4. Lógica de Primeira Ordem (I)

A *lógica de primeira ordem* ou *lógica de predicados* permite representar argumentos que não é possível representar em Lógica Proposicional.

As *fbfs* atómicas passam a ter uma estrutura, podendo conter constantes, variáveis e funções.
Por exemplo, a proposição "Sócrates é um homem" passa a ser representada pela *fbf* $Homem(Sócrates)$.

Mantêm-se todos os símbolos lógicos e todas as regras de inferência da Lógica Proposicional.

Novas regras de formação de *fbfs* , novas regras de inferência
e novo conceito de interpretação.

A linguagem da lógica de primeira ordem, para além de conter todos os símbolos lógicos da lógica proposicional, contém dois símbolos lógicos adicionais, os quantificadores.

A linguagem da lógica de primeira ordem permite a utilização de predicados, de funções e de variáveis.

Funções.

Uma função de n argumentos pode ser representada por um conjunto (possivelmente infinito) de $n+1$-tuplos (tuplos de $n+1$ elementos).

Exemplos:

A função "capital de um país" será representada pelo conjunto:

$$\{(Portugal,\ Lisboa),\ (França,\ Paris), (Espanha,\ Madrid), \ldots\}$$

A função "ano de nascimento de uma pessoa" será representada pelo conjunto:

$$\{(Augustus\_De\_Morgan,\ 1806),\ (Alonzo\_Church,\ 1903), \ldots\}$$

A função "sucessor de um número natural" será representada pelo conjunto:

$$\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4), \ldots\}$$

A função "soma de dois números naturais" será representada pelo conjunto:

$$\{(1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 4), \ldots\}$$

De um modo mais rigoroso, uma *função* de n argumentos pode ser representada por um conjunto (possivelmente infinito) de tuplos de $n+1$ elementos que não contém dois tuplos distintos com os mesmos primeiros n elementos.

Por exemplo, os conjuntos

$$\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (3,\ 4), \ldots\}$$

$$\{(1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 1,\ 3),\ (1,\ 3,\ 4), \ldots\}$$

não podem representar funções.

Funções.

Normalmente, ao definir uma função, especificamos qual o seu domínio e fornecemos uma *expressão designatória* que ao receber um elemento do domínio da função (chamado o *argumento* da função) calcula o elemento correspondente do contradomínio (chamado o *valor* da função).

Exemplos:

$$capital(x) = \text{a capital de } x$$

$$n(x) = \text{o ano de nascimento de } x$$

$$s(x) = x + 1$$

$$soma(x, y) = x + y$$

Tendo em atenção que as funções correspondem a transformações, estas podem ser utilizadas para descrever entidades.

Por exemplo, tanto $s(2)$ como $soma(1, 2)$ representam o número natural 3.

Variáveis.

Chama-se *variável* a um símbolo que desempenha o papel de uma designação sem ser propriamente uma designação.

Uma variável pode ter como valor qualquer elemento de um conjunto denominado *domínio da variável*.

1. Se uma variável figura em mais do que um lugar numa expressão, temos de atribuir-lhe o mesmo valor, em todas as ocorrências da variável na expressão.
2. A variáveis diferentes é lícito atribuir um mesmo valor, desde que esse valor pertença ao domínio de ambas as variáveis.

Relações.

Representam qualquer relação entre elementos de conjuntos.

Uma relação de n argumentos é um conjunto de n-tuplos.

Exemplo:
Países que partilham uma fronteira terrestre:

$$\{(Portugal,\ Espanha),\ (Espanha,\ Portugal),\ (Espanha,\ França),\ \ldots\}$$

Note-se que este conjunto não pode representar uma função, porque existem dois pares diferentes com o mesmo primeiro elemento.

Relações.

Uma relação é normalmente definida através de uma *expressão proposicional*, isto é, uma expressão que se transforma numa *proposição* quando as suas variáveis são substituídas por constantes.

Por exemplo,

$$\mathit{Tem\_fronteira}(x, y) = x \text{ tem fronteira terrestre com } y$$

Relações apenas com um argumento são normalmente conhecidas por *classes* ou *propriedades*. Por exemplo,

$$\mathit{Homem}(x) = x \text{ é um homem}$$

$$\mathit{Voa}(x) = x \text{ voa}$$

Definição da linguagem da lógica de primeira ordem.
Alfabeto básico.

