Problemas – Sistematização e Representação

Licio Hernanes Bezerra
Carmem S. Comitre Gimenez
Nereu Estanislau Burin

2ª Edição
Florianópolis, 2009

Governo Federal

Presidente da República: Luiz Inácio Lula da Silva

Ministro de Educação: Fernando Haddad

Secretário de Ensino a Distância: Carlos Eduardo Bielschowky

Coordenador Nacional da Universidade Aberta do Brasil: Celso Costa

Universidade Federal de Santa Catarina

Reitor: Alvaro Toubes Prata

Vice-Reitor: Carlos Alberto Justo da Silva

Secretário de Educação a Distância: Cícero Barbosa

Pró-Reitora de Ensino de Graduação: Yara Maria Rauh Müller

Pró-Reitora de Pesquisa e Extensão: Débora Peres Menezes

Pró-Reitor de Pós-Graduação: José Roberto O'Shea

Pró-Reitor de Desenvolvimento Humano e Social: Luiz Henrique Vieira Silva

Pró-Reitor de Infra-Estrutura: João Batista Furtuoso

Pró-Reitor de Assuntos Estudantis: Cláudio José Amante

Centro de Ciências da Educação: Carlos Alberto Marques

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas: Méricles Thadeu Moretti

Centro de Filosofia e Ciências Humanas: Maria Juracy Filgueiras Toneli

Cursos de Licenciaturas na Modalidade à Distância

Coordenação Acadêmica Matemática: Neri Terezinha Both Carvalho

Coordenação de Ambientes Virtuais: Nereu Estanislau Burin

Coordenação de Infra-Estrutura e Pólos: Vladimir Arthur Fey

Comissão Editorial

Laboratório de Novas Tecnologias - LANTEC/CED

Coordenação Pedagógica

Coordenação Geral: Andrea Lapa

Coordenação Pedagógica: Roseli Zen Cerny

Núcleo de Formação: Nilza Godoy Gomes

Núcleo de Pesquisa e Avaliação: Claudia Regina Flores

Núcleo de Criação e Desenvolvimento de Materiais

Design Gráfico

Coordenação: Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira

Projeto Gráfico Original: Diogo Henrique Ropelato, Marta Cristina Goulart Braga, Natal Anacleto Chicca Junior

Redesenho do Projeto Gráfico: Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira

Diagramação: Thiago Rocha Oliveira, Laura Martins Rodrigues

Ilustrações: Maximilian Vartuli, Ângelo Bortolini Silveira

Capa: Natália de Gouvêa Silva

Design Instrucional

Coordenação: Juliana Machado

Design Instrucional: Alessandra Zago Dahmer

Revisão de Design Instrucional: Márcia Maria Bernal

Revisão Gramatical: Maria Tereza de Queiroz Piacentini

Ficha Catalográfica

B574p Bezerra, Licio Hernanes
Problemas: sistematização e representação / Licio Hernanes Bezerra, Carmem Suzane Comitre Gimenez, Nereu Estanislau Burin – 2. ed. – Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2009.
112 p.

ISBN 978-85-99379-67-7

1.Matemática. I. Gimenez, Carmem S. Comitre. II. Burin, Nereu Estanislau. III Título.

CDU 51

Elaborada pela Bibliotecária Eleonora M. F. Vieira – CRB – 14/786

Sumário

Apresentação

Caro aluno,

Ali Iezid Izz-Eduim Ibn Salim Hank Malba Tahan (1895-1974) era o pseudônimo de Júlio César de Melo e Souza, escritor e matemático carioca. Foi um dos maiores incentivadores do ensino de matemática no Brasil.
Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre.

A disciplina Problemas – Sistematização e Representação trata basicamente de resolução de problemas, e é dividida em quatro capítulos: exercícios de sistemática e representação, decifrando enigmas (uma homenagem a Malba Tahan), problemas olímpicos e raciocínio lógico.

O primeiro capítulo, que dá nome à disciplina, apresenta problemas que sustentam os outros capítulos, uma vez que sua resolução obriga você a organizar recursos intelectuais (sistemática). Ou, então, estimula-o a buscar alguma representação gráfica, algum recurso que transforme palavras escritas em conceito palpável. Introduzimos árvores gráficas para representar informação, o que é uma forma de representação clara e precisa e não ambígua para problemas de natureza combinatória.

O segundo capítulo é uma seleção de problemas lógicos, enigmas para serem decifrados. Há textos maravilhosos retirados ou adaptados de "Alice no país das maravilhas", de Lewis Carroll, ou de "O homem que calculava", de Malba Tahan. Há, também, problemas que dependem da compreensão dos conectivos lógicos "e", "ou", "se ... então", que são resolvidos com alguma sistemática e representação.

O terceiro capítulo começa com três provas olímpicas, que foram as provas da primeira fase da OBM de 2004 nos níveis I, II e III. O capítulo apresenta, na seqüência, problemas, com resolução, de outras olimpíadas, além da brasileira: regionais, ibero-americanas, cone sul etc.

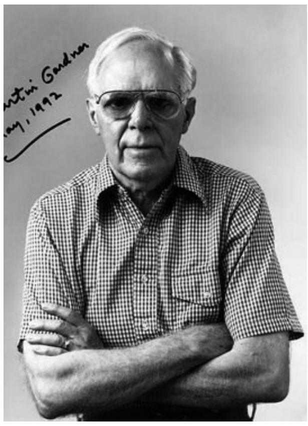
O quarto e último capítulo introduz o raciocínio lógico de modo informal, mas rigoroso. Reciclando frases de publicidade, diálogos de filmes e enunciados matemáticos, estudamos o cálculo de predicados, com ou sem quantificadores.

Esta disciplina envolve trabalho cuidadoso e leitura crítica. Convidamos você a ler livros de Malba Tahan, de Martin Gardner, de Lewis Carroll e todos os livros contidos na bibliografia. Esperamos que essa disciplina realmente lhe propicie condições de ser mais sistemático na abordagem de problemas matemáticos.

Licio Hernanes Bezerra

Carmem S. Comitre Gimenez

Nereu Estanislau Burin



Martin Gardner

Lewis Carroll é o pseudônimo adotado pelo matemático e escritor Charles Lutwidge Dodson (1832-1898).

Introdução

Há, pelo menos, duas décadas que constatamos no Ensino Superior uma dificuldade crescente dos alunos em entender conceitos matemáticos, drasticamente entre alunos de ciências exatas e de engenharias. Tornou-se quase dolorosa a transição do Ensino Médio para o Ensino Superior. Um dos motivos parece ser a pouca carga horária semanal de matemática no Ensino Médio, que não consegue suprir as necessidades cognitivas para a aprendizagem da matemática superior - geralmente, disciplinas de cálculo real, cálculo vetorial e álgebra linear.

Um outro motivo parece ser a relação entre estudante e professor, que muda radicalmente de uma relação quase familiar (“tia”, “tio”) para uma relação basicamente profissional. O Ensino Superior propicia a capacitação do aluno em alguma profissão. Para isso, porém, o aluno deve-se posicionar como um aprendiz com concentração e disciplina suficientes para escutar, refletir, perguntar e responder. A universidade é fundamentalmente um laboratório onde o estudante ensaia para tornar-se suficientemente hábil a fim de responder às demandas de sua vida profissional. Por isso, responsabilidade (habilidade para responder) é cobrada na universidade diferentemente do que é cobrado no Ensino Médio.

As dificuldades dos alunos para cursar disciplinas de matemática superior não são exclusivas de nosso país, como se pode verificar em sítios de universidades européias na rede mundial de computadores, que oferecem cursos introdutórios ao cálculo e à álgebra linear no período de férias imediatamente anterior ao começo das aulas. No curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), algumas disciplinas iniciais foram estruturadas para processar conteúdos de matemática de Ensino Fundamental e Médio, mas com uma visão de matemática superior, introduzindo uma maneira fundamentalmente matemática de olhar, mesmo para as questões mais simples. Esta disciplina está incluída entre elas.

Há mais de uma década que o nosso curso de Licenciatura de Matemática enfrenta essa realidade da transição. Poderíamos apenas lamentar o descrédito crescente da classe dos professores de Ensino Fundamental e Médio junto a sucessivos governos, ou pior, a desmoralização da educação por parte do sistema produtivo que superdimensiona a remuneração de analfabetos funcionais, como alguns jogadores de futebol, e paga uma ninharia a agentes de saúde que cuidam de doentes terminais, a professores que lidam com nossas crianças e adolescentes etc. Em vez disso, resolvemos enfrentar a situação como educadores.

Inclui todas as pessoas que possuem menos de quatro séries de estudo concluídos. Estas, reconhecem letras e palavras, mas não interpretam textos.

Quais são as deficiências dos alunos? Ou melhor, o que nós, professores, percebemos nos alunos como obstáculos para a compreensão de conceitos matemáticos? Eis algumas observações:

- Os alunos não sabem seguir instruções recorrentes. Por exemplo, eles geralmente não sabem ler um manual, como o de imposto de renda. Em matemática, há muitos problemas em que você tem que ler seguidamente as instruções para saber se você já considerou todas as possibilidades.
- Não usam representação alguma para um problema: uma figura, um gráfico etc.
- Lêem pouco e têm redação fragmentada.
- Não desenvolvem quase nenhuma abstração de alto nível, em que os objetos não se comportam como algo conhecido e seguem regras próprias (quase toda a matemática é assim). Por isso, torna-se difícil entender por que $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$, ou por que, em geral, $\frac{x^6+y^6}{x^2+y^2}\neq x^3+y^3$.
- Não particularizam conceitos e não generalizam resultados corretamente.
- São rígidos, desmotivados e, muitas vezes, arrogantemente prepotentes. Será que essa arrogância do aluno de hoje não é resultado da ausência de limites para o aluno na escola? Há vários casos de pais que minam a autoridade do professor na escola, por exemplo, favorecendo-o sempre em querelas entre professor e aluno. É claro que também há abusos por parte de professores. Mas, aqui, perguntamos: a família assiste as suas crianças na escola de uma forma satisfatória? Porque isso extrapola até a universidade. O estudante

prepotente prejudica a si mesmo: em vez de abrir a mente para algo novo, ele se prende em um atoleiro emocional. Um exemplo disso é o fato comum de alunos atribuírem apenas ao professor de uma disciplina a culpa da sua reprovação.

Esta disciplina apresenta as seguintes propostas:

a) Introduzir formas de representação de dados, como símbolos, tabelas e grafos. Para isso, elaboramos problemas ou adaptamos exercícios de vários livros (cujas referências aparecem no final do livro) que, para resolvê-los, seja inevitável uma representação. Aproveitamos a ocasião para introduzi-la. Exemplos: quadrado mágico 3x3, problemas de possibilidades, o problema da ponte de Könisberg, problemas de percursos mínimos etc.

b) Submeter o estudante a exercícios em que seja obrigatória a leitura incessante de uma lista de instruções. Exemplo: a formação de quadrados mágicos ímpares, de ordem > 3.

c) Envolver o aluno com problemas em que seja necessário o uso de uma sistemática para resolvê-los. Exemplo: problemas de máximo divisor comum entre alguns inteiros, problemas de abrir porta com vários ferrolhos, cada um abrindo em sentidos diversos etc.

d) Expor o aluno a problemas lúdicos, que surgem em diversas referências literárias. Exemplo: doublets, de Lewis Carroll; triplets, de Augusto de Campos; o problema das escravas com burcas, de Malba Tahan.

e) Desafiar o aluno com problemas olímpicos, utilizados em olimpíadas regionais, brasileiras, ibero-americanas, internacionais de matemática.

f) Introduzir o raciocínio dedutivo, que é inerente à matemática, via frases oriundas de publicidade, teoremas de geometria euclidiana etc.

Pretendemos, com esses problemas, que o estudante se envolva com a matemática com mais prazer e disponibilidade, que ele descubra o fato que, quando está pensando em um problema de matemática, ele está conectado com toda uma linhagem de ma-

Grafo
Conjunto formado por pontos (chamados nós ou vértices) e por linhas (arestas) que ligam alguns desses pontos. O grafo pode ser orientado (neste caso, a ligação entre pontos A e B é diferente de ligação entre B e A), ou não. Exemplo: árvores.

Após a 2ª Guerra Mundial, a cidade da Prússia ocidental, Könisberg, passou a ser uma cidade russa e mudou de nome para Kaliningrad. Esta cidade possui um rio com duas ilhas conectadas por sete pontes. O problema era saber se era possível caminhar de um ponto qualquer da cidade e retornar a este ponto passando por cada ponte exatamente uma vez.

Nasceu em São Paulo (1931). Poeta, tradutor, ensaísta, crítico de literatura e música. A partir de 1980, intensificou os experimentos com as novas mídias, apresentando seus poemas em placas luminosas, videotextos, neon, hologramas e laser, animações computadorizadas e eventos multimídia, abrangendo som e música. *Fonte: www.uol.com.br/augustodecampos*

Em que se exploram frases do tipo: se você se encaixa em um perfil óbvio então você vai comprar o produto.

temáticos do passado e do presente. Que o estudante encare essa maravilha e esse mistério com respeito e dignidade, honrando assim a tradição da matemática.

Capítulo 1

Exercícios de Sistemática e Representação

Capítulo 1

Exercícios de Sistemática e Representação

1.1 Exercícios de Sistemática

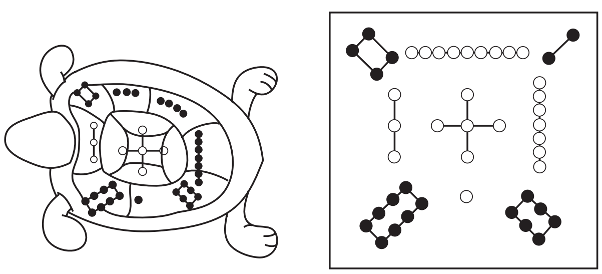
Para entender o que é sistemática, vamos apresentá-la em um exemplo famoso, a construção do quadrado mágico 3x3, que é único a menos de simetrias e/ou rotações.

O problema é o seguinte: construa uma matriz 3x3 com os números de 1 a 9, de tal modo que a soma das entradas de qualquer linha ou coluna ou diagonal (principal e secundária) seja sempre a mesma.

O quadrado é dito "mágico" porque a soma dos números de qualquer linha, coluna ou diagonal, se mantém constante.

Albrecht Dürer (1471-1528) Gravador e pintor alemão. Grande teórico da cidade do Renascimento. Publicou, em 1527, o "Tratado sobre fortificação de cidades, vilas e castelos", onde apresenta um esquema de uma cidade ideal quadrada. O texto é referido como obra-prima para arquitetos e urbanistas. *Fonte: Wikipédia, enciclopédia livre.*

A origem dos quadrados mágicos parece situar-se na China, atribuída ao imperador engenheiro Yu, o Grande, que reinou por volta de 2.200 a.C. O quadrado mágico 3x3, conhecido como Lo Shu, é associado ao segundo arranjo dos trigramas do I Ching, que é denominado Céu Posterior ou Wenwang, por ser atribuído ao Rei Wên, que reinou em torno de 1.100 a.C. Conta a lenda que esse quadrado foi visto por Yu no dorso de uma tartaruga que surgiu do rio Lo. Entretanto, foi só no século IX d.C. que os quadrados mágicos propagaram-se pelo Japão e Oriente Médio, chegando à Índia no século XI. Quadrados mágicos gravados em placas de prata foram usados como amuleto, na Europa medieval, contra a peste. Na gravura 1.2, Melancholia, de Albrecht Dürer, do século XVI, aparece um quadrado mágico de ordem 4, com soma 34, entre outras referências à alquimia e à astrologia.



4	9	2
3	5	7
8	1	6

Figura 1.1 - Evolução do Quadrado Mágico

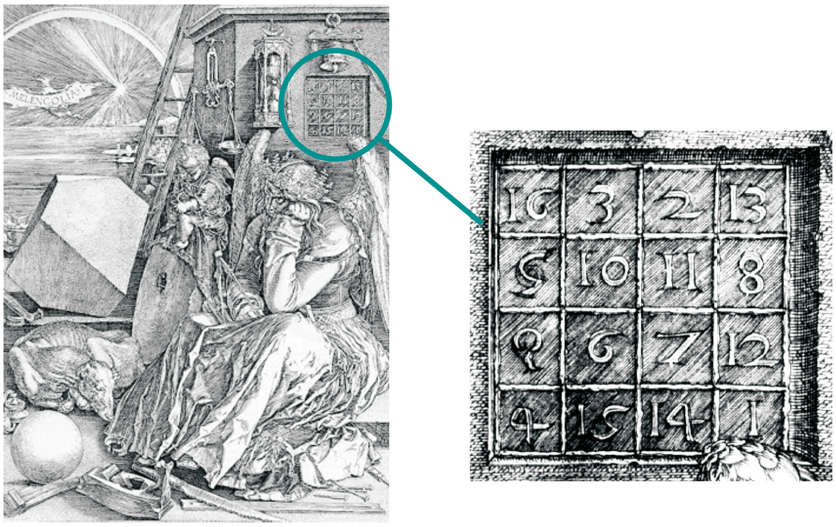


Figura 1.2 - Melancholia

A primeira pergunta que uma mente sistemática faz é: qual é o valor dessa soma?

Bem, a soma de todos os números de 1 a 9 é 45. Na matriz, esses números serão arranjados de tal modo que a soma na primeira linha será igual à soma na segunda linha, que será igual, ainda, à soma na terceira linha. Ou seja, teremos 3 somas iguais, cuja adição resultará em 45. Ou seja, a soma procurada é 15.

Uma outra pergunta é: de quantos modos podemos escrever 15 como uma soma de três parcelas distintas, escolhidas entre os números de 1 a 9?

O maior número é 9. Se eu escolher somar outros dois números com ele para dar 15, o próximo número é no máximo 5 e o terceiro, então, é 1.

$$9 + 5 + 1 = 15$$

Ainda com 9 como primeira parcela, temos

$$9 + 4 + 2 = 15$$

Note que na próxima soma apareceria o número 3 duas vezes, o que foge à regra.

Agora com 8 como primeira parcela, temos então:

$$8 + 6 + 1 = 15$$

$$8 + 5 + 2 = 15$$

$$8 + 4 + 3 = 15$$

Com 7,

$$7 + 6 + 2 = 15$$

$$7 + 5 + 3 = 15$$

Com 6,

$$6 + 5 + 4 = 15$$

Podemos olhar, agora, para a matriz quadrada vazia e notar que a entrada no centro da matriz participa de quatro somas: as das duas diagonais, mais a da linha e a da coluna que se cruzam no centro. As entradas relativas aos quatro vértices do quadrado participam, cada uma, de três somas: a da linha e a da coluna que se juntam no vértice, mais a soma da diagonal. Finalmente, as outras quatro entradas participam apenas de duas somas.

Observando a lista de somas acima, concluímos que 5 está no centro, pois é o único número que participa de quatro somas. Um dos vértices é 6 (que participa de três somas) e, logo, o oposto a ele é 4 (idem). Os outros dois vértices são 8 e 2 (idem). Então se completa a matriz com os outros quatro números.

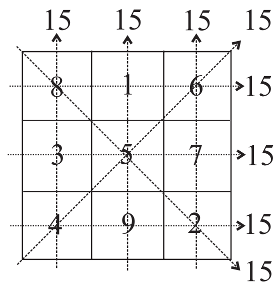


Figura 1.3 – Lo Shu – quadrado mágico 3x3.

Um dado frustrante é que essa sistemática não resolve completamente o problema para quadrados mágicos de ordem maior, por exemplo, um quadrado mágico 4x4.

Vimos que existe, a menos de rotações e simetrias, apenas um quadrado mágico 3x3. Porém, existem 880 quadrados mágicos 4x4 e 275.305.224 quadrados mágicos 5x5 (sempre a menos de simetrias e rotações). O número de quadrados mágicos 6x6 ainda é desconhecido, mas é estimado ser na ordem de 10^{19}.

Os quadrados mágicos pares (de ordem maior ou igual a 4) têm resolução complicada. Uma explanação sobre quadrados mágicos e como obtê-los pode ser vista no excelente sítio de matemática mathworld.wolfram.com, um dos mais completos no mundo. Quadrados mágicos estão em *mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html*.

Um exercício interessante é gerar quadrados mágicos de ordem ímpar seguindo as seguintes instruções, que foram descritas por Kraitchik (KRAITCHIK, M. *Mathematical Recreations*. New York: Norton, 1942):

- coloque o número 1 no centro da primeria linha (a de cima);
- coloque cada número subseqüente no quadrado imediatamente à direita e acima;
- se sair do quadrado ao ir para a direita, o quadrado subseqüente é o da mesma linha (de cima), na primeira coluna (a da esquerda); se sair do quadrado ao ir para cima, o quadrado subseqüente será o da mesma coluna (da direita), na última linha (a de baixo);
- quando encontrar, nesse processo, alguma casa ocupada, o próximo número será posto imediatamente abaixo do número anterior (o que foi colocado por último).

Esse método é conhecido como Método Siamês ou Método de la Lourbère. Parece que a primeira vez que esse método surgiu no ocidente foi no século XVII, quando Antoine de la Lourbère retornou à França após servir no Sião (hoje, Tailândia), como embaixador.

Obs.: Esse movimento em diagonal fica claro se considerarmos quadrados gêmeos, colocando o número na posição correspondente ao quadrado original.

Quadrados gêmeos são quadrados idênticos postos à volta do quadrado original; ao todo são oito: um de cada lado, um em cada vértice.

Se começarmos o processo com o número 1 em qualquer casa, esse método ainda gera um quadrado mágico fraco, isto é, um quadrado em que a soma dos elementos das linhas, das colunas, e de apenas uma das diagonais é sempre a mesma. Verifique e calcule quantos quadrados mágicos podemos gerar por esse procedimento, a menos de simetrias e rotações.

1.1.1 Exercícios Propostos

1) Construa quadrados mágicos 3 por 3, com os seguintes números (sem repetir):

   a) de 2 a 10

   b) os pares de 2 a 18

   c) os ímpares de 1 a 17

2) Disponha as culturas de milho, arroz, feijão e soja - quatro de cada uma - num campo quadrado 4 por 4 de modo que cada cultura só apareça uma vez em cada linha, coluna ou diagonal. Sugestão: fixe alguma linha, coluna ou diagonal. Depois de fixada, quantas soluções existem?

