INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Licenciatura Engenharia Informática e de Computadores

Lógica para Programação

Solução do Primeiro Teste

12 de Abril de 2011

18:00–19:30

Nome: ______________________________ Número: __________

1. **(1.0)** Diga o que é a forma de um argumento. Qual a importância de estudar os argumentos quanto à forma? Qual o princípio subjacente a este estudo?

   Resposta:

   A *forma* de um argumento é um argumento em que os termos específicos (ou seja, os termos não lógicos) de cada uma das proposições constituintes são substituídos por um símbolo associado à sua categoria gramatical.

   A forma de um argumento pode ser estudada independentemente do domínio específico de que tratam as proposições que o constituem. Na realidade é em virtude da sua forma e não do seu domínio específico que um argumento é válido ou é inválido. Isto significa que todos os argumentos com a mesma forma são ou todos válidos ou todos inválidos. Este facto é traduzido pelo *princípio da forma*: Se dois argumentos têm a mesma forma então estes são ambos válidos ou ambos inválidos.

2. **(1.0)** Diga o que é uma regra de inferência derivada. Dê um exemplo.

   Resposta:

   Uma é qualquer padrão de raciocínio correspondente à aplicação de várias regras de inferência. Uma regra de inferência derivada corresponde a uma abstracção através da qual podemos agrupar a aplicação de várias regras de inferência num único passo.

   Um exemplo de uma regra de inferência derivada é a introdução da dupla negação, representada por "$I\neg\neg$".

3. **(1.0)** Seja Δ um conjunto de *fbfs* e α uma *fbf*. Suponha que $\Delta \models \alpha$. O que pode ser dito sobre o conjunto $\Delta \cup \{\neg\alpha\}$? Justifique a sua resposta.

   Resposta:

   Se $\Delta \models \alpha$ então todos os modelos que satisfazem Δ também satisfazem α. Daqui resulta que não existe nenhum modelo que satisfaça $\Delta \cup \{\neg\alpha\}$, pelo que este conjunto é insatisfazível.

4. **(1.0)** Enuncie o princípio da resolução para a lógica proposicional (utilizando a forma clausal).

   Resposta:

   Sejam Ψ e Φ duas cláusulas e α uma *fbf* atómica tal que $\alpha \in \Psi$ e $\neg\alpha \in \Phi$, então, podemos inferir a cláusula $(\Psi - \{\alpha\}) \cup (\Phi - \{\neg\alpha\})$.

5. **(1.0)** Determine, justificando, a validade ou a invalidade do seguinte argumento:

   A maioria dos alunos fez a disciplina de FP
   A maioria dos alunos fez a disciplina de SD
   $\therefore$ A maioria dos alunos fez as disciplinas de FP e de SD

Resposta:

O argumento é inválido uma vez que ter as premissas verdadeiras e a conclusão falsa.

Pensemos, por exemplo, num universo de 101 alunos em que 51 alunos fizeram a cadeira de FP (a maioria dos alunos fez FP) e em 51 alunos fizeram SD (a maioria dos alunos fez SD). Pode acontecer que 50 dos alunos que fizeram FP não tenham feito SD, ou seja, apenas um dos alunos fez simultaneamente as duas cadeiras, situação em que não é verdade que a maioria dos alunos tenha feito FP e SD.

Nesta situação, teríamos as premissas verdadeiras e a conclusão falsa, o que demonstra que o argumento é inválido.

6. Prove os seguintes argumentos e teoremas usando o sistema de dedução natural da lógica proposicional. Deve usar apenas as regras de inferência básicas do sistema de dedução natural (Prem, Rep, Hip, Rei, I$\wedge$, E$\wedge$, I$\rightarrow$, E$\rightarrow$, I$\neg$, E$\neg$, I$\vee$, E$\vee$). Em cada alínea, indique se o que está a demonstrar é um teorema ou um argumento.

   (a) **(1.5)** $(\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, \neg C\}, \neg A)$
   Resposta:
   Demonstração de um argumento.