1. *Símbolos de pontuação:* , ( ) [ ]

2. *Símbolos lógicos:* $\neg$ $\wedge$ $\vee$ $\rightarrow$ $\forall$ $\exists$
   Novos símbolos lógicos:
   1. o símbolo $\forall$ chama-se *quantificador universal* e lê-se "para todo";
   2. o símbolo $\exists$ chama-se *quantificador existencial* e lê-se "existe pelo menos um".

3. *Letras de função* com n argumentos, f_i^n (para $n \geq 0$ e $i \geq 1$).
   As funções com aridade zero correspondem a constantes.
   Normalmente, usamos f, g, h, *capital* e *pai*.

4. *Letras de predicado* com aridade n, P_i^n (para $n \geq 0$ e $i \geq 1$).
   Normalmente, usamos P, Q, R, *Humano* e *Homem*.

5. *Variáveis individuais*, x_i (para $i \geq 1$).
   Normalmente, usamos x, y, z.

Termos.

Os termos representam as entidades sobre as quais queremos falar.

Definição 4.1.1 (Termo)

Os termos correspondem ao menor conjunto definido recursivamente através das seguintes regras de formação:

1. Cada letra de função com aridade zero (letra de constante) é um termo;
2. Cada variável é um termo;
3. Se t_1, t_2, ..., t_n são termos, então $f_i^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é um termo.

Exemplos:

Supondo que *Portugal* e *Augustus_De_Morgan* são constantes, que *capital* e *pai* são funções de um argumento e que x é uma variável, as seguintes expressões são termos:

$$Portugal$$

$$Augustus\_De\_Morgan$$

$$capital(Portugal)$$

$$pai(Augustus\_De\_Morgan)$$

$$pai(pai(pai(Augustus\_De\_Morgan)))$$

$$x$$

$$capital(x)$$

$$pai(x)$$

Definição 4.1.2 (Termo fechado)

Um termo que não contém variáveis é chamado um *termo fechado* ou *termo chão* (“*ground term*”).

Exemplos:

$$Portugal$$

$$Augustus\_De\_Morgan$$

$$capital(Portugal)$$

$$pai(Augustus\_De\_Morgan)$$

$$pai(pai(pai(Augustus\_De\_Morgan)))$$

Definição 4.1.3 (Fórmula bem formada de $\mathcal{L}_{\mathcal{LPO}}$)

As fórmulas bem formadas (ou *fbfs*) correspondem ao menor conjunto definido através das seguintes regras de formação:

1. Se t_1, t_2, ..., t_n são termos, então $P_i^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é uma *fbf* (*fbf atómica*);
2. Se α é uma *fbf* , então $(\neg\alpha)$ é uma *fbf* ;
3. Se α e β são *fbfs*, então $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, e $(\alpha \rightarrow \beta)$ são *fbfs*;
4. Se α é uma *fbf*, então $\forall x[\alpha]$ e $\exists x[\alpha]$ são *fbfs*.

Exemplos:

$$\neg P(a, g(a, b, c))$$

$$P(a, b) \to \neg Q(f(d))$$

$$R \wedge S$$

$$Tem\_fronteira(Portugal, Espanha)$$

$$Tem\_fronteira(x, y)$$

$$\forall x\ [\forall y\ [Tem\_fronteira(x, y) \to \exists g\ [Travaram\_guerra(g, x, y)]]]$$

$$Vive\_em(x, capital(Portugal))$$

Definição 4.1.4 (Fórmula chã)

Uma *fbf* que não contém variáveis diz-se uma *fórmula chã* ("*ground formula*").

Abreviaremos uma sequência de quantificadores do mesmo tipo, por exemplo, $\forall x\ [\forall y\ [\ldots]]$, por uma única ocorrência do quantificador seguido de uma lista das variáveis correspondentes, por exemplo, $\forall x, y\ [\ldots]$.

Assim, a *fbf*

$$\forall x\ [\forall y\ [\mathit{Tem\_fronteira}(x, y) \rightarrow \exists g\ [\mathit{Travaram\_guerra}(g, x, y)]]]$$

será escrita do seguinte modo:

$$\forall x, y\ [\mathit{Tem\_fronteira}(x, y) \rightarrow \exists g\ [\mathit{Travaram\_guerra}(g, x, y)]]$$

Definição 4.1.5 (Domínio de um quantificador)

Nas *fbfs* $\forall x[\alpha]$ e $\exists x[\alpha]$, a *fbf* α é chamada o *domínio do* quantificador ($\forall$ ou $\exists$) e diz-se que o quantificador *liga* (“*binds*”) a variável x.

