1. Conceitos básicos

Lógica estuda métodos para distinguir os argumentos válidos dos argumentos inválidos.

Dado um conjunto de frases que se assumem verdadeiras, estes métodos permitem determinar se uma dada frase tem de ser verdadeira.

A lógica lida com frases declarativas, isto é, frases que fazem uma afirmação, e, consequentemente podem ser verdadeiras ou falsas.

Definição 1.1.1 (Proposição)

Uma *proposição* é uma frase declarativa, ou seja, é uma frase que faz uma afirmação sobre qualquer coisa.

Definição 1.1.2 (Argumento)

Um *argumento* é um par constituído por um conjunto de proposições, as *premissas*, e por uma única proposição, a *conclusão*.

Por exemplo:

todos os homens são mortais
o Sócrates é um homem
$\therefore$ o Sócrates é mortal

O símbolo "$\therefore$" lê-se "logo".

Definição 1.1.3 (Validade)

Diz-se que um argumento é *válido* quando for impossível ter todas as premissas verdadeiras e a conclusão falsa.
O argumento diz-se *inválido* em caso contrário.

Não devemos confundir os conceitos de validade/invalidade com os conceitos de veracidade/falsidade.
A validade e a invalidade são atributos de argumentos;
a veracidade e a falsidade são atributos de proposições.

Consideremos os seguintes argumentos:

todos os homens são mortais
o Sócrates é um homem
$\therefore$ o Sócrates é mortal

todos os cães são gatos
nenhum gato é mamífero
$\therefore$ nenhum cão é mamífero

Ambos os argumentos são válidos: é impossível ter as premissas verdadeiras e a conclusão falsa.
No 1º argumento, as premissas e a conclusão são todas verdadeiras.
No 2º argumento, as premissas e a conclusão são todas falsas.

Assim, a validade de um argumento não depende dos valores lógicos das suas proposições,
a não ser que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa.

Neste caso, por definição, o argumento é inválido.

Proposição 1.1.1 (Princípio da irrelevância do valor lógico)

Com exceção do caso em que as premissas são todas verdadeiras e a conclusão é falsa, a veracidade ou a falsidade das proposições que constituem um argumento não é relevante para determinar a validade ou a invalidade do argumento.

A validade de um argumento depende da sua *forma*.

Cada proposição contém:

- *termos lógicos* ("e", "ou", "não", "se ... então", "todos", ...) e
- *termos específicos* de um domínio ("humanos", "cão", "Sócrates", "felinos", ...).

Definição 1.1.4 (Forma de um argumento)

A *forma* de um argumento é um argumento em que os termos específicos de cada uma das proposições constituintes são substituídos por um símbolo associado à sua categoria gramatical.

o Piupiu é uma ave
nenhuma ave tem barbatanas
$\therefore$ o Piupiu não tem barbatanas

"fatorial" é um nome em Python
nenhum nome em Python tem o carácter branco
$\therefore$ "fatorial" não tem o carácter branco

Estes argumentos têm a mesma forma:

$\boxed{\text{A}}$ é um $\boxed{\text{B}}$
nenhum $\boxed{\text{B}}$ tem $\boxed{\text{C}}$
$\therefore$ $\boxed{\text{A}}$ não tem $\boxed{\text{C}}$

Proposição 1.1.2 (Princípio da forma)

Se dois argumentos têm a mesma forma então estes são ambos válidos ou ambos inválidos.

Exemplo: O argumento

Todos os cães são mamíferos
$\therefore$ Todos os mamíferos são cães

é inválido por que a premissa é verdadeira e a conclusão é falsa.

O princípio da forma permite-nos concluir que todos os argumentos com a forma

Todos os $\boxed{\text{A's}}$ são $\boxed{\text{B's}}$
$\therefore$ Todos os $\boxed{\text{B's}}$ são $\boxed{\text{A's}}$

são inválidos.

- Linguagem $\mathcal{L}$.
- Sistema dedutivo.
- Sistema semântico.

Definição 1.3.9 (Correção)

Uma lógica é *correta* (em inglês, *sound*) se qualquer argumento demonstrável (com o sistema dedutivo) é válido de acordo com o sistema semântico.

Definição 1.3.10 (Completude)

Uma lógica é *completa* (em inglês, *complete*) se qualquer argumento válido de acordo com o sistema semântico é demonstrável no seu sistema dedutivo.

Os conceitos de correção e de completude não são uma propriedade apenas do sistema dedutivo ou do sistema semântico mas sim uma relação entre os dois sistemas.

Numa lógica correta e completa os argumentos demonstráveis são exatamente os mesmos que os argumentos válidos.

Existem lógicas não completas, mas não existem lógicas não corretas.

2. Lógica Proposicional (I)

A lógica proposicional apresenta uma linguagem muito simples.

O nível mais elementar é o símbolo de proposição, que corresponde a uma proposição como um todo.

