Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática

MAXWELL MARIANO DE BARROS

Modelo para Digitação de Monografia em LaTeX

- Fazendo uso da classe MONOGRAFIA -

São Luís

2003

MAXWELL MARIANO DE BARROS

Modelo para Digitação de Monografia em LaTeX

- Fazendo uso da classe MONOGRAFIA -

Monografia apresentada ao Curso de Matemática da UFMA, como requisito para a obtenção parcial do grau de LICENCIADO em Matemática.

Orientador: Nome do Orientador

Título do Orientador

Co-orientador: Nome do Co-orientador

Título do Co-orientador

São Luís

2003

Barros, Maxwell Mariano de

Modelo para Digitação de Monografia em LaTeX / Maxwell Mariano de Barros - 2003

45.p

1.Análise Matemática - Teoria das Funções 2. Funções Analíticas - Fórmula de Taylor. I.Título.

[redacted]

CDU 536.21

MAXWELL MARIANO DE BARROS

Modelo para Digitação de Monografia em LaTeX

- Fazendo uso da classe MONOGRAFIA -

Monografia apresentada ao Curso de Matemática da UFMA, como requisito para a obtenção parcial do grau de LICENCIADO em Matemática.

Aprovado em 31 de fevereiro de 2003

BANCA EXAMINADORA

Nome do Orientador

Título do Orientador

Nome do Examinador 1

Título do Examinador 1

Nome do Examinador 2

Título do Examinador 2

Às minhas mãos e meus dedos.

Ao meu PC.

À paciência da Mazé.

À PAZ.

Resumo

Trata-se de um modelo de monografia em LaTeX, usando a classe monografia.cls, com o propósito de ajudar na digitação dos trabalhos de conclusão dos diversos cursos da Universidade Federal do Maranhão.

Palavras-chaves: Digite aqui as palavras-chaves em português.

Abstract

It is a monograph model in LaTeX, using the class monografia.cls, with the purpose of to help in the fingering of the works of conclusion of the several courses of the Federal University of Maranhão.

Keywords: Digite aqui as palavras-chaves em inglês.

Résumé

C'est un modèle de la monographie dans LaTeXet utilise la classe monografia.cls, avec le but de aider dans le maniement des travaux de conclusion des plusieurs cours de l'Université Fédérale de Maranhão.

Agradecimentos

Aos meus pais, irmãos, tios primos, sobrinhos, vizinhos e em especial, a minha sogra ;-).

Ao professor Milton Nascimento das Dores pela orientação, amizade e principalmente, pela paciência, sem a qual este trabalho não se realizaria.

Aos professores Maria José e Gabriel Crispim pelas críticas e sugestões e por nos honrar com suas presenças em nossa banca examinadora.

Aos professores do Departamento de Matemática pelos seus ensinamentos e aos colegas e amigos de curso que, durante esses anos, nos deram mostra de amizade e companheirismo.

"... todo amor é sagrado e o fruto do trabalho é mais que sagrado... Lembra que o sono é sagrado e alimenta de horizonte o tempo acordado de viver".

Beto Guedes

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 Introdução

Este trabalho tem como objetivo auxiliar os alunos do curso de Universidade Federal do Maranhão e de outras Instituição de Ensino, na elaboração de suas monografias de conclusão de curso (Graduação e Especialização), dissertação de Mestrado e tese de Doutorado, usando LaTeX. Com este propósito, criamos a classe **monografia**. Desta forma, o aluno que irá digitar seu trabalho em LaTeX, deverá iniciar seu documento escrevendo `\documentclass[a4paper,12pt]{monografia}` (a exemplo deste documento). Por ser uma modificação da classe **report**, distribuída com todos os pacotes LaTeX, o usuário poderá usar todas as opções da mesma.

A classe **monografia** produz um documento dentro dos padrões exigidos pela ABNT: margens superior e esquerda iguais a 3 cm, margens inferior e direita iguais a 2 cm; a partir da folha de rosto todas as páginas são contadas, mas não numeradas, com a enumeração aparecendo somente na parte textual; a enumeração aparece no canto direito superior da página; o títulos de cada seção está alinhado com o texto à esquerda e os títulos das seções não enumeradas centralizados.

A classe **monografia** se encarrega de produzir as capas e todo o layout necessário dentro das normas exigidas pela UFMA. Para tanto, o usuário deverá informar o **título** o nome do **autor**, **curso**, **grau** a obter, **a instituição** bem como os nomes do orientador, examinadores, seus títulos e as informações dadas pela biblioteca ([redacted], CDU, etc.).

Para os alunos do curso de Matemática da Universidade Federal do Maranhão, a classe "**monografia**"estará instalada nas máquinas do laboratório, porém as pessoas interessadas em obtê-la, deverá fazer um download no site do Departamento de Matemática (`www.demat.ufma.br`), ou entrar em contato com o professor Maxwell Mariano de Barros, através do e-mail `maxwell@demat.ufma.br`.

