

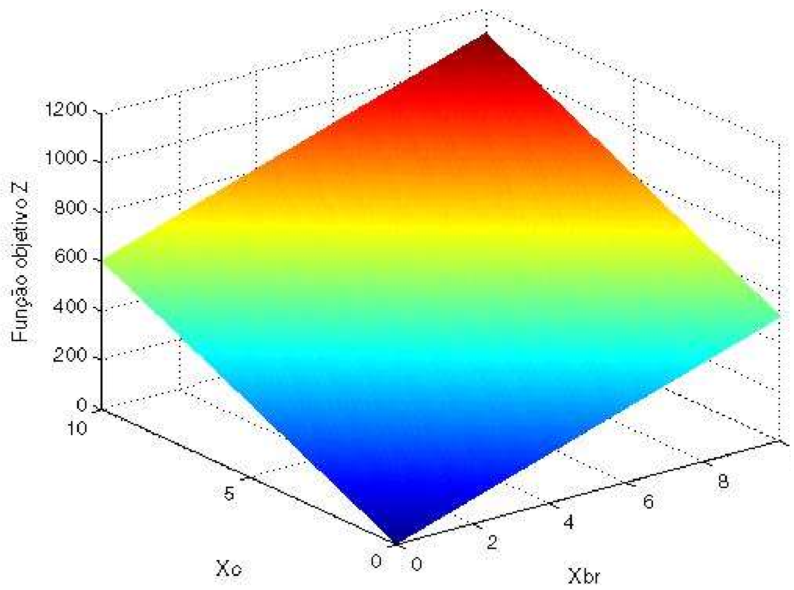
$$6x_{BR} + 5x_{C} \leq 300$$

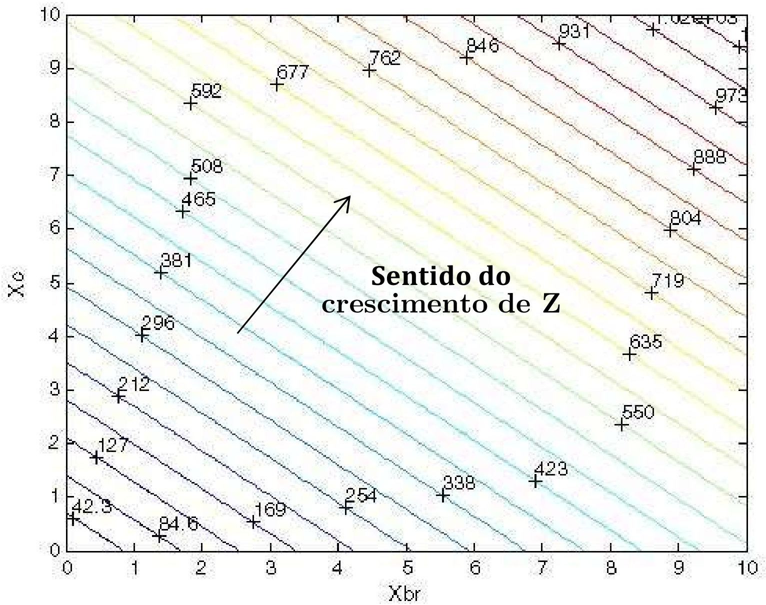
$$3x_{BR} + 5x_{C} \leq 200$$

$$x_{BR}, x_{C} \geq 0$$

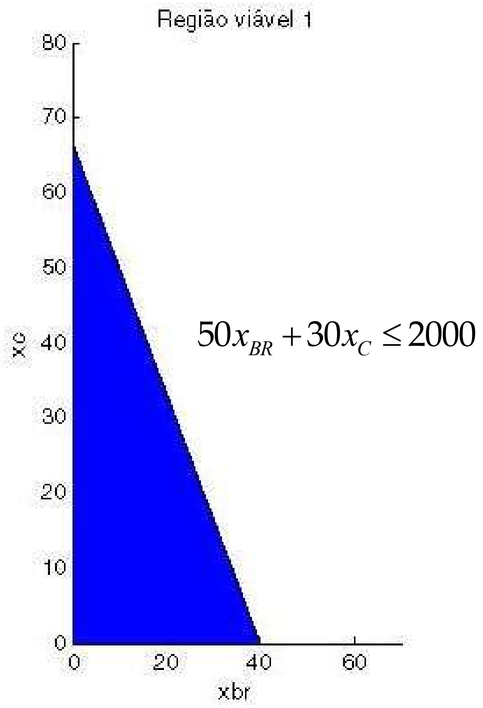
# Representação Geométrica

**Função objetivo: $z$**

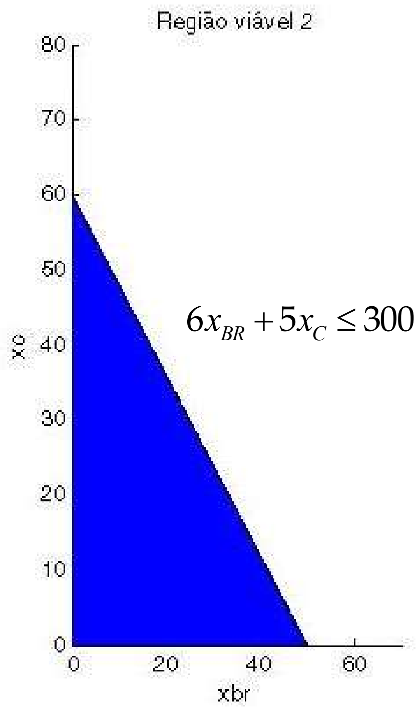


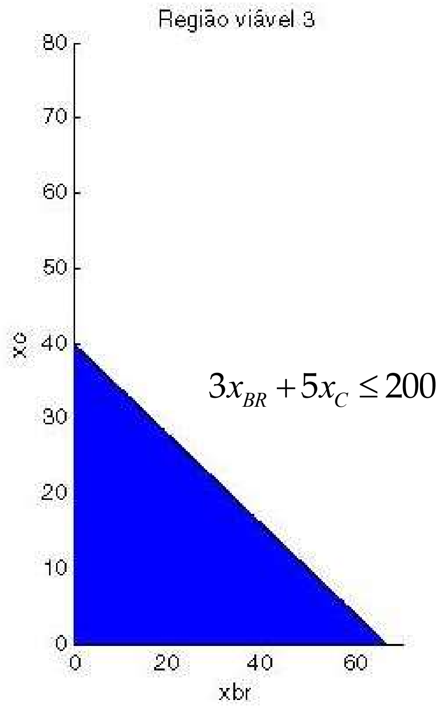
# Restrições



Região viável 1
xc
xbr
$50x_{BR} + 30x_C \leq 2000$

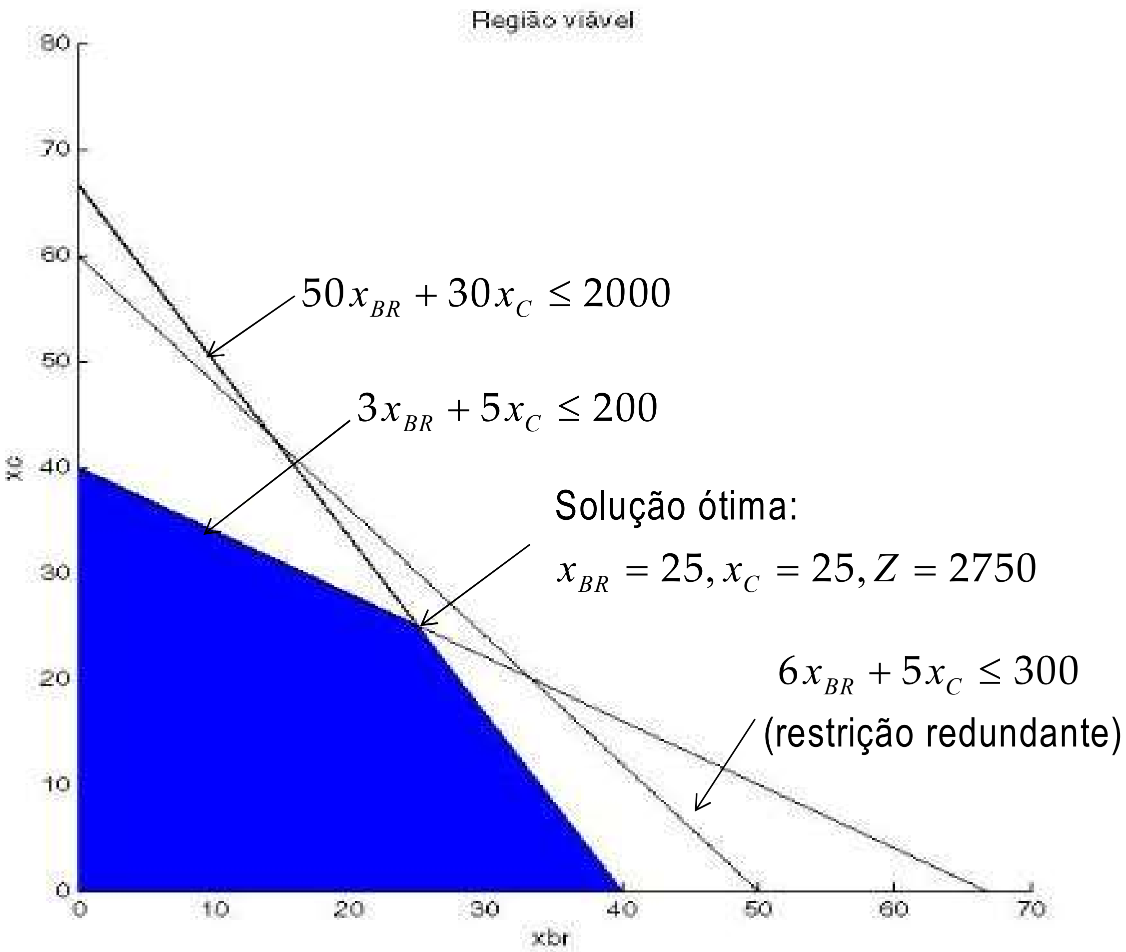



Região viável 2
xc
xbr
$6x_{BR} + 5x_C \leq 300$

Região viável 3
xc
xbr
$3x_{BR} + 5x_C \leq 200$

# Representação Geométrica



# Algoritmos de Otimização...(1)

- Processo iterativo
  - À partir de um ponto inicial é produzida uma sequência até encontrar um candidato a solução
  - Estratégia de avanço entre as iterações distingue os diferentes algoritmos
  - Maioria das estratégias fazem uso de $f(x)$, $c_i(x)$ e (possivelmente) das derivadas primeira e segunda
  - Podem acumular informações passadas ou utilizar apenas informações da iteração atual

- Características
  - Robustez: operar bem para vários problemas de sua classe
  - Eficiência: não requerer muito tempo ou capacidade computacional
  - Precisão: identificar solução com precisão, com pouca sensibilidade a erros nos parâmetros de entrada e de arredondamento

# Algoritmos de Otimização...(2)

- Objetivos conflitantes
  - Um algoritmo com rápida convergência exige muito armazenamento; por outro lado, algoritmos robustos podem ser demasiadamente lentos
