Lógica para Programação

Solução da Repescagem do Primeiro Teste

27 de Junho de 2013

11:30–13:00

1. **(2.0)** Para cada uma das seguintes questões, indique se é verdadeira ou falsa. Cada resposta certa vale 0.5 valores e *cada resposta errada desconta 0.2 valores*.

   (a) A regra de inferência derivada conhecida por *modus tollens* afirma que numa prova que contém $\neg\alpha$ e $\alpha \rightarrow \beta$ se pode derivar $\neg\beta$.
   Resposta:
   Falsa

   (b) Uma fórmula na forma clausal corresponde a uma disjunção de conjunções de literais.
   Resposta:
   Falsa

   (c) Num BDD não ordenado podem existir caminhos com ordenações incompatíveis.
   Resposta:
   Verdadeira

   (d) As ordenações para OBDDs $[P, Q, S]$ e $[R, P, S, T, Q]$ são compatíveis.
   Resposta:
   Falsa

2. Considere a linguagem da lógica proposicional e a semântica da lógica proposicional como definidas nas aulas. Suponha que o sistema dedutivo desta lógica utilizava a abordagem da dedução natural e apenas continha duas regras de inferência, a regra da premissa e a seguinte regra de inferência (*Liberalização*, abreviada por "Lib"): em qualquer ponto de uma prova, podemos introduzir qualquer *fbf* por liberalização. Diga, justificando, se esta lógica é:

   (a) **(0.5)** Correcta.
   Resposta:
   A lógica não é correcta pois qualquer argumento é demonstrável. Considermos o argumento inválido $(\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\}, \neg\beta)$. A seguinte prova corresponde a uma demonstração deste argumento:

1	α	Prem
2	$\alpha \rightarrow \beta$	Prem
3	$\neg\beta$	Lib

   (b) **(0.5)** Completa.
   Resposta:
   A lógica é completa pois como qualquer argumento é demonstrável, todos os argumentos válidos também são demonstráveis.

3. Considere as frases que podem ser construídas a partir de *Todos os X são Y*, tendo em conta que X, Y $\in$ {animais, mamíferos, cães, cachorros}. Com base nas frases assim definidas (ex: *Todos os cachorros são mamíferos*), defina um argumento:

   (a) **(0.5)** Válido, com premissas e conclusão falsas. Justifique a sua resposta.

   Resposta:

   ({*Todos os animais são mamíferos*, *Todos os mamíferos são cães*}, *Todos os animais são cães*) é um argumento válido (é impossível ter as premissas verdadeiras e a conclusão falsa), apesar das premissas e da conclusão em si serem falsas.

   (b) **(0.5)** Inválido, com premissas e conclusão verdadeiras. Justifique a sua resposta.

   Resposta:

   ({*Todos os cachorros são cães*, *Todos os cães são mamíferos*}, *Todos os cachorros são animais*) é um argumento inválido (é possível ter as premissas verdadeiras e a conclusão falsa), apesar das premissas e da conclusão em si serem verdadeiras.

4. **(1.5)** Prove o seguinte teorema usando o sistema de dedução natural da lógica proposicional. Deve usar apenas as regras de inferência básicas (Prem, Rep, Hip, Rei, I$\wedge$, E$\wedge$, I$\rightarrow$, E$\rightarrow$, I$\neg$, E$\neg$, I$\vee$, E$\vee$) e a regra de I$\leftrightarrow$:

$$\neg\neg P \leftrightarrow P$$

Resposta:

1	$\quad\mid\ \neg\neg P$	Hip
2	$\quad\mid\ P$	E$\neg$, 1
3	$\neg\neg P \rightarrow P$	I$\rightarrow$, (1, 2)
4	$\quad\mid\ P$	Hip
5	$\quad\mid\quad\mid\ \neg P$	Hip
6	$\quad\mid\quad\mid\ P$	Rei, 4
7	$\quad\mid\quad\mid\ \neg P$	Rep, 5
8	$\quad\mid\ \neg\neg P$	I$\neg$, (5, (6, 7))
9	$P \rightarrow \neg\neg P$	I$\rightarrow$, (4, 8)
10	$\neg\neg P \leftrightarrow P$	I$\leftrightarrow$, (3, 9)

5. **(1.5)** Prove o seguinte teorema usando o sistema de dedução natural da lógica proposicional. Deve usar apenas as regras de inferência básicas (Prem, Rep, Hip, Rei, I$\wedge$, E$\wedge$, I$\rightarrow$, E$\rightarrow$, I$\neg$, E$\neg$, I$\vee$, E$\vee$):

$$\neg(P \vee Q) \rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$$

Resposta:

1	$\neg(P \vee Q)$	Hip
2	$\quad P$	Hip
3	$\quad P \vee Q$	I$\vee$, 2
4	$\quad \neg(P \vee Q)$	Rei, 1
5	$\neg P$	I$\neg$, (2, (3, 4))
6	$\quad Q$	Hip
7	$\quad P \vee Q$	I$\vee$, 6
8	$\quad \neg(P \vee Q)$	Rei, 1
9	$\neg Q$	I$\neg$, (6, (7, 8))
10	$\neg P \wedge \neg Q$	I$\wedge$, (5, 9)
11	$\neg(P \vee Q) \rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$	I$\rightarrow$, (1, 10)

6. (a) **(0.5)** Diga o que é uma regra de inferência derivada.

