INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Ciências de Engenharia Informática e de Computadores

Lógica para Programação

Solução do Primeiro Teste

3 de Novembro de 2007

09:00–10:30

Nome: ______________________________ Número: __________

1. **(6.0)** Para cada uma das seguintes questões, indique se é verdadeira ou falsa. NOTA: Uma resposta errada desconta 0.4 valores.

   (a) A regra de inferência derivada conhecida por *modus tollens* afirma que numa prova que contém $\neg\alpha$ e $\alpha \rightarrow \beta$ se pode derivar $\neg\beta$.
   Resposta: Falsa

   (b) O facto de $(P \wedge \neg P) \rightarrow Q$ ser um teorema mostra que uma contradição implica qualquer proposição.
   Resposta: Verdadeira

   (c) A regra da eliminação da disjunção corresponde ao seguinte raciocínio (dito por casos): se formos capazes de derivar γ, quer a partir de α, quer de β, então podemos derivar γ a partir de $\alpha \vee \beta$.
   Resposta: Verdadeira

   (d) Uma fórmula na forma clausal (CNF) corresponde a disjunções de conjuncões de literais.
   Resposta: Falsa

   (e) A geração por saturação de níveis é uma estratégia de resolução que se baseia na utilização de cláusulas unitárias.
   Resposta: Falsa

   (f) Uma prova hipotética cria um ambiente onde se assume que uma dada hipótese é verdadeira.
   Resposta: Verdadeira

   (g) Para qualquer conjunto de fbfs Δ, o conjunto $Th(\Delta)$ é finito.
   Resposta: Falsa

   (h) A regra da resolução é sólida mas não é completa.
   Resposta: Falsa

   (i) Os BDDs permitem representar de modo compacto a informação presente numa tabela de verdade.
   Resposta: Verdadeira

   (j) A remoção de testes redundantes num BDD é feita quando ambos os arcos que saem de um nó se dirigem ao mesmo nó.
   Resposta: Verdadeira

   (k) A *fbf* $\alpha \wedge \beta$ pode ser criada através da composição de BDDs, a partir dos BDDs correspondentes a α e a β, seguindo o seguinte raciocínio: o nó $\boxed{\text{F}}$ do BDD correspondente a α deve ser substituido pelo BDD correspondente a β.
   Resposta: Falsa

(l) Dada uma relação de ordem total e uma *fbf*, o OBDD reduzido correspondente é único.
Resposta: Verdadeira

(m) A ordenação canónica de BDDs permite a realização de testes de equivalência semântica.
Resposta: Verdadeira

(n) Num BDD não ordenado existem caminhos com ordenações incompatíveis.
Resposta: Verdadeira

(o) As ordenações para BDDs [P,Q,S] e [R,P,S,T,Q] são compatíveis.
Resposta: Falsa

2. Forneça definições para os seguintes conceitos:

(a) **(0.5)** Regra de inferência.
Resposta:

Uma regra de inferência é uma regra de manipulação de símbolos que especifica como gerar novas fórmulas bem formadas a partir de fórmulas que já existem.

(b) **(0.5)** Consequências lógicas de um conjunto de premissas.
Resposta:

Dado um conjunto de *fbfs*, Δ, as suas consequências lógicas são todas as *fbfs* (α) para as quais não existe nenhuma interpretação que torna Δ verdadeiro (todas as proposições em Δ verdadeiras) e α falso. Formalmente, as consequências lógicas de Δ correspondem ao conjunto

$$\{\alpha \,:\, \Delta \models \alpha\}$$

(c) **(0.5)** Fórmula satisfazível.
Resposta:

Uma *fbf* diz-se *satisfazível* se e só se existe uma interpretação na qual a *fbf* é verdadeira.

(d) **(0.5)** Substituição (e condições que lhe são impostas).
Resposta:

Uma *substituição* é um conjunto finito de pares ordenados $\{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$ em que cada x_i $(1 \leq i \leq n)$ é uma variável individual e cada t_i $(1 \leq i \leq n)$ é um termo. Numa substituição, todas as variáveis individuais são diferentes (ou seja, para todo o i e $j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ se $i \neq j$ então $x_i \neq x_j$) e nenhuma das variáveis individuais é igual ao termo correspondente (ou seja, para todo o $i, 1 \leq i \leq n$ $x_i \neq t_i$).

