INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Licenciatura Engenharia Informática e de Computadores

Lógica para Programação

Solução do Primeiro Teste

12 de Abril de 2012

18:30–20:00

Nome: ______________________________ Número: __________

1. **(2.0)** Para cada uma das seguintes questões, indique se é verdadeira ou falsa. Cada resposta certa vale 0.5 valores e *cada resposta errada desconta 0.2 valores*.

   (a) A regra de inferência derivada conhecida por *modus tollens* afirma que numa prova que contém $\neg\alpha$ e $\alpha \rightarrow \beta$ se pode derivar $\neg\beta$.
   Resposta:
   Falsa

   (b) Uma fórmula na forma clausal corresponde a uma disjunção de conjunções de literais.
   Resposta:
   Falsa

   (c) Num BDD não ordenado podem existir caminhos com ordenações incompatíveis.
   Resposta:
   Verdadeira

   (d) As ordenações para BDDs $[P, Q, S]$ e $[R, P, S, T, Q]$ são compatíveis.
   Resposta:
   Falsa

2. Considere a linguagem da lógica proposicional, $\mathcal{L}_{LP}$ e a semântica da lógica proposicional, como definidas nas aulas. Suponha que o sistema dedutivo desta lógica utilizava a abordagem da dedução natural e apenas continha duas regras de inferência, a regra da premissa e a seguinte regra de inferência (*Liberalização*, abreviada por "Lib"): em qualquer ponto de uma prova, podemos introduzir qualquer *fbf* por liberalização. Diga, justificando se esta lógica é:

   (a) **(1.0)** Sólida.
   Resposta:
   A lógica não é sólida pois qualquer argumento é demonstrável. Considermos o argumento inválido $(\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\}, \neg\beta)$. A seguinte prova corresponde a uma demonstração deste argumento:

1	α	Prem
2	$\alpha \rightarrow \beta$	Prem
3	$\neg\beta$	Lib

   (b) **(1.0)** Completa.
   Resposta:
   A lógica é completa pois como qualquer argumento é demonstrável, todos os argumentos válidos também são demonstráveis.

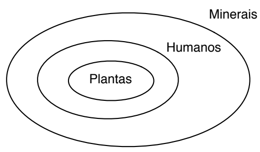
3. (a) **(0.5)** Dê um exemplo de um argumento válido em que as premissas são todas falsas e a conclusão também é falsa.

   Resposta:

   todas as plantas são humanas
   todos os humanos são minerais
   $\therefore$ todas as plantas são minerais

   (b) **(0.5)** Mostre que o seu argumento é válido.

   Resposta:



4. **(1.0)** Prove o seguinte argumento usando o sistema de dedução natural da lógica proposicional. Deve usar apenas as regras de inferência básicas do sistema de dedução natural (Prem, Rep, Hip, Rei, I$\wedge$, E$\wedge$, I$\rightarrow$, E$\rightarrow$, I$\neg$, E$\neg$, I$\vee$, E$\vee$):

$$(\{P \rightarrow Q, P \rightarrow \neg Q\}, \neg P)$$

Resposta:

1	$P \rightarrow Q$		Prem
2	$P \rightarrow \neg Q$		Prem
3		P	Hyp
4		$P \rightarrow Q$	Rei, 1
5		Q	$\rightarrow$E, (3, 4)
6		$P \rightarrow \neg Q$	Rei, 2
7		$\neg Q$	$\rightarrow$E, (3, 6)
8	$\neg P$		$\neg$I, (3, (5, 7))

5. **(1.5)** Prove o seguinte teorema usando o sistema de dedução natural da lógica proposicional. Deve usar apenas as regras de inferência básicas do sistema de dedução natural (Prem, Rep, Hip, Rei, I∧, E∧, I→, E→, I¬, E¬, I∨, E∨):

$$\neg(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$$

Resposta:

1	$\neg(P \wedge Q)$	Hyp
2	$\quad \neg(\neg P \vee \neg Q)$	Hyp
3	$\quad\quad \neg P$	Hyp
4	$\quad\quad \neg P \vee \neg Q$	$\vee$I, 3
5	$\quad\quad \neg(\neg P \vee \neg Q)$	Rei, 2
6	$\quad \neg\neg P$	$\neg$I, (3, (5, 6))
7	$\quad P$	$\neg$E, 6
8	$\quad\quad \neg Q$	Hyp
9	$\quad\quad \neg P \vee \neg Q$	$\vee$I, 8
10	$\quad\quad \neg(\neg P \vee \neg Q)$	Rei, 2
11	$\quad \neg\neg Q$	$\neg$I, (8, (9, 10))
12	$\quad Q$	$\neg$E, 11
13	$\quad P \wedge Q$	$\neg$E, 11
14	$\quad \neg(P \wedge Q)$	Rep, 1
15	$\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$	$\neg$I, (2, (13, 14)
16	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg$E, 15
17	$\neg(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$	$\rightarrow$E, (1, 16)

6. **(0.5)** Considere o conjunto $\{\alpha, \neg\beta, \alpha \rightarrow \beta\}$. Indique, caso existam, os modelos desse conjunto. Justifique a sua resposta.