No primeiro capítulo, iremos mostrar como a classe deve ser utilizada, e no segundo iremos reproduzir alguns textos matemáticos no sentido de auxiliar aqueles que estão iniciando no LaTeX.

Por se tratar de uma versão inicial, a classe **monografia** poderá não atender todos os requisitos. Assim, se você tem alguma sugestão ou crítica, entre em contato com o autor.

2 Criando um Documento

2.1 Usando a Classe Monografia

Se você não está digitando sua monografia no Laboratório de Informática do Curso de Matemática de UFMA, o documento "monografia.cls" deverá ser colocado no mesmo diretório do onde você está salvando o documento.tex.

O documento deve ser iniciado da seguinte maneira:

```
\documentclass[a4paper,12pt]{monografia}
\usepackage{amsmath,amsthm,amsfonts,amssymb}
\usepackage{latexsym}
\usepackage[brazil]{babel}
\usepackage[latin1]{inputenc}
```

É necessário o uso do estilo latin1, (`\usepackage[latin1]{inputenc}`).

2.1.1 Produzindo Capa, Folha de Rosto e de Aprovação

Após o comando `\begin{document}`, voce deverá digitar um dos seguintes comandos (todos com nomes em português, sem acentos):

`\licenciatura` - se o trabalho é uma monografia de conclusão de um curso de Licenciatura.
`\bacharelado` - se o trabalho é uma monografia de conclusão de um curso de Bacharelado.
`\especializacao` - se o trabalho é uma monografia de conclusão de um curso de Especialização.
`\mestrado` - se o trabalho é uma dissertação de um curso de Mestrado.
`\doutorado` - se o trabalho é uma tese de um curso de Doutorado.

Este comando fará com que a classe reconheça o tipo de trabalho (monografia, dissertação ou tese) implementando os dados necessário para cada um deles.

Dados que irão compor a capa, folha de rosto e de aprovação

Dados sobre o autor e o título do trabalho devem ser informados da seguinte maneira:

```
\titulo{Título do Trabalho}
\subtitulo{Subtítulo do Trabalho} % opcional
\autor{NOME DO AUTOR}
\ultimonome{Barros}
\nome{Maxwell Mariano de}
\orientador{Nome do Orientador} % se do sexo masculino
\orientadora{Nome da Orientadora} % se do sexo feminino
\ttorientador{Título do Orientador} % independente do sexo
\coorientador{Nome do Co-orientador} % opcional
\ttcoorientador{Título do Co-orientador}% opcional
```

É necessário digitar os comandos `\ultimonome{xxxx}` e `\nome{xxx}` para que a classe monografia preencha as informações que irão compor o quadro do verso da folha de rosto. Os comandos `\subtitulo{xxxx}` e `\coorientador{xx}` são opcionais.

Os comandos abaixo irão informar o nome da Instituição, o curso, o grau a ser obtido (licenciado, bacharel, Mestre, etc).

```
\curso{MATEMÁTICA}
\instituicao{NOME DA UNIVERSIDADE}
\sigla{UFMA}
\unidadeacademica{CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA}
\ano{2003}
\data{31 de fevereiro de 2003} % data da aprovação
\cidade{São Luís}
```

As informações obtidas na biblioteca deverão ser repassadas usando os seguintes comandos:

[redacted]

```
\CDU{536.21}
\areas{1.Análise Matemática - Teoria das Funções
       2.Funções Analíticas - Formas Diferenciais.}
\npaginas{45}  % total de páginas do trabalho
```

Os próximos comandos, juntamente com comando `\orientador{xxx}`, informarão os dados sobre a banca examinadora que irão compor a folha de aprovação.

```
\examinadorum{Nome do Examinador 1}
\examinadordois{Nome do Examinador 2}
\examinadortres{Nome do Examinador 3} % se for tese de doutorado
\examinadorquatro{Nome do Examinador 4}%  se for tese de doutorado
\ttexaminadorum{Título do Examinador 1}
\ttexaminadordois{Título do Examinador 2}
\ttexaminadortres{Título do Examinador 3} %  se for tese de doutorado
\ttexaminadorquatro{Título do Examinador 4} %  se for tese de doutorado
```

Observe que, em se tratando de tese de Doutorado, o número de professores na banca deve ser igual a 5. Logo a banca será composta de 4 examinadores e o orientador. A classe não coloca o Co-orientador como um dos membros da banca. Se isso acontecer, seu nome deverá ser informado com um dos examinadores.

Após a digitação destes comandos deve ser digitado o comando `\maketitle`.

