INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Licenciatura Engenharia Informática e de Computadores

Lógica para Programação

Repescagem do Primeiro Teste

13 de Julho de 2010

09:00–10:30

Nome: ______________________________ Número: __________

- Esta prova, individual e sem consulta, tem **9** páginas com **11** perguntas. A cotação de cada pergunta está assinalada entre parêntesis.
- Escreva o seu número em todas as folhas da prova. O tamanho das respostas deve ser limitado ao espaço fornecido para cada questão. O corpo docente reserva-se o direito de não considerar a parte das respostas que excedam o espaço indicado.
- Pode responder usando lápis.
- Em cima da mesa devem apenas estar o enunciado, caneta ou lápis e borracha e cartão de aluno. Não é permitida a utilização de folhas de rascunho, telemóveis, calculadoras, etc.
- Boa sorte.

Pergunta	Cotação	Nota
1.	2.0	
2.	4.0	
3.	1.0	
4.	1.0	
5.	2.0	
6.	2.0	
7.	2.0	
8.	1.0	
9.	1.0	
10.	2.0	
11.	2.0	
Total	20.0	

1. **(2.0)** Para cada uma das seguintes questões, indique se é verdadeira ou falsa. Cada resposta certa vale 0.5 valores e *cada resposta errada desconta 0.2 valores*.

   (a) A regra de inferência derivada conhecida por *modus tollens* afirma que numa prova que contém $\neg\alpha$ e $\alpha \rightarrow \beta$ se pode derivar $\neg\beta$.
   Resposta: ______
   Resposta:
   Falsa

   (b) Uma fórmula na forma clausal corresponde a uma disjunção de conjunções de literais.
   Resposta: ______
   Resposta:
   Falsa

   (c) Num BDD não ordenado podem existir caminhos com ordenações incompatíveis.
   Resposta: ______
   Resposta:
   Verdadeira

   (d) As ordenações para BDDs $[P, Q, S]$ e $[R, P, S, T, Q]$ são compatíveis.
   Resposta: ______
   Resposta:
   Falsa

2. **(4.0)** Escolha a *única* resposta *correcta* para as seguintes questões. Cada resposta certa vale 1 valor e *cada resposta errada desconta 0.4 valores*.

   (a) Tendo em conta o processo de composição de substituições, é verdade que na substituição $s = s_1 \circ s_2$ que resulta da composição das substituições $s_1 = \{t_1/x_1, ..., t_n/x_n\}$ e $s_2 = \{u_1/y_1, ..., u_m/y_m\}$:

   A. Não existe nenhum elemento u_i/y_i tal que $y_i \in \{x_1, ..., x_n\}$.
   B. Encontram-se todos os u_i/y_i tais que $y_i \in \{x_1, ..., x_n\}$.
   C. Encontram-se os elementos resultantes da aplicação de s_1 aos termos de s_2.
   D. Encontram-se os elementos que verificam $(t_i \cdot s_2)/x_i$ tais que $t_i \cdot s_2 = x_i$.

   Resposta: ______
   Resposta:
   A

   (b) Na conversão para a forma clausal de uma fórmula da Lógica de Primeira Ordem:

   A. A eliminação dos quantificadores existenciais depende dos quantificadores existenciais e universais dentro de cujo domínio se encontram.
   B. A eliminação dos quantificadores existenciais depende dos outros quantificadores existenciais dentro de cujo domínio se encontram.
   C. A eliminação dos quantificadores existenciais depende dos quantificadores universais dentro de cujo domínio se encontram.
   D. A eliminação dos quantificadores existencias não depende de outros quantificadores e é feita substituíndo as variáveis quantificadas existencialmente por constantes que nunca apareceram antes.

Resposta: ______

Resposta:

C

(c) Considere as seguintes fórmulas em lógica proposicional: $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee Q)$ e $(P \rightarrow \neg Q) \wedge (P \wedge Q)$.

