

Trabalho 3 - Passeios Aleatórios a 2 Dimensões

Modelação de Sistemas Complexos

Universidade de Aveiro

João Maria Machado, 89132

13 de maio de 2022

1 Introdução

No seguimento do trabalho anterior (Passeios aleatórios a 1 dimensão), pretende-se agora estender o conhecimento previamente adquirido a passeios aleatórios, desta vez, a 2 dimensões. De um modo geral, um passeio aleatório pode ser descrito como um caminho de partícula aleatória de deslocamentos. Desta vez, em vez de se considerarem dois possíveis deslocamentos unitários (cima e baixo, por exemplo), consideram-se 4 possíveis deslocamentos num espaço bidimensional (cima, baixo, esquerda e direita, por exemplo).

Os deslocamentos de um passeio aleatório são gerados por um de Markov, isto é, o próximo estado depende apenas do estado atual, o que implica que os deslocamentos são independentes.

No presente relatório serão discutidos e resolvidos os problemas propostos no enunciado fornecido. Para cada problema proposto será exposto o respetivo método de resolução seguido de um breve comentário acerca do enquadramento dos resultados obtidos nos resultados esperados.

2 Passeios Aleatórios Bidimensionais

Neste problema foi estudado o comportamento de um passeio aleatório simétrico a duas dimensões, para tal efeito realizaram-se simulações numéricas (estocásticas) de passeios aleatórios de uma partícula num espaço bidimensional. Considerou-se que independentemente do deslocamento, isto é, quer seja para esquerda, direita, cima ou baixa, a probabilidade de este acontecer é de distribuição uniforme, conforme sugerido pela equação abaixo:

$$P(\text{Deslocamento} = \text{Cima}) = P(\text{Deslocamento} = \text{Baixo}) \quad (1)$$

$$= P(\text{Deslocamento} = \text{Esquerda}) \quad (2)$$

$$= P(\text{Deslocamento} = \text{Direita}) = 0.25 \quad (3)$$

Numa primeira começou-se por desenhar a trajetória de 3 passeios aleatórios a duas dimensões, isto é, a posição em y em função da posição de x para um número total de $t_f = 100$ saltos. O trecho de código na figura 1 contém a porção do algoritmo responsável por computar estas trajetórias. Importa mencionar que este algoritmo resulta da implementação direta, em *matlab* do algoritmo fornecido no enunciado.

```

for k=1:n
    x=0;y=0;
    for i=2:length(t)
        A=randi([1,4]);
        mov_x=0;
        mov_y=0;
        if A==1
            mov_y=1;
        elseif A==2
            mov_x=1;
        elseif A==3
            mov_y=-1;
        elseif A==4
            mov_x=-1;
        end
        x=mov_x+x;
        y=mov_y+y;
        r(i,:,k)=[x y]; % posição da partícula
    end
end

```

Figura 1: Implementação da função *trjetorias*

Desse modo, foram produzidos gráficos da trajetória em y em função de x . A figura 2 contém o gráfico da trajetória computada.

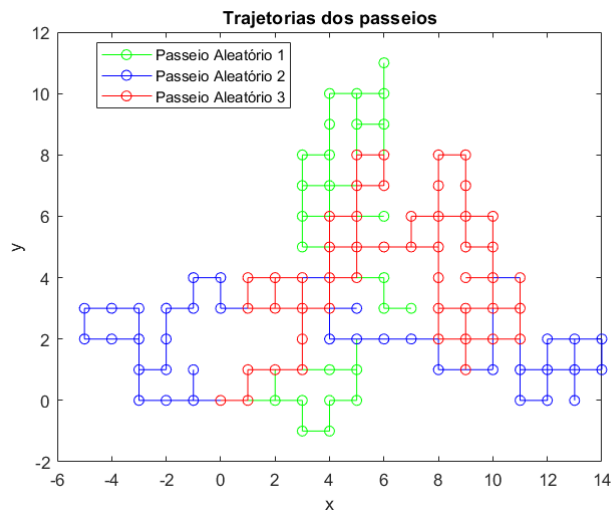


Figura 2: Trajetórias Computadas

Para facilitar a visualização da informação disposta pode-se também considerar a evolução temporal de cada uma das coordenadas em função do tempo, ou seja, pode-se analisar isoladamente $x(t)$ e $y(t)$.