2.1.2 Dedicatória, Epígrafe e Citações

O texto de uma dedicatória deve ser escrito entre os comandos `\begin{dedicatoria}` e `\end{dedicatoria}`. A dedicatória deste documento foi produzida da seguinte maneira:

```
\begin{dedicatoria}
A Deus.\\
À minha mãe.\\
Aos meus familiares e amigos.\\
Àqueles que lutam por um mundo melhor.
\end{dedicatoria}
```

O texto de uma epígrafe deve ser escrito entre os comandos `\begin{epigrafe}` e `\end{epigrafe}`. A epígrafe deste documento foi produzida da seguinte maneira:

```
\begin{epigrafe}
``... todo amor é sagrado e o fruto do trabalho
é mais que sagrado...Lembra que o sono é sagrado
e alimenta de horizonte o tempo acordado de viver''.\\
```

```
\hfill Beto Guedes
\end{epigrafe}
```

Segundo as normas da ABNT, uma citação com mais de 3 linhas deve vir em parágrafo separado, com recuo de 4 cm da margem esquerda, em fonte menor, sem as aspas e com espaçamento simples. Usando a classe **monografia**, voce produz uma citação digitando o texto entre os comando `\begin{citacao}` e `\end{citacao}`. Por exemplo:

```
\begin{citacao}
   A Geometria, como apresentada por Euclides, foi o primeiro
   sistema de idéias desenvolvido pelo homem, no qual umas
   poucas afirmações simples são admitidas sem
   demonstrações e então utilizadas para provar outras mais
   complexas. Um tal sistema é chamado de dedutivo. A beleza
   da Geometria, como um sistema dedutivo, inspirou homens,
   das mais diversas áreas, a organizarem suas idéias da mesma forma.
\end{citacao}
```

vai produzir a seguinte citação:

> A Geometria, como apresentada por Euclides, foi o primeiro sistema de idéias desenvolvido pelo homem, no qual umas poucas afirmações simples são admitidas sem demonstrações e então utilizadas para provar outras mais complexas. Um tal sistema é chamado de dedutivo. A beleza da Geometria, como um sistema dedutivo, inspirou homens, das mais diversas áreas, a organizarem suas idéias da mesma forma.

2.1.3 Resumos e Agradecimento

Para digitar o resumo voce usa os seguintes comandos:

- `\resumo{Resumo}` ....texto...., para o resumo em português;
- `\resumo{Abstract}` ....texto...., para o resumo em inglês;
- `\resumo{Résumé}` ....texto...., para o resumo em francês.

e para digitar os agradecimentos usa-se o seguinte comando:

- `\agradecimento{Agradecimentos}` ....texto....

2.1.4 Lista de Figuras, de Tabelas e Sumário

As listas de tabelas, de figuras e o índice são gerados automaticamente usando os comandos da classe **report**.

```
\tableofcontents % para gerar o sumário
\thispagestyle{empty} % para que a pagina não seja enumerada
\listoffigures % cria a lista de figuras
\thispagestyle{empty}
\listoftables % cria a lista de tabela
\thispagestyle{empty}
```

2.1.5 Estilo das Páginas

A classe **monografia** admite três estilos de páginas:

`\pagestyle{header}` - apenas a numeração aparece no canto direito superior de cada página.
`\pagestyle{plainheader}` - além da numeração no canto superior direito, mostra também o nome da seção no canto superior esquerdo de cada página.
`\pagestyle{ruledheader}` - igual ao estilo plainheader mas com uma linha reta abaixo das informações (é o estilo usado neste documento).

Observação 2.1.1. O comando `\pagestyle{xxxxx}` só deverá ser digitado após o comando que gera a introdução.

```
\chapter{Introdução}
\pagestyle{xxxxx}
```

2.1.6 Capítulos, Seções, Subseções e Bibliografia

Os capítulos, seções, subseções e as referências bibliográficas deverão ser geradas como na classe **report**:

`\chapter{Nome do Capítulo}` ...texto..., inicia um capítulo.

`\section{Nome da Seção}` ...texto..., inicia uma seção.

`\subsection{Nome da Subseção}` ...texto..., inicia uma subseção.

`\begin{thebibliography}{99}......` `\end{thebibliography}` gera as referências bibliográficas.