3) Uma porta tem 3 trincos e você não sabe para que lado cada trinco abre. O problema é abrir a porta. Note que:

   - o problema tem uma única solução
   - se você sair tentando ao acaso, você pode dar o azar de nunca chegar à solução
   - se você for cuidadoso, na pior das hipóteses vai precisar de 8 tentativas.

   Quais são as 8 possibilidades? Descubra um método para girar os trincos que as simule.

4) Considere a seguinte formação de números, construídos com os algarismos de 0 a 9, em que os dígitos são considerados da esquerda para a direita:

   i) os algarismos do número são todos diferentes;

   ii) cada algarismo é resultado de uma das seguintes operações: ou ele é três vezes o anterior, ou é uma unidade a mais que isso, ou é duas unidades a mais que isso;

iii) se uma das operações resultar em um número maior que 9, considere somente o algarismo das unidades do resultado;

iv) para o primeiro algarismo, o algarismo anterior é o último algarismo;

v) o primeiro algarismo é o maior algarismo do número.

Determine todos os números construídos desta forma,

a) com 1 algarismo;

b) com 2 algarismos;

c) com 3 algarismos.

5) Um jogo de dominó que vai até o duplo 6 possui 28 peças.Um jogo de dominó que vai até o duplo 9 possui 55 peças. Quantas peças possui um jogo de dominó que vai até o duplo 12? Você pode generalizar?

6) Quantos triângulos são possíveis de se formar com os vértices quaisquer de um pentágono regular? E com os de um hexágono regular? E com os de um octógono regular?

7) Num prédio de 6 andares (sem contar o térreo) as escadas de um andar para o outro têm todas o mesmo comprimento. Quantas vezes a escada do 1º ao 6º andar é mais alta do que a escada do 1º ao 3º? Qual a razão entre o comprimento das escadas do 1º ao 6º e o comprimento das escadas do 1º ao 3º?

8) Temos 30 peças no formato de triângulo eqüilátero e gostaríamos de formar o maior hexágono possível com estas peças, sem espaços vazios no seu interior.

a) Quantas peças não serão usadas?

b) Se o lado do triângulo mede 1 unidade, qual é a medida do lado do hexágono?

9) Cinco corvos estão lado a lado e igualmente afastados sobre uma cerca. Tente descobrir em que ordem os corvos estão, a partir das seguintes pistas:

a) C está à mesma distância de A que de B.

b) E está entre D e A.

c) B está ao lado de E.

d) E não está entre B e D.

10) Qual é o menor número que tem a propriedade de ficar com seus dígitos invertidos quando multiplicado por 9?

11) Por qual número deve-se multiplicar 49 para obter 4.949? Por qual número deve-se multiplicar 38 para obter 383.838? Generalize para números com 2 dígitos.

12) Um livro tem 500 páginas. Quantas vezes o algarismo 1 aparece na numeração?

13) Quantos números naturais com 4 algarismos diferentes existem tal que a diferença entre o penúltimo algarismo e o último algarismo em valor absoluto seja 2?

14) Qual é a soma de todos os inteiros entre 50 e 350 que terminam em 1?

4 de Julho é o 185º dia do ano no calendário gregoriano (186º em anos bissextos). Faltam 180 para acabar o ano. Chama-se ano bissexto o ano que possui um dia a mais do que os anos comuns. O objetivo é manter o calendário utilizado em sincronia com os eventos sazonais relacionados às estações do ano. Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre.

15) Na América do Norte uma data como 4 de julho de 1999 escreve-se geralmente como 7/4/99, mas em nosso país o mês aparece em segundo lugar e a data será escrita como 4/7/99. Se não soubermos que sistema é utilizado, quantas datas são ambíguas em relação a essas notações?

16) Às 6 horas o relógio da igreja levou 30 segundos para dar as 6 badaladas. Jorge concluiu que, ao meio-dia, ele levaria 1 minuto para dar as 12 badaladas. Mas ele estava enganado. Qual é o tempo correto?

17) Uma pessoa faz 69 anos em 96, 58 anos em 85, 47 anos em 74 etc. Uma outra pessoa faz 79 anos em 97, 68 anos em 86, 57 anos em 75 etc. É claro que esta coincidência não acontece com todas as pessoas. Qual é a condição para que isso ocorra?

18) Um grupo de fanáticos religiosos decidiu, após um intenso estudo dos seus livros sagrados e uma imensa utilização de poderosos computadores, que o fim do mundo aconteceria quando o primeiro dia de um século vindouro caísse num domingo. Segundo eles, quanto tempo ainda nos resta?

19) Com uma ampulheta que marca 7 minutos e outra que marca 11 minutos, como é que se pode marcar o tempo de 15 minutos para cozinhar um ovo?

20) Quatro amigas partilham um apartamento. Enquanto uma delas prepara café, outra estuda matemática, outra estuda literatura e a outra lê jornal. Descubra o que cada uma está fazendo se:

i) Marta não está estudando matemática e não está lendo jornal.

ii) Maria não está preparando o café e não está estudando matemática.

iii) Se Marta não está preparando o café, então Mirna não está estudando matemática.

iv) Márcia não está lendo jornal e não está estudando matemática.

v) Mirna não está lendo jornal e não está preparando o café.

21) Mil armários estão enfileirados e numerados de 1 a 1.000. Mil alunos, também numerados de 1 a 1.000, começam a seguinte brincadeira:

i) o primeiro aluno abre as portas de todos os armários (que, inicialmente, estavam fechados);

ii) o aluno 2 inverte a situação das portas 2, 4, 6, 8, (isto é, fecha-as);

iii) o aluno 3 inverte a situação das portas 3, 6, 9, 12, (abre-as ou fecha-as).

Sucessivamente, cada aluno passa e inverte as situações das portas dos armários que têm números múltiplos de seu próprio número. Após os mil alunos passarem, qual é o número do último armário a permanecer aberto? Quantos armários permanecerão abertos? Quais?

1.1.2 Solução dos Exercícios Propostos

2) Fixada uma linha, coluna ou diagonal, temos duas soluções.

4) Para determinar quais números de apenas um algarismo satisfazem as condições, usam-se as instruções (iv) e (ii). Comecemos pelo 9: considerando-o como primeiro e último algarismo, verificaremos se a instrução (ii) será satisfeita. Agora, $9 \times 3 = 2\mathbf{7}$, $9 \times 3 + 1 = 2\mathbf{8}$, $9 \times 3 + 2 = 2\mathbf{9}$ e os algarismos considerados seriam **7**, **8** e **9**. Assim, o número 9 satisfaz essa instrução. Analogamente, pode-se verificar que 4 e 5 satisfazem todas as condições listadas.

   Para números de dois algarismos, observando a instrução (v), vamos iniciar também por números cujo primeiro algarismo é 9: $9 \times 3 = 2\mathbf{7}$; as possibilidades para o segundo algarismo serão **7** ou **8** (o próprio 9 não serve pela instrução (i)). Agora, como $7 \times 3 = 2\mathbf{1}$, $7 \times 3 + 1 = 2\mathbf{2}$ e $7 \times 3 + 2 = 2\mathbf{3}$, o número 7 não pode ser considerado um algarismo anterior a 9.

   Do mesmo modo, não se pode considerar 8 como algarismo anterior ao 9, pois $8 \times 3 = 2\mathbf{4}$, $8 \times 3 + 1 = 2\mathbf{5}$, $8 \times 3 + 2 = 2\mathbf{6}$. Assim, não teremos nenhum número de dois algarismos começando com 9 que satisfaça todas as instruções.

   Usando o mesmo procedimento, começando agora por 8, teremos 86; com 7, 72; com 3, 31.

   Use o mesmo procedimento para encontrar todos os números de três, quatro e cinco algarismos. Se tudo correr bem, você encontrará 6 números de três algarismos, 8 números de quatro algarismos e 7 números de cinco algarismos.

5) 91 peças.

6) Temos 5 vértices no pentágono. Logo, temos 5 maneiras de escolher o primeiro vértice do triângulo, 4 maneiras de escolher o segundo vértice e 3 maneiras de escolher o terceiro. No entanto, esses triângulos estão sendo contados seis vezes. Pois, se A, B, C, D e E são os vértices do pentágono, os triângulos ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA são todos o mesmo triângulo! Assim, vemos que 60 ($= 5 \times 4 \times 3$) é o número de triângulos com repetições. Como cada triângulo pode ser representado de 6

maneiras diferentes, devemos dividir 60 por 6, obtendo, assim, um total de 10 triângulos diferentes. Usando o mesmo raciocínio, poderemos formar 20 triângulos diferentes com os vértices de um hexágono e 56 triângulos diferentes com os vértices de um octógono.

7) 2 vezes e meia.

8) O maior hexágono é formado com 24 peças; seu lado mede 2 unidades (o dobro do lado do triângulo); sobram, portanto, 6 peças. Faça o mesmo problema usando 2.002 peças.

9) Não é possível descobrir a ordem em que estão os corvos na cerca. As pistas são contraditórias; se começarmos a disposição com as pistas 1 e 2, teremos

A-------C-------B ou B-------C-------A.

Considerando a primeira opção, a pista 2 nos levaria a

D-------E-------A-------C-------B,

o que contradiz as pistas 3 e 4. Analogamente, acontecem contradições se começarmos com as pistas 3 ou 4. Assim, a resposta é: o problema não tem solução.

10) 1.089.

11) 49 × 101 = 4.949; 38 × 10 101 = 383.838.

12) 200 vezes

13) 798 números

14) A soma é 5.880.

15) 132 datas ambíguas por ano.

16) O tempo correto é 66 segundos.

17) A condição para que isso ocorra é a pessoa ter nascido num ano cujos dois últimos algarismos formam um número múltiplo de 9.

Gregório XIII, nascido Ugo Buoncampagno (1502 – 1585), destaca-se por ter sido o responsável pela introdução do calendário atual (gregoriano), reformando o antigo calendário juliano.

18) Em 1582, o Papa Gregório XIII decretou que, ao invés de haver um ano bissexto a cada 4 anos, seria feita uma exceção para todos os anos que fossem múltiplos de 100 e não fossem múltiplos de 400. Isto ajustaria as horas que vão se acumulando com o passar dos anos, apesar do acerto dos anos bissextos. Lembre-se que um ano tem 365 dias, 6 horas, 13 minutos e 53 segundos. Por exemplo, o ano 2000 foi um ano bissexto (múltiplo de 4 e de 400), mas o ano 2100 não será bissexto, apesar de ser múltiplo de 4, pois não é divisível por 400. Sabendo disso, podemos fazer a contagem e verificar que o primeiro dia de um século nunca cairá num domingo.

19) Dá-se a partida nas duas ampulhetas. Quando a ampulheta de 7 minutos se esgotar, põe-se o ovo na água fervente. Quatro minutos depois a ampulheta de 11 minutos também se esgota. Basta virá-la de novo e, quando tiver se esgotado pela segunda vez, o ovo terá cozinhado por 15 minutos.

20) Podemos usar um quadro 4 por 4 e eliminar algumas possibilidades:

	Marta	Maria	Mirna	Márcia
Estuda matemática	N	N	S	N
Estuda literatura				S
Prepara café	S	N	N	
Lê jornal	N	S	N	N

As instruções (i), (ii), (iv) e (v) eliminam duas células cada uma. A instrução (iii) é uma implicação. Declara que, **se** Marta não está preparando o café, **então** Mirna não está estudando matemática. Observemos, porém, que, como cada garota está fazendo apenas uma coisa, só resta a Mirna estar estudando matemática, e a Maria estar lendo jornal. Assim, se chamarmos "Marta não está preparando o café" de A e "Mirna não está estudando matemática" de B, teremos ($A \Rightarrow B$) e ~B (a negação de B, já que Mirna **está** estudando matemática), o que nos dá, como conclusão, a negação de A, ou seja, Marta está preparando café (ver capítulo 4). Isto implica que Márcia está estudando literatura. A solução é então: Marta está preparando o café, Maria está lendo jornal, Mirna está estudando matemática e Márcia está estudando literatura.

21) Os armários que permanecem abertos são aqueles que têm sua posição invertida um número ímpar de vezes. O número de vezes que a posição de um armário n muda é a quantidade de divisores do número n. Para calcular essa quantidade, decompõe-se n em fatores primos, na forma $n = p_1 . p_2 . ... . p_k$. A fórmula que nos dá $d(n)$ – a quantidade de divisores de um número n – é:

$$d(n) = (s_1 + 1).(s_2 + 1). ... .(s_k + 1).$$

Para que este produto seja ímpar, todos seus fatores devem ser ímpares, ou seja, os números s_1, ... , s_k devem ser pares. Como esses números correspondem aos expoentes dos primos p_1, ... , p_k, da decomposição de n, este número deverá ser um quadrado perfeito. Assim, os armários que permanecerão abertos serão aqueles cujos números são quadrados perfeitos. Finalmente, o último armário aberto corresponde ao maior quadrado perfeito menor que 1.000, que é $961 = 31^2$.

1.2 Exercícios de Representação

Nesta seção, abordamos um tipo de problema tal que sua solução se apresente de forma óbvia, uma vez que alguma forma de representação dos seus dados é utilizada. Por exemplo, o problema de descobrir qual é o valor de um objeto sabendo-se que o triplo da quantia paga por ele é o troco recebido pelo seu pagamento com uma nota de cem reais. Representamos a quantia paga por uma variável, em geral x, e escrevemos, então, $3x = 100 - x$. Resolvendo essa igualdade (equação), temos que a quantia paga foi 25 reais.

Muitos dos problemas aqui propostos podem ser resolvidos com o auxílio de um grafo especial – as árvores (como uma árvore genealógica). Essa forma de representar dados é eficiente, pois nela os dados são aparentes e fáceis de serem verificados. Resolva o primei-

Árvore Genealógica
Representação gráfica dos antepassados de um indivíduo, que pode incluir também, em cada geração, os parentes colaterais.
Fonte: Dicionário Houaiss

ro exercício proposto. Tente, então, resolver o segundo exercício, de algum modo. Verifique, então, a resolução desse exercício em 1.2.2, onde você encontrará mais informações sobre árvores.

1.2.1 Exercícios Propostos

1) Construa a árvore genealógica dos descendentes de seu avô paterno, seguindo as instruções:

   a) a partir dele, desça uma linha a cada geração nova

   b) entre quaisquer dois irmãos represente o mais velho à esquerda do mais novo

   Supondo que a diferença mínima entre duas gerações seja de 20 anos e entre dois irmãos seja de 1 ano, estime, a partir de sua idade, a idade de seu avô.

2) Quantas são todas as filas de 4 símbolos diferentes com as letras A, B, C, D? Quais são? Como você garante que todas foram listadas?

3) Quantos números diferentes de 10 algarismos distintos podem-se formar com os 10 dígitos? Lembre-se que números não começam com zero.

4) Quantos números com 3 dígitos, diferentes entre si, podemos escrever com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4? Quantos são os números pares? Quantos são os ímpares?

5) O alfabeto usado no planeta Y tem somente duas letras: W e K. O sobrenome de cada um de seus habitantes é uma seqüência formada por 4 letras. Por exemplo, WKWW é um possível sobrenome usado nesse planeta. Qual é o maior número de sobrenomes diferentes que podem ser criados no planeta Y?

6) Chamam-se palíndromos os números naturais que não se alteram quando a ordem dos algarismos é invertida como, por exemplo, 2002, 121, 12321 etc. Quantos palíndromos de 3 algarismos existem?

7) Queremos pintar as faces de um paralelepípedo e dispomos de 5 cores: azul, verde, vermelho, preto e branco. Queremos que faces opostas tenham a mesma cor e faces contíguas tenham cores diferentes. De quantas maneiras podemos fazer isso?

8) Reunindo-se 5 quadrados iguais, lado com lado, de todas as maneiras possíveis, encontram-se 12 figuras distintas. Descreva essas 12 figuras e arranje-as de forma a obter um retângulo (essas 12 figuras são conhecidas como pentaminós).

9) Hexaminós são figuras formadas por 6 quadrados iguais, da mesma forma que os pentaminós do exercício anterior. Quantos hexaminós diferentes existem ? Quais se podem dobrar para formar um cubo?

10) Uma partição de um número inteiro positivo **n** é uma divisão em "pedaços" inteiros e positivos (logo não nulos) de **n**. Por exemplo: uma partição de 7 seria 3 + 2 + 2, outra seria 4 + 2 + 1. Numa partição não levamos em conta a ordem das parcelas, uma vez que a adição é comutativa. Assim, 3 + 3 + 1 e 3 + 1 + 3 seriam a mesma partição. Obtenha todas as partições de 5, 6 e 7.

11) Um número é chamado "bom" se admite uma partição cuja soma dos inversos é igual a 1. Liste todos os números "bons" de 1 algarismo. Liste 3 números "bons" de 2 algarismos.

12) Em 1971 o Sr. Nunes disse a um amigo: "houve um ano que era exatamente o quadrado da minha idade naquele ano". Em que ano nasceu o Sr. Nunes?

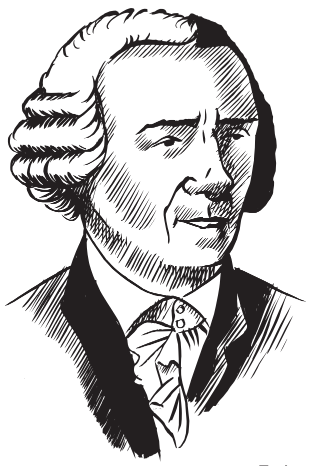
13) Disponha bolas em forma de triângulo eqüilátero, com **n** bolas na base, **n – 1** bolas na fileira de cima, **n -2** bolas na próxima etc., até terminar com uma bola. O número total de bolas no triângulo será a soma dos números de **1** a **n**. Os números assim obtidos são chamados **números triangulares**. De modo análogo, empilhe bolas em formato de pirâmide de base triangular (triângulo eqüilátero); chamaremos o total de bolas neste caso de **números tetraédricos**. Encontre uma fórmula para os números triangulares e determine os primeiros doze. Encontre

uma fórmula para os números tetraédricos e calcule, também, os primeiros doze. Que relação existe entre os números triangulares e os números quadrados?

14) O número 36 é um número triangular e é também um quadrado perfeito; é o menor número acima de 1 com esta característica. O segundo número nestas condições é 1.225. Quais são os próximos dois números?

1.2.2 Solução dos Exercícios Propostos

2) Uma maneira de organizar e representar os dados desse problema é com o uso de uma árvore, que é um tipo de grafo, cuja teoria foi iniciada por Euler, ao resolver o célebre problema das 7 pontes de Königsberg.



Euler
Matemático e físico, Leonhard Euler resolveu enorme quantidade de problemas, da navegação às finanças, da acústica à irrigação.

Diz-se que o problema matemático das 7 pontes de Königsberg foi muito popular na Königsberg do séc. XVIII, que é uma cidade conhecida, hoje, como Kaliningrado, um enclave da Rússia no mar Báltico. O desafio era resolver se existia ou não um caminho que percorresse todas as sete pontes, passando exatamente por elas uma única vez. Esse problema pode ser solucionado, em princípio, testando-se sistematicamente todas as possibilidades. Entretanto, o modo Euler resolveu o problema é considerado, hoje em dia, como a origem da atual Teoria de Grafos, um ramo da matemática que se vem mostrando eficiente em modelação de redes, processos de produção, processos logísticos etc. Uma resolução desse problema está em:

www.inf.ufsc.br/grafos/temas/euleriano/konigsbgerg.htm

Essa forma de representação de dados garante que você realmente represente todas as possibilidades para o problema. Começamos escolhendo uma letra para iniciar a fila, digamos, a letra A (figura 1.4). Partem desta letra (um nó ou vértice da árvore) segmentos de reta que simulam os ramos da árvore (arestas), que terminam em cada uma das 3 possibilidades para a segunda letra da fila, que deve ser diferente da primeira letra, ou seja, B, C ou D. De cada um desses nós saem novas arestas

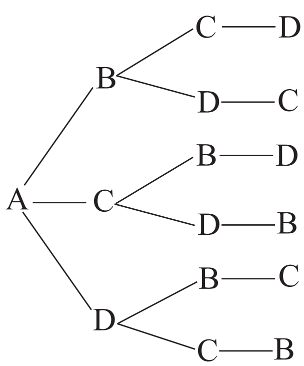


Figura 1.4 – Árvore

ligando-os às possibilidades para a terceira letra. Por exemplo, do nó B saem duas arestas para os nós C e D. De cada um dos nós correspondentes à terceira letra, sai mais uma aresta que ligará o nó a apenas um nó: a quarta letra.

Teremos, então, exatamente 6 filas de 4 letras diferentes, começando com a letra A (estas são todas as filas possíveis). Um procedimento análogo pode ser feito para a contagem das filas começando com as letras B, C e D - 6 filas em cada caso. Assim, no total, há $6 \times 4 = 24$ filas. As trilhas que começam no primeiro nó e terminam no quarto nó descrevem quais são essas filas.

3) Podem-se formar 3.265.920 números.

4) 48 números com dígitos diferentes; 30 pares e 18 ímpares.

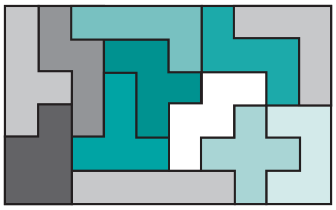
   Sugestão: resolva o problema por árvores.

5) 16 sobrenomes diferentes (sugestão: use árvores).

6) 90 palíndromos.

7) 60 maneiras (sugestão: use árvores).

8) Os 12 pentaminós estão assinalados na figura abaixo. Você pode construir outros retângulos com eles?



9) Existem 35 hexaminós. 11 podem ser dobrados para formar cubos.

10) 6 partições de 5, 10 partições de 6 e 14 partições de 7.

11) São números “bons” de um algarismo o 1, o 4 e o 9. Outros exemplos: 16, 25, 64. Observe que todos os quadrados perfeitos são “bons”. Por quê? Dê mais exemplos que não sejam quadrados.

12) O Sr. Nunes tinha 44 anos em 1936, que é igual a 44^2. Ele nasceu em 1892.

13) Números triangulares: $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, que é a soma dos termos da progressão aritmética 1, 2, 3, ...

$T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, … , $T_{12} = 78$.

Números tetraédricos:

$$P_n = \sum_1^n \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_1^n k^2 + \frac{1}{2}\sum_1^n k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

$P_1 = 1$, $P_2 = 4$, $P_3 = 10$, $P_4 = 20$, … , $P_{12} = 364$.

