Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Curso de Matemática - Licenciatura

Geometria I
Lista II — Axiomas de Incidência, Ordem, Medição de Segmento, Medição de ângulo

Professor: Prof. Marcelo Sobottka
Tutor: Prof. Marcos Fabiano Firbida Eduardo
Aluno: João Lucas de Oliveira
Data: Setembro de 2025

Questão 1 — Para cada caso abaixo, indique quais dos axiomas são (ou podem ser) satisfeitos e quais não podem ser satisfeitos:

(i) **PLANO**: semi-esfera sem a linha do equador; **RETAS**: arcos de círculo máximo contidos na semi-esfera.

Resposta:

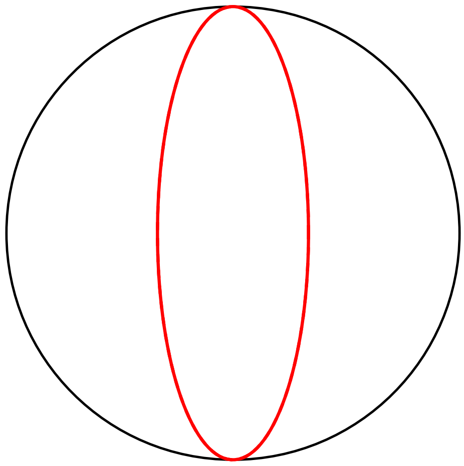
- **Axioma I1:** Sim, temos pontos pertencentes a retas e pontos não perntencem a reta e uma reta nunca sera o plano todo.
- **Axioma I2:** Não, pois caso tenha dois pontos alinhados horizontalmente, não existe uma reta que os contenha.
- **Axioma II1:** Sim, pois não temos um círculo completo, para que possa existir uma nova ordenação de cada reta.
- **Axioma II2:** Sim, pois como a linha do equador não pertence ao nosso plano sempre poderemos ter um ponto D além do nosso ponto B.
- **Axioma II3:** Sim, pois cada reta é um arco passando pelo nosso ponto central, isso faz com que cada plano seja $1/4$ de uma esfera.

(ii) **PLANO**: conjunto Q dos números racionais; **RETAS**: subconjuntos de Q que possuem exatamente dois elementos.

Resposta:

- **Axioma I1:** Sim. Dados dois pontos distintos $a \neq b \in Q$, a reta que os contém é unicamente o conjunto $\{a, b\}$.
- **Axioma I2:** Sim. Por definição, cada reta tem exatamente dois pontos.
- **Axioma II1:** Sim (vacuamente). Como nenhuma reta possui três pontos, não há triplas colineares com relação de "entre" a verificar; assim, as propriedades condicionais do axioma ficam satisfeitas.
- **Axioma II2:** Não. Dado $A \neq B$, a reta AB contém apenas A e B, logo não existe C na reta com B entre A e C.
- **Axioma II3:** Sim (vacuamente). Como não há três pontos colineares numa mesma reta, a afirmação "entre três pontos colineares, exatamente um está entre os outros dois" não tem casos a contradizer.

(iii) **PLANO**: *esfera*; **RETAS**: *arcos de círculo máximo.*



Resposta:

- **Axioma I1:** Sim. Existem retas (arcos de círculos máximos) com infinitos pontos; existem pontos do plano que não pertencem a uma mesma reta; e nenhuma reta coincide com o plano todo.
- **Axioma I2:** Não. Por dois pontos distintos não passa uma única reta: se não são antipodais, no círculo máximo comum há dois arcos (menor e maior); se são antipodais, há infinitos círculos máximos que os contêm.
- **Axioma II1:** Não. Pois como temos um arco dado os Pontos A, B e C, podemos ordenar os pontos em A, B e C, e também em B, C e A ou C, A e B.
- **Axioma II2:** Sim (vacuamente). Pois dado dois pontos A e B de um arco sempre teremos um ponto C que esta entre os dois e outro D que faz com que B esteja entre A e D, mas isso sempre depende da direção da nossa reta, pois caso a direção seja contrario nossa logica deve ser invertida também.
- **Axioma II3:** Sim. Em qualquer reta (arco), dividimos nosso plano em metade de uma esfera.