A. As duas fórmulas são contradições.
B. As duas fórmulas são tautologias.
C. A primeira fórmula é uma contradição e a segunda fórmula é uma tautologia.
D. A primeira fórmula é uma tautologia e a segunda fórmula é uma contradição.

Resposta: ______

Resposta:

D

(d) Considere os seguintes predicados:

- $Irmao(x, y)$: x é irmão de y
- $MaisVelho(x, y)$: x é mais velho do que y
- $Diferente(x, y)$: x é diferente de y

A fórmula

$$\forall x \forall y[(Irmao(x, Pedro) \wedge Irmao(y, Pedro) \wedge Diferente(x, y)) \\ \rightarrow \\ MaisVelho(x, y)]$$

corresponde à seguinte frase:

A. Um dos irmãos do Pedro é mais velho do que o outro.
B. Se o Pedro tem dois irmãos, então um deles é mais velho do que o outro.
C. O Pedro tem dois irmãos que são mais velhos do que ele.
D. O Pedro é mais velho do que os seus irmãos.

Resposta: ______

Resposta:

B

3. Forneça definições para os seguintes conceitos:

(a) **(0.5)** Regra de inferência.

Resposta:

Uma regra de inferência é uma regra de manipulação de símbolos que especifica como gerar novas fórmulas bem formadas a partir de fórmulas que já existem.

(b) **(0.5)** Fórmula satisfazível.

Resposta:

Uma *fbf* diz-se *satisfazível* se e só se existe uma interpretação na qual a *fbf* é verdadeira.

4. (a) **(0.5)** Dê um exemplo de um argumento válido no qual quer as premissas, quer a conclusão sejam falsas.

Resposta:

Todos os planetas são feitos de queijo
O Sol é um planeta
$\therefore$ O Sol é feito de queijo

(b) **(0.5)** Diga, justificando, se o seguinte argumento é válido ou inválido.
O céu é verde
A relva é branca
∴ A relva é branca
Resposta:
O argumento é válido pois sendo a conclusão uma das premissas é impossível ter as premissas verdadeiras e a conclusão falsa.

5. **(2.0)** Demonstre o seguinte teorema usando o sistema de dedução natural. Apenas pode utilizar as regras de inferência básicas do sistema de dedução natural (Prem, Rep, Hip, Rei, I∧, E∧, I∨, E∨, I¬, E¬, I→, E→, I∀, E∀, I∃, E∃).

$$(\forall x[P(x) \to Q(x)] \wedge \forall x[P(x) \to \neg Q(x)]) \to \forall x[\neg P(x)]$$

Resposta:

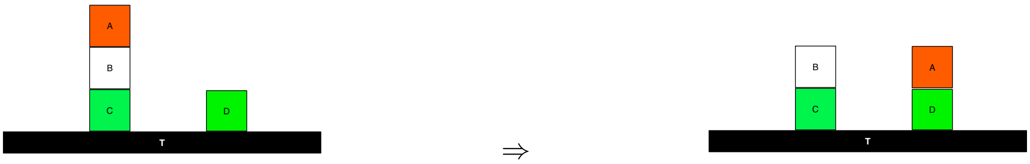
1	$\forall x[P(x) \to Q(x)] \wedge \forall x[P(x) \to \neg Q(x)]$	Hyp
2	$\forall x[P(x) \to Q(x)]$	∧E, 1
3	$\forall x[P(x) \to \neg Q(x)]$	∧E, 1
4	x_0 $\forall x[P(x) \to Q(x)]$	Rei, 2
5	$\forall x[P(x) \to \neg Q(x)]$	Rei, 3
6	$P(x_0)$	Hyp
7	$\forall x[P(x) \to Q(x)]$	Rei, 4
8	$P(x_0) \to Q(x_0)$	∀E, 7
9	$Q(x_0)$	→E, (6, 8)
10	$\forall x[P(x) \to \neg Q(x)]$	Rei, 5
11	$P(x_0) \to \neg Q(x_0)$	∀E, 10
12	$\neg Q(x_0)$	→E, (6, 11)
13	$\neg P(x_0)$	¬I, (6, (9, 12))
14	$\forall x[\neg P(x)]$	∀I, (4, 13)
15	$(\forall x[P(x) \to Q(x)] \wedge \forall x[P(x) \to \neg Q(x)]) \to \forall x[\neg P(x)]$	→I, (1, 14)

