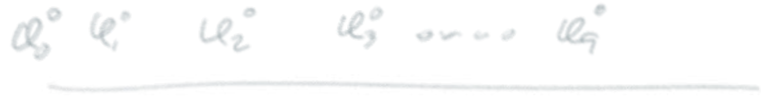
I.a)

for $i := 0$ to 9 do
  MakeSet(e_i)

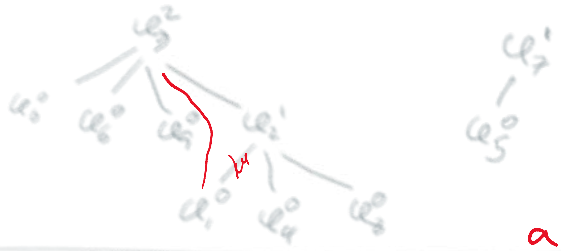


for $i := 0$ to 2 do
  Union(e_{2^i}, $e_{2^{i+1}}$)

for $i := 0$ to 2 do
  Union($e_{3\times i}$, $e_{3\times(i+1)}$)

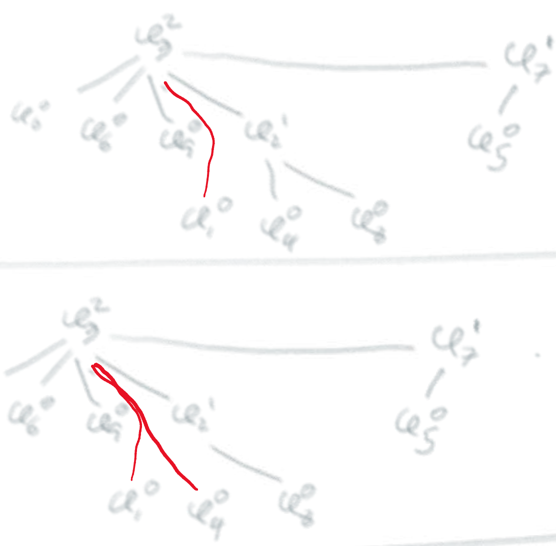
Union(e_5, e_7)

$\psi_5 = 1$
Union(e_{ψ_5}, e_{ψ_5+5})
link(FS(e_1), FS(e_6))
link(e_2, e_3)



a vermelho a compressão de caminhos

$\psi_6 = 1$
Union(e_{ψ_6}, e_{ψ_6+4})
link(FS(e_1), FS(e_5))
link(e_3, e_7)

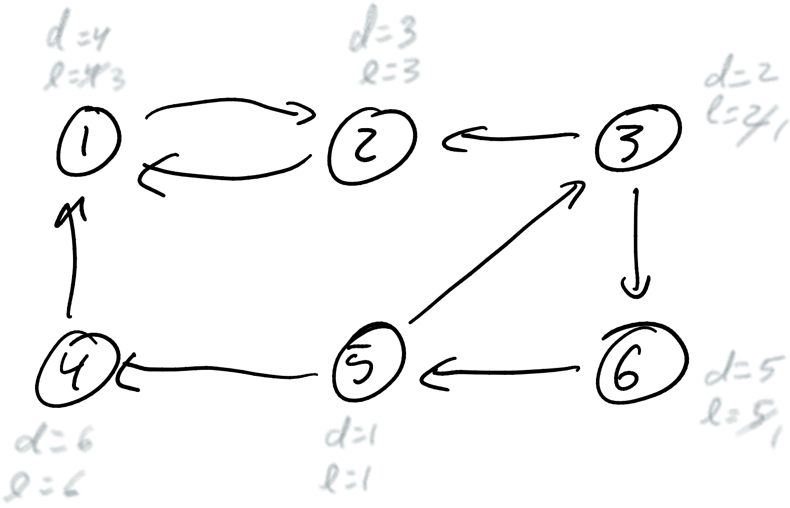


$\psi_3 = 4$
FS(e_{ψ_3})
FS(e_4)

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
rank[e_i]	0	0	1	2	0	0	0	1	0	0
p[e_i]	3	3	3	3	3	7	3	3	2	3

I.b)

