Algebra Linear

ESCOLA
SUPERIOR
DE MEDIA
ARTES
E DESIGN

Definição de Matriz

Uma matriz A de dimensão $m \times n$ é um arranjo retangular de números:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde a_{ij} representa o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna.

Casos Especiais de Matrizes

Matriz Quadrada $(m = n)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriz Retangular $(m \neq n)$:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Casos Especiais de Matrizes

Matriz Linha $(m = 1)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz Coluna $(m \neq n)$:

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Matriz Nula:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Casos Especiais em Matrizes Quadradas

Matriz Identidade:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Diagonal:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz Simétrica:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Superior:

$$TS = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior:

$$TI = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Adição e Subtração de Matrizes

Somente definidas para matrizes de mesma dimensão.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Multiplicação por Escalar

Para um escalar $k \in \mathbb{R}$:

$$k = 3, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$kA = \begin{bmatrix} 3 \times 1 & 3 \times (-2) \\ 3 \times 3 & 3 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes

Só é possível se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} (1 \times 5 + 2 \times 7) & (1 \times 6 + 2 \times 8) \\ (3 \times 5 + 4 \times 7) & (3 \times 6 + 4 \times 8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

Propriedades das Operações com Matrizes

- Comutativa da adição: $A + B = B + A$
- Associativa da adição: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- A matriz nula é o elemento neutro da adição: $A + 0 = 0 + A = A$
- Distributiva da multiplicação por um escalar pela adição: $k(A + B) = kA + kB$
- Distributiva da adição de escalares pela multiplicação: $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
- A matriz nula é o elemento absorvente da multiplicação: $A \times 0 = 0 \times A = 0$
- Distributiva da multiplicação em relação à adição: $A \times (B + C) = AB + AC$
- A matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação: $A \times I = I \times A = A$

Definição de Matriz Transposta

A transposta de uma matriz A de dimensão $m \times n$ é uma nova matriz A^T de dimensão $n \times m$, obtida trocando as linhas por colunas:

$$A^T = (a_{ji})_{n \times m}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Propriedades da Matriz Transposta

- $(A^T)^T = A$ (dupla transposição retorna a matriz original)
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(kA)^T = kA^T$ para qualquer escalar k
- $(AB)^T = B^T A^T$

Definição de Determinante

O determinante de uma matriz quadrada A é um número escalar associado à matriz, representado por $\det(A)$ ou $|A|$.
Exemplo para uma matriz 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \det(A) = ad - bc$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = (2 \times 4) - (3 \times 1) = 8 - 3 = 5$$

Cálculo do Determinante de uma Matriz 3×3

Para uma matriz 3×3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

O determinante é calculado por:

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Propriedades dos Determinantes

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- Se uma linha ou coluna de uma matriz é múltipla de outra, então $\det(A) = 0$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- Se trocamos duas linhas ou colunas, o determinante muda de sinal.
- O determinante da matriz identidade é 1: $\det(I) = 1$

Determinante e Inversibilidade

Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

$$\text{Se } \det(A) = 0, \text{ então } A \text{ não possui inversa.}$$

Exemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det(B) = (1 \times 4) - (2 \times 2) = 4 - 4 = 0$$

Como $\det(B) = 0$, a matriz B não é invertível.

Definição de Matriz Inversa

Uma matriz quadrada A é invertível se existir uma matriz A^{-1} tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

onde I é a matriz identidade.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cálculo da Matriz Inversa

Para uma matriz 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

A inversa é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad \text{se } ad - bc \neq 0$$

Propriedades da Matriz Inversa

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- Se A é invertível, então seu determinante é diferente de zero.

Introdução ao Cálculo de Determinantes por Gauss

O método de Gauss pode ser utilizado para calcular determinantes de matrizes quadradas. O determinante é obtido através da transformação da matriz em forma triangular superior, onde o determinante é o produto dos elementos diagonais.

Passos para Cálculo por Gauss

1. Realize operações elementares nas linhas até obter uma matriz triangular superior.
2. O determinante será o produto dos elementos da diagonal principal multiplicado por $(-1)^n$, onde n é o número de trocas de linhas efetuadas.

Exemplo de Determinante por Eliminação de Gauss

Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Objetivo: transformar A em uma matriz triangular superior U usando operações elementares sem trocar linhas.

