INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Licenciatura Engenharia Informática e de Computadores

Lógica para Programação

Solução do Primeiro Teste

5 de Maio de 2009

19:00–20:30

Nome: ______________________________ Número: __________

1. Uma das noções essenciais da lógica é o conceito de forma.

   (a) **(0.3)** Diga o que é a forma de um argumento.

   Resposta:

   A forma de um argumento é um argumento em que os termos específicos (ou seja, os termos não lógicos) de cada uma das proposições constituintes são substituídos por um símbolo associado à sua categoria gramatical.

   (b) **(0.3)** Enuncie o princípio da forma.

   Resposta:

   Se dois argumentos têm a mesma forma então estes são ambos válidos ou ambos inválidos.

   (c) **(0.4)** Explique a importância para a lógica das duas respostas anteriores.

   Resposta:

   Os dois aspectos anteriores permitem a avaliação de argumentos independentemente do domínio que os argumentos abordam. Sem esses aspectos não haveria um domínio de conhecimento chamado Lógica.

2. **(1.0)** Diga o que é uma lógica sólida.

   Resposta:

   Uma lógica é sólida se todos os argumentos demonstráveis no seu sistema dedutivo são válidos de acordo com a sua semântica.

3. **(1.0)** Enuncie o princípio da resolução para a lógica proposicional (utilizando a forma clausal).

   Resposta:

   Sejam Ψ e Φ duas cláusulas e α uma *fbf* atómica tal que $\alpha \in \Psi$ e $\neg\alpha \in \Phi$, então, podemos inferir a cláusula $(\Psi - \{\alpha\}) \cup (\Phi - \{\neg\alpha\})$.

4. Suponha que x e y são variáveis individuais, f é uma letra de função de zero argumentos, g é uma letra de função de dois argumentos e P é uma letra de predicado de dois argumentos. Diga, justificando, quais das sequintes expressões correspondem a termos:

   (a) **(0.25)** x

   Resposta:

   É um termo pois uma variável individual é um termo.

(b) **(0.25)** f

Resposta:

É um termo pois uma letra de função com zero argumentos (uma constante) é um termo.

(c) **(0.25)** $g(x, P(f, g(x, y)))$

Resposta:

Não é um termo pois $P(f, g(x, y))$ é uma *fbf* atómica e não pode ser utilizada para criar um termo.

(d) **(0.25)** $g(x, g(f, g(x, y)))$

Resposta:

É um termo pois x e y são termos; sendo g é uma letra de função de dois argumentos, podemos concluir que $g(x, y)$ é um termo; uma vez que f é um termo, $g(f, g(x, y))$ é um termo; pelo que a expressão é também um termo.

5. **(1.0)** Um dos paradoxos da implicação é traduzido pelo teorema $(P \wedge \neg P) \rightarrow Q$. Explique informalmente qual o significado deste teorema.

Resposta:

Este teorema afirma que uma contradição implica qualquer proposição.

6. Usando as regras de inferência do sistema de dedução natural, demonstre os seguintes teoremas:

   (a) **(1.5)** $((P \lor Q) \land (\neg Q \lor R)) \to (P \lor R)$
   Resposta:

1	$(P \lor Q) \land (\neg Q \lor R)$	Hyp
2	$P \lor Q$	$\land$E, 1
3	$\neg Q \lor R$	$\land$E, 1
4	$\neg Q$	Hyp
5	$P \lor Q$	Rei, 2
6	P	Hyp
7	$P \lor R$	$\lor$I, 6
8	Q	Hyp
9	$\neg(P \lor R)$	Hyp
10	Q	Rei, 8
11	$\neg Q$	Rei, 4
12	$\neg\neg(P \lor R)$	$\neg$I, (9, (10, 11))
13	$P \lor R$	$\neg$E, 12
14	$P \lor R$	$\lor$E, (5, (6, 7), (8, 13))
15	R	Hyp
16	$P \lor R$	$\lor$I, 15
17	$P \lor R$	$\lor$E, (3, (4, 14), (15, 16))
18	$((P \lor Q) \land (\neg Q \lor R)) \to (P \lor R)$	$\to$I, (1, 17)

   (b) **(1.5)** $\forall x(P(x) \land Q(x)) \to \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$
   Resposta:

1	$\forall x(P(x) \land Q(x))$	Hyp
2	x_0 $P(x_0) \land Q(x_0)$	$\forall$E, 1
3	$P(x_0)$	$\land$E, 2
4	$\forall x P(x)$	$\forall$I, (2, 3)
5	x_0 $P(x_0) \land Q(x_0)$	$\forall$E, 1
6	$Q(x_0)$	$\land$E, 5
7	$\forall x Q(x)$	$\forall$I, (5, 6)
8	$\forall x P(x) \land \forall x Q(x)$	$\land$I, (4, 7)
9	$\forall x(P(x) \land Q(x)) \to \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$	$\to$I, (1, 8)

7. **(1.0)** Considere o conjunto de cláusulas $\Delta = \{\{P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}, \{P\}\}$. Faça uma demonstração por refutação de $\neg Q$ a partir de Δ, usando a estratégia de resolução por *saturação de níveis*. Não utilize a representação gráfica.

