Algoritmo de Planos de Corte, Cortes de Gomory e Cortes Disjuntivos

Eduardo Camponogara

Departamento de Automação e Sistemas
Universidade Federal de Santa Catarina

DAS-9011: Métodos de Otimização

Sumário

Planos de Corte e Desigualdades Fortes

Princípios

- Suponha que $X = P \cap \mathbb{Z}^n$
- Seja $\mathcal{F}$ uma família desigualdades válidas para X:

$$\pi^T x \leqslant \pi_0, \ (\pi, \pi_0) \in \mathcal{F},$$

- Tipicamente, $\mathcal{F}$ pode conter um número muito grande de elementos (possivelmente exponencial).
- Logo não podemos introduzir todas as desigualdades na formulação a priori.
- Do ponto de vista prático, não queremos encontrar uma representação completa de $conv(X)$, apenas uma aproximação em torno da solução ótima.

Algoritmo de Planos de Corte

Abaixo descreveremos o algoritmo básico de planos de corte para IP, $max\{c^T x; x \in X\}$, que gera cortes "úteis" a partir de $\mathcal{F}$

Algoritmo de Planos de Corte

Algoritmo de planos de corte

Inicialização

Defina $t = 0$ e $P^0 = P$

Iteração T

Resolva o problema linear $\overline{z}^t = Max\{c^T x : x \in P^t\}$

Seja x^t a solução ótima

Se $x^t \in \mathbb{Z}^n$, pare pois x^t é uma solução ótima para IP

Se $x^t \notin \mathbb{Z}^n$, encontre uma desigualdade $(\pi, \pi_0) \in \mathcal{F}$ tal que $\pi^T x^t > \pi_0$

Se uma desigualdade (π, π_0) foi encontrada, então faça $P^{t+1} = P^t \cap \{x : \pi^T x \leqslant \pi_0\}$, incremente t e repita

Caso contrário, pare.

Planos de Corte e Desigualdades Fortes

Observações

- Se o algoritmo termina sem encontrar uma solução inteira, pelo menos $P^t = P \cap \{x : \pi_i^T \leqslant \pi_{i0}, i = 1, 2, \ldots, t\}$ é uma formulação mais "apertada" do que P.
- Podemos então proceder a partir de P^t com um algoritmo de *branch-and-bound*.

Sumário

Algoritmo de planos de corte com cortes de Gomory

- Aqui consideraremos o problema inteiro:

$$Max \ \{c^T x : Ax = b, x \geqslant 0 \text{ e inteiro}\}$$

- O princípio básico é resolver a relaxação linear e encontrar uma base ótima.
- a partir da base ótima, se escolhe uma variável básica que não seja inteira.
- Então geramos uma desigualdade Chvátal-Gomory associada a esta variável básica visando "cortá-la", ou seja, eleminá-la do poliedro de relaxação.

Algoritmo de planos de corte com cortes de Gomory

Dada uma base ótima, o problema pode ser reescrito na forma:

$$
\begin{array}{ll}
Max & \overline{a}_{oo} + \sum\limits_{j \in NB} \overline{a}_{oj} x_j \\
\text{Sujeito a:} & x_{Bu} + \sum\limits_{j \in NB} \overline{a}_{uj} x_j = \overline{a}_{uo} \text{ para } u = 1, \ldots, m \\
 & x \geqslant 0 \ \text{ e inteiro}
\end{array}
$$

onde:

i) $\overline{a}_{oj} \leqslant 0$ para $j \in NB$,

ii) $\overline{a}_{uo} \geqslant 0$ para $u = 1, \ldots, m$, e

iii) NB é o conjunto de variáveis não básicas, portanto $\{B_u : u = 1, \ldots, m\} \cup NB = \{1, \ldots, n\}$.

