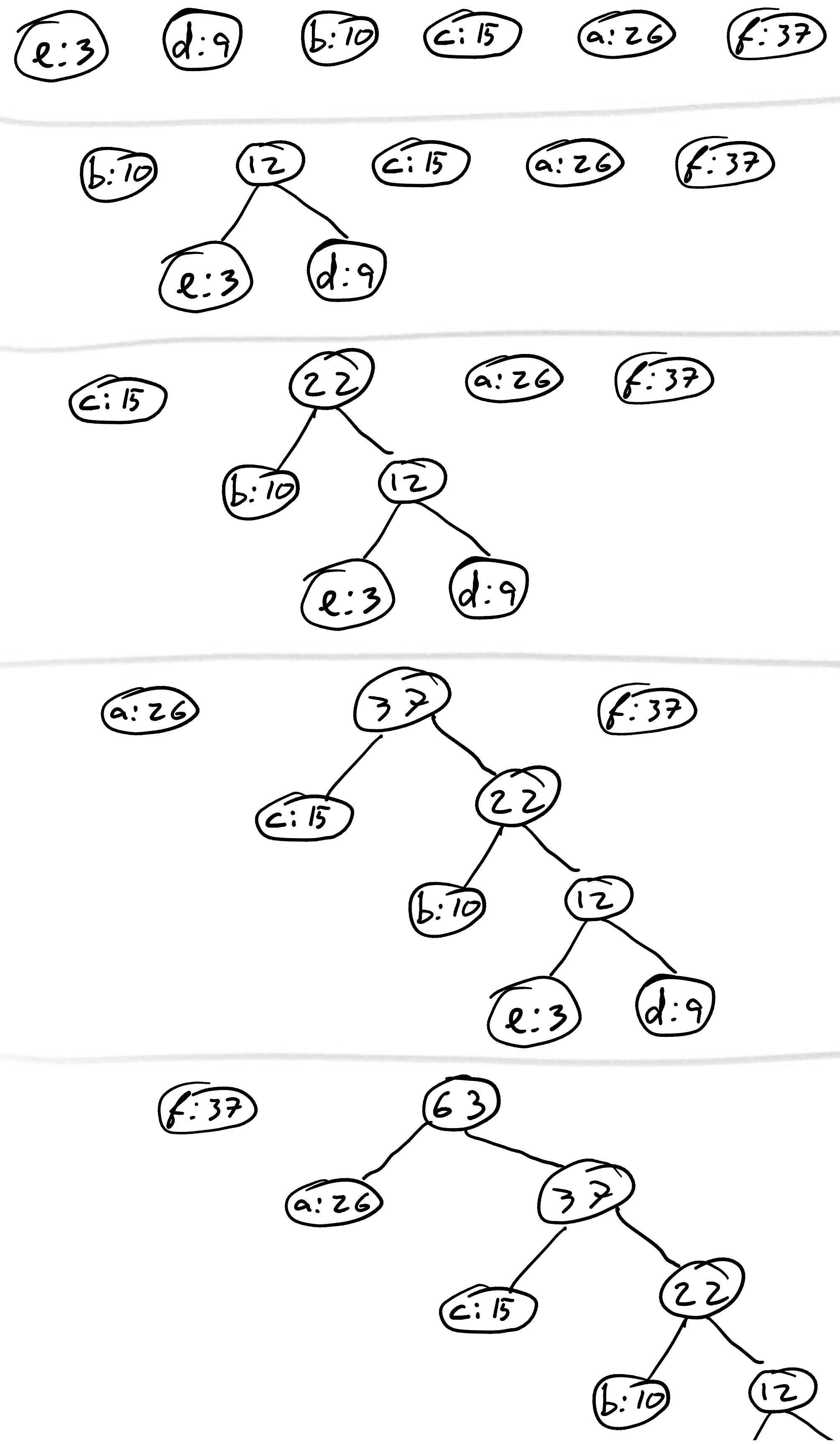
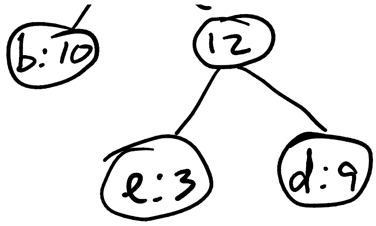
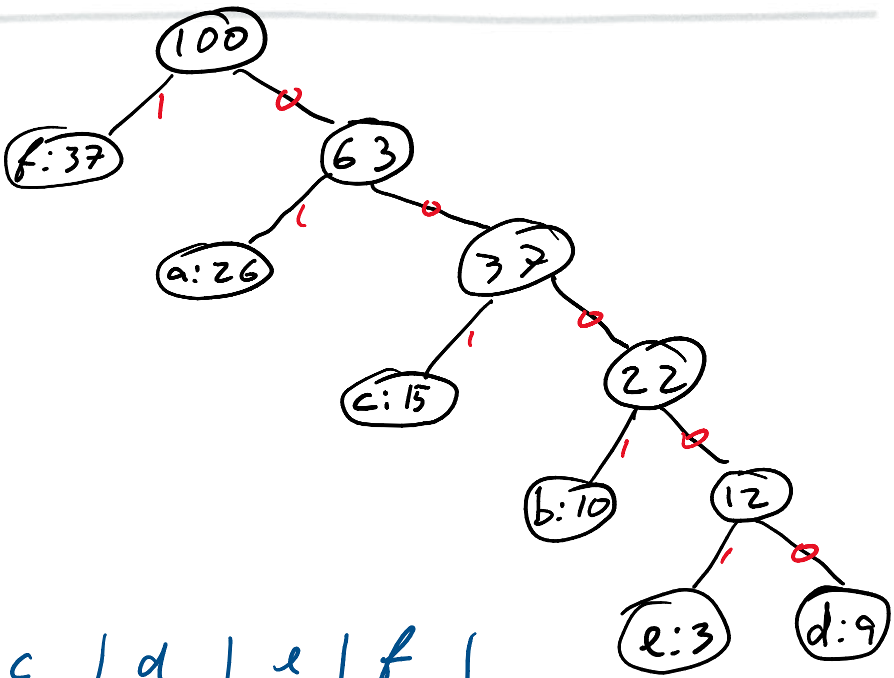
I.a)

