Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Curso de Matemática - Licenciatura

Fundamentos da Aritmética
Lista I — Soma e produto nos naturais

Professor: Prof. Paulinho Demeneghi
Tutora: Profa. Karina Gomez Pacheco
Aluno: João Lucas de Oliveira
Data: 24 de Agosto de 2034

1.

Complete a demonstração da proposição abaixo, indicando qual axioma foi empregado em cada passo.

Proposição. Para quaisquer números naturais a, b, c, tem-se que:

$$(a+b)+c = (a+c)+b.$$

Demonstração. Tome números naturais a, b, c arbitrários. Temos:

$(a+b)+c = a+(b+c)$	pelo axioma **A1**, associatividade da adição
$a+(b+c) = a+(c+b)$	pelo axioma **A2**, comutatividade da adição, pois $b+c=c+b$
$a+(c+b) = (a+c)+b$	pelo axioma **A2**, comutatividade da adição, pois $b+c=c+b$, e axioma **A1**, associatividade da adição, pois $a+(c+b)=(a+c)+b$

Logo, $(a+b)+c = (a+c)+b$, como queríamos demonstrar.

2.

Complete cada uma das demonstrações abaixo, preenchendo as lacunas.

(a) **(Resolvido) Proposição (Lei do cancelamento da adição à esquerda).** Para quaisquer números naturais a, b, c, se $c + a = c + b$, então $a = b$.

Demonstração. Tome a, b, c arbitrários. Suponha que

$$c + a = c + b \tag{1}$$

Queremos mostrar que $a = b$. De fato, temos que

$$\begin{aligned} a + c &= c + a && \text{pelo axioma A2 — comutatividade da adição} \\ c + a &= c + b && \text{pela equação (1)} \\ c + b &= b + c && \text{pelo axioma A2 — comutatividade da adição} \end{aligned}$$

Portanto, é verdade que $a + c = b + c$. A lei do cancelamento da adição à direita (A4) garante que $a = b$. Isto completa a demonstração.

(b) **Proposição.** Para quaisquer números naturais a, b, se $a = 0$ e $b = 0$, então $a+b = 0$.

Demonstração. Tome a, b arbitrários. Suponha que $a = 0$ e $b = 0$.
Temos que

$$\begin{aligned} a + b &= a + 0 && \text{já que } b = 0 \\ a + 0 &= a && \text{pelo axioma A3 — elemento neutro da adição} \\ a &= 0 && \text{por hipótese} \end{aligned}$$

Logo, $a + b = 0$, como queríamos provar.

(c) **Proposição.** Para quaisquer números naturais a e b, se $a + b = a$, então $b = 0$.

Demonstração. Tome a, b arbitrários. Suponha que $a + b = a$. Temos que

$$a + b = a \quad \text{por hipótese}$$

$$a = a + 0 \quad \text{pelo axioma A3 — elemento neutro da adição}$$

Logo, $a+b = a+0$. Podemos agora empregar o **axioma A2 — comutatividade da adição onde teremos** $b+a = 0+a$ e então usamos **axioma A4 — cancelamento da adição à esquerda** para cancelar a em ambos os lados, e obter $b = 0$. Isto completa a demonstração.

3.

Escreva uma demonstração para cada uma das seguintes proposições.

(a) Para quaisquer números naturais a, b, c, se $a + (b + c) = 0$, então $a = 0$, $b = 0$ e $c = 0$.

Demonstração. Tome a, b, c arbitrários. Suponha que

$$a + (b + c) = 0.$$

Aplicando o **Axioma A5** (cancelamento da adição), temos:

$$a = 0 \quad \text{e} \quad b + c = 0.$$

Agora, aplicamos novamente o **Axioma A5** à igualdade $b + c = 0$, e obtemos:

$$b = 0 \quad \text{e} \quad c = 0.$$

Portanto, $a = 0$, $b = 0$ e $c = 0$, como queríamos demonstrar.

(b) Para quaisquer números naturais a, b, c, se $a + (b + c) = c$, então $a = 0$ e $b = 0$.
Demonstração. Tome a, b, c arbitrários. Suponha que

$$a + (b + c) = c.$$

Pelo axioma **A1** (associatividade da adição), temos:

$$(a + b) + c = c.$$

Pelo axioma **A3** (elemento neutro da adição), temos que:

$$c = 0 + c,$$

então podemos escrever:

$$(a + b) + c = 0 + c.$$

Pelo **Axioma A4** (cancelamento da adição à direita), concluímos:

$$a + b = 0.$$

Finalmente, pelo **Axioma A5** (se $a + b = 0$, então $a = 0$ e $b = 0$), obtemos:

$$a = 0 \quad \text{e} \quad b = 0,$$

como queríamos demonstrar.

4.

Use os axiomas A1–A5, M1–M5 e D para passar, justificando completamente, da primeira para a segunda expressão fornecida em cada item. Em cada etapa de uma resolução, use um axioma no máximo uma vez (no exemplo abaixo, observe como o axioma M2 foi usado duas vezes seguidas, separadamente), ou explicite o resultado de no máximo uma operação.

Em cada item, encontre três sequências diferentes de etapas que nos permitem ir da primeira para a segunda expressão.

O objetivo desse exercício é ilustrar que mesmo manipulações simples, que por vezes efetuamos de cabeça, costumam ser o resultado de uma série de pequenas etapas, efetuadas em sucessão. Aprender a desacelerar a cabeça para perceber cada uma dessas pequenas etapas é um bom exercício para disciplinar o raciocínio, algo que precisamos para trabalhar bem com ideias progressivamente mais complexas em Matemática.

