Lógica para Programação

Solução do Primeiro Teste

9 de Abril de 2012

18:00–19:30

1. **(1.0)** Diga o que é a forma de um argumento. Qual a importância de estudar os argumentos quanto à forma? Qual o princípio subjacente a este estudo?

   Resposta:

   A *forma* de um argumento é um argumento em que os termos específicos (ou seja, os termos não lógicos) de cada uma das proposições constituintes são substituídos por um símbolo associado à sua categoria gramatical.

   A forma de um argumento pode ser estudada independentemente do domínio específico de que tratam as proposições que o constituem. Na realidade é em virtude da sua forma e não do seu domínio específico que um argumento é válido ou é inválido. Isto significa que todos os argumentos com a mesma forma são ou todos válidos ou todos inválidos. Este facto é traduzido pelo *princípio da forma*: Se dois argumentos têm a mesma forma então estes são ambos válidos ou ambos inválidos.

2. **(0.5)** O que é uma fórmula satisfazível? Dê um exemplo.

   Resposta:

   Uma fórmula diz-se satisfazível se e só se existe uma interpretação na qual a fórmula é verdadeira. A fórmula $P \vee Q$ é satisfazível pois é verdadeira na interpretação com base na função de valoração $v(P) = V$, $v(Q) = F$.

3. Considerando o argumento (Δ, α), em que Δ = {P_1, *O James Bond é um agente secreto*} e α = *O 007 é um agente secreto*, defina a premissa P_1 de modo a que:

   (a) **(0.5)** O argumento seja válido. Justifique a sua resposta.
   Resposta:
   Se P_1 = *O James Bond é o 007*, então o argumento é válido, pois não é possível ter as premissas verdadeiras e a conclusão falsa.

   (b) **(0.5)** O argumento seja inválido. Justifique a sua resposta.
   Resposta:
   Se P_1 = *O James Bond gosta de batatas fritas*, então o argumento é inválido, pois é possível ter as premissas verdadeiras e a conclusão falsa.

4. **(1.5)** Prove o seguinte argumento usando o sistema de dedução natural da lógica proposicional. Deve usar apenas as regras de inferência básicas (Prem, Rep, Hip, Rei, I$\wedge$, E$\wedge$, I$\rightarrow$, E$\rightarrow$, I$\neg$, E$\neg$, I$\vee$, E$\vee$):

$$(\{P \rightarrow Q, \neg Q\}, \neg P)$$

Resposta:

1	$P \rightarrow Q$	Prem
2	$\neg Q$	Prem
3	$\vert\ P$	Hip
4	$\vert\ P \rightarrow Q$	Rei, 1
5	$\vert\ Q$	E$\rightarrow$, (3, 4)
6	$\vert\ \neg Q$	Rei, 2
7	$\neg P$	I$\neg$, (3, (5, 6))

5. **(1.5)** Prove o seguinte teorema usando o sistema de dedução natural da lógica proposicional. Deve usar apenas as regras de inferência básicas (Prem, Rep, Hip, Rei, I$\wedge$, E$\wedge$, I$\rightarrow$, E$\rightarrow$, I$\neg$, E$\neg$, I$\vee$, E$\vee$):

$$(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg(P \wedge Q)$$

Resposta:

1	$\vert\ \neg P \vee \neg Q$	Hip
2	$\vert\ \vert\ \neg P$	Hip
3	$\vert\ \vert\ \vert\ P \wedge Q$	Hip
4	$\vert\ \vert\ \vert\ P$	E$\wedge$, 3
5	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg P$	Rei, 2
6	$\vert\ \vert\ \neg(P \wedge Q)$	I$\neg$, (3, (4, 5))
7	$\vert\ \vert\ \neg Q$	Hip
8	$\vert\ \vert\ \vert\ P \wedge Q$	Hip
9	$\vert\ \vert\ \vert\ Q$	E$\wedge$, 8
10	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg Q$	Rei, 7
11	$\vert\ \vert\ \neg(P \wedge Q)$	I$\neg$, (8, (9, 10))
12	$\vert\ \neg(P \wedge Q)$	E$\vee$, (1, (2, 6), (7, 11))
13	$(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg(P \wedge Q)$	I$\rightarrow$, (1, 12)

6. (a) **(0.5)** Diga o que é uma regra de inferência derivada.

