Implementação de geração de colunas usando CPLEX em linguagem C/C++

Ministrantes:
Dr. Landir Saviniec (UFPR)
Dr. Luiz Henrique Cherri (ODM/USP)

01 e 02 de fevereiro de 2018

CeMEAI
CEPID - Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria

ICMC USP
SÃO CARLOS

Palestrantes

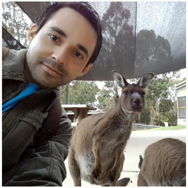
Palestrantes

Dr. Luiz Henrique Cherri

Fundador e presidente da ODM e orientador no programa de pós-graduação em Engenharia de Produção da Unesp-Bauru.

E-mail: luizcherri@gmail.com

Site da ODM: ⟨www.odmcentral.com⟩



Dr. Landir Saviniec

Professor adjunto da Universidade Federal do Paraná (UFPR)

E-mail: landir.saviniec@gmail.com

Site da UFPR: ⟨http://www.jandaiadosul.ufpr.br/⟩

Introdução

Neste minicurso, abordaremos a técnica de geração de colunas (GC) (DESAULNIERS; DESROSIERS; SOLOMON, 2005) dando enfoque na implementação do método. Mostraremos como implementar GC usando o pacote de otimização CPLEX (concert) com interface de programação na linguagem C++. O minicurso está estruturado da seguinte forma:

1. Apresentamos uma breve revisão do método de decomposição Dantzig-Wolfe (BAZARAA; JARVIS; SHERALI, 2010).
2. Propomos um framework genérico em C++ para implementação do método de GC.
3. Mostramos como usar o framework para implementar uma GC para o *problema de dimensionamento de lotes capacitado com múltiplos itens*.
4. Mostramos como usar o framework para implementar a GC para o *problema de corte unidimensional*.

Ao final do minicurso, espera-se que o participante esteja apto a reusar o framework para implementar GC para outros problemas.

Decomposição Dantzig-Wolfe

Método de resolução de problemas lineares;

Aproveita da estrutura especial de algumas formulações;

PL com estrutura de blocos na diagonal

Definições:

- x: vetor de variáveis do PL.
- $x_1, x_2, \cdots, x_N$: uma decomposição das variáveis de x em N subconjuntos disjuntos.

$$
\begin{array}{llllllll}
\textbf{Minimizar} & c_1x_1 & +c_2x_2 & +\cdots & +c_Nx_N & & & \\
\textbf{Sujeito a:} & & & & & & & \\
 & A_1x_1 & +A_2x_2 & +\cdots & +A_Nx_N & = & b_0 & \text{(restrições de ligação)} \\
 & B_1x_1 & & & & \leq & b_1 & \text{(bloco 1)} \\
 & & B_2x_2 & & & \leq & b_2 & \text{(bloco 2)} \\
 & & & \ddots & & & \vdots & \\
 & & & & B_Nx_N & \leq & b_N & \text{(bloco N)} \\
 & x_1, & x_2, & \cdots, & x_N & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Decomposição Dantzig-Wolfe

Ideia básica: decomposição por bloco $i = 1, \cdots, N$

Seja:

- S_i: conjunto de todos os pontos extremos pertencentes ao poliedro

$$\Pi_i \equiv \{x_i : B_i x_i \leq b_i,\ x_i \geq 0\}$$

Supondo que Π_i é limitado, ver (BAZARAA; JARVIS; SHERALI, 2010) para o caso ilimitado. Logo:

- $x_i \in \Pi_i$, se e somente se:

$$x_i = \sum_{j=1}^{|S_i|} \lambda_{ij} x_{ij}$$
$$\sum_{j=1}^{|S_i|} \lambda_{ij} = 1$$
$$\lambda_{ij} \geq 0 \qquad j = 1, \cdots, |S_i|$$

Isto é, x_i é combinação convexa dos pontos extremos de Π_i.

Problema mestre (PM)

Substituindo x_i no PL original, temos:

$$\textbf{Minimizar} \quad \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{|S_i|} (c_i x_{ij}) \lambda_{ij} \tag{1}$$

Sujeito a:

$$(w) \qquad \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{|S_i|} (A_i x_{ij}) \lambda_{ij} = b_0 \tag{2}$$

$$(\alpha_i) \qquad \sum_{j=1}^{|S_i|} \lambda_{ij} = 1 \qquad i = 1, \cdots, N \tag{3}$$

$$\lambda_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \cdots, N; \; j = 1, \cdots, |S_i| \tag{4}$$

Em que:

- (3): são as **restrições de convexidade**.

