Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Curso de Matemática - Licenciatura

Fundamentos da Aritmética
Lista II — Ordem nos naturais

Professor: Prof. Paulinho Demeneghi
Tutor: Profa. Karina Gomez Pacheco
Aluno: João Lucas de Oliveira
Data: 31 de Agosto de 2025

Questão 1 – Usando as definições de $<$, $>$, $\not<$, $\not>$, verifique se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa, fornecendo uma explicação formal para cada resposta. (Resolva sem usar tricotomia.)

(a) $3 < 8$. - Verdadeiro, pois pela definição de $<$, temos que $3 < 8$ se, e somente se, existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $3 + k = 8$. Tomando $k = 5$, que pertence a $\mathbb{N}^*$, temos que $3 + 5 = 8$. Portanto, a afirmação é verdadeira.

(b) $3 > 8$. - Falso, pois pela definição de $>$, temos que $3 > 8$ se, e somente se, existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $8 + k = 3$. Tomando $k = 5$, que pertence a $\mathbb{N}^*$, temos que $8 + 5 = 13$. Portanto, a afirmação é falsa.

(c) $3 \not< 8$. - Falso, pois pela definição de $\not<$, temos que $3 \not< 8$ se, e somente se, não existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $3 + k = 8$. Tomando $k = 5$, que pertence a $\mathbb{N}^*$, temos que $3 + 5 = 8$. Portanto, a afirmação é falsa.

(d) $3 \not> 8$. - Verdadeiro, pois pela definição de $\not>$, temos que $3 \not> 8$ se, e somente se, não existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $8 + k = 3$. Tomando $k = 5$, que pertence a $\mathbb{N}^*$, temos que $8 + 5 = 13$. Portanto, a afirmação é verdadeira.

Questão 2 – Escreva uma demonstração para cada uma das seguintes proposições, sem usar tricotomia.

Cada proposição nos apresenta um fato novo e potencialmente útil a respeito dos números naturais. Interprete com cuidado o que cada um diz, e incorpore-os ao seu conhecimento de Aritmética.

(a) Proposição. Para quaisquer números naturais a, b e c, se a < b, então a + c < b + c.

Suponha que $a < b$.

Então, existe $x \in \mathbb{N}^*$ tal que $b = a + x$.

Adicionando c dos dois lados, temos que $b + c = a + x + c$.

Como $x \in \mathbb{N}^*$, então $x + c \in \mathbb{N}^*$.

Logo, $a + c < b + c$.

Portanto, a proposição é verdadeira.

(b) Proposição. Para qualquer número natural a, tem-se que $a \not< a$.

Por demonstração de absurdo, suponha que $a < a$.

Então, existe $x \in \mathbb{N}^*$ tal que $a = a + x$.

Logo, $x = 0$. ou seja, contraria nossa suposição onde $x \in \mathbb{N}^*$.

Portanto, a proposição é verdadeira.

(c) Proposição. Para quaisquer números naturais a, b, c e d, se a < b e c < d, então ac < bd.

Suponha:

$a < b \Rightarrow b = a + x$, com $x \in \mathbb{N}^*$;

$c < d \Rightarrow d = c + y$, com $y \in \mathbb{N}^*$.

Logo, $bd = (a + x)(c + y)$.

Expandindo, temos que $bd = ac + ay + cx + xy$.

Como $x, y \in \mathbb{N}^*$, então $xy \in \mathbb{N}^*$.

Logo, $bd = ac + ay + cx + xy \in \mathbb{N}^*$.

Portanto, $ac < bd$.

Questão 3 – Usando as definições de $\leq$, $\geq$, $\not\leq$, $\not\geq$, verifique se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa, fornecendo uma explicação formal para cada resposta.

(a) $3 \leq 8$ - Verdadeiro, pois $3 \leq 8$ se, e somente se, existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $3 + k = 8$. Tomando $k = 5$, que pertence a $\mathbb{N}^*$, temos que $3 + 5 = 8$. Portanto, a afirmação é verdadeira.

(b) $3 \geq 8$ - Falso, pois $3 \geq 8$ se, e somente se, existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $8+k=3$. Tomando $k=5$, que pertence a $\mathbb{N}^*$, temos que $8+5=13$. Portanto, a afirmação é falsa.

(c) $3 \nleq 8$ - Falso, pois $3 \nleq 8$ se, e somente se, não existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $3+k=8$. Tomando $k=5$, que pertence a $\mathbb{N}^*$, temos que $3+5=8$. Portanto, a afirmação é falsa.

(d) $3 \ngeq 8$ - Falso, pois $3 \ngeq 8$ se, e somente se, não existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $8+k=3$. Tomando $k=5$, que pertence a $\mathbb{N}^*$, temos que $8+5=13$. Portanto, a afirmação é falsa.