   Resposta:

   $\Delta_0 = \{\{P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}, \{P\}, \{Q\}\}$

   $\Delta_1 = \{\{Q, \neg Q\}, \{P, \neg P\}, \{\neg Q\}, \{\neg P\}\}$

   $\Delta_2 = \{\ldots, \{\}, \ldots\}$

8. Considere um conjunto de cláusulas Δ, e um símbolo de proposição P_i, que é mencionado por todas as cláusulas de Δ. Suponha que não é possível gerar nenhum resolvente em P_i a partir das cláusulas de Δ.

   (a) **(1.0)** Justifique a afirmação "Δ é satisfazível."

   Resposta:

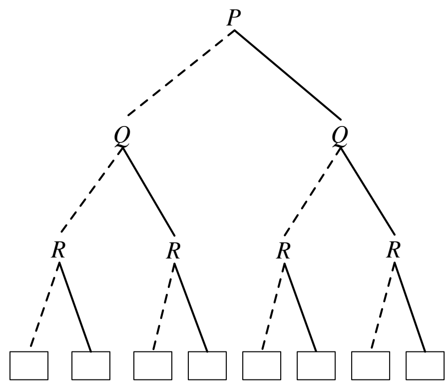
   Se todas as cláusulas mencionam P_i e não é possível gerar nenhum resolvente em P_i a partir das cláusulas de Δ, então todas as cláusulas contêm o literal P_i ou todas as cláusulas contêm o literal $\neg P_i$. Então, por eliminação de P_i em Δ obtemos o conjunto vazio de cláusulas. Este conjunto é satisfazível, e pelo teorema 2.3.4 este conjunto é satisfazível se e só se Δ é satisfazível. Logo, Δ é satisfazível.

   (b) **(1.0)** Diga como se pode determinar um modelo de Δ.

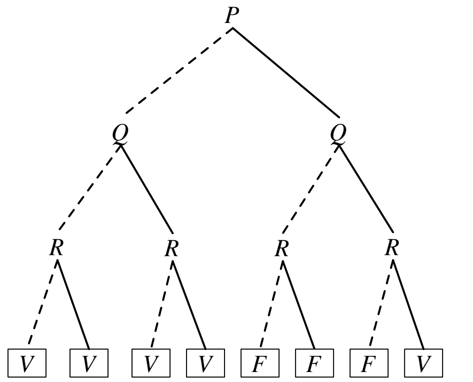
   Resposta:

   Se todas as cláusulas contiverem P_i, então qualquer interpretação que satisfaça P_i é um modelo de Δ. Se todas as cláusulas contiverem $\neg P_i$, então qualquer interpretação que não satisfaça P_i é um modelo de Δ.

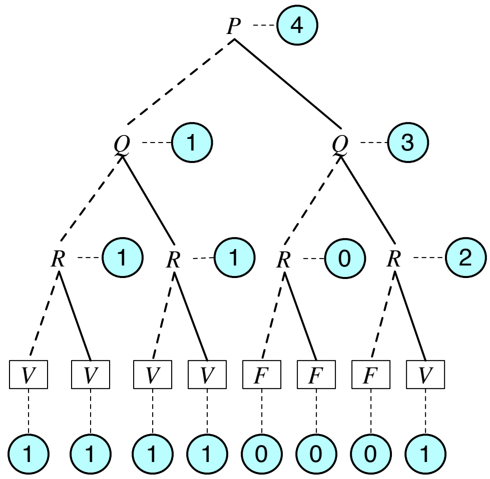
9. Considere a ordenação [P, Q, R] e a seguinte árvore binária, relativa à *fbf* $\alpha = P \rightarrow (Q \wedge (R \vee \neg Q))$.