   Resposta:

   Uma é qualquer padrão de raciocínio correspondente à aplicação de várias regras de inferência. Uma regra de inferência derivada corresponde a uma abstracção através da qual podemos agrupar a aplicação de várias regras de inferência num único passo.

   (b) **(1.5)** Considere a regra de inferência derivada *modus tollens*. Enuncie-a e justifique-a através de uma prova.

   Resposta:

   A regra de *modus tollens* é uma regra de inferência derivada, formalizada dizendo que numa prova que contém tanto $\neg\beta$ como $\alpha \rightarrow \beta$, podemos derivar $\neg\alpha$.

n	$\neg\beta$	
$\vdots$	$\vdots$	
m	$\alpha \rightarrow \beta$	
$\vdots$	$\vdots$	
k	$\neg\alpha$	MT, (n, m)

   Prova que justifica a regra de *modus tollens*:

1	$\neg Q$	Prem
2	$P \rightarrow Q$	Prem
3	$\quad P$	Hip
4	$\quad P \rightarrow Q$	Rei, 2
5	$\quad Q$	E$\rightarrow$, (3, 4)
6	$\quad \neg Q$	Rei, 1
7	$\neg P$	I$\neg$, (3, (5, 6))

7. Considere as fórmulas α e β, ambas satisfazíveis.

   (a) O que pode dizer quando à satisfazibilidade das fórmulas abaixo? Justifique as suas respostas.

i. **(0.5)** $\alpha \wedge \beta$
Resposta:
Esta fórmula pode ser satisfazível ou não. Por exemplo, se $\alpha = P = \beta$ será satisfazível; se $\alpha = P$ e $\beta = \neg P$, será contraditória (logo não satisfazível).

ii. **(0.5)** $\alpha \vee \beta$
Resposta:
Esta fórmula é sempre satisfazível, pois se α (ou β) o é, haverá pelo menos uma interpretação que a torna verdadeira.

iii. **(0.5)** $\beta \vee \neg\beta$
Resposta:
Esta fórmula também é satisfazível (é uma tautologia).

(b) **(1.0)** Será que $\neg\beta \wedge \beta$ é consequência lógica de $\Delta = \{\alpha, \alpha \vee \beta\}$? Justifique a sua resposta.
Resposta:
$\neg\beta \wedge \beta$ é uma fórmula contraditória, pelo que é falso que todos os modelos de Δ (que existem pelas alíneas anteriores) sejam modelos desta fórmula (nenhum o é). Ou seja, para todos os modelos de Δ, $\neg\beta \wedge \beta$ toma o valor falso, logo não é consequência lógica de Δ.

8. **(1.0)** Seja Δ um conjunto de *fbfs* e α uma *fbf*. Suponha que $\Delta \models \alpha$. O que pode ser dito sobre o conjunto $\Delta \cup \{\neg\alpha\}$? Justifique a sua resposta.

   Resposta:

   Se $\Delta \models \alpha$ então todos os modelos que satisfazem Δ também satisfazem α. Daqui resulta que não existe nenhum modelo que satisfaça $\Delta \cup \{\neg\alpha\}$, pelo que este conjunto é insatisfazível.

9. **(1.5)** Transforme a seguinte *fbf* na forma clausal:

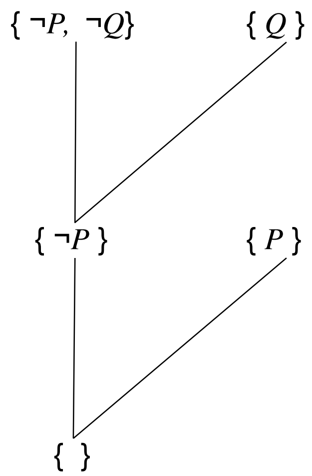
$$\neg(A \rightarrow \neg B) \vee (\neg C \wedge D)$$

   Resposta:

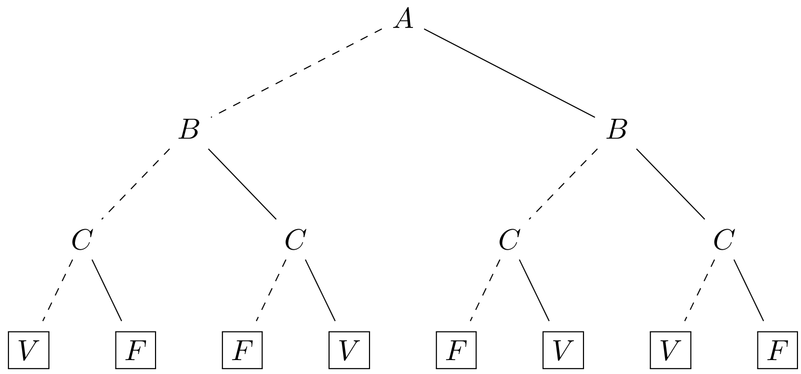
   - Eliminação de $\rightarrow$: $\neg(\neg A \vee \neg B) \vee (\neg C \wedge D)$
   - Redução do domínio de $\neg$: $(A \wedge B) \vee (\neg C \wedge D)$
   - Obtenção da forma conjuntiva normal:
     $(A \vee \neg C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee \neg C) \wedge (B \vee D)$
   - Eliminação de $\wedge$: $\{A \vee \neg C, A \vee D, B \vee \neg C, B \vee D\}$
   - Eliminação de $\vee$: $\{\{A, \neg C\}, \{A, D\}, \{B, \neg C\}, \{B, D\}\}$

10. **(1.5)** Considere o conjunto de cláusulas $\Delta = \{\{P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}, \{P\}\}$. Faça uma demonstração por refutação de $\neg Q$ a partir de Δ, usando a estratégia de resolução *linear*.

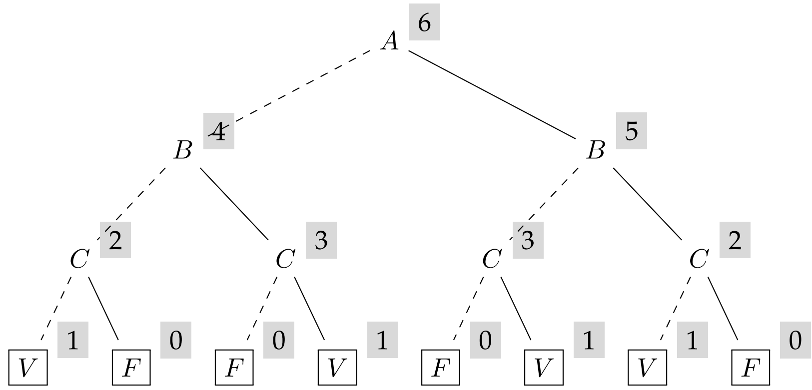
   Resposta:



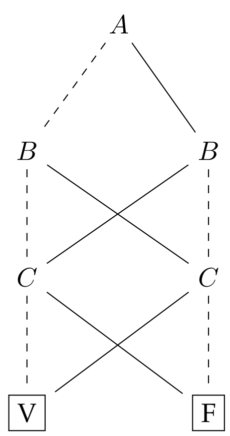
11. Considere a seguinte árvore binária que representa a fbf α:



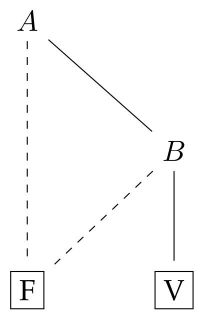
(a) **(0.5)** Indique na figura quais os rótulos de cada nó da árvore resultantes da aplicação do algoritmo *rotula*.
Resposta:



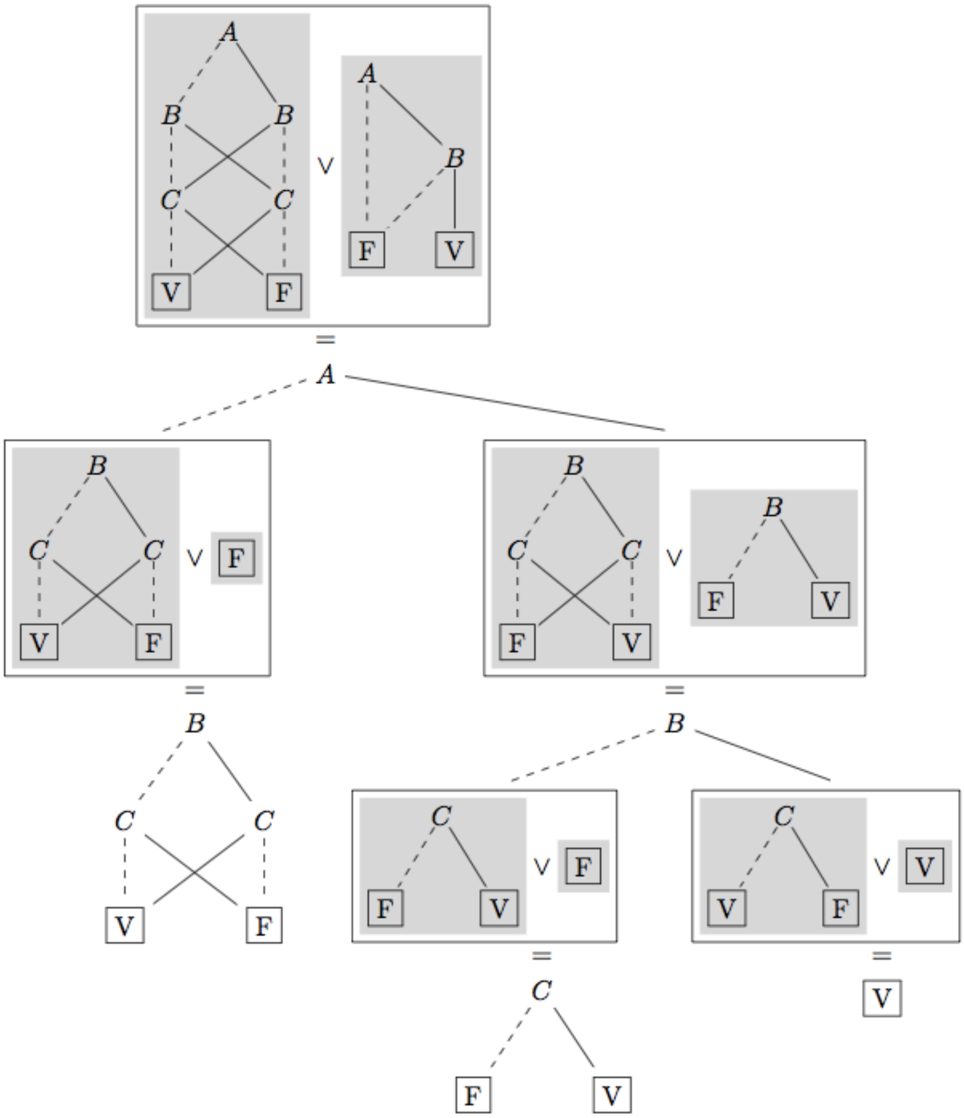
(b) **(0.5)** De acordo com os rótulos calculados na alínea anterior, apresente o OBDD resultante da aplicação do algoritmo *compacta*.
Resposta:



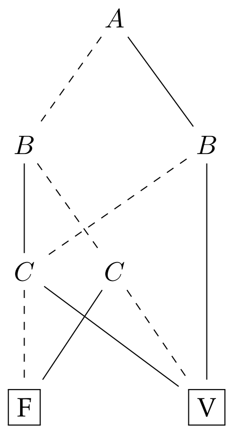
(c) **(1.5)** Considere agora o seguinte OBDD, correspondente à fbf β. Calcule, usando o algoritmo *aplica*, o OBDD correspondente à fbf $\alpha \vee \beta$. Indique os cálculos efectuados.



Resposta:

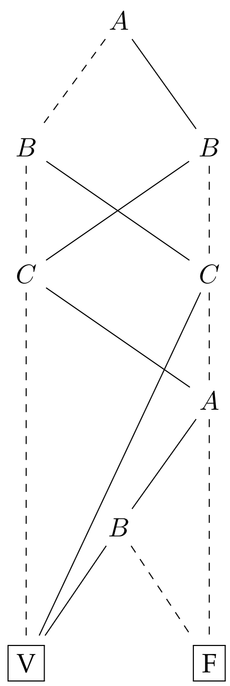


O OBDD final é obtido após a aplicação do algoritmo *reduz*:



(d) **(1.0)** Qual seria o resultado para $\alpha \vee \beta$ se tivesse considerado que α e β eram BDDs (e não OBDDs)?

Resposta:



(e) **(1.0)** Qual a desvantagem da abordagem anterior em comparação com o algoritmo *aplica*?

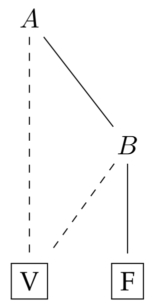
Resposta:

Com a abordagem anterior um mesmo símbolo pode ter mais do que uma ocorrência ao longo de um caminho. Por exemplo, os símbolos A e B ocorrem mais do que uma vez. Logo, apesar de α e β serem OBDDs, no final é obtido um BDD.

(f) **(0.5)** Sem fazer novos cálculos, indique qual seria o OBDD associado à fbf $\neg\beta$. Justifique a sua resposta.

Resposta:

Bastaria trocar os valores lógicos das folhas do OBDD β.


A
B
V
F