Na *fbf* $\forall x, y\ [Tem\_fronteira(x, y) \to \exists g\ [Travaram\_guerra(g, x, y)]]$

o domínio do primeiro quantificador universal é a *fbf*

$$\forall y\ [Tem\_fronteira(x, y) \to \exists g\ [Travaram\_guerra(g, x, y)]]$$

o domínio do segundo quantificador universal é a *fbf*

$$Tem\_fronteira(x, y) \to \exists g\ [Travaram\_guerra(g, x, y)]$$

e o domínio do quantificador existencial é a *fbf*

$$Travaram\_guerra(g, x, y).$$

Note-se que na *fbf* $\forall x[\alpha]$, a *fbf* α não tem necessariamente que conter a variável x, como acontece, por exemplo, com a *fbf*

$$\forall x\ [Tem\_fronteira(Portugal, Espanha)].$$

Neste caso, tanto $\forall x[\alpha]$ como $\exists x[\alpha]$ têm o mesmo significado que α.

Definição 4.1.6 (Variável ligada)

Uma ocorrência da variável x diz-se *ligada* (“*bound*”) numa *fbf* se esta ocorrência aparecer dentro do domínio do quantificador que a introduz.

Definição 4.1.7 (Variável livre)

Uma ocorrência da variável x diz-se *livre* (“*free*”) se esta não for uma ocorrência ligada.

Exemplos:

A *fbf* $P(x)$ contém a variável livre x.

A *fbf* $\forall x[P(x)]$ contém a variável ligada x.

A *fbf* $P(x) \rightarrow \exists x[Q(x)]$ contém uma ocorrência livre de x, em $P(x)$, e uma ocorrência ligada de x, em $Q(x)$.

Definição 4.1.8 (Fórmula fechada)

Uma *fbf* sem variáveis livres diz-se *fechada*.

Substituições.

Definição 4.1.9 (Substituição)

$$\{t_1/x_1, \ \ldots, \ t_n/x_n\}$$

x_i's: variáveis,
t_i's: termos.

$x_i \neq x_j$ e $x_i \neq t_i$.

Par t_i/x_i chama-se uma *ligação*.

Exemplos:

Supondo que a e b são constantes, x, y e z são variáveis individuais e que f, g e h são funções de aridade 1, então os seguintes conjuntos são exemplos de substituições

$$\{f(x)/x, z/y\}$$

$$\{a/x, g(y)/y, f(g(h(b)))/z\}$$

Os seguintes conjuntos *não* são exemplos de substituições

$$\{x/x, z/y\}$$

$$\{a/x, g(y)/y, b/x, f(g(h(b)))/c\}$$

Porquê?

Definição 4.1.10 (Substituição vazia)

A *substituição vazia* corresponde ao conjunto vazio e é representada por ε.

Definição 4.1.11 (Substituição chã)

Uma *substituição chã* ("*ground substitution*") é uma substituição na qual nenhum dos termos contém variáveis.

As substituições são utilizadas para substituir variáveis numa *fbf*: cada variável será substituída pelo termo associado.
Daí as restrições impostas a uma substituição:
• todas as variáveis são diferentes (caso contrário não saberíamos qual o termo a usar para substituir a variável)
• nenhuma variável é igual ao termo correspondente (caso contrário a substituição seria inútil).

Definição 4.1.12 (Aplicação de substituição)

A *aplicação da substituição* $s = \{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$ à *fbf* α (representada por $\alpha \cdot s$) é a *fbf* obtida de α substituindo todas as ocorrências livres da variável x_i por t_i.

Exemplos:

$$P(x, f(a, y)) \cdot \{a/x, f(a, b)/y\} = P(a, f(a, f(a, b)))$$

O mesmo resultado seria obtido com a substituição $\{a/x, f(a, b)/y, c/z\}$.

$$(P(x) \to \exists x[Q(x)]) \cdot \{a/x, f(a, b)/y\} = P(a) \to \exists x[Q(x)].$$

$$\forall x[P(x, f(a, y))] \cdot \{a/x, f(a, b)/y\} = \forall x[P(x, f(a, f(a, b)))].$$

Introdução da quantificação universal.
A *fbf* $\forall x[\alpha(x)]$ significa que $\alpha(t)$ se verifica para "qualquer" termo t.