	a	b	c	d	e	f
f	26	10	15	9	3	37







a	b	c	d	e	f
01	0001	001	00000	00001	1

Ficheiro com 100 caracteres:

$\# = 26\times2 + 10\times4 + 15\times3 + 9\times5 + 3\times5 + 37\times1$

$= 234$ bits

Ficheiro com 1000 caracteres:

$= 2340$ bits //

1.b)

$$A_1(5\times2)\underset{k=1}{\times}A_2(2\times2)\underset{k=2}{\times}A_3(2\times4)\underset{k=3}{\times}A_4(4\times3)$$

m

i \ j	1	2	3	4
1	0	20	56	66
2		0	16	36
3			0	24
4				0

s

i \ j	1	2	3	4
1		1	1	1
2			2	2
3				3
4				

$m[1,2] = m[1,1] + m[2,2] + 5\times2\times2$
$= 0 + 0 + 20 = 20$

$m[2,3] = m[2,2] + m[3,3] + 2\times2\times4$
$= 0 + 0 + 16 = 16$

$m[3,4] = m[3,3] + m[3,4] + 2\times4\times3$
$= 0 + 0 + 24 = 24$

$m[1,3] = \min\{m[1,1] + m[2,3] + 5\times2\times4,$
$m[1,2] + m[3,3] + 5\times2\times4\}$
$= \min\{0 + 16 + 40,$
$20 + 0 + 40\} = 56$

$m[2,4] = \min\{m[2,2] + m[3,4] + 2\times2\times3,$
$m[2,3] + m[4,4] + 2\times4\times3\}$
$= \min\{0 + 24 + 12,$
$16 + 0 + 24\} = 36$

$m[1,4] = \min\{m[1,1] + m[2,4] + 5\times2\times3,$
$m[1,2] + m[3,4] + 5\times2\times3,$
$m[1,3] + m[4,4] + 5\times4\times3\}$
$= \min\{0 + 36 + 30,$
$20 + 24 + 30,$
$56 + 0 + 60\} = 66$

$A\times(B\times(C\times D))$

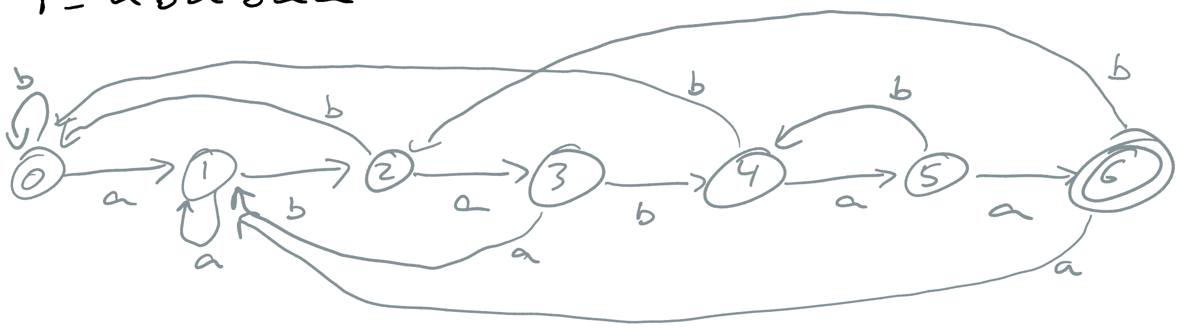
$m[2,4] = 36$

$m[1,4] = 66$

$m[1,3] = 56$

I.c)

