Ciências de Engenharia Informática e de Computadores

Lógica para Programação

Solução do Primeiro Teste

26 de Abril de 2008

11:00–12:30

Nome: ____________________ Número: __________

1. **(4.0)** Escolha a *única* resposta *incorrecta* para as seguintes questões. Cada resposta certa vale 1 valor e *cada resposta errada desconta 0.5 valores*.

   (a) Os seguintes argumentos são válidos:

   A. ({todos os alunos estudam, o João é um aluno}, o João estuda).

   B. ({quando está a chover o Pedro usa guarda-chuva, não está a chover}, o Pedro não está a usar guarda-chuva).

   C. ({todas as pessoas são inteligentes, quem é inteligente faz contas de cabeça}, todas as pessoas fazem contas de cabeça).

   D. ({quando faz sol a Maria anda na sombra, está sol}, a Maria está a andar na sombra).

   Resposta: B

   (b) As seguintes frases de Lógica Proposicional estão na forma conjuntiva normal:

   A. $P \wedge Q$

   B. $P \vee Q$

   C. $(\neg P \vee Q) \wedge R$

   D. $P \vee (Q \wedge \neg R)$

   Resposta: D

   (c) Em relação aos BDDs pode dizer-se que:

   A. Qualquer *fbf* em Lógica Proposicional pode ser representada por um BDD.

   B. As tautologias em Lógica Proposicional são representadas por um BDD que é constituído por uma única folha correspondente ao valor lógico verdadeiro.

   C. Um BDD é um grafo dirigido acíclico.

   D. Duas *fbfs* equivalentes são necessariamente representadas por BDDs com uma estrutura equivalente.

   Resposta: D

   (d) Considerando o sistema semântico da Lógica Proposicional:

   A. Uma fórmula satisfazível é uma fórmula tautológica.

   B. Uma fórmula contraditória é uma fórmula falsificável.

   C. Uma fórmula falsificável não é satisfeita por uma interpretação.

   D. Uma fórmula satisfazível é satisfeita por uma interpretação.

   Resposta: A

2. **(2.0)** Escolha a *única* resposta *correcta* para as seguintes questões. Cada resposta certa vale 1 valor e *cada resposta errada desconta 0.5 valores*.

   (a) Tendo em conta o processo de composição de substituições, é verdade que na substituição $s = s_1 \circ s_2$ que resulta da composição das substituições $s_1 = \{t_1/x_1, ..., t_n/x_n\}$ e $s_2 = \{u_1/y_1, ..., u_m/y_m\}$:

   A. Não existe nenhum elemento u_i/y_i tal que $y_i \in \{x_1, ..., x_n\}$.
   B. Encontram-se todos os u_i/y_i tais que $y_i \in \{x_1, ..., x_n\}$.
   C. Encontram-se os elementos resultantes da aplicação de s_1 aos termos de s_2.
   D. Encontram-se os elementos que verificam $(t_i \circ s_2)/x_i$ tais que $t_i \circ s_2 = x_i$.

   Resposta: A

   (b) Na conversão para a forma clausal de uma fórmula da Lógica de Primeira Ordem:

   A. A eliminação dos quantificadores existenciais depende dos quantificadores existenciais e universais dentro de cujo domínio se encontram.
   B. A eliminação dos quantificadores existenciais depende dos outros quantificadores existenciais dentro de cujo domínio se encontram.
   C. A eliminação dos quantificadores existenciais depende dos quantificadores universais dentro de cujo domínio se encontram.
   D. A eliminação dos quantificadores existencias não depende de outros quantificadores e é feita substituíndo as variáveis quantificadas existencialmente por constantes que nunca apareceram antes.

   Resposta: C

3. Forneça definições para os seguintes conceitos:

   (a) **(0.5)** Princípio da forma.
   Resposta:
   Se dois argumentos têm a mesma forma então estes são ambos válidos ou ambos inválidos.

   (b) **(0.5)** Cláusula unitária.
   Resposta:
   Uma claúsula que é constituída apenas por um literal.

   (c) **(0.5)** Fórmula satisfazível.
   Resposta:
   Uma fórmula diz-se *satisfazível* se e só se existe uma interpretação na qual a fórmula é verdadeira.

   (d) **(0.5)** Fórmula fechada.
   Resposta:
   Uma fórmula sem variáveis livres.

