INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Licenciatura Engenharia Informática e de Computadores

Lógica para Programação

Primeiro Teste

8 de Maio de 2010

11:00–12:30

Nome: ______________________________ Número: __________

1. **(2.0)** Escolha a *única* resposta *correcta* para as seguintes questões. Cada resposta certa vale 1 valor e *cada resposta errada desconta 0.4 valores*.

   (a) Em relação à definição da validade de um argumento, considere as seguintes afirmações:

   A. Um argumento com todas as premissas verdadeiras e a conclusão também verdadeira, é um argumento válido.
   B. Um argumento com a mesma forma que um argumento válido é um argumento válido.
   C. Um argumento com todas as premissas falsas e a conclusão falsa é um argumento inválido.
   D. Um argumento em que a conclusão é uma das premissas é um argumento inválido.

   Resposta:

   B.

   (b) Tendo em atenção a definição da linguagem da lógica de primeira ordem, considere as seguintes afirmações:

   A. Uma variável é um termo.
   B. Um termo é uma variável.
   C. Um termo é uma *fbf*.
   D. Uma constante não é um termo.

   Resposta:

   A.

2. **(2.0)** Escolha a *única* resposta *incorrecta* para as seguintes questões. Cada resposta certa vale 1 valor e *cada resposta errada desconta 0.4 valores*.

   (a) Tendo em atenção a classificação das *fbfs* sob o ponto de vista semântico, considere as seguintes afirmações:

   A. Uma *fbf* falsificável pode ser contraditória.
   B. Uma *fbf* tautológica é satisfazível.
   C. Uma *fbf* satisfazível pode ser contraditória.
   D. Uma *fbf* satisfazível pode ser tautológica.

   Resposta:

   C.

(b) Considere as seguintes afirmações em relação à forma clausal:

A. Uma cláusula unitária é constituída apenas por um literal.
B. A forma conjuntiva normal corresponde a uma conjunção de disjunções.
C. A forma conjuntiva normal corresponde a uma disjunção de conjunções.
D. A cláusula vazia é um tipo particular de cláusula.

Resposta:

C.

3. **(2.0)** Considere os seguintes argumentos. Avalie-os quanto à sua validade, justificando a sua resposta. Todas as alíneas têm igual cotação.

(a) a maioria dos estudantes não são do ensino superior
os alunos do IST são estudantes
portanto, os alunos do IST não são do ensino superior

Resposta:

Neste argumento, as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa. Logo, o argumento não é válido.

(b) os mamíferos não são peixes
os golfinhos são mamíferos
portanto, os golfinhos não são peixes

Resposta:

O argumento é válido, uma vez que os golfinhos são mamíferos, os quais não são peixes.

(c) os mamíferos não são peixes
portanto, a maior parte dos mamíferos não são peixes

Resposta:

O argumento é válido uma vez que tendo os mamíferos a característica de não ser peixe, a maioria dos mamíferos não pode deixar de ter essa caracteristica.

(d) os peixes não são mamíferos
os golfinhos são mamíferos
portanto, os golfinhos não são peixes

Resposta:

Se os elementos do conjunto peixes não estão contidos no conjunto dos mamíferos, então estes dois conjuntos não têm elementos em comum. Uma vez que os golfinhos são um subconjunto dos mamíferos, o conjunto dos golfinhos também não terá qualquer elemento em comum com os peixes. Pode-se assim concluir que os golfinhos não são peixes. Logo, o argumento é válido.

4. **(1.0)** Enuncie a regra da eliminação da disjunção utilizada no sistema de dedução natural e explique por palavras suas o seu significado intuitivo.

