A resolução é um método para a automatização da geração de provas.

A resolução corresponde a uma abordagem segundo a qual o sistema dedutivo contém uma única regra de inferência, o *princípio da resolução*, para além da regra de premissa.

A utilização do princípio da resolução obriga à transformação das *fbfs* para uma forma especial, a *forma clausal*.

Definição 3.1.1 (Literal)

Um *literal* é uma *fbf* atómica ou a negação uma *fbf* atómica.
Um *literal positivo* é uma *fbf* atómica.
Um *literal negativo* é a negação de uma *fbf* atómica.

Definição 3.1.2 (Cláusula)

Uma *cláusula* é um literal ou uma disjunção de literais.

Definição 3.1.3 (Cláusula unitária)

Uma cláusula constituída apenas por um literal chama-se *cláusula unitária*.

Exemplos:

$\neg P$ e Q são literais, respetivamente, negativo e positivo.
P, $P \vee Q$ e $\neg P \vee Q$ são cláusulas.
P e $\neg P$ são cláusulas unitárias.

Definição 3.1.4 (Forma conjuntiva normal)

Uma *fbf* diz-se na *forma conjuntiva normal* se for da forma $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ em que cada um dos α_i $(1 \leq i \leq n)$ é uma cláusula.

Exemplo:
$(P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee S) \wedge (Q \vee R \vee S)$.

Representação através de conjuntos:
Uma cláusula é representada pelo conjunto dos seus literais.
Por exemplo, $P \vee \neg Q \vee \neg R$ é representada por $\{P, \neg Q, \neg R\}$.

Uma *fbf* na forma conjuntiva normal é representada pelo conjunto das suas cláusulas.
Por exemplo, $(P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee S) \wedge (Q \vee R \vee S)$ é representada por $\{\{P, \neg Q, \neg R\}, \{\neg P, S\}, \{Q, R, S\}\}$.

Definição 3.1.5 (Cláusula – versão 2)

Uma *cláusula* é um conjunto de literais.

Assim, usamos letras gregas maiúsculas para designar cláusulas.

Transformação de uma *fbf* na forma clausal:

1. Apenas utilizamos os símbolos $\neg$, $\vee$, $\wedge$ e $\rightarrow$.
2. A transformação é baseada em teoremas que correspondem a equivalências entre *fbfs*. Sendo α e β duas *fbfs*, a *fbf* $\alpha \leftrightarrow \beta$ permite-nos substituir a *fbf* α pela *fbf* β e vice-versa.

Passos para a transformação de uma *fbf* em forma clausal:

1. *Eliminação do símbolo* $\rightarrow$
   Baseia-se na seguinte equivalência: $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$.

2. *Redução do domínio do símbolo* $\neg$
   Baseia-se na seguintes equivalências:

   1. Lei da dupla negação

$$\neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$$

   2. Primeiras leis de De Morgan

$$\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$
$$\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$$

3. *Obtenção da forma conjuntiva normal*
Baseia-se na seguinte equivalência:

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$

4. *Eliminação do símbolo* $\wedge$
Este passo consiste em transformar a *fbf* num conjunto de cláusulas.

5. *Eliminação do símbolo* $\vee$
Este passo consiste na transformação de cada cláusula num conjunto de literais.

3. Lógica Proposicional (II)

Passagem de $P \rightarrow \neg(Q \vee ((R \wedge S) \rightarrow P))$ à forma clausal:

1. $\neg P \vee \neg(Q \vee ((R \wedge S) \rightarrow P))$
$\neg P \vee \neg(Q \vee (\neg(R \wedge S) \vee P))$

2. $\neg P \vee (\neg Q \wedge \neg(\neg(R \wedge S) \vee P))$
$\neg P \vee (\neg Q \wedge (\neg\neg(R \wedge S) \wedge \neg P))$
$\neg P \vee (\neg Q \wedge ((R \wedge S) \wedge \neg P))$

3. $(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee ((R \wedge S) \wedge \neg P))$
$(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee (R \wedge S)) \wedge (\neg P \vee \neg P)$
$(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee S) \wedge (\neg P \vee \neg P)$

4. $\{\neg P \vee \neg Q, \neg P \vee R, \neg P \vee S, \neg P \vee \neg P\}$

5. $\{\{\neg P, \neg Q\}, \{\neg P, R\}, \{\neg P, S\}, \{\neg P\}\}$

O princípio da resolução afirma que a partir de $\alpha \vee \beta$ e de $\neg\alpha \vee \gamma$ podemos concluir $\beta \vee \gamma$.