2.1.7 Apêndices e Anexos

Para produzir um apêndice voce deverá digitar os seguintes comandos:

```
\appendix
\chapter{Título do Apêndice}
```

e para digitar um anexo

```
\annex
\chapter{Título do Anexo}
```

2.2 A "Mascara"usada neste Documento

A seguir, descrevemos a "mascara"usada para confeccionar este documento.

```
\NeedsTeXFormat{LaTeX2e}
%---------------------------------------------
\documentclass[a4paper,12pt]{monografia}
\usepackage{amsmath,amsthm,amsfonts,amssymb}
\usepackage[mathcal]{eucal}
\usepackage{latexsym}
\usepackage[brazil]{babel}
\usepackage[latin1]{inputenc}
\usepackage{bm}
\usepackage[all]{xy}
%---------------------------------------------
\theoremstyle{plain}
\newtheorem{theorem}{Teorema}[section]
```

```
\newtheorem{axiom}{Axioma}[section]
\newtheorem{corollary}{Corolário}[section]
\newtheorem{lemma}{Lema}[section]
\newtheorem{proposition}{Proposição}[section]
%--------------------------------------------
\theoremstyle{definition}
\newtheorem{definition}{Definição}[section]
\newtheorem{example}{Exemplo}[section]
%--------------------------------------------
\theoremstyle{remark}
\newtheorem{remark}{Observação}[section]
%--------------------------------------------
\newcommand{\R}{\mathbb{R}}
\newcommand{\N}{\mathbb{N}}
\newcommand{\Z}{\mathbb{Z}}
\newcommand{\Q}{\mathbb{Q}}
\newcommand{\K}{\mathbb{K}}
\newcommand{\I}{\mathbb{I}}
\newcommand{\U}{{\cal U}}
\newcommand{\V}{{\cal V}}
%--------------------------------------------
\def\ind{\hbox{ ind }}
%--------------------------------------------
\begin{document}
.......................................................
.......................................................
.......................................................
\end{document}
```

2.3 ABNT - Elementos textuais e Pós-textuais

A estrutura de tese, dissertação ou de um trabalho acadêmico, compreende elementos pré-textuais, elementos textuais e elementos pós-textuais, que aparecem no texto na seguinte ordem:

Pré-textuais:

- Capa (obrigatório)
- Folha de rosto (obrigatório)
- Errata (opcional)
- Folha de aprovação (obrigatório)
- Dedicatória (opcional)
- Agradecimentos (opcional)
- Epígrafe (opcional)
- Resumo em língua vernácula (obrigatório)
- Resumo em língua estrangeira (obrigatório)
- Sumário (obrigatório)
- Listas de Tabelas, figuras, etc (opcional)

Textuais:

- Introdução
- Desenvolvimento
- Conclusão (ou Considerações Finais)

Pós-textuais:

- Referências (obrigatório)
- Apêndice (opcional)
- Anexo (opcional)
- Glossário (opcional)

Espero que este trabalho ajude na confecção do seu texto.

3 Espaços de Lorentz

3.1 Formas Bilineares

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma *forma bilinear* em V é uma aplicação bilinear $g : V \times V \to \mathbb{R}$, isto é, para $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, g satisfaz as seguintes propriedades:

F1. $g(u + v, w) = g(u, w) + g(v, w)$.

F2. $g(u, v + w) = g(u, v) + g(u, w)$.

F3. $g(\alpha u, v) = \alpha g(u, v)$.

F4. $g(u, \beta v) = \beta g(u, v)$.

Uma forma bilinear g em V é dita *simétrica* se satisfaz:

F5. $g(u, v) = g(v, u)$, para todo $u, v \in V$

Definição 3.1.1. Seja g uma forma bilinear simétrica em V. Dizemos que g é:

1. *Positiva definida* se para todo $v \neq 0$, $g(v, v) > 0$.

2. *Positiva semi-definida* se $g(v, v) \geq 0$, para todo $v \in V$.

3. *Negativa definida* se para todo $v \neq 0$, $g(v, v) < 0$.

4. *Negativa semi-definida* se $g(v, v) \leq 0$, para todo $v \in V$.

5. *Não-degenerada* se, para cada $v \neq 0$ existe, pelo menos um vetor $u \in V$, tal que $g(v, u) \neq 0$.

Observe que se g é não-degenerada e $v \in V$ é tal que $g(v, u) = 0$ para todo $u \in V$, então v é o vetor nulo.

Dizemos que g é *degenerada* se g não é não-degenerada.

Exemplo 3.1.1. Em $\mathbb{R}^2$, defina $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$g(u, v) = u_1 v_1 - u_2 v_2,$$

para todo $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Observe que g é uma forma bilinear simétrica.

Seja g uma forma bilinear simétrica em um espaço vetorial V. Então, se $W \subset V$ é um subespaço vetorial de V, a restrição $g|_{W \times W}$, denotada por $g|_W$, é também uma forma bilinear simétrica. Além disso, se g é positiva (negativa), (semi)definida o mesmo ocorre com $g|W$.

Definição 3.1.2. O *índice* ν, de uma forma bilinear simétrica g em V é a maior das dimensões dos subespaços W de V, tal que $g|_W$ é negativa definida. Em outra palavra,

$$\nu = \max\{\dim W;\ W \text{ é subespaço de } V \text{ e } g|_W \text{ é negativa definida}\}.$$

Logo, $0 \leq \nu \leq \dim V$ e $\nu = 0$ se, e somente se, g é positiva semi-definida.

