Lógica para Programação

Solução da Repescagem do Primeiro Teste

1 de Julho de 2014

15:00–16:30

1. **(1.0)** Escolha a *única* afirmação *correcta* entre as seguintes afirmações. Uma resposta certa vale 1 valor e *uma resposta errada desconta 0.4 valores*.

   A. Um argumento com as premissas verdadeiras e a conclusão verdadeira é válido.
   B. Um argumento com as premissas falsas e a conclusão verdadeira é inválido.
   C. Um argumento com as premissas verdadeiras e a conclusão falsa é inválido.
   D. Um argumento com as premissas falsas e a conclusão falsa é inválido.

   Resposta:

   B

2. **(2.0)** Para cada uma das seguintes questões, indique se é verdadeira ou falsa. Cada resposta certa vale 0.5 valores e *cada resposta errada desconta 0.2 valores*.

   (a) O princípio da forma afirma que se dois argumentos têm a mesma forma, então as conclusões dos dois argumentos têm o mesmo valor lógico.
   Resposta:
   Falsa

   (b) Numa lógica completa é possível demonstrar todos os argumentos válidos.
   Resposta:
   Verdadeira

   (c) A regra de inferência derivada conhecida por *modus tollens* afirma que numa prova que contém $\neg\alpha$ e $\alpha \rightarrow \beta$ se pode derivar $\neg\beta$.
   Resposta:
   Falsa

   (d) Uma fórmula na forma clausal corresponde a uma disjunção de conjunções de literais.
   Resposta:
   Falsa

3. **(2.0)** Considere o conjunto $\Delta = \{A\}$. Para cada um dos seguintes conjuntos diga se está ou não contido em $Th(\Delta)$. Cada resposta certa vale 0.5 valores e *cada resposta errada desconta 0.2 valores*.

(a) $\{\neg A\}$

Resposta:

Não contido

(b) $\{(P \wedge \neg P) \rightarrow Q\}$

Resposta:

Contido

(c) $\{P, Q\}$

Resposta:

Não contido

(d) $\{A \vee \neg A\}$

Resposta:

Contido

4. **(1.5)** Complete as seguintes frases, com uma das palavras *transitividade*, *dedução* ou *monotonicidade*. Cada resposta certa vale 0.5 valores e *cada resposta errada desconta 0.2 valores*.

   (a) Sabendo que $\{P, P \rightarrow Q\} \vdash Q$, podemos garantir que $\{P, P \rightarrow Q, \neg P\} \vdash Q$ pelo teorema da ___________.

   Resposta:

   Monotonicidade

   (b) Sabendo que $\{P, P \rightarrow Q, Q \rightarrow R\} \vdash Q$, $\{P, P \rightarrow Q, Q \rightarrow R\} \vdash R$ e $\{Q, R\} \vdash R \vee Q$ podemos garantir que $\{P, P \rightarrow Q, Q \rightarrow R\} \vdash R \vee Q$ pelo teorema da ___________.

   Resposta:

   Transitividade

5. Considere a linguagem da lógica proposicional e a sua semântica como definida nas aulas. Suponha que o sistema dedutivo desta lógica utilizava a abordagem da dedução natural e apenas continha duas regras de inferência, a regra da premissa e a seguinte regra de inferência (*Liberalização*, abreviada por "Lib"): em qualquer ponto de uma prova, podemos introduzir qualquer *fbf* por liberalização. Diga, justificando, se esta lógica é:

   (a) **(1.0)** Correta.

   Resposta:

   A lógica não é correcta pois qualquer argumento é demonstrável. Considermos o argumento inválido $(\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\}, \neg\beta)$. A seguinte prova corresponde a uma demonstração deste argumento:

1	α	Prem
2	$\alpha \rightarrow \beta$	Prem
3	$\neg\beta$	Lib

   (b) **(1.0)** Completa.

   Resposta:

   A lógica é completa pois como qualquer argumento é demonstrável, todos os argumentos válidos também são demonstráveis.

6. **(1.0)** Usando o sistema de dedução natural da lógica proposicional, demonstre o teorema $((P \to R) \vee (Q \to R)) \to ((P \wedge Q) \to R)$, completando a seguinte prova (apenas pode usar as regras Prem, Hip, Rep, Reit e introdução e eliminação de cada uma das conetivas):

1		Hip
2		Hip
3	P	
4	Q	
5		Rei, 1
6	$P \to R$	Hip
7		
8		
9	R	E$\to$, (7, 8)
10		Hip
11		Rei, 4
12		Rep, 10
13		E$\to$, (11, 12)
14	R	
15		I$\to$, (2, 14)
16		

Resposta:

1	$\vert\ (P \to R) \lor (Q \to R)$	Hip
2	$\vert\ \vert\ P \land Q$	Hip
3	$\vert\ \vert\ P$	E$\land$, 2
4	$\vert\ \vert\ Q$	E$\land$, 2
5	$\vert\ \vert\ (P \to R) \lor (Q \to R)$	Rei, 1
6	$\vert\ \vert\ \vert\ P \to R$	Hip
7	$\vert\ \vert\ \vert\ P$	Rei, 3
8	$\vert\ \vert\ \vert\ P \to R$	Rep, 6
9	$\vert\ \vert\ \vert\ R$	E$\to$, (7, 8)
10	$\vert\ \vert\ \vert\ Q \to R$	Hip
11	$\vert\ \vert\ \vert\ Q$	Rei, 4
12	$\vert\ \vert\ \vert\ Q \to R$	Rep, 10
13	$\vert\ \vert\ \vert\ R$	E$\to$, (11, 12)
14	$\vert\ \vert\ R$	E$\lor$, (5, (6, 9), (10, 13))
15	$\vert\ (P \land Q) \to R$	I$\to$, (2, 14)
16	$((P \to R) \lor (Q \to R)) \to ((P \land Q) \to R)$	I$\to$, (1, 15)

7. **(1.0)** Usando o sistema de dedução natural da lógica proposicional, demonstre o teorema $\neg\neg P \leftrightarrow P$. Apenas pode usar as regras Prem, Hip, Rep, Reit e introdução e eliminação de cada uma das conetivas.

Resposta:

Para simplificar a prova, provamos, separadamente, cada uma das implicações:

i. $\neg\neg P \to P$

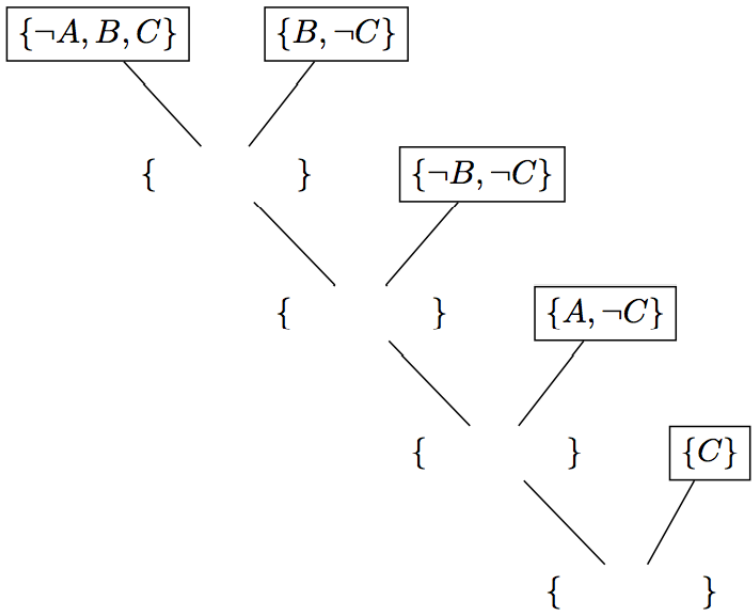
1	$\vert\ \neg\neg P$	Hip
2	$\vert\ P$	E$\neg$, 1
3	$\neg\neg P \to P$	I$\to$, (1, 2)

ii. $P \to \neg\neg P$

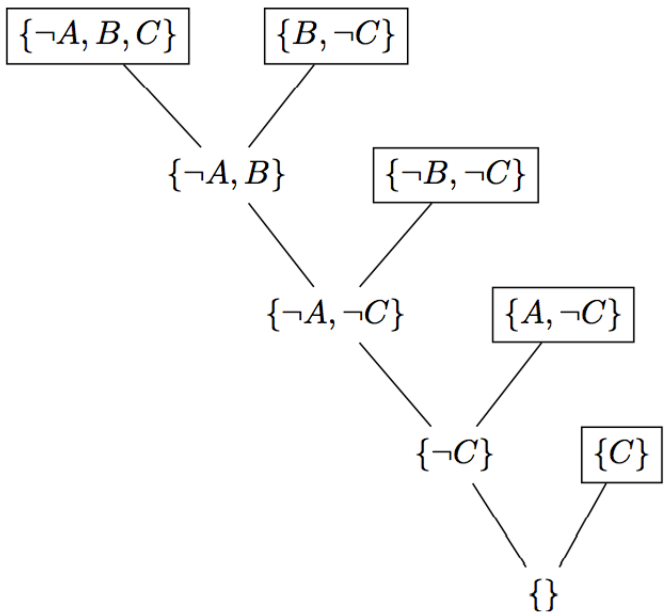
1	$\vert\ P$	Hip
2	$\vert\ \vert\ \neg P$	Hip
3	$\vert\ \vert\ P$	Rei, 1
4	$\vert\ \vert\ \neg P$	Rep, 2
5	$\vert\ \neg\neg P$	I$\neg$, 2, (3, 4)
6	$P \to \neg\neg P$	I$\to$, (1, 5)

8. Considere uma prova por refutação usando resolução.

(a) **(1.0)** Preencha a informação em falta na figura que se segue.



