Lógica para Programação

Solução do Primeiro Teste

3 de Maio de 2014

09:00–10:30

1. **(2.0)** Para cada uma das seguintes questões, indique se é verdadeira ou falsa. Cada resposta certa vale 0.5 valores e *cada resposta errada desconta 0.2 valores*.

   (a) A regra de inferência derivada conhecida por *modus tollens* afirma que numa prova que contém $\neg\alpha$ e $\alpha \rightarrow \beta$ se pode derivar $\neg\beta$.
   Resposta:
   Falsa

   (b) Uma fórmula na forma clausal corresponde a uma disjunção de conjunções de literais.
   Resposta:
   Falsa

   (c) A resolução SLD assenta numa estratégia de resolução linear.
   Resposta:
   Verdadeira

   (d) Uma função de selecção permite escolher um literal de uma cláusula objectivo como candidato na aplicação do princípio da resolução.
   Resposta:
   Verdadeira

2. **(2.0)** Escolha a *única* resposta *correcta* para as seguintes questões. Cada resposta certa vale 1 valor e *cada resposta errada desconta 0.4 valores*.

   (a) Seja $s_1 = \{f(a)/x, f(y)/y, y/z\}$ e $s_2 = \{b/x, z/y, g(x)/z, b/w\}$. Considerando que x, y, z e w são variáveis, o valor de $s_1 \circ s_2$ é dado por:

   A. $\{f(a)/x, f(z)/y, b/w\}$
   B. $\{f(a)/x, f(b)/y, b/w\}$
   C. $\{f(a)/x, f(z)/y\}$
   D. $\{f(a)/x, f(x)/y, y/z, b/x, z/y, g(x)/z, b/w\}$

   Resposta:
   A.

   (b) Dizem-se *cláusulas determinadas*

   A. as regras e os objectivos;
   B. as regras e os factos;

C. os objectivos e os factos;

D. as regras, os objectivos e os factos.

Resposta:

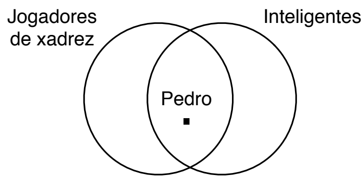
B

3. Para cada um dos seguintes argumentos, prove se é válido ou inválido.

   (a) **(0.5)**
   O Pedro é jogador de xadrez
   O Pedro é inteligente
   $\therefore$ Todos os jogadores de xadrez são inteligentes

   Resposta:

   Consideremos o seguinte diagrama:



   Este diagrama mostra que é possível ter todas as premissas verdadeiras e a conclusão falsa, logo o argumento é inválido.

   Em alternativa, podemos considerar o seguinte contra-argumento:
   2 é um real
   2 é um inteiro
   $\therefore$ Todos os reais são inteiros

   (b) **(0.5)**
   Os cães são animais
   Os cães não são animais
   $\therefore$ O Bobi é castanho

   Resposta:

   É impossível ter ambas as premissas verdadeiras, logo o argumento é válido.

4. **(1.0)** Sabendo que a *fbf* $((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow Q$ é um teorema, mostre que o argumento $(\{(P \vee Q) \wedge \neg P\}, Q)$ é demonstrável, usando apenas as propriedades do sistema dedutivo da lógica proposicional.

   Resposta:

   Se $((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow Q$ é um teorema, então $\{\} \vdash ((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow Q$.

   Consideremos o teorema que afirma que "*Para qualquer conjunto de fbfs Δ e quaisquer fbfs α e β, se $\Delta \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$, então $(\Delta \cup \{\alpha\}) \vdash \beta$.*"

   Então, sendo $\Delta = \{\}$, $\alpha = (P \vee Q) \wedge \neg P$ e $\beta = Q$, temos que $\{(P \vee Q) \wedge \neg P\} \vdash Q$, ou seja, o argumento $(\{(P \vee Q) \wedge \neg P\}, Q)$ é demonstrável.

