Geometria Analítica

ESCOLA SUPERIOR DE MEDIA ARTES E DESIGN

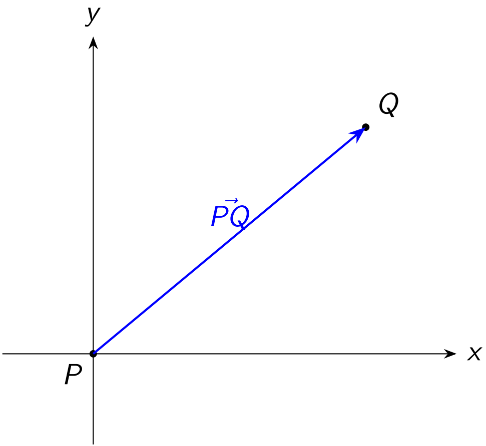
Espaço Afim — Estrutura onde se definem vetores

- A cada par de pontos $P, Q \in \mathbb{R}^n$ associa-se um vetor $\vec{PQ}$
- Para cada ponto P e cada vetor $\vec{v}$ existe um e um só ponto Q tal que $\vec{v} = \vec{PQ}$
- **Relação de Chasles:** Dados P, Q, R três pontos, tem-se que $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$

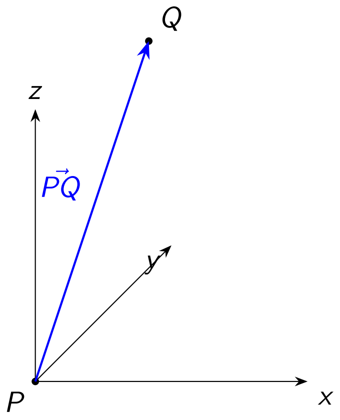
$$\mathbb{R},\ \mathbb{R}^2,\ \mathbb{R}^3$$

Vector numa recta

Vector no plano



Vector no espaço



- **Igualdade:**
  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3) \Leftrightarrow u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2 \wedge u_3 = v_3$
- **Adição:** $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$
- **Multiplicação por escalar:** $k \cdot \vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$
- **Produto escalar:** $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

Propriedades do produto escalar

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$

Vetores colineares: $\vec{u}$ e $k\vec{u}$ têm a mesma direção

Norma e ângulo entre vetores

- **Norma:** $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$
- **Ângulo:** $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right)$

Vetores ortogonais: $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
Vetores unitários: $\|\vec{u}\| = 1$
Vetores coordenados unitários: têm norma 1 e direção dos eixos coordenados

Produto Vetorial

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

- Perpendicular a $\vec{u}$ e $\vec{v}$
- Se colineares, então $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$
- Representa a área do paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Produto Misto de Três Vetores

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

- Escalar que representa o volume do paralelepípedo definido por $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$
- Se o valor for 0, os vetores são coplanares

Definição de recta

Sejam P um ponto e $\vec{u}$ um vector não nulo.
O conjunto dos pontos obtidos por $P + k\vec{u}$, com $k \in \mathbb{R}$, chama-se a **recta** que passa por P e tem a direcção de $\vec{u}$.
Representação: $L(P, \vec{u})$.

Exercício 1

Considere a recta $L(Q, \vec{v})$ em $\mathbb{R}^3$, com:

$$Q = (-3, 1, 1), \quad \vec{v} = (1, -2, 3)$$

Verifique se $P = (2, -1, 4)$ pertence a $L(Q, \vec{v})$.
Resolução:

$$(2, -1, 4) = (-3, 1, 1) + k(1, -2, 3)$$

Sistema:

$$\begin{cases} 2 = -3 + k \\ -1 = 1 - 2k \\ 4 = 1 + 3k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k = 5 \\ k = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

Conclusão: **O ponto P não pertence à recta $L(Q, \vec{v})$.**

Exercício 2

Determine o ponto de intersecção das rectas $L(P, \vec{a})$ e $L(Q, \vec{b})$:

$$P = (1,1,1), \quad Q = (2,1,0)$$
$$\vec{a} = (1,2,3), \quad \vec{b} = (3,8,13)$$

Resolução:

$$(1,1,1) + k(1,2,3) = (2,1,0) + t(3,8,13)$$

Sistema:

$$\begin{cases} 1 + k = 2 + 3t \\ 1 + 2k = 1 + 8t \\ 1 + 3k = 13t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 + 3t \\ 1 + 2(1 + 3t) = 1 + 8t \\ 1 + 3(1 + 3t) = 13t \end{cases}$$

Resolvendo:

$$t = 1, \quad k = 4$$

Ponto de intersecção: $(5, 9, 13)$

Classificação do sistema

Se o sistema:

- É possível e determinado: **rectas intersectam-se num ponto**
- É possível e indeterminado: **rectas coincidem**
- É impossível: **rectas são paralelas ou não complanares**