Resposta:



(b) **(0.5)** Suponha que esta prova por refutação corresponde a um teorema. Escreva esse teorema.

Resposta:

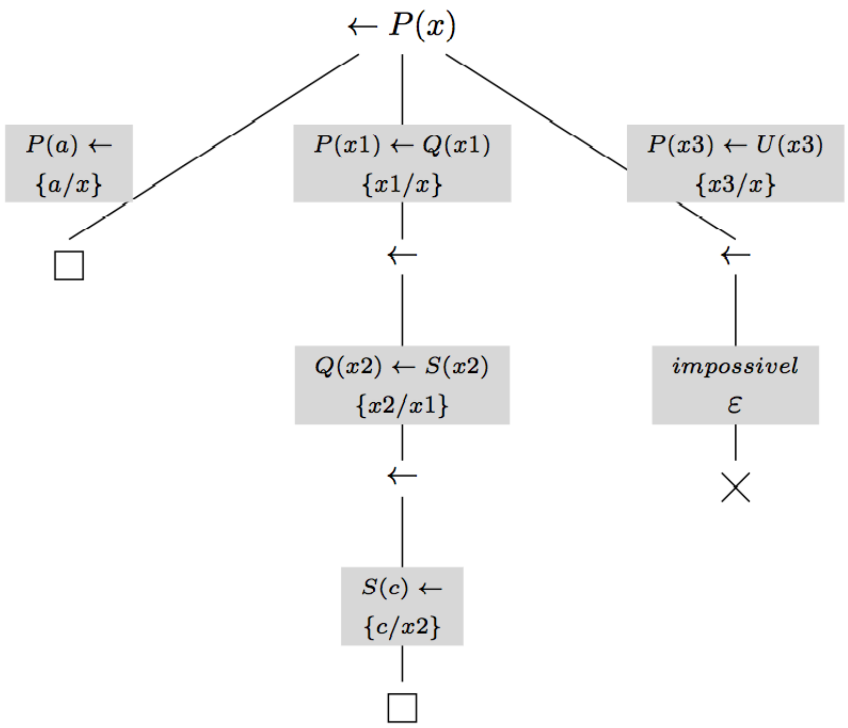
$\neg((\neg A \vee B \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg C) \wedge C)$

(c) **(0.5)** Qual a estratégia de seleção de cláusulas que foi usada nesta prova por refutação?

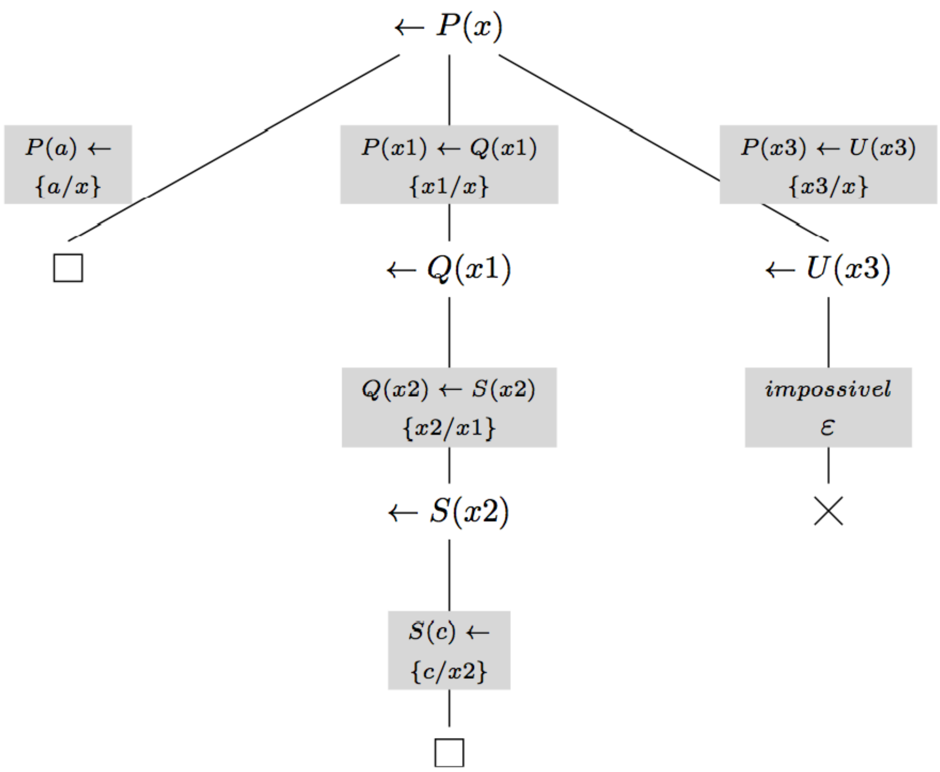
Resposta:

Resolução linear.

