Aula 02

(Barbosa. Geometria Euclidiana Plana)

Considere uma reta m e dois pontos A e B que não pertencem a esta reta. Diremos que A e B *estão em um mesmo lado da reta* m se o segmento AB não a intercepta.

Definição 1.4: Sejam m uma reta e A um ponto que não pertencem a m. O conjunto constituído pelos pontos de m e por todos os pontos B tais que A e B estão em uma mesmo lado da reta m é chamado de *semi-plano* determinado por m contendo A, e será representado por P_{mA}.

Axioma II$_3$. Uma reta m determina exatamente dois semi-planos distintos cuja interseção é a reta m.

Axiomas sobre Medição de Segmentos

Axioma III$_1$. A todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se e só se os pontos são coincidentes.

Dados os pontos A e B denotaremos esse número real associado a eles por AB.

Axioma III$_2$. Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.

Estaremos nessas notas denotando $\overline{AB}$ ao segmento de reta entre A e B e por AB ao número associado aos pontos A e B que serão interpretados como a distância entre os pontos ou como o comprimento do segmento $\overline{AB}$.

Observação. A noção de distância é uma das noções mais básicas da geometria. Pelo que já vimos ela satisfaz às seguintes propriedades:

i. Para quaisquer dois pontos A e B do plano, tem-se $AB \geq 0$. Além disso, $AB = 0$ se e somente se $A = B$.

ii. Para quaisquer dois pontos A e B tem-se que $AB = BA$. Uma outra importante propriedade da distância é a desigualdade triangular.

iii. Para quaisquer três pontos do plano A, B e C, têm-se $AC \leq AB + BC$. Igualdade ocorre se e somente se C pertence ao intervalo AB.

Axioma III$_3$. Se o ponto C encontra-se entre A e B então

$$AC + CB = AB.$$

Proposição 2.1: Se, em uma semi-reta S_{AB}, considerarmos um segmento AC com $AC < AB$, então o ponto C estará entre A e B.

Prova: Como os pontos A, B e C estão na semi-reta S_{AB}, pelo Axioma II_1 um e apenas um deles se encontra entre os outros dois.

Daí:

• como A é a origem da semi-reta então A não pode estar entre B e C.

• se o ponto B estivesse entre A e C então, pelo axioma III_3, teríamos $AB + BC = AC$ e, como consequência, $AB < AC$, contrariando a hipótese que $AC < AB$.

Portanto, a única opção que resta é o ponto C estar entre A e B.

□

Teorema 2.2: Sejam A, B e C pontos distintos de uma mesma reta cujas coordenadas são, respectivamente, a, b e c. O ponto C está entre A e B se e só se o número c está entre a e b.

Prova: Se C está entre A e B então, pelo axioma III_3, temos

$$AC + CB = AB,$$

ou seja

$$|c - a| + |b - c| = |a - b|.$$

Vamos analisar possibilidades:

• se $a < b$, então $|a - b| = b - a$ e como $|c - a| + |b - c| = |a - b| = b - a$ então

$$|c - a| < b - a \quad \text{e} \quad |b - c| < b - a.$$

Daí, $c - a < b - a$ e $b - c < b - a$. Portanto, $c < b$ e $a < c$. Portanto, nesse caso c está entre a e b.

• se $b < a$ pode ser analisado de maneira análoga ao caso anterior, isto é, teremos $|a - b| = b - a$ e como $|c - a| + |b - c| = |a - b| = a - b$ então

$$|c - a| < a - b \quad \text{e} \quad |b - c| < a - b.$$

Daí, $a - c < a - b$ e $c - b < a - b$. Portanto, $c > b$ e $a > c$. Portanto, também nesse caso c está entre a e b.

Vejamos agora que se o número c está entre os números a e b então o ponto C entre os pontos A eB. De fato, se $a < c < b$ então

$b - a = |b - a|$, $c - a = |c - a|$ e $b - c = |b - c|$. Daí,

$$|c - a| + |b - c| = c - a + b - c = b - a = |b - a| = |a - b|$$

Daí $AC + CB = AB$.

Pelo Axioma II_1 um dos três pontos (A,B e C) está entre os outros dois. Examinemos novamente os casos possíveis:

• se B estivesse entre A e C, então pela Proposição 2.1 teríamos $AB + BC = AC$. Porém sabemos que $AC + CB = AB$, isto é, $AC = AB - CB$. Daí,

$$AB + BC = AC = AB - BC$$

e portanto

$$2BC = 0.$$

Mas isso significa que $BC = 0$ contradizendo que B e C são pontos disntintos. Portanto B não pode estar entre A e C.

• se A estivesse entre B e C, novamento pela Proposição 2.1 teríamos $BA + AC = BC$, e como $AC + CB = AB$, isto é, $CB = AB - AC$ seguiria que

$$BA + AC = BC = AB - AC$$

e portanto

$$2AC = 0,$$

contradizendo que A e C são pontos disntintos. Portanto A não pode estar entre B e C.

Assim, a única possibilidade que resta é que C esteja entre A e B.

$\square$

Definição 2.3 Chamamos de ponto médio do segmento $\overline{AB}$ a um ponto C deste segmento tal que $AC = CB$.

Teorema 2.4 Um segmento tem exatamente um ponto médio.

