

Trabalho 5 - Redes Complexas

Modelação de Sistemas Complexos

Universidade de Aveiro

João Maria Machado, 89132

26 de junho de 2022

1 Introdução

Neste relatório serão estudadas redes complexas, mais precisamente redes de Erdős-Rényi. De um modo geral, uma rede complexa consiste num grafo (ou rede) com propriedades topológicas não triviais, isto é, propriedades que não observadas em redes simples tais como *lattices* ou grafos aleatórios. Estas redes podem ser utilizadas para modelar diferentes sistemas complexos reais, como a internet ou as redes neuronais do cérebro humano, por exemplo.

No presente relatório serão discutidos e resolvidos os problemas propostos no enunciado fornecido. Para cada problema será exposto o respetivo método de resolução seguido de um breve comentário acerca do enquadramento dos resultados obtidos nos resultados esperados.

2 Redes de Erdős-Rényi

Neste etapa foi pedido que se gerassem redes de Erdős-Rényi. Começou-se por gerar N vértices isolados e inserir $L = \frac{N}{2}c$ arestas entre pares de vértices escolhidos aleatoriamente. Deve-se garantir que cada aresta conecta dois vértices distintos, isto é (não se permitem laços) e que não existem múltiplas arestas a conectar-se ao mesmo par de vértices.

O grafo a estudar pode ser representado pela sua matriz de adjacência. Esta representação é particularmente útil na elaboração do código visto que o *matlab* é concebido com cálculo matricial em mente. A figura 1 contém o trecho de código utilizado para gerar o grafo da rede de Erdős-Rényi a ser estudada.

```
for k = 1:L
    i = 0;
    j = 0;
    while i == j || A(i,j) == 1
        i = randi([1,N]);
        j = randi([1,N]);
    end

    A(j,i) = 1;
    A(i,j) = 1;
end
```

Figura 1: Trecho de código responsável pela criação da matriz de adjacência **A**

Neste grafo o grau de um vértice, isto é, o número de arestas conectadas a este determinado vértice é dado pela seguinte expressão:

$$q_i = \sum_{j=1}^N A_{ij}. \quad (1)$$

E a distribuição de probabilidade do grau de um vértice é dada por:

$$P(q) = \frac{N(q)}{N}, \quad (2)$$

onde $N(q)$ é o número de vértices de grau q .

Após definir a matriz de adjacência que representa o grafo da rede de Erdős-Rényi é proposto que se calculem o grau médio de um vértice, o coeficiente de ramificação, o segundo e o primeiro momento. As seguintes equações definem cada uma dessas grandezas respetivamente:

$$\langle q \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i = \sum_{i=1}^{N-1} q P(q), \quad (3)$$

$$B = \frac{1}{\langle q \rangle} \sum_{i=1}^N q_i (q_i - 1) = \frac{1}{\langle q \rangle} \sum_{q=0}^{N-1} P(q) q (q - 1) = \frac{\langle q(q - 1) \rangle}{\langle q \rangle}, \quad (4)$$

$$\langle q^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i^2, \quad (5)$$

$$\langle q^3 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i^3. \quad (6)$$

De modo a validar os resultados encontrados foi pedido que se verificasse que $B/\langle q \rangle \approx 1$. Após computar todas as propriedades pedidas e respetivas validações resta definir os resultados teóricos esperados, as seguintes equações contém as definições desses valores

$$P(q) = e^{-\frac{C^q}{q!}}, \quad (7)$$

$$\langle q \rangle = c, \quad (8)$$

$$B = c. \quad (9)$$

Importa mencionar que para as simulações efetuadas foi considerado um valor de $c = 50$ sendo realizadas $m = 100$ simulações. Com todas estas considerações em mente resta apresentar os resultados obtidos. A figura 2