   Resposta:

   Uma é qualquer padrão de raciocínio correspondente à aplicação de várias regras de inferência. Uma regra de inferência derivada corresponde a uma abstracção através da qual podemos agrupar a aplicação de várias regras de inferência num único passo.

   (b) **(1.5)** Enuncie uma regra de inferência derivada à sua escolha. Justifique-a através de uma prova.

   Resposta:

   A regra de *modus tollens* é uma regra de inferência derivada, formalizada dizendo que numa prova que contém tanto $\neg\beta$ como $\alpha \rightarrow \beta$, podemos derivar $\neg\alpha$.

$$
\begin{array}{lll}
n & \neg\beta & \\
\vdots & \vdots & \\
m & \alpha \rightarrow \beta & \\
\vdots & \vdots & \\
k & \neg\alpha & \text{MT, } (n, m)
\end{array}
$$

   Prova que justifica *modus tollens*:

$$
\begin{array}{llll}
1 & \neg Q & & \text{Prem} \\
2 & P \rightarrow Q & & \text{Prem} \\
3 & & \vert\ P & \text{Hip} \\
4 & & \vert\ P \rightarrow Q & \text{Rei, } 2 \\
5 & & \vert\ Q & \text{E}\rightarrow\text{, } (3, 4) \\
6 & & \vert\ \neg Q & \text{Rei, } 1 \\
7 & \neg P & & \text{I}\neg\text{, } (3, (5, 6))
\end{array}
$$

7. Considere as fórmulas α e β em que α é satisfazível e β é contraditória.

   (a) Indique se as seguintes fórmulas são satisfazíveis, falsificáveis, tautológicas ou contraditórias, justificando a sua resposta.

   i. **(0.5)** $\alpha \wedge \beta$

      Resposta:

      Esta fórmula não é satisfazível (é contraditória, logo falsificável), pois trata-se de uma conjunção em que um dos membros é sempre falso (β é contraditória).

   ii. **(0.5)** $\alpha \vee \neg\alpha$

      Resposta:

      Esta fórmula é satisfazível (é uma tautologia, pelo que não é falsificável nem contraditória), pois trata-se de uma disjunção entre uma fórmula e a sua negação.

   iii. **(0.5)** $\beta \vee \neg\beta$

      Resposta:

      Esta fórmula também é satisfazível (é uma tautologia, pelo que não é falsificável nem contraditória), pelas mesmas razões da fórmula anterior.

   (b) **(1.0)** Será que $\neg\beta$ é consequência lógica de $\Delta = \{\alpha, \alpha \wedge \beta\}$? Justifique a sua resposta.

   Resposta:

   Sendo β é contraditória então $\neg\beta$ é uma tautologia, pelo que todos os modelos de Δ são também modelos de $\neg\beta$. Ou seja, é impossível ter um modelo de Δ em que β tome o valor falso (pois $\neg\beta$ é uma tautologia).

8. **(1.0)** Seja Δ um conjunto de *fbfs* e α uma *fbf*. Suponha que $\Delta \models \alpha$. O que pode ser dito sobre o conjunto $\Delta \cup \{\neg\alpha\}$? Justifique a sua resposta.

   Resposta:

   Se $\Delta \models \alpha$ então todos os modelos que satisfazem Δ também satisfazem α. Daqui resulta que não existe nenhum modelo que satisfaça $\Delta \cup \{\neg\alpha\}$, pelo que este conjunto é insatisfazível.

9. **(1.5)** Transforme a seguinte *fbf* na forma clausal:

$$\neg(((P \vee \neg Q) \rightarrow R) \rightarrow (P \wedge R))$$

   Resposta:

   - Eliminação de $\rightarrow$: $\neg(\neg(\neg(P \vee \neg Q) \vee R) \vee (P \wedge R))$
   - Redução do domínio de $\neg$: $((\neg P \wedge Q) \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg R))$
   - Obtenção da forma conjuntiva normal: $(\neg P \vee R) \wedge (Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg R)$
   - Eliminação de $\wedge$: $\{\neg P \vee R, Q \vee R, \neg P \vee \neg R\}$
   - Eliminação de $\vee$: $\{\{\neg P, R\}, \{Q, R\}, \{\neg P, \neg R\}\}$