3. (a) **(1.0)** Dê um exemplo de um argumento válido no qual quer as premissas, quer a conclusão sejam falsas.
Resposta:

Todos os planetas são feitos de queijo
O Sol é um planeta
$\therefore$ O Sol é feito de queijo

(b) **(1.0)** Diga, justificando, se o seguinte argumento é válido ou inválido.
O céu é azul
A relva é branca
$\therefore$ A relva é branca
Resposta:

O argumento é válido pois sendo a conclusão uma das premissas é impossível ter as premissas verdadeiras e a conclusão falsa.

4. Usando as regras do sistema de dedução natural, demonstre os seguintes teoremas:

(a) **(1.5)** $(A \lor \neg B) \to \neg(\neg A \land B)$

Resposta:

1	$A \lor \neg B$	Hyp
2	A	Hyp
3	$\neg A \land B$	Hyp
4	A	Rei, 2
5	$\neg A$	$\land$E, 3
6	$\neg(\neg A \land B)$	$\neg$I, (3, (4, 5))
7	$\neg B$	Hyp
8	$\neg A \land B$	Hyp
9	$\neg B$	Rei, 7
10	B	$\land$E, 8
11	$\neg(\neg A \land B)$	$\neg$I, (8, (9, 10))
12	$\neg(\neg A \land B)$	$\lor$E, (1, (2, 6), (7, 11))
13	$(A \lor \neg B) \to \neg(\neg A \land B)$	$\to$I, (1, 12)

(b) **(1.5)** $(\forall x[F(x) \to H(x)] \land \exists x[F(x)]) \to \exists x[H(x)]$

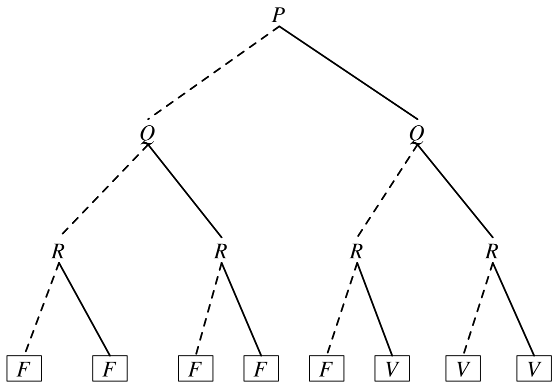
Resposta:

1	$\forall x[F(x) \to H(x)] \land \exists x[F(x)]$	Hyp
2	$\forall x[F(x) \to H(x)]$	$\land$E, 1
3	$\exists x[F(x)]$	$\land$E, 1
4	t $F(t)$	Hyp
5	$\forall x[F(x) \to H(x)]$	Rei, 2
6	$F(t) \to H(t)$	$\forall$E, 5
7	$H(t)$	$\to$E, (4, 6)
8	$\exists x[H(x)]$	$\exists$I, 7
9	$\exists x[H(x)]$	$\exists$E, (3, (4, 8))
10	$(\forall x[F(x) \to H(x)] \land \exists x[F(x)]) \to \exists x[H(x)]$	$\to$I, (1, 9)

5. (a) **(1.0)** Desenhe a árvore de decisão correspondente à seguinte *fbf*:

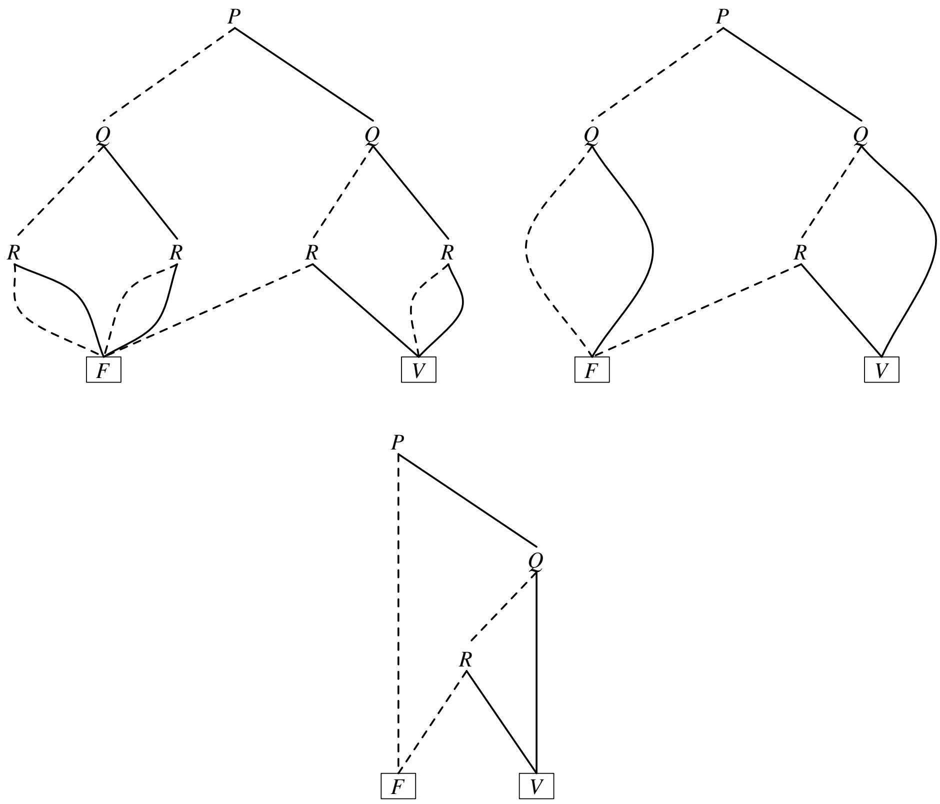
$$P \wedge (Q \vee (P \wedge R))$$

Resposta:

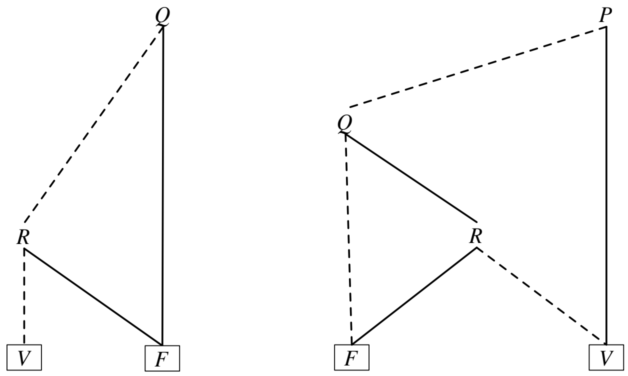


(b) **(1.0)** Transforme a árvore de decisão da alínea anterior num BDD reduzido. Indique os passos seguidos.

Resposta:

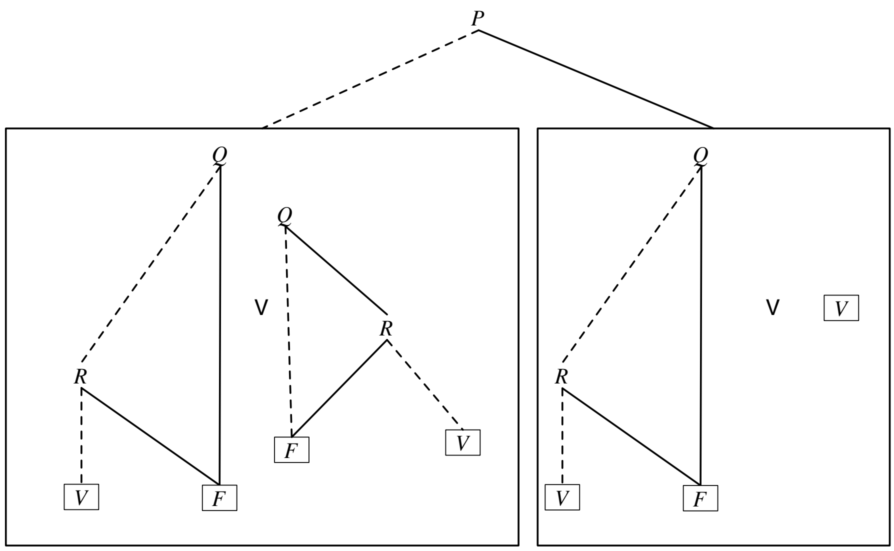


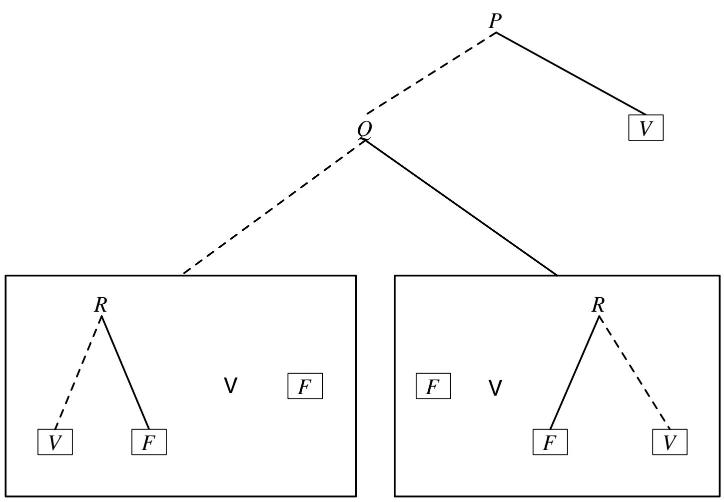
6. **(2.0)** Considere os seguintes OBDDs:

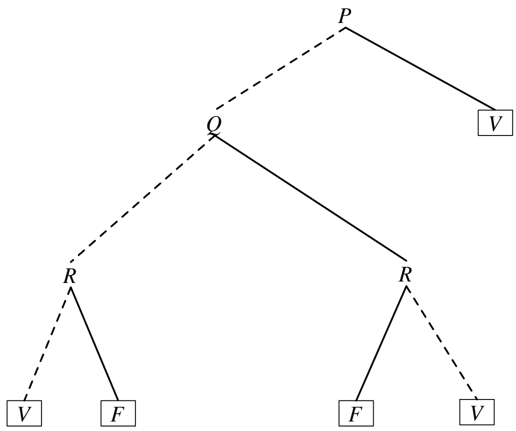


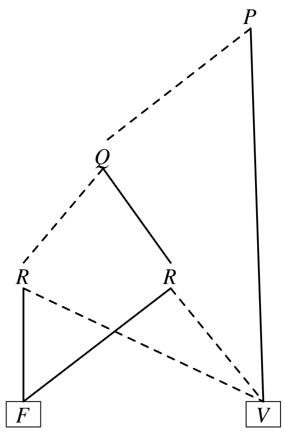
Utilizado o algoritmo $aplica$, calcule o OBDD que resulta de disjunção das *fbfs* que correspondem a estes OBDDS. Mostre os passos utilizados.

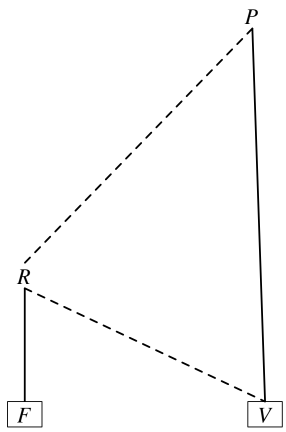
Resposta:











7. **(1.5)** Transforme a seguinte *fbf* para a forma clausal:

$$(P \rightarrow \neg(Q \vee ((R \wedge S) \rightarrow P)))$$

Resposta:

$$(P \rightarrow \neg(Q \vee ((R \wedge S) \rightarrow P)))$$
$$((\neg P \vee \neg(Q \vee (\neg(R \wedge S) \vee P)))$$
$$((\neg P \vee (\neg Q \wedge \neg(\neg(R \wedge S) \vee P)))$$
$$((\neg P \vee (\neg Q \wedge (\neg\neg(R \wedge S) \wedge \neg P)))$$
$$(((\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee ((R \wedge S) \wedge \neg P)))$$
$$(((\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee (R \wedge S)) \wedge (\neg P \vee \neg P))$$
$$(((\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee S) \wedge (\neg P \vee \neg P))$$
$$(\{\neg P \vee \neg Q\}, \{\neg P \vee R\}, \{\neg P \vee S\}, \{\neg P\}\}$$
$$(\{\neg P, \neg Q\}, \{\neg P, R\}, \{\neg P, S\}, \{\neg P\}\}$$

8. **(1.5)** Produza uma demonstração por refutação para

$$\{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{\neg R, S\}, \{P\}\} \vdash \{S\}$$

usando a estratégia de resolução linear e $\{P\}$ como cláusula central.

Resposta: