Aula 2: MTM9630 - Fundamentos de Aritmética

Paulinho Demeneghi

Universidade Federal de Santa Catarina

22/08/2025

Aritmética: pontos de partida

Admitimos como conhecidos:

- Todos os *números naturais*, com a notação usual para representar cada um deles.
- O *conjunto* dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

-

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

- As operações de adição e de multiplicação, com terminologias e notações convencionais.

Esqueça o resto: números pares, ímpares, negativos, menor, maior, números primos, mdc, mmc, frações etc.

Axiomas (verdades iniciais)

A1. $\forall a, b, c \in \mathbb{N},\ (a+b)+c = a+(b+c)$

A2. $\forall a, b \in \mathbb{N},\ a+b = b+a$

A3. $\forall a \in \mathbb{N}, (a+0=a) \wedge (0+a=a)$

A4. $\forall a, b, c \in \mathbb{N},\ (a+c=b+c) \Rightarrow (a=b)$

A5. $\forall a, b \in \mathbb{N},\ (a+b=0) \Rightarrow [(a=0) \wedge (b=0)]$

M1. $\forall a, b, c \in \mathbb{N},\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

M2. $\forall a, b \in \mathbb{N},\ a \cdot b = b \cdot a$

M3. $\forall a \in \mathbb{N}, (a \cdot 1 = a) \wedge (1 \cdot a = a)$

M4. $\forall a, b \in \mathbb{N}, \forall c \in \mathbb{N}^*,\ (a \cdot c = b \cdot c) \Rightarrow (a=b)$

M5. $\forall a, b \in \mathbb{N},\ (a \cdot b = 1) \Rightarrow [(a=1) \wedge (b=1)]$

D. $\forall a, b, c \in \mathbb{N},\ (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

... e mais um, que veremos depois (Axioma da indução completa).

Primeiras consequências dos axiomas

- $\forall a \in \mathbb{N},\ (a \cdot 0 = 0) \wedge (0 \cdot a = 0)$

Leis de cancelamento e distributividade à esquerda:

- $\forall a, b, c \in \mathbb{N},\ (c + a = c + b) \Rightarrow (a = b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{N}, \forall c \in \mathbb{N}^*,\ (c \cdot a = c \cdot b) \Rightarrow (a = b)$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{N},\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Regras de substituição:

- $\forall a, b, c \in \mathbb{N},\ (a = b) \Rightarrow [(a + c = b + c) \wedge (c + a = c + b)]$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{N},\ (a = b) \Rightarrow [(a \cdot c = b \cdot c) \wedge (c \cdot a = c \cdot b)]$

Integridade nos naturais:

- $\forall a, b \in \mathbb{N},\ (a \cdot b = 0) \Rightarrow [(a = 0) \vee (b = 0)]$
- $\forall a, b \in \mathbb{N},\ [(a \neq 0) \wedge (b \neq 0)] \Rightarrow (a \cdot b \neq 0)$

Contrapositiva do anulamento:

- $\forall a, b \in \mathbb{N},\ [(a \neq 0) \vee (b \neq 0)] \Rightarrow (a + b \neq 0)$