4. Usando as regras do sistema de dedução natural, demonstre os seguintes teoremas:

   (a) **(1.5)** $\neg(P \vee Q) \rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$
   Resposta:

1	$\neg(P \vee Q)$	Hyp
2	$\quad P$	Hyp
3	$\quad P \vee Q$	$\vee$I, 2
4	$\quad \neg(P \vee Q)$	Rei, 1
5	$\neg P$	$\neg$I, (2, (3, 4))
6	$\quad Q$	Hyp
7	$\quad P \vee Q$	$\vee$I, 6
8	$\quad \neg(P \vee Q)$	Rei, 1
9	$\neg Q$	$\neg$I, (6, (7, 8))
10	$\neg P \wedge \neg Q$	$\wedge$I, (5, 9)
11	$\neg(P \vee Q) \rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$	$\rightarrow$I, (1, 10)

   (b) **(1.5)** $\forall x[P(x) \vee \neg P(x)]$
   Resposta:

1	x_0	$\quad \neg(P(x_0) \vee \neg P(x_0))$	Hyp
2		$\quad\quad P(x_0)$	Hyp
3		$\quad\quad P(x_0) \vee \neg P(x_0)$	$\vee$I, 2
4		$\quad\quad \neg(P(x_0) \vee \neg P(x_0))$	Rei, 1
5		$\quad \neg P(x_0)$	$\neg$I, (2, (3, 4))
6		$\quad P(x_0) \vee \neg P(x_0)$	$\vee$I, 5
7		$\quad \neg(P(x_0) \vee \neg P(x_0))$	Rep, 1
8		$\neg\neg(P(x_0) \vee \neg P(x_0))$	$\neg$I, (1, (6, 7))
9		$P(x_0) \vee \neg P(x_0)$	$\neg$E, 8
10	$\forall x[P(x) \vee \neg P(x)]$		$\forall$I, (1, 9)

5. Transforme as seguintes fórmulas para a forma clausal. Indique todos os passos realizados.

   (a) **(1.0)** $A \rightarrow (\neg(\neg B \vee C) \vee (C \rightarrow D))$
   Resposta:

   i. Eliminação do símbolo $\rightarrow$:
   $\neg A \vee (\neg(\neg B \vee C) \vee (\neg C \vee D))$

   ii. Redução do domínio do símbolo $\neg$:
   $\neg A \vee ((\neg\neg B \wedge \neg C) \vee (\neg C \vee D))$
   $\neg A \vee ((B \wedge \neg C) \vee (\neg C \vee D))$

iii. Obtenção da forma conjuntiva normal:
$\neg A \vee ((B \vee (\neg C \vee D)) \wedge (\neg C \vee (\neg C \vee D)))$
$(\neg A \vee (B \vee (\neg C \vee D))) \wedge (\neg A \vee (\neg C \vee (\neg C \vee D)))$
$(\neg A \vee B \vee \neg C \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D)$

iv. Eliminação do símbolo $\wedge$:
$\{\neg A \vee B \vee \neg C \vee D, \neg A \vee \neg C \vee D\}$

v. Eliminação do símbolo $\vee$:
$\{\{\neg A, B, \neg C, D\}, \{\neg A, \neg C, D\}\}$

(b) **(1.0)** $\exists x[A(x)] \wedge \forall x[B(x) \rightarrow (\exists y[C(x,y)] \vee \exists y[D(y)])]$

Resposta:

i. Eliminação do símbolo $\rightarrow$:
$\exists x[A(x)] \wedge \forall x[\neg B(x) \vee (\exists y[C(x,y)] \vee \exists y[D(y)])]$

ii. Redução do domínio do símbolo $\neg$:
já está.

iii. Normalização de variáveis:
$\exists w[A(w)] \wedge \forall x[\neg B(x) \vee (\exists y[C(x,y)] \vee \exists z[D(z)])]$

iv. Eliminação do símbolo $\exists$:
$A(sk_1) \wedge \forall x[\neg B(x) \vee C(x, skf_1(x)) \vee D(skf_2(x))]$

v. Obtenção da forma "Prenex" normal:
$\forall x[A(sk_1) \wedge (\neg B(x) \vee C(x, skf_1(x)) \vee D(skf_2(x)))]$

vi. Eliminação do símbolo $\forall$:
$A(sk_1) \wedge (\neg B(x) \vee C(x, skf_1(x)) \vee D(skf_2(x)))$

vii. Obtenção da forma conjuntiva normal:
já está.

viii. Eliminação do símbolo $\wedge$:
$\{A(sk_1), \neg B(x) \vee C(x, skf_1(x)) \vee D(skf_2(x))\}$

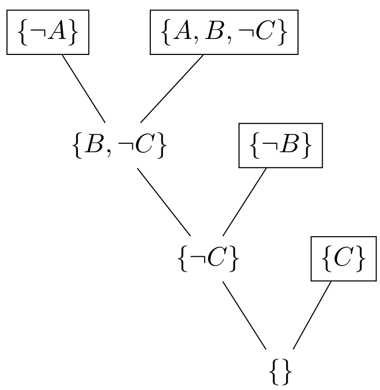
ix. Eliminação do símbolo $\vee$:
$\{\{A(sk_1)\}, \{\neg B(x), C(x, skf_1(x)), D(skf_2(x))\}\}$

6. **(1.0)** Usando uma estratégia de resolução linear, apresente uma prova por refutação para A a partir do seguinte conjunto de cláusulas:

$$\{\{A, B, \neg C\}, \{\neg D, A\}, \{\neg B\}, \{C\}\}.$$

Resposta:

Adicionamos a cláusula $\{\neg A\}$ ao conjunto de premissas.