6. **(2.0)** Uma das técnicas para utilizar lógica de primeira ordem para lidar com domínios em mudança, corresponde a utilizar nos argumentos dos predicados um termo adicional, o identificador de uma situação, que associa cada predicado a uma situação do mundo.

Assim, sendo *Limpo* um predicado que indica se um bloco não tem outro bloco em cima e *Sobre* um predicado que indica que um bloco está sobre outro, podemos escrever as seguintes *fbfs* sobre o seguinte estado do mundo, que designamos por situação s_0:

$$Limpo(A, s_0)$$

$$Sobre(A, B, s_0)$$



Situação s_0 $\Rightarrow$ $Agarra(A), Empilha(D)$ Situação s_2

A evolução do estado do mundo é feita através de sucessivas situações que resultam da execução de acções, por exemplo sendo

$$s_2 = res(empilha, D, res(agarra, A, s_0)),$$

a situação que resulta da acção de agarrar o bloco A seguido da acção de o colocar sobre D, partindo da situação s_0, podemos escrever, entre outras, a seguinte *fbf*:

$$Limpo(B, res(empilha, D, res(agarra, A, s_0))).$$

Considerando as acções utilizadas no projecto, $Agarra$, $Larga$, $Desempilha$ e $Empilha$, escreva *fbfs* que traduzem os resultados destas acções. Estas *fbfs* devem ter a forma de uma implicação.

Resposta:

$$\begin{aligned}&\forall x, s\, [(Limpo(x, s) \wedge SobreAMesa(x, s) \wedge RobotTem(nada, s))\\&\quad \rightarrow\\&\quad (RobotTem(x, res(agarra(x, s))) \wedge \neg SobreAMesa(x, res(agarra(x, s))))].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\forall x, s\, [RobotTem(x, s)\\&\quad \rightarrow\\&\quad (RobotTem(nada, res(larga(x, s))) \wedge SobreAMesa(x, res(larga(x, s))))].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\forall x, y, s\, [(Limpo(x, s) \wedge Sobre(x, y, s) \wedge RobotTem(nada, s))\\&\quad \rightarrow\\&\quad (RobotTem(x, res(desempilha(x, s))) \wedge Limpo(y, res(desempilha(x, s))) \wedge\\&\quad \neg Sobre(x, y, res(desempilha(x, s))))].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\forall x, y, s\, [(RobotTem(x, s) \wedge Limpo(y, s))\\&\quad \rightarrow\\&\quad (RobotTem(nada, res(empilha(y, s))) \wedge Sobre(x, y, res(empilha(y, s))) \wedge\\&\quad \neg Limpo(y, res(empilha(y, s))))].\end{aligned}$$

7. **(2.0)** Considere a seguinte *fbf*:

$$(\exists x[P(x)] \wedge \forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]) \rightarrow \exists x[Q(x)]$$

Utilizando resolução, prove que esta *fbf* é um teorema. Indique todos os passos seguidos.

Resposta:

Faremos uma prova por refutação, isto é, provaremos que a negação da *fbf* dada,

$$\neg((\exists x[P(x)] \wedge \forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]) \rightarrow \exists x[Q(x)]),$$

permite derivar a cláusula vazia.