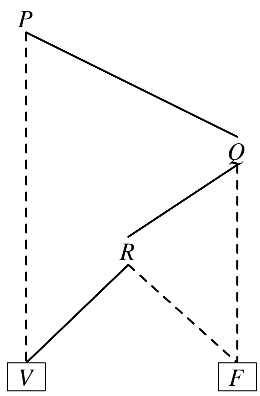
(a) **(0.5)** Tendo em conta que a árvore binária anterior representa a *fbf* α, indique na própria figura quais os valores das suas folhas.
Resposta:



(b) **(0.5)** Indique na figura quais os rótulos de cada nó da árvore resultantes da aplicação do algoritmo *rotula*.
Resposta:



(c) **(0.5)** De acordo com os rótulos calculados na alínea (b), apresente o OBDD resultante da aplicação do algoritmo *compacta*.
Resposta:



(d) **(0.5)** Com base no OBDD obtido na alínea (c), indique quais os modelos da fórmula α. Justifique a sua resposta.

Resposta:

$I(P) = F$ e quaisquer valores para Q e R.

$I(P) = V$, $I(Q) = V$ e $I(R) = V$

(e) **(0.5)** Será que o OBDD obtido na alínea (c) é uma tautologia? Justifique a sua resposta.

Resposta:

Não é uma tautologia pois o OBDD não é $\boxed{V}$.

(f) **(0.5)** Sem fazer cálculos, mas justificando a sua resposta, apresente o OBDD resultante das seguintes utilizações do algoritmo *aplica*:

i. *aplica*($\wedge$, $OBDD_\alpha$, $OBDD_{P \vee \neg P}$).

Resposta:

aplica($\wedge$, $OBDD_\alpha$, $OBDD_{P \vee \neg P}$) $= OBDD_\alpha$. Note-se que $P \vee \neg P$ é *verdadeiro* pelo que o resultado da conjunção é o valor do outro elemento.

ii. *aplica*($\wedge$, $OBDD_\alpha$, $OBDD_{P \wedge \neg P}$).

Resposta:

aplica($\wedge$, $OBDD_\alpha$, $OBDD_{P \wedge \neg P}$) $= \boxed{F}$. Note-se que $P \wedge \neg P$ é *falso* pelo que conjunção é *falsa*.

10. **(1.0)** Represente as seguintes frases em Lógica de Primeira Ordem, considerando que "Melaua" é uma constante correspondente a uma casa em particular. A sua representação deve ser consistente para todas as frases. Todas as alíneas têm igual cotação.

(a) A Melaua é uma casa grande.

(b) Se a Melaua for verde ou azul então é colorida.

(c) Existe (pelo menos) uma casa que não é grande.

(d) As casas grandes têm (pelo menos) uma porta e uma janela.

Resposta:

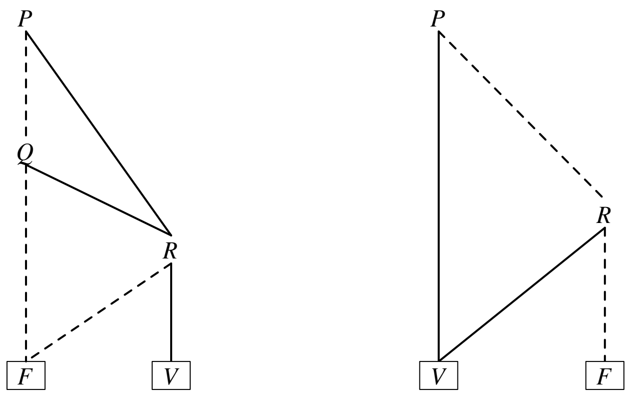
(a) $Casa(Melaua) \wedge Grande(Melaua)$

(b) $(Azul(Melaua) \vee Verde(Melaua)) \rightarrow Colorida(Melaua)$

(c) $\exists x[Casa(x) \wedge \neg Grande(x)]$

(d) $\forall x[(Casa(x) \wedge Grande(x)) \rightarrow \exists y, z[Porta(y) \wedge Janela(z) \wedge Tem(x, y) \wedge Tem(x, z)]]$

11. Considere os OBDDs β e γ, com as seguintes formas canónicas (respectivamente):



(a) *(b)*

(a) **(0.5)** Sem fazer cálculos, indique qual a forma canónica do OBDD associado à *fbf* $\neg\beta$. Justifique a sua resposta.