Se g é uma forma bilinear simétrica em V, a função $q : V \to \mathbb{R}$, definida por $q(u) = g(u, u)$ é chamada de *forma quadrática associada a g*.

Exemplo 3.1.2. A forma quadrática q, associada a forma bilinear do exemplo 3.1.1, é dada por $q(u) = u_1^2 - u_2^2$.

Dada uma base $e_1, e_2, ..., e_n$ de V, a matriz $n \times n$, $(g_{ij}) = (g(e_i, e_j))$ é chamada de *matriz de g relativa a base* $e_1, e_2, ..., e_n$. Note que, como g é simétrica, (g_{ij}) é uma matriz simétrica. Além disso, dados $u, v \in V$, existem números reais u^i, v^i tais que $u = \sum_{i=1}^n u^i e_i$ e $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$. Portanto,

$$g(u, v) = g\left(\sum_{i=1}^n u^i e_i, \sum_{j=1}^n v^j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n u^i v^j g(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} u^i v^j.$$

Lema 3.1.1. *Uma forma bilinear simétrica em um espaço V é não-degenerada se, e somente se, sua matriz relativa a qualquer base é uma matriz invertível.*

Demonstração. Seja $e_1, e_2, ..., e_n$ uma base qualquer de V. Observe que dado $v \in V$, então $g(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ se, e somente se, $g(v, e_i) = 0$ para $i = 1, 2, ..., n$. Temos também que, como a matriz (g_{ij}) é simétrica, vale:

$$g(v, e_i) = g\left(\sum v^j e_j, e_i\right) = \sum g_{ij} v^j.$$

Assim, g é degenerada se, e somente se, existe números reais $v^1, v^2, ..., v^n$, não todos zero, tal que $\sum g_{ij}v^j = 0$, para $i = 1, 2, ..., n$. Mas isto é equivalente a dizer que as colunas de (g_{ij}) são linearmente dependentes, isto é, que (g_{ij}) não é invertível. $\square$

Uma forma bilinear, simétrica e não-degenerada é também chamada de *produto escalar*. Um *produto interno* é um produto escalar positivo definido.

Exemplo 3.1.3. Em $\mathbb{R}^n$, o a função definida por

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i,$$

onde $u = (u_1, ..., u_n), v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ é um produto escalar.

Um espaço vetorial real, de dimensão finita, munido de um produto escalar será chamado de *espaço com produto escalar*. Daqui por diante, V irá denotar um espaço com produto escalar g.

Usaremos também a notação $\langle u, v \rangle$ para designar um produto escalar $g(u, v)$.

Definição 3.1.3. Um vetor $u \in V$ é dito *null* (*neutro*) se $u \neq 0$ e $q(u) = g(u, u) = 0$.

Exemplo 3.1.4. Seja $V = \mathbb{R}^4$ e g o produto escalar em V definido por

$$g(u, v) = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3,$$

onde $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Neste caso, os vetores $u = (1, 0, 1)$ e $v = (1, 1, 0)$ são nulls. De fato,

$$q(u) = g(u, u) = g\left((1, 0, 1), (1, 0, 1)\right) = -1 + 1 = 0.$$

Do mesmo modo temos que $q(v) = 0$.

Definição 3.1.4. Dizemos que dois vetores $u, v \in V$ são ortogonais, e escrevemos $u \perp v$, se $g(u, v) = 0$. Dois subconjuntos $A, B \subset V$ são ditos ortogonais, e escrevemos $A \perp B$, se $u \perp v$ para todo $u \in A$ e todo $v \in B$.

Observação 3.1.1. Note que, ao contrário dos espaços com produto interno, em um espaço com produto escalar, um vetor pode ser ortogonal a ele mesmo. Basta que o mesmo seja uma vetor null (ver exemplo 3.1.4).

Dado um subespaço $W \subset V$, seja

$$W^{\perp} = \{v \in V \ ; \ v \perp W\}.$$

É fácil mostrar que $W^{\perp}$ é também um subespaço de V (chamado de W *perp*).

Exemplo 3.1.5. No exemplo 3.1.1, seja W o subespaço de $\mathbb{R}^2$ gerado pelo vetor $(1,1)$, isto é, $W = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$. Neste caso temos que $W^{\perp} = W$. Isto mostra que em um espaço com produto escalar V, nem sempre é verdade que $V = W + W^{\perp}$.

Lema 3.1.2. *Se W é um subespaço de um espaço com produto escalar V, então:*

1. $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$.

2. $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$.

Demonstração. (1.) Seja $e_1, e_2, ..., e_n$ uma base de V adaptada a W, isto é, tal que $e_1, ..., e_k$ seja uma base de W. Temos que $v \in W^{\perp}$ se, e somente se $g(v, e_i) = 0$ para $1 \leq i \leq k$, ou seja, se e somente se,

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij} v^j = 0 \quad (1 \leq i \leq k), \tag{3.1}$$

onde $v = \sum_{j=1}^{n} v^j e_j$.