  - Relações entre robustez x taxa de convergência x eficiência são aspectos centrais em otimização numérica
- Teoria
  - Caracteriza uma solução
  - Fornece a base para a construção da maioria dos algoritmos
- Objetivos principais do curso
  - Fornecer um conhecimento básico das questões práticas associadas com as condições de otimalidade
  - Descrição das vantagens e desvantagens de importantes algoritmos utilizados em problemas de otimização restrita e irrestrita

# Informações Gerais

**Professor:** Erlon Cristian Finardi, D. Eng.

**Créditos:** 4

**Horário/Local:** Segundas e sextas-feiras 08h20 – 10h00min (PGEEL 001)

## OBJETIVO PRINCIPAL

Fornecer uma descrição compreensiva de importantes metodologias para a resolução de problemas de otimização não-linear e linear contínuos e diferenciáveis

## PRÉ-REQUISITOS

Conhecimentos básicos de álgebra linear, cálculo diferencial e desenvolvimento de algoritmos computacionais (básicos)

# Ementa

**Tópico 1 (12 horas-aula):** Conceitos introdutórios. Fundamentos de otimização irrestrita e condições de otimalidade. Estratégia geral de algoritmos para problemas sem restrições: busca linear. Tamanho de passo: condições de Armijo e Wolfe. Direções de busca: gradiente, Newton e Quase-Newton.

**Tópico 2 (10 horas-aula):** Fundamentos de otimização com restrições. Problemas com restrições de igualdade. Problemas com desigualdades. Condições de otimalidade primeira e de segunda para problemas restritos.