Relação entre os triangulares e os quadrados: $Q_n = T_{n-1} + T_n$.

14) Os próximos números são 41.616 (este é o 288º número triangular, que é igual a 204^2) e 1.413.721 (este é o 1.681º número triangular, que é igual a 1.189^2).

Referências

[1] BEZERRA, Licio H. et al. *Introdução à Matemática.* Florianópolis: Ed. UFSC, 1995.

[2] BOLT, Brian. *Atividades Matemáticas.* Lisboa: Gradiva, 1991.

[3] __________. *Mais Atividades Matemáticas.* Lisboa: Gradiva, 1992.

[4] BOYER, Carl B. *História da Matemática.* 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

[5] GARDNER, Martin. *Divertimentos Matemáticos*. 4. ed. São Paulo: Ibrasa, 1998.

[6] MALBA TAHAN. *O homem que calculava*. 56. ed. Rio de Janeiro: Record, 2002.

[7] MARIANI, Antonio C. *Teoria dos grafos*. Disponível em: <www.inf.ufsc.br/grafos>. Acesso em: 29 mai. 2009.

[8] __________. *Problemas das Pontes de Konigsberg*. Disponível em: <www.inf.ufsc.br/grafos/problemas/konigsb.htm>. Acesso em: 01 jun. 2009.

Capítulo 2

Decifrando Enigmas – uma homenagem a Malba Tahan

Capítulo 2

Decifrando Enigmas – uma homenagem a Malba Tahan

2.1 Introdução

Problemas de natureza lógica – enigmas, quebra-cabeças - sempre foram utilizados na história da humanidade como instrumento de ensino. Mestres desafiavam seus discípulos com problemas desse tipo para, principalmente, quebrar rotinas de raciocínio estabelecidas pelos alunos. O choque criado pelo enunciado dos problemas permitia que o cérebro se esvaziasse por uns instantes da torrente de pensamentos mecânicos, costumeiros, obtendo-se assim algum espaço para a compreensão de algo novo. São exercícios em que se exigem atenção e concentração. Em geral, são apresentados como um conto, uma pequena história, de forma inusitada, com o propósito de distrair a mente mecânica de seu controle tacanho sobre a percepção do mundo, para que se desenvolva a intuição, verdadeiro pilar das descobertas humanas.

Viveu 79 anos (de 1895 a 1974), a maior parte no Rio de Janeiro. Em 1947, funda as revistas de recreação matemática Al-Karisme e Damião. Além de obras didáticas, escreve romances O Homem que Calculava (1938) e O Livro de Aladim (1943). Sobre a obra de Malba Tahan, Monteiro Lobato disse que "... ficará a salvo das vassouradas do tempo como a melhor expressão do binômio ciência-imaginação". *Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre.*

Na Inglaterra, o reverendo Charles Lutwidge Dodgson (nascido em 27/01/1832, falecido em 1898), mais conhecido por Lewis Carroll, seu pseudônimo, dedicou-se a escrever livros em que a lógica era discutida em diálogos de alguns de seus personagens. No Brasil, os livros de Júlio César de Mello e Souza, cujo pseudônimo era Malba Tahan, continuam a interessar leitores de várias gerações. Os exercícios aqui apresentados seguem o estilo dos contidos nesses livros (alguns são adaptados a partir de trechos desses livros).

2.2 Enigmas, quebra-cabeças, dobletes, tripletes

1) Uma costureira colocou todos os botões que tinha em três caixas: uma, só com botões brancos, que ela rotulou com B; outra, só com botões pretos, que ela rotulou com P; e a ter-

ceira, com botões de várias cores, mas todos diferentes de pretos e brancos, que ela rotulou com M. Um dia, seu neto mais capeta trocou os rótulos das caixas, não deixando nenhuma com o rótulo original. No entanto, retirando um único botão de uma das caixas, a costureira foi capaz de descobrir o que cada uma continha. Como ela fez isso?

2) Natal e Pascoal, cada um acompanhado por um de seus filhos, foram pescar. Natal pescou o dobro de peixes que pescou seu filho, enquanto Pascoal pescou o quíntuplo de peixes que seu filho pescou. No total, pescaram 26 peixes. Leonardo é o nome do filho de Natal. Como se chama o filho de Pascoal e quantos peixes ele pescou?

3) Alice, ao entrar na floresta, perdeu a noção dos dias da semana. O leão e o unicórnio eram duas estranhas criaturas que freqüentavam a floresta. O leão mentia nas segundas, terças e quartas-feiras, e falava a verdade nos outros dias da semana. O unicórnio mentia nas quintas, sextas e sábados, e falava a verdade nos outros dias da semana. Alice encontrou o leão e o unicórnio descansando à sombra de uma árvore. Eles disseram:

Leão: Ontem foi um dos meus dias de mentir.

Unicórnio: Ontem foi um dos meus dias de mentir.

A partir destas informações Alice descobriu qual era o dia da semana. Qual era?

4) Numa estranha ilha do planeta Z, a cada dia da semana, cada um dos habitantes ou mente o dia todo ou passa o dia todo dizendo a verdade. Todos os habitantes podem mentir em certos dias e dizer a verdade em outros, mas no decorrer de um mesmo dia da semana seu comportamento é constante. Além disso, para cada habitante A, existe um habitante A′ que diz a verdade nos mesmos dias em que A mente, e somente nesses dias. Em outras palavras, em qualquer dia no qual A minta, A′ dirá a verdade; em qualquer dia no qual A diga a verdade, A′ sempre mentirá. Uma outra característica dessa ilha é que, para cada par de habitantes A e B, existe um habitante C que diz a verdade em todos os dias nos quais tanto A como B dizem a verdade, e em nenhum outro dia (ou seja, C mente

em qualquer dia no qual, pelo menos, A ou B também minta). Dizem as más línguas que nessa ilha ninguém diz a verdade todos os dias. Esta acusação é verdadeira ou não?

5) Uma rainha e seus dois filhos encontram-se prisioneiros no alto de uma torre. Os pedreiros que construíram a torre deixaram uma roldana fixa no topo. Pela roldana passa uma corda com dois cestos, cada um atado a uma das pontas da corda. Dentro do cesto que está no chão há uma pedra igual às que foram utilizadas para construir a torre. A pedra pesa 30 kg. A rainha descobre que a pedra pode servir de contrapeso nesse sistema, desde que a diferença de peso entre os dois cestos não seja superior a 6 kg. Como a rainha pesa 78 kg, a princesa pesa 42 kg e o príncipe, 36 kg, conseguirão eles fugir da torre? O que aconteceria se, além da rainha, da princesa, do príncipe e da pedra, estivessem na torre um porco de 24 kg, um cão de 18 kg e um gato de 12 kg, que também quisessem fugir da torre, mas não saíssem sozinhos do cesto?

6) Em um certo planeta moravam as galinhas de penacho, que viviam sempre juntas. Elas, apesar de não se comunicarem entre si, eram inteligentes e também observadoras. Mas tinham dois problemas: só enxergavam o penacho das outras galinhas, nunca o seu; e, caso qualquer galinha tivesse certeza de que seu penacho fora cortado, suicidar-se-ia naquela mesma noite. Uma noite, os gansos do planeta vizinho, sorrateiramente, cortaram o penacho de algumas das galinhas, enquanto elas dormiam. Na manhã seguinte, todas as galinhas viram no chão as penas que indicavam o ataque dos gansos e, na sétima noite, algumas se suicidaram. Quantas galinhas se suicidaram? Por que isso aconteceu somente na sétima noite?

7) Numa viagem, Glória quer alugar um quarto num hotel por uma semana, mas está sem dinheiro. Ela propõe ao gerente pagar cada diária com uma das 7 argolas de ouro de sua pulseira, mas pretende recuperar as argolas no final da semana, quando sair seu contra-cheque. Para isso, Glória tem que desfazer a pulseira, e o joalheiro cobra por cada argola que ele abre, e cobra, mais ainda, para montar novamente a pulseira. Qual é o menor número de cortes a serem feitos, de modo que Glória possa usar como pagamento apenas 1 argola a cada dia?

8) Um califa conversa com o calculista:

"Tenho cinco lindas escravas. Comprei-as, há poucos meses, de um príncipe mongol. Dessas cinco encantadoras meninas, duas têm olhos negros e as outras três têm os olhos azuis. As duas escravas de olhos negros, quando interrogadas, dizem sempre a verdade; as escravas de olhos azuis, ao contrário, são mentirosas, isto é, nunca dizem a verdade. Dentro de alguns minutos essas cinco jovens serão conduzidas a este salão e cada uma delas terá o rosto ocultado por espesso véu (haic), que a envolverá e tornará impossível distinguir nela o menor traço fisionômico. Terás que descobrir e indicar, sem a menor possibilidade de erro, quais são as escravas de olhos negros e quais são as de olhos azuis. Poderás interrogar três das cinco escravas, não sendo permitido, em caso algum, fazer mais de uma pergunta à mesma jovem. Com auxílio das três respostas obtidas, o problema deverá ser solucionado, sendo que a solução deverá ser justificada com todo rigor matemático".

O calculista perguntou, então, a uma das jovens: "Qual é a cor de teus olhos?" A jovem respondeu em chinês, uma língua que o calculista não compreendia. Quais foram as outras duas perguntas, e como ele resolveu o problema?

Califa
Sucessor do profeta Maomé, na qualidade de guia ou líder temporal e espiritual da comunidade islâmica.
Fonte: Dicionário Houaiss.

9) Quantos animais, afinal, eu tenho, se todos são cães, exceto dois, todos são gatos, exceto dois, e todos são papagaios, exceto dois?

10) "Poucas horas viajamos, sem interrupção, pois logo ocorreu uma curiosa aventura, na qual o homem que calculava pôs em prática, com grande talento, as suas habilidades de exímio algebrista. Encontramos perto de um antigo caravançará, quase em abandono, três homens que discutiam acaloradamente juntos a uma cáfila. O inteligente Ibraim Tavir procurou informar-se do que se tratava":

— Somos irmãos, disse o mais velho, e recebemos como herança estes 35 camelos. Segundo a vontade de meu pai, devo receber a metade; o meu irmão Hamed Namir, uma terça parte; e, ao Harim, o mais moço, deve caber apenas a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir, desta forma, 35 camelos, pois a

Caravançará
Estalagem pública, no Oriente Médio, para hospedar gratuitamente as caravanas que viajam por regiões desérticas; caravançarai, caravancerá. *Fonte: Dicionário Houaiss.*

metade de 35 é 17,5! Como fazer a partilha, se a terça parte e a nona parte de 35 também não são exatas?

— É muito simples, replicou o homem que calculava. Encarrego-me de fazer, com justiça, essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que, em boa hora, aqui nos trouxe!

Como o homem que calculava fez a divisão? Por que a sua estratégia funcionou?

11) Num sistema solar distante, em torno do sol giram só dois planetas - Oron, habitado pelos oronianos, e Set, habitado pelos setianos. As duas raças são inteligentes e capazes de viajar de um planeta para o outro. O problema é que, cada vez que os habitantes de um dos planetas pousam no outro, ficam totalmente desorientados, e tudo aquilo em que acreditam passa a ser errado! Quando retornam a seu planeta de origem, voltam a ficar perfeitamente orientados, e tudo em que acreditam fica outra vez correto. Num certo momento, um habitante de um desses dois planetas acreditava ser um oroniano e que se encontrava em Set, naquele momento.

Afinal, ele era oroniano ou setiano? Em que planeta ele se encontrava naquele momento? Em que proposição sempre acreditarão os habitantes de qualquer dos dois planetas, encontrem-se ou não, no momento, em seu planeta de origem?

Rio das araras ou papagaio manso, no dialeto Tupi, nasce em Goiás, nas formações elevadas existentes no Parque Nacional das Emas, reserva ecológica, situada na divisa dos estados de Goiás e Mato Grosso. Pertence à bacia amazônica e marca a divisa dos estados de Mato Grosso e Goiás, Mato Grosso e Tocantins e, ainda, Pará e Tocantins, desaguando no rio Tocantins, na tríplice divisa de Tocantins, Pará e Maranhão. *Fonte: www.rioaraguaia.com.br*

12) Duas tribos habitam uma ilha no rio Araguaia. A tribo PA só diz a verdade e a tribo PB sempre mente. Três nativos, NE, SE e CO, chegam juntos à ilha, numa canoa. Ao chegarem, são obrigados a se identificar, dizendo a que tribo cada um pertence. Foram feitas as seguintes perguntas, seguidas das respostas respectivas, a partir das quais você deve descobrir a que tribo pertence cada um.

a) Diga-me, NE, SE é da aldeia PA?

— Sim, ele é de PA.

b) Diga-me, SE, NE e CO são da mesma tribo?

— Não, não são.

c) Diga-me, CO, SE é de PA?

— Sim, ele é de PA.

13) Um doblete (doublet) é uma seqüência de palavras que começa por uma palavra dada e termina em outra palavra, também dada, tal que a diferença de duas palavras consecutivas seja apenas uma letra. Vogais com acentos diferenciais são consideradas como letras iguais, por exemplo, pêra e cera. É claro que todas as palavras da seqüência têm a mesma quantidade de letras. Crie dobletes para cada dupla de palavras dadas abaixo (não valem nomes próprios).

a) sol – lua;

b) sim – não;

c) belo – feio;

d) amor – ódio;

e) certo – falso;

f) fogo – água;

g) lixo – ouro;

h) bem – mal.

14) Um triplete é similar ao doblete, porém, em vez de ter apenas duas palavras (a inicial e a final), tem três palavras: a inicial, a intermediária e a final. Crie tripletes para as triplas abaixo:

a) manhã – tarde – noite;

b) nada – meio – tudo;

c) pêra – lima – maçã.

Solução dos problemas pares

2) Podemos pensar em resolver o problema de forma algébrica:

A - quantidade de peixes que Natal pescou

P - quantidade de peixes que Pascoal pescou

L - quantidade de peixes que Leonardo, o filho de Natal, pescou

Pf - quantidade de peixes que o filho de Pascoal pescou

- Natal pescou o dobro de peixes que pescou seu filho: A = 2L
- Pascoal pescou o quíntuplo de peixes que pescou seu filho: P = 5Pf

- No total pescaram 26 peixes: A + P + L + Pf = 26

  Substituindo: 2L + 5Pf + L + Pf = 26, ou 3L + 6Pf = 26

  Mas isto é impossível, pois a equação acima é uma equação diofantina que não tem solução, uma vez que mdc (3, 6) = 3 e 3 não é divisor de 26. Temos que rever os graus de parentesco! Como Leonardo é filho de Natal, então Natal deve ser filho de Pascoal. Vamos verificar:

  A = 2L ; P = 5A = 10L ; A + P + L = 26

  Substituindo: 2L + 10L + L = 26 $\Rightarrow$ L = 2

  Leonardo pescou 2 peixes, Natal pescou 4 peixes e Pascoal pescou 20 peixes. Natal é o nome do filho de Pascoal e ele pescou 4 peixes.

4) Vamos partir de um habitante A. Para ele, existe um habitante A′ cujos hábitos em relação à verdade e à mentira são opostos aos seus. Usando a segunda característica, com A′ fazendo o papel de B, existe um habitante C que diz a verdade somente nos dias em que tanto A como A′ dizem a verdade. Como A e A′ nunca dizem a verdade no mesmo dia, então C mente todo dia. Mas, para este habitante C, existe um habitante C′ cujo comportamento é sempre oposto ao de C e, portanto, C′ diz a verdade todo dia. Assim, a acusação não é verdadeira.

6) Qualquer galinha que, ao amanhecer seguinte à noite do ataque, visse **todas** as demais com penacho, concluiria que somente ela estava sem penacho e, assim, deveria se suicidar na primeira noite. Como não houve suicídio na primeira noite, ao amanhecer do segundo dia as inteligentes galinhas concluíram: as vítimas foram duas ou mais! Se alguma estivesse vendo todas as outras com penacho e apenas uma delas sem, concluiria que ela mesma estava sem penacho. Logo, ambas se suicidariam na segunda noite. Ao clarear do terceiro dia, no entanto, estavam todas lá! Então o número de vítimas seria maior ou igual a 3. Qualquer galinha que visse duas sem penacho concluiria que ela era a terceira vítima e, assim, as três se suicidariam na terceira noite. A ausência de suicídios na terceira noite fez com que no amanhecer do quarto dia todas

concluíssem que o número de vítimas era maior ou igual a 4. Continuando com este raciocínio, no sétimo dia, a galinha que visse seis outras sem penacho teria certeza que era a sétima vítima e todas as sete galinhas se suicidariam na sétima noite.

8) As outras duas perguntas e respectivas respostas foram as seguintes. "O que sua companheira acabou de falar?" A resposta foi: "Os meus olhos são azuis." A próxima pergunta foi: "Qual a cor dos olhos dessas duas jovens que acabo de interrogar?" A resposta foi, então: "A primeira tem olhos negros e a segunda tem olhos azuis."

Faça a redação do argumento do calculista, identificando as jovens de olhos azuis e as de olhos negros.

10) Ao juntar mais um camelo aos 35, o total passou a ser 36, que é divisível por 2, por 3 e por 9. Todos os envolvidos receberiam mais "frações de camelo", pois $36 \div 2 = 18$, $36 \div 3 = 12$ e $36 \div 9 = 4$, ficando satisfeitos. Como $18 + 12 + 4 = 34$, sobraram 2 camelos no final.

12) Se NE falou a verdade, então NE é de PA, assim como SE. Pela segunda resposta, CO seria de PB. Mas, a terceira resposta é inconsistente com esses dados, pois CO falaria a verdade e, assim, pertenceria à tribo PA. Sendo assim, NE mentiu. Ou seja, NE e SE são de PB. Logo, CO é de PB, pela segunda resposta, que é consistente com a resposta que CO dá, que é falsa.

14) a) **manhã** – manha – manta – marta – farta – farda – tarda – **tarde** – tardo – tordo – mordo – morto – morte – norte – **noite**.

b) **nada** – nata – neta – meta – meia – **meio** – medo – mudo – **tudo**.

c) **pêra** – cera – cela – tela – tema – lema – **lima** – lama – cama – caça – maça – **maçã**.

Marta
É um mamífero, parecido com a doninha e comum no hemisfério norte.

Maça
Clava.

Referências

[1] CARROLL, Lewis. *Alice no País das Maravilhas*; Através do Espelho. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2002.

[2] ___________. *Aventuras de Alice no País das Maravilhas – Através do espelho e o que Alice encontrou lá:* Outros textos. São Paulo: Summus, 1980.

[3] GARDNER, Martin. Ah, Descobri! Lisboa: Gradiva, 1990.

[4] ___________. *Ah, Apanhei-te!* Lisboa: Gradiva, 1993.

[5] MALBA TAHAN. *O homem que calculava.* 56. ed. Rio de Janeiro: Record, 2002.

Capítulo 3

Problemas Olímpicos

Capítulo 3

Problemas Olímpicos

3.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos um conjunto de problemas selecionados entre o conjunto daqueles utilizados para treinamento ou aplicados em alguma fase das olimpíadas de matemática. A maior parte vem dos arquivos da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), e são organizados em três níveis: **nível 1**, quinta e sexta séries; **nível 2**, sétima e oitava séries e **nível 3**, as três séries do Ensino Médio.

O programa de olimpíadas de matemática existe no Brasil há mais de 20 anos. Desde 1998, a Sociedade Brasileira de Matemática tem estimulado a realização de Olimpíadas Regionais, com o objetivo de contribuir para a melhoria do ensino de matemática, incentivando alunos e professores a resolver problemas que não são apresentados usualmente em livros didáticos. Problemas olímpicos necessitam de imaginação, criatividade e conhecimento real do conteúdo. Eles desafiam professores, alunos e amantes da matemática em geral.

Nossa experiência de vários anos em um projeto de extensão da UFSC, chamado Olimpíada Regional de Matemática, levou-nos a trabalhar com problemas olímpicos em diversos ambientes: alunos da rede pública de ensino **(OBMEP)**, cursos de formação continuada para professores etc., com os seguintes objetivos:

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – http://www.obmep.org.br

i) discutir os conteúdos básicos sob um ponto de vista que não aparece, em geral, nos livros didáticos;

ii) introduzir professores e estudantes em atividades de olimpíada de matemática, incentivando-os a abordar problemas olímpicos como desafios intelectuais;

iii) incentivar professores e estudantes à busca de novas abordagens de conteúdos básicos, via problemas olímpicos.

Observamos que a realização de olimpíadas de matemática nas escolas tem um aspecto dinamizador, integrador e propagador, mobilizando alunos, professores e pais na resolução de problemas. Há escolas que, inclusive, organizam olimpíadas nas quais pais e filhos resolvem juntos os problemas propostos.

Apresentamos, primeiramente, as provas da primeira fase da XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática, nos 3 níveis oficiais, realizadas em 5 de junho de 2004. Observe que há problemas comuns a dois níveis.

Nosso objetivo, aqui, é introduzir essas provas de olimpíada do modo como foram apresentadas aos alunos de vários estados do país que nelas se inscreveram. Os gabaritos encontram-se no sítio da **OBM**. No entanto, é importante que cada um procure suas próprias soluções. Na seqüência, propomos um conjunto de problemas olímpicos (ou seja, que foram aplicados em olimpíadas de matemática) dos vários níveis oficiais.

http://www.obm.org.br

Pensar sobre um problema e discuti-lo com os colegas é mais importante do que vê-lo pronto. Divirta-se!

3.2 XXVI OBM – Nível 1 – 1ª fase

1) Calcule o valor de 1.997 + 2.004 + 2.996 + 4.003.

   a) 10.000 b) 11.000 c) 10.900 d) 12.000 e) 13.000

2) Qual dos números a seguir é ímpar?

   a) 7 x 8 b) 37 – 23 c) 9 x 36 d) 144 : 36 e) 17 x 61

3) Quanto é $2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 - 4^4$?

   a) 0 b) 2 c) 4 d) 42 e) 44

4) 20% de 40 é igual a

   a) 5 b) 8 c) 10 d) 12 e) 20

5) Simplificando a fração $\dfrac{2004+2004}{2004+2004+2004}$, obtemos:

a) 2004 b) $\dfrac{113}{355}$ c) $\dfrac{1}{2004}$ d) $\dfrac{2}{3}$ e) $\dfrac{2}{7}$

6) Os alunos de uma escola participaram de uma excursão para a qual dois ônibus foram contratados. Quando os ônibus chegaram, 57 alunos entraram no primeiro ônibus e apenas 31 no segundo. Quantos alunos devem passar do primeiro para o segundo ônibus para que a mesma quantidade de alunos seja transportada nos dois ônibus?

a) 8 b) 13 c) 16 d) 26 e) 31

7) Uma professora tem 237 balas para dar a seus 31 alunos. Qual é o número mínimo de balas a mais que ela precisa conseguir para que todos os alunos recebam a mesma quantidade de balas, sem sobrar nenhuma para ela?

a) 11 b) 20 c) 21 d) 31 e) 41

8) Dezoito quadrados iguais são construídos e sombreados como mostra a figura. Qual fração da área total é sombreada?

