Trabalho 2 - Passeios Aleatórios

Modelação de Sistemas Complexos

Universidade de Aveiro

João Maria Machado, 89132

29 de abril de 2022

1 Introdução

Um dos primeiros temas a estudar nesta unidade curricular são passeios aleatórios. De um modo geral, um passeio aleatório pode ser descrito como o caminho de uma partícula que segue uma sequência aleatória de deslocamentos.

Os deslocamentos de um passeio aleatório são gerados por um processo de Markov, isto é, o próximo estado depende apenas do estado atual, o que implica que os deslocamentos são independentes. Neste relatório serão discutidos e resolvidos os problemas propostos. Para cada problema proposto será exposto o respetivo método de resolução seguido de um breve comentário acerca de como os resultados obtidos se enquadram nos resultados esperados

2 Passeios Aleatórios Simétricos a 1D

Neste problema foi estudado o comportamento de um passeio aleatório simétrico a uma dimensão, para tal efeito realizaram-se simulações de passeios aleatórios de uma partícula num espaço unidimensional. Consideram-se $p = q = 0.5$ como sendo as probabilidades de a partícula em causa realizar um salta, quer à direita, quer à esquerda.

Numa primeira etapa começou-se por desenhar a trajetória de 3 passeios aleatórios, isto é, a posição em x em função de t para um número total de $t_f = 50$ saltos. Esta trajetória pode ser descrita pela seguinte equação:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{t} S_i \tag{1}$$

onde $S_i = \mp 1$ é o salto aleatório realizado pela partícula num determinado passo i.

A resolução deste problema consiste na simples aplicação desta, que com o recurso à função *randsample* do *matlab* se torna ainda mais simples. Isto é, esta função permite gerar, com uma distribuição de probabilidade definida pelo utilizador, um conjunto de números aleatórios (cujo intervalo também é definido pelo utilizador) a figura 3 contém o trecho de código responsável pela implementação desta função.

```
weigths=[p q];
population=[1 -1];


for j=1:length(rngs)
    rng(j)
    for i=2:length(t)
        S=randsample(population,N,true,weigths);
        x(i,j)=sum(S(1:i));
    end
end
```

Figura 1: Implementação da função *randsample*

Resta agora gerar os resultados, isto é, desenhar as trajetórias computadas. A figura 3 contém as três trajetórias conforme proposto.

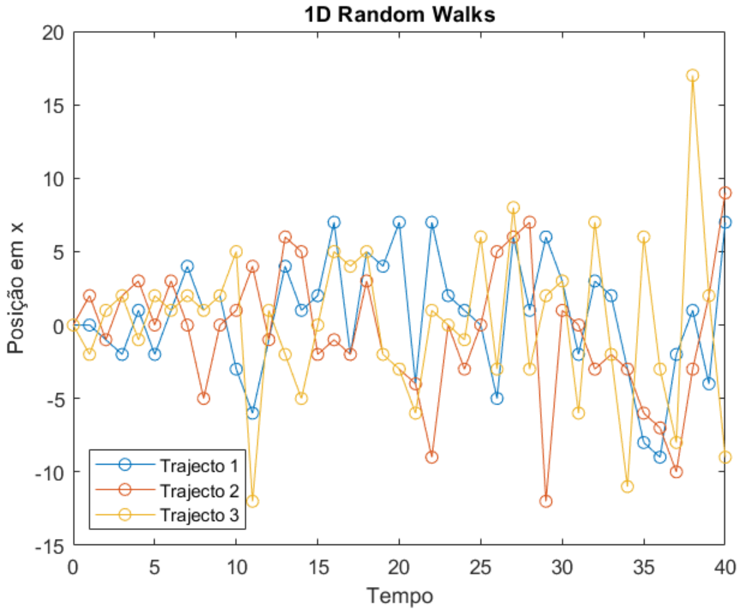

Figura 2: Trajetórias Computadas

Como se pode verificar à medida que se vai avançando no eixo horizontal as partículas divergem cada vez mais nas suas distâncias relativas, este comportamento deve-se à natureza caótica do sistema.

