Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Curso de Matemática - Licenciatura

Fundamentos da Aritmética
Lista III — Divisibilidade nos naturais

Professor: Prof. Paulinho Demeneghi
Tutor: Profa. Karina Gomez Pacheco
Aluno: João Lucas de Oliveira
Data: 08 de Setembro de 2025

Questão 1 – Prove que as seguintes sentenças são verdadeiras:

(a) 5 é mínimo do conjunto $S = \{44, 12, 27, 5\}$.

Resposta:

- 5 é o mínimo do conjunto, pois:
  - $5 \leq 12$, pois $12 = 5 + 7$.
  - $5 \leq 27$, pois $27 = 5 + 22$.
  - $5 \leq 44$, pois $44 = 5 + 39$.

(b) 44 não é mínimo do conjunto $S = \{44, 12, 27, 5\}$.

Resposta:

- $\neg(44 \leq 12)$, pois $12 \neq 44 + x$.

Questão 2 – Dados S um subconjunto de $\mathbb{N}$ e m um elemento de S quaisquer, dizemos que m é um máximo de S caso a seguinte sentença seja verdadeira:

Dados S um subconjunto de $\mathbb{N}$ e m um elemento de S quaisquer, dizemos que m é um máximo de S caso a seguinte sentença seja verdadeira:

Resposta:

(a) Unicidade: suponha que m e m' sejam máximos de S. Como m é máximo, para todo $x \in S$ vale $x \leq m$; em particular, $m' \leq m$. Analogamente, de m' ser máximo, obtemos $m \leq m'$. Logo, $m = m'$. Portanto, pela propriedade antissimétrica, temos que $m = m'$.

(b) Exemplo sem máximo: $S = \{x, y \in \mathbb{N} \mid x = 2 \cdot y + 0\}$ apenas os pares.

Questão 3 – Explique por que 5 é um divisor de 30.

Resposta: Pela definição, $5 \mid 30$ se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $30 = 5k$. Como $30 = 5 \cdot 6$, basta tomar $k = 6$. Logo, $5 \mid 30$.

Questão 4 – Explique por que 3 não divide 5.

Dica: Verifique que $3 \mid 3$ e que $2 < 3$ combinado ao fato de que $5 = 3 + 2$.

Resposta: Se $3 \mid 5$, então existiria $k \in \mathbb{N}$ tal que $5 = 3k$. Pela divisão euclidiana, $5 = 3 \cdot 1 + 2$ com resto $2 \neq 0$, logo tal k não existe. Equivalentemente, de $5 = 3 + 2$ e do fato de que múltiplos de 3 são fechados por soma, concluiríamos que 2 seria múltiplo de 3, o que é falso pois $0 < 2 < 3$. Portanto, $3 \nmid 5$.

Questão 5 – Decida o valor lógico de cada uma das sentenças abaixo, apresentando demonstrações que suportem suas conclusões.

(a) 0 é múltiplo de 16.

(b) 16 divide 0.

(c) 0 é divisor de 16.

(d) 16 não é divisível por 0.

Resposta:

(a) Verdadeiro. Por definição, 0 é múltiplo de 16 pois $0 = 16 \cdot 0$.

(b) Verdadeiro. Temos $16 \mid 0$ porque $0 = 16 \cdot 0$.

(c) Falso. Dizer $0 \mid 16$ significaria existir $k \in \mathbb{N}$ com $16 = 0 \cdot k$, o que é impossível.

(d) Verdadeiro. Não existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $16 = 0 \cdot k$; logo 16 não é divisível por 0.

Questão 6 – Para quaisquer números naturais a e b, se $a|b$ e $a \neq 0$, então existe um único número natural c de modo que $b = ac$.

Observação: repare que a existência de um tal número natural c é dada pela definição de $a|b$. O "novo" aqui é a unicidade.

Resposta (unicidade): Se $b = ac$ e também $b = ad$ com $c, d \in \mathbb{N}$ e $a \neq 0$, então $ac = ad$. Pela lei do cancelamento em $\mathbb{N}$ (ou, equivalentemente, como não há divisores de zero em $\mathbb{N}$), conclui-se que $c = d$. Logo, tal c é único.

Questão 7 – Escreva uma demonstração para cada uma das seguintes proposições.

(a) **Proposição.** Para qualquer número natural a, se a é divisível por 18, então a é divisível por 3.

(b) **Proposição.** Para quaisquer números naturais a, b e c, se $a|b$, então $a|(bc)$.

(c) **Proposição.** Para quaisquer números naturais a, b e c, se $a|b$ e $a|c$, então para quaisquer números naturais x e y tem-se que $a|(bx + cy)$.

Resposta:

(a) Se $18 \mid a$, então existe k com $a = 18k = (3 \cdot 6)k = 3(6k)$; logo $3 \mid a$.

(b) Se $a \mid b$, escreva $b = ak$. Então $bc = a(kc)$, isto é, $a \mid bc$.

(c) Se $a \mid b$ e $a \mid c$, existem k, ℓ tais que $b = ak$ e $c = a\ell$. Para quaisquer x, y, temos $bx + cy = a(kx) + a(\ell y) = a\,(kx + \ell y)$; portanto, $a \mid (bx + cy)$.

Questão 8 – Se um número natural é divisor de um produto, podemos afirmar que ele é também divisor dos fatores? Justifique.

Resposta: Não, apenas nos casos de números primos onde temos o Lema de Euclides:

$$\text{Se } p \text{ é primo e } p \mid (ab), \text{ então } p \mid a \text{ ou } p \mid b.$$

Mas se ele não for primo pode falhar, como no caso do

$$2 \mid (3 \cdot 4) \quad \text{onde} \quad 3 \cdot 4 = 12, \quad \text{e} \quad 2 \mid 12.$$

Mas

$$2 \nmid 3.$$

Questão 9 – Se um número natural é divisor de uma soma, podemos afirmar que ele é também divisor das parcelas? Justifique.

Resposta: Não, em geral não podemos afirmar isso. Exemplo:

$$4 \mid (6+2) \quad \text{pois } 6+2=8 \quad \text{e} \quad 4 \mid 8,$$

mas

$$4 \nmid 6 \quad \text{e} \quad 4 \nmid 2.$$

Portanto, se $a \mid (b+c)$, não podemos concluir que $a \mid b$ nem que $a \mid c$.
A única afirmação verdadeira é a seguinte:

$$\text{Se } a \mid b \text{ e } a \mid c, \quad \text{então } a \mid (b+c).$$

Ou seja, a recíproca não é válida.