Resposta:

Não existe nenhum modelo para este conjunto, dado que não existe nenhuma interpretação que torne simultaneamente α, $\neg\beta$ e $\alpha \rightarrow \beta$ verdadeiras.

7. Considere o conjunto de *fbf*s: $\Delta = \{\neg S \vee Q, \neg Q, P, \neg(P \vee S)\}$.

   (a) **(1.0)** Mostre, recorrendo a uma tabela de verdade, que Δ não é satisfazível.

   Resposta:

   Δ será satisfazível se tiver um modelo, isto é, uma interpretação que satisfaça todas as suas fórmulas. A seguinte tabela de verdade, mostra que tal nunca acontece (não há nenhuma linha em que as quatro fórmulas sejam verdadeiras):

P	Q	S	$\neg S \vee Q$	$\neg Q$	$\neg(P \vee S)$
V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	V	F
F	F	F	V	V	V

(b) **(1.0)** Com base na tabela de verdade da alínea (a), explique porque é que se pode concluir que $P \vee S$ é consequência lógica de $\{\neg S \vee Q, \neg Q, P\}$. Justifique a sua resposta.

Resposta:

Como se pode ver pela tabela, não há nenhum modelo de $\{\neg S \vee Q, \neg Q, P\}$ que torne $P \vee S$ falsa, pois o único modelo de $\{\neg S \vee Q, \neg Q, P\}$ é a interpretação correspondente à quarta linha da tabela e, de acordo com essa interpretação, $\neg(P \vee S)$ é falso (ou seja, $P \vee S$ é verdadeiro). Outra resposta possível seria dizer que existe um teorema que diz que se α é consequência lógica de Γ sse $\Gamma \cup \neg\alpha$ não é satisfazível, pelo que fazendo $\Gamma = \{\neg S \vee Q, \neg Q, P\}$ e $\alpha = \{P \vee S\}$, estaria provado pela alínea anterior, pois provou-se que $\Delta = \Gamma \cup \neg\alpha$ não é satisfazível.

(c) **(0.5)** Será que $P \wedge \neg P$ é consequência lógica de Δ? E $P \vee \neg P$? Justifique a sua resposta.

Resposta:

Uma *fbf* α é consequência lógica de um conjunto de fórmulas, se todos os modelos do conjunto de fórmulas são modelos de α. Ora dado que não há nenhum modelo para Δ, não há nenhum modelo que torne as fórmulas de Δ verdadeiras e α falso, logo ambas as fórmulas são consequência lógica de Δ (no caso de $P \vee \neg P$, seria consequência lógica de qualquer conjunto, dado tratar-se de um teorema).

8. Considere as seguintes *fbfs*:

$$\alpha = (P \rightarrow \neg Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow S) \wedge \neg P$$

$$\beta = \{\{\neg P, \neg Q\}, \{\neg P, R\}\{\neg P, S\}, \{\neg P\}\}$$

$$\gamma = \{\{\neg P\}\}$$

(a) **(0.5)** Será que α pode ser representada na forma clausal por β? Justifique a sua resposta.

Resposta:

Sim, a conversão de α na forma clausal dá origem a β:

Fbf original	$(P \rightarrow \neg Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow S) \wedge \neg P$
Eliminação do símbolo $\rightarrow$:	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee S) \wedge \neg P$
Eliminação do símbolo $\wedge$:	$\{\neg P \vee \neg Q, \neg P \vee R, \neg P \vee S, \neg P\}$
Eliminação do símbolo $\vee$:	$\{\{\neg P, \neg Q\}, \{\neg P, R\}, \{\neg P, S\}, \{\neg P\}\}$

(b) **(0.5)** Será que α pode ser representada na forma clausal por γ?

Resposta:

Sim. Na verdade γ é uma versão simplificada de β, resultado da eliminação das cláusulas não mínimas.