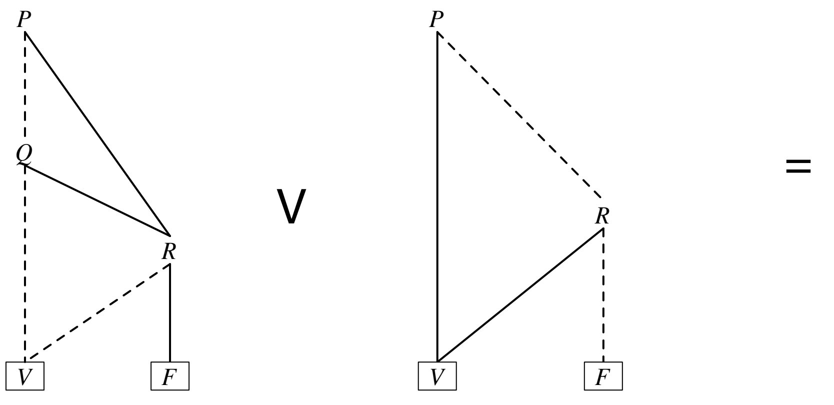
Resposta:

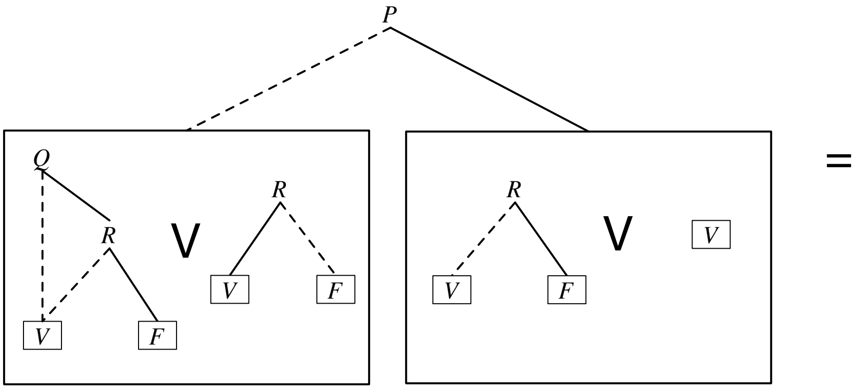
A forma canónica do OBDD correspondente à *fbf* $\neg\beta$ obtém-se trocando $\boxed{V}$ com $\boxed{F}$ no OBDD correspondente à *fbf* β.

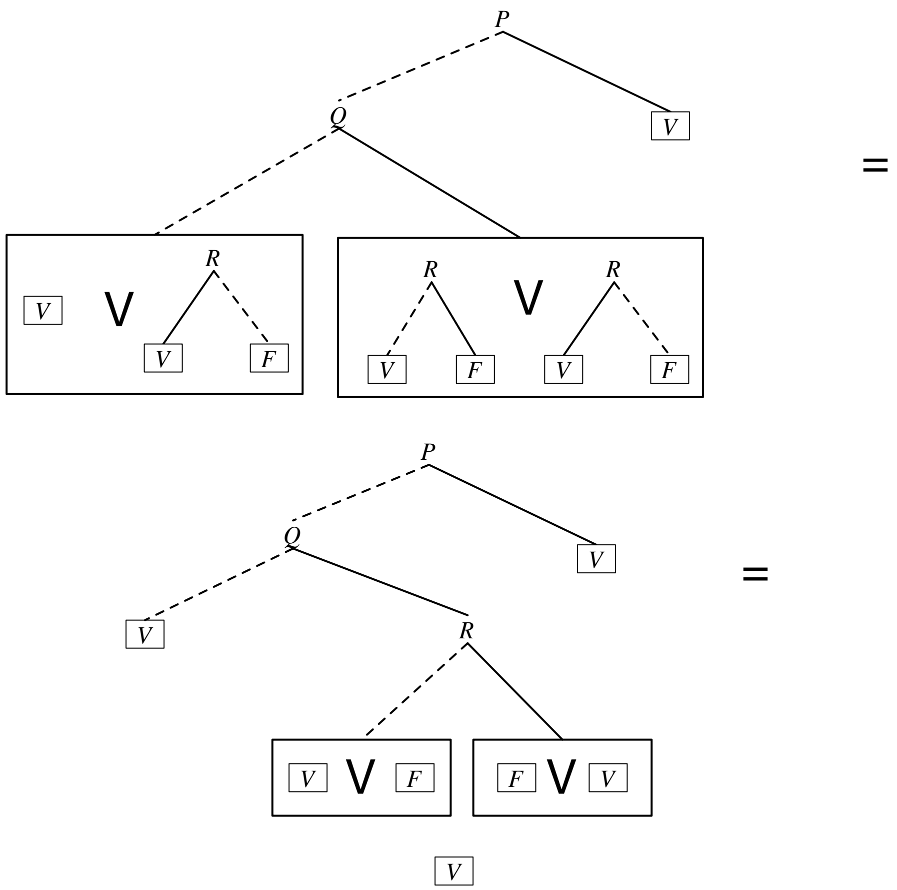
(b) **(1.5)** Através da aplicação do algoritmo *aplica*, calcule o OBDD reduzido correspondente à *fbf* $\beta \rightarrow \gamma$.