10. **(2.5)** Prove o seguinte teorema utilizando resolução:

$$(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg(P \wedge Q)$$

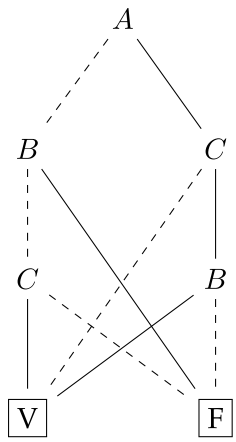
   Resposta:

   (a) Conversão da negação da fórmula para a forma clausal:
   - Negação da fórmula original: $\neg((\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg(P \wedge Q))$
   - Eliminação de $\rightarrow$: $\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(P \wedge Q))$
   - Redução do domínio de $\neg$: $\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg\neg(P \wedge Q)$
   - Redução do domínio de $\neg$: $(\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \wedge Q)$
   - Obtenção da forma conjuntiva normal: $(\neg P \vee \neg Q) \wedge P \wedge Q$
   - Eliminação de $\wedge$: $\{\neg P \vee \neg Q, P, Q\}$
   - Eliminação de $\vee$: $\{\{\neg P, \neg Q\}, \{P\}, \{Q\}\}$

   (b) Refutação

1	$\{\neg P, \neg Q\}$	Prem
2	$\{P\}$	Prem
3	$\{Q\}$	Prem
4	$\{\neg Q\}$	Res, (1, 2)
5	$\{\}$	Res, (3, 4)

11. Considere o seguinte BDD, correspondente à função lógica $f(A, B, C)$:



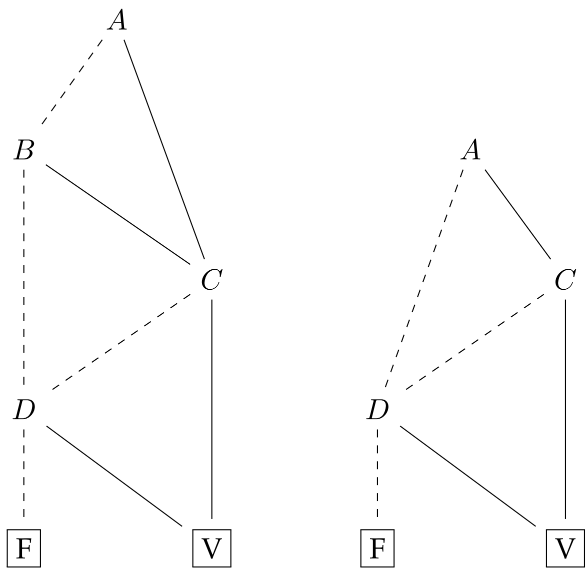
(a) **(1.0)** Apresente a tabela de verdade correspondente.
Resposta:

A	B	C	$f(A, B, C)$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

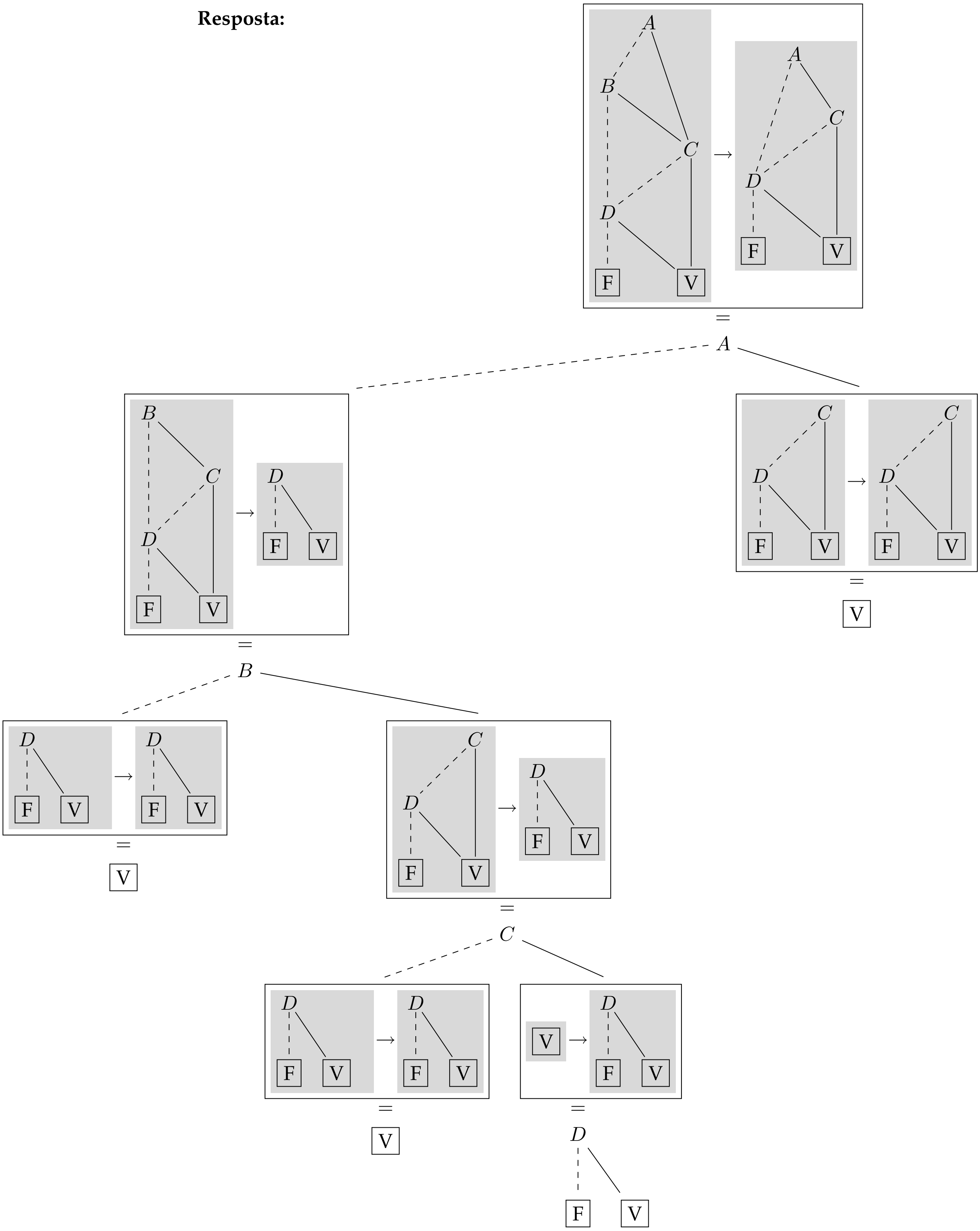
(b) **(1.0)** Diga quais são os modelos de $f(A, B, C)$ e compare-os com os obtidos pela observação da tabela de verdade.
Resposta:
Os modelos obtidos quer a partir do BDD quer a partir da tabela de verdade são quatro: (i) $A = V$, $B = V$, $C = V$, (ii) $A = V$, $B = V$, $C = F$, (iii) $A = V$, $B = F$, $C = F$ e (iv) $A = F$, $B = F$, $C = V$.

(c) **(0.5)** Este BDD é um OBDD? Justifique a sua resposta.
Resposta:
Este BDD *não* é um OBDD porque não está ordenado. Por exemplo, existe um caminho com a ordenação $[A, B, C]$ e outro caminho com a ordenação $[A, C, B]$.

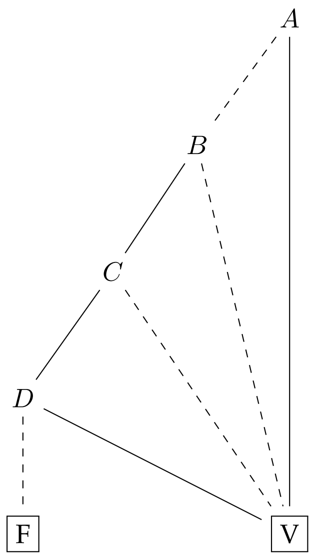
12. **(2.5)** Considere os seguintes OBDDs, correspondentes às *fbfs* o_α (à esquerda) e o_β (à direita) e calcule *aplica*$(\rightarrow, o_\alpha, o_\beta)$. Apresente o OBDD obtido no final.



Resposta:



Reconstruindo o resultado através das chamadas recursivas ao *aplica*, obtém-se o OBBD:


A
B
C
D
F
V