Etapa 1: Eliminar abaixo do pivô $a_{11} = 2$

- $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \Rightarrow L_2 = [0, -1, 0]$
- $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \Rightarrow L_3 = [0, -2, -3]$

Exemplo de Determinante por Eliminação de Gauss

Etapa 2: Eliminar abaixo de $a_{22} = -1$

- $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \Rightarrow L_3 = [0, 0, -3]$

Matriz triangular obtida:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Determinante de A: é o produto dos elementos da diagonal de U:

$$\det(A) = 2 \cdot (-1) \cdot (-3) = 6$$

Observações sobre os sinais:

- Não houve troca de linhas $\Rightarrow$ o sinal do determinante original é preservado.
- Cada sinal negativo vem diretamente dos pivôs da matriz triangular.
- O produto $2 \cdot (-1) \cdot (-3)$ é positivo porque dois sinais negativos se anulam.

Introdução ao Método LU

O método LU decompõe uma matriz quadrada A em duas matrizes, uma triangular inferior (L) e outra triangular superior (U), tais que:

$$A = LU$$

O determinante de A é dado por:

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det(U)$$

Sendo $\det(L) = 1$ (produto dos elementos diagonais).

Construção Explícita de L via Matriz Identidade

Queremos decompor $A = LU$ usando eliminação de Gauss com matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 18 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Etapa 1: Eliminar abaixo de $a_{11} = 2$

- $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
- $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Construção Explícita de L via Matriz Identidade

Etapa 2: Eliminar abaixo de $a_{22} = 1$

- $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 15 & -9 & 1 \end{array}\right]$$

Interpretação:

- Parte da esquerda: matriz U
- Parte da direita: matriz L

Dada a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \\ 6 & 18 & 5 \end{bmatrix}$$

Após a decomposição $A = LU$, temos:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Determinante de A:

- L é triangular inferior com diagonal unitária $\Rightarrow \det(L) = 1$
- U é triangular superior $\Rightarrow \det(U) = 2 \cdot 1 \cdot (-7) = -14$

$$\boxed{\det(A) = \det(L) \cdot \det(U) = 1 \cdot (-14) = -14}$$

Relação entre Gauss, LU e o Determinante

Método de Gauss: transforma uma matriz A em uma matriz triangular superior U através de operações elementares de linha.

Na decomposição LU:

- Aplicamos o **método de Gauss** sem trocar linhas.
- Os **multiplicadores** usados para anular elementos abaixo da diagonal formam a matriz L.
- A matriz resultante após a eliminação é a matriz U.

Determinante via LU:

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det(U)$$

Se L tem diagonal unitária:

$$\Rightarrow \det(L) = 1 \quad \Rightarrow \det(A) = \det(U)$$

Resumo visual:

$$\text{Gauss:} \quad A \xrightarrow{\text{eliminação}} U \quad \Rightarrow \quad \text{Registra os multiplicadores em } L$$

Introdução à Eliminação de Gauss para Matriz Inversa

O método de Gauss também pode ser utilizado para calcular a inversa de uma matriz quadrada invertível A. O objetivo é aplicar operações elementares em linhas até transformar a matriz aumentada $(A|I)$ na forma $(I|A^{-1})$.

Passos para Calcular a Matriz Inversa

Para obter a inversa de uma matriz A:

1. Forme a matriz aumentada $(A|I)$, sendo I a matriz identidade.
2. Aplique operações elementares nas linhas para transformar A na matriz identidade.
3. Ao final do processo, a matriz identidade original se transforma na matriz inversa A^{-1}.

Exemplo de Cálculo da Inversa

Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Forme a matriz aumentada:

$$(A|I) = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Escalonamento para a Inversa

Aplicando operações:

- $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

- $L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

- $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Resultado da Matriz Inversa

Ao final do escalonamento, obtemos:

$$(I|A^{-1}) = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Portanto, a inversa é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Observações

- O método é aplicável apenas a matrizes quadradas e invertíveis.
- É eficiente e útil para pequenas matrizes.
- Facilita a compreensão visual da inversão matricial.

