a) Se $A \leq_p L_1$ então existe $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ total e computável por máq. Turing F com $time_F(n) = \mathcal{O}(n^a)$ tal que $x \in A$ sse $f(x) \in L_1$.

Se $B \leq_p L_2$ então existe $g : \Sigma^* \to \Sigma^*$ total e computável por máq. Turing G com $time_G(n) = \mathcal{O}(n^b)$ tal que $x \in B$ sse $g(x) \in L_2$.

Se $C \leq_p A \cap B$ então existe $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ total e computável por máq. Turing H com $time_H(n) = \mathcal{O}(n^c)$ tal que $x \in C$ sse $h(x) \in A \cap B$.

Então, a função $k : \Sigma^* \to (\Sigma \cup \{\$\})^*$ tal que $k(x) = f(h(x))\$g(h(x))$ é total e computável pois f, g, h são por máq. Turing K com

$$time_K(n) = \mathcal{O}\Big(\underbrace{time_H(n)}_{\substack{\text{cálculo}\\ \text{de } h(x)}} + \underbrace{time_F(n+time_H(n))}_{\substack{\text{cálculo de}\\ f(h(x))}} + \underbrace{time_G(n+time_H(n))}_{\substack{\text{cálculo de}\\ g(h(x))}}\Big)$$

$$= \mathcal{O}\big(n^c + (n+n^c)^a + (n+n^c)^b\big)$$ que é um polinómio.

Além disso,

$x \in C$ sse $h(x) \in A \cap B$ sse $h(x) \in A$ e $h(x) \in B$ sse

$f(h(x)) \in L_1$ e $g(h(x)) \in L_2$ sse

$f(h(x))\$g(h(x)) = k(x) \in L = \{w_1\$w_2 : w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$.

Conclui-se que $C \leq_p L$.

b) Se $L \in P$ sabemos que $\overline{L} \in P$ (trocando q_{AC}/q_{RJ} na máq. de Turing que decide L obtém-se máq. que decide $\overline{L}$ com a mesma eficiência temporal).

Sabemos também que $P \subseteq NP$ (pois uma máq. determinista é um caso particular da def. de máquina não-determinista).

Logo $\overline{L} \in NP$ e portanto $L \in coNP$. (Notando que $\overline{\overline{L}} = L$).
Conclui-se que $P \subseteq coNP$.

Se $\overline{L} \in coNP$ então $L \in NP$.
Sabemos que $NP \subseteq PSPACE$ (pois $NP \subseteq NPSPACE \subseteq PSPACE$, já que $nspace_N(n) \leq ntime_N(n)$ para uma máq. não-determinista N, e usando o teorema de Savitch).

Logo $L \in PSPACE$ pelo que $\overline{L} \in PSPACE$ (de novo trocando q_{AC}/q_{RJ} na máq. que decide L).
Conclui-se que $coNP \subseteq PSPACE$.

Instituto Superior Técnico – LEIC, Alameda

Teoria da Computação

Abril 2022 MAP30–5A.1 Duração: 30m

Nome: ______________________ **Número:** ___________

a) (2.5 valores) Seja Σ um alfabeto, $\$ \notin \Sigma$, e considere linguagens $A, B, C, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ tais que:

- $A \leq_P L_1$,
- $B \leq_P L_2$,
- $C \leq_P A \cap B$.

Mostre, justificando, que $C \leq_P \{w_1\$w_2 : w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$.

b) (1.5 valores) Considere a classe $\mathbf{coNP} = \{\overline{L} : L \in \mathbf{NP}\}$. Demonstre, justificando, que se tem $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{coNP} \subseteq \mathbf{PSPACE}$.

Instituto Superior Técnico – LEIC, Alameda

Teoria da Computação

Abril 2022 MAP30–5A.2 Duração: 30m

Nome: ______________________ **Número:** ___________

a) (2.5 valores) Seja Σ um alfabeto, $\$ \notin \Sigma$, e considere linguagens $A, B, C, L \subseteq \Sigma^*$ tais que:

- $A \leq_P B \cap C$,
- $B \leq_P L$,
- $C \leq_P \overline{L}$.

Mostre, justificando, que $A \leq_P \{w_1 \$ w_2 : w_1 \in L \text{ e } w_2 \in \Sigma^* \setminus L\}$.

b) (1.5 valores) Considere a classe $\mathbf{duNP} = \{L : \overline{L} \in \mathbf{NP}\}$. Demonstre, justificando, que se tem $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{duNP}$ e $\mathbf{duNP} \subseteq \mathbf{EXPTIME}$.

Instituto Superior Técnico – LEIC, Alameda

Teoria da Computação

Abril 2022 MAP30–5B.1 Duração: 30m

Nome: ______________________ **Número:** __________

a) (2.5 valores) Seja Σ um alfabeto, $\$ \notin \Sigma$, e considere linguagens $A, B, C, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ tais que $A \leq_P L_1$, $B \leq_P L_2$ e $C \leq_P A \cup B$.