1	$A \rightarrow B$	Prem
2	$B \rightarrow C$	Prem
3	$\neg C$	Prem
4	$\quad A$	Hyp
5	$\quad A \rightarrow B$	Rei, 1
6	$\quad B$	$\rightarrow$E, (4, 5)
7	$\quad B \rightarrow C$	Rei, 2
8	$\quad C$	$\rightarrow$E, (6, 7)
9	$\quad \neg C$	Rei, 3
10	$\neg A$	$\neg$I, (4, (8, 9))

(b) **(1.5)** $(\{\}, (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B))$

Resposta:

Demonstração de um teorema.

1	$\neg A \vee \neg B$	Hyp
2	$\neg A$	Hyp
3	$A \wedge B$	Hyp
4	A	$\wedge$E, 3
5	$\neg A$	Rei, 2
6	$\neg(A \wedge B)$	$\neg$I, (3, (4, 5))
7	$\neg B$	Hyp
8	$A \wedge B$	Hyp
9	B	$\wedge$E, 8
10	$\neg B$	Rei, 7
11	$\neg(A \wedge B)$	$\neg$I, (8, (9, 10))
12	$\neg(A \wedge B)$	$\vee$E, (1, (2, 6), (7, 11))
13	$(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$	$\rightarrow$I, (1, 12)

prova alternativa

1	$\neg A \vee \neg B$	Hyp
2	$A \wedge B$	Hyp
3	A	$\wedge$E, 2
4	B	$\wedge$E, 2
5	$\neg A \vee \neg B$	Rei, 1
6	$\neg A$	Hyp
7	B	Hyp
8	A	Rei, 3
9	$\neg A$	Rei, 6
10	$\neg B$	$\neg$I, (7, (8, 9))
11	$\neg B$	Hyp
12	$\neg B$	Rep, 11
13	$\neg B$	$\vee$E, (5, (6, 10), (11, 12))
14	$\neg(A \wedge B)$	$\neg$I, (2, (4, 13))
15	$(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$	$\rightarrow$I, (1, 14)

7. Considere o conjunto de fórmulas $\{C \vee G, C \to D, G \to D\}$.

   (a) **(1.0)** Diga quais são os modelos deste conjunto de fórmulas.
   Resposta:

C	G	D	$C \vee G$	$C \to D$	$G \to D$	Modelo?
V	V	V	V	V	V	S
V	V	F	V	F	F	N
V	F	V	V	V	V	S
V	F	F	V	F	V	N
F	V	V	V	V	V	S
F	V	F	V	V	F	N
F	F	V	F	V	V	N
F	F	F	F	V	V	N

   Um modelo de um conjunto de fórmulas é uma interpretação que satisfaz todas as *fbfs* desse conjunto, isto é, que as torna todas verdadeiras. Assim, os modelos deste conjunto de fórmulas correspondem às interpretações que atribuem a C, G e D os valores das colunas respectivas, nas linhas em que o valor da última coluna é S.

   (b) **(1.0)** Diga o que é uma fórmula satisfazível. Dê um exemplo de uma fórmula satisfazível que seja consequência lógica do conjunto em consideração.
   Resposta:
   Uma fórmula satisfazível é uma fórmula que tem o valor verdadeiro em pelo menos uma interpretação. Um exemplo de uma fórmula satisfazível que é consequência lógica deste conjunto é $G \to D$.

8. **(1.0)** Seja α a seguinte fórmula na forma clausal:

$$\{\{\neg P, \neg Q\}, \{\neg P, R\}, \{\neg P, S\}, \{\neg P\}\}.$$

   Indique uma *fbf* β, contendo pelo menos uma ocorrência do símbolo lógico $\to$, cuja conversão na forma clausal resulte em α. Indique os cálculos efectuados.