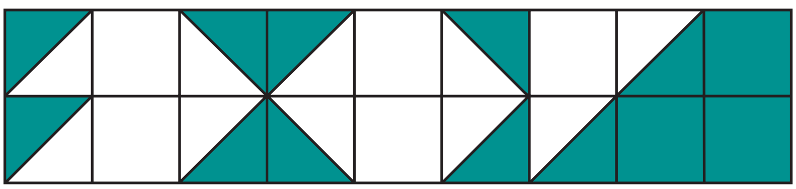


Figura 3.1

a) $\dfrac{7}{18}$ b) $\dfrac{4}{9}$ c) $\dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{5}{9}$ e) $\dfrac{1}{2}$

9) O preço de uma corrida de táxi é igual a R$2,50 ("bandeirada"), mais R$0,10 por cada 100 metros rodados. Tenho apenas R$10,00 no bolso. Logo, tenho dinheiro para uma corrida de até:

a) 2,5 km b) 5,0 km c) 7,5 km d) 10,0 km e) 12,5 km

10) Um arquiteto apresenta ao seu cliente cinco plantas diferentes para o projeto de ajardinamento de um terreno retangular, onde as linhas cheias representam a cerca que deve ser construída para proteger as flores. As regiões claras são todas retangulares e o tipo de cerca é o mesmo em todos os casos. Em qual dos projetos o custo da construção da cerca será maior?

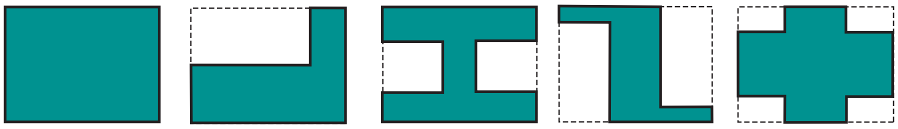


Figura 3.2

11) 108 crianças da 5ª e 6ª séries vão fazer um passeio a uma caverna. São formados grupos iguais com mais de 5, porém, menos de 20 alunos. Com relação ao número de estudantes por grupo, de quantas formas diferentes eles podem ser feitos?

a) 2 b) 8 c) 5 d) 4 e) 3

12) O desenho ao lado (fig. 3.3) mostra o mapa de um país (imaginário) constituído por cinco estados. Deseja-se colorir este mapa com as cores verde, azul e amarela, de modo que dois estados vizinhos não possuam a mesma cor. De quantas maneiras diferentes o mapa pode ser pintado?

a) 12 b) 6 c) 10 d) 24 e) 120

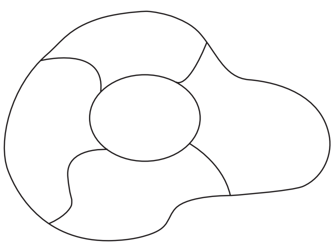


Figura 3.3

13) Um artesão começa a trabalhar às 8h e produz 6 braceletes a cada vinte minutos; seu auxiliar começa a trabalhar uma hora depois e produz 8 braceletes do mesmo tipo a cada meia hora. O artesão pára de trabalhar às 12h, mas avisa ao seu auxiliar que este deverá continuar trabalhando até produzir o mesmo que ele. A que horas o auxiliar irá parar?

a) 12h b) 12h30min c) 13h d) 13h30min e) 14h30min

14) O algarismo das unidades do número $1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times 97 \times 99$ é

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

15) Dois quadrados, cada um com área 25 cm², são colocados lado a lado para formar um retângulo. Qual é o perímetro do retângulo?

a) 30 cm b) 25 cm c) 50 cm d) 20 cm e) 15 cm

16) Se girarmos o pentágono regular, abaixo, em um ângulo de 252° em torno do seu centro, no sentido horário, que figura será obtida?

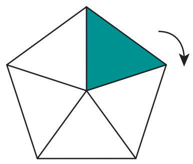


Figura 3.4

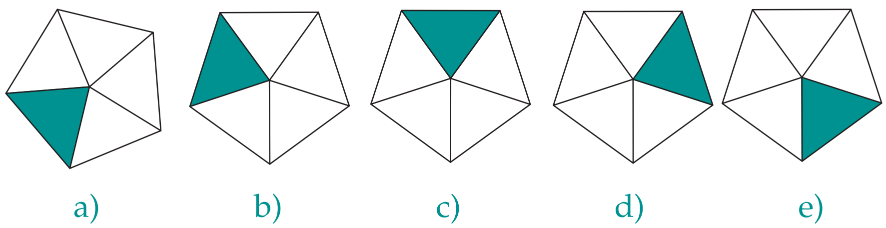


Figura 3.5

17) Os resultados de uma pesquisa das cores de cabelo de 1.200 pessoas são mostrados no gráfico abaixo.

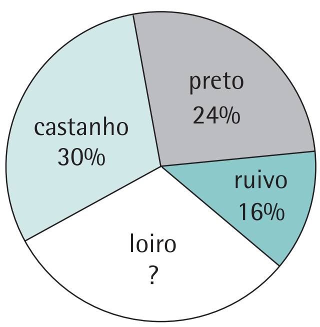


Figura 3.6

Quantas dessas pessoas possuem o cabelo *loiro*?

a) 60 b) 320 c) 360 d) 400 e) 840

18) Um cubo pode ser construído a partir dos dois pedaços de papelão apresentados em uma das alternativas a seguir, bastando apenas dobrar nas linhas tracejadas e unir nas linhas contínuas. Esses dois pedaços são:

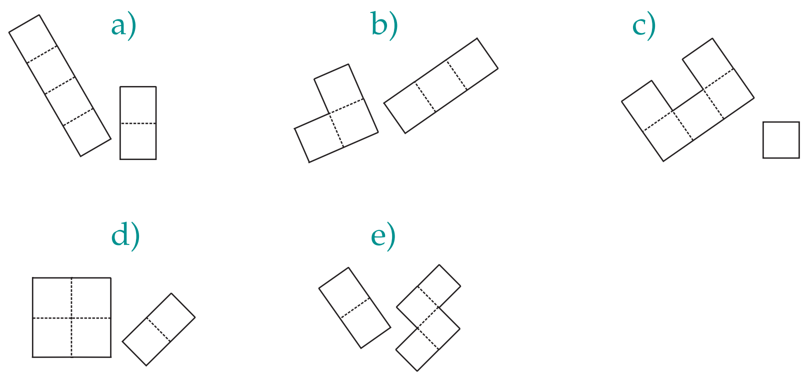


Figura 3.7

19) Ao somar cinco números consecutivos em sua calculadora, Esmeralda encontrou um número de 4 algarismos: 2 0 0 *. O último algarismo não está nítido, pois o visor da calculadora está arranhado, mas ela sabe que ele não é zero. Este algarismo só pode ser:

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 9

20) Sobre uma mesa estão três caixas e três objetos. Cada objeto está em uma caixa diferente: uma moeda, um grampo e uma borracha. Sabe-se que

- a caixa verde está à esquerda da caixa azul;
- a moeda está à esquerda da borracha;
- a caixa vermelha está à direita do grampo;
- a borracha está à direita da caixa vermelha.

Em que caixa está a moeda?

a) Na caixa vermelha

b) Na caixa verde

c) Na caixa azul

d) As informações fornecidas são insuficientes para se dar uma resposta

e) As informações fornecidas são contraditórias.

21) Um feirante vende batatas e, para pesá-las, utiliza uma balança de dois pratos, um peso de 1 kg, um peso de 3 kg e um peso de 10 kg. Considere a seguinte afirmação: “Este feirante consegue pesar (com uma única pesagem) n quilogramas de batatas”. Quantos valores positivos de n tornam essa afirmação verdadeira, supondo que ele pode colocar pesos nos dois pratos?

a) 7 b) 10 c) 12 d) 13 e) 14

22) O mapa abaixo mostra um conjunto residencial onde as casas, numeradas, são interligadas por 23 ruelas. O vendedor Zé Ruela, que mora na casa 8, planeja passar por todas as outras casas e retornar à sua, percorrendo o menor número possível de ruelas. Ele deixará de caminhar por quantas ruelas?

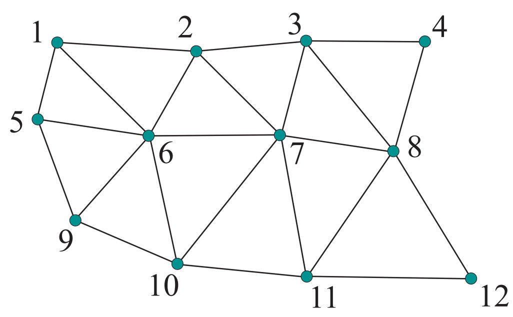


Figura 3.8

a) 15 b) 10 c) 13 d) 12 e) 11

23) O arranjo a seguir, composto por 32 hexágonos, foi montado com varetas, todas com comprimento igual ao lado do hexágono. Quantas varetas, no mínimo, são necessárias para montar o arranjo?

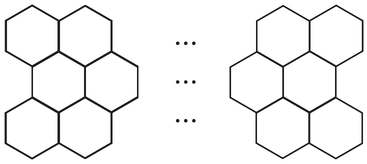


Figura 3.9

a) 113 b) 123 c) 122 d) 132 e) 152

24) Observe a figura:

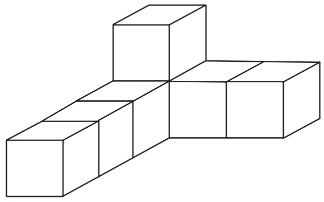


Figura 3.10

Duas das figuras abaixo representam o objeto acima colocado em outras posições.

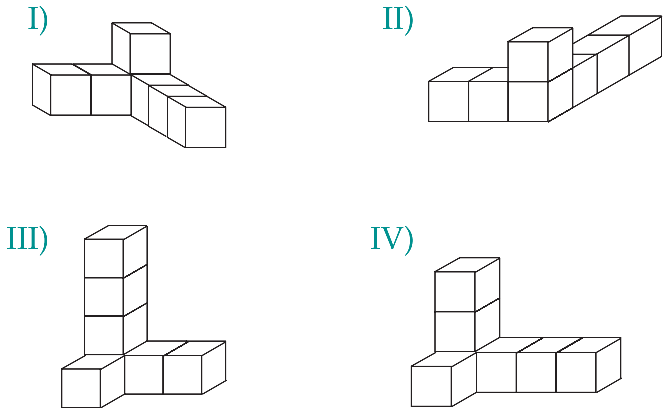


Figura 3.11

Elas são:

a) I e II   b) I e IV   c) II e IV   d) I e III   e) II e III

25) Entre 1986 e 1989, época em que você ainda não tinha nascido, a moeda do país era o cruzado (Cz$). Com a imensa inflação que tivemos, a moeda foi mudada algumas vezes: tivemos o cruzado novo, o cruzeiro, o cruzeiro real e, finalmente, o real. A conversão entre o cruzado e o real é: 1 real = 2.750.000.000 cruzados. Imagine que a moeda não tivesse mudado e que João, que ganha hoje 640 reais por mês, tivesse que receber seu salário em notas novas de 1 cruzado. Se uma pilha de 100 notas novas tem 1,5 cm de altura, o salário em cruzados de João faria uma pilha de altura:

a) 26,4 km   b) 264 km   c) 26.400 km

d) 264.000 km   e) 2.640.000 km

O Plano Cruzado foi um plano econômico, lançado em 1º de março de 1986, por Dilson Funaro, ministro da Fazenda do governo de Sarney. O plano mudou a moeda do Brasil de cruzeiro para cruzado novo, congelou os preços e salários e criou o gatilho salarial e o seguro-desemprego. Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre.

3.3 XXVI OBM – Nível 2 – 1ª fase

1) Quanto é $2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 - 4^4$?

a) 0 b) 2 c) 4 d) 42 e) 44

2) Se m e n são inteiros não negativos com $m < n$, definimos $m \nabla n$ como a soma dos inteiros entre m e n, incluindo m e n. Por exemplo, $5 \nabla 8 = 5 + 6 + 7 + 8 = 26$.

O valor numérico de $\dfrac{22\nabla 26}{4\nabla 6}$ é:

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

3) Entre 1986 e 1989, época em que vocês ainda não tinham nascido, a moeda do país era o cruzado (Cz$). Com a imensa inflação que tivemos, a moeda foi mudada algumas vezes: tivemos o cruzado novo, o cruzeiro, o cruzeiro real e, finalmente, o real. A conversão entre o cruzado e o real é: 1 real = 2.750.000.000 cruzados. Imagine que a moeda não tivesse mudado e que João, que ganha hoje 640 reais por mês, tivesse que receber seu salário em notas novas de 1 cruzado. Se uma pilha de 100 notas novas tem 1,5 cm de altura, o salário em cruzados de João faria uma pilha de altura:

a) 26,4km b) 264km c) 26.400km

d) 264.000km e) 2.640.000km

4) O arranjo a seguir, composto por 32 hexágonos, foi montado com varetas, todas com comprimento igual ao lado do hexágono. Quantas varetas, no mínimo, são necessárias para montar o arranjo?

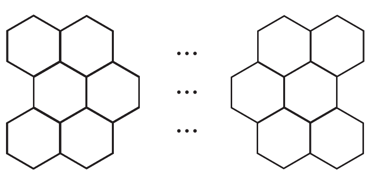


Figura 3.12

a) 113 b) 123 c) 122 d) 132 e) 152

5) O algarismo das unidades do número $1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times 97 \times 99$ é:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

6) Se girarmos o pentágono regular, abaixo, em um ângulo de 252° em torno do seu centro, no sentido horário, que figura será obtida?

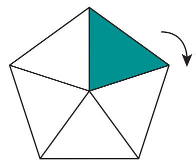


Figura 3.13

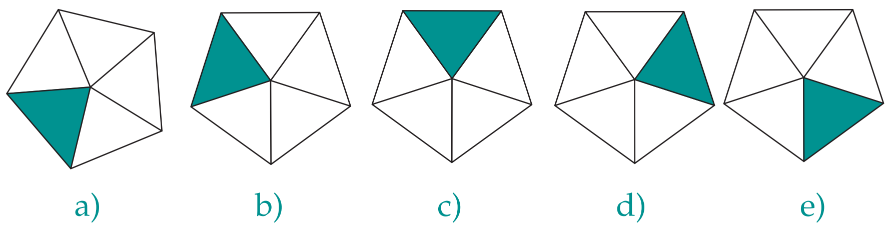


Figura 3.14

7) Há 1.002 balas de banana e 1.002 balas de maçã numa caixa. Lara tira, sem olhar o sabor, duas balas da caixa. Seja p a probabilidade de as duas balas serem do mesmo sabor e seja q a probabilidade de as duas balas serem de sabores diferentes. Quanto vale a diferença entre p e q?

a) 0 b) $\frac{1}{2004}$ c) $\frac{1}{2003}$ d) $\frac{2}{2003}$ e) $\frac{1}{1001}$

8) O perímetro de um retângulo é 100 e a diagonal mede x. Qual é a área do retângulo?

a) $625 - x^2$ b) $625 - \frac{x^2}{2}$ c) $1.250 - \frac{x^2}{2}$

d) $250 - \frac{x^2}{2}$ e) $2.500 - \frac{x^2}{2}$

9) Ao somar cinco números consecutivos em sua calculadora, Esmeralda encontrou um número de 4 algarismos: 2 0 0 *. O último algarismo não está nítido, pois o visor da calculadora

está arranhado, mas ela sabe que ele não é zero. Este algarismo só pode ser:

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 9

10) Para quantos inteiros positivos m o número $\dfrac{2004}{m^2-2}$ é um inteiro positivo?

a) um b) dois c) três d) quatro e) mais do que quatro

11) Se $x+y=8$ e $xy=15$, qual é o valor de $x^2+6xy+y^2$?

a) 64 b) 109 c) 120 d) 124 e) 154

12) Dois espelhos formam um ângulo de 30º no ponto V. Um raio de luz, vindo de uma fonte S, é emitido paralelamente a um dos espelhos e é refletido pelo outro espelho no ponto A, como mostra a figura. Depois de uma certa quantidade de reflexões, o raio retorna a S. Se AS e AV têm 1 metro de comprimento, a distância percorrida pelo raio de luz, em metros, é

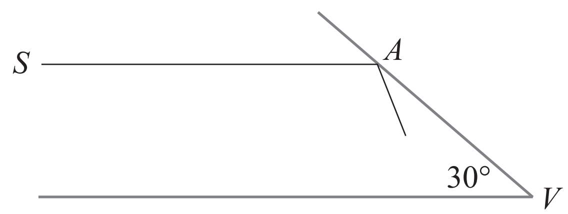


Figura 3.15

a) 2 b) $2+\sqrt{3}$ c) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ d) $\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$ e) $5\sqrt{3}$

13) Na figura, quanto vale x?

a) 6° b) 12° c) 18° d) 20° e) 24°

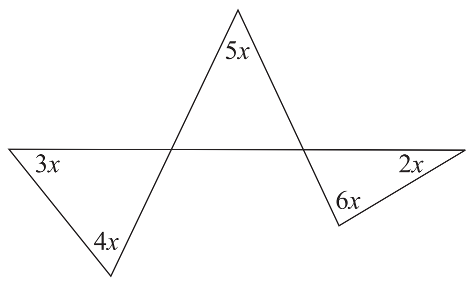


Figura 3.16

14) Se $2(2^{2x}) = 4^x + 64$, então x é igual a:

a) – 2 b) – 1 c) 1 d) 2 e) 3

15) Qual é o maior valor da soma dos algarismos de um número de três algarismos?

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

16) Um arquiteto apresenta ao seu cliente cinco plantas diferentes para o projeto de ajardinamento de um terreno retangular, onde as linhas cheias representam a cerca que deve ser construída para proteger as flores. As regiões claras são todas retangulares e o tipo de cerca é o mesmo em todos os casos. Em qual dos projetos o custo de construção da cerca será maior?

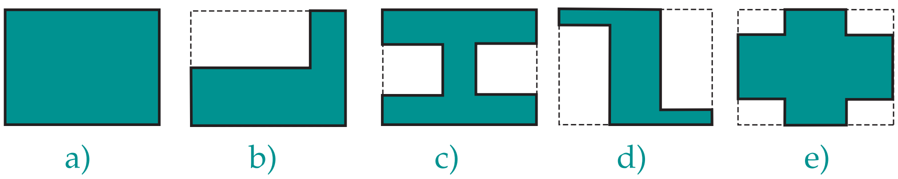


Figura 3.17

17) Um ponto P pertence ao interior de um quadrado com 10 cm de lado. No máximo, quantos pontos da borda do quadrado podem estar a uma distância de 6 cm do ponto P?

a) 1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

18) Um cubo pode ser construído, a partir dos dois pedaços de papelão apresentados em uma das alternativas a seguir, bastando apenas dobrar nas linhas tracejadas e unir nas linhas contínuas. Esses dois pedaços são:

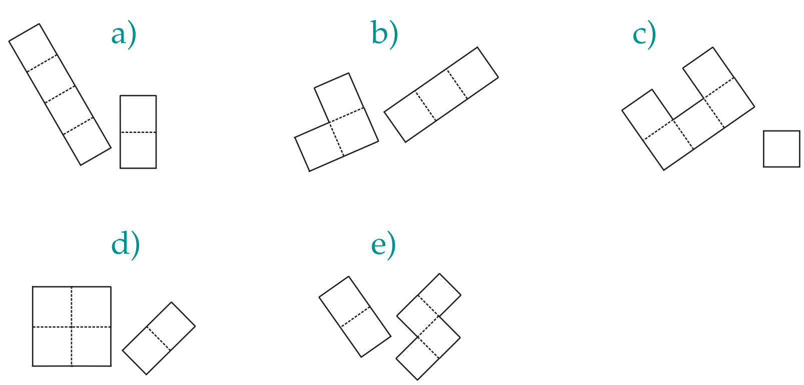


Figura 3.18

19) No triângulo PQR, a altura PF divide o lado QR em dois segmentos de medidas

$QF = 9$ e $RF = 5$. Se $PR = 13$, qual é a medida de PQ?

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

20) Sobre uma mesa estão três caixas e três objetos. Cada objeto está em uma caixa diferente: uma moeda, um grampo e uma borracha. Sabe-se que:

- a caixa verde está à esquerda da caixa azul;
- a moeda está à esquerda da borracha;
- a caixa vermelha está à direita do grampo;
- a borracha está à direita da caixa vermelha.

Em que caixa está a moeda?

a) Na caixa vermelha

b) Na caixa verde

c) Na caixa azul

d) As informações fornecidas são insuficientes para se dar uma resposta

e) As informações fornecidas são contraditórias.

21) No desenho abaixo, o quadrilátero $ABCD$ é um quadrado de lado 3 cm e os triângulos ABF e AED são ambos equiláteros. Qual é a área da região destacada?