5. Demonstre as seguintes afirmações usando o sistema de dedução natural da lógica proposicional (apenas pode utilizar as regras Prem, Rep, Reit e introdução e eliminação de cada uma das conectivas):

   (a) **(1.0)** $((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q)) \rightarrow \neg P$

   Resposta:

1	$(P \to Q) \wedge (P \to \neg Q)$	Hip
2	$P \to Q$	E$\wedge$, 1
3	$P \to \neg Q$	E$\wedge$, 1
4	$\quad P$	Hip
5	$\quad P \to Q$	Rei, 2
6	$\quad Q$	E$\to$, (4, 5)
7	$\quad P \to \neg Q$	Rei, 3
8	$\quad \neg Q$	E$\to$, (4, 7)
9	$\neg P$	I$\neg$, (4, (6, 8)
10	$((P \to Q) \wedge (P \to \neg Q)) \to \neg P$	I$\to$, (1, 9)

(b) **(1.5)** $(\{P \to R, Q \to R\}, (P \vee Q) \to R)$

Resposta:

1	$P \to R$	Prem
2	$Q \to R$	Prem
3	$\quad P \vee Q$	Hip
4	$\quad\quad P$	Hip
5	$\quad\quad P \to R$	Rei, 1
6	$\quad\quad R$	E$\to$, (4, 5)
7	$\quad\quad Q$	Hip
8	$\quad\quad Q \to R$	Rei, 2
9	$\quad\quad R$	E$\to$, (7, 8)
10	$\quad R$	E$\vee$, (3, (4, 6), (7, 9))
11	$(P \vee Q) \to R$	I$\to$, (3, 10)

6. **(1.5)** Considere a seguinte *fbf* na forma clausal

   $\alpha = \{\{\neg P, \neg Q\}, \{\neg P, R\}, \{\neg P, S\}, \{\neg P\}\}$

   Aplicando na ordem inversa os passos do algoritmo estudado de conversão para a forma clausal, mostre que a fórmula que se segue, β, pode ser representada por α na forma clausal:

   $\beta = (P \to \neg Q) \wedge (P \to R) \wedge (P \to S) \wedge \neg P$.

   Resposta:

   $\{\{\neg P, \neg Q\}, \{\neg P, R\}, \{\neg P, S\}, \{\neg P\}\}$
   Repondo a disjunção:
   $\{\neg P \vee \neg Q, \neg P \vee R, \neg P \vee S, \neg P\}$
   Repondo a conjunção:
   $(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee S) \wedge \neg P$
   Repondo a implicação:

$(P \to \neg Q) \land (P \to R) \land (P \to S) \land \neg P$

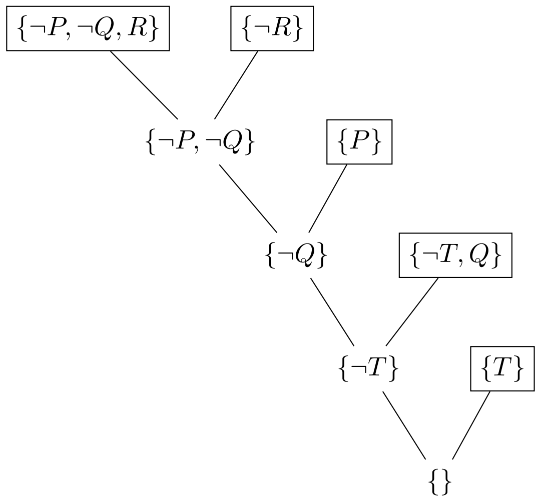
7. **(2.0)** Considere o argumento $(\{P,\ (P \land Q) \to R,\ T \to Q,\ T\},\ R)$. Apresente uma prova por refutação usando resolução linear.