$(\psi_1 + \psi_2) \bmod 6 = (3+2) \bmod 6 = 5 \bmod 6 = 5$ //



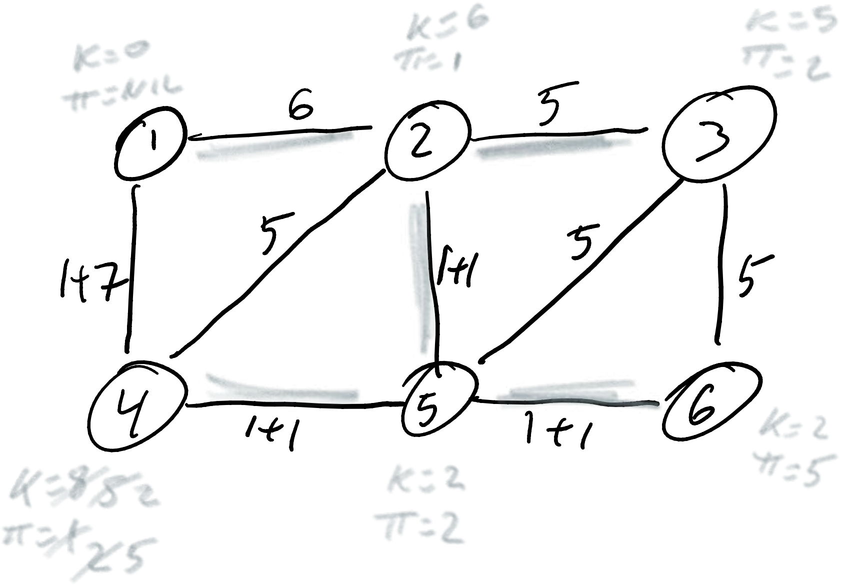
SCCs: {1,2}, {4}, {3,5,6}

	1	2	3	4	5	6
low	3	3	1	6	1	1

I.c)

$(\varphi_1+\varphi_3) \bmod 6 = (3+4) \bmod 6 = 1$

Vertice inicial



Q: ~~1~~, 2, 3, 4, 5, 6

Q: ~~2~~, 4, 3, 5, 6

Q: ~~5~~, 3, 4, 6

Q: ~~4~~, 6, 3

Q: ~~6~~, 3

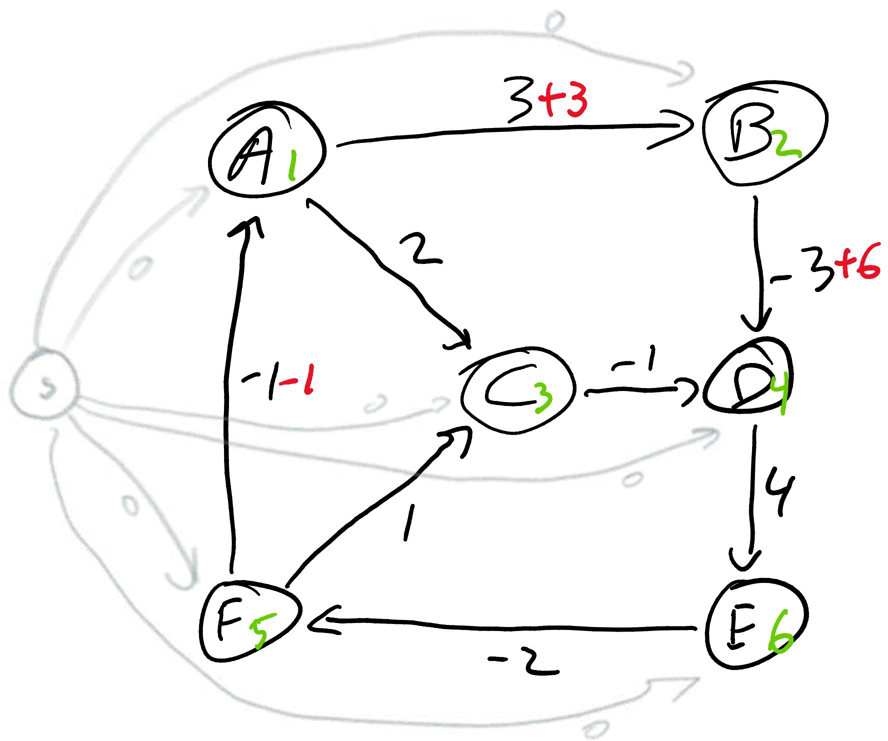
Q: ~~3~~

V	1	2	3	4	5	6
Orden	1	2	6	4	3	5
K	0	6	5	2	2	2
π	NIL	1	2	5	2	5

Peso MST $= 6+5+2+2+2$

$= 17$

I.d)