**Tópico 3 (06 horas-aula):** Introdução à programação linear. Caracterização geométrica de problemas lineares. Métodos básicos do Simplex. Dualidade.

# Avaliação

- **Um trabalho (T) computacional e duas provas (P)**
  - $P_1 \rightarrow$ Tópico 1
  - $P_2 \rightarrow$ Tópicos 2 e 3
  - $T \rightarrow$ A definir

- **NF = 0,25×T + 0,75×($P_1$ + $P_2$), em que:**
  - NF $<$ 7: Reprovação direta
  - NF $\geq$ 7: Aprovação direta

# Bibliografia Sugerida


- **NOCEDAL, J., WRIGHT, S. J.; *Numerical Optimization*, Springer Series in Operations Research, Second Edition, 2006.**
- BONNANS, J. F., GILBERT, J. C., LEMARÉCHAL, C., SAGASTIZÁBAL, C.; Numerical Optimization. Theoretical and Practical Aspects, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- BERTSEKAS, D. P.; Nonlinear Programming, Athena Scientific, 2nd Edition, Belmont, MA, 1999.
- FRIEDLANDER, A.; Elementos de Programação Não-Linear, Editora da UNICAMP, Campinas, SP, 1994.
- Fletcher, R. Practical methods of optimization, John Wiley & Sons, 1987.
- GILL, P. E., MURRAY, W., WRIGHT, M. H.; Practical Optimization, Academic Press, Stanford University, California, USA, 1981.
- LASDON, L. S.; Optimization Theory of Large Systems, Macmillan Company, New York, NY, 1970.
- SARKER, R. A., NEWTON, C.; Optimization Modelling – A Practical Approach, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2008.

# OBRIGADO!

Prof. Erlon Cristian Finardi

erlon.finardi@ufsc.br