Algoritmo de planos de corte com cortes de Gomory

- Se a solução básica ótima x^* não for inteira, então deve existir uma linha u tal que $\overline{a}_{uo} \notin \mathbb{Z}$.
- Escolhendo esta linha, o corte de Chvátal-Gomory para a linha u fica:

$$x_{Bu} + \sum_{j \in NB} \lfloor \overline{a}_{uj} \rfloor x_j \leqslant \lfloor \overline{a}_{uo} \rfloor \tag{1}$$

- Reescrevendo (1) de forma a eliminar x_{Bu}, obtemos:

$$x_{Bu} = \overline{a}_{uo} - \sum_{j \in NB} \overline{a}_{uj} x_j \tag{2}$$

Algoritmo de planos de corte com cortes de Gomory

A partir de (2), deduzimos:

$$\overline{a}_{uo} - \sum_{j \in NB} \overline{a}_{uj} x_j + \sum_{j \in NB} \lfloor \overline{a}_{uj} \rfloor x_j \leqslant \lfloor \overline{a}_{uo} \rfloor \quad \Rightarrow \tag{3}$$

$$\sum_{j \in NB} \left(\overline{a}_{uj} - \lfloor \overline{a}_{uj} \rfloor \right) x_j \geqslant \overline{a}_{uo} - \lfloor \overline{a}_{uo} \rfloor \tag{4}$$

Algoritmo de planos de corte com cortes de Gomory

De uma forma mais compacta, podemos reescrever o corte

$$\sum_{j \in NB} \left(\bar{a}_{uj} - \lfloor \bar{a}_{uj} \rfloor\right) x_j \geqslant \bar{a}_{uo} - \lfloor \bar{a}_{uo} \rfloor$$

como:

$$\sum_{j \in NB} f_{uj} x_j \geqslant f_{uo} \tag{5}$$

onde :

- $f_{uj} = \bar{a}_{uj} - \lfloor \bar{a}_{uj} \rfloor$ e
- $f_{uo} = \bar{a}_{uo} - \lfloor \bar{a}_{uo} \rfloor$.

Algoritmo de planos de corte com cortes de Gomory

Observação

Uma vez que $0 \leqslant f_{uj} < 1$ e $0 < f_{uo} < 1$, e $x_j^* = 0$ para toda a variável $j \in NB$ na solução x^*, a desigualdade

$$\sum_{j \in NB} f_{uj} x_j \geqslant f_{uo}$$

corta a solução corrente x^*.

Exemplo

Considere o problema inteiro:

$$
\begin{array}{rrcrcl}
z = Max & 4x_1 & - & x_2 & & \\
s.a.: & 7x_1 & - & 2x_2 & \leqslant & 14 \\
 & & & x_2 & \leqslant & 3 \\
 & 2x_1 & - & 2x_2 & \leqslant & 3 \\
 & x_1, & & x_2 & \geqslant & 0, \quad \text{inteiros}
\end{array}
\tag{6}
$$

Exemplo

Após adicionarmos variáveis de folga x_3, x_4 e x_5, podemos aplicar o método simplex e obter a solução ótima

$$
\begin{array}{llllllllll}
Max & \frac{59}{7} & & & - & \frac{4}{7}x_3 & - & \frac{1}{7}x_4 & & \\
s.a: & & x_1 & & + & \frac{1}{7}x_3 & + & \frac{2}{7}x_4 & & = \frac{20}{7} \ (= 2.8571) \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & = 3 \\
 & & & & - & \frac{2}{7}x_3 & + & \frac{10}{7}x_4 & + \ x_5 & = \frac{23}{7} \ (= 3.2857) \\
 & & x_1, & x_2, & & x_3, & & x_4, & x_5 & \geqslant 0 \ \text{e inteiros}
\end{array} \tag{7}
$$