9. **(1.5)** Usando resolução, prove **por refutação** que

$$\{\{P\}, \{\neg P, Q\}\} \vdash \{\{P\}, \{Q\}\}$$

Resposta:

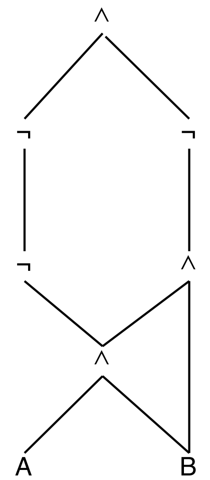
Para fazer uma prova por refutação é necessário juntar a negação da conclusão, $\{\{P\}, \{Q\}\}$, ao conjunto de premissas, $\{\{P\}, \{\neg P, Q\}\}$, e chegar à cláusula vazia.

Negação da conclusão: $\{\{P\}, \{Q\}\}$ é a forma clausal da *fbf* $P \wedge Q$, cuja negação em forma clausal é $\{\{\neg P, \neg Q\}\}$.

Assim, teremos de provar a cláusula vazia a partir do conjunto $\{\{P\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}\}$:

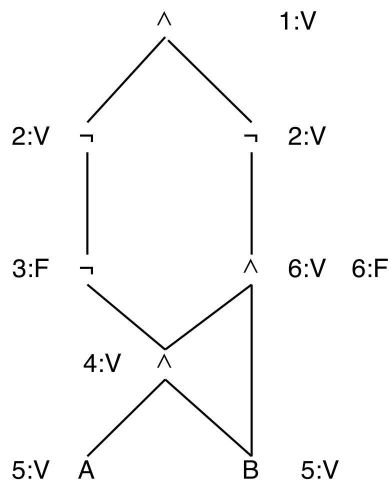
1	$\{P\}$	Prem
2	$\{\neg P, Q\}$	Prem
3	$\{\neg P, \neg Q\}$	Prem
4	$\{Q\}$	Res, (1,2)
5	$\{\neg Q\}$	Res, (1,3)
6	$\{\}$	Res, (4,5)

10. Considere o seguinte DAG:



(a) **(0.5)** Qual a *fbf* que é directamente mapeada nesse DAG?
Resposta:
$\neg\neg(A \wedge B) \wedge \neg((A \wedge B) \wedge B)$

(b) **(1.0)** Usando o algoritmo de propagação de marcas, mostre (indicando na figura) que essa *fbf* não é satisfazível. Justifique a sua resposta.
Resposta:
Encontrou-se uma contradição (passo 6) pelo que a fórmula não é satisfazível.



(c) **(1.0)** Negue a fórmula anterior. **Sem fazer mais cálculos**, indique o que poderá concluir em relação à sua satisfazibilidade. Justifique a sua resposta.

Resposta:

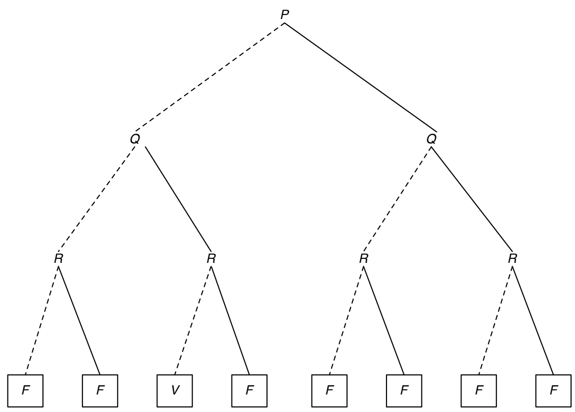
Se a fórmula original era contraditória, então a fórmula negada será uma tautologia (logo satisfazível).

11. **(1.0)** Considerando a seguinte ordem entre os símbolos de proposição $A \prec C \prec B$, aplique o algoritmo DP à seguinte fórmula na forma clausal $\{\{A, \neg B\}, \{B, \neg C\}, \{\neg A\}, \{C\}\}$. Caso a fórmula seja satisfazível, encontre uma testemunha.