Subproblema Π_i

Seja w o vetor de variáveis duais associadas às restrições (2) e α_i a variável dual associada a i-ésima restrição de (3). O subproblema Π_i pode ser escrito como segue:

$$\textbf{Minimizar} \quad cr_i = c_i x_i - wA_i x_i - \alpha_i \tag{5}$$

Sujeito a:

$$B_i x_i \leq b_i \tag{6}$$

$$x_i \geq 0 \tag{7}$$

Em que:

- cr_i: custo reduzido associado a coluna gerada pelo subproblema Π_i.

Problema mestre restrito (PMR)

- O PMR é inicializado com um pequeno número de colunas artificiais penalizadas com um Big M.
- A cada iteração todos os subproblemas são resolvidos e novas colunas são geradas.
- As colunas com **custos relativos negativos** são adicionadas ao PMR.
- O algoritmo de GC termina quando não houver nenhuma coluna com custo relativo negativo.

Pseudo-código de um algoritmo de geração de colunas

GC()

```
Inicializar o PMR com variáveis artificiais
Inicializar um vetor de subproblemas Π
do {
    Resolver o PMR
    novaColuna = 0
    for each (π ∈ Π) {
        Atualizar a função objectivo do subproblema π usando as valores duais do PMR
        Resolver o subproblema π
        if (custo reduzido cr < 0) {
            Inserir a coluna no PMR
            novaColuna = novaColuna + 1
        }
    }
} while (novaColuna > 0)
return valor do PMR
```

Framework genérico em C++

Estrutura

```
class Modelo
{
	/** Implementa o ambiente do cplex **/

	IloEnv env;
	IloModel model;
	IloCplex cplex;
};
```

```
class Mestre : public Modelo
{
	/** Implementa o problema mestre **/
	/** Herda código do Modelo **/

	// modelo
	// métodos
};
```

```
class Subproblema : public Modelo
{
	/** Implementa o(s) problema(s) **/
	/** Herda código do Modelo **/

	// modelo
	// métodos
};
```

```
int main(int argc, char* argv[])
{
	/** Implementa o algoritmo de geração de colunas **/

	// Lemos os dados de entrada
	// Criamos o Mestre
	// Criamos o(s) problema(s)
	// Implementamos o algoritmo de GC
};
```

Declarações

```cpp
/** ----------------------------------------------------------------------------
Minicurso: Implementação de geração de colunas usando CPLEX em linguagem C/C++
Descricao: Framework para implementacao de geracao de colunas
Autores: Landir Saviniec e Luiz Henrique Cherri
------------------------------------------------------------------------------**/

#include <iostream>
#include <vector>
#include <pthread.h>
#include <ilcplex/ilocplex.h>

//declaracao das estruturas para armazenar os dados de entrada

//declaracao das classes Subproblema e Mestre
class Subproblema;
class Mestre;
```

Modelo

```
class Modelo
{
    //esta classe implementa as ferramentas do cplex, modelo e resolvedor

    public:

        IloEnv env;  //ambiente do cplex
        IloModel model;  //modelo
        IloCplex cplex;  //cplex
        IloObjective objective;   //expressao da funcao objetivo

        //construtores----------
        Modelo(){
            //chamado quando o modelo e criado
            env = IloEnv();  //cria o ambiente
            model = IloModel(env);   //cria o modelo
            cplex = IloCplex(env);   //cria o cplex
        }

        ~Modelo(){
            //chamado quando o modelo e destruido
            model.end();   //destroi o ambiente
            cplex.end();   //destroi o modelo
            env.end();   //destroi o cplex
        }

        //metodos----------
        void setStream(std::ostream& st){
            //habilita o log do cplex
            cplex.setOut(st);
        }
```

Modelo

```
    void setStreamOff(){
        //desabilita o log do cplex
        cplex.setOut(env.getNullStream());
    }

    void solve(){
        //invoca o cplex
        cplex.solve();
    }

    IloNum getObjective(){
        //retorna o valor da funcao objetivo
        return cplex.getObjValue();
    }

    IloCplex::CplexStatus getStatus(){
        //retorna o estado do cplex
        return this->cplex.getCplexStatus();
    }
};
```