   Resposta:

   1º Conversão das premissas para a forma clausal: $\{P\}, \{\neg P, \neg Q, R\}, \{\neg T, Q\}, \{T\}$

   2º Negação da conclusão: $\{\neg R\}$

   3º Prova por refutação usando resolução linear:



8. Considere os seguintes predicados:

   $AP(x) = x$ é uma aula prática

   $Al(x) = x$ é um aluno

   $Prob(x, y) = x$ é um problema da aula prática y

   $Res(x, y) = x$ resolveu y

   Usando a lógica de primeira ordem e os predicados definidos acima:

   (a) **(0.5)** Represente a seguinte proposição: *Em qualquer aula prática, dado qualquer problema dessa aula, existe pelo menos um aluno que o resolveu.*

   Resposta:

   $\forall x, y[(AP(x) \land Prob(y, x)) \to \exists z[Al(z) \land Res(z, y)]]$

   (b) **(0.5)** Diga qual o significado da *fbf* $\forall x[AP(x) \to \exists y[Al(y) \land \forall z[Prob(z, x) \to \neg Res(y, z)]]]$.

   Resposta:

   Em qualquer aula prática, existe pelo menos um aluno que não resolveu nenhum problema dessa aula.

9. **(2.0)** Demonstre o teorema $\forall x[P(x) \lor \neg P(x)]$ usando o sistema de dedução natural da lógica de primeira ordem (apenas pode usar as regras Prem, Rep, Reit e introdução e eliminação de cada uma das conectivas e quantificadores).

   Resposta:

1	x_0	$\neg(P(x_0) \vee \neg P(x_0))$	Hip
2		$P(x_0)$	Hip
3		$P(x_0) \vee \neg P(x_0)$	I$\vee$, 2
4		$\neg(P(x_0) \vee \neg P(x_0))$	Rei, 1
5		$\neg P(x_0)$	I$\neg$, (2, (3, 4))
6		$P(x_0) \vee \neg P(x_0)$	I$\vee$, 5
7		$\neg(P(x_0) \vee \neg P(x_0))$	Rep, 1
8		$\neg\neg(P(x_0) \vee \neg P(x_0))$	I$\neg$, (1, (6, 7))
9		$P(x_0) \vee \neg P(x_0)$	E$\neg$, 8
10		$\forall x[P(x) \vee \neg P(x)]$	I$\forall$, (1, 9)

10. **(1.5)** Considere as seguintes fórmulas α e β.

    α:
    $\exists x[A(x)] \wedge \forall x, y[B(x) \rightarrow (\exists w[C(y,x,w)] \wedge \exists z[D(z,x)])] \wedge \exists x[E(x) \vee F(x)]$

    β:
    $\{\{A(sk_1)\}, \{\neg B(z), C(y,z,skf_1(z,y))\}, \{\neg B(z), D(skf_2(z,y),z)\},$
    $\{E(sk_2), F(sk_2)\}\}$

    Usando a tabela abaixo, ordene cada uma das fórmulas que se seguem, de modo a que ilustrem as várias etapas do algoritmo de conversão para a forma clausal da fórmula α (que resulta em β).

    (a) $\exists x[A(x)] \wedge \forall z, y[\neg B(z) \vee (\exists w[C(y,z,w)] \wedge \exists r[D(r,z)])] \wedge \exists s[E(s) \vee F(s)]$
    (b) $\forall z, y[A(sk1) \wedge (\neg B(z) \vee (C(y,z,skf_1(z,y)) \wedge D(skf_2(z,y),z))) \wedge (E(sk_2) \vee F(sk_2))]$
    (c) $\exists x[A(x)] \wedge \forall x, y[\neg B(x) \vee (\exists w[C(y,x,w)] \wedge \exists z[D(z,x)])] \wedge \exists x[E(x) \vee F(x)]$
    (d) $A(sk_1) \wedge (\neg B(z) \vee (C(y,z,skf_1(z,y)) \wedge D(skf_2(z,y),z))) \wedge (E(sk_2) \vee F(sk_2))$
    (e) $\{A(sk_1), \neg B(z) \vee C(y,z,skf_1(z,y)), \neg B(z) \vee D(skf_2(z,y),z), E(sk_2) \vee F(sk_2)\}$
    (f) $A(sk_1) \wedge \forall z, y[\neg B(z) \vee (C(y,z,skf_1(z,y)) \wedge D(skf_2(z,y),z))] \wedge (E(sk_2) \vee F(sk_2))$

    Resposta:

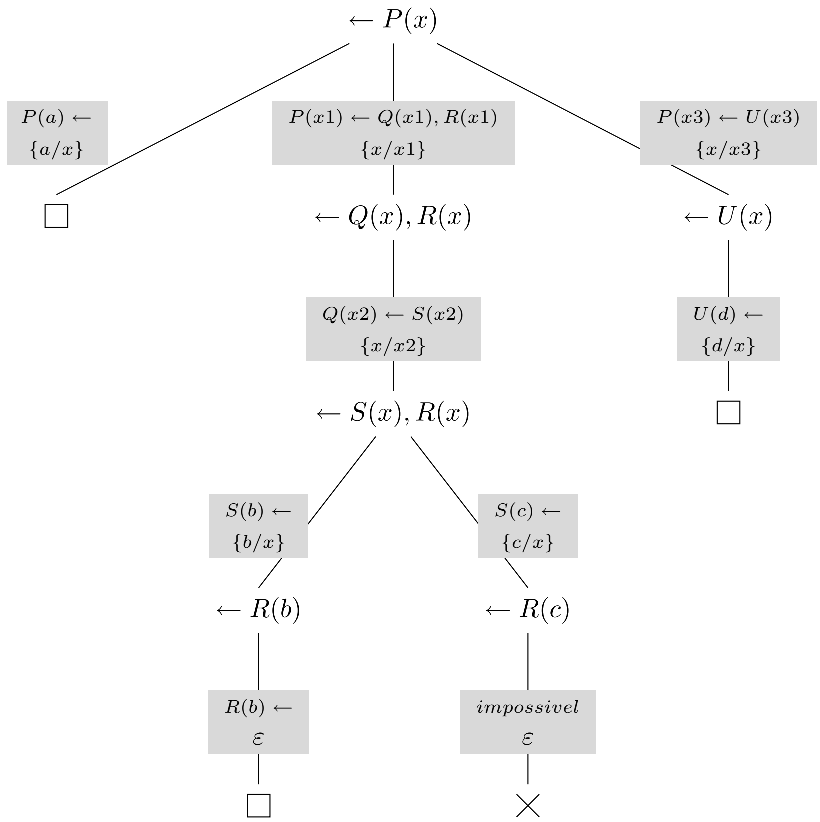
Etapas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
	(c)	(a)	(f)	(b)	(d)	(e)

11. **(2.5)** Usando uma árvore de resolução SLD e uma função de selecção que escolhe o primeiro literal do objectivo para unificar, indique explicitamente todas as soluções para o objectivo $\leftarrow P(x)$. Em cada ramo da árvore indique a cláusula e substituição respectivas.

    $P(a) \leftarrow .$
    $P(x) \leftarrow Q(x), R(x).$
    $P(x) \leftarrow U(x).$
    $Q(x) \leftarrow S(x).$
    $R(a) \leftarrow .$
    $R(b) \leftarrow .$

$S(b) \leftarrow .$
$S(c) \leftarrow .$
$U(d) \leftarrow .$

Resposta:



As soluções são: $\{a/x\}$, $\{b/x\}$ e $\{d/x\}$.

12. **(1.0)** Considere o seguinte conjunto de *fbfs*:

$$\{P(x, a, z), P(f(y), z, y), P(x, z, y)\}$$

Preencha as linhas que necessitar da seguinte tabela, de forma a seguir o algoritmo de unificação para determinar se as *fbfs* são unificáveis. Em caso afirmativo indique qual o unificador mais geral, caso contrário escreva que as *fbfs* não são unificáveis.

Resposta:

Conjunto de fbfs	**Conj. de Desacordo**	**Substituição**
$\{P(x, a, z), P(f(y), z, y), P(x, z, y)\}$	$\{x, f(y)\}$	$\{f(y)/x\}$
$\{P(f(y), a, z), P(f(y), z, y)\}$	$\{a, z\}$	$\{a/z\}$
$\{P(f(y), a, a), P(f(y), a, y)\}$	$\{a, y\}$	$\{a/y\}$
$\{P(f(a), a, a)\}$		

Unificador mais geral: $\{f(a)/x, a/z, a/y\}$