

Aula 01

(Barbosa. Geometria Euclidiana Plana)

1 Plano

PLANO: na geometria plana, nosso espaço, onde fazemos geometria é chamado o PLANO. Porém, embora intuitivamente achamos que sabemos o que é um plano, na matemática devemos definir ele rigorosamente.

Para nós, um PLANO é um conjunto não-vazio.

A medida que formos impondo os AXIOMAS ou postulados de Euclides, o PLANO e os objetos geométricos que o habitam começarão a tomar a forma do que intuitivamente entendemos como plano, retas, etc.

Denotaremos o PLANO por letras latinas ou gregas (ex.: P , p , π , Π).

PONTOS: os elementos do conjunto PLANO serão chamados de PONTOS.

Denotaremos usualmente PONTOS por letras latinas maiúscula (ex.: A , B , C , etc.).

LUGAR GEOMÉTRICO: Qualquer subconjunto do PLANO será chamado um LUGAR GEOMÉTRICO ou uma FIGURA GEOMÉTRICA.

2 Axiomas (ou Postulados) de Incidência

O primeiro grupo de axiomas é constituído pelos **axiomas de incidência**.

Axioma I_1 : Qualquer que seja a reta existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem à reta.

O primeiro axioma acima está impondo três condições:

- (i) Se existir retas no meu plano, então o plano possui ao menos dois pontos;
- (ii) Uma reta é um subconjunto não-vazio do plano;
- (iii) A reta não contém todo o plano.

Axioma I_2 : Dados dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.

Este segundo axioma está impondo duas condições:

- (i) Se existir retas no meu plano, então o plano possui três pontos ou mais;

Quando duas retas têm um ponto em comum diz-se que elas se *intersectam* ou que elas se cortam naquele ponto.

Retas que se intersectam em algum ponto são chamadas **retas concorrentes** e retas que não se intersectam são chamadas **retas paralelas**.

Proposição 1.1 Duas retas distintas ou não se intersectam ou se intersectam em um único ponto.

Prova: Sejam m e n duas retas distintas. Suponha por contradição que m e n se intersectam em mais de um ponto. Então, existem (ao menos) dois pontos distintos A e B que pertencem simultaneamente à reta m e à reta n . Pelo axioma I_2 existe uma **única** reta que passa por A e B , logo m e n devem ser a mesma reta o que contradiz que sejam retas distintas.

Portanto, não pode haver mais do que um ponto de intersecção em duas retas distintas.

□

Denotaremos retas por letras minúsculas (r, a, m, n, \dots) ou quando nos referirmos a uma reta que passa pelos pontos A e B , denotaremos

$$R_{AB} \quad \text{ou} \quad \overleftrightarrow{AB}.$$

3 Axiomas (ou Postulados) de Ordem

Axioma II_1 : Dados três pontos distintos de uma reta, um e apenas um deles localiza-se entre os outros dois.

O Axioma II_1 começa a delinear realmente uma noção geométrica no sentido de localização dos pontos.

Definição 1.2 O conjunto constituído por dois pontos A e B e por todos os pontos da reta \overleftrightarrow{AB} que se encontram entre A e B é chamado segmento de reta de A a B . Os pontos A e B são denominados extremos ou extremidades do segmento.

Denotaremos o segmento de reta de A a B por

$$AB \quad \text{ou} \quad \overline{AB}.$$

Definição 1.3 Se A e B são pontos distintos, o conjunto constituído pelos pontos do segmento \overline{AB} e por todos os pontos C tais que B encontra-se entre A e C , é chamado de semi-reta de origem A contendo o ponto B .

Denotaremos a semi-reta iniciando em A e passando por B por

$$S_{AB} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AB} \quad \text{ou} \quad \overleftarrow{BA}.$$

O ponto A é então denominado origem da semi-reta \overrightarrow{AB} .

Axioma II_2 : Dados dois pontos A e B distintos, sempre existem: um ponto C que está entre A e B ; um ponto D tal que B está entre A e D .

O Axioma II_2 impõem que:

- (i) uma reta possui infinitos pontos (e logo o plano também possui infinitos pontos);
- (ii) um segmento de reta \overline{AB} pode ser estendido para semi-retas \overrightarrow{AB} e \overleftarrow{AB} ou para uma reta \overleftrightarrow{AB} .

OBSERVAÇÕES:

1. A notação que estamos usando pode variar de autor para autor, então sempre tem de se ter cuidado, quando for estudar em um livro, em verificar como aquele autor está notando cada objeto (plano, reta, ponto, etc.);
2. Um exercício interessante para entender mais profundamente os conceitos aqui apresentados, é pegar o livro de Geometria I do EaD (link na descrição do grupo de WhatsApp) e comparaer cada axioma que vimos com os Postulados 1 e 2 lá apresentados.
3. Outro exercício interessante é tentar definir planos , retas, etc. que atendem todos ou somente alguns dos axiomas acima, mas que não sejam planos e retas no sentido que estamos acostumados.