9. Considere a seguinte árvore de resolução SLD parcialmente preenchida.



(a) **(2.0)** Preencha na figura a informação em falta.
Resposta:



(b) **(0.5)** Indique as soluções encontradas.
Resposta:
As soluções são: $\{a/x\}$ e $\{c/x\}$.

10. **(1.0)** Considere os seguintes predicados:

$Inteiro(x) = x$ é um número inteiro

$Par(x) = x$ é um número par

$Impar(x) = x$ é um número ímpar

$Maior(x, y) = x$ é maior que y

Para cada uma das seguintes afirmações escolha a fórmula que a representa. Cada resposta certa vale 0.5 valores e *cada resposta errada desconta 0.2 valores*.

(a) *Para qualquer número par, existe um número ímpar maior do que esse número par.*
   A. $\forall x[Par(x) \land \exists y[Impar(y) \rightarrow Maior(y, x)]]$
   B. $\forall x[Par(x) \rightarrow \exists y[Impar(y) \land Maior(y, x)]]$
   C. $\forall x, y[Par(x) \land Impar(y) \land Maior(y, x)]$

   Resposta:

   B

(b) *Não existe nenhum inteiro que seja maior que todos os inteiros.*
   A. $\neg\exists x[Inteiro(x) \land \forall y[Inteiro(y) \rightarrow Maior(x, y)]]$
   B. $\neg\exists x[Inteiro(x) \rightarrow \forall y[Inteiro(y) \rightarrow Maior(x, y)]]$
   C. $\neg\exists x, y[Inteiro(x) \land Inteiro(y) \land Maior(x, y)]$

   Resposta:

   A

11. **(1.0)** Usando o sistema de dedução natural da lógica de primeira ordem, demonstre o argumento $\{\forall x[\neg P(x)]\} \vdash \forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ (apenas pode usar as regras Prem, Hip, Rep, Reit e introdução e eliminação de cada uma das conetivas e quantificadores).

Resposta:

1		$\forall x[\neg P(x)]$	Prem
2	x_0	$\quad P(x_0)$	Hip
3		$\quad\quad \neg Q(x_0)$	Hip
4		$\quad\quad P(x_0)$	Rei, 2
5		$\quad\quad \forall x[\neg P(x)]$	Rei, 1
6		$\quad\quad \neg P(x_0)$	E$\forall$, 5
7		$\quad \neg\neg Q(x_0)$	I$\neg$, (3, (4, 6))
8		$\quad Q(x_0)$	E$\neg$, 7
9		$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	I$\rightarrow$, (2, 9)
10		$\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$	I$\forall$, (2, 9)

12. **(2.0)** Preencha a seguinte tabela, tendo em conta a fórmula dada e a etapa da conversão para a forma clausal pedida.

Fórmula Original	Eliminação de	Fórmula resultante
$\exists z[A(z)] \wedge \forall x, y[\neg B(x) \vee \exists w[C(y, x, w)]]$	$\exists$	
$(P \rightarrow \neg Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow S)$	$\rightarrow$	
$(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee S)$	$\wedge$	
$\forall z[A(z)] \wedge \exists x, y[\neg B(x) \vee \exists w[C(y, x, w)]]$	$\exists$	

Resposta:

Fórmula Original	Eliminação de	Fórmula resultante
$\exists z[A(z)] \wedge \forall x, y[\neg B(x) \vee \exists w[C(y, x, w)]]$	$\exists$	$A(a) \wedge \forall x, y[\neg B(x) \vee [C(y, x, f(x, y))]]$
$(P \rightarrow \neg Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow S)$	$\rightarrow$	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee S)$
$(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee S)$	$\wedge$	$\{\neg P \vee \neg Q, \neg P \vee R, \neg P \vee S\}$
$\forall z[A(z)] \wedge \exists x, y[\neg B(x) \vee \exists w[C(y, x, w)]]$	$\exists$	$\forall z[A(z)] \wedge [\neg B(a) \vee [C(b, a, c)]]$

13. **(1.0)** Considere o seguinte conjunto de *fbfs*:

$$\{Q(a, x, y, z), Q(x, z, b, f(w))\}$$

Indique qual o unificador mais geral para o conjunto de *fbfs*, ou escreva que as *fbfs* não são unificáveis. Justifique a sua resposta.

Resposta:

As fbfs não são unificáveis porque, para haver unificação, as variáveis x e z teriam de ser substituídas pela constante a, e é impossível haver unificação entre a e $f(w)$ pois nenhuma delas é uma variável.