Resposta:

Tendo em atenção que $\beta \rightarrow \gamma$ é equivalente a $\neg\beta \vee \gamma$, o OBDD resultante é originado do seguinte modo:







12. Considere a *fbf* $\neg(A \rightarrow (B \vee C)) \wedge ((B \vee C) \vee D)$.

(a) **(0.5)** Transforme esta *fbf* de modo a que possa ser criado um DAG.

Resposta:

$\neg(A \rightarrow (B \vee C)) \wedge ((B \vee C) \vee D)$

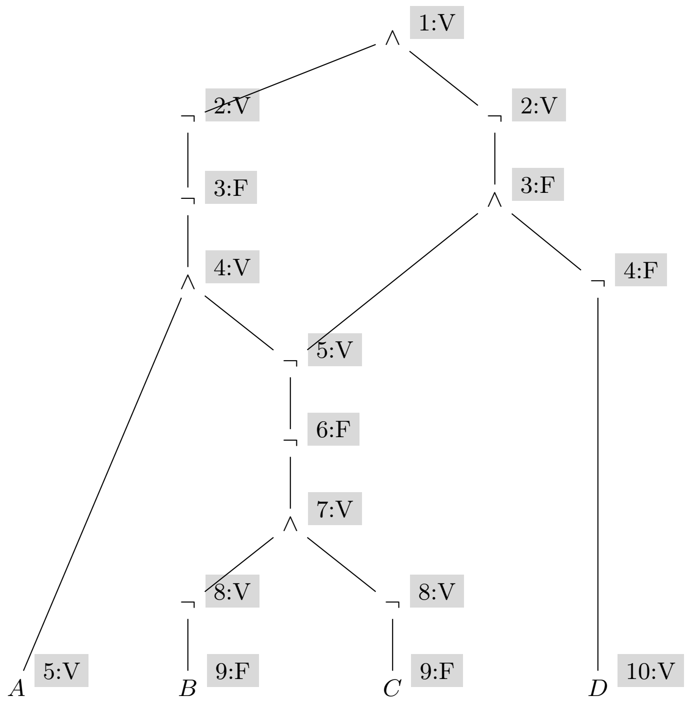
$\neg\neg(A \wedge \neg(B \vee C)) \wedge \neg(\neg(B \vee C) \wedge \neg D)$

$\neg\neg(A \wedge \neg\neg(\neg B \wedge \neg C)) \wedge \neg(\neg\neg(\neg B \wedge \neg C) \wedge \neg D)$

$(A \wedge (\neg B \wedge \neg C)) \wedge \neg((\neg B \wedge \neg C) \wedge \neg D)$

(b) **(1.0)** Crie o DAG para a *fbf* obtida na alínea anterior e usando o algoritmo de propagação de marcas, diga se a *fbf* é satisfazível e, se o for, apresente uma testemunha da sua satisfazibilidade.

Resposta:



Esta *fbf* é satisfazível e uma testemunha é $A = V$, $B = F$, $C = F$ e $D = V$.

13. **(1.5)** Considere o seguinte conjunto de cláusulas:

$$\{\{\neg D, B\}, \{\neg C, A\}, \{\neg A, D, C\}, \{\neg C, E\}, \{\neg E\}\}.$$

Aplique o algoritmo DP eliminando as variáveis usando a ordem C, E, D, A, B. Caso a fórmula seja satisfazível, indique uma testemunha.

Resposta:

Baldes iniciais:

b_C :	$\{\neg C, A\}, \{\neg A, D, C\}, \{\neg C, E\}$
b_E :	$\{\neg E\}$
b_D :	$\{\neg D, B\}$
b_A :	
b_B :	

Baldes após aplicação do algoritmo:

b_C :	$\{\neg C, A\}, \{\neg A, D, C\}, \{\neg C, E\}$		
b_E :	$\{\neg E\}$	$\{\neg A, D, E\}$	
b_D :	$\{\neg D, B\}$		$\{\neg A, D\}$
b_A :			$\{B, \neg A\}$
b_B :			

A primeira e a segunda cláusulas do balde de b_A dariam origem ao resolvente $\{A, \neg A, D\}$, que não foi adicionado a nenhum balde porque corresponde a uma tautologia.

Testemunha:

$B = V$ (opção)

$A = F$ (opção)

$D = F$ (opção)

$E = F$ (necessariamente por causa de $\{\neg E\}$)

$C = F$ (necessariamente por causa de $\{\neg C, A\}$ e $A = F$)