Assim, para introduzir a *fbf* $\forall x[\alpha(x)]$, teremos de provar $\alpha(t)$ para um termo arbitrário t. Para tal, provaremos que $\alpha(x_0)$ se verifica para uma variável x_0 sobre a qual não se sabe nada, isto é, que nunca apareceu antes na prova.

$$\begin{array}{lll}
n & x_0 \mid & \\
\vdots & \quad\mid \vdots & \\
m & \quad\mid \alpha(x_0) & \\
m+1 & \forall x[\alpha(x)] & \mathrm{I}\forall,\ (n,\ m)
\end{array}$$

Eliminação da quantificação universal.

$$\begin{array}{lll} n & \forall x[\alpha(x)] & \\ \vdots & \vdots & \\ m & \alpha(t) & \quad\quad\quad \text{E}\forall,\ n \end{array}$$

para qualquer termo t, livre para x em $\alpha(x)$.

Exemplo: Provar o argumento

$$(\{\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)],\ \forall x[Q(x)\ \rightarrow R(x)]\},\ \forall x[P(x) \rightarrow R(x)])$$

.

1		$\forall x[P(x) \to Q(x)]$	Prem
2		$\forall x[Q(x) \to R(x)]$	Prem
3	x_0	$P(x_0)$	Hip
4		$\forall x[P(x) \to Q(x)]$	Rei, 1
5		$P(x_0) \to Q(x_0)$	E$\forall$, 4
6		$Q(x_0)$	E$\to$, (3, 5)
7		$\forall x[Q(x) \to R(x)]$	Rei, 2
8		$Q(x_0) \to R(x_0)$	E$\forall$, 7
9		$R(x_0)$	E$\to$, (6, 8)
10		$P(x_0) \to R(x_0)$	I$\to$, (3, 9)
11		$\forall x[P(x) \to R(x)]$	I$\forall$, (3, 10)

Introdução da quantificação existencial.

$$
\begin{array}{lll}
n & \alpha(t) & \\
\vdots & \vdots & \\
m & \exists x[\alpha(x)] & \quad \mathbf{I}\exists,\ n
\end{array}
$$

em que t é qualquer termo, e x é livre para t em $\alpha(t)$.

Se esta restrição não existisse, poderíamos escrever:

$$
\begin{array}{lll}
1 & \forall x[Natural(x) \rightarrow Maior(x, zero)] & \\
2 & \exists x[\forall x[Natural(x) \rightarrow Maior(x, x)]] & \quad \mathbf{I}\exists,\ 1
\end{array}
$$

A última *fbf* é equivalente a

$$\forall x[Natural(x) \rightarrow Maior(x, x)]$$

Eliminação da quantificação existencial.

$\exists x[\alpha(x)]$ afirma que existe uma entidade x_0 tal que $\alpha(x_0)$ se verifica. Como não sabemos qual é a entidade x_0, não podemos fazer qualquer afirmação sobre x_0 para além de $\alpha(x_0)$.

$$
\begin{array}{lll|l}
n & \exists x[\alpha(x)] & & \\
m & x_0 & \begin{array}{|l} \alpha(x_0) \\ \hline \vdots \\ \beta \end{array} & \text{Hip} \\
\vdots & & & \\
k & & & \\
k+1 & \beta & & \text{E}\exists, (n, (m, k))
\end{array}
$$

para qualquer *fbf* β que não mencione a variável x_0.

Exemplo: Provar que $\exists x[P(x)] \rightarrow \neg\forall x[\neg P(x)]$.

1	$\exists x[P(x)]$	Hip
2	$x_0 \quad P(x_0)$	Hip
3	$\forall x[\neg P(x)]$	Hip
4	$P(x_0)$	Rei, 2
5	$\neg P(x_0)$	E$\forall$, 3
6	$\neg\forall x[\neg P(x)]$	I$\neg$, (3, (4, 5))
7	$\neg\forall x[\neg P(x)]$	E$\exists$, (1, (2, 6))
8	$\exists x[P(x)] \rightarrow \neg\forall x[\neg P(x)]$	I$\rightarrow$, (1, 7)