   Resposta:

n	$\alpha \vee \beta$	
o	$\quad \mid \alpha$	Hyp
$\vdots$	$\quad \mid \vdots$	
p	$\quad \mid \gamma$	
r	$\quad \mid \beta$	Hyp
$\vdots$	$\quad \mid \vdots$	
s	$\quad \mid \gamma$	
m	γ	$\vee$E, (n, (o, p), (r, s))

   A regra da eliminação da disjunção, abreviada por E$\vee$, corresponde a um raciocínio por casos: a partir da *fbf* $\alpha \vee \beta$ (significando intuitivamente que pelo menos uma das *fbfs* α ou β se verifica), se formos capazes de derivar uma terceira *fbf*, γ, independentemente, a partir de cada uma das *fbfs* α e β, então, certamente que γ se verifica.

5. Demonstre os seguintes argumento e teorema usando o sistema de dedução natural. Apenas pode utilizar as regras de inferência básicas do sistema de dedução natural (Prem, Rep, Hip, Rei, I$\wedge$, E$\wedge$, I$\rightarrow$, E$\rightarrow$, I$\neg$, E$\neg$, I$\vee$, E$\vee$, I$\forall$, E$\forall$, I$\exists$, E$\exists$).

   (a) **(1.5)** $\{(A \vee B) \wedge C, \neg B\} \vdash A \wedge C$

   Resposta:

1	$(A \vee B) \wedge C$	Prem
2	$\neg B$	Prem
3	C	$\wedge$E, 1
4	$A \vee B$	$\wedge$E, 1
5	$\quad \mid A$	Hyp
6	$\quad \mid A$	Rep, 5
7	$\quad \mid B$	Hyp
8	$\quad \mid \quad \mid \neg A$	Hyp
9	$\quad \mid \quad \mid B$	Rei, 7
10	$\quad \mid \quad \mid \neg B$	Rei, 2
11	$\quad \mid \neg\neg A$	$\neg$I, 8, (9, 10)
12	$\quad \mid A$	$\neg$E, 11
13	A	$\vee$E, 4, (5, 6), (7, 12)
14	$A \wedge C$	$\wedge$I, (13, 3)

(b) **(1.0)** $\exists x[\neg F(x)] \rightarrow \neg\forall x[F(x)]$
Resposta:

1		$\exists x[\neg F(x)]$	Hyp
2	x_0	$\neg F(x_0)$	Hyp
3		$\forall x[F(x)]$	Hyp
4		$F(x_0)$	∀E, 3
5		$\neg F(x_0)$	Rei, 2
6		$\neg\forall x[F(x)]$	¬I, (3, (4, 5))
7		$\neg\forall x[F(x)]$	∃E, (1, (2, 6))
8		$\exists x[\neg F(x)] \rightarrow \neg\forall x[F(x)]$	→I, (1, 7)

6. Considere o seguinte argumento:

$$\{P \rightarrow S, Q \rightarrow R, P, Q\} \vdash (S \wedge R)$$

(a) **(0.5)** Transforme o conjunto de premissas em forma clausal.
Resposta:

$$\{\{\neg P, S\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{Q\}\}$$

(b) **(1.0)** Prove o argumento anterior, usando resolução, através de uma demonstração por refutação.
Resposta:
A negação da conclusão ($\neg(S \wedge R)$), em forma clausal é $\{\neg S, \neg R\}$. Adicionando a negação da conclusão às premissas, podemos obter do seguinte modo a cláusula vazia.

1	$\{\neg P, S\}$	Prem
2	$\{\neg Q, R\}$	Prem
3	$\{P\}$	Prem
4	$\{Q\}$	Prem
5	$\{\neg S, \neg R\}$	Prem
6	$\{S\}$	Res, (1,3)
7	$\{R\}$	Res, (2,4)
8	$\{\neg R\}$	Res, (5,6)
9	$\{\}$	Res, (7,8)

7. **(1.5)** Transforme a seguinte *fbf* em forma clausal. Indique todos os passos seguidos.

$$\exists x[P(x)] \wedge \neg(\forall x, y[Q(x, y) \rightarrow \exists z[R(x, z) \wedge R(y, z)]])$$

Resposta:

(a) *Eliminação do símbolo →*
$\exists x[P(x)] \wedge \neg(\forall x, y[\neg Q(x, y) \vee \exists z[R(x, z) \wedge R(y, z)]])$