Resposta:

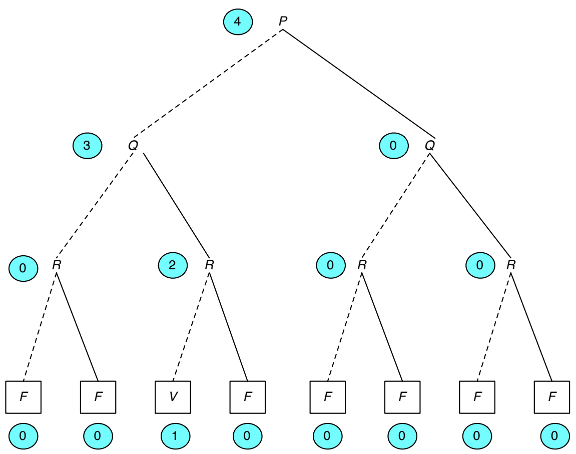
b_A: $\{A, \neg B\}, \{\neg A\}$
b_C: $\{\neg C, B\}, \{C\}$
b_B: $\{\neg B\}, \{B\}$
Dado que aplicando resolução a $\{\neg B\}$ (obtido aplicando resolução ao balde b_A) e $\{B\}$ (obtido aplicando resolução ao balde b_C) chegamos ao conjunto vazio (contradição), a fórmula não é satisfazível, pelo que não existe nenhuma testemunha.

12. Considere a árvore binária que se segue, associada à *fbf* α:



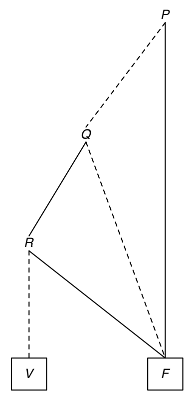
(a) **(0.5)** Indique na figura quais os rótulos de cada nó da árvore resultantes da aplicação do algoritmo *rotula*.

Resposta:

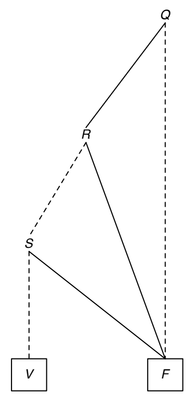


(b) **(0.5)** De acordo com os rótulos calculados na alínea anterior, apresente o OBDD resultante da aplicação do algoritmo *compacta*.

Resposta:

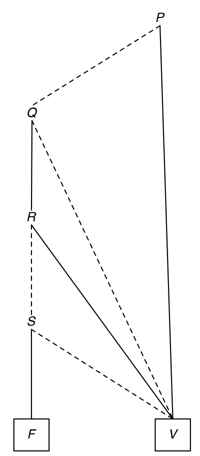


(c) **(1.5)** Considere agora o seguinte OBDD, correspondente à *fbf* β. Calcule, usando o algoritmo *aplica*, o OBDD correspondente à *fbf* $\alpha \to \beta$. indique os cálculos efectuados.

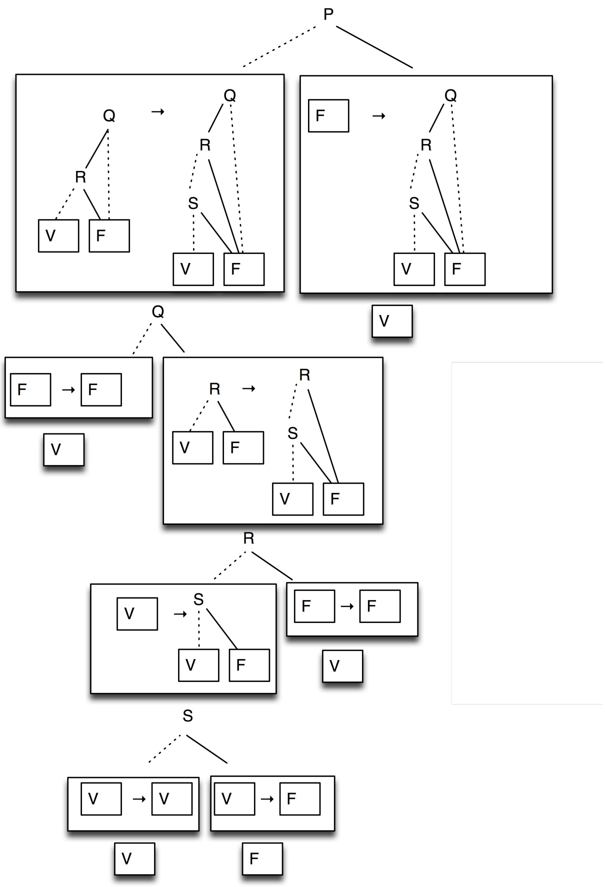


Resposta:

O OBDD resultante é:



Justificação:



(d) **(1.0) Sem fazer novos cálculos** indique qual seria o OBDD associado à *fbf* $\neg\beta$. Justifique a sua resposta.

Resposta:

Bastaria trocar os valores lógicos das folhas do OBDD β.