$$w'(u,v) = w(u,v) + h(u) - h(v)$$

Bellman-Ford

$\delta(s,A) = -4$

$\delta(s,B) = 0$

$\delta(s,C) = -2$

$\delta(s,D) = -3$

$\delta(s,E) = 0$

$\delta(s,F) = -2$

$\hat{w}(A,B) = 6 + (-4) - 0 = 2$

$\hat{w}(A,C) = 2 + (-4) - (-2) = 0$

$\hat{w}(B,D) = 3 + 0 - (-3) = 0$

$\hat{w}(C,D) = -1 + (-2) - (-3) = 0$

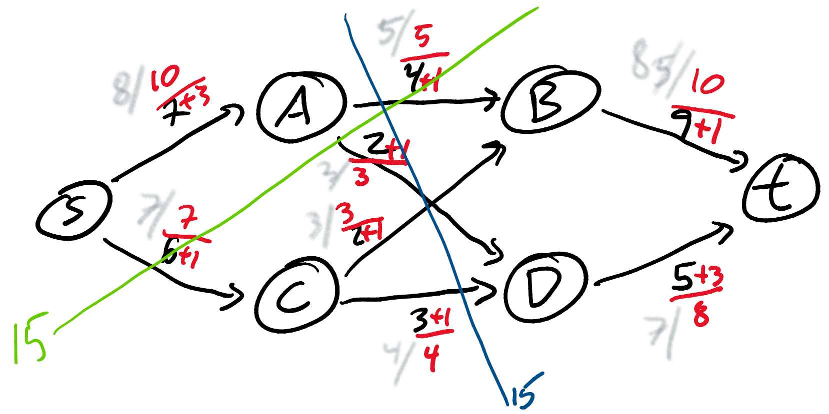
$\hat{w}(D,E) = 4 + (-3) - 0 = 1$

$\hat{w}(E,F) = -2 + 0 - (-2) = 0$

$\hat{w}(F,A) = -2 + (-2) - (-4) = 0$

$\hat{w}(F,C) = 1 + (-2) - (-2) = 1$

I.e)



$L = \langle A, B, C, D \rangle$

$N[A] = \langle B, D, s \rangle$

$N[B] = \langle t, C, A \rangle$

$N[C] = \langle B, D, s \rangle$

$N[D] = \langle t, A, C \rangle$

	S	A	B	C	D	t	L
h	6	0	0	0	0	0	A, B, C, D
e	-17	10	0	7	0	0	
h	6	7	0	0	0	0	A, B, C, D
e	-15	0	5	7	3	0	
h	6	7	1	0	0	0	B, A, C, D
e	-15	0	0	7	3	5	
h	6	7	1	2	0	0	C, B, A, D
e	-15	0	3	0	7	5	
h	6	7	1	2	0	0	C, B, A, D
e	-15	0	0	0	7	8	
h	6	7	1	2	1	0	D, C, B, A
e	-15	0	0	0	0	15	

$f(S,T) = 15$

$L: \langle A, B, C, D \rangle, \langle B, A, C, D \rangle, \langle C, B, A, D \rangle, \langle D, C, B, A \rangle$

h:

S	A	B	C	D	t
6	7	1	2	1	0

corte: $\{S, A, C\} / \{B, D, t\}$

corte alternativo: $\{S, A\} / \{B, C, D, t\}$

II.

a) Loop 1

for ($i=0 \rightarrow n$)
$j=0 \rightarrow n+2$

Em cada iteração de i o j aumenta no máximo de 2 unidades

$\Rightarrow$ Todo o ciclo é $O(n)$

Loop 2

$j = n+2$
while ($j>0$)
$j = j/2$

Decresce de forma logarítmica
$O(\log n)$

b) $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \cancel{n}^{\rightarrow O(n)}$ Expressão

$a=3$
$b=2$

$d=1$

$d=1 < \log_2 3$

$\Rightarrow$ Caso 1 do Teorema Mestre
$T(n) = O(n^{\log_b a}) = O(n^{\log_2 3})$ Majorante

III.

a) Considerar que os cruzamentos correspondem aos vértices de um grafo $G=(V,E)$ dirigido. Se existe um caminho entre quaisquer dois vértices, então todo o grafo contém um único SCC.

Logo, podemos aplicar o algoritmo de Tarjan e verificar o # de SCCs resultante.

O algoritmo de Tarjan tem complexidade $O(V+E)$.

A complexidade da solução do problema é dominada pela complexidade do Tarjan. Logo, $O(V+E)$.