(b) *Redução do domínio do símbolo ¬*
$\exists x[P(x)] \wedge \exists x, y[\neg(\neg Q(x, y) \vee \exists z[R(x, z) \wedge R(y, z)])]$
$\exists x[P(x)] \wedge \exists x, y[Q(x, y) \wedge \neg(\exists z[R(x, z) \wedge R(y, z)])]$
$\exists x[P(x)] \wedge \exists x, y[Q(x, y) \wedge \forall z[\neg(R(x, z) \wedge R(y, z))]]$
$\exists x[P(x)] \wedge \exists x, y[Q(x, y) \wedge \forall z[\neg R(x, z) \vee \neg R(y, z)]]$

(c) *Normalização de variáveis*
$\exists x[P(x)] \wedge \exists w, y[Q(w, y) \wedge \forall z[\neg R(w, z) \vee \neg R(y, z)]]$

(d) *Eliminação dos quantificadores existenciais*
$P(sk_1) \wedge Q(sk_2, sk_3) \wedge \forall z[\neg R(sk_2, z) \vee \neg R(sk_3, z)]$

(e) *Conversão para a forma "Prenex" normal*
$\forall z[P(sk_1) \wedge Q(sk_2, sk_3) \wedge (\neg R(sk_2, z) \vee \neg R(sk_3, z))]$

(f) *Eliminação da quantificação universal*
$P(sk_1) \wedge Q(sk_2, sk_3) \wedge (\neg R(sk_2, z) \vee \neg R(sk_3, z))$

(g) *Obtenção da forma conjuntiva normal*
Já está.

(h) *Eliminação do símbolo* $\wedge$ $\{P(sk_1), Q(sk_2, sk_3), \neg R(sk_2, z) \vee \neg R(sk_3, z)\}$

(i) *Eliminação do símbolo* $\vee$
$\{\{P(sk_1)\}, \{Q(sk_2, sk_3)\}, \{\neg R(sk_2, z), \neg R(sk_3, z)\}\}$

8. **(1.5)** Utilize o algoritmo de unificação para determinar se o seguinte conjunto de *fbfs* é unificável, e, no caso de o ser, determine o unificador mais geral. Mostre todos os passos intermédios usados nos cálculos. Considere que w, x, y e z são variáveis

$$\{P(f(x), x, g(z)), P(y, a, g(b)), P(y, a, w)\}$$

Resposta:

Conjunto de *fbfs*	Conj. desacordo	Substituição
$\{P(f(x), x, g(z)), P(y, a, g(b)), P(y, a, w)\}$	$\{f(x), y\}$	$\{f(x)/y\}$
$\{P(f(x), x, g(z)), P(f(x), a, g(b)), P(f(x), a, w)\}$	$\{x, a\}$	$\{a/x\}$
$\{P(f(a), a, g(z)), P(f(a), a, g(b)), P(f(a), a, w)\}$	$\{g(z), g(b), w\}$	$\{g(z)/w\}$
$\{P(f(a), a, g(z)), P(f(a), a, g(b))\}$	$\{b, z\}$	$\{b/z\}$
$\{P(f(a), a, g(b))\}$	—	—

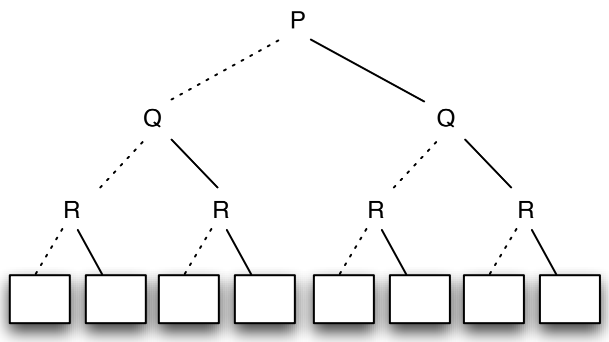
O unificador mais geral é $\{f(a)/y, a/x, g(b)/w, b/z\}$.