Problema mestre

```
class Mestre : public Modelo  //herda a implementacao da classe 'Modelo'
{
    //esta classe implementa o problema mestre

    public:
        //declaracao das variaveis e ranges

        //construtores----------
        Mestre(){
            //chamado quando o PM e criado
        }

        ~Mestre(){
            //chamado quando o PM e destruido
        };

        //metodos----------
        void criar_modelo(){
            //criar array de variaveis e coeficientes
            //criar Ranges
        }

        //declaracao do metodo que adiciona uma coluna ao PM,
        //usando o subproblema passado como argumento
        void adicionar_coluna(Subproblema* sub);

        void criar_colunas_artificiais(){
            //metodo para inicializar o mestre
        }
};
```

Subproblema(s)

```
class Subproblema : public Modelo  //herda a implementacao da classe 'Modelo'
{
    //esta classe implementa o(s) problema(s)

    public:

        //declaracao das variaveis
        int i;  //variavel para identificar o indice do subproblema

        //construtores----------
        Subproblema(int index){
            //chamado quando o subproblema e criado
        }

        ~Subproblema(){
            //chamado quando o subproblema e destruido
        };

        //metodos----------
        void criar_modelo(){
            //definir as variaveis do modelo
            //definir as restricoes do modelo
        }

        void update_objective(Mestre* mestre){
            //atualiza a funcao objetivo do subproblema
        }

        double get_custo_coluna(){
            //calcula o custo da coluna
        }
};
```

Funções

```cpp
void Mestre::adicionar_coluna(Subproblema* sub){
    //implementacao do metodo que adiciona uma coluna ao PM

}

void ler_dados(std::string arquivo){

    std::ifstream in(arquivo.c_str());
    //codigo para ler os dados de entrada

}
```

Main (implementação do algoritmo de GC)

```
int main(int argc, char* argv[]){

    //parametros: nome do arquivo de dados

    if(argc != 2){
        std::cout << "Argumento invalido." << std::endl;
        return 0;
    }

    ler_dados(argv[1]);  //leitura de dados

    //criar os subproblemas

    //criar o mestre

    //algoritmo de geracao de colunas

    return 0;
}
```

Problema de dimensionamento de lotes capacitado com múltiplos itens (PDL)

Descrição do PDL

O PDL consiste no planejamento da produção de múltiplos itens cuja demanda é conhecida.

A produção dos itens deve ser realizada durante um horizonte de planejamento, no qual cada período possui recursos limitados.

Esses recursos são consumidos pela produção de cada item e pelo tempo de setup dos mesmo.

Na produção de um item, são considerados custos de preparação de máquina e de estoque dos produtos.

O objetivo é encontrar uma solução que minimize esses custos.

Formulação do PDL

Conjuntos:

- T: conjunto de períodos do horizonte de planejamento.
- I: conjunto de itens a serem produzidos.

Parâmetros:

- d_{it}: demanda do item $i \in I$ no período $t \in T$.
- b_i: tempo para produzir uma unidade do item i.
- sp_i: tempo de setup para processar o item i.
- s_i: custo de setup para processar o item i.
- h_i: custo unitário de estocagem do item i.
- C_t: capacidade de produção (tempo) no período t.
- $M_{it} = \min\{\frac{C_t - sp_i}{b_i}, \sum_{j \in T:\ j \geq t} d_{ij}\}$: limite de produção do item i no período t.

Variáveis:

- x_{it}: quantidade do item i produzida no período t. (tamanho do lote)
- e_{it}: estoque do item i no final do período t.
- $y_{it} \in \{0, 1\}$: indica se o item i é produzido no período t.

Formulação do PDL

$$\textbf{Minimizar} \quad \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} (s_i y_{it} + h_i e_{it}) \tag{8}$$

Sujeito a:

$$e_{it} = e_{i,t-1} + x_{it} - d_{it} \qquad \forall\ i \in I;\ t \in T \tag{9}$$

$$\sum_{i \in I} (sp_i y_{it} + b_i x_{it}) \leq C_t \qquad \forall\ t \in T \tag{10}$$

$$x_{it} \leq M_{it} y_{it} \qquad \forall\ i \in I;\ t \in T \tag{11}$$

$$x_{it} \geq 0,\ e_{it} \geq 0,\ y_{it} \in \{0, 1\} \qquad \forall\ i \in I;\ t \in T \tag{12}$$

Em que:

- (8): minimiza o custo total de preparação e estoque.
- (9): garante a conservação de estoque.
- (10): respeita o limite de capacidade.
- (11): o lote é limitado pela capacidade ou demanda dos períodos restantes.

