

Otimização no rank-1 de Chvátal-Gomory do problema Set Covering

João Júnior¹

¹Universidade Federal de Minas Gerais

Otimização Combinatória e Inteira - 2013

- 1 *SCP*
 - Definições
 - Exemplo
 - Experimentos Computacionais

Dados $M = \{1, \dots, m\}$ e $N = \{1, \dots, n\}$ dois conjuntos. Seja M_1, M_2, \dots, M_n uma coleção de subconjuntos de M com um custo c_j associado a cada um desses subconjuntos. Uma cobertura de M é um subconjunto $F \subset N$ tal que $\cup_{j \in F} M_j = M$.

$$\min \sum_{j \in N} c_j x_j \quad (1)$$

Sujeito à:

$$Ax \geq 1 \quad (2)$$

$$x \in \{0, 1\}^n \quad (3)$$

Onde A é uma matriz de incidência de tamanho $m \times n$ para a coleção de subconjuntos $M_j, \forall j \in N$, com as entradas dadas por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{se } i \in M_j, \\ 0; & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- On the Set Covering Polytope: I. All the Facets with coefficients in $\{0,1,2\}$ (Balas,ShuMing-1989)
- On the Set Covering Polytope: All the Facets with coefficients in $\{0,1,2,3\}$ (Saxena-2004)
- Set Covering algorithms using cutting planes, heuristics, and subgradient optimization: a computational(Balas,Andrew-1980)
- An algorithm for set covering problem(Beasley-1987)

Algoritmo para encontrar cortes de Chvátal-Gomory de rank-1 para o SCP

```
Entrada: Instância para o SCP
Saída: Cobertura de menor custo encontrada
1 início
2    $x \leftarrow$  Resolução da relaxação linear da instância SCP
3   while  $x$  não for inteiro ou o tempo máximo ocorra do
4     if Existe algum corte de Chvátal-Gomory rank-1 que corta  $x$ ? then
5       Adicione o corte ao modelo relaxado
6        $x \leftarrow$  Resolução da relaxação linear da instância SCP
7     end
8     else
9       break
10    end
11  end
12  retorna Melhor Solução Encontrada
13 fim
```

$$\min \sum_{j \in N} \alpha_j x_j - \alpha_0 \quad (4)$$

Sujeito à:

$$0 \leq \alpha_j - u^T A_j \leq 1 - \delta, \forall j \in N \quad (5)$$

$$0 \leq \alpha_0 - u^T b \leq 1 - \delta \quad (6)$$

$$0 \leq u_i \leq 1 - \delta, \forall i = 1, \dots, m \quad (7)$$

$$\alpha_0 \leq \sum_{j \in N} \alpha_j, \quad (8)$$

$$\alpha_0, \alpha_j \text{ inteiro}, \forall j \in N \quad (9)$$

Exemplo

$$c = (60, 7, 11, 5, 8, 5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 38 Pontos Viáveis
- Na igualdade: 13 satisfazem restrição 1, 14 satisfazem restrição 2, 12 satisfazem restrição 3 e 22 satisfazem restrição 4
- Relaxação linear: $x = (0.0, 0.5, 0.5, 0.0, 0.5, 0.5)$, Custo da Solução: 15.5
- Corte Adicionado: $2x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 1x_6 \geq 3$
- Multiplicador: $u = (0.99, 0.495, 0.505, 0.505)$, Restrição Gerada: $1.495x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 0.495x_4 + 1x_5 + 0.99x_6 \geq 2.495$
- 5 pontos satisfazem essa nova restrição na igualdade

Conjunto	Linhas	Colunas	Densidade	Problemas
4	200	1000	2	10
6	200	1000	5	5
A	300	3000	2	5
B	300	3000	5	5

Parâmetros Gerais:

- Tempo Máximo de Execução: 7200(Segundos)

Para o Modelo de Separação:

- Tempo Máximo de Execução: 120(Segundos)
- Máximo de 5 soluções inteiras
- Máximo 50000 nós na árvore de Branch-and-Bound
- ênfase na busca de soluções foi setado 4

Resultados para o conjunto de testes 4 e 6

Instância	<i>IP</i>		<i>ARank1</i>			
	Custo Solução	Tempo(s)	Relaxação Linear	Custo Solução	#Cortes	Tempo(s)
scp41	429	0.84	429.00	429.00	0	0.00
scp42	512	0.85	512.00	512.00	0	0.00
scp43	516	0.86	516.00	516.00	0	0.00
scp44	494	0.86	494.00	494.00	6	863.71
scp45	512	0.85	512.00	512.00	0	0.00
scp46	560	0.89	557.25	558.94	32	1038.07
scp47	430	0.83	430.00	430.00	0	0.00
scp48	492	0.97	488.67	490.67	65	6118.55
scp49	641	0.90	638.54	639.87	75	8054.13
scp410	514	0.90	513.50	514.00	14	1349.04
scp61	138	1.23	133.14	133.53	52	7267.44
scp62	146	2.06	140.46	141.15	50	7284.06
scp63	145	1.26	140.13	141.46	72	7289.33
scp64	131	0.96	129.00	130.08	77	7251.63
scp65	161	1.94	153.35	154.13	50	7370.46

Resultados para o conjunto de testes A e B

Instância	<i>IP</i>		<i>ARank1</i>			
	Custo Solução	Tempo(s)	Relaxação Linear	Custo Solução	#Cortes	Tempo(s)
scpa1	253	9.95	246.84	246.84	0	251.75
scpa2	252	9.87	247.50	247.50	0	252.95
scpa3	232	9.48	228.00	228.00	6	1685.40
scpa4	234	8.76	231.40	231.40	0	248.60
scpa5	236	8.64	234.89	235.02	25	5826.96
scpb1	69	10.08	64.54	64.54	0	246.67
scpb2	76	10.87	69.30	69.30	0	256.28
scpb3	80	9.67	74.16	74.16	0	252.03
scpb4	79	11.52	71.22	71.22	0	250.54
scpb5	72	9.86	67.67	67.67	2	741.67

Dúvidas?