P = ababaa



δ(0,b)	δ(1,a)	δ(2,b)	δ(3,a)	δ(4,b)	δ(5,b)	δ(6,a)	δ(6,b)
0	1	0	1	0	4	1	2

T	-	a	a	b	a	a	b	a	b	b	a	a	b	a	a	b
i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
q	0	1	1	2	3	1	2	3	4	0	1	1	2	3	1	2

I.d)

$$\text{Min } -2x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -7 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & -x_1 - x_2 - 5x_3 \geq -7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Forme standard

$$\text{Max } 2x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 7 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Forme slack

$$\begin{aligned} z' &= 0 + 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_4 &= 7 - x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_5 &= 10 - x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_6 &= 7 - x_1 - x_2 - 5x_3 \end{aligned}$$

Règle de Bland

$$\begin{bmatrix} z' \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ x_4 \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccc} & x_1 & & \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & -2 & -1 \\ 10 & -1 & -2 & -1 \\ 7 & -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ 7/1 = 7 \\ 10/1 = 10 \\ 7/1 = 7 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0+14 & 0-2 & -1-4 & 2-2 \\ 7/1 & -1/1 & -2/1 & -1/1 \\ 10-7 & 0+1 & -2+2 & -1+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} /1 & /1 & /1 & /1 \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 10 - 7 & 0 + 1 & -2 + 2 & -1 + 1 \\ 7 - 7 & 0 + 1 & -1 + 2 & -5 + 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z' \\ x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -2 & -5 & 0 \\ 7 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$z' = 14$ para a maximização

logo, $z = -14$ para a minimização

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-14	7	0	0	0	3	0

II.a)

1. $$B(i) = \begin{cases} \bigvee \{ B(j) \wedge dict(T[(j+1)\dots i]) \mid j < i \} & , \text{se } i \geq 1 \\ true & , \text{se } i = 0 \end{cases}$$

2.

⋮

```
B[i] = false
j = i-1
while j >= 0 && not B[i] do
    B[i] = B[j] && dict(T[(j+1)...i])
    j = j-1
end while
```

⋮

Complexidade: $O(n^2)$

II.b)

1.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi_1[i]$	0	1	0	1	2	3	4	0
S_1	a	a	b	a	a	b	a	b
S_2	b	b	a	b	b	a	b	a

2. $\Sigma' = \{a, b, c\}$

$\pi_1 = [0, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 0]$

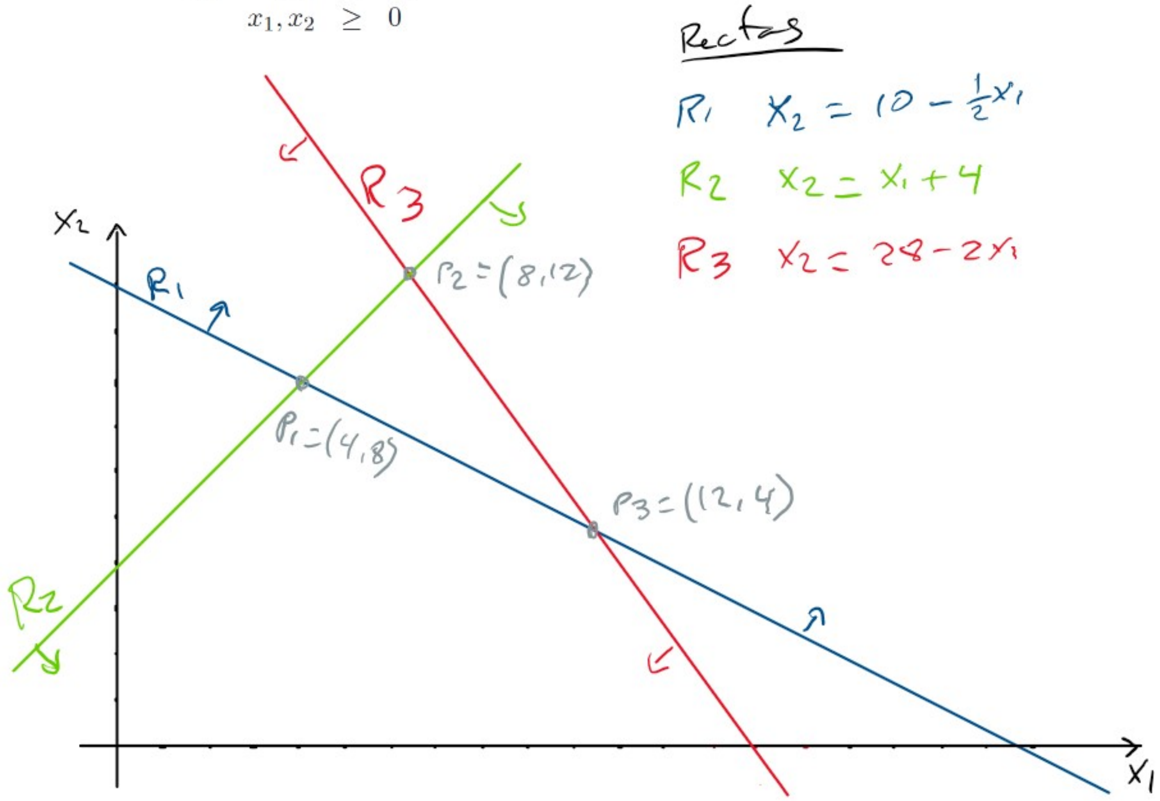
$3 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2 = 12$

