Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Curso de Matemática - Licenciatura

Geometria I
Lista I – Axiomas de Incidência

Professor: Prof. Marcelo Sobottka
Aluno: João Lucas de Oliveira
Data: Agosto de 2025

1. Considerando somente o primeiro Axioma de Incidência, responda:

Axioma I1: Qualquer que seja a reta, existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem à reta.

O primeiro axioma acima está impondo três condições:

(i) Se existirem retas no plano, então o plano possui ao menos dois pontos;

(ii) Uma reta é um subconjunto não-vazio do plano;

(iii) A reta não contém todo o plano.

a) É possível um plano não ter retas? Caso seja possível, existe alguma restrição sobre a quantidade de elementos que esse plano deva ter?

Resposta: Sim, pois a primeira condição diz: "Se existirem retas no plano". Se $P = \{1\}$, não pode haver retas no mesmo. O plano pode ser vazio ou ter infinitos elementos. A restrição aparece apenas quando existir uma reta: nesse caso, o plano deve possuir pelo menos dois elementos.

b) É possível um plano possuir retas de forma que todas sejam paralelas umas às outras?

Resposta: Sim, onde

$$P = \{a, b, c\}$$

e possui as retas:

$$R^1 = \{a\}, \quad R^2 = \{b\}, \quad R^3 = \{c\}.$$

Ou seja, todas as retas do plano P são paralelas umas às outras.

c) Seja P um plano com uma quantidade finita n de pontos, onde $n \geq 2$. Qual o número máximo de retas que podem existir em P? Destas, qual a maior quantidade de retas paralelas entre si que podemos tomar?

Resposta: O número máximo de retas é

$$(n \times 2) - 1 - 1,$$

onde o primeiro -1 corresponde à remoção do conjunto vazio e o segundo -1 corresponde à remoção do conjunto todo.

A quantidade máxima de retas paralelas é n, pois se cada reta contiver ao menos um elemento, e sendo cada uma formada por um elemento do plano, então teremos n retas paralelas entre si.

d) Qual o número mínimo de retas que devem existir em um plano qualquer? Destas, qual a maior quantidade de retas paralelas entre si podemos tomar?

Resposta: Considerando apenas o Axioma I1, não existe um número obrigatório de retas em um plano. Por exemplo, se $P = \{1, 2\}$, é possível não definir nenhuma reta, definir apenas $R^1 = \{1\}$ ou apenas $R^2 = \{2\}$, ou ainda definir ambas. Nesse caso mínimo, se tomarmos R^1 e R^2, temos exatamente duas retas que são paralelas entre si.

2. Seja P um plano com uma quantidade finita n de pontos, onde $n \geq 3$. Considerando o primeiro e o segundo Axioma de Incidência, responda:

Axioma I2: Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

Este segundo axioma está impondo duas condições:

(i) Se existirem retas no plano, então o plano possui três pontos ou mais;

(ii) Uma reta é um subconjunto do plano que possui ao menos dois pontos.

a) É possível um plano não ter retas? Caso seja possível, existe alguma restrição sobre a quantidade de elementos que esse plano deva ter?

Resposta: Sim, pois o ambos Axiomas não obrigam a existência de retas em um plano. Assim, temos os seguintes casos possíveis:

- $P = \varnothing$: o plano é vazio, portanto não existem retas.
- $P = \{1\}$: o plano tem apenas um ponto, logo não existem retas, pois qualquer reta seria vazia, visto que ela precisa ter dois pontos.
- $P = \{1, 2\}$: nesse caso NÃO É PERMITIDO visto que dois pontos distintos contém uma reta, e essa reta seria o plano todo contrariando a axioma I1.

Portanto, o plano pode ser vazio ou ter infinitos elementos. A restrição aparece apenas quando existir uma reta: nesse caso, o plano deve possuir pelo menos três elementos, pois se houver apenas dois, qualquer reta formada coincidiria com todo o plano, contrariando o Axioma I1.

b) É possível um plano possuir retas de forma que todas sejam paralelas umas às outras?

Resposta: Não, dado o minimos de elementos do plano que pode haver retas:

$$P = \{a, b, c\}$$

posso ter as retas:

$$R^1 = \{a, b\}, \quad R^2 = \{a, c\}, \quad , R^1 = \{b, c\},$$

Esse plano possui 3 retas e elas não são paralelas umas as outras.

c) Qual o número máximo de retas que podem existir em P? Dessas, qual a maior quantidade de retas paralelas entre si podemos tomar?

Resposta: Pelo Axioma I2, cada par de pontos distintos determina uma única reta. Logo, se não houver três pontos colineares (posição geral), o número máximo de retas é

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Por exemplo, para $P = \{1, 2, 3\}$: $r_1 = \overline{12}$, $r_2 = \overline{13}$, $r_3 = \overline{23}$, totalizando 3 retas.