Exemplo

- A solução ótima da relaxação linear é $x^* = (\frac{20}{7}, 3, \frac{27}{7}, 0, 0) \notin \mathbb{Z}^5_+$.
- Portanto, usamos a primeira linha de (7), na qual a variável básica x_1 é fracionária.
- Isto gera o corte:

$$x_1 + \lfloor \tfrac{1}{7} \rfloor x_3 + \lfloor \tfrac{2}{7} \rfloor x_4 \leqslant \lfloor \tfrac{20}{7} \rfloor \quad \Rightarrow \quad x_1 \leqslant 2$$

Exemplo

Introduzindo uma variável de folga, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&x_1 + s = 2, \\
&x_1 = \tfrac{20}{7} - \tfrac{1}{7}x_3 - \tfrac{2}{7}x_4 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{20}{7} - \tfrac{1}{7}x_3 - \tfrac{2}{7}x_4 + s = 2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \quad s = 2 - \tfrac{20}{7} + \tfrac{1}{7}x_3 + \tfrac{2}{7}x_4 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \quad s = -\tfrac{6}{7} + \tfrac{1}{7}x_3 + \tfrac{2}{7}x_4 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \qquad \text{com } s, x_3, x_4 \geqslant 0 \text{ e inteiros.}
\end{aligned}
$$

Exemplo

Adicionando a variável s e o corte $s = -\frac{6}{7} + \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4$, podemos obter uma segunda formulação:

$$
\begin{array}{lllllllllll}
Max & \frac{15}{2} & & & & & - & \frac{1}{2}x_5 & - & 3s & & \\
s.a: & & x_1 & & & & & & + & s & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & - & \frac{1}{2}x_5 & + & s & = & \frac{1}{2} \\
 & & & & x_3 & & - & x_5 & - & 5s & = & 1 \\
 & & & & & x_4 & + & \frac{1}{2}x_5 & + & 6s & = & \frac{5}{2} \\
 & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & & x_5, & & s & \geqslant & 0 \text{ e inteiros.}
\end{array}
\quad (8)
$$

A solução ótima da relaxação linear para (8), produz $x = (2, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 0, 0)$.

Exemplo

A solução incumbente continua fracionária uma vez que x_2 e x_4 são fracionários.

A aplicação do corte de Gomory fracionário na segunda linha produz:

$$
\begin{aligned}
x_2 + \lfloor -\tfrac{1}{2} \rfloor x_5 + \lfloor 1 \rfloor s \leqslant \lfloor \tfrac{1}{2} \rfloor \quad &\Rightarrow \quad x_2 - x_5 + s \leqslant 0 \\
&\Rightarrow \quad x_2 - x_5 + s + t = 0, \;\; t \geqslant 0 \\
&\Rightarrow \quad \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x_5 - s\right) - x_5 + s + t = 0 \\
&\Rightarrow \quad t - \tfrac{1}{2}x_5 = -\tfrac{1}{2}, \;\; t \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Exemplo

Após adicionarmos a variável $t \geqslant 0$ e o corte $t - \frac{1}{2}x_5 = -\frac{1}{2}$, obtemos a solução abaixo para a relaxação linear:

$$
\begin{array}{llccccccccccl}
Max & 7 & & & & & & - & 3s & - & t & & \\
s.a: & & x_1 & & & & & + & s & & & = & 2 \\
& & & x_2 & & & & + & s & - & t & = & 1 \\
& & & & x_3 & & & - & 5s & - & 2t & = & 2 \\
& & & & & x_4 & & + & 6s & + & t & = & 2 \\
& & & & & & x_5 & & & - & t & = & 1 \\
& & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & & s, & & t & \geqslant & 0 \text{ e inteiros}
\end{array}
$$

A solução obtida é ótima pois os valores de todas as variáveis são inteiros. A solução ótima é $x^* = (2, 1, 2, 2, 1)$ cujo valor da função objetivo é $z^* = 7$.

Sumário

Desigualdades Disjuntivas

- Seja $X = X^1 \cup X^2$ com $X^i \subseteq \mathbb{R}^n_+$.
- Isto é, X é uma disjunção (união) de dois conjuntos X^1 e X^2.
- Alguns resultados importantes serão enunciados abaixo.