7. (a) **(0.5)** Sendo Δ um conjunto de *fbfs* e α uma *fbf*, diga qual o significado de $\Delta \models \alpha$.

Resposta:

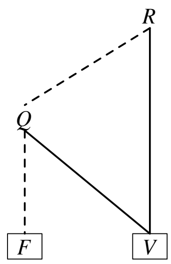
Todos os modelos de Δ são modelos de α.

(b) **(1.0)** Diga como pode usar o OBDD de uma *fbf* para determinar os modelos dessa *fbf*.

Resposta:

Os modelos podem ser extraídos dos caminhos que começam na raiz e terminam em folhas $\boxed{V}$. Se ao passar por uma letra de predicado P o caminho seguir pelo ramo a cheio, isso significa que nesse modelo o valor dessa letra de predicado é V; em caso contrário o valor é F. Se o caminho não passar por alguma letra de predicado, isso significa que o seu valor não é relevante, isto é, que existirá um modelo em que é V e outro em que é F.

(c) **(1.0)** Aplique a resposta da alínea b) ao seguinte OBDD:



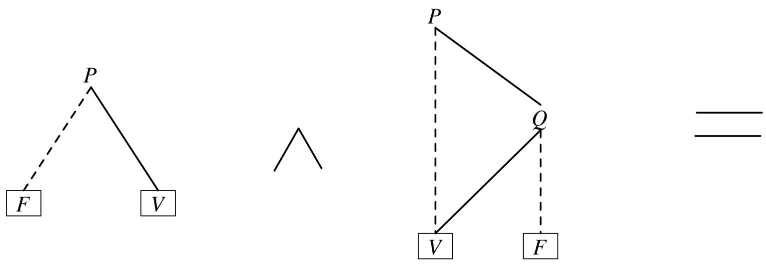
Resposta:

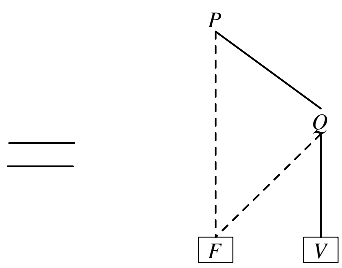
Os três modelos possíveis são caracterizados pelas seguintes interpretações:

R	Q
V	V
V	F
F	V

(d) **(1.5)** Usando OBDDs, mostre que $\{P, P \rightarrow Q\} \models Q$. SUGESTÃO: Utilizando o algoritmo $aplica$, construa o OBDD para a conjunção das premissas e veja o que pode concluir em relação à conclusão do argumento.

Resposta:





Atendendo às respostas às alíneas anteriores, todos os caminhos do OBDD da *fbf* $P \wedge (P \rightarrow Q)$ que terminem em $\boxed{V}$, depois de passar por qualquer nó de rótulo Q, terão de seguir pelo ramo a cheio.

8. Represente em lógica de primeira ordem cada uma das seguintes frases. Tenha o cuidado de explicitar o significado informal dos seus predicados.

   (a) **(0.5)** Existe um cão de quem todos os gatos gostam.
   (Todos os gatos gostam do mesmo cão.)
   Resposta:
   Significado informal dos predicados:
   - $C\tilde{a}o(x) = x$ é um cão
   - $Gato(x) = x$ é um gato
   - $Gosta(x, y) = x$ gosta de y

   $\exists x[C\tilde{a}o(x) \wedge \forall y[Gato(y) \rightarrow Gosta(y, x)]]$

   (b) **(0.5)** Todos os gatos gostam de algum cão.
   (Pode ser um cão diferente para cada gato.)
   Resposta:
   $\forall x[Gato(x) \rightarrow \exists y[C\tilde{a}o(y) \wedge Gosta(x, y)]]$

9. **(1.0)** Usando o algoritmo de unificação estudado nas aulas, calcule o unificador mais geral para o conjunto que se segue, indicando os conjuntos de desacordo calculados em cada etapa. NOTA: As variáveis são x, y, u, w, r.

$$\Delta = \{P(245, x, f(y)), P(u, a, w), P(245, r, f(b))\}.$$

Resposta:

Conjunto	Conjunto de desacordo	Substituição
$\{P(245, x, f(y)), P(u, a, w), P(245, r, f(b))\}$	$\{245, u\}$	$\{245/u\}$
$\{P(245, x, f(y)), P(245, a, w), P(245, r, f(b))\}$	$\{x, a, r\}$	$\{a/x\}$
$\{P(245, a, f(y)), P(u, a, w), P(245, r, f(b))\}$	$\{a, r\}$	$\{a/r\}$
$\{P(245, a, f(y)), P(u, a, w), P(245, a, f(b))\}$	$\{f(y), w, f(b)\}$	$\{f(y)/w\}$
$\{P(245, a, f(y)), P(245, a, f(b))\}$	$\{y, b\}$	$\{b/y\}$
$P(245, a, f(b))\}$		

O unificador mais geral é $\{245/u, a/x, a/r, f(b)/w, b/y\}$.