9. **(1.0)** Eliminando as variáveis pela ordem C, A, B, aplique o algoritmo DP à seguinte *fbf* na forma clausal {{¬A, B}, {¬B, C}, {A}, {¬C}}. Caso a *fbf* seja satisfazível, encontre uma testemunha.

Resposta:

B_C: {¬B, C}, {¬C}
B_A: {¬A, B}, {A}
B_B: {¬B},{B}
Dado que aplicando resolução a {¬B} (obtido aplicando resolução aos baldes de B_C) e {B} (obtido aplicando resolução aos baldes de B_A) chegamos ao conjunto vazio (contradição), a fórmula não é satisfazível, pelo que não existe nenhuma testemunha.

10. Considere a ordenação $[P, Q, R]$ e a seguinte árvore binária, relativa à *fbf* $\alpha = P \rightarrow (Q \wedge (\neg R \rightarrow \neg Q))$.



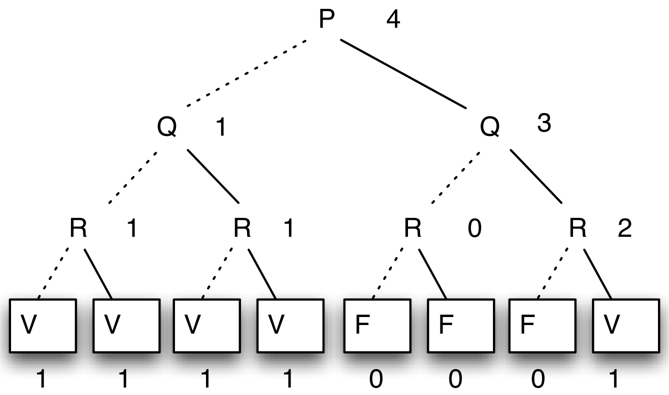
(a) **(0.5)** Tendo em conta que a árvore binária anterior representa a *fbf* α, indique na própria figura quais os valores das suas folhas.

Resposta:

Ver (b).

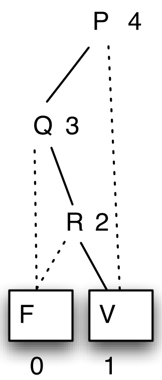
(b) **(0.5)** Indique na figura quais os rótulos de cada nó da árvore resultantes da aplicação do algoritmo *rotula*.

Resposta:



(c) **(0.5)** De acordo com os rótulos calculados na alínea (b), apresente o OBDD resultante da aplicação do algoritmo *compacta*.

Resposta:



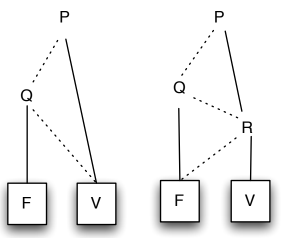
(d) **(0.5)** Considere o conjunto de *fbfs* $\Delta = \{\neg P, \neg R \rightarrow \neg Q\}$. Quais são os modelos deste conjunto de fórmulas? Será que α $(= P \rightarrow (Q \wedge (\neg R \rightarrow \neg Q)))$ é consequência lógica de Δ? Justifique as suas respostas.

Resposta:

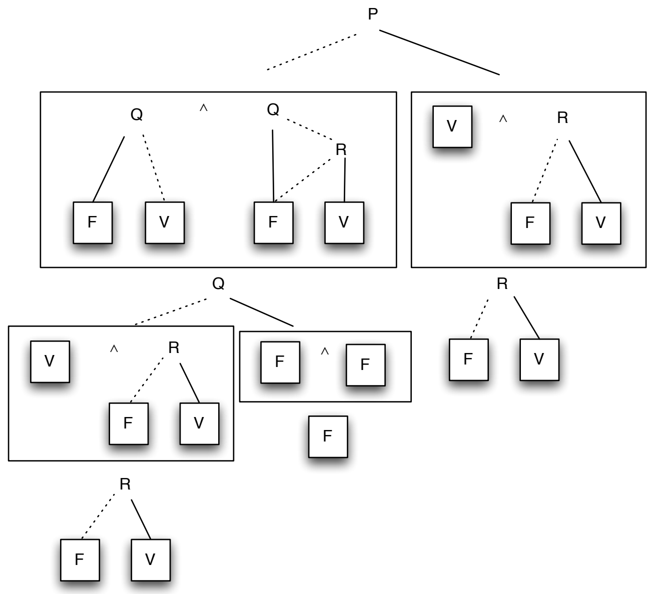
Os modelos de Δ são as interpretações que satisfazem todas as fórmulas do conjunto. Assim sendo, os modelos de Δ são as seguintes interpretações: $I(P) = F$ e $I(Q) = I(R) = V$; $I(P) = I(Q) = F$ e $I(R) = V$; $I(P) = I(Q) = I(R) = F$.