O princípio da resolução é uma *regra de inferência derivada* que é aplicável a cláusulas, gerando novas cláusulas.

Considerando a representação de cláusulas através de conjuntos:

Definição 3.1.6 (Princípio da resolução)

Sejam Ψ e Φ duas cláusulas e α uma *fbf* atómica tal que $\alpha \in \Psi$ e $\neg\alpha \in \Phi$; então, podemos inferir a cláusula $(\Psi - \{\alpha\}) \cup (\Phi - \{\neg\alpha\})$.

A cláusula obtida é chamada o *resolvente* das cláusulas Ψ e Φ, representado por $\mathit{Res}(\Psi, \Phi)$, as quais são designadas por *cláusulas mãe*.

Os literais α e $\neg\alpha$ designam-se por *literais em conflito* nas cláusulas Ψ e Φ.

Duas cláusulas podem ter mais do que um resolvente.

Neste caso, dizemos que $(\Psi - \{\alpha\}) \cup (\Phi - \{\neg\alpha\})$ é o *resolvente*-α das cláusulas Ψ e Φ, representado por $\mathit{Res}_\alpha(\Psi, \Phi)$.

Exemplo:

Consideremos as cláusulas $\{\neg P, Q, S\}$ e $\{P, \neg Q\}$.
O seu resolvente-P é $\{Q, S, \neg Q\}$.
O seu resolvente-Q é $\{\neg P, S, P\}$.

Exemplo:

Mostrar que $\{P, P \to Q\} \vdash Q$, usando resolução.
Primeiro passo: passar as *fbfs* à forma clausal:
$\{P\}$, $\{\neg P, Q\}$ e $\{Q\}$.

3. Lógica Proposicional (II)

3.1.2 O princípio da resolução

Segundo passo: aplicar a resolução:

1	$\{P\}$	Prem
2	$\{\neg P, Q\}$	Prem
3	$\{Q\}$	Res, (1, 2)

Graficamente:

$$\begin{tikzcd}
\{P\} \arrow[dr, dash] & & \{\neg P, Q\} \arrow[dl, dash] \\
& \{Q\} &
\end{tikzcd}$$

Exemplo:

Mostrar que $\{\{\neg P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}, \{P\}\} \vdash \{\}$.

1	$\{\neg P, Q\}$	Prem
2	$\{\neg P, \neg Q\}$	Prem
3	$\{P\}$	Prem
4	$\{Q\}$	Res, (1, 3)
5	$\{\neg Q\}$	Res, (2, 3)
6	$\{\}$	Res, (4, 5)

Cláusula vazia corresponde a uma contradição.

Exemplo:
Provar $\{S\}$ a partir de $\{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{\neg R, S\}, \{P\}\}$.

1	$\{\neg P, Q\}$	Prem
2	$\{\neg Q, R\}$	Prem
3	$\{\neg R, S\}$	Prem
4	$\{P\}$	Prem
5	$\{\neg P, R\}$	Res, (1, 2)
6	$\{\neg P, S\}$	Res, (3, 5)
7	$\{S\}$	Res, (4, 6)

Normalmente a resolução aplica-se a provas por absurdo, as quais, utilizando a resolução se chamam *provas por refutação*.
Nas provas por refutação adiciona-se às premissas a negação da conclusão e gera-se uma contradição (a cláusula vazia).

Definição 3.1.8 (Prova por refutação)

Uma prova por refutação a partir de um conjunto de cláusulas Δ é uma prova por resolução de $\{\}$ a partir de Δ.

Exemplo:
Demonstrar o teorema $(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \vee Q)$.

Temos de fazer uma prova por refutação:
Negação da conclusão: $\neg((\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \vee Q))$

Obtenção da forma clausal: $\{\{\neg P\}, \{\neg Q\}, \{P, Q\}\}$

Prova por refutação:

1	$\{\neg P\}$	Prem
2	$\{\neg Q\}$	Prem
3	$\{P, Q\}$	Prem
4	$\{Q\}$	Res, (1, 3)
5	$\{\}$	Res, (2, 4)

A resolução é correta mas não é completa, pois não é possível demonstrar todos os argumentos válidos.

No entanto, a resolução é completa no que respeita a refutação, garantindo a derivação da cláusula vazia no caso do conjunto inicial de cláusulas ser insatisfazível.