Numa próxima etapa foi proposto que se computasse a probabilidade $P(x, t_f)$ de encontrar uma partícula numa determinada posição x num dado tempo t_f. A partícula começa o passeio em $x = 0$. Importa mencionar que nesta etapa foram usados vários valores de t_f alternadamente pares e ímpares com ordens de grandeza cada vez maiores. Importa mencionar que quando se computam estas probabilidades para tempos pares e ímpares deve-se ter em conta a seguinte equação:

$$\bar{P}(x,t) = \frac{1}{2}[P(x,t) + P(x,t+1)] \tag{2}$$

De seguida comparam-se os valores previamente computados com os valores teóricos esperados. Os valores teóricos esperados, isto é, a função da função de distribuição de probabilidade esperada é uma função Guassiana, esta função encontra-se na seguinte equação:

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\dfrac{x^2}{2t}} \tag{3}$$

Após computar a função de distribuição de probabilidade conforme pedida obteve-se a seguinte figura:

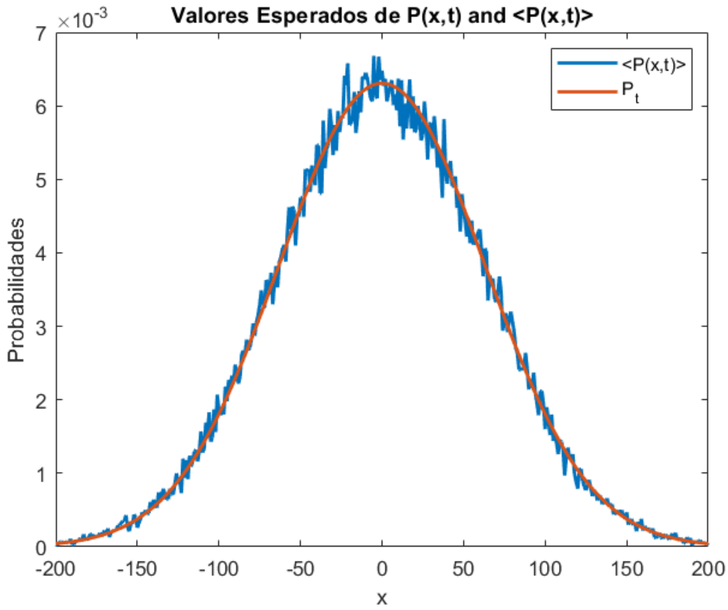

Figura 3: Valores computados para P(x,t)

Como se pode verificar (apesar de alguma variância) os valores computados convergem para os valores teóricos esperados.

Um outro aspeto que importa mencionar é que à medida que se aumentam as ordens de grandeza de t_f a utilizar verifica-se o teorema do limite central. A figura 6 ilustra este processo

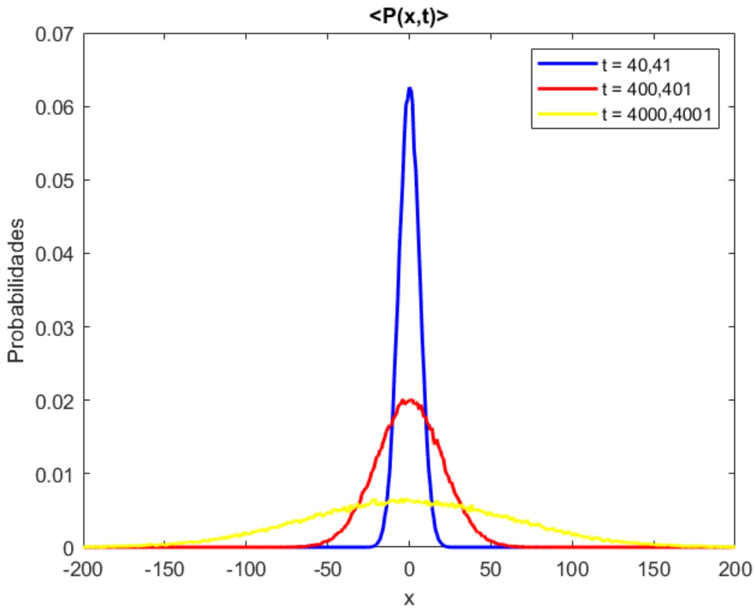

Figura 4: Valores computados para vários t_f diferentes

Como se pode verificar à medida que se aumenta o tamanho da amostra a distribuição de probabilidades computada aproxima-se cada vez mais perfeitamente de uma distribuição normal centrada em 0 com média 1.