Esta solução obriga à utilização de dois passos:

(a) Passagem à forma clausal:

- *Eliminação do símbolo* $\rightarrow$

$$\neg(\neg(\exists x[P(x)] \wedge \forall x[\neg P(x) \vee Q(x)]) \vee \exists x[Q(x)])$$

- *Redução do domínio do símbolo* $\neg$

$$(\exists x[P(x)] \wedge \forall x[\neg P(x) \vee Q(x)]) \wedge \neg\exists x[Q(x)]$$

$$(\exists x[P(x)] \wedge \forall x[\neg P(x) \vee Q(x)]) \wedge \forall x[\neg Q(x)]$$

- *Normalização de variáveis*

$$(\exists x[P(x)] \wedge \forall y[\neg P(y) \vee Q(y)]) \wedge \forall z[\neg Q(z)]$$

- *Eliminação dos quantificadores existenciais*

$$(P(sk_1) \wedge \forall y[\neg P(y) \vee Q(y)]) \wedge \forall z[\neg Q(z)]$$

- *Conversão para a forma "Prenex" normal*

$$\forall y \forall z[(P(sk_1) \wedge (\neg P(y) \vee Q(y))) \wedge \neg Q(z)]$$

- *Eliminação da quantificação universal*

$$P(sk_1) \wedge (\neg P(y) \vee Q(y)) \wedge \neg Q(z)$$

- *Obtenção da forma conjuntiva normal* Já está.
- *Eliminação do símbolo* $\wedge$

$$\{P(sk_1), \neg P(y) \vee Q(y), \neg Q(z)\}$$

- *Eliminação do símbolo* $\vee$

$$\{\{P(sk_1)\}, \{\neg P(y), Q(y)\}, \{\neg Q(z)\}\}$$

(b) Prova por refutação.

1	$\{P(sk_1)\}$	Prem
2	$\{\neg P(y), Q(y)\}$	Prem
3	$\{\neg Q(z)\}$	Prem
4	$\{Q(sk_1)\}$	Res, (1,2), $\{sk_1/y\}$
5	$\{\}$	Res, (3,4), $\{sk_1/z\}$

8. **(1.0)** Utilize o algoritmo de unificação para determinar se o seguinte conjunto de *fbfs* é unificável, e, no caso de o ser, determine o unificador mais geral. Mostre todos os passos intermédios usados nos cálculos. Considere que x, y, z e w são variáveis.

$$\{P(g(z), f(x, z), x, z), P(w, y, a, w)\}$$

Resposta:

Conjunto de *fbfs*	Conj. desacordo	Substituição
$\{P(g(z), f(x, z), x, z), P(w, y, a, w)\}$	$\{g(z), w\}$	$\{g(z)/w\}$
$\{P(g(z), f(x, z), x, z), P(g(z), y, a, g(z))\}$	$\{f(x, z), y\}$	$\{f(x, z)/y\}$
$\{P(g(z), f(x, z), x, z), P(g(z), f(x, z), a, g(z))\}$	$\{x, a\}$	$\{a/x\}$
$\{P(g(z), f(a, z), a, z), P(g(z), f(a, z), a, g(z))\}$	$\{z, g(z)\}$	—

O conjunto não é unificável, pois no último conjunto de desacordo, $\{z, g(z)\}$, não existem uma variável e um termo que não mencione a variável.

9. **(1.0)** Considere a seguinte fórmula na forma clausal $\{\{A, \neg B\}, \{B, \neg C\}, \{\neg A\}, \{C\}\}$. Eliminando as variáveis pela ordem A, C, B, aplique o algoritmo DP à fórmula. Caso a fórmula seja satisfazível, encontre uma testemunha.

