Passos para a transformação de uma *fbf* fechada em forma clausal:

1. *Eliminação do símbolo* $\rightarrow$
Como na Lógica Proposicional.

2. *Redução do domínio do símbolo* $\neg$
Como na Lógica Proposicional com a adição das segundas leis de De Morgan:

$$\neg\forall x[\alpha(x)] \leftrightarrow \exists x[\neg\alpha(x)]$$

$$\neg\exists x[\alpha(x)] \leftrightarrow \forall x[\neg\alpha(x)]$$

3. *Normalização de variáveis*
Este passo baseia-se no facto das variáveis quantificadas corresponderem a variáveis mudas. Por exemplo,

$$\forall\ x, y[P(x, y) \rightarrow (Q(x) \wedge S(y))]$$

é equivalente a

$$\forall\ z, x[P(z, x) \rightarrow (Q(z) \wedge S(x))]$$

Consiste em mudar o nome de algumas das variáveis de modo a que cada variável apareça quantificada por um único quantificador. Por exemplo,

$$\forall\ \underline{x}[P(x)] \wedge \exists\ \underline{x}\ \forall\ y[S(x, y)]]$$

é transformada em

$$\forall\ x[P(x)] \wedge \exists\ z\ \forall\ y[S(z, y)]]$$

4. *Eliminação dos quantificadores existenciais*

1. *Eliminação de um quantificador isolado*
   Consiste em substituir a *fbf* $\exists x[\alpha(x)]$ por $\alpha(c)$ em que "c" é uma nova constante (chamada *constante de Skolem*).
2. *Dependências entre quantificadores existenciais e universais*
   Se um quantificador existencial aparecer dentro do domínio de um quantificador universal, o valor da variável quantificada existencialmente pode depender do valor da variável quantificada universalmente. Por exemplo, com a transformação anterior a *fbf*

   $$\forall x \exists y [M\tilde{a}e(y, x)]$$

   seria transformada em

   $$\forall x [M\tilde{a}e(c, x)],$$

   o que está errado. A tranformação correta é

   $$\forall x [M\tilde{a}e(f(x), x)],$$

   em que f é uma nova função (chamada *função de Skolem*).

5. *Conversão para a forma "Prenex" normal*
Baseia-se no facto de que se α não contiver a variável x então $\forall x[\alpha]$ significa o mesmo que α.

Consiste em mover todas as ocorrências de quantificadores universais para a esquerda da *fbf*.

6. *Eliminação da quantificação universal*
Uma vez que a *fbf* de origem não tinha variáveis livres, e todos os quantificadores existenciais já foram eliminados, todas as variáveis existentes na *fbf* após o Passo 5 são quantificadas universalmente. Como a ordem dos quantificadores universais não é relevante, Eliminam-se todos os quantificadores universais, e *assumimos* que todas as variáveis são quantificadas universalmente.

7. *Obtenção da forma conjuntiva normal*
   Como na Lógica Proposicional.

8. *Eliminação do símbolo* $\wedge$
   Como na Lógica Proposicional.

9. *Eliminação do símbolo* $\vee$
   Como na Lógica Proposicional.

Passagem de
$\forall x[P(x) \rightarrow (\forall y[P(y) \rightarrow P(f(x,y))] \wedge \neg\forall y[Q(x,y) \rightarrow P(y)])]$
à forma clausal:

1. $\forall x[\neg P(x) \vee (\forall y[\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \neg\forall y[\neg Q(x,y) \vee P(y)])]$

2. $\forall x[\neg P(x) \vee (\forall y[\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \exists y[\neg(\neg Q(x,y) \vee P(y))])]$
$\forall x[\neg P(x) \vee (\forall y[\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \exists y[\neg\neg Q(x,y) \wedge \neg P(y)])]$
$\forall x[\neg P(x) \vee (\forall y[\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \exists y[Q(x,y) \wedge \neg P(y)])]$

3. $\forall x[\neg P(x) \vee (\forall y[\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \exists z[Q(x,z) \wedge \neg P(z)])]$

4. $\forall x[\neg P(x) \vee (\forall y[\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge (Q(x,g(x)) \wedge \neg P(g(x))))]$
em que $g(x)$ é uma função de Skolem.

5. $\forall x \forall y[\neg P(x) \vee ((\neg P(y) \vee P(f(x,y))) \wedge (Q(x,g(x)) \wedge \neg P(g(x))))]$

6. $\neg P(x) \vee ((\neg P(y) \vee P(f(x,y))) \wedge (Q(x,g(x)) \wedge \neg P(g(x))))$

7. $(\neg P(x) \vee (\neg P(y) \vee P(f(x,y)))) \wedge (\neg P(x) \vee (Q(x,g(x)) \wedge \neg P(g(x))))$
$(\neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x,y))) \wedge$
$(\neg P(x) \vee Q(x,g(x))) \wedge (\neg P(x) \vee \neg P(g(x)))$

8. $\{\neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x,y)), \neg P(x) \vee Q(x,g(x)), \neg P(x) \vee \neg P(g(x))\}$

9. $\{\{\neg P(x), \neg P(y), P(f(x,y))\}, \{\neg P(x), Q(x,g(x))\},$
$\{\neg P(x), \neg P(g(x))\}\}$

A *unificação* é o processo que permite determinar se duas *fbfs* atómicas podem ser tornadas iguais através de uma substituição para as suas variáveis.