(iv) **PLANO**: conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais (inteiros maiores ou igual a zero); **RETAS**: subconjuntos de $\mathbb{N}$ das formas $r_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ e $r_k = \{0, k\}, \quad \forall k \geq 1$.

Resposta: r_0

- **Axioma I1:** Sim. Pois r_0 contém infinitos pontos, porem não contem o ponto 0, logo ele não contem todo o plano e possiu pontos que pertencem a reta e um ponto que não pertence a reta.
- **Axioma I2:** Não. Pois qualquer ponto ligado ao ponto 0 não passa por uma reta unica.
- **Axioma II1:** Sim. Como na verdade a reta é um seguimento de 1 a infinito, sempre poderemos pegar 3 pontos e ordenar de uma unica forma que um esteja entre os outros dois.
- **Axioma II2:** Não. Pois se tivermos os pontos $A = 1$ e $B = 2$ (ou seja um seguido do outro na sequencia dos naturais), logo não teremos um C onde C e somente C esteja entre A e B.
- **Axioma II3:** Não. Pois como nossa reta é quase todo nosso plano com excessão do 0, logo não teremos um plano sendo "dividido" em dois de uma forma coerente.
- **Axioma III1:** Sim. A distância entre dois naturais pode ser definida como $|a - b|$, que é sempre ≥ 0 e zero se e só se $a = b$.
- **Axioma III2:** Não. Os pontos de r_0 são números naturais $\{1, 2, 3, \ldots\}$, que não podem ser colocados em correspondência biunívoca com todos os números reais.
- **Axioma III3:** Não. Se C está entre A e B em r_0, não necessariamente $S_{AC} + S_{CB} = S_{AB}$ devido à natureza discreta dos naturais.

Resposta: r_k

- **Axioma I1:** Sim. Pois tirando os dois pontos pertencentes a reta todos os demais naõ estão nela.
- **Axioma I2:** Sim. Como cada r_k possui apenas dois pontos, logo existe uma reta que os contém.
- **Axioma II1:** Sim. Pois como nossa reta é com apenas dois elementos, logo não temos como ordenar 3 pontos.
- **Axioma II2:** Sim (vacuamente). Pois como nossa reta possui apenas dois pontos, logo não temos como ordenar 3 pontos ou mais.
- **Axioma II3:** Não.Pois nos naturais não temos como apartir de uma reta com apenas dois ponto dividir nosso plano em dois de uma forma coerente.
- **Axioma III1:** Sim. A distância entre 0 e k é $|0 - k| = k \geq 0$, e é zero se e só se $k = 0$ (mas $k \geq 1$).
- **Axioma III2:** Não. Uma reta r_k tem apenas dois pontos $\{0, k\}$, que não podem ser colocados em correspondência biunívoca com todos os números reais.
- **Axioma III3:** Sim (vacuamente). Como não existe ponto C entre 0 e k em r_k, a condição é satisfeita vacuamente.

(v) **PLANO**: conjunto Q dos números racionais; **RETAS**: subconjuntos de Q que possuem exatamente três elementos.

Resposta:

- **Axioma I1:** Sim. Cada reta contém apenas 3 pontos, logo existem infinitos pontos racionais que não pertencem à reta.
- **Axioma I2:** Não. Dados dois pontos distintos em Q, existem infinitas retas (subconjuntos de 3 elementos) que os contêm, pois podemos escolher qualquer terceiro ponto racional para completar o conjunto.
- **Axioma II1:** Sim. Os numeros racionais são densos e ordenaveis e sempre vamos poder ordaenasr os 3 pontos de forma crescente ou decrecente e nosso ponto C sempre estara entre nosso ponto A e B.
- **Axioma II2:** Sim (vacuamente). Pois como nossa reta possui apenas 3 pontos, logo não temos como ordenar um ponto D que faça B estar entra A e D.
- **Axioma II3:** Não. Um subconjunto de 3 pontos não pode dividir o conjunto Q em dois semi-planos distintos.
- **Axioma III1:** Sim. A distância entre dois racionais pode ser definida como $|a - b|$, que é sempre ≥ 0 e zero se e só se $a = b$.
- **Axioma III2:** Não. Uma reta tem apenas 3 pontos racionais, que não podem ser colocados em correspondência biunívoca com todos os números reais.
- **Axioma III3:** Sim. Se C está entre A e B na ordem dos racionais, então $S_{AC} + S_{CB} = |A - C| + |C - B| = |A - B| = S_{AB}$.

(vi) **PLANO**: conjunto Z dos números inteiros; **RETAS**: subconjuntos de Z que possuem exatamente dois elementos.

Resposta:

- **Axioma I1:** Sim. Cada reta contém apenas 2 pontos, logo existem infinitos pontos em Z (exceto os dois pontos da reta) que não pertencem à reta.
- **Axioma I2:** Sim. Dados dois pontos distintos em Z, existe uma única reta (subconjunto) que os contém.
- **Axioma II1:** Sim (vacuamente). Uma reta tem apenas 2 pontos, logo não existe ponto C entre A e B.
- **Axioma II2:** Sim (vacuamente). Uma reta tem apenas 2 pontos, logo não existe ponto C entre A e B e nem D tal que B esteja entre A e D.
- **Axioma II3:** Não. Uma reta com apenas 2 pontos não pode dividir o plano Z em dois semi-planos.
- **Axioma III1:** Sim. A distância entre dois inteiros pode ser definida como $|a - b|$, que é sempre ≥ 0 e zero se e só se $a = b$.
- **Axioma III2:** Não. Uma reta tem apenas 2 pontos inteiros, que não podem ser colocados em correspondência biunívoca com todos os números reais.
- **Axioma III3:** Sim (vacuamente). Como não existe ponto C entre A e B numa reta de 2 pontos, a condição é satisfeita vacuamente.

(vii) **PLANO**: semi-esfera, incluindo a linha do equador; **RETAS**: arcos de círculo máximo contidos na semi-esfera.

Resposta:

- **Axioma I1:** Sim. Qualquer arco de círculo máximo não contém todos os pontos da semi-esfera.
- **Axioma I2:** Não. Pois se houver dois pontos A e B alinhados horizontalmente no tropico de capricónio, não existe uma reta que os contenha.
- **Axioma II1:** Sim. Em um arco de círculo máximo, dados três pontos, um está entre os outros dois.
- **Axioma II2:** Sim. Dados dois pontos A e B em um arco, sempre existem pontos C entre A e B e D tal que B está entre A e D. (DUVIDA)
- **Axioma II3:** Não. Um arco de círculo máximo não divide a semi-esfera em dois semi-planos distintos (pois é limitado pela linha do equador).
- **Axioma III1:** Sim. A distância entre dois pontos na semi-esfera pode ser definida como a distância euclidiana, que é sempre ≥ 0 e zero se e só se os pontos coincidem.
- **Axioma III2:** Sim. Os pontos de um arco de círculo máximo podem ser parametrizados e colocados em correspondência com os números reais.
- **Axioma III3:** Sim. Se C está entre A e B no arco, então a distância ao longo do arco satisfaz $S_{AC} + S_{CB} = S_{AB}$.

(viii) **PLANO**: um quadrado (inclunido as bordas); **RETAS**: retas usuais (que se obtém usando uma régua), mas restrita ao quadrado.

Resposta:

- **Axioma I1:** Sim. Qualquer reta não contém todos os pontos do quadrado.
- **Axioma I2:** Sim. Dois pontos distintos determinam uma única reta.
- **Axioma II1:** Sim. Dados três pontos colineares, um está entre os outros dois.
- **Axioma II2:** Não. Se A e B estão próximos da borda, pode não existir ponto D tal que B esteja entre A e D (devido à limitação do quadrado). (DUVIDA)
- **Axioma II3:** Não. Uma reta pode não dividir o quadrado em dois semi-planos se ela passa pelos vértices ou bordas.
- **Axioma III1:** Sim. A distância euclidiana entre dois pontos é sempre ≥ 0 e zero se e só se os pontos coincidem.
- **Axioma III2:** Sim. Os pontos de uma reta no quadrado podem ser parametrizados e colocados em correspondência com um intervalo dos números reais.
- **Axioma III3:** Sim. Se C está entre A e B na reta, então $S_{AC} + S_{CB} = S_{AB}$ pela propriedade da distância euclidiana.

(ix) **PLANO**: um quadrado sem as bordas; **RETAS**: retas usuais (que se obtém usando uma régua), mas restrita ao quadrado.

Resposta:

- **Axioma I1:** Sim. Qualquer reta não contém todos os pontos do quadrado aberto.
- **Axioma I2:** Sim. Dois pontos distintos determinam uma única reta.
- **Axioma II1:** Sim. Dados três pontos colineares no interior, um está entre os outros dois.
- **Axioma II2:** Não. Se A e B estão próximos da "borda imaginária", pode não existir ponto D no quadrado aberto tal que B esteja entre A e D.
- **Axioma II3:** Não. Uma reta pode não dividir o quadrado aberto em dois semi-planos distintos se ela se aproxima das bordas.
- **Axioma III1:** Sim. A distância euclidiana entre dois pontos é sempre ≥ 0 e zero se e só se os pontos coincidem.
- **Axioma III2:** Sim. Os pontos de uma reta no quadrado aberto podem ser parametrizados e colocados em correspondência com um intervalo dos números reais.
- **Axioma III3:** Sim. Se C está entre A e B na reta, então $S_{AC} + S_{CB} = S_{AB}$ pela propriedade da distância euclidiana.

(x) **PLANO**: um quadrado (inclunido as bordas) e com um buraco no meio; **RETAS**: o caminho mais curto (no sentido de comprimento usual mensurável com uma trena) que une os dois pontos e passa por eles, mas restrito ao quadrado.

Resposta:

- **Axioma I1:** Sim. Qualquer caminho mais curto não contém todos os pontos do quadrado com buraco.
- **Axioma I2:** Não. Dois pontos podem ter múltiplos caminhos mais curtos de igual comprimento contornando o buraco.
- **Axioma II1:** Não. O conceito de "entre" não se aplica bem a caminhos que contornam obstáculos.
- **Axioma II2:** Não. Pode não existir ponto C entre A e B ou ponto D tal que B esteja entre A e D devido ao buraco.
- **Axioma II3:** Não. Um caminho não divide o quadrado com buraco em dois semi-planos distintos.
- **Axioma III1:** Sim. O comprimento do caminho mais curto é sempre ≥ 0 e zero se e só se os pontos coincidem.
- **Axioma III2:** Não. Um caminho que contorna obstáculos não pode ser parametrizado de forma simples com os números reais.
- **Axioma III3:** Não. A propriedade aditiva pode falhar quando caminhos contornam o buraco de formas diferentes.

(xi) **PLANO**: um quadrado sem as bordas e com um buraco no meio; **RETAS**: o caminho mais curto (no sentido de comprimento usual mensurável com uma trena) que une os dois pontos e passa por eles, mas restrito ao quadrado.

Resposta:

- **Axioma I1:** Sim. Qualquer caminho mais curto não contém todos os pontos do quadrado aberto com buraco.
- **Axioma I2:** Não. Dois pontos podem ter múltiplos caminhos mais curtos de igual comprimento contornando o buraco.
- **Axioma II1:** Não. O conceito de "entre" não se aplica bem a caminhos que contornam obstáculos.
- **Axioma II2:** Não. Pode não existir ponto C entre A e B ou ponto D tal que B esteja entre A e D devido ao buraco e às limitações das bordas.
- **Axioma II3:** Não. Um caminho não divide o quadrado aberto com buraco em dois semi-planos distintos.
- **Axioma III1:** Sim. O comprimento do caminho mais curto é sempre ≥ 0 e zero se e só se os pontos coincidem.
- **Axioma III2:** Não. Um caminho que contorna obstáculos não pode ser parametrizado de forma simples com os números reais.
- **Axioma III3:** Não. A propriedade aditiva pode falhar quando caminhos contornam o buraco de formas diferentes.