

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Análise e Síntese de Algoritmos

Ano Lectivo 2017/2018

Exame Época Especial- versão A

25 de Julho de 2018

Duração: 3:00

- A prova é sem consulta.
- Telemóveis devem estar **desligados** em cima da mesa.
- O tempo mínimo de permanência na sala é 1 hora. Não serão permitidas entradas após 30 minutos do início da prova.
- Só serão avaliadas as respostas **legíveis** apresentadas nas grelhas desta página e da seguinte, com a excepção das perguntas com $\langle XXX \rangle$, que serão corrigidas na folha do enunciado respectiva e será avaliado o desenvolvimento da resposta.
- Nas questões de verdadeiro, desconhecido ou falso, cada resposta errada desconta meia certa.
- Certifique-se que a sua identificação está legível nas folhas com as suas soluções.

I. (1,25 + 1,25 + 1,25 + 1,25 + 1,25 + 1,25 = 7,5 val.)

I.a)

	A	B	C	D	E	F
d						
π						

I.b)

	A	B	C	D	E	F
d						
f						
Numero de Ordenações:						

I.c)

	A	B	C	D	E
key					

I.d)

$D^{(2)}(3,1) =$		$D^{(2)}(3,2) =$		$D^{(2)}(3,3) =$	
------------------	--	------------------	--	------------------	--

I.e)

Expressão:	
Majorante:	

I.f)

	Primeira	Segunda	Terceira
$c_f(C,t)$			

II. (1,0 + 1,5 = 2,5 val.)

II.a) $\langle XXX \rangle$

II.b) $\langle XXX \rangle$

III. (1,5 + 1,5 = 3,0 val.)

III.a) 〈 XXX 〉

III.b)

Objectivo	x_1	x_2	x_3

IV. (1,25 + 1,25 = 2,5 val.)

IV.a) 〈 XXX 〉

IV.b)

Greedy :	
Programação Dinâmica :	

V. (1,25 + 1,25 = 2,5 val.)

V.a)

Expressão	
-----------	--

V.b)

	$\pi[3]$	$\pi[6]$	$\pi[8]$	$\pi[12]$	$\pi[15]$
Valor					

VI. (1,0 + 1,0 = 2,0 val.)

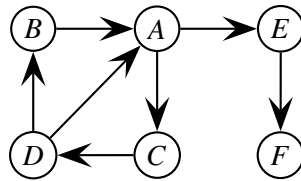
VI.a)

	a)	b)	c)	d)	e)
Resposta					

VI.b) 〈 XXX 〉

I. (1,25 + 1,25 + 1,25 + 1,25 + 1,25 + 1,25 = 7,5 val.)

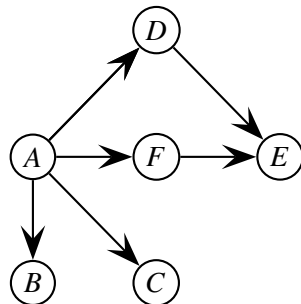
I.a) Considere o grafo dirigido:



Execute uma procura em largura (BFS) com início em A. Indique os valores de d e π para cada um dos vértices.

Nota: As distâncias de uma BFS começam em 0.

I.b) Considere o grafo dirigido acíclico (DAG):

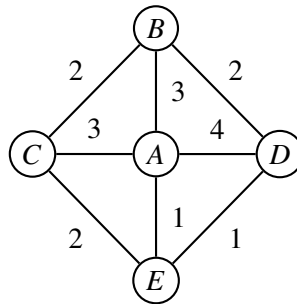


Aplique uma procura em profundidade primeiro (DFS) com início no vértice A e que visita os adjacentes por ordem lexicográfica. Os recomeços da DFS escolhem o vértice não visitado com a menor letra, de acordo com a ordem lexicográfica.

Indique os valores de descoberta (d) e fim (f), para cada um dos vértices. Indique quantas ordenações topológicas existem para este grafo.

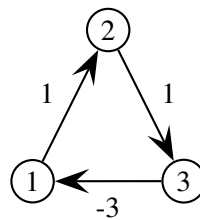
Nota: Os tempos de uma DFS começam em 1.

I.c) Considere o grafo pesado da figura.



Considere a execução do algoritmo de Prim a partir do vértice A . Indique os valores do vector key após ter sido processado o vértice D .

I.d) Considere o grafo dirigido e pesado da figura.



Considere a aplicação do algoritmo de Floyd-Warshall ao grafo. Indique os valores $D^{(2)}(3, 1)$, $D^{(2)}(3, 2)$ e $D^{(2)}(3, 3)$.

I.e) Considere a função recursiva:

```
int f(int n)
{
    int j, i;

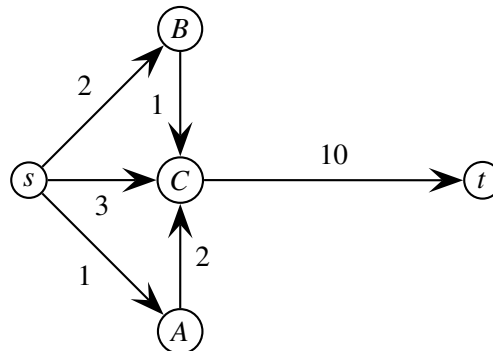
    i = 0;
    while(i < n)
    {
        j = i;
        while(j < n)
            j++;
        i++;
    }

    if(n > 1)
        i = f(n/2) + f(n/2) + f(n/2) + f(n/2);

    return i;
}
```

Indique a expressão (recursiva) que descreve o tempo de execução da função em termos do número n , e de seguida, utilizando os métodos que conhece, determine o menor majorante assintótico.

