Preparando o terreno: vamos fazer Matemática?

Paulinho Demeneghi

Universidade Federal de Santa Catarina

15/08/2025

Introdução

Na busca por compreensão e por novos conhecimentos em Matemática, nos preocupamos constantemente com a *verdade* ou *falsidade* de afirmações. Uma boa razão para isso é que, em Matemática, costuma-se *deduzir logicamente* novas verdades a partir de verdades conhecidas.

Exemplo: sabendo ser verdade que um determinado número natural é múltiplo de 4, podemos deduzir que este mesmo número é também múltiplo de 2.

Há sempre mais para aprender em Matemática

Ainda não sabemos ser verdadeiro ou falso:

Todo número natural par maior do que dois pode ser descrito como a soma de dois números primos.

- Já foi testado até 4.000.000.000.000.000.000 (quatro quintilhões), e até agora funcionou!
- Testar tanto assim já não seria evidência suficiente para aceitar como verdade?

Em Matemática, não é bem assim

Há infinitos números naturais. Testar para alguns quintilhões não nos diz nada sobre os infinitos números que ainda não foram testados. Funcionar para *alguns* números não significa que irá funcionar para *todos* os números.

Ilustrando o ponto

Verdadeiro ou falso?

Para todo número natural n, os números $n^{19} + 6$ e $(n+1)^{19} + 6$ são coprimos.

- Testando até $n = 4.000.000.000.000.000.000$, funciona!
- Apesar disso, é *falso*: os números $n^{19} + 6$ e $(n+1)^{19} + 6$ *não* são coprimos quando

n=1.578.270.389.554.680.057.141.787.800.241.971.645.032.008.710.129.107.338.825.798.

Preparação

Agora apresentaremos, do ponto de vista deste matemático que vos fala, um pouco do que os matemáticos usam para estabelecer novas verdades, para descrevê-las, e para apresentá-las a outras pessoas.

Sentenças (fechadas)

Para nossos propósitos, uma *sentença fechada*, ou simplesmente *sentença*, é uma frase estruturada com palavras ou símbolos que expressa uma ideia *verdadeira* ou *falsa*.
O *valor lógico* de uma sentença é a *verdade* ou *falsidade* da ideia expressa pela sentença. Esses são os únicos valores lógicos possíveis para uma sentença, e uma sentença não pode ter os dois. Uma sentença é

- *verdadeira* caso seu valor lógico seja verdade, e
- *falsa* caso seu valor lógico seja falsidade.

Exemplo:

$$2 \text{ é um número par}$$

é uma sentença verdadeira, pois expressa uma verdade, e

$$3 \text{ é um número par}$$

é uma sentença falsa, por expressar uma falsidade.

Sentenças abertas

Uma *sentença aberta* é como um formulário em branco, com campos para serem preenchidos. Um exemplo:

$$3 + \underline{\text{insira um número natural aqui}} \text{ é par.}$$

Sentenças abertas não admitem valor lógico, dado que não expressam uma ideia completa. Uma vez que o(s) campo(s) abertos tenham sido preenchidos, obtemos uma sentença fechada, que admite valor lógico.

- Preenchendo com 6, obtemos a sentença

  $$3 + 6 \text{ é par,}$$

  que é uma sentença *falsa*;
- Preenchendo com 7, obtemos a sentença

  $$3 + 7 \text{ é par,}$$

  que é uma sentença *verdadeira*.

Variáveis

Em sentenças abertas, costuma-se indicar os espaços em branco por símbolos, chamados de *variáveis*, e então indicar, para cada variável, a coleção de objetos que podem ser inseridos em seu lugar na sentença (o *domínio* da variável). Por exemplo, ao invés de

$$3 + \underline{\text{insira um número natural aqui}} \text{ é par},$$

podemos escrever

$$3 + x \text{ é par},$$

em que x é uma *variável sobre* $\mathbb{N}$ (o domínio da variável, neste exemplo, é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais).

Quantificações

Digamos que x é uma variável sobre $\mathbb{N}$, ou seja, que é usada para representar números naturais. Não temos como decidir o valor lógico da sentença aberta

x é par

sem saber algo mais a respeito de x. Por outro lado, sabemos que a sentença

Todo x é par

é falsa, e a sentença

Algum x é par

é verdadeira. O que fizemos foi *quantificar* a variável x.

Quantificação universal

A quantificação *universal* corresponde à ideia de *todo*, *para qualquer*. Simbolicamente, a representamos com o símbolo $\forall$, acompanhado da variável quantificada.

Exemplo: a sentença

Todo x é par

pode ser reescrita como

Para qualquer x, x é par.

Caso queiramos explicitar o fato de x representar números naturais neste exemplo, podemos alternativamente escrever

Para qualquer número natural x, x é par.

Simbolicamente:

$$\forall x \in \mathbb{N}, x \text{ é par.}$$

Quantificação existencial

A quantificação *existencial* corresponde à ideia de *algum*, *existe pelo menos um*. Simbolicamente, a representamos com o símbolo $\exists$, acompanhado da variável quantificada.

