Exerc 1: Verificar que no caso clássico, as funções de interseção e união verificam a condição de dualidade: $S(a,b) = N(T(N(a),N(b)))$.

Resposta: No caso clássico, temos:

- $N(c) = 1 - c$
- $T(a,b) = min(a,b)$
- $S(a,b) = max(a,b)$

então, temos

$max(a,b) = 1 - T(N(a),N(b)) = 1 - T(1-a,1-b) = 1 - min(1-a,1-b)$

$= max(1-(1-a),1-(1-b)) = max(1-1+a,1-1+b) = max(a,b).$

Exerc 2: Verificar que no caso de operadores de Lukasiewicz, temos que $T(x,y) = max(0,x+y-1)$ é uma função da classe T-norm.

Resposta: Para ser T-norm deve verificar as seguintes condições.

[Comutatividade] $T(a,b) = T(b,a)$: Temos $T(a,b) = max(0,a+b-1)$ e $T(b,a) = max(0,b+a-1)$, mas como a soma é comutativa portanto temos que $max(0,b+a-1) = max(0,a+b-1)$.

[Associatividade] $T(a,T(b,c)) = T(T(a,b),c)$: Temos o seguinte

- $T(a,T(b,c)) = T(a,max(0,b+c-1)) = max(0,a+max(0,b+c-1)-1)$
- $T(T(a,b),c) = T(max(0,a+b-1),c) = max(0,max(0,a+b-1)+c-1)$

mas $T(b,c) = max(0,b+c-1)$ pode ser (A1) igual a 0 ou (B1) igual a b+c-1, logo

(A1) $T(a,T(b,c)) = max(0,a-1) = 0,$

(B1) $T(a,T(b,c)) = max(0,a+b+c-2).$

Por outro lado, $T(a,b) = max(0,a+b-1)$ pode ser (A2) igual a 0 ou (B2) igual a a+b-1, logo

(A2) $T(T(a,b),c)) = max(0,0+c-1) = 0,$

(B2) $T(T(a,b),c)) = max(0,a+b+c-2).$

Portanto, (A1,B1) é igual a (A2,B2).

[Monotonia] $T(a,b) >= T(c,d) sea >= ceb >= d$: Temos

- $T(a,b) = max(0,a+b-1) = max(0,x-1)$
- $T(c,d) = max(0,c+d-1) = max(0,y-1)$

onde $x = a+b$ e $y = c+d$, mas $x = a+b >= y = c+d$, então $max(0,x-1) >= max(0,y-1)$.

[Invariância] T(a,1) = a: Temos $T(a,1) = max(0,a+1-1) = max(0,a) = a$.

Exerc 3: Verificar que no caso de operadores de Lukasiewicz, temos que $S(x,y) = min(1,x+y)$ é uma função da classe S-norm.

Resposta: Para ser S-norm deve verificar as seguintes condições.

[Comutatividade] S(a,b) = S(b,a): Temos $S(a,b) = min(1,a+b)$ e $S(b,a) = min(1,b+a)$, mas a soma é comutativa logo $a+b = b+a$.

[Associatividade] $S(a,S(b,c)) = S(S(a,b),c)$: Temos

- $S(a,S(b,c)) = S(a,min(1,b+c)) = min(1,a+min(1,b+c))$
- $S(S(a,b),c) = S(min(1,a+b),c) = min(1,min(1,a+b)+c)$

mas $S(b,c) = min(1,b+c)$ pode ser (A1) igual a 1 ou (B1) igual a b+c, logo

(A1) $S(a,S(b,c)) = min(1,a+1) = 1,$

(B1) $S(a,S(b,c)) = min(1,a+b+c).$

Por outro lado, $S(a,b) = min(1,a+b)$ pode ser (A2) igual a 1 ou (B2) igual a a+b, logo

(A2) $S(S(a,b),c)) = min(1,c+1) = 1,$

(B2) $S(S(a,b),c)) = min(1,a+b+c).$

Portanto, (A1,B1) é igual a (A2,B2).

[Monotonia] $S(a,b) >= S(c,d) sea >= ceb >= d$: Temos

- $S(a,b) = min(1,a+b) = min(1,x)$
- $S(c,d) = min(1,c+d) = min(1,y)$ onde $x = a+b$ e $y = c+d$, mas $x = a+b >= y = c+d$, então $min(1,x) >= min(1,y)$.

[Invariância] $S(a,0) = a$: Temos $S(a,0) = min(1,a+0) = min(1,a) = a$.