Mostre, justificando, que $C \leq_P \{w_1 \$ w_2 : w_1, w_2 \in \Sigma^* \text{ com } w_1 \in L_1 \text{ ou } w_2 \in L_2\}$.

b) (1.5 valores) Demonstre, justificando, que se tem $\mathbf{P} \subseteq \{L : \overline{L} \in \mathbf{NP}\} \subseteq \mathbf{PSPACE}$.

Instituto Superior Técnico – LEIC, Alameda

Teoria da Computação

Abril 2022 | MAP30–5B.2 | Duração: 30m

Nome: ______________________ **Número:** ___________

a) (2.5 valores) Seja Σ um alfabeto, $\$ \notin \Sigma$, e considere linguagens $A, B, C, L \subseteq \Sigma^*$ tais que $A \leq_P B \cup C$, $B \leq_P \overline{L}$ e $C \leq_P \overline{L}$.

Mostre, justificando, que $A \leq_P \{w_1\$w_2 : w_1, w_2 \in \Sigma^* \text{ com } w_1 \notin L \text{ ou } w_2 \notin L\}$.

b) (1.5 valores) Demonstre, justificando, que se tem $\mathbf{P} \subseteq \{\overline{L} : L \in \mathbf{NP}\} \subseteq \mathbf{EXPTIME}$.

Instituto Superior Técnico – LEIC, Alameda

Teoria da Computação

Abril 2022 MAP30–5C.1 Duração: 30m

Nome: ________________________ **Número:** ____________

a) (2.5 valores) Seja Σ um alfabeto, $\$ \notin \Sigma$, e considere linguagens $A, B, C, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ tais que:

- $L_1 \leq_P A$,
- $L_2 \leq_P B$,
- $\{u\$v : u \in A, v \in B\} \leq_P C$.

Mostre, justificando, que $\{w_1\$w_2 : w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\} \leq_P C$.

b) (1.5 valores) Considere a classe $\mathbf{coNP} = \{\overline{L} : L \in \mathbf{NP}\}$. Demonstre, justificando, que se tem $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$ e $\mathbf{NP} \cup \mathbf{coNP} \subseteq \mathbf{PSPACE}$.

Instituto Superior Técnico – LEIC, Alameda

Teoria da Computação

Abril 2022 MAP30–5C.2 Duração: 30m

Nome: ______________________ **Número:** ___________

a) (2.5 valores) Seja Σ um alfabeto, $\$ \notin \Sigma$, e considere linguagens $A, B, C, L \subseteq \Sigma^*$ tais que:

- $L \leq_P A$,
- $\overline{L} \leq_P B$,
- $\{u\$v : u \in A, v \in B\} \leq_P C$.

Mostre, justificando, que $\{w_1\$w_2 : w_1 \in L, w_2 \in \Sigma^* \setminus L\} \leq_P C$.

b) (1.5 valores) Considere a classe $\mathbf{duNP} = \{L : \overline{L} \in \mathbf{NP}\}$. Demonstre, justificando, que se tem $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{duNP} \cap \mathbf{NP}$ e $\mathbf{duNP} \cup \mathbf{NP} \subseteq \mathbf{EXPTIME}$.

Instituto Superior Técnico – LEIC, Alameda

Teoria da Computação

Abril 2022 MAP30–5D.1 Duração: 30m

Nome: ______________________ **Número:** ___________

a) (2.5 valores) Seja Σ um alfabeto, $\$ \notin \Sigma$, e considere linguagens $A, B, C, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ tais que $L_1 \leq_P A$, $L_2 \leq_P B$ e $\{u\$v : u, v \in \Sigma^* \text{ com } u \in A \text{ ou } v \in B\} \leq_P C$.

Mostre, justificando, que $\{w_1\$w_2 : w_1, w_2 \in \Sigma^* \text{ com } w_1 \in L_1 \text{ ou } w_2 \in L_2\} \leq_P C$.

b) (1.5 valores) Demonstre, justificando, que se tem $\mathbf{P} \subseteq \{L : L \in \mathbf{NP} \text{ e } \overline{L} \in \mathbf{NP}\}$ e $\{L : L \in \mathbf{NP} \text{ ou } \overline{L} \in \mathbf{NP}\} \subseteq \mathbf{PSPACE}$.

Instituto Superior Técnico – LEIC, Alameda

Teoria da Computação

Abril 2022 MAP30–5D.2 Duração: 30m

Nome: ________________________ **Número:** ____________

a) (2.5 valores) Seja Σ um alfabeto, $\$ \notin \Sigma$, e considere linguagens $A, B, C, L \subseteq \Sigma^*$ tais que $L \leq_P \overline{A}$, $L \leq_P B$ e $\{u\$v : u, v \in \Sigma^* \text{ com } u \in A \text{ ou } v \in B\} \leq_P C$.

Mostre, justificando, que $\{w_1\$w_2 : w_1 \in \Sigma^* \setminus L \text{ ou } w_2 \in L\} \leq_P C$.

b) (1.5 valores) Demonstre, justificando, que se tem $\mathbf{P} \subseteq \{L \in \mathbf{NP} : \overline{L} \in \mathbf{NP}\}$ e também $\{L : L \in \mathbf{NP} \text{ ou } \overline{L} \in \mathbf{NP}\} \subseteq \mathbf{EXPTIME}$.