Desigualdades Disjuntivas

Proposição

Se $\sum_{j=1}^{n} \pi_j^i x_j \leqslant \pi_0^i$ é uma desigualdade válida para X^i, $i = 1, 2$, então a desigualdade

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j x_j \leqslant \pi_0$$

é válida para X se:

- $\pi_j \leqslant Min\{\pi_j^1, \pi_j^2\}$ para $j = 1, \ldots, n$; e
- $\pi_0 \geqslant Max\{\pi_0^1, \pi_0^2\}$.

Desigualdades Disjuntivas

Proposição

- Se $P^i = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : A^i x \leqslant b^i\}$ para $i = 1, 2$ são poliedros não-vazios,
- então (π, π_0) é uma desigualdade válida para $conv(P^1 \cup P^2)$ se e somente se existem $u_1, u_2 \geqslant 0$ tal que:

$$\begin{aligned}
\pi^T &\leqslant u_1^T A^1 \\
\pi^T &\leqslant u_2^T A^2 \\
\pi_0 &\geqslant u_1^T b^1 \\
\pi_0 &\geqslant u_2^T b^2
\end{aligned}$$

Exemplo

- Considere os poliedros:

$$
\begin{aligned}
P^1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1 + x_2 \leqslant 1,\ x_1 + x_2 \leqslant 5\} \\
P^2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leqslant 4, -2x_1 + x_2 \leqslant -6, \\
&\qquad\qquad\qquad x_1 - 3x_2 \leqslant -2\}
\end{aligned}
$$

- Fazendo $u_1 = (2, 1)$ e $u_2 = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ e depois aplicando a proposição acima obtemos:

$$
u_1^T A^1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad u_1^T b^1 = 7
$$

Exemplo

- Obtemos ainda:

$$u_2^T A^2 = \left[\begin{array}{ccc} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{rr} 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -1 & 3 \end{array}\right] \qquad u_2^T b^2 = 7$$

- Isto nos permite obter a desigualdade $-x_1 + 3x_2 \leqslant 7$ válida para $P^1 \cup P^2$.

Exemplo

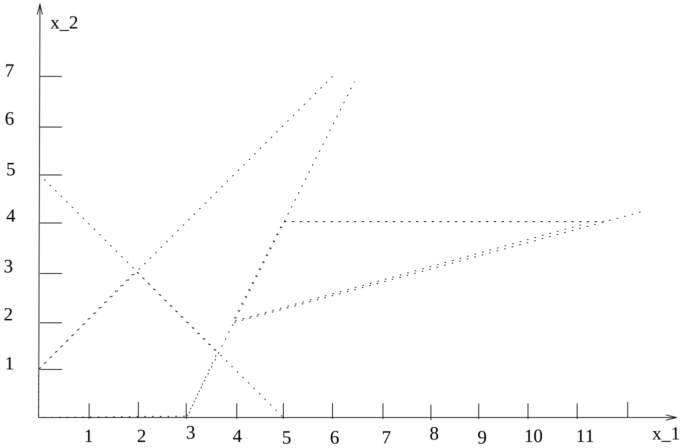

Figura: Desigualdades disjuntivas

Desigualdades disjuntivas para problemas 0-1

- Especializando ainda mais, podemos nos restringir a problemas 0-1, onde:
  - $X = P \cap \mathbb{Z}^n \subseteq \{0,1\}^n$ e
  - $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leqslant b, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.
- Seja $P^0 = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0\}$.
- Seja $P^1 = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 1\}$ para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Desigualdades disjuntivas para problemas 0-1