Formas de representação da recta em $\mathbb{R}^3$

Equação vectorial:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + k(u_1, u_2, u_3), \quad k \in \mathbb{R}$$

Equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + ku_1 \\ y = y_0 + ku_2 \\ z = z_0 + ku_3 \end{cases}$$

Equações cartesianas:

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

Exercício 3

Considere $L(P, \vec{u})$ com:

$$P = (-3, 1, 1), \quad \vec{u} = (1, -2, 3)$$

Equação vectorial:

$$(x, y, z) = (-3, 1, 1) + k(1, -2, 3)$$

Equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = -3 + k \\ y = 1 - 2k \\ z = 1 + 3k \end{cases}$$

Equações cartesianas:

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}$$

Distância de um ponto a uma recta

Seja $L(P, \vec{u})$ uma recta e Q um ponto exterior.
A distância de Q à recta é o comprimento do segmento QI, onde I é a projecção de Q na recta.
Condições:

- $I \in L(P, \vec{u})$
- $\overrightarrow{QI} \perp \vec{u}$, isto é, $\overrightarrow{QI} \cdot \vec{u} = 0$

Exercício 4

Determine a distância de $Q = (1, 1, 1)$ à recta $L(P, \vec{a})$ com:

$$P = (-3, 1, 1), \quad \vec{a} = (1, -2, 3)$$

Equações paramétricas da recta:

$$\begin{cases} x = -3 + k \\ y = 1 - 2k \\ z = 1 + 3k \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Ponto I da recta:

$$I = (-3 + k, 1 - 2k, 1 + 3k)$$

$$\overrightarrow{QI} = (-4 + k, -2k, 3k)$$

Exercício 4

Condição de ortogonalidade:

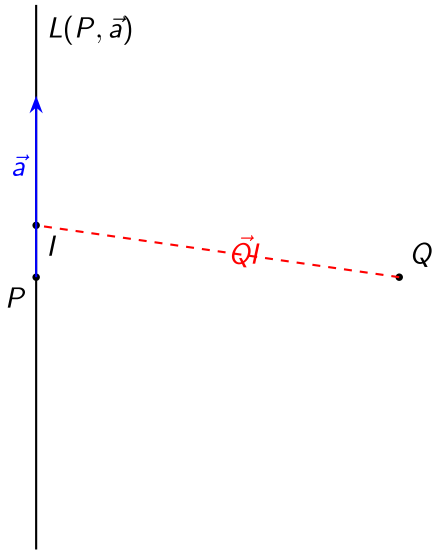
$$\overrightarrow{QI} \cdot \vec{a} = 0$$

$$(-4 + k)(1) + (-2k)(-2) + (3k)(3) = 0$$

$$-4 + k + 4k + 9k = 0 \quad \Rightarrow \quad 14k = 4 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2}{7}$$

Distância:

$$d(Q, L) = \left\|\overrightarrow{QI}\right\| = \sqrt{\left(-\frac{26}{7}\right)^2 + \left(-\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{182}}{7}$$


$L(P, \vec{a})$
$\vec{a}$
I
$\vec{QI}$
Q
P

Definição de plano

Sejam P um ponto e $\vec{u}, \vec{v}$ dois vectores não nulos e linearmente independentes.
O conjunto dos pontos obtidos por:

$$P + s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

define um **plano** que contém P e é gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
Nota: $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são chamados *vectores geradores* do plano.

Exercício 1

Considere o plano α definido por:

$$P = (1, 1, 1), \quad \vec{u} = (2, -1, 3), \quad \vec{v} = (-1, 0, 2)$$

Verifique se $Q = (2, 0, 3)$ pertence a α.
Resolução:

$$(2, 0, 3) = (1, 1, 1) + s(2, -1, 3) + t(-1, 0, 2)$$

Sistema:

$$\begin{cases} 2 = 1 + 2s - t \\ 0 = 1 - s \\ 3 = 1 + 3s + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

Substituindo:

$$3 = 1 + 3(1) + 2(1) = 6 \quad \text{(falso)}$$

Conclusão: Q **não pertence** ao plano α.

Intersecção de dois planos

Se existir intersecção, o resultado é uma **recta**.
Exemplo:

$$\alpha : (x, y, z) = (1, 1, 1) + s(2, -1, 3) + t(-1, 0, 2)$$

$$\beta : (x, y, z) = (2, 3, 1) + m(1, 2, 3) + n(3, 2, 1)$$

Resolução: Igualar os pontos e resolver o sistema para encontrar pontos comuns.
Geralmente obtêm-se dois pontos distintos: a recta intersecção passa por esses dois pontos.