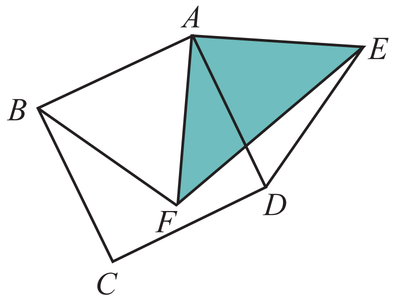


Figura 3.19

a) 2 cm² b) 1,5 cm² c) 3 cm² d) 4,5 cm² e) 2,5 cm²

22) Uma folha quadrada foi cortada em 42 quadrados menores, dos quais um tem área maior do que 1 cm^2 e os demais têm área de 1 cm^2. Qual é a medida do lado da folha?

a) 6 cm b) 12 cm c) 21 cm d) 19 cm e) 20 cm

23) Eu planejava fazer um curral quadrado, com uma certa área, usando uma certa quantidade de cerca de arame farpado. Descobri, porém, que tenho 10% a menos de cerca do que esperava. Por esta razão, a área cercada será:

a) 5% menor b) 10% menor c) 19% menor

d) 20% menor e) 25% menor

24) Um artesão começa a trabalhar às 8h e produz 6 braceletes a cada vinte minutos; seu auxiliar começa a trabalhar uma hora depois e produz 8 braceletes do mesmo tipo a cada meia hora. O artesão pára de trabalhar às 12h mas avisa ao seu auxiliar que este deverá continuar trabalhando até produzir o mesmo que ele. A que horas o auxiliar irá parar?

a) 12h b) 12h30min c) 13h d) 13h30min e) 14h30min

25) Esmeralda, a digitadora, tentou digitar um número de seis algarismos, mas os dois algarismos 1 não apareceram (a tecla devia estar com defeito). O que apareceu foi 2.004. Quantos são os números de seis algarismos que ela pode ter tentado digitar?

a) 4 b) 8 c) 10 d) 15 e) 20

3.4 XXVI OBM – Nível 3 – 1ª fase

1) A função f é dada pela tabela a seguir.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	3	5	2

Por exemplo, $f(2) = 1$. Quanto vale $f(f(\ldots(f(4))\ldots))$, 2.004 vezes?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

2) Seja AB um segmento de comprimento 26, e sejam C e D pontos sobre o segmento AB tais que $AC = 1$ e $AD = 8$. Sejam E e F pontos sobre uma semicircunferência de diâmetro AB, sendo EC e FD perpendiculares a AB. Quanto mede o segmento EF?

a) 5 b) $5\sqrt{2}$ c) 7 d) $7\sqrt{2}$ e) 12

3) As alturas de um triângulo medem 12, 15 e 20. O maior ângulo interno do triângulo mede

a) 72° b) 75° c) 90° d) 108° e) 120°

4) Esmeralda, a digitadora, tentou digitar um número de seis algarismos, mas os dois algarismos 1 não apareceram (a tecla devia estar com defeito). O que apareceu foi 2.004. Quantos são os números de seis algarismos que ela pode ter tentado digitar?

a) 4 b) 8 c) 10 d) 15 e) 20

5) O produto dos números que aparecem nas alternativas incorretas desta questão é um cubo perfeito.

Assinale a alternativa correta.

a) 4 b) 8 c) 18 d) 54 e) 192

6) Qual é o menor inteiro positivo n para o qual qualquer subconjunto de n elementos de $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ contém dois números cuja diferença é 8?

a) 2 b) 8 c) 12 d) 13 e) 15

7) Sejam

$$a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \cdots + \frac{1001^2}{2001}$$

e

$$b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \ldots + \frac{1001^2}{2003}.$$

Qual é o inteiro mais próximo de $a - b$?

a) 500 b) 501 c) 999 d) 1.000 e) 1.001

8) Uma ampulheta é formada por dois cones idênticos. Inicialmente, o cone superior está cheio de areia e o cone inferior está vazio. A areia flui do cone superior para o inferior com vazão constante. O cone superior se esvazia em exatamente uma hora e meia. Quanto tempo demora até que a altura da areia no cone inferior seja metade da altura da areia no cone superior?

a) 30min b) 10h c) 1h03min20s

d) 1h10min12s e) 1h14min30s

9) A função real *f*, definida no conjunto dos inteiros, satisfaz $f(n)-(n+1)\,f(2-n)=(n+3)^2$, para todo n inteiro. Quanto vale $f(0)$?

a) –17 b) 0 c) 1 d) 2 e) 9

10) Com três algarismos distintos a, b e c, é possível formar 6 números de dois algarismos distintos. Quantos conjuntos $\{a,b,c\}$ são tais que a soma dos 6 números formados é 484?

a) Um b) Dois c) Três d) Quatro e) Mais que quatro

11) Dois cubos têm faces pintadas de ocre ou magenta. O primeiro cubo tem cinco faces ocres e uma face magenta. Quando os dois cubos são lançados, a probabilidade de as faces viradas para cima dos dois cubos serem da mesma cor (sim, ocre e magenta são cores!) é 1/2. Quantas faces ocres tem o segundo cubo?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

12) Para quantos inteiros positivos m o número $\dfrac{2004}{m^2-2}$ é um inteiro positivo?

a) Um b) Dois c) Três d) Quatro e) Mais que quatro

13) Dois espelhos formam um ângulo de 30º no ponto *V*. Um raio de luz, vindo de uma fonte *S*, é emitido paralelamente a um dos espelhos e é refletido pelo outro espelho no ponto *A*, como mostra a figura 3.20. Depois de uma certa quantidade de reflexões, o raio retorna a *S*. Se *AS* e *AV* têm 1 metro de comprimento, a distância percorrida pelo raio de luz, em metros, é

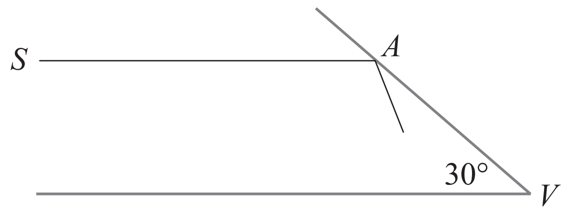


Figura 3.20

a) 2 b) $2+\sqrt{3}$ c) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ d) $\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$ e) $5\sqrt{3}$

14) Para n inteiro positivo, definimos $n!$ (lê-se "*n fatorial*") o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n. Por exemplo, $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$.

Se $n! = 2^{15} \cdot 3^{6} \cdot 5^{3} \cdot 7^{2} \cdot 11 \cdot 13$, então n é igual a

a) 13 b) 14 c) 15 d) 16 e) 17

15) Constrói-se o quadrado $ABXY$ sobre o lado AB do heptágono regular $ABCDEFG$, exteriormente ao heptágono. Determine a medida do ângulo $B\hat{X}C$, em radianos.

a) $\frac{\pi}{7}$ b) $\frac{3\pi}{7}$ c) $\frac{\pi}{14}$ d) $\frac{3\pi}{14}$ e) $\frac{3\pi}{28}$

16) O conjunto das raízes reais da equação

$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$ é

a) $\{1\}$ b) $\{1,2\}$ c) $[1,2]$ d) $]1,2[$ e) $\{2\}$

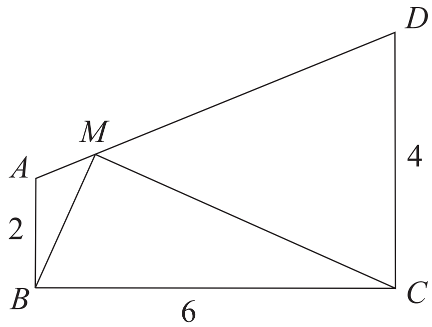


Figura 3.21

17) No desenho ao lado, os segmentos AB e CD são perpendiculares ao segmento BC. Sabendo que o ponto M pertence ao segmento AD e que o triângulo BMC é retângulo não isósceles, qual é a área do triângulo ABM?

a) 1 b) $\frac{6}{5}$ c) $\frac{7}{5}$ d) $\frac{8}{5}$ e) $\frac{9}{5}$

18) Entre 1986 e 1989, a moeda do país era o cruzado (Cz$). Com a imensa inflação que tivemos, a moeda foi mudada algumas vezes: tivemos o cruzado novo, o cruzeiro, o cruzeiro real e, finalmente, o real. A conversão entre o cruzado e o real é: 1

real = 2.750.000.000 cruzados. Imagine que a moeda não tivesse mudado e que João, que ganha hoje 640 reais por mês, tivesse que receber seu salário em notas novas de 1 cruzado. Se uma pilha de 100 notas novas tem 1,5 cm de altura, o salário em cruzados de João faria uma pilha de altura:

a) 26,4 km b) 264 km c) 2.640 km

d) 26.400 km e) 264.000 km

19) O dono de uma loja empilhou vários blocos medindo 0,8m x 0,8m x 0,8m no canto da loja e encostados numa parede de vidro que dá para a rua, conforme mostra a figura ao lado. Quantos blocos, no máximo, uma pessoa de 1,80m de altura que está do lado de fora da loja pode enxergar?

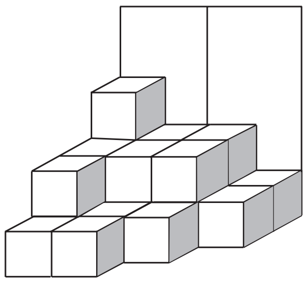


Figura 3.22

Obs. Consideramos que uma pessoa pode enxergar uma caixa se consegue ver uma pequena região de área positiva de sua superfície.

a) 13 b) 14 c) 15 d) 16 e) 17

20) O arranjo a seguir, composto por 32 hexágonos, foi montado com varetas, todas com comprimento igual ao lado do hexágono. Quantas varetas, no mínimo, são necessárias para montar o arranjo?

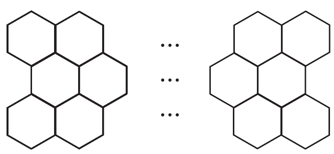


Figura 3.23

a) 113 b) 123 c) 122 d) 132 e) 152

21) Numa prova para uma sala com 30 alunos, a média aritmética das 10 piores notas é 3 e a média aritmética das 10 melhores notas é 9. O menor valor possível e o maior valor possível para a média da sala são, respectivamente:

a) 6 e 7 b) 5 e 7 c) 4 e 6 d) 3 e 9 e) 4 e 8

22) Sobre uma mesa estão três caixas e três objetos. Cada objeto está em uma caixa diferente: uma moeda, um grampo e uma borracha. Sabe-se que

- a caixa verde está à esquerda da caixa azul;
- a moeda está à esquerda da borracha;

- a caixa vermelha está à direita do grampo;
- a borracha está à direita da caixa vermelha.

Em que caixa está a moeda?

a) Na caixa vermelha

b) Na caixa verde

c) Na caixa azul

d) As informações fornecidas são insuficientes para se dar uma resposta

e) As informações fornecidas são contraditórias.

23) Esmeralda, a digitadora, queria digitar um número N de dois algarismos que é quadrado perfeito, mas se enganou, trocando cada algarismo pelo seu sucessor (afinal, as teclas são vizinhas!). Por uma grande coincidência, o número digitado também é quadrado perfeito! Qual é a soma dos algarismos de N?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

24) Esmeralda escreveu (corretamente!) todos os números de 1 a 999, um atrás do outro: 12345678910111213… 997998999.

Quantas vezes aparece o agrupamento "21", nesta ordem?

a) 11 b) 21 c) 31 d) 41 e) 51

25) Um feirante vende batatas e, para pesá-las, utiliza uma balança de dois pratos, um peso de 1 kg, um peso de 3 kg e um peso de 10 kg. Considere a seguinte afirmação: "Este feirante consegue pesar (com uma única pesagem) n quilogramas de batatas". Quantos valores positivos de n tornam essa afirmação verdadeira, supondo que ele pode colocar pesos nos dois pratos?

a) 7 b) 10 c) 12 d) 13 e) 14

3.5 Problemas olímpicos – miscelânea

1) Num relógio digital, que marca de 0:00 até 23:59, quantas vezes por dia o mostrador apresenta todos os algarismos iguais?

2) A prefeitura de uma certa cidade fez uma campanha que permite trocar 4 garrafas de 1 litro vazias por uma garrafa de 1 litro cheia de leite. Até quantos litros de leite pode obter uma pessoa que possua 43 dessas garrafas vazias?

3) O número 10 pode ser escrito de duas formas como soma de dois números primos: $10 = 5 + 5$ e $10 = 3 + 7$. De quantas maneiras podemos expressar o número 25 como uma soma de dois números primos?

4) 1 litro de álcool custa R$0,75. O carro de Henrique percorre 25 km com 3 litros de álcool. Quantos reais serão gastos em álcool para percorrer 600 km?

5) Há 18 anos Hélio tinha precisamente três vezes a idade de seu filho. Agora tem o dobro da idade desse filho. Quantos anos têm Hélio e seu filho?

6) Se os números naturais são colocados em colunas, como se mostra abaixo, debaixo de que letra aparecerá o número 2.000?

A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		2		3		4		5
	9		8		7		6	
10		11		12		13		14
	18		17		16		15	
19		20		21		...		...

7) Os 61 aprovados em um concurso, cujas notas foram todas distintas, foram distribuídos em duas turmas, de acordo com a nota obtida: os 31 primeiros foram colocados na turma A e os 30 seguintes na turma B. As médias das duas turmas no concurso foram calculadas. Depois, no entanto, decidiu-se passar o último colocado da turma A para a turma B. Com isso:

a) A média da turma A melhorou, mas a da B piorou.

b) A média da turma A piorou, mas a da B melhorou.

c) As médias de ambas as turmas melhoraram.

d) As médias de ambas as turmas pioraram.

e) As médias das turmas podem melhorar ou piorar, dependendo das notas dos candidatos.

8) Numa caixa havia várias bolas, sendo 5 azuis, 4 amarelas, 3 vermelhas, 2 brancas e 1 preta. Renato retirou 3 bolas da caixa. Sabendo que nenhuma delas era azul, amarela, ou preta, podemos afirmar a respeito dessas 3 bolas que:

a) são da mesma cor

b) uma é vermelha e duas são brancas

c) uma é branca e duas são vermelhas

d) pelo menos uma é vermelha

9) Quatro amigos vão visitar um museu e um deles resolve entrar sem pagar. Aparece um fiscal que quer saber qual deles entrou sem pagar.

— Eu não fui, diz o Benjamim.

— Foi o Carlos, diz o Mário.

— Foi o Pedro, diz o Carlos.

— O Mário não tem razão, diz o Pedro.

Só um deles mentiu. Quem não pagou a entrada do museu?

10) Escrevem-se, em ordem crescente, os números inteiros e positivos que sejam múltiplos de 7 ou de 8 (ou de ambos), obtendo-se 7, 8, 14, 16, ... Qual o 100º número escrito?

11) Numa certa cidade o metrô tem todas suas 12 estações em linha reta. A distância entre duas estações vizinhas é sempre a mesma. Sabe-se que a distância entre a terceira e a sexta estações é igual a 3.300 metros. Qual é o comprimento dessa linha?

12) Quantos números de dois algarismos são primos e têm como antecessor um quadrado perfeito?

13) Quantas vezes num dia (24 horas) os ponteiros de um relógio formam ângulo reto?

14) Uma fábrica embala 8 latas de palmito em caixas de papelão cúbicas de 20 cm de lado. Para que possam ser mais bem transportadas, essas caixas são colocadas, da melhor maneira possível, em caixotes de madeira de 80 cm de largura por 120 cm de comprimento por 60 cm de altura. Qual é o número de latas de palmito em cada caixote?

15) Qual dos números é maior:

a) 3^{45} b) 9^{20} c) 27^{14} d) 243^{9} e) 81^{12}

16) Renata digitou um número em sua calculadora, multiplicou-o por 3, somou 12, dividiu o resultado por 7 e obteve 15. Qual é o número digitado por Renata?

17) Numa competição de ciclismo, Carlinhos dá uma volta completa na pista em 30 segundos, enquanto Paulinho leva 32 segundos para completar uma volta. Quando Carlinhos completar a volta de número 80, que volta estará completando Paulinho?

18) Quantos números de três algarismos existem cuja soma dos algarismos é 25?

19) Um estacionamento para carros cobra 1 real pela primeira hora e 75 centavos a cada hora ou fração de hora seguinte. André estacionou seu carro às 11h20min e saiu às 15h40min. Quantos reais ele deve pagar pelo estacionamento?

20) A soma de todos os números ímpares de dois algarismos menos a soma de todos os números pares de dois algarismos é?

21) João é mais velho que Pedro, que é mais novo que Carlos; Antonio é mais velho do que Carlos, que é mais novo do que João. Antônio não é mais novo do que João e todos os quatro meninos têm idades diferentes. Qual é o mais jovem?

22) Uma fazenda retangular possui 10 km de largura por 20 km de comprimento e foi desapropriada para reforma agrária. Se a fazenda deve ser dividida para 200 famílias de modo que todas as famílias recebam a mesma área, quantos metros quadrados receberá cada família?

23) Para fazer 12 bolinhos, preciso de, exatamente, 100 g de açúcar, 50 g de manteiga, meio litro de leite e 400 g de farinha. Qual é a maior quantidade de bolinhos que posso fazer com 500 g de açúcar, 300 g de manteiga, 4 litros de leite e 5 kg de farinha?

24) No planeta Z, todos os habitantes possuem 3 pernas e cada carro possui 5 rodas. Em uma pequena cidade desse planeta, existem ao todo 97 pernas e rodas. Então, podemos afirmar que:

a) é possível que existam 19 carros nessa cidade

b) existem, no máximo, 17 carros nessa cidade

c) essa cidade tem 9 habitantes e 14 carros

d) essa cidade possui, no máximo, 16 carros

e) nessa cidade existem mais carros que pessoas

25) Ronaldo, sempre que pode, guarda moedas de 50 centavos ou 1 real. Atualmente ele tem 100 moedas, num total de 76 reais. Quantas moedas de um valor ele tem a mais do que a de outro valor?

26) Seis cartões com números somente numa das faces são colocados sobre uma mesa, conforme a ilustração. Os cartões X e Y estão com a face numerada voltada para baixo. A média aritmética dos números de todos os cartões é 5. A média aritmética dos números do cartão Y e de seus três vizinhos é 3. Qual é o número escrito no cartão X?

8	2	4
X	6	Y

27) Considere dois números naturais, cada um deles com três algarismos diferentes. O maior deles só tem algarismos pares e o

menor deles só tem algarismos ímpares. Calcule o menor valor possível da diferença entre eles.

28) Joana escreve a seqüência de números naturais 1, 6, 11, ... em que cada número, com exceção do primeiro, é igual ao anterior mais cinco. Joana pára quando encontra o primeiro número de três algarismos. Que número é esse?

29) Quantos números de dois algarismos não são primos nem múltiplos de 2, 3 ou 5?

30) Uma pêra tem cerca de 90% de água e 10% de matéria sólida. Um produtor coloca 100 quilogramas de pêras para desidratar até o ponto em que a água represente 60% da massa total. Quantos litros de água serão evaporados? (Lembre-se: 1 litro de água tem massa de 1 quilograma.)

31) 2 melancias custam o mesmo que 9 laranjas mais 6 bananas; além disso, meia dúzia de bananas custa a metade de uma melancia. Portanto, o preço pago por uma dúzia de laranjas e uma dúzia de bananas é igual ao preço de quantas melancias?

32) Contando-se os alunos de uma classe de 4 em 4, sobram 2. Contando-se de 5 em 5, sobra 1. Sabendo-se que 15 alunos são meninas e que, nessa classe, o número de meninas é maior que o número de meninos, qual é o número de meninos dessa classe?

33) São escritos todos os números de 1 a 999 nos quais o algarismo 1 aparece exatamente 2 vezes (tais como 11, 121, 411 etc). Qual é a soma de todos estes números?

34) Encontre dois números, cada um com três algarismos, usando apenas os algarismos de 1 a 6, exatamente uma vez, de forma que a diferença entre eles (o maior número menos o menor número) seja a menor possível.

35) Existem casas em volta de uma praça. João e Pedro dão uma volta na praça, caminhando no mesmo sentido e contando as casas. Como não começaram a contar da mesma casa, a 5ª casa

de João é a 12^a de Pedro e a 5^a casa de Pedro é a 30^a de João. Quantas casas existem em volta da praça?

36) Pintam-se de preto todas as faces de um cubo de madeira cujas arestas medem 10 cm. Por cortes paralelos às faces, o cubo é dividido em 1.000 cubos pequenos, cada um com arestas medindo 1 cm. Determine:

a) O número de cubos que não possuem nenhuma face pintada de preto.

b) O número de cubos que possuem uma única face pintada de preto.

c) O número de cubos que possuem exatamente duas faces pintadas de preto.

d) O número de cubos que possuem três faces pintadas de preto.

A Revista da Olimpíada Brasileira de Matemática.

37) Marcel leva exatamente 20 minutos para ir de sua casa até a escola. Certo dia, durante o caminho para a escola, percebeu que esquecera em casa a revista Eureka, e queria voltar para casa a fim de pegá-la. Ele sabia que se continuasse a andar, chegaria à escola 8 minutos antes do sinal, mas se voltasse para pegar a revista, no mesmo passo, chegaria à escola com 10 minutos de atraso. Que fração do caminho já tinha percorrido nesse ponto?

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{9}{20}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{9}{10}$

38) Um elevador pode levar 20 adultos ou 24 crianças. Se 15 adultos já estão no elevador, quantas crianças ainda podem entrar?

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

39) Um copo está cheio de água e seu peso é de 520 gramas. Joga-se $\frac{1}{5}$ da água fora. Assim, o peso cai para 440 gramas. O peso do copo é:

a) 80g b) 120g c) 130g d) 250g e) 960g

40) O Sr. Silva comprou um aparelho de TV, cujos canais variam de 2 a 42. Cada toque no botão dos canais troca o canal para

seguinte. Ao chegar ao 42 voltará para o canal 2. Se ele está assistindo o canal 15 e apertar o botão 394 vezes, em que canal irá parar?

a) 25 b) 30 c) 35 d) 40 e) 45

41) Uma caixa d'água está com 400 litros de água, correspondendo a $\frac{2}{5}$ de sua capacidade. Num certo instante, uma torneira é aberta despejando, nessa caixa, 14 litros de água por minuto. Após quantos minutos a caixa estará com $\frac{3}{4}$ de sua capacidade?

a) 15 b) 20 c) 30 d) 18 e) 25

42) Seja $N = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (196.883)^2$. Qual é o algarismo das unidades de N?

43) Um edifício muito alto possui 1.000 andares, excluindo-se o térreo. Do andar térreo partem 5 elevadores: o elevador A pára em todos os andares; o elevador B pára nos andares múltiplos de 5, isto é, 0, 5, 10, 15, . . .; o elevador C pára nos andares múltiplos de 7, isto é, 0, 7, 14, 21, . . .; o elevador D pára nos andares múltiplos de 17, isto é, 0, 17, 34, 51, . . . ; o elevador E pára nos andares múltiplos de 23, isto é, 0, 23, 46, 69, . . .

a) Mostre que, excetuando-se o andar térreo, não existe nenhum andar onde param 5 elevadores.

b) Determine todos os andares onde param 4 elevadores.