   Resposta:

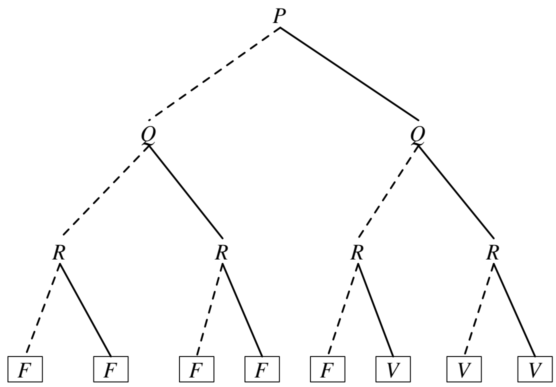
   $$\begin{array}{lll} B_A: & \{A, \neg B\}, \{\neg A\} & \\ B_C: & \{\neg C, B\}, \{C\} & \\ B_B: & & \{\neg B\}, \{B\} \end{array}$$

   Dado que aplicando resolução a $\{\neg B\}$ (obtido aplicando resolução aos baldes de B_A) e $\{B\}$ (obtido aplicando resolução aos baldes de B_C) chegamos ao conjunto vazio (contradição), a fórmula não é satisfazível, pelo que não existe nenhuma testemunha.

10. (a) **(1.0)** Desenhe a árvore de decisão correspondente à seguinte *fbf*:

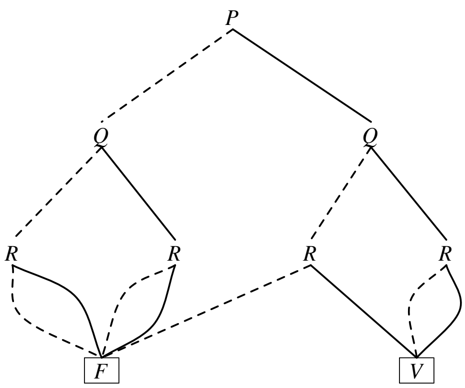
   $$P \wedge (Q \vee (P \wedge R))$$

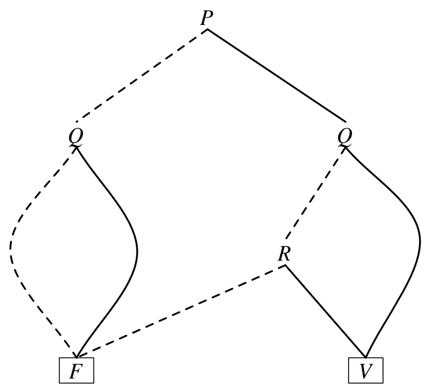
   Resposta:

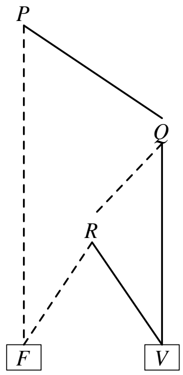


   (b) **(1.0)** Transforme a árvore de decisão da alínea anterior num BDD reduzido. Indique os passos seguidos.

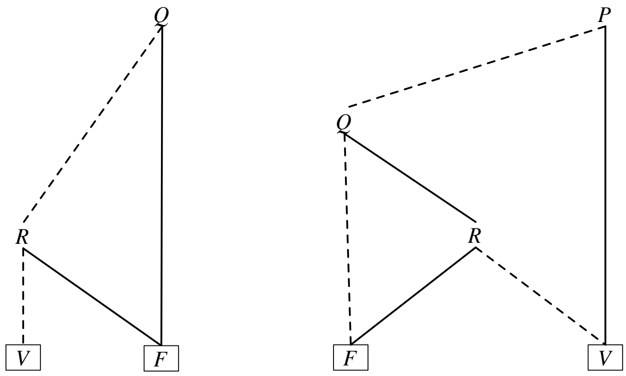
   Resposta:





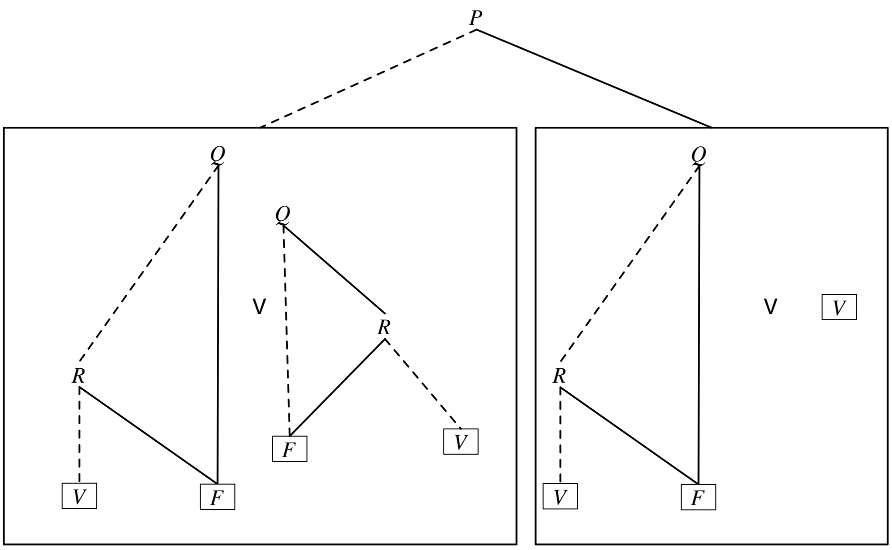


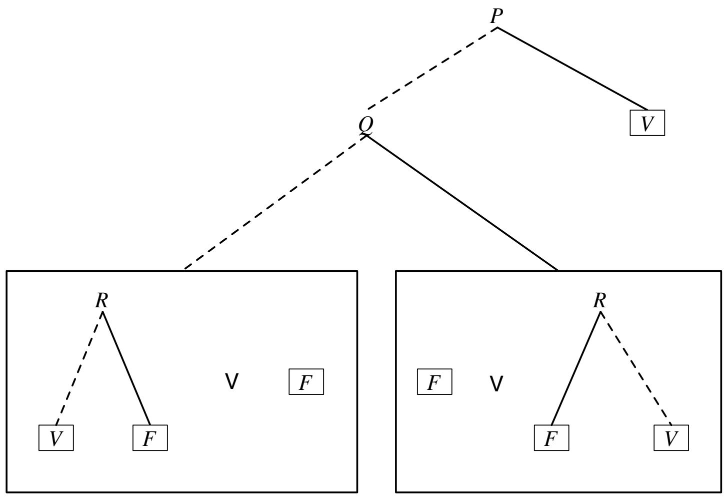
11. **(2.0)** Considere os seguintes OBDDs:

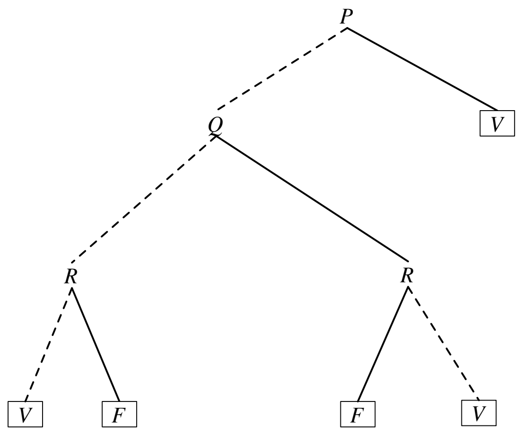


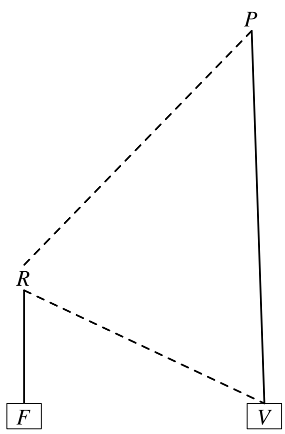
Utilizando o algoritmo *aplica*, calcule o OBDD que resulta da disjunção das *fbfs* que correspondem a estes OBDDS. Mostre os passos utilizados.

Resposta:




P
Q
V
R
V
F
∨
F
F
∨
R
F
V


P
Q
V
R
R
V
F
F
V


P
R
F
V