Logo, a igualdade (3.1) é um sistema de k equações lineares com n incógnitas. Mas, pelo lema 3.1.1, as linhas da matriz (g_{ij}) são linearmente independentes e portanto a matriz do sistema acima, tem posto k. Assim sendo, o espaço das soluções de (3.1) possui dimensão $n-k$. Como o espaço solução de (3.1) é exatamente $W^{\perp}$, segue que $\dim W^{\perp} = n - k$.

(2.) Seja $v \in W$. Então $v \perp W^{\perp}$ ou seja, $v \in \left(W^{\perp}\right)^{\perp}$. Logo $W \subset \left(W^{\perp}\right)^{\perp}$. Porém, pelo item *(1.)*, estes dois subespaços possuem a mesma dimensão e assim sendo, são iguais. □

Um subespaço W de V é dito *não-degenerado* se $g|_W$ é não-degenerada. Note que se V é um espaço com produto interno, todos os subespaços de V são não-degenerados.

Lema 3.1.3. *Um subespaço W de V é não degenerado se, e somente se V é soma direta de W e $W^{\perp}$.*

Demonstração. Assumiremos com verdadeira a seguinte identidade:

$$\dim(W + W^{\perp}) + \dim(W \cap W^{\perp}) = \dim W + \dim W^{\perp}. \tag{3.2}$$

De acordo com o item *(1.)* do lema 3.1.2, $\dim W + \dim W^{\perp} = n$. Assim, pela identidade (3.2), $W + W^{\perp} = V$ se, e somente se, $\dim(W \cap W^{\perp}) = 0$. Mas estas duas condições são equivalentes a $V = W \oplus W^{\perp}$. Porém $W \cap W^{\perp} = \{w \in W \; ; \; w \perp W\} = 0$ se, e somente se $g|_W$ é não-degenerada, ou seja se, e somente se, W é não-degenerado. □

Segue do lema 3.1.3 e da igualdade $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$, que W é não-degenerado se, e somente se $W^{\perp}$ também é não-degenerado.

Seja V um espaço com produto escalar g. Como $q(v) = g(v, v)$ pode ser negativo, a *norma* $|v|$, de um vetor $v \in V$, será definida por $|v| = \sqrt{|g(v, v)|}$. Dizemos que um vetor $u \in V$ é *unitário* se $|u| = 1$, ou seja, se $g(u, u) = \pm 1$. Como usualmente, um conjunto de vetores mutuamente ortogonais e unitários, será chamado de um conjunto *ortonormal*. Prova-se que se $\dim V = n$, um conjunto ortonormal de n vetores é necessariamente uma base de V.

Lema 3.1.4. *Um espaço com produto escalar $V \neq \{0\}$, possui uma base ortonormal.*

Demonstração. Como g é não-degenerada, existe um vetor $v \in V$ tal que $g(v, v) \neq 0$. Logo o vetor $\frac{v}{|v|}$ é unitário. Assim, é suficiente mostrarmos, por indução, que qualquer conjunto ortonormal $e_1, e_2, ..., e_k$, de k vetores, com $k < n = \dim V$, pode ser estendido (completado) até formar uma base ortonormal de V. Segue, do lema 3.1.1, que estes k vetores geram um subespaço não-degenerado $W \subset V$ de dimensão k. Resta portanto, encontrar um vetor unitário em $W^{\perp}$. Mas como $W^{\perp}$ é também não-degenerado existe um vetor $u \in W^{\perp}$, tal que $g(u, u) \neq 0$ e, assim sendo, $\frac{u}{|u|}$ é unitário em $W^{\perp}$. □

Observação 3.1.2. Observe que a matriz de g, com relação a uma base ortonormal $e_1, e_2, ..., e_n$ de V, é uma matriz diagonal. De fato, temos

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}\varepsilon_j, \quad \text{onde} \quad \varepsilon_j = g(e_j, e_j) = \pm 1.$$

É sempre conveniente ordenarmos os vetores em um base ortonormal de forma que os de sinais negativos, se houver, apareçam nas primeiras posições. Neste caso, a n-úpla

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) = (-1, ..., -1, +1, ..., +1)$$

é chamada de assinatura de g. Usa-se também as notações $(-,...,-,+,...,+)$ ou $(p, n-p)$ onde p é o número de sinais negativos da base ortonormal e $n = dimV$, para designar a assinatura de g.

Lema 3.1.5. *Sejam $e_1, e_2, ..., e_n$ uma base ortonormal de V e $\varepsilon_j = g(e_j, e_j)$. Então cada $v \in V$ possui uma expressão do tipo*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(v, e_i) e_i.$$

A demonstração do lema acima será deixada como exercício.