Exemplo: a sentença

Algum x é par

pode ser reescrita como

Existe x tal que x é par.

Caso queiramos explicitar o fato de x representar números naturais neste exemplo, podemos alternativamente escrever

Existe um número natural x tal que x é par.

Simbolicamente:

$$\exists x \in \mathbb{N}, x \text{ é par.}$$

Sentenças condicionais

São do tipo

$$\text{se } P, \text{ então } Q,$$

em que P e Q são sentenças, chamadas respectivamente de *antecedente* (ou *hipótese*) e de *consequente* (ou *tese*) da condicional.
Descrição simbólica:

$$P \Rightarrow Q.$$

Uma tal sentença é falsa *tão somente* quando o antecedente P for uma sentença verdadeira e o consequente Q for uma sentença falsa. Em todas as demais situações, ou seja,

- antecedente verdadeiro e consequente verdadeiro;
- antecedente falso e consequente verdadeiro;
- antecedente falso e consequente falso,

a sentença condicional é *verdadeira*.

Operadores lógicos *e*, *ou*

Dadas duas sentenças, que chamamos de P e Q, a sentença

$$P \text{ e } Q$$

(simbolicamente: $P \wedge Q$) é verdadeira tão somente quando P é verdadeira e também Q é verdadeira. Nos demais casos, a sentença é falsa.

A sentença

$$P \text{ ou } Q$$

(simbolicamente: $P \vee Q$) é verdadeira quando pelo menos uma das sentenças P, Q é verdadeira. Dito de outro modo, ela é falsa tão somente quando P é falsa e também Q é falsa.

Operador lógico de *negação*

Dada uma sentença, que chamamos de P, por *negação* da sentença P entende-se uma sentença que passe a mesma ideia que a sentença

Não é verdade que P.

Ela é descrita simbolicamente por $\neg P$, é verdadeira quando P for falsa, e é falsa quando P for verdadeira.

Como exemplo, sendo P a sentença (falsa)

2 é ímpar,

as seguintes sentenças (verdadeiras) são consideradas negações de P:

- Não é verdade que 2 é ímpar;
- 2 não é ímpar.
- 2 é par. (Não é imediato!)

Negações bastante empregadas

Nas sentenças abaixo x e y são variáveis, P e Q são sentenças, e $R(x)$ é uma sentença aberta na variável x.

Sentença original	Negação
$x = y$	$x \neq y$
$P \wedge Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
$P \vee Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
$P \Rightarrow Q$	$P \wedge (\neg Q)$
$\neg P$	P
$\forall x, R(x)$	$\exists x, \neg R(x)$
$\exists x, R(x)$	$\forall x, \neg R(x)$

Contrapositiva de condicional

Dadas duas sentenças, que chamamos de P e Q, a *contra-positiva* da sentença condicional

$$\text{se } P, \text{ então } Q$$

é a sentença

$$\text{se } \neg Q, \text{ então } \neg P.$$

Ela é verdadeira caso a condicional original seja verdadeira, e falsa caso a condicional original seja falsa.

Exemplo: a contrapositiva da sentença

$$\text{se } 3x = 3, \text{ então } x = 1$$

é a sentença

$$\text{se } x \neq 1, \text{ então } 3x \neq 3.$$

Se, e somente se

Representa duas condicionais simultâneas, uma em cada sentido: dadas duas sentenças, que chamamos de P e Q, a sentença

P se, e somente se, Q

significa o mesmo que a sentença

(Se P, então Q) e (se Q, então P).

Axiomas, proposições, enunciados, demonstrações

Para nossos propósitos,
Axiomas são afirmações que tomamos como verdadeiras sem demonstração, e a partir das quais deduzimos logicamente as demais verdades dentro da área da Matemática de interesse.
As novas verdades deduzidas a partir de verdades conhecidas costumam ser sintetizadas na forma de *proposições*, acompanhadas de *demonstrações*: em uma proposição temos um *enunciado*, que é uma sentença cujo conteúdo é a nova verdade obtida. A demonstração da proposição é um argumento lógico-dedutivo, empregando verdades previamente estabelecidas, que explica o porquê do enunciado ser uma sentença verdadeira.

Teoremas, corolários, lemas

São nomes dados para determinadas proposições. Para nossos propósitos,

- um *teorema* é uma proposição particularmente importante na área da Matemática de interesse;
- um *corolário* é uma proposição que decorre facilmente de outra;
- um *lema* é uma proposição auxiliar, bastante útil para demonstrar outros resultados.

Não dê muita importância a esses termos. *O que realmente importa são os resultados em si*, e não como os chamamos.

Demonstrando condicionais

Para provar que uma dada sentença condicional

se P, então Q

(em que P e Q são sentenças) é verdadeira, há três maneiras principais:

- *Direta*: suponha que P é verdadeira e, a partir disso, deduza que Q é verdadeira;
- *Por contrapositiva*: suponha que Q é falsa e, a partir disso, deduza que P é falsa;
- *Por absurdo*: suponha que P é verdadeira. Suponha, por absurdo, que Q é *falsa*. A partir disso, deduza algo que é sabidamente falso.