   Resposta:
   $\{\{\neg P, \neg Q\}, \{\neg P, R\}, \{\neg P, S\}, \{\neg P\}\} =$
   $\{\neg P \vee \neg Q, \neg P \vee R, \neg P \vee S, \neg P\} =$
   $(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee S) \wedge \neg P =$
   $(P \to \neg Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee S) \wedge \neg P$

9. Considere o argumento $(\{\{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg Q\}\}, \neg Q)$.

   (a) **(1.0)** Usando resolução, prove por refutação que o argumento é demonstrável.
   Resposta:
   Primeiro há que negar a conclusão: $\neg\neg Q = Q$.
   Depois há que passar as premissas e a conclusão para a forma clausal: já estão.
   Finalmente, há que tentar derivar uma contradição:

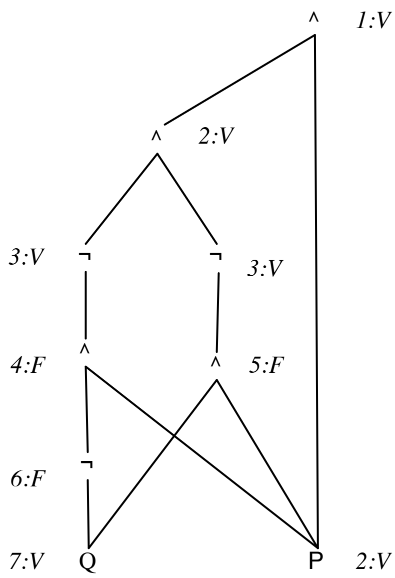
1	$\{P, \neg Q\}$	Prem
2	$\{\neg P, \neg Q\}$	Prem
3	$\{Q\}$	Prem
4	$\{P\}$	Res(3, 1)
5	$\{\neg P\}$	Res(3, 2)
6	$\{\}$	Res(4, 5)

   Como se obteve uma contradição, o argumento é demonstrável.

(b) **(1.0)** Seria possível fazer a prova anterior sem ser por refutação, usando a estratégia de resolução unitária? Justifique a sua resposta.
Resposta:
A estratégia de resolução unitária obriga a que sempre que se aplica o princípio da resolução se use pelo menos uma cláusula unitária. Dado que nenhuma das premissas é uma cláusula unitária, sem fazer a prova por refutação (por refutação seria possível, pois a (negação da) conclusão é uma cláusula unitária), não é possível provar que este argumento é demonstrável, dado que o objectivo seria, a partir das premissas, derivar a conclusão.

10. Considere o argumento $(\{P \rightarrow Q, P \rightarrow \neg Q\}, \neg P)$. Demonstre a sua validade utilizando:

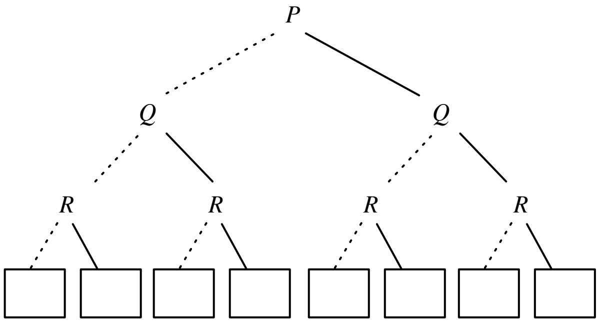
(a) **(1.5)** O algoritmo de propagação de marcas.
Resposta:
Para demonstrar o argumento, demonstraremos que o conjunto $\{P \rightarrow Q, P \rightarrow \neg Q, P\}$ não é satisfazível.
Transformação do conjunto numa *fbf* equivalente contendo apenas conjunções e negações: $\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(P \wedge Q) \wedge P$.
Construção do DAG e propagação de marcas no sentido descendente:



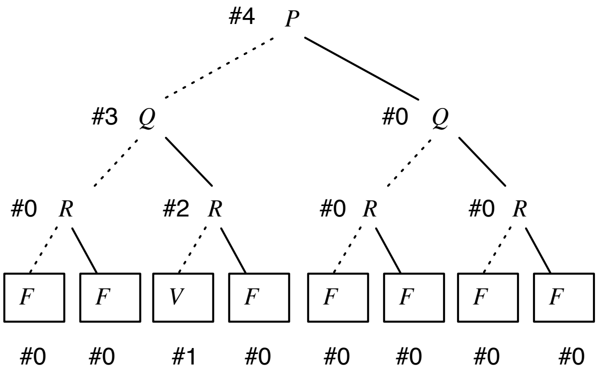
A propagação de marcas no sentido ascendente leva a uma contradição, pois o nó com a marca $5 : F$ é marcado com V. Assim, a *fbf* não é satisfazível.