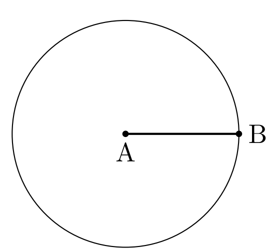
Prova (Existência) Sejam a e b as coordenadas ddos [ontos A e B, respectivamente.

Considere o número $c = (a + b)/2$. De acordo com o Axioma III_2 existe um ponto C da reta que tem c por coordenada. Também pelo Axioma III_2 temos que $AC = |c - a|$ e $BC = |c - b|$. Como c foi deifnido sendo a média de a e b, temos que $AC = BC$. Por outro lado, como $a < c < b$, pelo Teorema 2.2, C está entre A e B, sendo portanto ponto médio do segmento.

(Unicidade) Existe somente um número c tal que c-a=b-c, que é a média aritmética de a e b. Pelo Axioma III_2 existe somente um ponto da reta R_{ab} correspondente ao número c. O que prova a unicidade do ponto médio.

$\square$

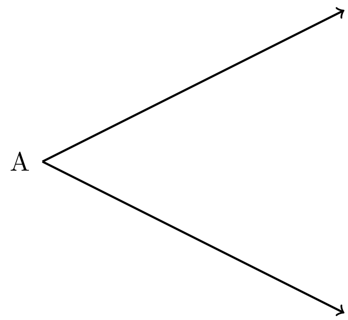
Definição 2.5 Seja A um ponto do plano e r um número real positivo. O *círculo* de centro A e raio r é o conjunto constituído por todos os pontos B do plano tais que $AB = r$.



O Axioma III_2 nos garante que podemos traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio não-negativo.

Axiomas sobre Medição de Ângulos

Definição 3.1 Chamamos de ângulo a *figura formada por duas semi-retas* S_{AB} *e* S_{AC} *com a mesma origem.*

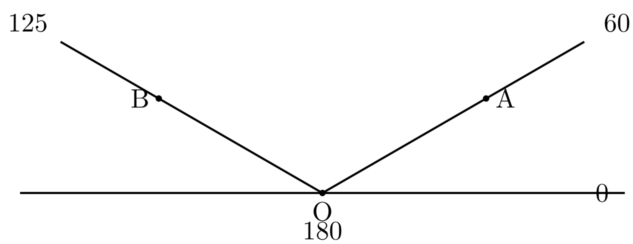


As semi-retas são chamadas de *lados* do ângulo e a origem comum, de *vértice* do ângulo. Um ângulo formado por duas semi-retas distintas de uma mesma reta é chamado de *ângulo raso.*

Axioma III$_4$ Todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero. A medida de um ângulo é zero se e somente se ele é constituído por duas semi-retas coincidentes.

Definição 3.2. Diremos que uma semi-reta *divide* um semi-plano se ela estiver contida no semi-plano e sua origem for um ponto da reta que o determina.

Axioma III$_5$. É possível colocar, em correspondência biunívoca, os números reais entre zero e 180 e as semi-retas de mesma origem que dividem um dado semi-plano, de modo que a diferença entre este número seja a medida do ângulo formado pelas semi-retas correspondentes.



Notação:

$A\hat{O}B$ para denotara medida do ângulo entre S_{OA} e S_{OB};

Simplesmente $\hat{O}$ para denotar a medida do ângulo que duas semi-retas formam no ponto O;

Uma letra grega (por ex., α) para denotar a medida do ângulo que duas semi-retas formam em algum ponto.

Definição 3.3 Diremos que uma semi-reta divide um semi-plano se ela estiver contida no semi-plano e sua origem for um ponto da reta que o determina.

Definição 3.4 Sejam S_{OA}, S_{OB} e S_{OC} semi-retas de mesma origem. Se o segmento $\overline{AB}$ interceptar S_{OC} diremos que S_{OC} divide o ângulo $A\hat{O}B$.

Axioma III$_6$ Se uma semi-reta S_{OC} divide um ângulo $A\hat{O}B$, então

$$A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}B.$$

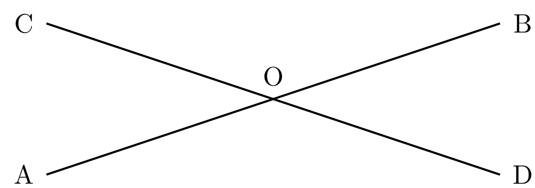
Definição 3.5 Dois ângulos são ditos suplementares *se a soma de suas medidas é* $180°$. O suplemento de um ângulo é o ângulo adjacente ao ângulo dado obtido pelo prolongamento de um de seus lados.

Sejam A, B, C e D quatro pontos distintos e suponha que as retas R_{AB} e R_{CD} se interceptam no ponto O.

Então dizemos que:

- os ângulos $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$ são **opostos pelo vértice**

- os ângulos $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$ são **opostos pelo vértice**



Proposição 3.6 Ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.

Prova: De fato, se $A\hat{O}B$ e $D\hat{O}C$ são ângulos opostos pelo vértice, então eles têm o mesmo suplemento: $A\hat{O}D$. Logo

$$A\hat{O}B + A\hat{O}D = 180°$$

$$D\hat{O}C + A\hat{O}D = 180°$$

Portanto $A\hat{O}B = 180° - A\hat{O}D = D\hat{O}C$.