44) João comprou um livro e reparou que ele tinha 200 páginas. Seu irmão mais novo arrancou, ao acaso, 25 folhas e somou os números das 50 páginas. Explique porque o resultado desta soma não pode ser igual a 1998. **Atenção:** cada folha tem duas páginas. A primeira folha tem as páginas 1 e 2; a segunda folha tem as páginas 3 e 4; e assim por diante.

45) Esmeralda, de olhos vendados, retira cartões de uma urna contendo inicialmente 100 cartões numerados de 1 a 100, cada um com um número diferente. Qual é o número mínimo de cartões que Esmeralda deve retirar para ter certeza de que o número de, pelo menos, um dos cartões seja um múltiplo de 4?

46) Na população de 1.000 aves de uma espécie rara da floresta amazônica, 98% tinham cauda de cor verde. Após uma misteriosa epidemia que matou parte das aves com cauda verde, esta porcentagem caiu para 95%. Quantas aves foram eliminadas com a epidemia?

Solução dos problemas 1 a 46

1) Façamos uma lista:

0 : 00	1 : 11
2 : 22	3 : 33
4 : 44	5 : 55
11 : 11	22 : 22

Portanto, são 8 vezes.

2) 4 garrafas vazias = 1 garrafa cheia. Então 43 = 4 × 10 + 3.

1ª troca: 10 garrafas cheias (sobram 3 vazias). Consumidas as 10 garrafas, tem-se então 13 garrafas vazias: 13 = 4 × 3 + 1.

2ª troca: 3 garrafas cheias (sobra 1 vazia). Consumidas as 3 garrafas, temos, então, 4 garrafas vazias.

3ª troca: 1 garrafa cheia.

Total: 10 + 3 + 1 = 14 garrafas cheias.

3) Podemos escrever 25 = 2 + 23 e esta é a única maneira, pois 25 é ímpar e o único primo par é 2. Quaisquer outros dois primos resultariam soma par.

4) Resolvemos o problema através de uma regra de três simples:

$$\begin{array}{lcl} 25\text{km} & - & 3\ell \\ 600\text{km} & - & x\ell \end{array} \Rightarrow 25x = 3 \cdot 600 \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 600}{25} \Rightarrow x = 72\ell$$

Como cada litro custa R$ 0,75, serão gastos R$ 54,00 (72 × 0,75 = 54).

5) Sejam H a idade de Hélio e F a idade do filho, ambos há 18 anos. Temos, então, que há 18 anos, $H = 3F$ e que $H + 18 = 2\ (F + 18)$. Logo, $F = 18$ e $H = 54$. Hoje, $F = 18 + 18 = 36$ e $H = 54 + 18 = 72$. Portanto, Hélio tem 72 anos e seu filho tem 36 anos.

6) Cada coluna corresponde a um resto na divisão por 9:

$$\begin{array}{lll} A-9k+1 & B-9k & C-9k+2 \\ D-9k+8 & E-9k+3 & F-9k+7 \\ G-9k+4 & H-9k+6 & I-9k+5 \end{array}$$

Como 2.000 = 9 × 222 + 2, 2.000 está na coluna C.

7) As médias das duas turmas melhoraram (item c). Isto quer dizer que

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{30}+x_{31}}{31} < \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{30}}{30} \quad (I)$$

e que

$$\frac{x_{32}+x_{33}+\ldots+x_{61}}{30} < \frac{x_{31}+x_{32}+\ldots+x_{61}}{31} \quad (II)$$

Vamos verificar. Temos que:

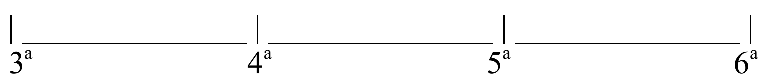
$$30\,(x_1+\ldots+x_{30})+30\,x_{31} < 31\,(x_1+\ldots+x_{30})$$

Logo, $x_1+\ldots+x_{30} < 30\,x_{31}$. Esta última afirmação é verdade, pois $x_1 > x_{31}$, $x_2 > x_{31}$, $x_{30} > x_{31}$. Logo, a primeira afirmação é verdadeira. A verificação da outra desigualdade é análoga.

8) As bolas retiradas podem ser vermelhas ou brancas. Como só existem 2 bolas brancas, pelo menos uma das bolas é vermelha (ítem d).

9) Se foi o Mário, dois garotos mentiram (Mário e Carlos). Se foi o Carlos, também dois garotos mentiram (Carlos e Pedro). Se foi o Benjamin, temos três mentirosos (Benjamin, Mário e Carlos). Logo, só pode ter sido o Pedro e, somente, Mário mentiu.

10) O primeiro múltiplo comum de 7 e 8 é 56: 7, 8, 14, 16, 21, 24, 28, 32, 35, 40, 42, 48, 49, 56. Até 56, inclusive, são 14 múltiplos. Posição 14 → 56, posição 28 → 56 × 2 = 112, ..., posição 98 → 56 × 7 = 392, posição 99 → 392 + 7 = 399, posição 100 → 392 + 8 = 400. Portanto, o centésimo número é 400.

11) 

Entre a 3ª e a 6ª estações a distância é de 3.300m, ou seja, entre duas estações vizinhas a distância é de 3.300 ÷ 3 = 1.100m.

Como são 12 estações, teremos 11 destas distâncias. Logo, 11 × 1.100 = 12.100m ou 12,1km.

12)

Quadrados perfeitos	16	25	36	49	64	81
Sucessores	17	26	37	50	65	82

Temos menos quadrados perfeitos de dois algarismos do que primos de dois algarismos. Fazemos a contagem partindo dos quadrados. São dois primos: 17 e 37.

13) Façamos uma contagem de hora em hora para as 12 primeiras horas.

$0h - 1h : 2\ vezes$ $\quad$ $6h - 7h : 2\ vezes$

$1h - 2h : 2\ vezes$ $\quad$ $7h - 8h : 2\ vezes$

$2h - 3h : 2\ vezes$ $\quad$ $8h - 9h : 2\ vezes$

$3h - 4h : 1\ vez$ $\quad$ $9h - 10h : 1\ vez$

$4h - 5h : 2\ vezes$ $\quad$ $10h - 11h : 2\ vezes$

$5h - 6h : 2\ vezes$ $\quad$ $11h - 12h : 2\ vezes$

Temos, no total, 44 vezes.

14) Quantas caixas de dimensões 20 × 20 × 20 cabem em um caixote de 80 × 120 × 60?

- Na largura: 4 × 20 = 80 ⇒ 4 na largura
- No comprimento: 6 × 20 = 120 ⇒ 6 no comprimento
- Na altura: 3 × 20 = 60 ⇒ 3 na altura

Portanto, cabem 4 × 6 × 3 = 72 caixas cúbicas no caixote. Logo, podemos acomodar 576 (72 × 8) latas de palmito por caixote.

15) Vamos decompor todos em fatores primos e verificar qual é o maior.

- $3^{45} = 3^{39} \cdot 3^{6}$
- $9^{20} = 3^{40} = 3^{39} \cdot 3$
- $27^{14} = 3^{42} = 3^{39} \cdot 3^{3}$
- $24^{39} = (3.8)^{39} = 3^{39}.2^{117}$
- $81^{12} = 3^{48} = 3^{39} \cdot 3^{9}$

Logo, 24^{39} é o maior.

16) $\dfrac{(x \times 3)+12}{7}=15 \;\Rightarrow\; 3x+12=105 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow 3x=105-12 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow 3x=93 \;\Rightarrow\; x=31$

17) São 2 segundos de diferença por volta. Logo, em 80 voltas são 160 segundos. Em 160 segundos, Carlinhos dá 5 (160 ÷ 32) voltas. Portanto, quando Carlinhos estiver completando a volta de número 80, Paulinho estará completando a volta de número 75 (80 – 5).

18) 997 – 979 – 799, 988 – 898 – 889. Portanto, são seis números.

19) 11:20 – 12:20 $\rightarrow$ 1 real

12:20 – 15:20 $\rightarrow$ 0,75 $\rightarrow$ 3 = 2,25

15:20 – 15:40 $\rightarrow$ 0,75

Total: 1 + 2,25 + 0,75 = 4 reais

20) São 90 os números de dois algarismos, sendo 45 pares e 45 ímpares.

Impares: 11, 13, 15, . . . , 97, 99

Pares: 10, 12, 14, . . . , 96, 98

A diferença entre dois números da mesma coluna é 1. Como são 45 colunas, teremos que a diferença é 45.

21) J: idade de João

P: idade de Pedro

C: idade de Carlos

A: idade de Antônio

Temos que: $J>P$, $C>P$, $A>C$, $J>C$ e $A>J$.

Colocando em ordem decrescente: $A>J>C>P$, ou seja, Pedro é o mais jovem.

22) A área da fazenda é calculada assim: 10 × 20 = 200 km^2. Agora, 200 km^2 ÷ 200 = 1 km^2 = 1.000.000 m^2. Logo, cada família recebeu 1.000.000 m^2.

23)

Açúcar	Manteiga	Leite	Farinha	Quantidade
100g	50g	$\frac{1}{2}\ell$	400g	12 bolinhos
500g	300g	4ℓ	5.000g	5×12 = 60 bolinhos
100×5=500	50×5=250	$\frac{1}{2}\cdot 5=\frac{5}{2}$	400×5=2.000g	

A resposta é 60 bolinhos.

24) A equação do problema é $3p+5r=97$, em que p é o número de primos e r, o número de rodas. Analisando as alternativas

a) 19 × 5 = 95 e 97 – 95 = 2, que é impossível (pois uma pessoa tem 3 pernas e um carro tem 5 rodas).

b) 16×5 = 80. Mas, 97 – 80 = 17, que não é múltiplo de 3. Agora, 17 × 5 = 85 e 97 – 85 = 12, que é múltiplo de 3. As outras possibilidades não podem se concretizar (18 × 5 = 90, mas 97 – 90 = 7, que não é múltiplo de 3. E 19 × 5 = 95, mas 97 – 95 = 2 que não é múltiplo de 3). Logo, o número máximo de carros é 17. Essa é uma alternativa correta.

c) 9 × 3 = 27, 14 × 5 = 70 e 27 + 70 = 97. Ou seja, esses números são possíveis, mas não podemos afirmar que só estes números funcionam, pois poderíamos ter também 17 carros e 4 pessoas.

d) de acordo com (b), é possível existir 17 carros.

e) 5 × 2 = 10, 3 × 29 = 87 e 87 + 10 = 97. Isto é, podem existir 2 carros e 29 pessoas. Esta não é uma alternativa correta.

25) Seja x o número de moedas de 1 real e y, o número de moedas de 50 centavos. $\begin{cases} x+0,5y=76 \\ x+y=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=48 \\ x=52 \end{cases}$. Logo, a diferença é de 4 moedas.

26) $\frac{8+2+4+x+6+y}{6}=5 \Rightarrow (y+2+4+6)+8+x=30$. Assim,

$\frac{y+2+4+6}{4}=3 \Rightarrow y+2+4+6=12 \Rightarrow y=0$. Logo, x = 10.

27) Note que, para isso, o primeiro algarismo do número par deve ser sucessor do primeiro algarismo do número ímpar e, além disso, os dois algarismos finais de cada um devem ser o menor e o maior possível, respectivamente. Assim, podemos tomar os números 402 e 397 ou 602 e 597. A diferença, em ambos os casos, é 5.

28) 1, 6, 11, 16, . . . , n, $n + 5$, . . . Todos os números deixam resto 1 na divisão por 5. O menor número de 3 algarismos é 100, que deixa resto zero. Logo, deverá ser o 101, que deixa resto 1.

29) Entre 10 e 99, temos 90 números com dois algarismos.

- Primos: 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97, totalizando 21 primos.
- Múltiplos de 2: 45 números
- Múltiplos de 3: 30 números
- Múltiplos de 5: 18 números
- Múltiplos de 6: 15 números
- Múltiplos de 10: 9 números (múltiplos de 5 e 2)
- Múltiplos de 15: 6 números (múltiplos de 5 e 3)
- Múltiplos de 30: 3 números (múltiplos de 5, 3 e 2)

Logo, entre 10 e 99, existem 45 múltiplos de 2, 15 múltiplos de 3, mas que não são múltiplos de 2, mais 6 ($= 18 - [9 + 6 - 3]$) múltiplos de 5, que não são múltiplos nem de 2, nem de 3. Logo, existem 3 números que satisfazem o problema: $7 \times 7 = 49$, $7 \times 11 = 77$ e $7 \times 13 = 91$.

Outra forma (mais direta): os números procurados são produtos de primos e estes primos não podem ser 2, 3 e 5. Restam $7 \times 7 = 49$, $7 \times 11 = 77$ e $7 \times 13 = 91$.

30) Sejam A a quantidade de água e MS a quantidade de matéria sólida. Então 90%A + 10%MS = 1 pêra.

100kg = 90kgA + 10kgMS

Massa total = 60%A + 40%MS

Observando que a massa sólida não evapora, temos:

$$\begin{gathered}40\% - 10kg\\100\% - 25kg\\60\% - 15kg\end{gathered}$$

Ou seja, restam 15kg de água depois de desidratar. Logo, evaporam-se 90 – 15 = 75kg, ou 75 litros de água.

31) Sejam m, b e l o número de melancias, bananas e laranjas, respectivamente. Temos que $6b+9l=2m$. Além disso, $1m = 12b$. Assim, $1l=2b$. Logo, 12 bananas mais 12 laranjas correspondem ao preço de 3 melancias.

32) Seja n o número de alunos. Então, $n=4x+2$ e $n=5y+1$. Temos que 29 = 5.5 + 4, 28 = 5.5 + 3, 27 = 5.5 + 2, 26 = 5.5 + 1 = 4.6 + 2. Logo, são 26 alunos: 15 meninas e 11 meninos.

33) Os números, nesse intervalo, são da forma x11, 1x1 ou 11x (no primeiro caso, se x = 0, o número é 11). Agora, x11 + 1x1 + 11x = $x10^2 + 1.10 + 1 + 1.10^2 + x.10 + 1 + 1.10^2 + 1.10 + x$, que é igual a $(x+2).10^2 + (x+2).10 + (x+2)$, que é igual a $111.(x+2)$. Fazendo x variar de 0 a 9, $x \neq 1$, temos que a soma é 222 + 444 + 555 + 666 + 777 + 888 + 999 + 1110 + 1221 = (2 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11). 11 = 6882.

34) Devemos subtrair o maior possível do menor possível: 234 – 165 = 69, 314 – 265 = 49, 412 – 365 = 47, 512 – 463 = 49, 612 – 543 = 69. Portanto, os números são 412 e 365.

35) Da 5ª para a 12ª de Pedro são 7 casas (inclusive a 12ª). A 5ª casa de João seria também a sua 37ª. Ou seja, 32 (= 37 – 5) é a última casa de João. Logo, são 32 casas em volta da praça.

36) a) 512; b) 384; c) 96; d) 8

37) O tempo necessário para Marcel retornar à sua casa e depois fazer todo o percurso até o ponto onde estava é de 18 minutos, pois chegaria adiantado em 8 minutos, mas acabou mesmo chegando com 10 minutos de atraso. Portanto, levou 9 minutos

para ir de sua casa até o ponto de retorno, o que corresponde a $\frac{9}{20}$ da distância de sua casa ate a escola.

38) A carga total do elevador é de 20 adultos, mas já se encontram no elevador 15 adultos, o que corresponde a $\frac{3}{4}$ da carga, restando $\frac{1}{4}$ da carga para completar com crianças. Como o elevador pode levar 24 crianças e $\frac{1}{4}$ de 24 é 6, podem entrar ainda 6 crianças no elevador.

39) Note que $\frac{1}{5}$ da água que foi jogada fora corresponde à diferença $520 - 440 = 80$. Logo, $\frac{1}{5}$ da água do copo cheio pesa 80 gramas. Tem-se que $\frac{5}{5}$ da água será 400 gramas e o peso do copo será a diferença $520 - 400 = 120$. Portanto, o peso do copo é de 120 gramas.

40) Um aparelho de TV tem 41 canais. Divida 394 pelo número de canais, ou seja, 41. Na divisão, obteremos resto igual a 25. Agora, basta somar 25 ao número do canal que o Sr. Silva assistia, ou seja, 15. Obteremos, como resultado, 40. Logo, ele parou no canal 40.

Sabemos que 400 litros correspondem a $\frac{2}{5}$ da capacidade da caixa. Então $\frac{5}{5}$ correspondem a 1.000 litros. É preciso deixar a caixa com $\frac{3}{4}$ de sua capacidade. Como $\frac{3}{4}$ de 1.000 é 750 e a caixa já tinha 400 litros, restam 350 litros para colocar na caixa. Agora, basta dividir 350 por 14 e obteremos 25. Logo, em 25 minutos a caixa estará com $\frac{3}{4}$ de sua capacidade.

41) Os algarismos das unidades dos quadrados dos números de 1 a 10 são, respectivamente, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 e 0. Ora, a soma dos números formados por esses algarismos é 45. Portanto, a soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2$ tem, como al-

garismo das unidades, o dígito 5. De 11 a 20, os algarismos das unidades dos números se repetem na mesma ordem. Portanto, o algarismo das unidades da soma de seus quadrados também é 5. Conseqüentemente, a soma dos quadrados dos números de 1 a 20 tem 0 como algarismo das unidades. Logo, a soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2$ tem zero como algarismo das unidades se N é múltiplo de 20. Como $N = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (196.883)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 196.880^2 + 196.881^2 + 196.882^2 + 196.883^2$, concluímos que o algarismo das unidades de N é o mesmo do número $0 + 1 + 4 + 9 = 14$, ou seja, 4.

42) a) O elevador B pára nos múltiplos de 5; o elevador C pára nos múltiplos de 7; o elevador D pára nos múltiplos de 17; o elevador E pára nos múltiplos de 23. Como 5, 7, 17 e 23 são números primos, para que todos parem num mesmo andar, este tem que ser múltiplo de $5 \times 7 \times 17 \times 23 = 13.685$. Mas o prédio só tem 1.000 andares.

b) Para que num andar parem exatamente quatro elevadores, devem parar A, que pára em todos, e os três restantes. Agora, B, C e D param nos múltiplos de $5 \times 7 \times 17 = 595$; B, C e E param nos múltiplos de $5 \times 7 \times 23 = 805$; B, D e E param nos múltiplos de $5 \times 17 \times 23 = 1.955$; C, D e E param nos múltiplos de $7 \times 17 \times 23 = 2.737$. Logo, os andares em que param 4 elevadores são o 595 e 805.

43) Cada folha tem duas páginas tais que a soma dos seus respectivos números é ímpar. Ao somarmos todos esses 25 números, obteremos, necessariamente, uma soma ímpar que, portanto, não pode ser igual a 1.998.

44) De 1 a 100, existem 25 cartões múltiplos de 4. Logo, 75 cartões não contêm múltiplos de 4. No pior caso possível, Esmeralda tiraria todos esses cartões antes de sair algum cartão com múltiplo de 4. Assim, para ter certeza de que pelo menos um dos números tirados seja múltiplo de 4, Esmeralda deve tirar todos aqueles, mais um, ou seja, 76 cartões.

45) Inicialmente, existiam 980 (98% de 1.000) aves de cauda verde e 20 (2% de 1.000) das demais. Após a epidemia, estas 20 aves correspondem a 5% do total, que agora é de 400 aves, das quais 380 são de cauda verde. Portanto, morreram $980 - 380 = 600$ aves.

3.6 Problemas Propostos

As soluções dos problemas encontram-se nas revistas Eureka!, disponíveis no sítio da Olimpíada Brasileira de Matemática: http://www.obm.org.br.