Finalmente foram verificadas 3 propriedades, conforme nas seguintes equações:

$$\sum_x \bar{P}(x,t) = 1 \tag{4}$$

$$\sum_x x\bar{P}(x,t) = 0 \tag{5}$$

$$\sum_x (x - \langle x \rangle)^2 \bar{P}(x,t) = t \tag{6}$$

3 Passeio Aleatório 1D com *Drift*

Nesta secção, realizou-se um estudo igual, na sua maioria, ao de secção anterior, com uma ligeira diferença introduziu-se um *drif* nas probabilidades p e q no valor de $\delta = 0.05$. De onde se obtém os seguintes valores:

$$p = 0 - 5 - \delta \tag{7}$$

$$q = 0.5 + \delta \tag{8}$$

Após ter em conta as considerações previamente expostas, produziram-se os seguintes gráficos:

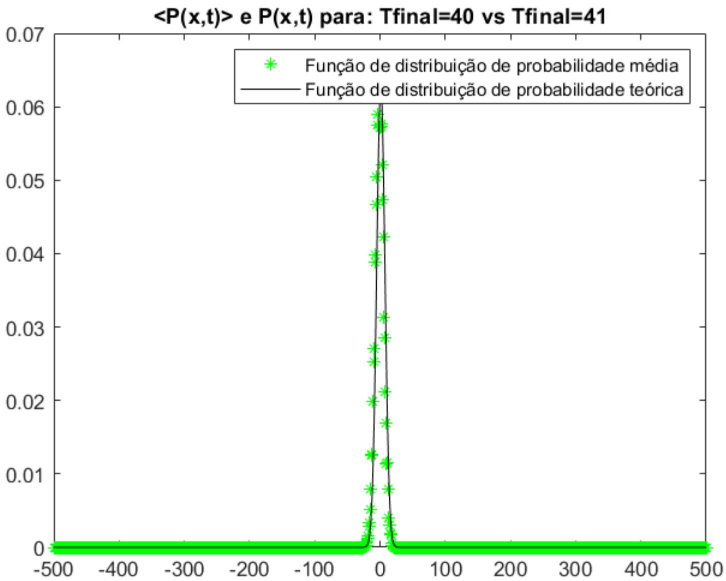

Figura 5: Valores computados para vários t_f diferentes

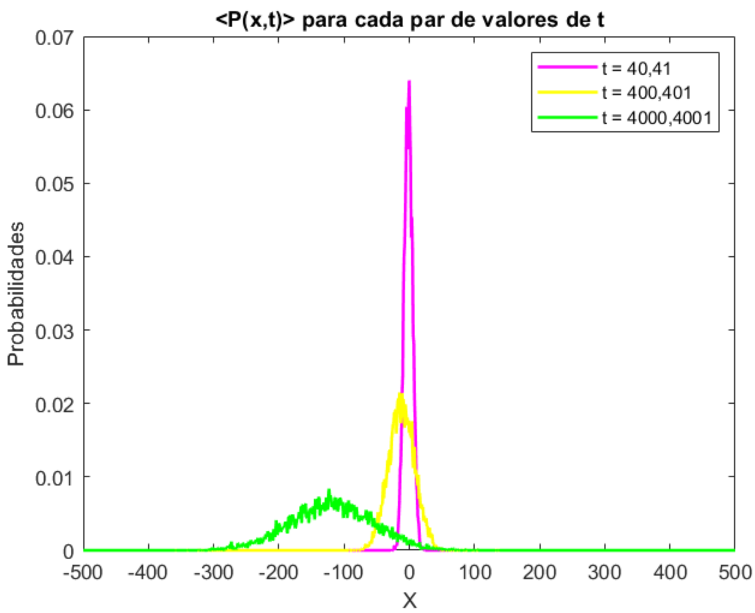

Figura 6: Valores computados para vários t_f diferentes

Como se pode verificar, mais uma vez, o teorema do limite central é confirmado pelos resultados sendo que estes, a medida que se aumenta t_f se aproximam de uma distribuição normal com média em 0.

4 Conclusão

Neste relatório foram estudados passeios aleatórios a uma dimensão e foi posteriormente aplicado um *drift* ao sistema em consideração. Como houve aproximação dos resultados obtidos aos resultados teóricos, o autor considera que houve sucesso nas simulações elaboradas

Uma possível maneira de melhor a qualidade dos resultados obtidos, isto é, obter uma maior convergência com o mesmo número de números aleatórios gerados, será, por exemplo, estudar mais atentamente o gerador de números pseudo-aleatórios do *matlab* e tentar aproximar o comportamento deste a um verdadeiro gerado de números aleatórios.