Análise e Síntese de Algoritmos

Programação Linear (cont.): Algoritmo Simplex, Dualidade

CLRS Cap. 29

Instituto Superior Técnico

2022/2023

Contexto

- Revisão [CLRS, Cap.1-13]
  - Fundamentos; notação; exemplos
- Técnicas de Síntese de Algoritmos [CLRS, Cap.15-16]
  - Programação dinâmica [CLRS, Cap.15]
  - Algoritmos greedy [CLRS, Cap.16]
- Algoritmos em Grafos [CLRS, Cap.21-26]
  - Algoritmos elementares
  - Caminhos mais curtos [CLRS, Cap.22,24-25]
  - Árvores abrangentes [CLRS, Cap.23]
  - Fluxos máximos [CLRS, Cap.26]
- Programação Linear [CLRS, Cap.29]
  - Algoritmos e modelação de problemas com restrições lineares
- Tópicos Adicionais
  - Emparelhamento de Cadeias de Caracteres [CLRS, Cap.32]
  - Complexidade Computacional [CLRS, Cap.34]

Resumo

Algoritmo Simplex

Resultados Formais

Dualidade

Algoritmos

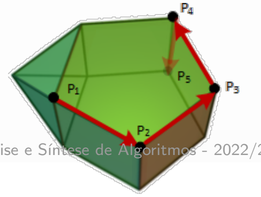
Algoritmos

- Algoritmo Simplex (Dantzig)
  - Exponencial no pior caso; eficiente na prática e muito utilizado
- Algoitmo da Elipsóide (Shor, Yudin, Nemirovsky)
  - Polinomial; ineficiente na prática
- Métodos de Ponto Interior (Karmarkar)
  - Polinomial

Algoritmo Simplex

Intuição

- Tal como no caso do método de eliminação de Gauss, o algoritmo apenas re-escreve o sistema de restrições (equações) numa forma que torna mais fácil a obtenção da solução
  - Não altera a estrutura do problema, apenas a sua representação
- Na realidade, esta re-escrita corresponde a "saltar" entre os vértices do Simplex; cada "salto" permite aumentar o valor da função objetivo
- A solução (básica) é obtida simplesmente atribuindo a todas as varíaveis não básicas o valor 0



Algoritmo Simplex

Operação Pivot: Operação central do algoritmo Simplex

- Escolher variável não básica x_e (entrada) para passar a básica
  - Escolher x_e que pode aumentar z o máximo possível
- Escolher variável básica x_l (saída) para passar a não básica
  - Escolher x_l que mais restringe o valor de x_e
- Calcular nova forma slack do problema
  - $N' = N \setminus \{x_e\} \cup \{x_l\}$
  - $B' = B \setminus \{x_l\} \cup \{x_e\}$
  - (N', B', A, b, c, v)

Algoritmo Simplex

Algoritmo Simplex

- Calcular forma slack inicial
  - Para a qual a solução básica inicial é exequível
  - Caso contrário reporta problema não exequível (*unfeasible*) e termina
- Enquanto existir $c_e > 0$ (i.e. valor de z pode aumentar)
  - x_e define variável de entrada (i.e. nova variável básica)
  - Seleccionar x_l
    - x_l corresponde a linha i que minimiza $\frac{b_i}{-a_{ie}}$ (valores > 0)
    - Se $\frac{b_i}{a_{ie}} < 0$ para todo o i, retornar "unbounded"
- Aplicar pivoting com (N, B, A, b, c, v, l, e)
- No final, retornar solução básica
  - $\overline{x}_i \leftarrow b_i$, se $i \in B$ (variáveis básicas - linhas matriz)
  - $\overline{x}_e \leftarrow 0$, se $e \in N$ (variáveis não-básicas - colunas da matriz)