1) Qual é o resto da divisão de 111.111.111.111.111.111.111.111.111.111 por 16? (OBM/96/F1)

2) Qual é o dígito das unidades de 3^{1998}? (OBM/98/F1)

3) Quantos são os números inteiros x que satisfazem $3 < \sqrt{x} < 7$? (OBM/98/F1)

4) Em um conjunto de pontos do espaço, a distância entre dois pontos quaisquer é igual a 1. Qual é o número máximo de pontos que pode haver neste conjunto? (OBM/98/F1)

5) Quantos são os possíveis valores inteiros de x para que $\dfrac{x+99}{x+19}$ seja um número inteiro? (OBM/99/F1)

6) Para todo número natural n, definimos a função: $f(n) = \dfrac{n}{2}$, se n é par e $f(n) = 3n+1$, se n é ímpar. Qual é o número de soluções de $f(f(f(n))) = 16$? (OBM/99/F1)

7) Em um aquário há peixes amarelos e vermelhos. 90% são amarelos e 10% são vermelhos. Uma misteriosa doença matou muitos peixes amarelos mas nenhum vermelho. Depois que a doença foi controlada, verificou-se que no aquário 75% dos peixes vivos eram amarelos. Aproximadamente, que porcentagem dos peixes amarelos morreram? (OBM/99/F1)

8) Na circunferência ao lado, o raio é 1, o arco AB mede 70° e o arco BC mede 40°. Qual é a área da região limitada entre as cordas AB e AC? (OBM/99/F1)

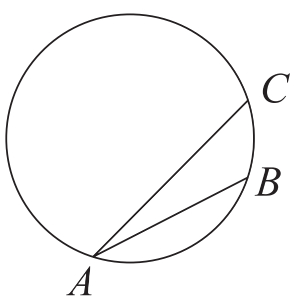


Figura 3.24

9) Dois irmãos herdaram um terreno ABC com a forma de um triângulo retângulo em A e com o cateto AB de 84m de comprimento. Eles resolveram dividir o terreno em duas partes de mesma área por um muro MN paralelo a AC, como mostra a figura 3.25. Qual é o valor aproximado de BM? (OBM/99/F1)

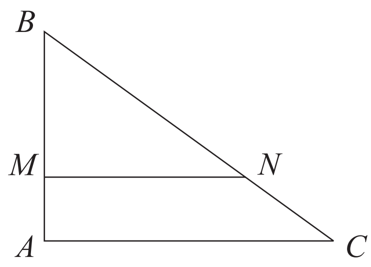


Figura 3.25

10) Se $0° < x < 90°$ e $\cos x = 1/4$, então x está entre:

a) 0° e 30° b) 30° e 45° c) 45° e 60°

d) 60° e 75° e) 75° e 90° (OBM/99/F1)

11) Um quadrado $ABCD$ possui lado igual a 40cm. Uma circunferência contém os vértices A e B e é tangente ao lado CD. Qual é o raio da circunferência? (OBM/99/F1)

12) O número $\sqrt{0,444\ldots}$ é igual a:

a) 0,2222... b) 0,3333... c) 0,4444... d) 0,5555... e) 0,6666... (OBM/99/F1)

13) Seja f uma função definida para todo x real, satisfazendo as condições:

$$f(x+3) = f(x) \cdot f(3)$$

Determine o valor de $f(3) = 2$. (OBM/97/Junior/F1)

14) Qual é o número de pares (x, y) de números reais que satisfazem o sistema $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 + 1 = 0 \\ x^3 - x^2y - xy^2 + x - y + 2 = 0 \end{cases}$? (OBM/97/Junior/F1)

15) Qual é o número de pares (x, y) de números inteiros que satisfazem a equação $x + y + xy = 120$? (OBM/97/Sênior/F1)

16) Temos 10.000 fichas iguais com a forma de um triângulo eqüilátero. Com estes pequenos triângulos se podem formar hexágonos regulares sem superposição de fichas ou vazios. Considere

agora o hexágono regular que desperdiça a menor quantidade de triângulos. Quantos triângulos sobram? (III Olimpíada de Maio/N2)

17) Se seu salário sobe 26% e os preços sobem 20%, de quanto aumenta seu poder aquisitivo? (OBM/97/Sênior/F1)

18) Qual é o número de soluções reais da equação $x^2 = 2^x$? (OBM/97/Sênior/F1)

19) Quantos são os números de sete algarismos que são múltiplos de 388 e terminam em 388? (Olimpíada de Maio/97/N2)

20) A função f associa a cada número real x o menor elemento do conjunto $\left\{x+1, \dfrac{(15-x)}{2}\right\}$. Qual é o valor máximo de $f(x)$? (OBM/98/F1)

21) Qual a solução da inequação $\sqrt{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x}} \leq 2$? (OBM/98/F1)

22) Determine o maior número natural n para o qual existe uma r ordenação (a,b,c,d) de $(3,6,9,12)$ (isto é, $\{a,b,c,d\} = \{3,6,9,12\}$) tal que o número $\sqrt[n]{3^a.6^b.9^c.12^d}$ seja inteiro. Justifique sua resposta. (OBM/99/F2)

23) Nos extremos do diâmetro de um círculo, escreve-se o número 1 (primeiro passo). A seguir, cada semicírculo é dividido ao meio e, em cada um dos seus pontos médios, escreve-se a soma dos números que estão nos extremos do semicírculo (segundo passo). A seguir, cada quarto de círculo é dividido ao meio e, em cada um dos seus pontos médios, coloca-se a soma dos números que estão nos extremos de cada arco (terceiro passo). Procede-se assim, sucessivamente. Sempre cada arco é dividido ao meio e, em seu ponto médio, é escrita a soma dos números que estão em seus extremos. Determinar a soma de todos os números escritos após 1.999 passos. (OBM/99/F2)

24) Determine todos os inteiros positivos n para os quais é possível montarmos um retângulo 9×10, usando peças $1 \times n$. (OBM/99/F2)

Referências

[1] MEGA, Elio; WATANABE, Renate. *Olimpíadas brasileiras de matemática*: 1. a 8.: problemas e resoluções. São Paulo: Núcleo, 1988.

[2] MOREIRA, Carlos et al. *Olimpíadas brasileiras de matemática*: 9. a 16.: problemas e resoluções. Rio de Janeiro: SBM, 2003.

[3] EUREKA!. Rio de Janeiro: SBM. Disponível em: <www.obm.org.br/opencms/revista_eureka>. Acesso em: 29 mai. 2009.

[4] OLIMPÍADAS Brasileiras de Matemática. Disponível em: <www.obm.org.br/opencms/>. Acesso em: 29 mai. 2009.

[5] OLIMPÍADAS Brasileiras de Matemática nas Escolas Públicas. Disponível em: <www.obmep.org.br>. Acesso em: 29 mai. 2009.

[6] OLIMPÍADAS Regionais de Matemática. Disponível em: <www.orm.mtm.ufsc.br>. Acesso em: 29 mai. 2009.

Capítulo 4

Raciocínio Lógico

Capítulo 4

Raciocínio Lógico

4.1 Introdução

HOUAISS, A. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa.** Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

Matemática é uma ciência que lida com abstrações e, para lidar com elas sem nos perder na complexidade da mente humana, precisamos de lógica. Lógica é uma palavra latina que se origina, segundo **Houaiss**, da redução da expressão grega **logiké tékhne**, que significa arte de raciocínio. A matemática moderna é apresentada como ciência ao público especializado segundo um método chamado de método axiomático. Esse método baseia-se em cadeias ascendentes de raciocínios, cuja base são os axiomas, que são proposições sobre conceitos primitivos, aceitas como verdades absolutas sobre esses conceitos. Todas as afirmações que aparecem nas cadeias compõem aquilo que chamamos de uma teoria matemática. Por exemplo, geometria euclidiana plana é uma teoria matemática que começa com postulados sobre conceitos primitivos como ponto, reta, passar por, estar entre e congruente. Um exemplo de axioma é "por dois pontos passa uma única reta"; outro, "o ponto C está entre os pontos A e B".

Os conceitos primitivos podem ser interpretados de formas diversas, cada forma é dita um modelo da teoria. Por exemplo, a geometria analítica plana é um modelo para a geometria euclidiana plana, na qual ponto é um par ordenado (x, y); reta é um conjunto de pontos que satisfazem uma equação linear; passar por dois pontos significa conter esses dois pontos como elementos do conjunto; um ponto C estar entre dois pontos A e B, numa reta, significa que as coordenadas de C satisfazem a equação $t(x_A, y_A) + (1-t)(x_B, y_B)$, para algum número real $t > 0$; segmentos congruentes significam segmentos de mesma norma.

No Ensino Fundamental, basicamente, falamos do alfabeto e da sintaxe na matemática. Queremos dizer, com isso, que aprendemos a escrever algumas expressões, equações, desigualdades e proposições matemáticas mais abrangentes, com o alfabeto da matemática, que é uma mistura de números, letras latinas e gregas etc. Por exemplo, a equação $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ é uma oração matemática que estabelece que $a^2 + b^2 + 2ab$ é um sinônimo da palavra $(a+b)^2$.

No Ensino Médio, a ênfase começa a se voltar para a semântica, ou seja, para o valor de verdade de sentenças matemáticas. Um teorema é uma sentença matemática verdadeira. A negação do teorema é uma sentença falsa. Dissemos que, no método axiomático, as sentenças iniciais da teoria – os axiomas – são verdadeiras. Como se criam novas afirmações verdadeiras (teoremas) a partir dos axiomas? É isso que vamos tratar aqui, de modo muito informal. Gostaríamos que você, aluno, compreendesse que criamos novas sentenças matemáticas a partir de **conectivos**. São cinco os conectivos: **e, ou, não (~), se ... então (⇒), se e somente se (⇔)**. Dada uma afirmação do tipo **se *A* então *B*** (ou, em símbolos, $A \Rightarrow B$), dizemos que A é a hipótese e B, a tese. A recíproca de $A \Rightarrow B$ é, por definição, a proposição $B \Rightarrow A$; a contra-positiva de $A \Rightarrow B$ é a proposição $\sim B \Rightarrow \sim A$; a sua contra-recíproca é $\sim A \Rightarrow \sim B$.

Conjunções que conectam sentenças antigas ou advérbio, para formar uma nova.

Alguns teoremas do cálculo proposicional são:

1) Se $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow C$, então, $A \Rightarrow C$.
2) $A \Rightarrow B$ e $\sim B \Rightarrow \sim A$ são equivalentes (têm a mesma **tabela de verdade**).

Tabelas de Verdade Básicas

A	~A
V	F
F	V

A	B	A e B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A	B	A ou B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

3) $\sim(A \text{ e } B)$ e $(\sim A \text{ ou } \sim B)$ são equivalentes (têm a mesma tabela de verdade).

4) $\sim(A \text{ ou } B)$ e $(\sim A \text{ e } \sim B)$ são equivalentes (têm a mesma tabela de verdade).

5) $A \Leftrightarrow B$ e $\sim A \Leftrightarrow \sim B$ são equivalentes (têm a mesma tabela de verdade).

6) $\sim(A \Rightarrow B)$ e $(A \text{ e } \sim B)$ são equivalentes (têm a mesma tabela de verdade).

Primeiro, abordaremos o cálculo proposicional com textos cotidianos. Nessas proposições não aparecem quantificadores, que são dois: o existencial (denotado por $\exists$, que é lido como "existe") e o universal (denotado por $\forall$, que se lê como "para todo"). Depois, introduzimos frases coloquiais com quantificadores.

4.2 Método axiomático

A matemática moderna é apresentada segundo um método chamado de método axiomático. Este método é baseado em cadeias de raciocínios a partir de axiomas, que são proposições sobre alguns conceitos iniciais as quais aceitamos como verdades absolutas.

Podemos considerar que proposições são como períodos em gramática. Podemos ter períodos simples, que são formados por uma só oração. Se essa oração for fechada, no sentido que não há algo indefinido, dizemos que ela é uma proposição atômica. Por exemplo, "Rumi é um poeta do amor extático" é uma oração fechada, enquanto que "X é um poeta do amor extático" é uma oração aberta. Eu posso por, no lugar de X, algum nome e a frase será verdadeira ou falsa, dependendo, obviamente, do nome da pessoa que eu puser. Por exemplo, substituindo-se X por Augusto de Campos, obtemos uma sentença falsa, pois Augusto de Campos é um poeta abstrato, que lida com o aspecto gráfico das letras nas palavras, e a maior parte de sua criação literária não se refere explicitamente ao êxtase no amor (no entanto, ele traduziu John Donne, poeta do amor devoto). Outra frase fechada é a seguinte: "Há políticos que não enganam seus eleitores". Apesar de não se referir a ninguém em particular, pode-se verificar se essa frase é ou não verdadeira no conjunto de todos os políticos que vivem no planeta. Apesar desse período não ser simples, considera-se essa frase como uma sentença atômica, pois a oração "que não enganam seus eleitores" funciona como um adjetivo.

Uma proposição do tipo "Rumi é um poeta do amor extático e sua morte é comemorada todo dia 17 de dezembro na cidade turca de Kônia" é uma proposição que conecta a proposição acima, via conjunção *e*, à proposição "todo ano *x*, a morte de Rumi é comemorada na cidade turca de Kônia, no dia 17 de dezembro de *x*". Aquela não é uma proposição atômica, pois seu valor de verdade depende do valor de verdade de cada sentença que a compõe. Nesse caso, aquela frase será verdadeira se, e somente se, cada frase for verdadeira, independentemente da outra. Por exemplo, se em 2006 não se comemorar a sua morte no dia 17 de dezembro, toda a sentença será falsa. Uma proposição que não é atômica corresponde a um período gramatical composto por várias orações.

No estudo abstrato das proposições, usamos letras para representar uma frase. Por exemplo, a proposição composta acima poderia ser expressa como " $E(R) \wedge (\forall x) M(x, R)$ ", em que $E(X)$ é a relação "X é um poeta do amor extático" e $M(x, X)$ é a relação "a morte de X é comemorada na cidade de Kônia no dia 17 de dezembro de x".

Assim, as proposições atômicas correspondem a expressões simbólicas com símbolos relacionais (que representam uma relação), símbolos funcionais (para representar funções), símbolos para variáveis (em geral, do final do alfabeto: *x*, *y*, *z*), símbolos para constantes (em geral, do início do alfabeto: *a*, *b*... ; ou algarismos: 1, 2...), conectivos e quantificadores. Reciprocamente, podemos criar expressões simbólicas, seguindo uma gramática própria, tais que possam ser traduzidas para proposições em linguagem corrente, uma vez que se faça uma correspondência entre símbolos e palavras ou entre símbolos e frases. Isso é o que se chama de interpretação. E o conjunto no qual se faz essa interpretação se chama de modelo. Em um modelo, faz sentido atribuir um valor de verdade: ou V (verdadeiro) ou F (falso).

Voltemos ao método axiomático. Partindo-se de um conjunto de proposições iniciais, criamos proposições novas, utilizando conectivos. Em matemática, usamos 5 conectivos, que aparecem como "e", "ou", "se...então" (ou "implica em", ou "somente se"), "se e somente se" (ou "equivale a") e "não". Essas novas proposições terão algum valor de verdade, supondo-se que o valor de verdade atribuído às proposições iniciais é V. Em matemática, dada uma proposição que fale sobre os conceitos iniciais (ou sobre outros definidos a partir desses), o desafio é montar uma proposição composta, como uma cadeia de proposições, tal que o último elemento dela seja a proposição dada. Essa cadeia é uma prova ou demonstração. A proposição dada é dita um teorema se for possível esse encadeamento de proposições que cheguem nela. Enquanto não for engendrada essa cadeia, essa proposição é dita uma conjetura.

Consideremos uma proposição simbólica Q. Por exemplo, suponha que Q é a proposição escrita como $A \Rightarrow ((B \wedge C) \vee D)$. Uma tabela com os possíveis valores de verdade da proposição Q, a partir dos possíveis valores de verdade de cada proposição atômica que a compõe (A, B, C, D), chama-se a tabela de verdade de Q.

Há proposições cujas tabelas de verdade apresentam o valor final V (verdadeiro), não importando os valores de verdade das proposições atômicas que a compõem. Essas proposições são chamadas de tautologias. Seja A uma proposição qualquer formada a partir de proposições atômicas (mais conectivos). Verificar se A é ou não uma tautologia é o que se chama Cálculo Proposicional (ver 4.2).

Observe que existem frases para as quais não é possível decidir se são verdadeiras ou falsas. Por exemplo, a frase "x é um número inteiro primo" pode ser verdadeira ou não. Isso ocorre porque não nos referimos a algum x específico. Para decidir se esta frase é verdadeira ou falsa precisamos especificar o valor de x. Frases como estas chamamos de fórmulas abertas. Uma frase ou fórmula fechada é algo como "3 é um número primo".

Note que, se $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros, a proposição "existe x em $\mathbb{Z}$, tal que x é primo" é verdadeira, assim como, "para cada x em $\mathbb{Z}$, x^2 não é um número primo". Aqui, deparamo-nos com dois elementos novos, que são o quantificador existencial "existe" e o quantificador universal "para todo" (ou "para cada"). Essas fórmulas com quantificadores também são ditas fechadas: cada quantificador limita o alcance da variável. Fórmulas fechadas são ditas sentenças (ver 4.3).

4.3 Cálculo Proposicional

Seja M um conjunto de letras latinas maiúsculas, próximas ao início do alfabeto, com ou sem subscritos – A, B_{12}, C' etc. Vamos chamar os elementos de M de símbolos proposicionais, ou de símbolos relativos (ou relacionais) de ordem zero. O que faremos a seguir é, intuitivamente, considerar os símbolos de M como proposições atômicas que, com o auxílio dos conectivos ~ (negação), $\wedge$ (conjunção), $\vee$ (disjunção), $\Rightarrow$ (implicação) e $\Leftrightarrow$ (equivalência) são combinadas de tal maneira a formarem proposições mais complexas, cujos valores verdade (verdadeiro ou falso) são determinados pelos valores de verdade (verdadeiro ou falso) atribuídos às proposições atômicas que as compõem.

Seja $S = M \cup \{\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (\,,\,)\}$

Definição. Uma seqüência finita de símbolos de S é uma proposição de S se, e só se, a seqüência é obtida a partir de um número finito de aplicações das seguintes regras:

i) um símbolo proposicional é uma proposição de S.

ii) Se X é uma proposição, então $(\sim X)$ é uma proposição de S.

iii) Se X e Y são proposições, então $(X \wedge Y)$, $(X \vee Y)$, $(X \Rightarrow Y)$, $(X \Leftrightarrow Y)$ são proposições de S.

Exemplos:

i) $\big((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\sim B) \wedge (\sim (C \vee D)))\big)$ é uma proposição.

ii) $(\sim A \sim B \wedge \vee C)$, porém, não é uma proposição, pois não é obtida por um número de aplicações das regras dadas acima.

Seja f uma função de S em $\{V, F\}$. Se $f(A) = V$ e $f(B) = F$, então dizemos que A tem um valor verdade V (verdadeiro) e que B tem o valor de verdade F (falso). Chamamos f de uma atribuição de valores de verdade aos símbolos de S. Agora, vamos estender f ao conjunto de todas as proposições de S. Seja X uma proposição contida nesse conjunto. O valor de verdade de X fica então determinado pelas seguintes regras:

i) se $X = (\sim Y)$ então o valor de verdade de X é V se e só se o de Y é F.

ii) se $X = (Y \wedge Z)$ então o valor de verdade de X é V se e só se o valor de verdade de ambas as proposições Y e Z é V.

iii) se $X = (Y \wedge Z)$ então o valor de verdade de X é V se e só se o valor de verdade de Y é V ou, se não, o valor de verdade de Z é V.

iv) se $X = (Y \Rightarrow Z)$ então o valor de verdade de X é V se e só se o valor de verdade de Y é F ou, se não, o valor de verdade de Z é V.

v) se $X = (Y \Leftrightarrow Z)$ então o valor de verdade de X é V se e só se ambas as proposições Y e Z têm o mesmo valor de verdade.

Seja $\{A_1, \ldots, A_n\}$ o conjunto dos símbolos proposicionais que ocorrem em X. Para cada atribuição de valores verdade a $\{A_1, \ldots, A_n\}$ obtemos, então, um único valor de verdade para X. Assim, cada proposição determina uma função que tem tantos argumentos quantos forem os símbolos proposicionais distintos que aparecem na proposição. Esta função pode ser graficamente representada por uma tabela – tabela de verdade da proposição. Por exemplo, a proposição $((A \vee B) \Rightarrow (\sim B))$ tem a seguinte tabela de verdade:

A	B	$(\sim B)$	$(A \vee B)$	$((A \vee B) \Rightarrow (\sim B))$
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	V

Observemos os seguintes exemplos de tabelas de verdade:

i) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$

A	B	$(B \Rightarrow A)$	$(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

ii) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

A	B	C	$(A \Rightarrow B)$	$(B \Rightarrow C)$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$(A \Rightarrow C)$	$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

iii) $((\sim (\sim A) \Leftrightarrow A))$

A	$(\sim A)$	$(\sim (\sim A))$	$((\sim (\sim A) \Leftrightarrow A))$
V	F	V	V
F	V	F	V

Definição. Uma proposição como as dos exemplos acima, cujo valor de verdade é sempre V não importando que valores de verdade são atribuídos aos símbolos que a compõem, é chamado de **tautologia**. Dizemos que duas proposições X e Y são equivalentes se e só se $(X \Leftrightarrow Y)$ é uma tautologia.

Observações:

i) Se numa proposição existem exatamente n símbolos proposicionais $(n \geq 1)$, então existem 2^n atribuições possíveis de valores de verdade a esses símbolos e, logo, 2^n linhas na sua tabela de verdade. Assim, podemos obter no máximo 2^{2^n} proposições distintas, a menos de equivalências, a partir de n símbolos proposicionais, pois para cada proposição construída a partir desses símbolos, existem, no máximo, 2^n atribuições, nas quais a proposição ou tem valor de verdade V ou tem valor de verdade F.

ii) Para cada proposição X que contém exatamente m símbolos proposicionais, existem muitas proposições com n símbolos proposicionais, $n > m$, equivalentes a X. Por exemplo, $(A \wedge B)$ é equivalente a $((A \wedge B) \wedge (C \Leftrightarrow C))$.

Até aqui vimos que S se constitui de um conjunto de símbolos a partir dos quais formamos certas expressões – as proposições. Um *sistema formal* é definido quando, além de um conjunto de símbolos e de regras de formação de sentenças (no caso do Cálculo Proposicional, proposições), existem regras de transformação com as quais as sentenças especiais, os teoremas, são criadas. As regras de transformação são:

i) um conjunto de sentenças iniciais, ditas axiomas;

ii) regras de inferência, pelas quais outros teoremas são criados, a partir dos axiomas.

Sejam X, Y, Z proposições de S. Então as seguintes proposições de S são axiomas:

i) $X \Rightarrow (Y \Rightarrow X)$

ii) $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Z))$

iii) $((\sim Y) \Rightarrow (\sim X)) \Rightarrow (((\sim Y) \Rightarrow X) \Rightarrow Y)$

iv) $(X \Leftrightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X))$

v) $((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)) \Rightarrow (X \Leftrightarrow Y)$

vi) $(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow ((\sim X) \vee Y)$

vii) $(\sim (X \vee Y)) \Leftrightarrow ((\sim X) \wedge (\sim Y))$

Definição. Uma proposição de S é um teorema de S se e só se é obtida por um número finito de aplicações das seguintes regras:

i) um axioma é um teorema de S;

ii) se X e $(X \Rightarrow Y)$ são teoremas de S então Y é um teorema de S.

Desse modo podemos falar do sistema formal S.

Considere, agora, um conjunto de proposições K e seja Y uma proposição de S.

Definição. Y é deduzível de K, em símbolos, $K \Rightarrow Y$, se e só se Y é um teorema de S ou, se não, existem proposições $X_1, ..., X_n$ em K tais que $(((X_1 \wedge X_2) \wedge ... \wedge X_n) \Rightarrow Y)$ é um teorema de S.

Definição. K é consistente se e só se existe uma proposição Y de S tal que Y não é deduzível de K.

É possível mostrar que se K é um conjunto de proposições consistente, então existe uma atribuição de valores verdade aos símbolos proposicionais que ocorrem nas proposições de K tal que o valor de verdade correspondente a cada proposição de K é V. Uma conseqüência disto é que se X é uma tautologia, então X é um teorema de S (a recíproca é óbvia).

4.4 Fórmulas abertas

Definição. Uma fórmula aberta é uma expressão $S(x)$ tal que, interpretada em um conjunto A, ou $S(a)$ é verdadeira ou $S(a)$ é falsa, para cada elemento $a \in A$.

Exemplo: Abaixo estão algumas fórmulas abertas, sobre os números naturais.