(a) De $2 \cdot 3 + 8$ para $2 \cdot (3 + 4)$.

Resolução: (apenas uma maneira, encontre mais duas) Temos que

- $2 \cdot 3 + 8 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$ pois $8 = 2 \cdot 4$
- $2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4$ por M2 — lei da comutatividade da multiplicação
- $3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2$ por M2 — lei da comutatividade da multiplicação
- $3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = (3 + 4) \cdot 2$ por D — lei da distributividade à direita
- $(3 + 4) \cdot 2 = 2 \cdot (3 + 4)$ por M2 — lei da comutatividade da multiplicação

(b) De $30 + 4 \cdot 5$ para $5 \cdot (8 + 2)$.

Resolução: Temos que

- $30 + 4 \cdot 5 = 5 \cdot 6 + 4 \cdot 5$ pois $30 = 5 \cdot 6$
- $5 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 6 \cdot 5 + 4 \cdot 5$ por M2 — comutatividade da multiplicação
- $6 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = (6 + 4) \cdot 5$ por D — distributividade à direita
- $(6 + 4) \cdot 5 = 10 \cdot 5$ pois $6 + 4 = 10$
- $10 \cdot 5 = 5 \cdot 10$ por M2 — comutatividade da multiplicação
- $5 \cdot 10 = 5 \cdot (8 + 2)$ pois $10 = 8 + 2$

(c) De $((7 + 6) + 5) + 0$ para $(4 + 7) + 7$.

Resolução: Temos que

- $((7 + 6) + 5) + 0 = (7 + (6 + 5)) + 0$ por A1 — associatividade
- $(7 + (6 + 5)) + 0 = 7 + ((6 + 5) + 0)$ por A1 — associatividade
- $((6 + 5) + 0) = (6 + 5)$ por A3 — elemento neutro da adição
- $7 + (6 + 5) = 7 + (4 + 7)$ pois $6 + 5 = 11 = 4 + 7$
- $7 + (4 + 7) = (7 + 4) + 7$ por A1 — associatividade
- $(7 + 4) + 7 = (4 + 7) + 7$ por A2 — comutatividade da adição

(d) De $a \cdot 3 + 4 + a \cdot 5$ para $12 \cdot a$. (Neste item, a representa um número natural.)

Resolução: Temos que

- $a \cdot 3 + 4 + a \cdot 5 = a \cdot 3 + a \cdot 5 + 4$ por A2 — comutatividade da adição
- $a \cdot 3 + a \cdot 5 + 4 = a \cdot (3 + 5) + 4$ por D — distributividade à direita
- $a \cdot (3 + 5) + 4 = a \cdot 8 + 4$ pois $3 + 5 = 8$
- $a \cdot 8 + 4 = 12 \cdot a$ pois $8 = 12$

5.

Escreva uma demonstração para cada uma das seguintes proposições.

(a) **Proposição (Unicidade do elemento neutro da multiplicação sobre $\mathbb{N}$).** Para qualquer número natural e, se para todo número natural a tem-se que

$$a \cdot e = a \quad \text{e} \quad e \cdot a = a,$$

então $e = 1$.

Demonstração. Suponha que existe $e \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $a \in \mathbb{N}$,

$$a \cdot e = a \quad \text{e} \quad e \cdot a = a.$$

Queremos provar que $e = 1$.
Tome $a \cdot e = a$.
Pelo axioma M3, temos que

$$a \cdot e = a \cdot 1$$

Entao, pelo axioma M2 de comutatividade, temos que

$$e \cdot a = 1 \cdot a$$

Logo, pelo axioma M4 de cancelamento, temos que

$$e = 1$$

(b) **Proposição (Lei do cancelamento da multiplicação à esquerda).** Para quaisquer números naturais a e b, para qualquer número natural não nulo c, se $c \cdot a = c \cdot b$, então $a = b$.

Demonstração. Tome $a, b, c \in \mathbb{N}$ arbitrários. Suponha que

$$c \cdot a = c \cdot b.$$

Queremos provar que $a = b$.
Tome $c \cdot a = c \cdot b$.
Pelo axioma M2 de comutatividade, temos que

$$a \cdot c = b \cdot c$$

Logo, pelo axioma M4 de cancelamento, temos que

$$a = b$$

(c) **Proposição.** Para quaisquer números naturais a, b, c, se $a = b$, então $a \cdot c = b \cdot c$.

Demonstração. Tome $a, b, c \in \mathbb{N}$ arbitrários. Suponha que

$$a = b.$$

Queremos provar que $a \cdot c = b \cdot c$.
Logo, pelo inverso do axioma M4 de cancelamento, temos que

$$a \cdot c = b \cdot c$$

(d) **Proposição (Lei da distributividade à esquerda).** Para quaisquer números naturais a, b, c, tem-se que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
Demonstração. Tome $a, b, c \in \mathbb{N}$ arbitrários. Suponha que

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Queremos provar que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
Logo, pelo axioma D de distributividade à direita, temos que

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot b + a \cdot c$$

(e) **Proposição.** Para qualquer número natural a, tem-se que $0 \cdot a = 0$.
Demonstração. Tome $a \in \mathbb{N}$ arbitrário. Suponha que

$$0 \cdot a = 0$$

$$(0 + 0) \cdot a = 0$$

Logo, pelo axioma D de distributividade à direita, temos que

$$0 \cdot a + 0 \cdot a = 0$$

Logo, pelo axioma A5 de soma zero só se ambos forem zero temos que

$$0 \cdot a = 0$$