Sistemas de massa variável

J. M. B. Lopes dos Santos*

10 de Novembro de 2018

Departamento de Física e Astronomia,
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
4169-007 Porto

Analisamos as equações de movimento para sistemas em que a massa depende do tempo.

1 Quando a massa não é constante.

Sistemas em que a massa depende do tempo são relativamente comuns. Ao fim ao cabo, o conceito Newtoniano de um corpo é o de um sistema de partículas. Se um corpo ganhar ou perder partículas a sua massa varia. Os exemplos abundam:

- Um automóvel cujo depósito de combustível vai ficando vazio;
- Um camião cisterna que verte o líquido que transporta;
- uma gota de água que se vai evaporando, ou uma gota de chuva que engrossa por condensação do vapor circundante.
- *etc.*

Conhecemos duas formas da segunda lei de Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1}$$

e

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{2}$$

em que $\mathbf{p} := m\mathbf{v}$. Estas formas só são equivalentes se a massa do corpo em análise não depender do tempo. Nos casos acima referidos qual será a forma correcta?

*jlsantos@fc.up.pt

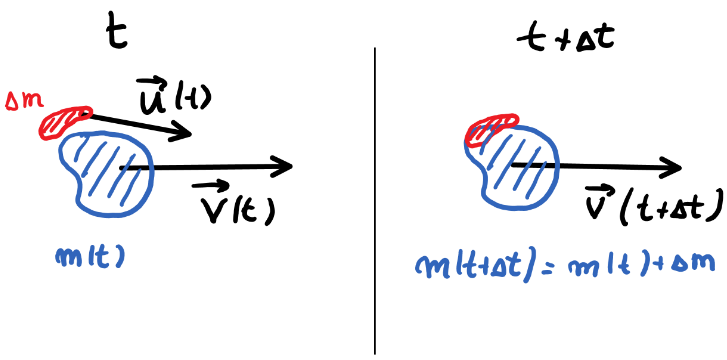


Figura 1: Massa do corpo crescente.

Como vamos ver, não vai ser necessário invocar novos princípios para decidir esta questão. As leis que formulámos até ao momento chegam, porque é possível analisar estas situações sempre em termos de um sistema que tem uma massa total constante, ao qual podemos aplicar sem problemas as leis que estudámos até ao momento. Para este efeito, é útil separar o tratamento de situações em que a massa do corpo em estudo aumenta daquelas em que a massa diminui.

2 Quando a massa aumenta

Consideremos então um corpo que agrega massa, $m(t)$ cresce. Para obter a equação de movimento vamos, considerar dois instantes t e $t+\Delta t$ próximos, como habitualmente, sabendo que no final tomamos o limite $\Delta t \to 0$. No instante t o nosso corpo tem uma massa $m(t)$ com velocidade $\mathbf{v}(t)$; mas nesse instante existe uma massa Δm, com velocidade $\mathbf{u}(t)$, que em $t+\Delta t$ fará parte do nosso corpo e terá a mesma velocidade que este, $\mathbf{v}(t+\Delta t)$. Por outras palavras o nosso sistema é:

- instante t: $m(t)$ com velocidade $\mathbf{v}(t)$ e Δm com velocidade $\mathbf{u}(t)$;
- instante $t+\Delta t$: $m(t+\Delta t) = m(t) + \Delta m$ com velocidade $\mathbf{v}(t+\Delta t)$.

Este sistema tem uma massa que não varia entre t e $t+\Delta t$ e ao qual podemos aplicar as leis de Newton. A maneira mais simples é usar a forma da Eq. 2.

$$\mathbf{p}_t(t) = m(t)\mathbf{v}(t) + \Delta m \mathbf{u}(t) \tag{3a}$$
$$\mathbf{p}_t(t+\Delta t) = [m(t)+\Delta m]\, \mathbf{v}(t+\Delta t) = m(t+\Delta t)\, \mathbf{v}(t+\Delta t) \tag{3b}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_t(t+\Delta t) - \mathbf{p}_t(t) &= m(t+\Delta t)\, \mathbf{v}(t+\Delta t) - m(t)\mathbf{v}(t) - \Delta m \mathbf{u}(t) \\ &= m(t)\left[\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)\right] + \Delta m \left[\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{u}(t)\right]\end{aligned} \tag{4}$$

em que $\mathbf{p}_t$ designa o momento linear do sistema de massa $m(t)+\Delta m$.