Geração de colunas para o PDL

Formulação estendida para o PDL

Ideia básica: decomposição por item

Conjuntos:

- S_i: conjunto de todos os planos de produção possíveis para o item $i \in I$ sobre o horizonte de planejamento.

Parâmetros:

- f_{ij}: custo do plano de produção $j \in S_i$ do item i.
- g_{ijt}: tempo de (setup + produção) do item i gasto pelo plano de produção $j \in S_i$ no período t.

Variáveis:

- $\lambda_{ij} \in \{0, 1\}$: indica se o item i segue o plano de produção $j \in S_i$.

Formulação estendida para o PDL

$$\textbf{Minimizar} \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in S_i} f_{ij} \lambda_{ij} \tag{13}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in S_i} \lambda_{ij} = 1 \qquad \forall\ i \in I \tag{14}$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in S_i} g_{ijt} \lambda_{ij} \leq C_t \qquad \forall\ t \in T \tag{15}$$

$$\lambda_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall\ i \in I;\ j \in S_i \tag{16}$$

Em que:

- (13): minimiza o custo total dos planos de produção.
- (14): **restrições de convexidade**: somente um plano de produção deve ser selecionado para cada item.
- (15): respeita o limite de capacidade.

Observação: relaxamos o modelo estendido (13)–(16)

$$\textbf{Minimizar} \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in S_i} f_{ij} \lambda_{ij} \tag{17}$$

Sujeito a:

$$(\pi_i^1) \qquad \sum_{j \in S_i} \lambda_{ij} = 1 \qquad \forall\ i \in I \tag{18}$$

$$(\pi_t^2) \qquad \sum_{i \in I} \sum_{j \in S_i} g_{ijt} \lambda_{ij} \leq C_t \qquad \forall\ t \in T \tag{19}$$

$$0 \leq \lambda_{ij} \leq 1 \qquad \forall\ i \in I;\ j \in S_i \tag{20}$$

Em que:

- π^1: variáveis duais associadas às restrições (18).
- π^2: variáveis duais associadas às restrições (19).

Subproblema $\mathcal{P}_i$ (gerador de colunas)

$$\textbf{Minimizar} \quad cr_i = \sum_{t \in T}(s_i y_t + h_i e_t) - \pi_i^1 - \sum_{t \in T} \pi_t^2 (sp_i y_t + b_i x_t) \tag{21}$$

Sujeito a:

$$e_t = e_{t-1} + x_t - d_{it} \qquad \forall\ t \in T \tag{22}$$

$$x_t \leq M_{it} y_t \qquad \forall\ t \in T \tag{23}$$

$$x_t \geq 0,\ e_t \geq 0,\ y_t \in \{0, 1\} \qquad \forall\ t \in T \tag{24}$$

Em que:

- cr_i: custo reduzido associado aos planos de produção (colunas) do item i.

Supondo que $(x^*,\ e^*,\ y^*)$ é uma solução factível do subproblema (21)–(24). Isto é, um plano de produção $j' \in S_i$. Então temos:

- $f_{ij'} = \sum_{t \in T}(s_i y_t^* + h_i e_t^*)$
- $g_{ij't} = sp_i y_t^* + b_i x_t^*$

- Quando criamos o PM (17)–(20) no CPLEX, ele possui a seguinte cara:

$$\textbf{Minimizar} \tag{25}$$

$$\textbf{Sujeito a:}$$

$$= 1 \qquad \forall\ i \in I \tag{26}$$

$$\leq C_t \qquad \forall\ t \in T \tag{27}$$

- Logo é infactível. Para evitar tal problema, inicializamos o PM com colunas artificiais $\bar{\lambda}_i$ e custos elevados Q_i ($i \in I$).

$$\textbf{Minimizar} \quad \sum_{i \in I} Q_i \bar{\lambda}_i \tag{28}$$

$$\textbf{Sujeito a:}$$

$$\bar{\lambda}_i = 1 \qquad \forall\ i \in I \tag{29}$$

$$\leq C_t \qquad \forall\ t \in T \tag{30}$$

$$0 \leq \bar{\lambda}_i \leq 1 \qquad \forall\ i \in I \tag{31}$$

Implementação

- Implementando o método de geração de colunas para o PDL utilizando o framework proposto ...