Equação vectorial:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + s(u_1, u_2, u_3) + t(v_1, v_2, v_3) \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + su_1 + tv_1 \\ y = y_0 + su_2 + tv_2 \\ z = z_0 + su_3 + tv_3 \end{cases}$$

Equação cartesiana:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

onde (a, b, c) é um vector normal ao plano, dado por $\vec{u} \times \vec{v}$.

Exercício 3

Considere o plano definido por:

$$P = (1,2,1), \quad \vec{a} = (0,1,0), \quad \vec{b} = (1,1,4)$$

Equação vectorial:

$$(x,y,z) = (1,2,1) + s(0,1,0) + t(1,1,4)$$

Equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + s + t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$$

Equação cartesiana:

$$4x - z = 3$$

Exercício 4

Dada a equação cartesiana do plano:

$$3x + 4y + 2z - 12 = 0$$

determine a equação vectorial.
Procedimento: Encontrar três pontos no plano:

$$A(0,0,6), \quad B(0,3,0), \quad C(4,0,0)$$

Vectores:

$$\vec{BA} = (0,-3,6), \quad \vec{CA} = (-4,0,6)$$

Equação vectorial:

$$(x,y,z) = (0,0,6) + s(0,-3,6) + t(-4,0,6) \quad s,t \in \mathbb{R}$$

Exercício 5

Verifique se a recta:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

é paralela ao plano:

$$y + z = 1$$

Resolução: O sistema é impossível $\Rightarrow$ não há ponto comum.
Conclusão: A recta é **paralela** ao plano.

Exercício 6

Verifique se a recta:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 6 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

é paralela ao plano:

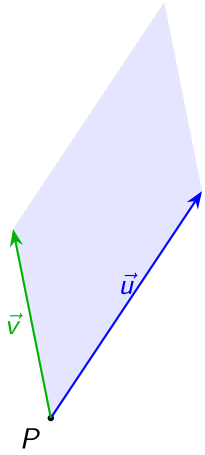
$$y + z = 1$$

Resolução: Existe solução: $(-1, 2, -1)$.
Conclusão: A recta **intersecta** o plano nesse ponto.

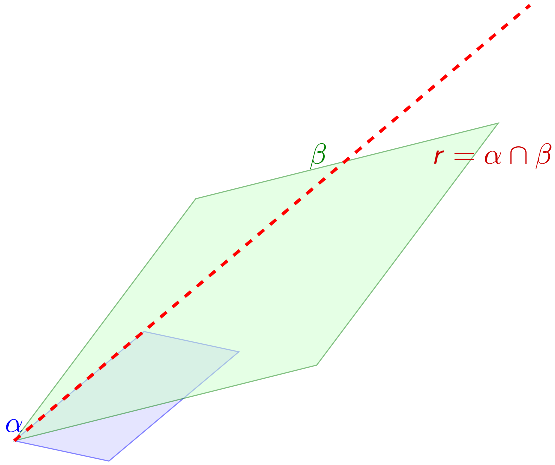
Notas sobre vectores normais

- O produto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ fornece um **vector normal** ao plano.
- A equação cartesiana é construída com o vector normal.
- Se o produto misto $\det(\vec{XP}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$, o ponto X pertence ao plano.

Plano gerado por dois vectores



Intersecção de dois planos



Distância entre rectas

Considere-se duas rectas r_1 e r_2:

- Se r_1 e r_2 forem **concorrentes**: $d(r_1, r_2) = 0$
- Se r_1 e r_2 forem **paralelas**:
  - Escolhe-se um ponto P de r_1
  - Calcula-se a distância de P a r_2
- Se r_1 e r_2 forem **não complanares**:
  - Determina-se um plano α que contém r_2 e é paralelo a r_1
  - Determina-se uma recta s perpendicular a r_1 e a α
  - A distância é a medida do segmento AB onde A e B são intersecções de s com r_1 e α

Determine a distância entre as rectas:

$$r_1 : (x, y, z) = (1, 2, 0) + k(-1, 3, 2)$$

$$r_2 : \begin{cases} y = 1 - 3x \\ z = -1 - 2x \end{cases}$$

Vetor director de r_1: $\vec{d_1} = (-1, 3, 2)$
Vetor director de r_2 (obtido de dois pontos): $\vec{d_2} = (1, -3, -2)$
Conclusão: $\vec{d_1} = -\vec{d_2} \Rightarrow$ as rectas são **paralelas**.