A *projeção ortogonal* π, de V sobre um subespaço não-degenerado W é a transformação linear que leva todos os vetores de $W^\perp$ no vetor 0 e deixa cada vetor de W fixo. Assim, se $e_1, e_2, ..., e_k, ..., e_n$ é uma base de V tal que $e_1, e_2, ..., e_k$ é uma base de W, temos:

$$\pi(v) = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j g(v, e_j) e_j. \tag{3.3}$$

É costume se referir ao índice ν do produto escalar g de V como sendo o *índice de V* e escrevemos $\nu = \text{ ind } V$.

Teorema 3.1.1. *Para qualquer base ortonormal $e_1, e_2, ..., e_n$ de V, o número de sinais negativos na assinatura $(-,..,-.+,...,+)$ é igual ao índice ν de V.*

Demonstração. Vamos assumir que os m primeiros sinais ε_i são negativos. Note que se g é definida, então $m = 0$ (se positiva) ou $m = n = \dim V$ (se negativa) e o resultado é trivialmente verdadeiro. Vamos supor portanto que $0 < m < n$. Como os m primeiros sinais ε_i são negativos, temos que g é negativa definida no subespaço S, gerado pelos vetores $e_1, ..., e_m$. Portanto, $\nu \geq m$.

Por outro lado, par um subespaço arbitrário W, onde g é negativa definida, podemos definir a aplicação $\pi : W \to S$ por:

$$\pi(w) = -\sum_{i \leq m} g(w, e_i) e_i.$$

É claro que π é linear. Vamos mostrar que π é também injetiva, o que nos levará a concluir que $\dim W \leq \dim S = m$, ou seja, que $\nu \leq m$.

Para mostrarmos que π é injetiva, é suficiente mostrarmos que o núcleo da mesma contém apenas o vetor 0. Seja w tal que $\pi(w) = 0$. Mas,

$$w = \sum_{j>m} g(w, e_j).$$

Como $w \in W$, temos

$$0 \geq g(w, w) = \sum_{j>m} g(w, e_j)^2 \geq 0.$$

Assim sendo, segue que $g(w, e_j) = 0$ para $j > m$, implicando em $w = 0$. $\square$

Sejam V e $\overline{V}$ espaços vetoriais munidos dos produtos escalares g e $\overline{g}$, respectivamente. Dizemos que uma transformação linear $T : V \to \overline{V}$ preserva produto escalar se $\overline{g}(Tv, Tw) = g(v, w)$, para todo $v, w \in V$. Neste caso, temos que T é necessariamente injetiva, uma vez que se $Tv = 0$, então $g(v, w) = 0$ para todo w e portanto $v = 0$.

3.2 Espaços Vetoriais de Lorentz

Definição 3.2.1. Um *espaço vetorial de Lorentz* é um espaço com produto escalar V, de índice 1 e dimensão ≥ 2.

Exemplo 3.2.1. No espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, considere o produto escalar

$$\langle v, w \rangle = -v^1 w^1 + \sum_{i=2}^{n} v^i w^i,$$

Onde $v = (v^1, ..., v^n)$, $w = (w^1, ..., w^n)$. O espaço resultante é o espaço vetorial de Lorentz $\mathbb{R}^n_1$, chamado de espaço de Minkowski de dimensão n.

Definição 3.2.2. Seja v um vetor em um espaço vetorial de Lorentz. Dizemos que v é um vetor:

1. *Tipo-espaço (spacelike)* se $\langle v, v \rangle > 0$ ou $v = 0$.
2. *Tipo-luz (lightlike) ou neutro* se $\langle v, v \rangle = 0$ e $v \neq 0$.
3. *Tipo-tempo (timelike)* se $\langle v, v \rangle < 0$.

Exemplo 3.2.2. Seja $\mathbb{R}^2_1$ o espaço de Minkowski de dimensão 2, isto é, $\mathbb{R}^2$ munido do produto escalar $\langle v, u \rangle = -x^1 x^2 + y^1 y^2$, onde $v = (x^1, y^1)$ e $u = (x^2, y^2)$. Temos que:

1. os vetores $v = (x, y)$, com $|x| = |y|$, são tipo-luz.

2. os vetores $v = (x, y)$, com $|x| < |y|$, são tipo-espaço.

3. os vetores $v = (x, y)$, com $|x| > |y|$, são tipo-tempo.

Seja W um subespaço de um espaço vetorial de Lorentz V e g o produto escalar de V. Existem três possibilidades, mutuamente exclusivas, para W:

1. $g|_W$ é positivo definido, isto é, W é um espaço com produto interno. Neste caso dizemos que W é *tipo-espaço.*

2. $g|_W$ é não-degenerado de índice 1, ou seja W é um espaço de de Lorentz. Neste caso dizemos que W é *tipo-tempo.*

3. $g|_W$ é degenerado. Dizemos então que W é *tipo-luz.*

O tipo ao qual W pertence é dito ser a *característica causal* de W.