Introdução à Eliminação de Gauss

O método de eliminação de Gauss é uma técnica sistemática para resolver sistemas lineares representados na forma matricial:

$$AX = B$$

O objetivo é transformar a matriz aumentada $(A|B)$ em uma matriz triangular superior através de operações elementares nas linhas.

Passos da Eliminação de Gauss

Para resolver o sistema linear $AX = B$:

1. Forme a matriz aumentada $(A|B)$.
2. Utilize operações elementares nas linhas para obter uma matriz triangular superior (escalonamento).
3. Resolva o sistema equivalente obtido pela substituição retroativa.

Operações Elementares nas Linhas

As operações permitidas durante o escalonamento são:

- Trocar duas linhas quaisquer.
- Multiplicar uma linha por um escalar não nulo.
- Adicionar a uma linha um múltiplo escalar de outra linha.

Exemplo da Eliminação de Gauss

Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ 2x + 3y + 3z = 14 \\ y + 2z = 8 \end{cases}$$

A matriz aumentada é:

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

Escalonamento do Exemplo

Executando as operações:

- $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

- $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{array}\right]$$

Resolução por Substituição Retroativa

Do sistema escalonado:

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{10}{3} \\
-y + z = 2 \quad &\Rightarrow \quad y = z - 2 = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3} \\
x + 2y + z = 6 \quad &\Rightarrow \quad x = 6 - 2y - z = 6 - \frac{8}{3} - \frac{10}{3} = 0
\end{aligned}
$$

A solução do sistema é:

$$x = 0, \quad y = \frac{4}{3}, \quad z = \frac{10}{3}$$

Observações sobre a Eliminação de Gauss

- Aplicável a qualquer sistema linear, independente de ser quadrado.
- Eficiência maior que a Regra de Cramer para sistemas grandes.
- Permite identificar rapidamente sistemas inconsistentes (sem solução) ou com infinitas soluções.

Introdução à Regra de Cramer

A Regra de Cramer é um método para resolver sistemas lineares da forma:

$$AX = B$$

em que A é uma matriz quadrada invertível, X é o vetor incógnita, e B é o vetor constante.

Para sistemas de equações lineares, a solução é dada por:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

onde A_i é obtida substituindo a coluna i da matriz A pelo vetor B.

Passos da Regra de Cramer

Para resolver o sistema:

$$AX = B$$

siga os passos:

1. Calcule o determinante de A, $\det(A)$.
2. Construa as matrizes A_i substituindo a coluna i de A pelo vetor constante B.
3. Calcule cada determinante $\det(A_i)$.
4. A solução é dada por:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

Exemplo da Regra de Cramer

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

Temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Exemplo Resolvido

- $\det(A) = (1 \times 4) - (2 \times 3) = 4 - 6 = -2$
- Construindo as matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

- Calculando determinantes:

$$\det(A_1) = (5 \times 4) - (2 \times 6) = 20 - 12 = 8$$
$$\det(A_2) = (1 \times 6) - (5 \times 3) = 6 - 15 = -9$$

- A solução é:

$$x = \frac{8}{-2} = -4, \quad y = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2}$$

Observações sobre a Regra de Cramer

- Apenas aplicável se a matriz dos coeficientes for quadrada e invertível ($\det(A) \neq 0$).
- É útil principalmente para sistemas pequenos, pois o cálculo do determinante é computacionalmente custoso para matrizes grandes.
- A Regra de Cramer fornece uma solução direta e exata, se existir.

Inversa de Matrizes $n \times n$

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com $\det(A) \neq 0$. A inversa de A é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$$

Onde:

- $\det(A)$ é o determinante de A
- $\operatorname{adj}(A)$ é a matriz adjunta: transposta da matriz de cofatores de A

Cálculo da Inversa - Passos

1. **Calcular o determinante:** $\det(A)$
2. **Matriz de Cofatores:** para cada elemento a_{ij}, calcule:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij})$$

M_{ij} é a submatriz obtida ao eliminar a linha i e a coluna j de A

3. **Matriz adjunta:**

$$\text{adj}(A) = [C_{ij}]^\top$$

4. **Calcular a inversa:**

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

Exemplo com Matriz 3×3

Seja:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Passos:

- Calcular $\det(A)$
- Obter os cofatores C_{ij}
- Formar a matriz adjunta
- Calcular A^{-1}