Proposição

A desigualdade (π, π_0) é válida para $conv(P^0 \cup P^1)$ se existe $u_i \in \mathbb{R}^m_+$, $v_i \in \mathbb{R}^n_+$, $w_i \in \mathbb{R}^1_+$ para $i = 0, 1$ tal que:

$$
\begin{aligned}
\pi^T &\leqslant u_0^T A + v_0 + w_0 e_j \\
\pi^T &\leqslant u_1^T A + v_1 - w_1 e_j \\
\pi_0 &\geqslant u_0^T b + \mathbf{1}^T v_0 \\
\pi_0 &\geqslant u_1^T b + \mathbf{1}^T v_1 - w_1
\end{aligned}
$$

Desigualdades disjuntivas para problemas 0-1

Prova

Aplique a proposição anterior com:

- $P^0 = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leqslant b, x \leqslant 1, x_j \leqslant 0\}$ e
- $P^1 = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leqslant b, x \leqslant 1, -x_j \leqslant -1\}$

Desigualdades disjuntivas para problemas 0-1

Exemplo

Considere a seguinte instância do problema da mochila

$$\begin{array}{lccccccccc} Max & 12x_1 & + & 14x_2 & + & 7x_3 & + & 12x_4 & & \\ s.a: & 4x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 6x_4 & \leqslant & 8 \end{array}$$

$$x \in \mathbb{B}^4$$

cuja solução linear ótima é $x^* = (1, 0.8, 0, 0)$.

Desigualdades disjuntivas para problemas 0-1

- Uma vez que $x_2^* = 0.8$ é fracionário, escolhemos $j = 2$.
- Definimos P^0 e P^1, e procuramos a desigualdade (π, π_0) que é violada conforme a proposição acima.
- Para isso, resolvemos um problema de programação linear maximizando $\pi^T x^* - \pi_0$ sobre o poliedro que descreve os coeficientes das desigualdades válidas dadas pela proposição.

Desigualdades disjuntivas para problemas 0-1

O problema de programação linear é dado por:

$$Max \quad 1.0\pi_1 + 0.8\pi_2 - \pi_0$$

$$s.a: \quad \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \leqslant 4u^0 + v_1^0 \\ \pi_1 \leqslant 4u^1 + v_1^1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \pi_2 \leqslant 5u^0 + v_2^0 + w^0 \\ \pi_2 \leqslant 5u^1 + v_2^1 - w^1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \pi_3 \leqslant 3u^0 + v_3^0 \\ \pi_3 \leqslant 3u^1 + v_3^1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \pi_4 \leqslant 6u^0 + v_4^0 \\ \pi_4 \leqslant 6u^1 + v_4^1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \pi_0 \geqslant 8u^0 + v_1^0 + v_2^0 + v_3^0 + v_4^0 \\ \pi_0 \geqslant 8u^1 + v_1^1 + v_2^1 + v_3^1 + v_4^1 - w^1 \end{array} \right. \\ u^0, u^1, v^0, v^1, w^0, w^1 \geqslant 0 \end{array}$$

Desigualdades disjuntivas para problemas 0-1

- Objetivando tornar o espaço de soluções factíveis limitado, devemos introduzir um critério de normalização.
- Duas possibilidades são:
  a) $\sum_{j=1}^{n} \pi_j \leqslant 1$
  b) $\pi_0 = 1$
- Obtemos então a seguinte desigualdade de corte:

$$x_1 + \frac{1}{4}x_2 \leqslant 1.$$

Desigualdades disjuntivas para problemas 0-1

- Para P^0, a desigualdade é uma combinação das restrições $x_1 \leqslant 1$ e $x_2 \leqslant 0$ com $v_1^0 = 1$ e $w^0 = \frac{1}{4}$ respectivamente.
- Para P^1, ela é uma combinação da desigualdade $4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 \leqslant 8$ e $-x_2 \leqslant -1$ com $u^1 = \frac{1}{4}$ e $w^1 = 1$, respectivamente.

Algoritmo de Planos de Corte, Cortes de Gomory e Cortes Disjuntivos

- Fim!
- Obrigado pela presença