Como retas paralelas distintas não se interceptam, elas não podem compartilhar pontos. Logo, cada reta "consome" dois pontos distintos. Assim, com n pontos,

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Esse limite é atingível: basta emparelhar os pontos em pares que determinem retas com a mesma direção (por exemplo, colocar os pares com a mesma abscissa, gerando k retas verticais paralelas). Se n for ímpar, um ponto sobra.

d) Qual o número mínimo de retas que devem existir em P? Dessas, qual a maior quantidade de retas paralelas entre si podemos tomar?

Resposta: O numero minimo são 3 retas como ja foi provado na pergunta b, onde dado 3 pontos consigo obter 3 pares de pontos. Nenhuma pois cada reta contem pelo menos um elemento da outra.

3. Diz-se que três ou mais pontos são colineares se existe uma reta que contém todos eles. Do contrário, diz-se que eles são não colineares. Considere n pontos não colineares, onde $n \geq 3$. Considerando o primeiro e o segundo *Axioma de Incidência*, responda:

a) Qual o número máximo de retas que podem passar por esses n pontos? Dessas, qual a maior quantidade de retas paralelas entre si podemos tomar?

Resposta: Dado um conjunto P com $n \geq 3$ pontos, dizemos que P está em *posição geral* se, e somente se, nenhuma das $\binom{n}{3}$ ternas de pontos é colinear. Nesse caso, cada par determina uma reta distinta e, portanto,

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

b) Qual o número mínimo de retas que podem passar por esses n pontos? Dessas, qual a maior quantidade de retas paralelas entre si podemos tomar?

Resposta: Com $n \geq 3$ pontos não colineares, o número mínimo de retas determinadas é

$$r_{\min}(n) = n.$$

Atingimos $r_{\min}(n)$ quando $n-1$ pontos estão numa mesma reta L e o ponto restante $P \notin L$. As retas são L e as $n-1$ retas PA_i (uma para cada $A_i \in L$), totalizando n.

Nesse arranjo mínimo, não existem duas retas paralelas: as PA_i são todas concorrentes em P e cada PA_i intersecta L em A_i. Logo, a maior quantidade de retas paralelas entre si que podemos tomar é **zero**.

4. Suponha P um plano com 3 ou mais pontos (pode ter infinitos pontos). Considerando o primeiro e o segundo Axioma de Incidência prove que a união de todas as retas que passam por qualquer ponto A fixado é o plano P.

Resposta Qualquer ponto X do plano P pode ser ligado a A por uma reta (Axioma I2). Se você colecionar todas essas retas "saindo" de A, você alcança todos os pontos do plano — logo, alcança o plano inteiro.

Concluímos $S = P$. □

5. (Barbosa. Geometria Euclidiana Plana) Chama-se *plano de incidência* ao par (P, R), onde P é um conjunto de pontos e R é uma coleção de subconjuntos de P, denominados retas, satisfazendo apenas os dois axiomas de incidência e a condição de que cada reta possui pelo menos dois pontos. Verifique se são planos de incidência os pares (P, R) seguintes:

a) $P = \{A, B\}$ e $R = \big\{\{A, B\}\big\}$;

Análise.

(1) Cada reta tem pelo menos dois pontos? Sim: $\{A, B\}$ tem 2.

(2) (I2) Por dois pontos distintos passa uma única reta? Sim: $\{A, B\}$.

(3) (I1) Para qualquer reta, há pontos do plano dentro e fora dela? Não: a única reta $\{A, B\}$ contém todos os pontos de P.

Conclusão: (P, R) *não* é plano de incidência, pois viola o Axioma I1.

b) $P = \{A, B, C\}$ e $R = \big\{\{A, B\}, \{A, C\}\big\}$;

Análise.

(1) Cada reta tem pelo menos dois pontos? Sim.

(2) (I1) Para qualquer reta há pontos do plano dentro e fora dela? Sim: $C \notin \{A, B\}$ e $B \notin \{A, C\}$.

(3) (I2) Por quaisquer dois pontos distintos passa uma única reta? **Não**: não há reta contendo B e C.

Conclusão: (P, R) *não* é plano de incidência (falha em I2).

c) $P = \{A, B, C, D\}$ e $R = \big\{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\big\}$;

Análise.

(1) Cada reta possui ao menos dois pontos? Sim (todas têm 2).

(2) (I1) Há pontos do plano dentro e fora de cada reta? Sim (ex.: $C, D \notin \{A, B\}$).

(3) (I2) Por quaisquer dois pontos passa uma única reta? Sim (a própria dupla).

Conclusão: (P, R) *é* um plano de incidência.

d) $P = \mathbb{R}^2$ e $R = \{\, \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\} \mid ab \neq 0\}$.