A *fbf* $\alpha = P \rightarrow (Q \wedge (\neg R \rightarrow \neg Q))$ é consequência lógica de Δ se todos os modelos de Δ são modelos de α (ou, dito de outro modo, se α tem o valor verdadeiro em todos os modelos de Δ). Dado que tal se verifica, α é consequência lógica de Δ.

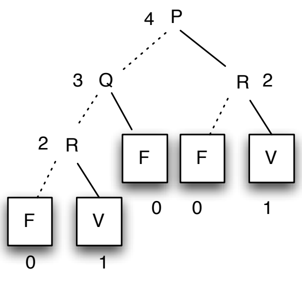
11. Considere os OBDDs β e γ, respectivamente, com as seguintes formas canónicas:



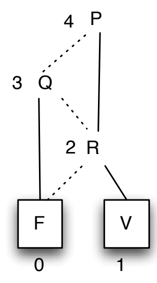
(a) **(1.5)** Através da utilização do algoritmo *aplica*, calcule o OBDD reduzido correspondente à *fbf* $\beta \wedge \gamma$.
Resposta:



=

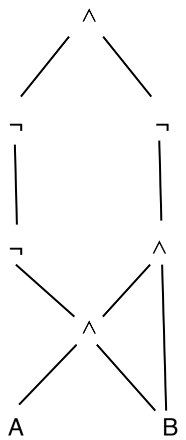


=



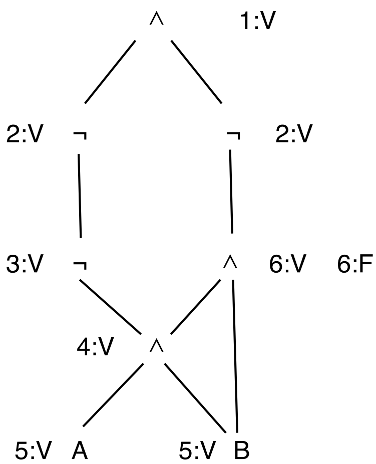
(b) **(0.5)** Explique como calcularia o OBDD reduzido correspondente à *fbf* $\neg\beta$ utilizando o algoritmo *aplica*.
Resposta:
Dado que a *fbf* $\neg\beta$ é equivalente à *fbf* $\beta \oplus V$ (recorde-se que $\oplus$ representa a disjunção exclusiva) e dado que o algoritmo *aplica* recebe como argumentos uma operação binária e dois OBDDs, poderíamos assim correr este algoritmo usando a operação binária $\oplus$ e os OBDDs o_β e o_V.

12. Considere o seguinte DAG:



(a) **(0.4)** Indique a que *fbf* corresponde o DAG.
Resposta:
$\neg(\neg(A \wedge B)) \wedge \neg((A \wedge B) \wedge B)$

(b) **(0.6)** Usando o algoritmo de propagação de marcas verifique se a *fbf* é satisfazível. Se for satisfazível, apresente uma testemunha. Caso não seja, explique porque não o é.
Resposta:



Dado que o algoritmo de propagação de marcas chegou a uma contradição (indicada na marca 6, na figura), a *fbf* não é satisfazível, pelo que não existe nenhuma testemunha.