Por exemplo, $P(x, a)$ e $P(b, y)$ são tornadas iguais pela aplicação da substituição $\{b/x, a/y\}$, mas não existe nenhuma substituição que torne $P(x, a)$ e $P(y, b)$ iguais.

Definição 5.2.1 (Composição de substituições)

Sendo s_1 e s_2 duas substituições, a *composição das substituições* s_1 e s_2, representada por $s_1 \circ s_2$, é a substituição s tal que para qualquer *fbf* α, $\alpha \cdot s = (\alpha \cdot s_1) \cdot s_2$. Ou seja, $\alpha \cdot (s_1 \circ s_2) = (\alpha \cdot s_1) \cdot s_2$.

Teorema 5.2.1 (Composição com a substituição vazia)

Para qualquer substituição s, $s \circ \varepsilon = \varepsilon \circ s = s$.

Teorema 5.2.2 (Associatividade)

Para quaisquer substituições s_1, s_2 e s_3, $s_1 \circ (s_2 \circ s_3) = (s_1 \circ s_2) \circ s_3$.

Sejam $s_1 = \{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$ e $s_2 = \{u_1/y_1, \ldots, u_m/y_m\}$.
Para calcular $s_1 \circ s_2$:

- aplicar s_2 aos termos de s_1,
- adicionar a este resultado todos os elementos $u_j/y_j \in s_2$ tais que $y_j \notin \{x_1 \ldots x_n\}$
- remover todos os elementos $(t_i \cdot s_2)/x_i$ tais que $t_i \cdot s_2 = x_i$.

Ou seja,

$$\begin{aligned} s_1 \circ s_2 = & (\{(t_1 \cdot s_2)/x_1, \ldots, (t_n \cdot s_2)/x_n\} \cup \\ & \cup \{u_j/y_j \in s_2 : y_j \notin \{x_1, \ldots, x_n\}\}) - \\ & - \{(t_i \cdot s_2)/x_i : (t_i \cdot s_2) = x_i\}. \end{aligned}$$

Exemplo:

Sejam $s_1 = \{f(y)/x, z/y, a/w\}$ e $s_2 = \{a/x, b/y, y/z, a/w\}$.

- aplicação de s_2 aos termos de s_1: $\{f(b)/x, y/y, a/w\}$
- adicionar a este resultado todos os elementos $u_j/y_j \in s_2$ tais que $y_j \notin \{x_1 \ldots x_n\}$: $\{f(b)/x, y/y, a/w, y/z\}$
- remover todos os elementos $(t_i \cdot s_2)/x_i$ tais que $t_i \cdot s_2 = x_i$: $\{f(b)/x, a/w, y/z\}$.

Teorema 5.2.3 (Não comutatividade)

A composição de substituições não é comutativa.

Prova: Consideremos, as substituições $s_1 = \{f(x)/x\}$ e $s_2 = \{x/y\}$.
Temos, $s_1 \circ s_2 = \{f(x)/x, x/y\}$ e $s_2 \circ s_1 = \{f(x)/y, f(x)/x\}$.

Definição 5.2.2 (Conjunto unificável)

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ diz-se *unificável* se e só se existir uma substituição s tal que $\alpha_1 \cdot s = \ldots = \alpha_m \cdot s$.
s diz-se um *unificador* de $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$.

Exemplo:
Consideremos o conjunto de *fbfs* $\{P(a, y, z),\ P(x, b, z)\}$.
Alguns unificadores deste conjunto:
$\{a/x, b/y\}$, $\{a/x, b/y, c/z\}$, $\{a/x, b/y, x/z\}$,...

Definição 5.2.3 (Unificador mais geral)

O *unificador mais geral* de Δ (*mgu*) é um unificador, s, de Δ, tal que: se s_1 for um unificador de Δ então existe uma substituição s_2 tal que $s_1 = s \circ s_2$.

O unificador mais geral de um conjunto é *único* (exceto para variantes alfabéticas de variáveis).

Exemplo:
Consideremos o conjunto de *fbfs* $\{P(x), P(y)\}$.
Unificadores mais gerais:
$\{y/x\}$ e $\{x/y\}$.

Um algoritmo de unificação recebe um conjunto de *fbfs* atómicas e devolve o seu unificador mais geral ou a indicação de que as *fbfs* não são unificáveis.

O algoritmo apresentado usa as seguintes funções:

- $card(x)$ devolve o cardinal do conjunto x;
- $var(x)$ devolve *verdadeiro* se x é uma variável e devolve *falso* em caso contrário;
- $termo(x)$ devolve *verdadeiro* se x um termo e devolve *falso* em caso contrário.

- *desacordo*(Δ):

Exemplo: Se

$$\Delta = \{P(x, \underline{f(x,y)}), P(x, \underline{a}), P(x, \underline{g(h(k(x)))})\},$$

tem-se que *desacordo*$(\Delta) = \{f(x,y),\ a,\ g(h(k(x)))\}$.