Por exemplo, as proposições "Sócrates é um homem" e "Todos os homens são mortais" serão representadas por símbolos de proposição, digamos P e Q.

Desvantagem: fraco poder expressivo.
Vantagem: simplicidade dos sistemas dedutivo e semântico,
facilitando a compreensão de lógicas mais complexas.

Símbolos da linguagem:

1. *Símbolos de pontuação*: ( )
2. *Símbolos lógicos*: $\neg \ \wedge \ \vee \ \rightarrow$
3. *Símbolos de proposição*: P_i (para $i \geq 1$).
   $\mathcal{P}$ é o conjunto de todos os símbolos de proposição.

Normalmente, usamos as letras $P, Q, R, \ldots$

Definição 2.1.1 (Fórmula bem formada)

As fórmulas bem formadas (ou *fbfs*) correspondem ao menor conjunto definido através das seguintes regras de formação:

1. Os símbolos de proposição são *fbfs*, chamadas *fbfs atómicas*;
2. Se α é uma *fbf*, então $(\neg\alpha)$ é uma *fbf*;
3. Se α e β são *fbfs*, então $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ e $(\alpha \rightarrow \beta)$ são *fbfs*.

Tipicamente duas regras de inferência para cada símbolo lógico:

- a *regra de introdução* que diz como introduzir uma *fbf* que utiliza o símbolo, e
- a *regra de eliminação* que diz como usar uma *fbf* que contém o símbolo lógico.

Definição 2.2.2 (Prova de α a partir de Δ)

Uma prova de α a partir de Δ é uma prova cuja última linha contém a *fbf* α e cujas restantes linhas contêm ou uma *fbf* em Δ ou uma *fbf* obtida a partir das *fbfs* anteriores através da aplicação de uma regra de inferência.
Se existir uma prova de α a partir de Δ, dizemos que α é *derivável* a partir de Δ e escrevemos $\Delta \vdash \alpha$.

Definição 2.2.3 (Prova do argumento (Δ, α))

Uma prova do argumento (Δ, α) corresponde a uma prova de α a partir de Δ.

Regra da premissa.

$$\begin{array}{lll} n & \alpha & \text{Prem} \end{array}$$

Regra da repetição.

$$\begin{array}{lll} n & \alpha & \\ \vdots & \vdots & \\ m & \alpha & \text{Rep, } n \end{array}$$

Regras para a conjunção.
Regra de introdução da conjunção.

$$
\begin{array}{lll}
n & \alpha & \\
\vdots & \vdots & \\
m & \beta & \\
\vdots & \vdots & \\
k & \alpha \land \beta & \quad \mathrm{I}\land,\ (n,\ m)
\end{array}
$$

Regra de eliminação da conjunção.

$$
\begin{array}{lll}
n & \alpha \wedge \beta & \\
\vdots & \vdots & \\
m & \alpha & \mathrm{E}\wedge,\ n
\end{array}
$$

ou

$$
\begin{array}{lll}
n & \alpha \wedge \beta & \\
\vdots & \vdots & \\
m & \beta & \mathrm{E}\wedge,\ n
\end{array}
$$

Exemplo:

Demonstração do argumento $(\{P \wedge Q, R\}, P \wedge R)$:

1	$P \wedge Q$	Prem
2	R	Prem
3	P	E$\wedge$, 1
4	R	Rep, 2
5	$P \wedge R$	I$\wedge$, (3, 4)

Regras para provas hipotéticas.

Prova hipotética é uma prova iniciada com a introdução de uma hipótese. Em linguagem corrente, diríamos "Assumindo que ..." .

Regra de hipótese.
Em qualquer ponto de uma prova podemos introduzir qualquer *fbf* como hipótese, começando uma nova prova hipotética.

n	α	Hip
$n+1$	$\ldots$	

Regra da reiteração.

Permite repetir, dentro de uma prova hipotética, qualquer *fbf* que exista na prova que contém a prova hipotética.

$$\begin{array}{lll|ll} n & \alpha & & & \\ \vdots & & & \vdots & \\ m & & & \alpha & \text{Rei, } n \end{array}$$

Regras para a implicação.
Introdução da implicação.

$$
\begin{array}{lll}
n & \quad\alpha & \qquad \text{Hip} \\
\vdots & \quad\vdots & \\
m & \quad\beta & \\
m+1 & \alpha \to \beta & \qquad \text{I}\!\to,\ (n,\ m)
\end{array}
$$

Exemplo: Demonstrar o argumento $(\{\}, P \rightarrow P)$.

1	P	Hip
2	P	Rep, 1
3	$P \rightarrow P$	I$\rightarrow$, (1, 2)

Definição 2.2.4 (Teorema)

Uma *fbf* que é obtida numa prova que não contém premissas é chamada um *teorema*. Quando $\emptyset \vdash \alpha$, ou seja, quando α é um teorema, é usual escrever apenas $\vdash \alpha$.

Eliminação da implicação (modus ponens).

$$
\begin{array}{lll}
n & \alpha & \\
\vdots & \vdots & \\
m & \alpha \to \beta & \\
\vdots & \vdots & \\
k & \beta & \qquad\qquad \mathrm{E}{\to},\ (n,\ m)
\end{array}
$$

Provar que $P \to (Q \to P)$ é um teorema.

1	P	Hip
2	Q	Hip
3	P	Rei, 1
4	$Q \to P$	I$\to$, (2, 3)
5	$P \to (Q \to P)$	I$\to$, (1, 4)

Este resultado é conhecido como um dos *paradoxos da implicação*: "qualquer proposição implica uma proposição verdadeira".

Regras para a negação.
Introdução da negação.
Prova por absurdo: se a partir de uma *fbf* podemos derivar uma contradição ($\beta \wedge \neg\beta$), então essa *fbf* tem de ser falsa.

$$
\begin{array}{l|l l}
n & \alpha & \text{Hip} \\
\cline{2-2}
\vdots & \vdots & \\
m & \beta & \\
\vdots & \vdots & \\
k & \neg\beta & \\
\multicolumn{1}{l}{l} & \neg\alpha & \text{I}\neg,\ (n,\ (m,\ k))
\end{array}
$$

Provar que $\{P \to Q, \neg Q\} \vdash \neg P$.

1	$P \to Q$	Prem
2	$\neg Q$	Prem
3	$\quad P$	Hip
4	$\quad P \to Q$	Rei, 1
5	$\quad Q$	E$\to$, (3, 4)
6	$\quad \neg Q$	Rei, 2
7	$\neg P$	I$\neg$, (3, (5, 6))

Modus tollens: a partir de $\alpha \to \beta$ e $\neg\beta$, podemos derivar $\neg\alpha$.

Eliminação da negação.
Negar uma proposição duas vezes é o mesmo que afirmar essa proposição.

$$\begin{array}{lll} n & \neg\neg\alpha & \\ \vdots & \vdots & \\ m & \alpha & \mathsf{E}\neg,\ n \end{array}$$

Outro dos paradoxos da implicação afirma que "uma contradição implica qualquer proposição": $(P \wedge \neg P) \to Q$

Provar que $(P \wedge \neg P) \to Q$ é um teorema.

1	$P \wedge \neg P$		Hip
2		$\neg Q$	Hip
3		$P \wedge \neg P$	Rei, 1
4		P	E$\wedge$, 3
5		$\neg P$	E$\wedge$, 3
6	$\neg\neg Q$		I$\neg$, (2, (4, 5))
7	Q		E$\neg$, 6
8	$(P \wedge \neg P) \to Q$		I$\to$, (1, 7)

Regras para a disjunção.
Introdução da disjunção.

$$
\begin{array}{lll}
n & \alpha & \\
\vdots & \vdots & \\
m & \alpha \vee \beta & \mathrm{I}\vee,\ n
\end{array}
$$

ou

$$
\begin{array}{lll}
n & \alpha & \\
\vdots & \vdots & \\
m & \beta \vee \alpha & \mathrm{I}\vee,\ n
\end{array}
$$

Eliminação da disjunção.

Corresponde a um raciocínio por casos: se soubermos que $\alpha \vee \beta$, e se α implicar γ e se β implicar γ, então podemos concluir γ se verifica.

Eliminação da disjunção.

$$
\begin{array}{lll|ll}
n & \alpha \vee \beta & & & \\
o & & & \alpha & \text{Hip} \\
\cline{4-4}
\vdots & & & \vdots & \\
p & & & \gamma & \\
r & & & \beta & \text{Hip} \\
\cline{4-4}
\vdots & & & \vdots & \\
s & & & \gamma & \\
\vdots & \vdots & & & \\
m & \gamma & & & \text{E}\vee,\ (n,\ (o,\ p),\ (r,\ s))
\end{array}
$$

Silogismo disjuntivo: a partir de $\alpha \vee \beta$ e $\neg\alpha$, podemos concluir β.

Vamos provar o teorema $((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow Q$.

1	$(P \lor Q) \land \neg P$	Hip
2	$P \lor Q$	E$\land$, 1
3	$\neg P$	E$\land$, 1
4	$\quad P$	Hip
5	$\quad\quad \neg Q$	Hip
6	$\quad\quad P$	Rei, 4
7	$\quad\quad \neg P$	Rei, 3
8	$\quad \neg\neg Q$	I$\neg$, (5, (6, 7))
9	$\quad Q$	E$\neg$, 8

10	$\quad Q$	Hip
11	$\quad Q$	Rep, 10
12	Q	E$\vee$, (2, (4, 9), (10, 11))
13	$((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow Q$	I$\rightarrow$, (1, 12)