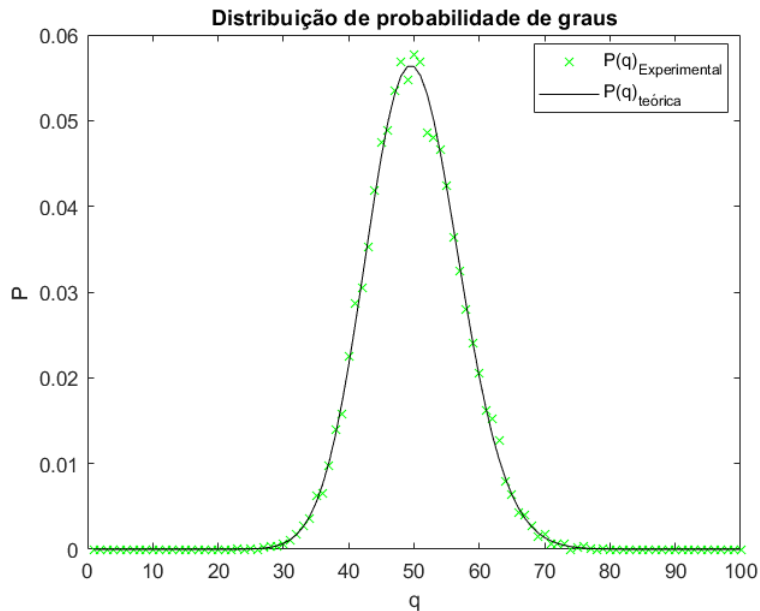


Figura 2: Distribuição de probabilidade do grau de um grafo de uma rede de Erdős-Rényi

Como se pode verificar há uma convergência dos valores computados para os valores teóricos obtidos. Após computar todos os valores pedidos no enunciado verificaram-se as igualdades descritas nas equações 7, 8 e 9. A figura 3 contém os resultados obtidos no terminal do *matlab*.

```

q_med =
    50

B =
    49.9755

q_med2 =
    2.5488e+03

q_med3 =
    1.3237e+05

const1 =
    0.9995

```

Figura 3: Resultados obtidos para os valores propostos a computar. Nota: *const1* representa o valor de $B/\langle q \rangle$

Numa segunda etapa foi pedido que calculasse o coeficiente de *clustering*. A seguinte equação contém a fórmula de cálculo do coeficiente de *clustering*:

$$C = \frac{n_{tr}}{n_{pt}}, \quad (10)$$

onde $n_{pt} = \frac{1}{6}N\langle q(q-1) \rangle$ corresponde ao número de possíveis triângulos, n_{tr} corresponde ao número total de triângulos na rede, dado pela seguinte equação:

$$n_{tr} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N A_{ij} A_{jk} A_{ki}. \quad (11)$$

Finalmente foi também pedido que se mostrasse que:

$$C \approx \frac{\langle q \rangle}{N}. \quad (12)$$

Para o valor do coeficiente de *clustering* foi obtido um valor de $C = 0.0500$. Este valor também foi obtido quando se considera a aproximação da equação 12

Numa fase final foi proposto que calculasse o coeficiente de Pearson que caracteriza as correlações grau a grau na rede em causa. O coeficiente de Pearson é dado pela seguinte equação:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij} (q_i - Q)(q_j - Q)}{N\langle q \rangle \sigma^2}, \quad (13)$$

onde:

$$Q = \frac{\langle q^2 \rangle}{\langle q \rangle} \quad (14)$$

e

$$\sigma^2 = \frac{\langle q^3 \rangle}{\langle q \rangle} - \frac{\langle q^2 \rangle^2}{\langle q \rangle^2} \quad (15)$$

Para o qual se obteve o valor absoluto de $\rho = 0.0200$. Este valor é relativamente pequeno visto que à medida que se aumenta N este diminui (converge em valor absoluto para 0).

3 Conclusão

Neste relatório foram exploradas redes complexas de Erdős-Rényi. Para tal efeito considerou-se que a rede é totalmente equiparável a um grafo a ser descrito pela sua matriz de adjacência, este grafo apresenta um grau médio de $\langle q \rangle = 50$, isto é um vértice, em média está conectado com 50 arestas, no entanto, há

probabilidade de o grau variar com uma probabilidade descrito pela função da figura 2. Este grafo possui um coeficiente de *clustering* de 0.050, pelo que se pode concluir que os vértices do mesmo tendem a agrupar-se segundo triângulos (ou circuitos) com uma frequência relativamente baixa.

Por se terem verificado todas as propriedades pedidas ao longo do enunciado bem como se verificar uma aproximação dos valores computados aos valores teóricos esperados o autor deste relatório considera que houve sucesso na elaboração destas simulações.