Problema de corte unidimensional (PCU)

Descrição do PCU

O PCU consiste em cortar um conjunto de barras maiores em um conjunto de itens.

A demanda por esses itens é conhecida a priori.

O objetivo é cortar todos os itens demandados utilizando o menor número de barras possível.

Formulação do PCU

Conjuntos:

- B: conjunto de tipo de barras menores a serem cortados a partir de barras maiores com comprimento fixo.
- P: conjunto de todos os padrões de corte possíveis.

Parâmetros:

- L: comprimento das barras maiores.
- l_i: comprimento das barras do tipo $i \in B$.
- a_{ij}: número de barras do tipo $i \in B$ no padrão $j \in P$.
- d_i: demanda de barras do tipo $i \in B$.

Variáveis:

- x_j: número de barras maiores cortadas segundo o padrão $j \in P$.

Formulação do PCU

$$\textbf{Minimizar} \quad \sum_{j \in P} x_j \tag{32}$$

$$\textbf{Sujeito a:}$$

$$\sum_{j \in P} a_{ij} x_j \geq d_i \qquad \forall\ i \in B \tag{33}$$

$$x_j \in \mathbb{Z} \qquad \forall\ j \in P \tag{34}$$

Em que:

- (32): minimiza o número de barras cortadas.
- (33): garante o atendimento das demandas.

Dificuldade: Enumerar todos os padrões de corte $j \in P$ é impraticável.

Geração de colunas para o PCU

Problema mestre (PM)

Observação: relaxamos o modelo (32)–(34)

$$\textbf{Minimizar} \quad \sum_{j \in P} x_j \tag{35}$$

Sujeito a:

$$(\pi_i) \qquad \sum_{j \in P} a_{ij} x_j \geq d_i \qquad \forall\ i \in B \tag{36}$$

$$x_j \geq 0 \qquad \forall\ j \in P \tag{37}$$

Em que:

- π: variáveis duais associadas às restrições (36).

Subproblema $\mathcal{P}$ (gerador de padrões ou colunas)

$$\textbf{Minimizar} \quad cr = 1 - \sum_{i \in B} \pi_i y_i \tag{38}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i \in B} l_i y_i \leq L \tag{39}$$

$$y_i \in \mathbb{Z} \qquad \forall\ i \in B \tag{40}$$

Em que:

- cr: custo reduzido associado ao padrão de corte (coluna) gerado.
- y_i: número de barras do tipo $i \in B$ no padrão de corte gerado.

Supondo que y^* é uma solução factível do subproblema (38)–(40). Isto é, um padrão de corte $j' \in P$. Então temos:

- $a_{ij'} = y_i^*$

- Quando criamos o PM (35)–(37) no CPLEX, ele possui a seguinte cara:

$$\textbf{Minimizar} \tag{41}$$
$$\textbf{Sujeito a:}$$
$$\geq d_i \qquad \forall\ i \in B \tag{42}$$
$$\tag{43}$$

- Logo é infactível. Para evitar tal problema, inicializamos o PM com colunas artificiais $\bar{x}_i$ e custos elevados Q_i ($i \in B$).

$$\textbf{Minimizar} \quad \sum_{i \in B} Q_i \bar{x}_i \tag{44}$$
$$\textbf{Sujeito a:}$$
$$\bar{x}_i \geq d_i \qquad \forall\ i \in B \tag{45}$$
$$\bar{x}_i \geq 0 \qquad \forall\ i \in B \tag{46}$$

- Implementando o método de geração de colunas para o PCU utilizando o framework proposto ...

References I

BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. *Linear Programming and Network Flows*. 4th. ed. [S.l.]: Wiley-Interscience, 2010. ISBN 9780470462720.

DESAULNIERS, G.; DESROSIERS, J.; SOLOMON, M. M. *Column generation*. 1st. ed. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2005. v. 5.