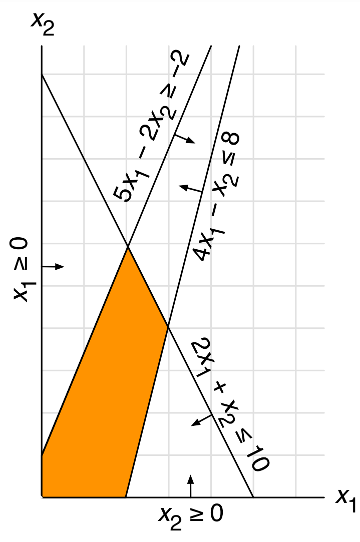
Algoritmo Simplex

Forma Standard

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{maximizar} & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{sujeito a} & & & & & \\
& 4x_1 & - & x_2 & \leq & 8 \\
& 2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\
& 5x_1 & - & 2x_2 & \geq & -2 \\
& & x_1, x_2 & & \geq & 0
\end{array}$$

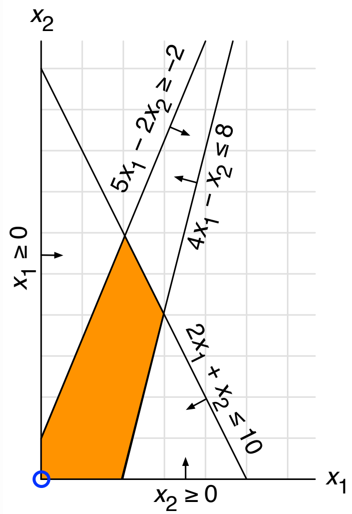
Forma Slack

$$\begin{array}{rclrcr}
z & = & & x_1 & + & x_2 \\
x_3 & = & 8 \; - & 4x_1 & + & x_2 \\
x_4 & = & 10 \; - & 2x_1 & - & x_2 \\
x_5 & = & 2 \; + & 5x_1 & - & 2x_2
\end{array}$$



$$
\begin{array}{rcl}
z & = & x_1 + x_2 \\
x_3 & = & 8 - 4x_1 + x_2 \\
x_4 & = & 10 - 2x_1 - x_2 \\
x_5 & = & 2 + 5x_1 - 2x_2
\end{array}
$$

solução básica: $x_1 = 0,\ x_2 = 0$

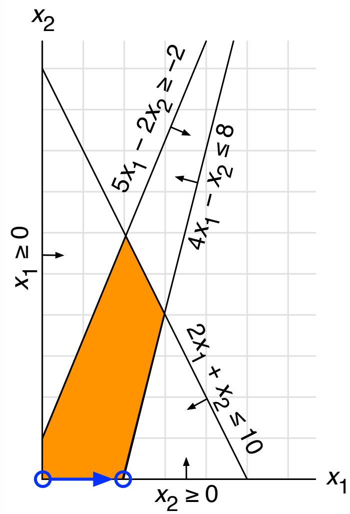


$$
\begin{array}{rcl}
z & = & x_1 + x_2 \\
x_3 & = & 8 - 4x_1 + x_2 \\
x_4 & = & 10 - 2x_1 - x_2 \\
x_5 & = & 2 + 5x_1 - 2x_2
\end{array}
$$

pivot entrada: x_1, saída: x_3

$$
\begin{array}{rcl}
z & = & 2 + \frac{5}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 \\
x_1 & = & 2 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \\
x_4 & = & 6 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\
x_5 & = & 12 - \frac{3}{4}x_2 - \frac{5}{4}x_3
\end{array}
$$

solução básica: $x_1 = 2,\ x_2 = 0$

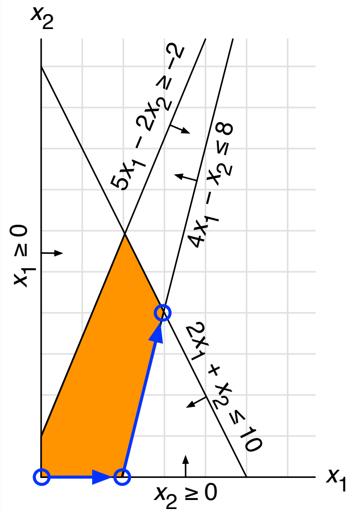


$$
\begin{array}{rcl}
z & = & 2 + \frac{5}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 \\
x_1 & = & 2 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \\
x_4 & = & 6 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\
x_5 & = & 12 - \frac{3}{4}x_2 - \frac{5}{4}x_3
\end{array}
$$

