a) $L_A = \{ M\$w\$t : M \in \mathcal{M}^{\Sigma}, w \in \Sigma^*, t \in \{0,1\}^*$ em que M aceita w em t_{bin} passos $\}$

é decidida pela seguinte máq. de Turing determinista com duas fitas:

D: input x

se x não é da forma $M\$w\$t$ $\longrightarrow$ q_{RJ}

senão inicializa contador binário na segunda fita a ~~t~~ t e executa U (máq. universal) sobre $M\$w$ decrementando t a cada passo

se U aceita quando $t=0$ $\longrightarrow$ q_{AC}

se U termina com $t \neq 0$ ou U não termina mas $t=0$ $\longrightarrow$ q_{RJ}

- D é classificadora pois termina sempre, aceitando ou rejeitando, ao fim de no máximo t_{bin} passos de computação de U.

- D aceita x sse $x = M\$w\$t$ e U aceita $M\$w$ em t_{bin} passos

  sse $x = M\$w\$t$ e M aceita w em t_{bin} passos

  sse $x \in L_A$

Para mostrar que $L_A \in \text{EXPTIME}$ basta verificar que

$$\text{time}_D(n) \leq \underbrace{O(n)}_{\text{verificação do input}} + \underbrace{O(n)}_{\text{inicialização do contador}} + \overbrace{t_{bin}}^{\text{nº máximo passos}} \times \Big(\underbrace{O(n)}_{\text{pesquisa da transição a efectuar na máq. universal}} + \underbrace{O(n)}_{\text{decremento do contador}} \Big)$$

$$\leq O(n) + 2^{O(|t|)} \times O(n) \leq 2^{O(n)}$$

b) Seja $L \in SPACE(f(n))$, e D uma máq. classificadora determinista tal que $L_{AC}(D) = L$ e $space_D(n) = \mathcal{O}(f(n))$.

Como qualquer computação de D termina, não é possível que a mesma configuração ocorra duas vezes na mesma computação.
Logo, o comprimento máximo de qualquer computação de D é limitado pelo número de possíveis configurações (em espaço $space_D(n)$), ou seja,

$$time_D(n) \leq \underbrace{|\Gamma|^{space_D(n)}}_{\substack{\text{possíveis} \\ \text{strings na fita} \\ \text{onde } \Gamma \text{ é} \\ \text{o alfabeto} \\ \text{de trabalho} \\ \text{de } D}} \times \underbrace{|Q|}_{\substack{\text{possíveis} \\ \text{estados} \\ \text{onde} \\ Q \text{ é o} \\ \text{conj. de} \\ \text{estados} \\ \text{de } D}} \times \underbrace{space_D(n)}_{\substack{\text{possíveis} \\ \text{posições} \\ \text{da cabeça} \\ \text{de leitura/escrita}}}$$

$$\leq 2^{\mathcal{O}(space_D(n))} \times \mathcal{O}(space_D(n)) = 2^{\mathcal{O}(space_D(n))}$$

Conclui-se então que $L \in TIME(2^{\mathcal{O}(f(n))})$ e portanto que $SPACE(f(n)) \subseteq TIME(2^{\mathcal{O}(f(n))})$.

Instituto Superior Técnico – LEIC, Alameda

Teoria da Computação

Abril 2022 MAP30–4A.1 Duração: 30m

Nome: ______________________ **Número:** ___________

a) (3.0 valores) Seja Σ um alfabeto, $\$ \notin \Sigma$. Considere a linguagem $L_A \subseteq (\Sigma \cup \{0, 1, \$\})^*$ constituída pelas palavras da forma

$$M \, \$ \, w \, \$ \, t$$

em que $M \in \mathcal{M}^{\Sigma}$, $w \in \Sigma^*$ e $t \in \{0, 1\}^*$ é um número representado em binário, para as quais M aceita w em exactamente t passos de computação. Mostre que $L_A \in$ **EXPTIME**.

b) (1.0 valor) Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função. Demonstre que $\mathbf{SPACE}(f(n)) \subseteq \mathbf{TIME}(2^{\mathcal{O}(f(n))})$.

Instituto Superior Técnico – LEIC, Alameda

Teoria da Computação

Abril 2022 MAP30–4A.2 Duração: 30m

Nome: ________________________ **Número:** ____________

a) (3.0 valores) Seja Σ um alfabeto, $\# \notin \Sigma$. Considere a linguagem $L_A \subseteq (\Sigma \cup \{0,1,\#\})^*$ constituída pelas palavras da forma

$$D \# t \# x$$

em que $D \in \mathcal{M}^{\Sigma}$, $t \in \Sigma^*$ e $x \in \{0,1\}^*$ é um número representado em binário, para as quais D aceita t em exactamente x passos de computação. Mostre que $L_A \in$ **EXPTIME**.

b) (1.0 valor) Seja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função. Demonstre que $\mathbf{SPACE}(g(n)) \subseteq \mathbf{TIME}(2^{\mathcal{O}(g(n))})$.