(b) **(1.5)** O algoritmo DP.
Resposta:
Novamente, demonstraremos que o conjunto $\{P \rightarrow Q, P \rightarrow \neg Q, P\}$ não é satisfazível.
Transformação do conjunto num conjunto equivalente de cláusulas: $\{\{\neg P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}, \{P\}\}$.
Preenchimento dos baldes, considerando a ordem $P \prec Q$:
b_P: $\{\neg P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}, \{P\}$
b_Q:
Processamento do balde b_P:
b_P: $\{\neg P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}, \{P\}$
b_Q: $\{Q\}, \{\neg Q\}$
O processamento do balde b_Q gera a cláusula vazia, pelo que o conjunto de cláusulas não é satisfazível.

11. Seja $\alpha = \neg P \wedge (\neg(R \vee \neg Q))$, a qual corresponde à seguinte árvore binária:



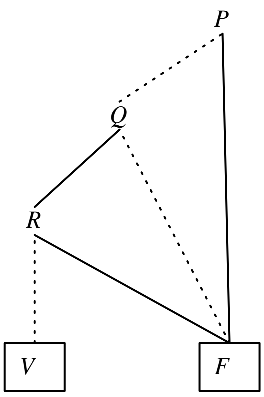
(a) **(0.5)** Indique, na figura anterior, quais os valores das suas folhas.
Resposta:



(b) **(0.5)** Indique na figura quais os rótulos de cada nó da árvore resultantes da aplicação do algoritmo *rotula*.
Resposta:

Ver anterior.

(c) **(0.5)** De acordo com os rótulos calculados na alínea (b), apresente o OBDD resultante da aplicação do algoritmo *compacta*.
Resposta:



(d) **(0.5)** Indique os modelos de α (caso existam).
Resposta:

Modelos são as interpretações que tornam a fórmula verdadeira. Só existe um modelo: $I(P) = F$, $I(Q) = V$ e $I(R) = F$.

(e) **(0.5)** Utilizando o teste para a satisfazibilidade, indique, justificando, se α é satisfazível.

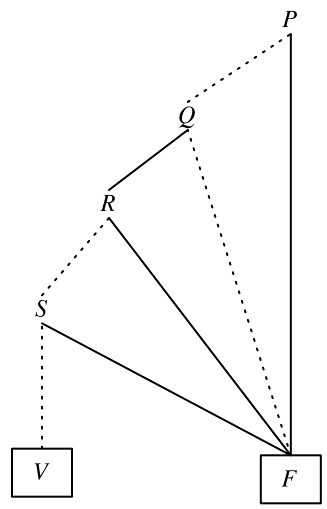
Resposta:

O teste para a satisfazibilidade diz-nos que uma *fbf* é satisfazível sse o seu OBDD reduzido não for $\boxed{F}$. Dado que não é, a fórmula é satisfazível.

(f) **(0.5)** **Sem** usar o algoritmo *aplica* e fazendo uso do que foi estudado relativamente à composição de BDDs, calcule $\alpha \wedge \beta$, em que $\beta = \neg S$.

Resposta:

Substitui-se a folha verdadeira do OBDD reduzido de α pelo OBDD de β (dado que todos os casos que se mantinham falsos, continuam a manter-se, pois a composição é feita com base numa conjunção), resultando no seguinte OBDD:



(g) **(0.5)** Indique um modelo do conjunto $\{\alpha, \beta, \alpha \wedge \beta\}$, justificando a sua resposta.

Resposta:

Existe apenas um modelo para esse conjunto de fórmulas, isto é, existe apenas uma interpretação que torna todas as fórmula desse conjunto verdadeiras. Este modelo é $I(P) = F$, $I(Q) = V$, $I(R) = F$ e $I(S) = F$.

(h) **(0.5)** Será que β é consequência lógica de $\{\alpha, \beta, \alpha \wedge \beta\}$? Justifique a sua resposta.

Resposta:

Sim, porque o único modelo do conjunto é também modelo de β (pois β faz parte do conjunto).