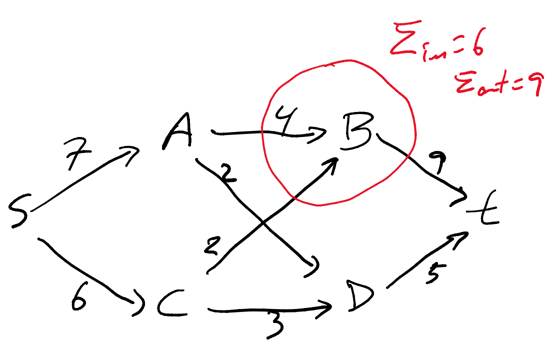
b)

Fazendo uma DFS a partir do vértice da câmara municipal (só uma DFS_visit) determinamos o conjunto de vértices alcançável. | $O(V+E)$

Depois verificamos se este conjunto vértices atingível pertence todos ao mesmo SCC, usando o algoritmo de Tarjan | $O(V)$ | $O(V+E)$

=> Logo, a complexidade da solução é dominada pela DFS / Tarjan. $O(V+E)$

IV.



Arco limitante

Se aumentando a sua capacidade, o valor do fluxo máximo é aumentado.

a) É apenas possível aumentar o fluxo máximo aumentando os arcos (A, B) e (C, B).

b) $s \xrightarrow{1} A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{1} t$ ou $s \xrightarrow{1} A \xrightarrow{1} t$, $s \xrightarrow{1} B \xrightarrow{1} t$

c) Depois de calculado o fluxo máximo f^* a rede residual resultante G_{f^*} induz um corte sobre os vértices de G.

Determinamos o conjunto de vértices S' alcançáveis a partir do vértice fonte s. Por exemplo, aplicando uma DFS a partir de s. | $O(V+E)$

Calculamos $G^T_{f^*}$, o grafo transposto da rede residual G_{f^*}. | $O(V+E)$

Identificamos o conjunto de vértices T' alcançáveis a partir do vértice destino t, aplicando uma DFS a partir de t sobre a rede residual transposta $G^T_{f^*}$. | $O(V+E)$

Para cada arco $(u,v) \in E$ do grafo inicial, determinamos se é limitante caso $u \in S'$ e $v \in T'$. | $O(E)$

$\Rightarrow$ Complexidade total: $O(V+E)$

V.

a) O fluxo vai estar limitado nos arcos que saiem do vértice k

$\Rightarrow 1+1$

$\Rightarrow 3+3$

$\Rightarrow 5+5$

$\vdots$

$$\sum_{i=1}^{k/2} (2i-1)\times 2 = \sum_{i=1}^{k/2} 4i-2 = 4\sum_{i=1}^{k/2} i - 2\sum_{i=1}^{k/2} 1$$

$$= 4 \cdot \frac{k/2(k/2+1)}{2} - 2\frac{k}{2} = k(k/2+1) - k$$

$$= \frac{k^2}{2} + k - k = \frac{k^2}{2}$$

O fluxo máximo é $\frac{k^2}{2}$.

---

b) Complexidade do FF: $O(E|f^*|)$

↳ em função de k:

↳ Percorre $O(k)$ arcos em cada um dos k caminhos de aumento

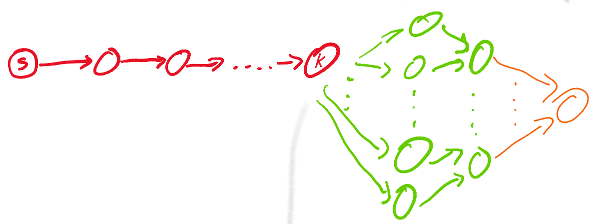
Logo, $O(k^2)$

Complexidade do PR: $O(V^2E)$

↳ em função de k:

\# Pushes para a frente:

$$k + k + k + \frac{k}{2} = 3k + \frac{k}{2} = \frac{7k}{2}$$



$\ell(k)$ que consegue ser enviado para a frente $= f^* = \frac{k^2}{2}$

Mas o nó k tem $2k^2$

$\Rightarrow$ Logo, terá de enviar algum fluxo para trás

\# Pushes para trás:

\# Pushes para trás:

$$S \leftarrow K + \leftarrow \frac{K}{2} = \frac{3}{2}K$$

\# total de Pushes $= \frac{7K}{2} + \frac{3K}{2} = \frac{10K}{2} = 5K$

Logo, $O(k)$