\# de possíveis caracteres em cada posição

II.c)

1.

$$\begin{array}{llllll} \max & x_1 & +2x_2 & & \\ \text{s.a} & \frac{1}{2}x_1 & +x_2 & \geq & 10 \\ & x_1 & -x_2 & \geq & -4 \\ & 2x_1 & +x_2 & \leq & 28 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$



Pelo teorema Fundamental, o valor óptimo da função objectivo, a existir, ocorre num vértice da região exequível.

	x_1	x_2	$x_1 + 2x_2$
P_1	4	8	20
P_2	8	12	32
P_3	12	4	20

← Valor óptimo no Ponto $P2 = (8,12)$

2.

$$\begin{array}{llllll} \max & -x_0 & & & & \\ \text{s.a} & -\frac{1}{2}x_1 & -x_2 & -x_0 & \leq & -10 \\ & -x_1 & +x_2 & -x_0 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & +x_2 & -x_0 & \leq & 28 \\ & & x_1, x_2, x_0 & & \geq & 0 \end{array}$$

Como qualquer ponto da região exequível é uma solução do programa auxiliar, podemos considerar, por exemplo, os pontos P_1, P_2 e P_3

[illegible] inicial, podemos
considerar, por exemplo, os pontos P_1, P_2 e P_3
definidos acima. Mas considerando que
$x_0 = 0$. Logo,

$$P_1' = (4, 8, 0)$$
$$P_2' = (8, 12, 0)$$
$$P_3' = (12, 4, 0)$$

II.d)

$C = \{c_1, \dots, c_m\}$

Cada a_i tem um subconjunto C_i

SharedStickers $= \{\langle C, \mathcal{C}, k\rangle \mid \exists X \subseteq C.\, |X| = k \wedge \forall_{1 \leq i \leq m}.\, C_i \cap X \neq \emptyset\}$

1.

- $\langle C, \mathcal{C}, k\rangle$ é uma instância do problema SharedStickers
- X é um conjunto de cromos, o certificado
- Observamos que $k \leq m$, logo o certificado cresce polinomialmente $\in O(m)$
- Um algoritmo de verificação tem de verificar que $|X| = k$ e $\forall_{1 \leq i \leq m}.\, C_i \cap X \neq \emptyset$
- Dado que tem de verificar a intersecção de X com cada C_i, a verificação faz-se em tempo $O(n^2 \cdot m)$

2.

VCover $= \{\langle G, k\rangle \mid G$ contém uma cobertura de vértices de tamanho $k\}$

$V' \subseteq V$ é uma cobertura de vértices se e só se: $\forall (u, v) \in E.\, u \in V' \vee v \in V'$.

- $\langle G, k\rangle$ é uma instância do problema VCover onde $G = (V, E)$
- Construímos um conjunto de cromos C onde cada cromo corresponde a um vértice de V. Logo, $C = V$.
- Cada arco $(u, v) \in E$ corresponde a um amigo com cromos u e v. Logo, $\mathcal{C} = \{\{u, v\} \mid (u, v) \in E\}$
- A função de redução é
  $f(\langle G, k\rangle) = \langle C, \mathcal{C}, k'\rangle$
  ou seja,
  $\langle G, k\rangle \in \text{VCover} \iff \langle C, \mathcal{C}, k'\rangle \in \text{SharedStickers}$
  onde $k = k'$.
- A redução tem complexidade polinomial dado que passa apenas por percorrer os vértices e os arcos para a definição dos conjuntos C_i. $O(V + E)$