Questão 4 – Considere a sentença condicional: Para quaisquer números naturais a e b, se a $\nleq$ b, então a $\nless$ b.

(a) Identifique a contrapositiva dessa sentença condicional. Em seguida, prove que a contrapositiva é uma sentença verdadeira.

A contrapositiva de uma condicional $P \Rightarrow Q$ é $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

No caso:

- P: $a \nleq b$
- Q: $a \nless b$

Logo:

- $\neg Q$: $a \leq b$
- $\neg P$: $a < b$

Então, a contrapositiva é:

Se $a \leq b$, então $a < b$.

(b) Lembrando que uma sentença condicional e sua contrapositiva sempre têm o mesmo valor lógico, conclua que a sentença condicional (1) é verdadeira.

(c) Identifique a negação da sentença condicional (1). A contrapositiva de uma condicional $P \Rightarrow Q$ é $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

No caso:

- P: $a \nleq b$
- Q: $a \nless b$

Logo:

- $\neg Q$: $a \leq b$
- $\neg P$: $a < b$

Então, a contrapositiva é:

Se $a \leq b$, então $a < b$.

A negação de uma condicional

(d) Lembrando que a negação de uma sentença verdadeira é uma sentença falsa, conclua que a negação da sentença condicional (1) é falsa.

$$\text{Se } a \nleq b, \text{ então } a \nless b$$

Para negar uma condicional da forma $P \Rightarrow Q$, utilizamos:

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$$

Aplicando à sentença (1), temos:

$$\neg(\text{Se } a \nleq b \text{ então } a \nless b) \equiv a \nleq b \wedge a < b$$

Entretanto, pela definição de $a \leq b$, temos:

$$a \leq b \iff a < b \text{ ou } a = b$$

Logo, se $a < b$, então $a \leq b$ também é verdadeiro, o que contradiz $a \nleq b$.

Portanto, a negação da sentença condicional é uma contradição.

Logo, a sentença condicional (1) é verdadeira.

(e) Identifique a recíproca da sentença condicional (1). Em seguida, determine o seu valor lógico. (Lembre que uma condicional e sua recíproca podem ter valores lógicos diferentes.) A recíproca de uma condicional $P \Rightarrow Q$ é $Q \Rightarrow P$.

No caso:

- Q: $a \nless b$
- P: $a \nleq b$

Portanto, a recíproca é:

$$a \nless b \Rightarrow a \nleq b$$

Ou seja, a recíproca da sentença é diferente da original.

Análise do valor lógico:

- Se $a \nless b$ é falso, a implicação é verdadeira.
- Se $a \nless b$ é verdadeiro, então $a \geq b$, o que implica $a \nleq b$ é falso.
- Portanto, a recíproca é falsa quando $a = b$.

Conclusão: A recíproca não é uma tautologia, pois existe pelo menos um caso em que ela é falsa (quando $a = b$).

Questão 5 – Escreva uma demonstração para cada uma das seguintes proposições.

(a) Proposição. Para quaisquer números naturais a, b e c, se a $\leq$ b e b $\leq$ c, então a $\leq$ c

Pela definição de $a \leq b$, existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + x$.

Logo, $a \leq b$ se, e somente se, existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + x$.

Pela definição de $b \leq c$, existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $c = b + y$.

Substituindo a equação de $b = a + x$ na de $c = b + y$, temos:

$$c = (a + x) + y = a + x + y.$$

Logo, $a \leq c$ se, e somente se, existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $c = a + x$.

(b) Proposição. Para quaisquer números naturais a, b e c, se $a + c \leq b + c$, então $a \leq b$.

Pela hipótese, $a + c \leq b + c$. Pela definição de $\leq$, existe $x \in \mathbb{N}$ tal que:

$$b + c = a + c + x.$$

Usando a lei da comutatividade da adição, temos que:

$$b + c = a + x + c.$$

Usando a lei do cancelamento da adição à direita, temos que:

$$b = a + x.$$

Logo, $a \leq b$ se, e somente se, existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + x$.

(c) Proposição. Para quaisquer números naturais a, b e c, se $a < b$, então $ac \leq bc$.

Como $a < b$, então pela definição:

$$\exists x \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } b = a + x.$$

Multiplicando ambos os lados por c:

$$bc = (a + x)c = ac + xc.$$

Como $x \in \mathbb{N}^*$ e $c \in \mathbb{N}$, temos que:

$$xc \neq 0,$$

$$ac + xc > ac,$$

$$a \cdot c + x \cdot c > a \cdot c,$$

$$a \cdot c < b \cdot c.$$

Logo, $a \cdot c < b \cdot c$, como queremos demonstrar.