- $x+1>8$
- $x+5=9$
- x é primo
- x é um divisor de 10
- $x+1<1$

Definição. O conjunto verdade de uma fórmula aberta em A é o conjunto de todos os elementos $a \in A$ tais que $S(a)$ é uma sentença verdadeira.

Denotando por V_S o conjunto verdade de S em A, temos que

$$V_s = \{a \in A \ \text{ tal que } \ S(a) \ \text{ é verdadeira}\},$$

ou, simplesmente,

$$V_s = \{a \in A \,|\, S(a)\}.$$

Exemplo: O conjunto verdade de $x+1>8$

em $\mathbb{N}$ é $V_s = \{x \in \mathbb{N} \mid x+1>8\} = \{8,9,10,\ldots\}$

Exercício

Determine o conjunto verdade das seguintes fórmulas:

a) $x+5=9$, em $\mathbb{N}$;

b) x é um divisor de 10, em $\mathbb{N}$;

c) x é múltiplo de 3, em $\mathbb{Z}$ (o conjunto dos números inteiros);

d) $x^2-7x+12=0$, em $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais);

e) $3x-2>5$, em P (conjunto dos números inteiros pares);

f) $x^2+1<2$, em $\mathbb{R}$;

g) $\sqrt{x^2+1} = x-1$, em $\mathbb{R}$.

Observação:

1) Note que o conjunto verdade da fórmula aberta $x^2 \geq 0$ em $\mathbb{R}$ é o próprio $\mathbb{R}$, ou seja, $x^2 \geq 0$ é uma sentença verdadeira para TODO x em $\mathbb{R}$.

2) No item c) acima, nem todo número natural torna a sentença verdadeira e, portanto, o conjunto verdade não é todo o conjunto $\mathbb{N}$. Porém, EXISTEM alguns números naturais que tornam a sentença verdadeira, a saber, $3, 6, 9$, ...

4.5 Quantificação

O quantificador *existencial*, que é denotado por $\exists$, está associado a palavras como **para algum** e **existe(m)**.

Por exemplo, a sentença "Existe um número inteiro que é maior que zero" pode ser reescrita, simbolicamente, por $(\exists x \in \mathbb{Z}) x > 0$". A negação desta sentença é "Não existe um número inteiro maior que zero", que tem o mesmo valor de verdade que "Todos os números inteiros são menores ou iguais a zero", ou, ainda, "$(\forall x \in \mathbb{Z})\, x \leq 0$".

O quantificador *universal*, que é denotado por $\forall$, está associado a palavras como **todo** ou **qualquer** ou **cada**.

Assim, se $S(x)$ é uma fórmula aberta em um conjunto A,

$$\sim((\exists x \in A)\, S(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in A) \sim S(x))$$

é um axioma lógico, significando que os dois lados da implicação têm sempre o mesmo valor de verdade, quando interpretadas em A: ou ambas serão verdadeiras ou ambas, falsas. Outro axioma lógico é o seguinte

$$S(a) \Rightarrow (\exists x \in A)\ S(x),$$

supondo, agora, que a é uma constante do conjunto numérico A.

Exemplo: "$(1.000.001 > 1.000.000) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{Z})(x > 1.000.000)$"

Observe, também, que

$$\sim((\forall x \in A)\, S(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in A) \sim S(x))$$

Exemplo: "nem todo número inteiro é maior que zero", $\sim((\forall x \in \mathbb{Z})\, x > 0)$, é o mesmo que "existe um número inteiro que é menor ou igual a zero", ou seja, $(\exists x \in \mathbb{Z}, x \leq 0)$.

Definição: uma fórmula aberta $S(x)$, precedida de um quantificador sobre a variável x, é chamada de sentença. Uma fórmula sem variáveis também é chamada de sentença.

Exemplos:

a) $1 + 2 = 3$

b) $(\forall x \in \mathbb{N}), x + 1 > 0$

c) $(\exists y \in \mathbb{N}), y + 1 = 2$

d) $\log(1) = 0$

As fórmulas abertas podem ter mais de uma variável. Por exemplo, sejam H = {Jorge, Cláudio, Paulo}, M = {Suely, Carmen}. Seja $S(x, y)$ a fórmula aberta "x é irmão de y".

Então $S(x, y)$ é uma fórmula de duas variáveis.

Definição: toda fórmula aberta com duas (ou mais) variáveis precedidas por quantificadores, um para cada variável, é chamada de sentença.

Exemplos: a proposição

$$(\forall x \in H)(\exists y \in M)\, S(x,y)$$

pode-se ler "Para cada x em H existe pelo menos um y em M tal que x é irmão de y", o que é interpretada, em $H \times M$, do seguinte modo: cada homem de H é irmão de Suely ou de Carmem.

Já a proposição

$$(\exists y \in M)(\forall x \in H)\, S(x,y)$$

significa "que existe uma mulher em M que é irmã de todos os homens de H". Esses dois exemplos mostram que mudando a ordem dos quantificadores, obtêm-se proposições diferentes. A negação da proposição "Para cada x em H existe pelo menos um y em M tal que x é irmão de y", ou, simbolicamente,

$$(\forall x \in H)(\exists y \in M)\, S(x,y),$$

é "existe um x em H que não é irmão de nenhum y em M", ou ainda, "existe x em H tal que para todo y em M, x não é irmão de y", ou, simbolicamente,

$$(\exists x \in H)(\forall y \in M)(\sim S(x,y)).$$

Assim, se S é uma fórmula aberta de duas variáveis então

$$\sim ((\forall x \in A)(\exists y \in B)\, S(x,y)) \Leftrightarrow (\exists x \in A)(\forall y \in B)(\sim S(x,y)).$$

Isto significa que os dois lados da implicação têm sempre o mesmo valor de verdade em $A \times B$.

Além disso,

$$\sim ((\forall x \in A)(\forall y \in B)\, S(x,y)) \Leftrightarrow (\exists x \in A)(\exists y \in B)(\sim S(x,y)),$$

$$\sim ((\exists x \in A)(\exists y \in B)\, S(x,y)) \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in B)(\sim S(x,y))$$

e

$$\sim ((\exists x \in A)(\forall y \in B)\, S(x,y)) \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\exists y \in B)(\sim S(x,y)).$$

Exercícios

1) Seja $A = \{0,1,2,3,4,5\}$. Classifique as sentenças como verdadeiras ou falsas, justificando sua resposta.

   a) $(\forall x \in A)\, x + 2 > 4$

   b) $(\exists x \in A)\, x^2 - 1 = 3$

   c) $(\exists x \in A)\, 3x - 6 = 14$

   d) $(\forall x \in A)\, x - 5 < 1$

2) Escreva a negação das sentenças do exercício 1.

3) Sendo $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, coloque o quantificador adequado para que a fórmula se torne uma sentença verdadeira.

   a) $x + 4 = 8$

   b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

   c) $5x + 2 \geq 4$

   d) $-x^2 + 8x = 0$

4) Classifique as sentenças como verdadeiras ou falsas, justificando.

   a) $(\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{R})\, x + y = 3$

   b) $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{R})\, x + 2y = 3$

   c) $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{R})\, x - 4y > 0$

   d) $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{R})\, x^2 y^3 < 0$

5) Negue as proposições abaixo.

   a) Todo estudante é boa pessoa.

   b) Todos os pássaros têm asas e voam.

   c) Para cada número natural n, existe um número primo p tal que p é maior que n.

   d) $(\forall x \in \mathbb{R})\, x + 3 > 8$

   e) $(\exists x \in \mathbb{R})\, x - 2 = 5$

f) $((\forall x \in \mathbb{R})\, x+2 \leq 6) \wedge ((\exists x \in \mathbb{R})\, x^2 - 5 = 4)$ (o símbolo $\wedge$ denota o conectivo "e")

g) $((\exists\, x \in \mathbb{R})\, x^2 = 16) \vee ((\forall x \in \mathbb{R})\, x - 1 = 8)$ (o símbolo $\vee$ denota o conectivo "ou")

h) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(y)$

i) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists\, y \in \mathbb{R}) \log(xy) = \log(x) \cdot \log(y)$

j) $(\forall\, x \in \mathbb{R})(\exists\, y \in \mathbb{R})(3x + 4y = 7) \wedge (x > y)$

k) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x > -y^2) \vee (x < y)$

4.6 Exercícios Propostos

1) Negue as afirmações:

a) Esta rosa é vermelha e tem espinhos.

b) Hoje é segunda-feira.

c) x é um número par ou x é um número ímpar.

d) x não é um número primo e x é um número par.

e) Durmo e sonho ou, então, canto e danço.

2) Considerando as afirmações: A: Max não é bom motorista e B: Célia é boa cozinheira, escreva as proposições: $\sim A$ ou B; A e $\sim B$; $\sim A$ e $\sim B$; $A \Rightarrow B$; B e $\sim A$; $\sim B$ ou A; $\sim A$ ou $\sim B$.

3) Identifique hipótese e tese e dê a contra-positiva das afirmações abaixo:

a) Se a mulher dança tango, então o marido é torcedor do River Plate.

b) Se não está chovendo, então está nevando.

c) Se ela não atende ao telefone, então ela está passeando pela praia ou está regando as flores no jardim.

d) Se você bebe bastante água e não come carne, então você não tem olheiras.

e) Se Carlos for ao cinema, então, se Paula não for, Quincas irá.

f) Se César é ambicioso e Débora não é ciumenta, então César e Débora formam um casal ideal.

g) Humberto come seu chapéu se o Flamengo não ganhar um jogo.

h) Se x e y são números reais, e $x.y = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

i) Dois números naturais a e b são relativamente primos somente se o máximo divisor comum deles é 1.

j) Um triângulo é eqüilátero se todos os seus lados são iguais.

k) Duas retas distintas no espaço são paralelas se elas não são concorrentes e não são reversas.

l) Um número é racional se pode ser expresso como razão de inteiros a/b, com b diferente de zero.

m) Um inteiro a é divisível por um inteiro b somente se a é múltiplo de b.

n) Um número é múltiplo de 5 se seu algarismo das unidades é zero ou 5.

o) Se uma girafa tem dor de garganta, então ela não come acerola.

p) Um triângulo é retângulo se contém um ângulo de 90°.

q) Irei à praia desde que não chova.

r) Se uma ave não é um pelicano, então ela não come peixe.

s) Se x é um inteiro ímpar, então x é da forma $2k+1$ para algum k inteiro.

t) Se x é par e é primo, então x é igual a 2.

u) Se x é da forma $3k+1$ ou $3k+2$, para algum inteiro k, então x não é múltiplo de 3.

v) x é da forma $2k$ ou $2k+1$, para algum inteiro k, se x é inteiro.

w) Se não venta e não chove, Edmundo joga na Ressacada.

x) Se você é jardineiro, então sabe plantar e podar.

y) Se a lua está cheia, os vampiros saem de casa à noite.

z) Se você tem mais de 90 anos, a Academia do Chope lhe dá lições de aeróbica grátis.

4) Dê a recíproca das afirmações do exercício 3.

5) Negue as afirmações do exercício 3.

6) Negue as afirmações abaixo:

a) Se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares uma à outra, ou se elas dividem seus ângulos em duas partes iguais, então o paralelogramo é um losango.

b) Se um de dois números é um inteiro múltiplo de 3 e, se a soma dos dois números é um inteiro múltiplo de 3, então o outro número é múltiplo de 3.

c) Se um paralelogramo não é um losango, então suas diagonais não são perpendiculares uma à outra, ou elas dividem seus ângulos em duas partes iguais.

d) Se um número a é igual a zero ou um número b é igual a zero, então o número ab é igual a zero.

e) Se o número ab é diferente de zero, então, o número a é diferente de zero e o número b é diferente de zero.

f) Se o número a é maior que zero e o número b é maior que zero, então o número ab é maior que zero.

7) Negue as bi-condicionais:

a) Um número é múltiplo de 5 se, e somente se, é divisível por 5.

b) Uma figura plana é um paralelogramo se, e somente se, é um quadrado.

c) A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º se, e somente se, o triângulo é isósceles.

d) O número $a.b$ é igual a zero se, e somente se, o número a é igual a zero ou o número b é igual a zero.

8) Em cada um dos raciocínios abaixo, diga se a terceira afirmação é conseqüência das duas primeiras, usando a regra **Modus Ponens**.

Se $A \Rightarrow B$ é uma proposição verdadeira e A é uma proposição também verdadeira, então B é uma proposição verdadeira.

a) Se você esqueceu seu lápis, pode pegar um dos meus. Você esqueceu seu lápis. Logo, pode pegar um dos meus.

b) Se você vê manchas na sua frente, então você está olhando um tigre. Você está olhando um tigre. Logo, você vê manchas na sua frente.

c) Se você escova seu dente com Xampu Maravilha, então você não entendeu o comercial. Você entendeu o comercial. Logo, você não escova seus dentes com Xampu Maravilha.

d) Pedras que rolam não criam limo. Se as pedras não criam limo, então elas são lisas. Logo, se as pedras rolam, elas são lisas.

e) Se você lê Veja, então você gosta de gatos. Se você cria passarinhos, então não gosta de gatos. Logo, se você cria passarinhos, não lê Veja.

f) Se você andar debaixo de um coqueiro, provavelmente terá sua cabeça rachada. Quem vai a Fortaleza anda debaixo de coqueiros. Logo, se você for a Fortaleza terá sua cabeça rachada, provavelmente.

g) Picadinho é melhor do que nada. Nada é melhor do que feijoada. Logo, picadinho é melhor do que feijoada.

h) Se Pedro ganha no bingo, então Antônio bebe cerveja. Se Antônio bebe cerveja, sua namorada briga. Se a namorada briga, Antônio fica triste. Antônio não está triste. Logo, Pedro não ganhou no bingo.

i) Não posso ajudá-lo se eu não souber o que está errado e ainda não sei o que está errado. Logo, não posso ajudá-lo.

j) Se um cachorro é bravo, então ele late muito. Se um cachorro late muito, ele incomoda os vizinhos. Euclides é um cachorro bravo. Logo, ele incomoda os vizinhos.

9) Dê dois exemplos de proposições verdadeiras do tipo "se .. então" (em interpretações usuais), tais que a recíproca de uma seja verdadeira e a recíproca da outra seja falsa.

10) Considere os quadriláteros definidos abaixo:

- **Trapezóide** - quadrilátero sem lados paralelos.
- **Trapézio** - quadrilátero tendo exatamente dois lados paralelos.
- **Trapézio isósceles** - trapézio com dois lados opostos congruentes (e não paralelos).
- **Trapézio retângulo** - trapézio com ângulo reto.
- **Paralelogramo** - quadrilátero com dois pares de lados opostos paralelos.
- **Retângulo** - paralelogramo com ângulo reto.
- **Losango** - paralelogramo com todos os lados congruentes.
- **Quadrado** - retângulo e losango.

Represente num diagrama de Euler como se relacionam os quadriláteros definidos acima.

11) Resolva a equação: $\sqrt{x^2+1} = x-1$. Por que zero não é solução?

12) Considere a afirmação: "Se um triângulo é eqüilátero, então todos os seus lados são iguais". Discuta a veracidade da recíproca. O que você pode concluir sobre proposições que são definições?

Monty Python em busca do cálice sagrado (Monty Python and the Holy Grail)

13) O raciocínio abaixo foi extraído de um filme do grupo **Monty Python**, no qual há um julgamento em praça pública para se decidir se uma mulher A é feiticeira ou não.

"Feiticeiras são queimadas, assim como madeira. Basta ver então se A é de madeira. Para isso não adianta tentar construir uma ponte com A porque existem pontes de pedra. É melhor ver se A flutua, como a madeira. Como patos também flutuam, basta ver se A pesa o mesmo que um pato. Se isso acontecer A é feiticeira." Descubra todos os erros nesta cadeia de argumentos, se é que existe algum.

14) Negue as sentenças seguintes (com quantificadores):

a) Todo homem careca é barrigudo.

b) Existe uma árvore com 12 metros de altura.

c) Todos os números quadrados são não primos.

d) Existem mamíferos que são felinos.

e) Todo homem incompetente fracassa em ser feliz.

f) Alguns gnus são ferozes.

g) Para todo número inteiro x, se $x > 2$, então $x - 2 > 0$.

h) Se A, B e C são pontos colineares e B está entre A e C, então toda reta que passa por B corta o segmento AC.

i) Todo homem chora de tristeza ou de raiva.

j) Todo brasileiro é rico, é feliz e vive no Rio.

k) Toda resposta está certa e errada.

15) Verifique a veracidade das afirmações abaixo e faça a negação de cada uma delas:

a) $(\forall m \in \mathbb{Z})(\exists n \in \mathbb{Z})\, n \cdot n = m$.

b) $(\forall m \in \mathbb{Z})(\exists n \in \mathbb{Z})\, m \cdot m = n$.

c) $(\exists n \in \mathbb{Z})(\forall m \in \mathbb{Z})\, m > n$.

d) $(\forall m \in \mathbb{Z})(\exists n \in \mathbb{Z})\, m > n$.

e) $(\exists n \in \mathbb{Z})(\forall m \in \mathbb{Z})\, m \cdot m > n$.

16) Decida que conclusões são válidas:

a) Todos os girassóis são amarelos e alguns pássaros são amarelos. Logo, nenhum pássaro é um girassol.

b) Nenhum advogado é uma pessoa entusiasmada. Você é uma pessoa entusiasmada. Logo, você não é advogado.

c) Dicionários são úteis e livros úteis são valiosos. Logo, dicionários são valiosos.

d) Tudo o que ele fala é tolice. Toda tolice é desprezível. Logo, tudo que ele fala é desprezível.

e) Ninguém conquistou o mundo. Logo, alguém não conquistou o mundo.

f) Como todos os briques são braques, todos os braques são trecos e existem minerais que são briques, podemos concluir que existem minerais que são trecos.

g) Nenhum astro que brilha com luz própria é planeta. Todas as estrelas são astros dotados de luz própria. Logo, nenhuma estrela é planeta.

h) Alguns chimpanzés são agressivos. Alguns animais agressivos atacam o homem. Logo, alguns chimpanzés atacam o homem.

17) Deduza, se possível, alguma conclusão das sentenças abaixo:

a) Algumas lições são difíceis. O que é difícil necessita atenção.

b) Todos os britânicos são corajosos. Nenhum marinheiro é covarde.

c) Alguns sonhos são terríveis. Nenhum carneiro é terrível.

d) Nenhuma pessoa autoritária é popular. Simão é autoritário.

e) Nenhum bebê é estudioso. Todos os violonistas são estudiosos.

f) Todos os filósofos são lógicos. Todas as pessoas lógicas são distraídas.

g) Todo número natural é inteiro. O número 567 é um número natural.

h) Alguns santistas são surfistas. Alguns senadores são santistas.

i) A pressa é inimiga da perfeição. Todas as tartarugas são lentas.

j) Todos os homens são mortais. O presidente é homem.

k) Todas as borboletas podem voar. Alguns porcos não podem voar.

l) Bebês não são lógicos. Nenhuma pessoa descuidada pode treinar um crocodilo. Pessoas que não são lógicas são descuidadas.

m) Toda gildebênia é mancúspia. Nenhuma mancúspia é gorda.

n) Alguns violinistas têm longos dedos. Todas as pessoas de longos dedos têm enxaqueca.

o) Todo xintapó é calírio. Todo calírio é pedicular.

p) Todo gato de três cores é fêmea. Manhoso é um gato que tem três cores.

q) Todos os mamíferos são animais de sangue quente. Nenhum lagarto é animal de sangue quente.

r) Alguns insetos têm oito patas. Todos os insetos de oito patas são venenosos.

s) Alguns gatos são brancos. Alguns gatos são ferozes.

18) O romance Dom Quixote de la Mancha, de Miguel de Cervantes, fala-nos de uma ilha onde vigora uma lei curiosa. Um guarda pergunta a cada visitante: "Por que você vem aqui?" Se o visitante responder a verdade, está salvo. Se não, será enforcado. Um dia, um visitante respondeu: "Vim aqui para ser enforcado!" Conseguiremos saber o que aconteceu a ele?

Referências

[1] BEZERRA, Licio H. et al. *Introdução à Matemática.* Florianópolis: Ed. UFSC, 1995.

[2] MORTARI, Cezar A. *Introdução à Lógica.* São Paulo: UNESP, 2001.

[3] ABAR, Celina A.A.P. *Noções de Lógica Matemática*. Disponível em: <www.pucsp.br/~logica/>. Acesso em: 01 JUN 2009.

Sugestões de leitura

[1] DEWDNEY, A. K. *20 000 léguas matemáticas*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2000.

[2] GUZMAN, Miguel de. *Aventuras matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1991.

[3] KAPLAN, Robert. *O nada que existe*. Rio de Janeiro: Rocco, 2001.

[4] MORRIS, Richard. *Uma breve história do infinito*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

[5] OSSERMAN, Robert. *A magia dos números no universo*. São Paulo: Mercuryo, 1997.

[6] SMULLYAN, Raymond. *O enigma de Sherazade e outros incríveis problemas*: das "Mil e uma noites" à lógica moderna. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

Bibliografia comentada

GARDNER, Martin. *Divertimentos Matemáticos*. 4. ed. São Paulo: Ibrasa, 1998.

Martin Gardner assinava a coluna Mathematical Games, da revista Scientific American, nas décadas de 60 e 70. Tem vários livros editados em inglês. Em português, a editora portuguesa Gradiva publicou diversos títulos. Esse livro da editora brasileira IBRASA é para quem gosta especialmente de jogos e quer calcular ou conhecer, pelo menos, as possibilidades matemáticas de desenvolvimento de uma partida. O livro trata de variações do jogo da velha, apresenta o jogo chinês do NIM e muitas outras curiosidades, como variações de quadrados mágicos.

GARDNER, Martin. *O festival Mágico da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 1994.

Poliminós, números perfeitos, números amigáveis, números sociáveis, aritmética digital, árvores. Você encontra todos estes assuntos no livro.

MALBA TAHAN. *O homem que calculava*. 56. ed. Rio de Janeiro: Record, 2002.

O nosso querido matemático brasileiro escreve um romance sobre um viajante por terras estranhas, chamado de "o calculista". São contos interligados, no estilo dos "Contos de mil e uma noites", cheios de califas, mulheres com burcas, comerciantes, sempre com algum problema matemático para ser resolvido. E o nosso herói resolve todos, com soluções cheias de humor, como os contos de Nasruddin. Não deixe de tê-lo em sua biblioteca particular.