Ponto de r_2: $B = (1, -2, -3)$
Ponto genérico de r_1: $I = (1 - k, 2 + 3k, 2k)$

$$\vec{BI} = (-k, 4 + 3k, 2k + 3)$$

Condição de perpendicularidade:

$$\vec{BI} \cdot \vec{d_1} = 0$$

Resolvendo:

$$k = -\frac{9}{7}$$

$$\vec{BI} = \left(\frac{9}{7}, \frac{1}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

Distância:

$$d(r_1, r_2) = \sqrt{\left(\frac{9}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{91}}{7}$$

Determine a distância entre as rectas:

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 - k \\ y = 3 + k \\ z = 1 - 2k \end{cases} \qquad r_2 : (x, y, z) = (0, -1, 0) + k(1, -3, 2)$$

Vetor director de r_1: $\vec{d_1} = (-1, 1, -2)$
Vetor director de r_2: $\vec{d_2} = (1, -3, 2)$
Produto escalar:

$$\vec{d_1} \cdot \vec{d_2} = -8 \neq 0$$

Logo, as rectas não são perpendiculares.
Teste de paralelismo: - Não existe λ tal que $\vec{d_2} = \lambda \vec{d_1}$ - Logo, não são paralelas.
Teste de concorrência: - Sistema impossível.
Conclusão: As rectas são **não complanares**.

Exercício 2 — Construção do plano α

Plano α:

$$\alpha : (x, y, z) = (0, -1, 0) + k_1(1, -3, 2) + k_2(-1, 1, -2)$$

Vetor normal de α:

$$\vec{n}_\alpha = \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = (4, 0, -2)$$

Equação cartesiana de α:

$$4x - 2z = 0$$

Exercício 2 — Construção da recta s

Recta s é perpendicular a r_1 e a α.
Ponto de r_1: $(2, 3, 1)$
Direcção de s: $\vec{n}_\alpha = (4, 0, -2)$
Equações de s:

$$\begin{cases} y = 3 \\ \frac{x-2}{4} = \frac{z-1}{-2} \end{cases}$$

Encontrar o ponto I onde s intersecta α:
Resolvendo o sistema:

$$4x - 2z = 0$$

$$y = 3 \quad \text{e} \quad \frac{x-2}{4} = \frac{z-1}{-2}$$

Obtemos:

$$I = \left(\frac{4}{5}, 3, \frac{8}{5}\right)$$

Exercício 2 — Cálculo da distância

A distância entre r_1 e r_2 é:

$$\vec{IP} = \left(\frac{6}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$$

Norma de $\vec{IP}$:

$$d(r_1, r_2) = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + (0)^2 + \left(\frac{-3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

O que é uma superfície de revolução?

Uma **superfície de revolução** é uma superfície no espaço tridimensional que resulta da rotação de uma recta ou curva em torno de um eixo fixo.

Estas superfícies são geradas por:

- uma curva generatriz (recta ou curva)
- um eixo de rotação (normalmente um dos eixos cartesianos)

Recta:

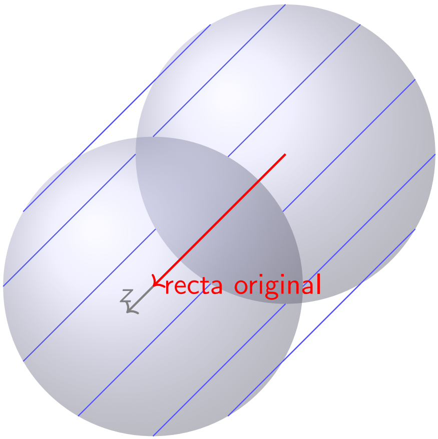
$$(x, y, z) = (2, 2, 0) + k(0, 0, 1) \quad \text{ou} \quad x = 2,\ y = 2$$

Eixo de rotação: Oz

Como a recta é **paralela** ao eixo de rotação, a sua rotação gera um:

Cilindro circular de raio 2, eixo Oz

Cilindro gerado pela rotação da recta $(2, 2, 0) + k(0, 0, 1)$



Rotação de uma recta oblíqua ao eixo Oz

Recta:

$$(x, y, z) = (0, 0, 2) + k(0, 2, -2)$$

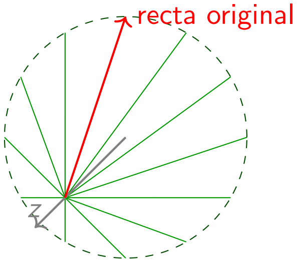
Eixo de rotação: Oz

Como a recta é **oblíqua** ao eixo de rotação e concorrente com ele, a sua rotação gera um:

Duplo cone

Nota: na figura, apenas a parte inferior está representada.

Cone gerado pela rotação da recta $(0,0,2)+k(0,2,-2)$



Rotação em torno de uma recta inclinada

Generatriz:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(0, 4, 3)$$

Eixo de rotação:

$$(x, y, z) = (0, 1, 3) + k(0, 1, 0)$$

A rotação de uma recta em torno de uma outra recta oblíqua ao plano horizontal gera uma superfície mais complexa.
Nota: A forma geométrica depende fortemente da posição relativa entre a generatriz e o eixo.