Seja v um vetor de um espaço de Lorentz V. Iremos denotar por $\mathbb{R}v$ o subespaço de V gerado por v.

Lema 3.2.1. *Se v é vetor tipo-tempo de um espaço de Lorentz então o subespaço $(\mathbb{R}v)^\perp$ é tipo-espaço e V é soma direta $\mathbb{R}v + (\mathbb{R}v)^\perp$.*

Demonstração. Como v é tipo-tempo, $\mathbb{R}v$ é não-degenerado e tem índice 1. Segue do lema 3.1.3 que $(\mathbb{R}v)^\perp$ é não-degenerado e $V = \mathbb{R}v \oplus (\mathbb{R}v)^\perp$. Logo $\text{ind } V = \text{ ind } \mathbb{R}v + \text{ ind } (\mathbb{R}v)^\perp$, o que implica em $\text{ind } (\mathbb{R}v)^\perp = 0$, e portanto $(\mathbb{R}v)^\perp$ é tipo-espaço. □

Observação 3.2.1. Com o argumento usado na prova do lema anterior, podemos mostrar que um subespaço W é tipo-tempo se, e somente se, $W^\perp$ é tipo-espaço. E como $\left(W^\perp\right)^\perp = W$, concluímos que W é tipo-luz se, e somente se $W^\perp$ é também tipo-luz.

Lema 3.2.2. *Seja W um subespaço de dimensão ≥ 2 de um espaço vetorial de Lorentz. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) W é tipo-tempo, assim sendo ele é um espaço vetorial de Lorentz.

(2) W possui dois vetores neutros linearmente independentes.

(3) W possui um vetor tipo-tempo.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Seja $e_1, e_2, ..., e_n$ uma base ortonormal de W tal que e_1 é tipo-tempo. Então os vetores e_1+e_2, e_1-e_2 são linearmente independentes e neutros (mostre).
(2) $\Rightarrow$ (3) Sejam u e v dois vetores neutros, linearmente independentes. Vamos mostrar inicialmente que $\langle u, v\rangle \neq 0$. De fato, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} \langle \alpha u + \beta v, v\rangle &= \alpha\langle u, v\rangle \\ \langle \alpha u + \beta v, u\rangle &= \beta\langle u, v\rangle \end{aligned}$$

Logo, se α, β são tais que $\alpha u + \beta v = 0$, então, $\alpha\langle u, v\rangle = 0$ e $\beta\langle u, v\rangle = 0$. Assim sendo, se $\langle u, v\rangle = 0$, α e β seriam qualquer, e neste caso, u e v não seriam L.I. Portanto, $\langle u, v\rangle \neq 0$.

Afirmamos que $u + v$ ou $u - v$ é tipo-tempo. Suponha que $u + v$ não é tipo-tempo. Como $\langle u + v, u + v\rangle \neq 0$, também não neutro, o que implica em $u + v$ ser tipo-espaço, ou seja, $\langle u + v, u + v\rangle > 0$. Mas, $\langle u + v, u + v\rangle = 2\langle u, v\rangle > 0 \Rightarrow \langle u, v\rangle > 0$. Logo, $\langle u - v, u - v\rangle = -2\langle u, v\rangle < 0$, isto é, $u - v$ é tipo-tempo.
(2) $\Rightarrow$ (3) Se u é um vetor tipo-tempo em W então $W^\perp \subset (\mathbb{R}u)^\perp$ (mostre) e $(\mathbb{R}u)^\perp$ é tipo espaço. Logo $W^\perp$ é também tipo-espaço. Assim sendo, $W = \left(W^\perp\right)^\perp$ é tipo-tempo. □

Seja V um espaço vetorial de Lorentz. O conjunto Λ de todos os vetores neutros de V é chamado de *cone-neutro* de V.

Lema 3.2.3. *Seja W um subespaço de dimensão ≥ 2 de um espaço vetorial de Lorentz V. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) W é tipo-luz, isto é, degenerado.

(2) W possui um vetor neutro mas não contém um vetor tipo-tempo.

(3) $W \cap \Lambda = L - 0$ onde L é um subespaço de dimensão 1 e Λ o cone-neutro de V.

A Título do Apêndice

A.1 Um pouco de Topologia Diferencial

I Título do Primeiro Anexo

I.1 As Pseudo-Esfera

II Título do Segundo Anexo

II.1 As Músicas de Chico Buarque

Referências Bibliográficas

[ ] Callioli, Carlos A., *Álgebra Linear e Aplicações*, Atual, São Paulo, 1990.

[ ]

[ ]

[ ]

[ ]