pivot entrada: x_2, saída: x_4

$$
\begin{array}{rcl}
z & = & 7 + \frac{1}{6}x_3 - \frac{5}{6}x_4 \\
x_1 & = & 3 - \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \\
x_2 & = & 4 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \\
x_5 & = & 9 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4
\end{array}
$$

solução básica: $x_1 = 3,\ x_2 = 4$

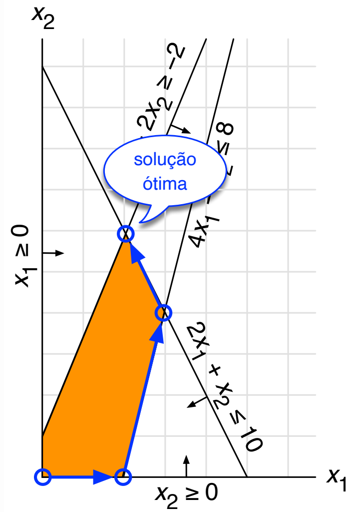


$$
\begin{array}{rcl}
z & = & 7 + \frac{1}{6}x_3 - \frac{5}{6}x_4 \\
x_1 & = & 3 - \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \\
x_2 & = & 4 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \\
x_5 & = & 9 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4
\end{array}
$$

pivot entrada: x_3, saída: x_5

$$
\begin{array}{rcl}
z & = & 8 - \frac{7}{9}x_4 - \frac{1}{9}x_5 \\
x_1 & = & 2 - \frac{2}{9}x_4 + \frac{1}{9}x_5 \\
x_2 & = & 6 - \frac{5}{9}x_4 + \frac{2}{9}x_5 \\
x_3 & = & 6 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5
\end{array}
$$

solução básica: $x_1 = 2,\ x_2 = 6$



Algoritmo Simplex

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
z & = & 8 & - & \frac{7}{9}x_4 & - & \frac{1}{9}x_5 \\
x_1 & = & 2 & - & \frac{2}{9}x_4 & + & \frac{1}{9}x_5 \\
x_2 & = & 6 & - & \frac{5}{9}x_4 & + & \frac{2}{9}x_5 \\
x_3 & = & 6 & + & \frac{1}{3}x_4 & - & \frac{2}{3}x_5
\end{array}
$$

Não há coeficientes positivos na função objectivo. Simplex termina.
Solução ótima: $x_1 = 2$, $x_2 = 6$. Valor função objectivo: 8.

$$
\begin{array}{llcrcr}
\text{maximizar} & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{sujeito a} & & & & & \\
& 4x_1 & - & x_2 & \leq & 8 \\
& 2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\
& 5x_1 & - & 2x_2 & \geq & -2 \\
& & x_1, x_2 & & \geq & 0
\end{array}
$$

Solução Exequível Inicial

Um programa linear pode ser exequível, mas solução básica inicial pode não ser exequível

Seja L um programa linear na forma standard, e seja L_{aux} definido da seguinte forma:

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximizar} & -x_0 & \\
\text{sujeito a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_0 \leq b_i & i = 1, 2, \ldots, m \\
& x_j \geq 0 & j = 0, 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

Então L é exequível sse o valor objectivo óptimo de L_{aux} é 0

- Se L tem solução, então L_{aux} tem solução com $x_0 = 0$, o valor óptimo
- Se o valor óptimo de x_0 é 0, então solução é solução para L

Solução Exequível Inicial

Se solução básica inicial for não exequível:

- A partir de L construir L_{aux}
- Determinar índice l com menor b_i
  - Aplicar operação pivot entre x_l e x_0
  - A solução básica calculada é exequível para L_{aux}
- Aplicar passos do Simplex para calcular solução óptima
  - Se solução óptima verifica $x_0 = 0$, retornar solução calculada, sem x_0
  - Caso contrário L não é exequível

Solução Exequível Inicial

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{maximizar} & 2x_1 & - & x_2 & & \\
\text{sujeito a} & & & & & \\
& 2x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\
& x_1 & - & 5x_2 & \leq & -4 \\
& & x_1, x_2 & & \geq & 0
\end{array}
$$

Solução básica inicial não é exequível.
Construção de Programa Linear Auxiliar.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{maximizar} & & & & - & x_0 & & \\
\text{sujeito a} & & & & & & & \\
& 2x_1 & - & x_2 & - & x_0 & \leq & 2 \\
& x_1 & - & 5x_2 & - & x_0 & \leq & -4 \\
& & & x_1, x_2, x_0 & & & \geq & 0
\end{array}
$$

Solução Exequível Inicial

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{maximizar} & & & -x_0 & & & & \\ \text{sujeito a} & & & & & & & \\ & 2x_1 & - & x_2 & - & x_0 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & 5x_2 & - & x_0 & \leq & -4 \\ & & & x_1, x_2, x_0 & & & \geq & 0 \end{array}$$

Forma slack do Programa Linear Auxiliar.

$$\begin{array}{rclrcrcrcr} z & = & & & & & & - & x_0 \\ x_3 & = & 2 & - & 2x_1 & + & x_2 & + & x_0 \\ x_4 & = & -4 & - & x_1 & + & 5x_2 & + & x_0 \end{array}$$

Solução Exequível Inicial

$$\begin{array}{rclrcrcrcr} z & = & & & & & & - & x_0 \\ x_3 & = & 2 & - & 2x_1 & + & x_2 & + & x_0 \\ x_4 & = & -4 & - & x_1 & + & 5x_2 & + & x_0 \end{array}$$

pivot entrada: x_0, saída: x_4.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} z & = & -4 & - & x_1 & + & 5x_2 & - & x_4 \\ x_3 & = & 6 & - & x_1 & - & 4x_2 & + & x_4 \\ x_0 & = & 4 & + & x_1 & - & 5x_2 & + & x_4 \end{array}$$

Solução básica inicial passou a ser exequível para o programa auxiliar.
Resolver programa auxiliar usando Simplex.

Algoritmo Simplex

Resultados Formais

Dado um programa linear (A, b, c):

- Se o algoritmo Simplex retorna uma solução, a solução é exequível
- Se o algoritmo Simplex retorna "unbounded", o programa é não limitado
- Dado um programa linear (A, b, c) na forma standard, e B um conjunto de variáveis básicas, a forma slack é única

Algoritmo Simplex

Resultados Formais

Variação do valor da função objectivo após pivoting:

- Valor da função objectivo não pode diminuir
  - Variável escolhida tem coeficiente positivo
  - Valor da variável é não negativo, pelo que novo valor da função de custo não pode diminuir
- Valor da função objectivo pode não aumentar
  - Degenerescência
  - Mas é sempre possível assegurar que algoritmo termina

Algoritmo Simplex

Resultados Formais

O Simplex está em ciclo se existem formas slack idênticas para duas iterações do algoritmo

- Se o algoritmo Simplex não termina após C_m^{n+m} iterações, então o algoritmo está em ciclo
  - Cada conjunto B determina unicamente a forma slack
  - Existem $n+m$ variáveis e $|B| = m$
  - Número de modos de escolher B: C_m^{n+m}
  - Número de formas slack distintas: C_m^{n+m}
  - Se algoritmo executar mais de C_m^{n+m} iterações, então está em ciclo
- Eliminar ciclos
  - Regra de Bland: desempates na escolha de variáveis através da escolha da variável com o menor índice

Teorema Fundamental PL

Teorema Fundamental da Programação Linear

Qualquer programa linear L na forma standard:

- Se L não é exequível, o algoritmo Simplex retorna "infeasible"
- Se L não é limitado, o algoritmo Simplex retorna "unbounded"
- Caso contrário, o algoritmo Simplex retorna uma solução óptima com um valor objectivo finito

Dualidade

Dualidade

- Conceito essencial em optimização
  - Normalmente associado com existência de algoritmos polinomiais
  - Permite provar que solução é óptima
  - e.g., fluxo máximo - corte mínimo
- A formulação original é conhecida como o programa primal
- Programa linear dual:

$$\begin{array}{lll} \text{minimizar} & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{sujeito a} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i \geq 0 & i = 1, 2, \ldots, m \end{array}$$

Dualidade

Primal

$$\begin{array}{lll} \text{maximizar} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{sujeito a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0 & j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{lll} \text{minimizar} & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{sujeito a} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i \geq 0 & i = 1, 2, \ldots, m \end{array}$$

Primal

$$
\begin{array}{lrrrcl}
\max & 6x_1 & +14x_2 & +13x_3 & & \\
 & \frac{1}{2}x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq & 24, \\
 & x_1 & +2x_2 & +4x_3 & \leq & 60, \\
 & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

Dual

$$
\begin{array}{lrrcl}
\min & 24y_1 & +60y_2 & & \\
 & \frac{1}{2}y_1 & +y_2 & \geq & 6, \\
 & 2y_1 & +2y_2 & \geq & 14, \\
 & 1y_1 & +4y_2 & \geq & 13, \\
 & y_1, y_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

Primal

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximizar} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{sujeito a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, 2, \ldots, m \\
 & x_j \geq 0 & j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

Dual

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimizar} & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\
\text{sujeito a} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & j = 1, 2, \ldots, n \\
 & y_i \geq 0 & i = 1, 2, \ldots, m
\end{array}
$$

Dualidade Fraca em Programação Linear

Seja x uma qualquer solução exequível do programa primal e seja y uma qualquer solução exequível do programa dual. Nestas condições:

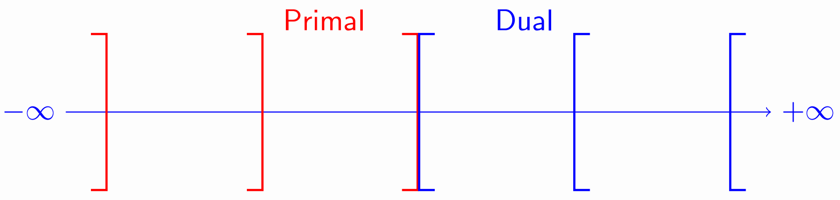
$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Prova

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} c_j x_j &\leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i
\end{aligned}
$$

(ver slide anterior)

Exemplo



Dualidade

Dualidade Forte em Programação Linear

Seja x uma qualquer solução pelo algoritmo Simplex, e sejam N e B os conjuntos de variáveis para a forma slack final.

Seja c' o vector dos coeficientes da forma slack final, tal que:

$c'_j \leq 0, \forall j \in N$ (Simplex terminou)
$c'_j = 0, \forall j \in B$ (variáveis básicas não estão na função objetivo)

Nestas condições:

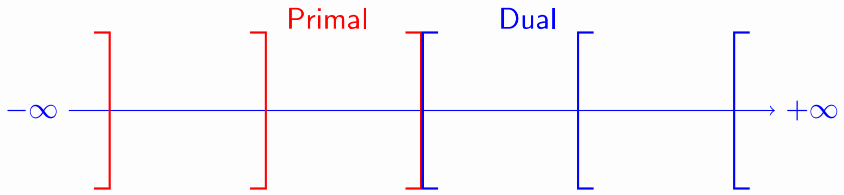
x é solução óptima para o programa primal

y é a solução óptima para o programa dual

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Dualidade

Exemplo



Se o primal é não limitado, o dual é não exequível

Se o dual é não limitado, o primal é não exequível