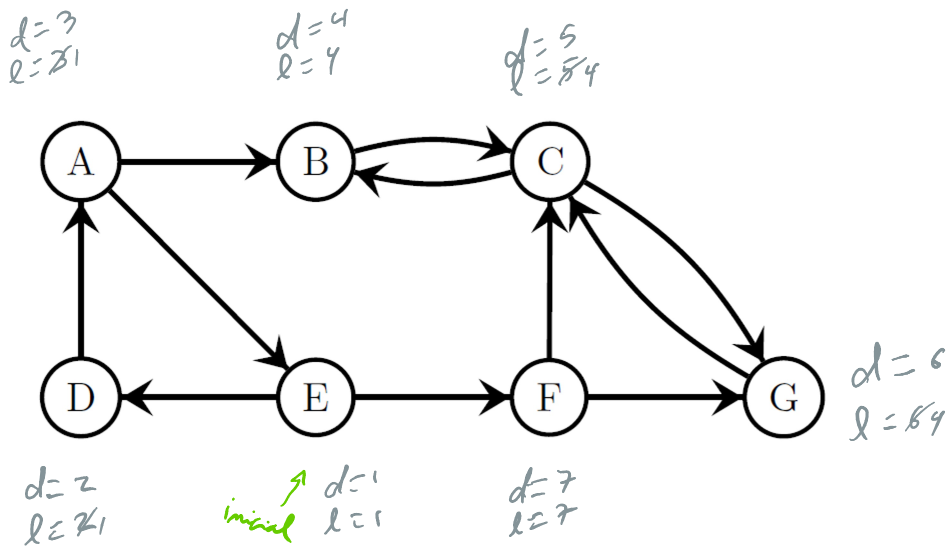
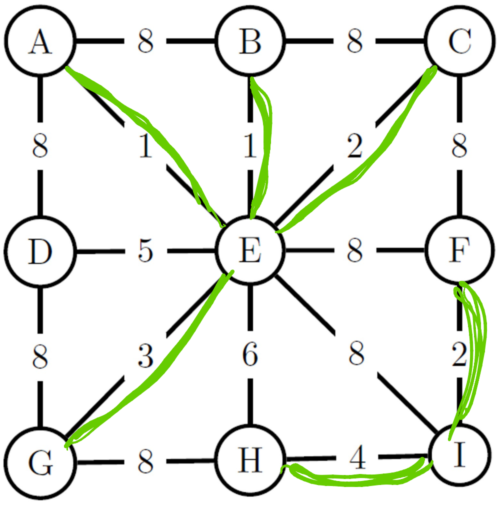
I.a)



SCCs: {G, C, B}, {D, E, A}, {F}

	A	B	C	D	E	F	G
low	1	4	4	1	1	7	4

I.b)



Lista de arcos ordenada por ordem não-decrescente

(A, E), (B, E), (C, E), (F, I), (G, E), (H, I), ...
1 1 2 2 3 4

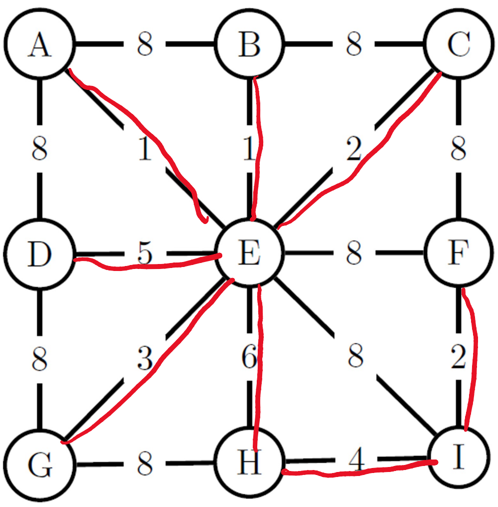
Processando arcos até peso 4:

Σ Pesos: 13

Conjuntos disjuntos:

{A, B, C, E, G}, {F, H, I}, {D}

Uma MST teria de processar todos os arcos

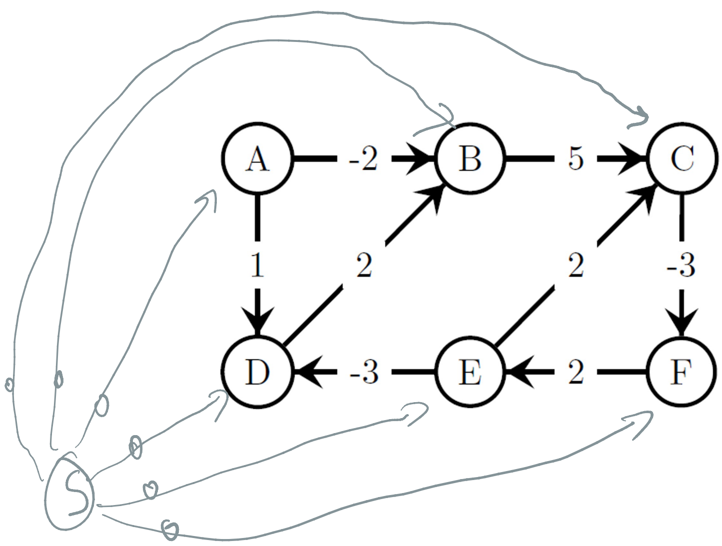


Custo da MST:

$1+1+2+2+3+4+5+6$

$= 24$

I.c)



Bellman-Ford

$h(A) = \delta(s, A) = 0$

$h(B) = \delta(s, B) = -2$

$h(C) = \delta(s, C) = 0$

$h(D) = \delta(s, D) = -4$

$h(E) = \delta(s, E) = -1$

$h(F) = \delta(s, F) = -3$

$$w'(u,v) = w(u,v) + h(u) - h(v)$$

$w'(A,B) = w(A,B) + h(A) - h(B) = -2 + 0 - (-2) = 0$

$w'(A,D) = w(A,D) + h(A) - h(D) = 1 + 0 - (-4) = 5$

$w'(B,C) = w(B,C) + h(B) - h(C) = 5 + (-2) - 0 = 3$

$w'(C,F) = w(C,F) + h(C) - h(F) = -3 + 0 - (-3) = 0$

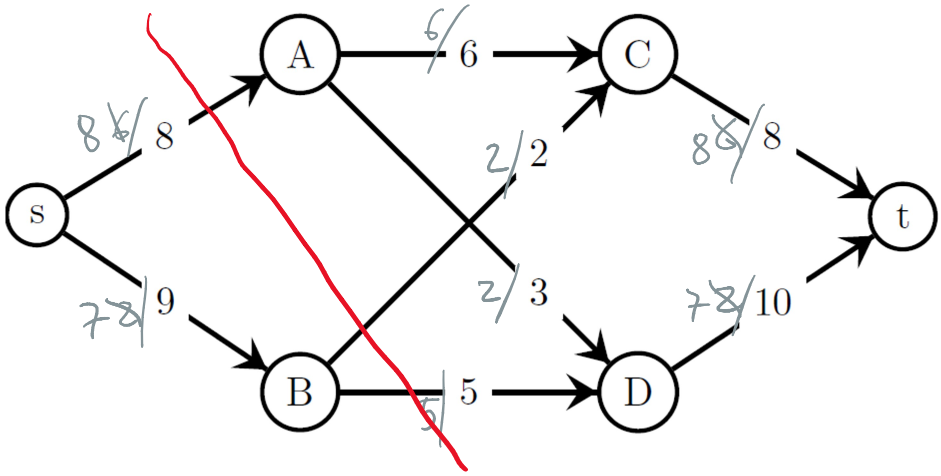
$w'(D,B) = w(D,B) + h(D) - h(B) = 2 + (-4) - (-2) = 0$

$w'(E,C) = w(E,C) + h(E) - h(C) = 2 + (-1) - 0 = 1$

$w'(E,D) = w(E,D) + h(E) - h(D) = -3 + (-1) - (-4) = 0$

$w'(F,E) = w(F,E) + h(F) - h(E) = 2 + (-3) - (-1) = 0$

I.d)



Caminhos de aumento:

s - A - c - t (6)
s - A - D - t (2)
s - B - C - t (2)
s - B - D - t (5)

$f(S,T) = 15$

corte: $\{s, B\} \setminus \{A, C, D, t\}$

$f(s,A) = 8$
$f(s,B) = 7$
$f(A,C) = 6$
$f(A,D) = 2$
$f(B,C) = 2$
$f(B,D) = 5$
$f(C,t) = 8$
$f(D,t) = 7$

II.a)

1. Loop 1

$$\sum_{i=0}^{n-1} 1 = n \quad \in O(n)$$

Loop 2

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{i} 1 \right) = \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \in O(n^2)$$

2. Quando n é impar faz uma chamada de $f(n-1)$ caindo imediatamente no caso de n ser par, fazendo apenas mais uma vez os loops 1 & 2 $\in O(n^2)$

Quando n é par:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n^2)$$

$a=1$ $\quad d=2$

$b=2$

$\log_2 1 = 0 < d = 2$

Pelo Teorema Mestre, caso 3:

$T(n) \in O(n^d) = O(n^2)$

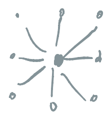
II.b)

Deve construir um grafo G a partir da matriz, onde:

- cada vértice é uma posição da matriz
- um arco entre vértices correspondentes a posições adjacentes da matriz

Executar uma DFS no grafo G, iniciando a operação DFS_Visit apenas nos vértices com pixel=1. Durante a construção de G, podem-se guardar os vértices com pixel=1 numa lista ligada.

horizontal, diagonal e vertical



Complexidade:

$|V| = n \times m \in O(n \times m)$

$|E| \leq n \times m \times 8 \in O(n \times m)$

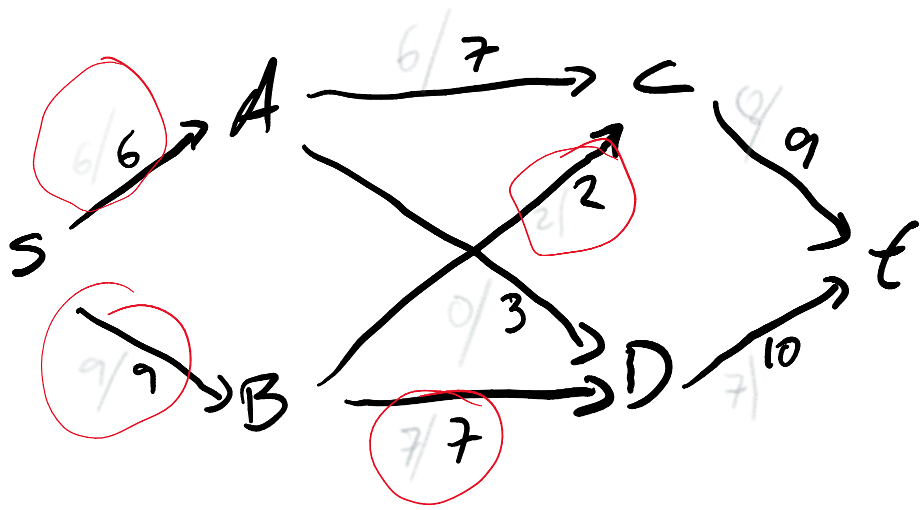
Construção de G: $n \times m \in O(n \times m)$

DFS: $O(V+E) \in O(n \times m)$

Complexidade Total: $O(n \times m)$

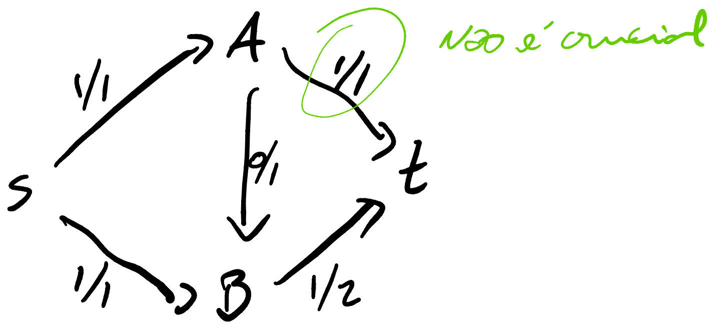
II.c)

1.



$\{(s,A), (s,B), (B,D), (B,C)\}$

2.



3. Dado um arco (u,v) e a rede residual G_{f^*}
(u,v) é crucial se:

- a capacidade $c(u,v) = 0$
- e se não for possível atingir o vértice t a partir de u em G_{f^*}, sem usar o arco (u,v)
- e se não for possível atingir o vértice v a partir de s em G_{f^*}, sem usar o arco (u,v)

Basta portanto efectuar duas DFS's em G_{f^*}:

- DFS a partir de u sem considerar (u,v) e verificar se é possível chegar a t
- DFS a partir de s sem considerar (u,v) e

- DFS a partir de s sem considerar (u,v) e verificar se é possível chegar a v

Complexidade: $O(V+E)$

II.d)

n estudantes $\{S_1, \dots, S_n\}$

m professores $\{P_1, \dots, P_m\}$

1. construímos uma rede de fluxo G, com:

$V = \{S_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ (1 vértice por aluno)

$\cup \{P_j \mid 1 \leq j \leq m\}$ (1 vértice por professor)

$\cup \{s, t\}$ (fonte e sink, respetivamente)

$E = \{(s, P_j, l_j) \mid 1 \leq j \leq m\}$ (P_j pode participar no máx l_j júris)

$\cup \{(P_j, S_i, 1)\}$ (P_j participa no júri de S_i)

$\cup \{(S_i, t, 3) \mid 1 \leq i \leq n\}$ (3 membros por júri)

Como é possível constituir todos os júris, o fluxo máximo f^* é $3 \times n$.

O júri do aluno S_i é constituído pelos professores P_j tal que:

$f^*(P_j, S_i) = 1$

2.

$|V| = n + m + 2 \quad \in O(n+m)$

$|E| = m + m \times n + n \quad \in O(n \times m)$

$|f^*| = 3 \times n \quad \in O(n)$

complexidade do:

$FF - O(|f^*| . E) \quad - O(n^2 \times m)$ ←

$EK - O(V . E^2) \quad - O((n+m)(n \times m)^2)$

$R2F - O(V^3) \quad - O((n+m)^3)$

$= O(n+m))$

Logo, o melhor solução consiste em considerar o método FF.