Algoritmo *unifica*(Δ)

$s := \{\}$
while $card(\Delta) \neq 1$ **do**
$D := desacordo(\Delta)$
if $\exists\ x, t \in D$ **such that** $var(x)$ **and** $termo(t)$ **and** x não ocorre em t **then**
$\Delta := \Delta \cdot \{t/x\}$
$s := s \circ \{t/x\}$
else
return *falso* {Conjunto não unificável}
end if
end while
return s {s é o unificador mais geral}

Exemplo: Determinar o mgu do conjunto
$\{P(a,x,f(y)), P(u,v,w), P(a,r,f(c))\}$.

$\Delta = \{P(a,x,f(y)), P(u,v,w), P(a,r,f(c))\}$
$s = \{\}$, $D = \{a,u\}$, $\{t/x\} = \{a/u\}$
$\Delta = \{P(a,x,f(y)), P(a,v,w), P(a,r,f(c))\}$
$s = \{a/u\}$, $D = \{x,v,r\}$, $\{t/x\} = \{x/v\}$
$\Delta = \{P(a,x,f(y)), P(a,x,w), P(a,r,f(c))\}$
$s = \{a/u, x/v\}$, $D = \{x,r\}$, $\{t/x\} = \{x/r\}$
$\Delta = \{P(a,x,f(y)), P(a,x,w), P(a,x,f(c))\}$
$s = \{a/u, x/v, x/r\}$, $D = \{f(y), w, f(c)\}$, $\{t/x\} = \{f(y)/w\}$
$\Delta = \{P(a,x,f(y)), P(a,x,f(c))\}$
$s = \{a/u, x/v, x/r, f(y)/w\}$, $D = \{y,c\}$, $\{t/x\} = \{c/y\}$
$\Delta = \{P(a,x,f(c))\}$, $s = \{a/u, x/v, x/r, f(c)/w, c/y\}$

Exemplo: Determinar o mgu do conjunto
$\{P(f(y), b), P(x, y), P(f(b), z)\}$.

Exemplo: Determinar o mgu do conjunto $\{P(x,x), P(y,f(y))\}$.

Δ	s	D	$\{t/x\}$
$\{P(x,x), P(y,f(y))\}$	$\{\}$	$\{x,y\}$	$\{y/x\}$
$\{P(y,y), P(y,f(y))\}$	$\{y/x\}$	$\{y,f(y)\}$	falha

Definição 5.2.4 (Princípio da resolução – caso geral)

Sejam Ψ e Φ duas cláusulas sem variáveis em comum, α e β duas *fbfs* atómicas tais que $\alpha \in \Psi$ e $\neg\beta \in \Phi$, e α e β são unificáveis.
Seja s o unificador mais geral de α e β.
Então, podemos inferir a cláusula $((\Psi - \{\alpha\}) \cup (\Phi - \{\neg\beta\})) \cdot s$.

Exemplo: Consideremos as cláusulas
$\Psi = \{P(f(a), x)\}$ e $\Phi = \{\neg P(y, h(z)), Q(f(y), z)\}$.
Mgu de $P(f(a), x)$ e $P(y, h(z))$: $\{f(a)/y, h(z)/x\}$.

$$\{Q(f(y), z)\} \cdot \{f(a)/y, h(z)/x\} = \{Q(f(f(a)), z)\}.$$

Graficamente:

$$\{\underline{P(f(a), x)}\} \qquad \{\underline{\neg P(y, h(z))}, Q(f(y), z)\}$$

$$\{f(a)/y, h(z)/x\}$$

$$\{Q(f(f(a)), z)\}$$

Exemplo: Necessidade da renomeação das variáveis em comum.

Consideremos a seguinte afirmação:

$$\{\forall x, y[P(x,y) \to R(y,x)], \forall x, y[R(x,y) \to Q(y,x)]\} \\ \vdash \forall x, y[P(x,y) \to Q(x,y)].$$

Na forma clausal:

$$\{\{\neg P(x,y), R(y,x)\}, \{\neg R(x,y), Q(y,x)\}\} \\ \vdash \{\neg P(x,y), Q(x,y)\}.$$

Se não renomearmos as variáveis em comum, o mgu de $R(y,x)$ e $R(x,y)$ é $\{x/y\}$.
Com esta substituição e aplicando o princípio da resolução, apenas é possível obter a cláusula $\{\neg P(x,x), Q(x,x)\}$.

Renomeando as variáveis em comum (x e y), as cláusulas

$$\{\neg P(x,y), R(y,x)\} \text{ e } \{\neg R(x,y), Q(y,x)\}\}$$

passam a ser

$$\{\neg P(x,y), R(y,x)\} \text{ e } \{\neg R(x',y'), Q(y',x')\}\}.$$

O mgu de $R(y,x)$ e $R(x',y')$ é $\{y/x', x/y'\}$.

Com esta substituição e aplicando o princípio da resolução, obtemos a cláusula $\{\neg P(x,y), Q(x,y)\}$.