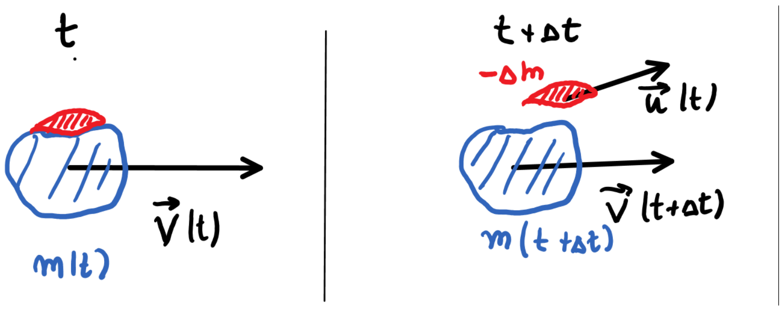


Figura 2: Massa do corpo decrescente. A parte que se separa tem massa $-\Delta m = m(t) - m(t+\Delta t)$.

No limite que $\Delta t \to 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{p}_t &= \mathbf{p}_t(t+\Delta t) - \mathbf{p}_t(t) \\ &= m(t)\Delta \mathbf{v} + \Delta m \left[\mathbf{v}\left(t+\Delta t\right) - \mathbf{u}(t)\right] = \left[\mathbf{F}(t) + \Delta \mathbf{f}(t)\right] \Delta t \end{aligned} \tag{5}$$

em que $\mathbf{F}(t)$ é a força externa sobre a massa $m(t)$ e $\Delta \mathbf{f}(t)$ sobre a massa Δm. Se dividirmos por Δt e tomarmos o limite $\Delta t \to 0$

$$\frac{d\mathbf{p}_t}{dt} = m(t)\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm(t)}{dt}\left[\mathbf{v}(t) - \mathbf{u}\left(t\right)\right] = \mathbf{F}(t) \tag{6}$$

pois no limite $\Delta m \to 0$ o mesmo acontece à força $\Delta \mathbf{f}$. A nossa equação é então

$$m(t)\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm(t)}{dt}\left[\mathbf{v}(t) - \mathbf{u}(t)\right] = \mathbf{F}(t) \tag{7}$$

Vale a pena notar que o momento do nosso corpo em cada instante é $\mathbf{p}(t) = m(t)\mathbf{v}(t)$. Por isso a Eq. 7 não tem *nenhuma das formas* das Eqs. 1 ou 2; reduz-se à última se $\mathbf{u}(t) = 0$, e à primeira se $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$!

3 Quando a massa diminui

O processo de análise para o caso em que a massa diminui é o mesmo. Apenas agora é no instante t que temos toda a massa agregada no corpo $m(t)$ e no instante $t+\Delta t$ temos dois corpos com velocidades diferentes: $m(t+\Delta t)$ com velocidade $\mathbf{v}\left(t+\Delta t\right)$ e $-\Delta m$ com velocidade $\mathbf{u}(t+\Delta t)$. Note-se que

$$\Delta m = m\left(t+\Delta t\right) - m\left(t\right) < 0 \tag{8}$$

pelo que a massa do corpo que se separa é $-\Delta m > 0$. Usando o mesmo princípio

$$\mathbf{p}_t(t) = m(t)\mathbf{v}(t) \tag{9a}$$
$$\mathbf{p}_t(t+\Delta t) = m\left(t+\Delta t\right)\mathbf{v}\left(t+\Delta t\right) - \Delta m \mathbf{u}(t+\Delta t) \tag{9b}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_t(t+\Delta t)-\mathbf{p}_t(t) &= m\left(t+\Delta t\right)\left[\mathbf{v}\left(t+\Delta t\right)\right]-m(t)\mathbf{v}(t)+\left(-\Delta m\right)\mathbf{u}(t+\Delta t)\\ &= m(t)\left[\mathbf{v}\left(t+\Delta t\right)-\mathbf{v}(t)\right]+\Delta m\left[\mathbf{v}\left(t+\Delta t\right)-\mathbf{u}(t+\Delta t)\right] \qquad (10)\end{aligned}$$

Como antes

$$\Delta\mathbf{p}_t = m(t)\left[\mathbf{v}\left(t+\Delta t\right)-\mathbf{v}(t)\right]+\Delta m\left[\mathbf{v}\left(t+\Delta t\right)-\mathbf{u}(t+\Delta t)\right]=\mathbf{F}\Delta t \qquad (11)$$

e

$$m(t)\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{dm}{dt}\left[\mathbf{v}\left(t\right)-\mathbf{u}(t)\right]=\mathbf{F} \qquad (12)$$

Obtemos exactamente a mesma equação, embora o significado de $\mathbf{u}$ seja diferente. No primeiro caso é a velocidade prévia da matéria que é agregada, no segundo a velocidade com que a matéria é ejectada. Se escrevermos estas equações na forma

$$\frac{d}{dt}\left[m(t)\mathbf{v}(t)\right]=\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{F}+\frac{dm}{dt}\mathbf{u}, \qquad (13)$$

vemos que à equação de movimento pode ser dada a forma da Eq. 2 desde que adicionemos uma força adicional

$$\frac{dm}{dt}\mathbf{u} \qquad (14)$$

que tem a direção de $\mathbf{u}$ no caso da agregação $(dm(t)/dt > 0)$ e oposta a $\mathbf{u}$ no caso de ejecção de massa $(dm(t)/dt < 0)$. No fundo, este termo dá conta da variação de momento em virtude da agregação ou ejecção de massa.

No caso de agregação de massa é frequente ter $\mathbf{u} = 0$. Seria, por exemplo, o caso de uma gota de chuva em queda que vai aumentando por condensação, agregando moléculas que estavam na fase gasosa (vapor). Então temos

$$\frac{d}{dt}\left[m(t)\mathbf{v}(t)\right]=m(t)\mathbf{g}+\mathbf{F}_{\mathsf{drag}} \qquad (15)$$

como equação de movimento.

No caso oposto da evaporação, ou de um corpo que está a perder massa, a situação mais comum é ter $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$: a massa é ejectada à velocidade que tem ao separar-se. Nesse caso

$$m(t)\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F} \qquad (16)$$

e reencontramos a forma da Eq. 1. O caso que vamos abordar na secção seguinte não se enquadra em nenhum destes exemplos. Na propulsão de foguetão a massa é ejectada e uma velocidade tipicamente superior à do foguetão.

4 Propulsão de foguetão

Um sistema isolado não pode alterar o seu estado de movimento. Mas pode acelerar uma parte dele numa direção, ejectando massa na direção oposta. É assim que funciona a propulsão de um foguete. O foguete só acelera porque ejecta o combustível a alta velocidade.

Na ausência de forças externas temos uma equação de movimento

$$\frac{d}{dt}\left[m(t)\mathbf{v}(t)\right] = \frac{dm}{dt}\mathbf{u} \tag{17}$$

O combustível é ejectado com uma velocidade que depende do processo de combustão e das características do reactor do foguetão. Mas podemos assumir que a velocidade de ejecção *relativamente ao reactor* é fixa. Para um movimento rectilíneo na direção Ox, a massa de combustível é ejectada com uma velocidade no referencial do foguetão

$$\mathbf{u}' = -u_0\hat{\mathbf{i}}. \tag{18}$$

No referencial da Terra

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}' = \left(v(t) - u_0\right)\hat{\mathbf{i}} \tag{19}$$

e a equação de movimento fica

$$\frac{d}{dt}\left[m(t)v(t)\right] = \frac{dm}{dt}\left(v(t) - u_0\right) \tag{20}$$

ou

$$m(t)\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u_0 \tag{21}$$

Se o foguetão queimar combustível a uma taxa constante

$$m(t) = m_0 - \gamma t \tag{22}$$

em que

$$\frac{dm}{dt} = -\gamma \tag{23}$$

fica

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma}{m_0 - \gamma t}u_0 = \frac{u_0}{\tau - t}$$

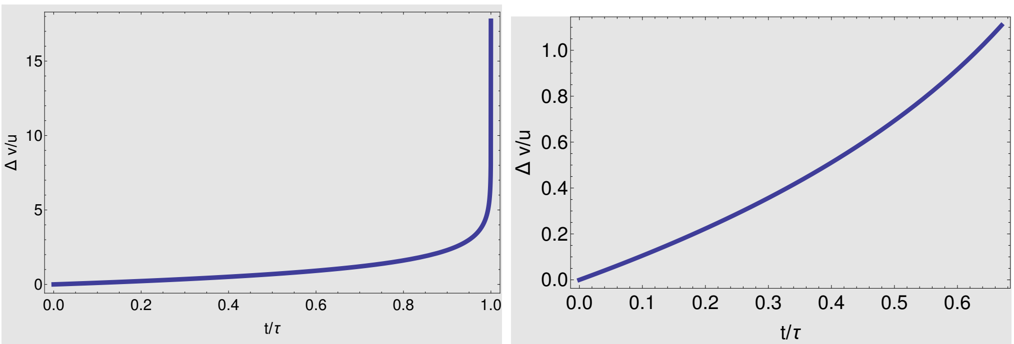
em que $\gamma\tau = m_0$; τ é o tempo em que a massa inicial seria integralmente ejectada. Esta equação pode ser integrada directamente

$$\begin{aligned} v(t) &= v(0) + u_0\int_0^t \frac{1}{\tau - t'}dt' = v(0) - u_0 \ln\left[\tau - t'\right]_0^t \\ &= v(0) - u_0 \ln\left[\frac{\tau - t}{\tau}\right] \end{aligned} \tag{24}$$

ou seja

$$v(t) - v(0) = u_0 \ln\left(\frac{1}{1 - t/\tau}\right) \tag{25}$$

Esta variação está representada na Fig. 3



(a) (b)

Figura 3: Velocidade de uma foguetão com taxa constante de ejecção de combustível. (a) A velocidade diverge para $t \to \tau$ pois a massa está a tender para zero; (b) No início ($v \ll u_0$) a aceleração de foguetão é $\gamma u_0/m_0$, ou $\Delta v/u_0 = t/\tau$