I.f) Aplique o algoritmo de Edmonds-Karp à seguinte rede:



Indique o valor da capacidade residual do arco (C, t) após cada iteração do algoritmo, i.e. após o aumento de fluxo usando o caminho de aumento.

II. (1,0 + 1,5 = 2,5 val.)

II.a) Considere uma árvore abrangente de menor custo, sobre um grafo, conexo não dirigido e pesado. Considere a seguinte repesagem: $w'(u, v) = w(u, v) + d$, onde (u, v) é um arco e $d > 0$ é uma constante arbitrária mas fixa. Assuma que todos os arcos são repesados, utilizando os mesmos valores de d .

Argumente que uma árvore abrangente de menor custo do grafo repesado também é abrangente de menor custo no grafo original.

II.b) Neste problema queremos determinar a fiabilidade de uma rede de transportes. Um rede de transportes é composta por diversos locais e transportes que podem ligar de um local de origem para um local de destino. Vamos assumir que cada transporte tem uma certa fiabilidade, que corresponde à probabilidade de que o transporte seja bem sucedido. Assuma que as fiabilidades dos transportes são independentes, ou seja se $p_{u,v}$ for a fiabilidade do local u para o local v e $p_{v,w}$ for a fiabilidade do local v para o local w então $p_{u,v} \times p_{v,w}$ indica a fiabilidade de ir de u para w , passando por v .

- 1) Modele este problema, utilizando estruturas que conhece.
- 2) Proponha um algoritmo eficiente que determina o caminho mais fiável entre dois locais.

Indique as complexidades dos algoritmos propostos.

III. (1,5 + 1,5 = 3,0 val.)

III.a) Indique o dual do seguinte programa linear:

$$\begin{array}{ll} \min & -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 - 6x_3 \geq -3 \\ & 2x_1 - x_3 \geq 6 \\ & 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 \leq 10 \\ & x_2 - 4x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

III.b) Calcule o valor óptimo da função objectivo e o respectivo valor das variáveis x_1 , x_2 e x_3 para o seguinte programa linear:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a.} & x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

IV. (1,25 + 1,25 = 2,5 val.)

IV.a) Dado um conjunto S de números inteiros positivos e um valor K , o objectivo é identificar um subconjunto S' de S tal que a soma dos elementos de S' seja o mais próximo possível de K , sem ultrapassar K .

Por exemplo, se $S = \{1, 3, 5, 8, 13\}$ e $K = 20$, então a solução seria $S' = \{1, 5, 13\}$ dado que a soma dos elementos de S' é 19.

Indique um modelo de programação dinâmica para resolver este problema. Analise a complexidade da solução proposta.

IV.b) Considere uma instância do problema da mochila não fraccionário com 5 objectos. A mochila tem capacidade 14 e os objectos a considerar têm os seguintes valores e pesos:

- $v_1 = 2; w_1 = 2$
- $v_2 = 9; w_2 = 3$
- $v_3 = 12; w_3 = 5$
- $v_4 = 18; w_4 = 8$
- $v_5 = 19; w_5 = 10$

Indique os valores máximos conseguidos por:

- um algoritmo greedy com base na ordenação dos objectos por v_i/w_i ;
- um algoritmo baseado em programação dinâmica;

V. (1,25 + 1,25 = 2,5 val.)

V.a) Considere o algoritmo de autómatos finitos para o emparelhamento de caracteres. Seja $n \in \mathbb{N}$ e P o padrão $bab^2ab^3a \dots b^{n-2}ab^{n-1}ab^na$ tal que $a \neq b$, $a, b \in \Sigma$ e $n \geq 2$. Sendo $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ a função de transição do autômato, indique a expressão que denota o número de transições para o estado inicial.

V.b) Considere o algoritmo de Knuth-Morris-Pratt. Dado o padrão $P = aaabbaabaaaabba$, calcule a função de prefixo $\pi[k]$ para o padrão P . Indique os valores de $\pi[3]$, $\pi[6]$, $\pi[8]$, $\pi[12]$ e $\pi[15]$.

VI. (1,0 + 1,0 = 2,0 val.)

VI.a) Para cada uma das afirmações seguintes, indique se é verdadeira (**V**), falsa (**F**) ou se não se sabe (**D**).

- Se existir um problema X tal que $X \in \text{NP-Completo}$ e X é resolúvel em tempo polinomial, então $P = \text{NP}$
- Se $X \in \text{NP-Difícil}$, qualquer $Y \in \text{NP}$ verifica $Y \leq_p X$
- $P = \text{co-NP}$
- $P \subseteq (\text{NP} \cap \text{co-NP})$
- Se para qualquer $Y \in \text{NP-Completo}$ temos que $X \leq_p Y$, então $X \in \text{NP-Difícil}$

VI.b) Dada uma matriz A de $m \times n$ valores inteiros e um vector de inteiros b de dimensão m , o problema de Programação Linear Inteira 0-1 (ILP 0-1) consiste em verificar se existe um vector x de dimensão n tal que os elementos de x pertencem a $\{0, 1\}$ e $Ax \leq b$.

Dado um grafo não dirigido $G = (V, E)$ e uma constante K , o problema VERTEX-COVER pode ser definido como identificar um subconjunto de vértices U ($U \subseteq V$) tal que o número de vértices de U não é superior a K ($|U| \leq K$) e para todos os arcos $(u, v) \in E$ temos que $u \in U$ ou $v \in U$.

Sabendo que o problema VERTEX-COVER é NP-Completo, prove que o problema ILP 0-1 é NP-Completo usando uma redução a partir de VERTEX-COVER.

(Nota: Prove primeiro que ILP 0-1 \in NP.)