Instituto Superior Técnico – LEIC, Alameda

Teoria da Computação

Abril 2022 MAP30–4B.1 Duração: 30m

Nome: ________________________ **Número:** ____________

a) (3.0 valores) Considere a linguagem $L_B \subseteq \{0, 1, \$\}^*$ constituída pelas palavras da forma

$$M \, \$ \, n$$

em que $M \in \mathcal{M}^{\{0,1\}}$ e $n \in \{0, 1\}^*$ é um número representado em binário, para as quais M aceita n executando no máximo n passos de computação. Mostre que $L_B \in \mathbf{EXPTIME}$.

b) (1.0 valor) Demonstre que $\mathbf{PSPACE} \subseteq \mathbf{EXPTIME}$.

Instituto Superior Técnico – LEIC, Alameda

Teoria da Computação

Abril 2022 MAP30–4B.2 Duração: 30m

Nome: ________________________ **Número:** ____________

a) (3.0 valores) Considere a linguagem $L_B \subseteq \{0,1,\#\}^*$ constituída pelas palavras da forma

$$T\,\#\,u$$

em que $T \in \mathcal{M}^{\{0,1\}}$ e $u \in \{0,1\}^*$ é um número representado em binário, para as quais T aceita u executando no máximo u passos de computação. Mostre que $L_B \in$ **EXPTIME**.

b) (1.0 valor) Demonstre que **PSPACE** $\subseteq$ **EXPTIME**.

Instituto Superior Técnico – LEIC, Alameda

Teoria da Computação

Abril 2022 MAP30–4C.1 Duração: 30m

Nome: ________________________ **Número:** ____________

a) (3.0 valores) Seja Σ um alfabeto, $\$ \notin \Sigma$. Considere a linguagem $L_C \subseteq (\Sigma \cup \{0, 1, \$\})^*$ constituída pelas palavras da forma

$$n \, \$ \, M \, \$ \, w$$

em que $n \in \{0,1\}^*$ é um número representado em binário, $M \in \mathcal{M}^\Sigma$ e $w \in \Sigma^*$, para as quais a computação de M sobre o *input* w termina em até n passos de computação. Mostre que $L_C \in \mathbf{EXPTIME}$.

b) (1.0 valor) Demonstre que $\mathbf{SPACE}(n^k) \subseteq \mathbf{EXPTIME}$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Instituto Superior Técnico – LEIC, Alameda

Teoria da Computação

Abril 2022 MAP30–4C.2 Duração: 30m

Nome: ______________________ **Número:** ___________

a) (3.0 valores) Seja Σ um alfabeto, $\# \notin \Sigma$. Considere a linguagem $L_C \subseteq (\Sigma \cup \{0, 1, \#\})^*$ constituída pelas palavras da forma

$$k \# R \# x$$

em que $k \in \{0, 1\}^*$ é um número representado em binário, $R \in \mathcal{M}^\Sigma$ e $x \in \Sigma^*$, para as quais a computação de R sobre o *input* x termina em até k passos de computação. Mostre que $L_C \in$ **EXPTIME**.

b) (1.0 valor) Demonstre que **SPACE**$(n^c) \subseteq$ **EXPTIME** para qualquer $c \in \mathbb{N}$.

Instituto Superior Técnico – LEIC, Alameda

Teoria da Computação

Abril 2022 MAP30–4D.1 Duração: 30m

Nome: ______________________ **Número:** ___________

a) (3.0 valores) Considere a linguagem $L_D \subseteq \{0,1,\$\}^*$ constituída pelas palavras da forma

$$R\,\$\,v$$

em que $R \in \mathcal{M}^{\{0,1\}}$ e $v \in \{0,1\}^*$ é um número representado em binário, para as quais R aceita v executando no máximo v passos de computação. Mostre que $L_D \in \mathbf{EXPTIME}$.

b) (1.0 valor) Demonstre que $\mathbf{PSPACE} \subseteq \mathbf{EXPTIME}$.

Instituto Superior Técnico – LEIC, Alameda

Teoria da Computação

Abril 2022 MAP30–4D.2 Duração: 30m

Nome: ________________________ **Número:** ____________

a) (3.0 valores) Considere a linguagem $L_D \subseteq \{0,1,\#\}^*$ constituída pelas palavras da forma

$$T \# b$$

em que $T \in \mathcal{M}^{\{0,1\}}$ e $b \in \{0,1\}^*$ é um número representado em binário, para as quais T aceita b executando no máximo b passos de computação. Mostre que $L_D \in \textbf{EXPTIME}$.

b) (1.0 valor) Demonstre que $\textbf{PSPACE} \subseteq \textbf{EXPTIME}$.