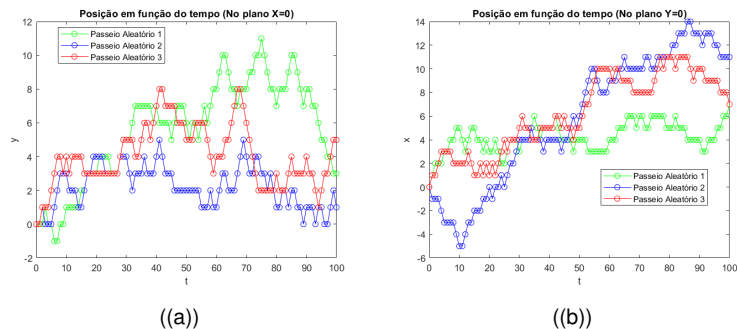


Figura 3: Gráficos das funções das trajetórias $x(t)$ em (a) e $y(t)$ em (b)

Como se pode verificar, através da análise da figura 3, à medida que se avança no tempo a distancia relativa entre os passeios vai aumentando, este comportamento deve-se à natureza caótica do sistema.

Numa próxima etapa, foi pedido que se computasse a probabilidade $P(x, y, t)$ de encontrar uma partícula após um determinado tempo t numa determinada coordenada (x, y) . Para validar as probabilidades computadas foram verificadas as seguintes propriedades:

$$\langle x \rangle = \langle y \rangle, \quad (4)$$

$$\langle x^2 + y^2 \rangle = t. \quad (5)$$

Para tal efeito, empregou-se um algoritmo semelhante a 1, com uma pequena diferença, nesta implementação, foi também computada o número de vezes que um dos passeios aleatórios se encontra num ponto (x, y) - $N(x, y, t)$. Desse modo, calcular $P(x, y, t)$ torna-se trivial, conforme descrito pela equação abaixo:

$$P(x, y, t) = \frac{N(x, y, t)}{N}. \quad (6)$$

Onde N representa o número total de movimentos de uma determinada partícula.

Antes de proceder à apresentação dos resultados importa mencionar que a probabilidade de encontrar um passeio aleatório numa determinada coordenada (x, y) segue uma função de distribuição normal, dada pela seguinte equação:

$$P(x, y, t) = \frac{1}{\pi t} e^{-\frac{x^2 + y^2}{t}} \quad (7)$$

Para concluir esta secção resta apresentar os resultados. A figura 4 contém um *subplot* onde à esquerda se encontram as probabilidades computadas e à direita se encontram os valores teóricos esperados. Para facilitar a visualização da informação encontra-se também uma projeção do gráfico no plano $Y = 0$

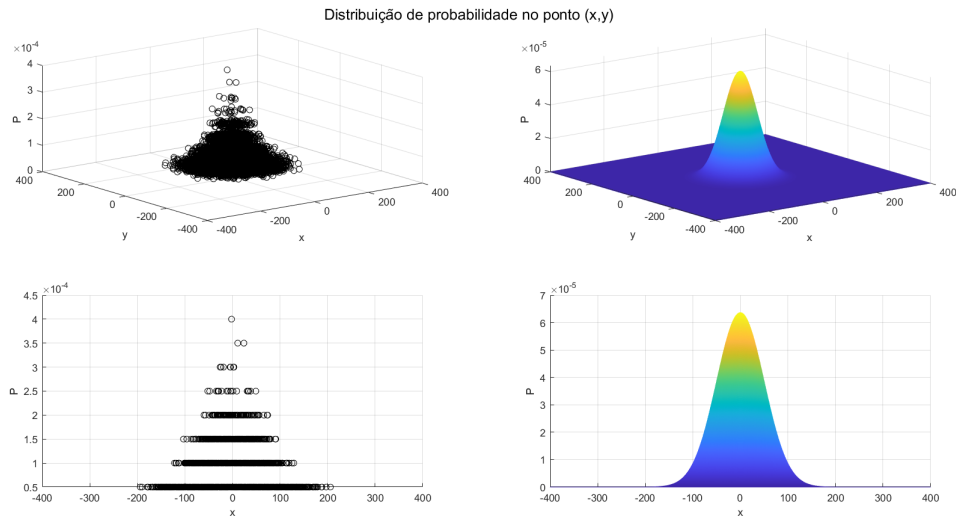


Figura 4: Probabilidades Computadas e respetivos valores esperados

Como se pode verificar os há uma evidente semelhança entre os valores computados e os valores esperados. Importa também mencionar que as propriedades das equações 4 e 5 foram verificadas numericamente pelo *script* produzido

3 Primeira Passagem e Probabilidade de Sobrevivência

Pretende-se agora estudar tempos de primeira passagem e probabilidades de sobrevivência. De um modo, geral o tempo de primeira passagem corresponde à probabilidade com que a partícula atinge um determinado ponto (x, y) pela primeira vez durante um intervalo de tempo $[t, t + \Delta t]$. Esta probabilidade pode ser computada segundo a seguinte equação:

$$F(x, y, t) = \frac{N_{fpt}(x, y, t, t + \Delta t)}{N \Delta t} \quad (8)$$

Analogamente, a probabilidade de se sobrevivência corresponde à probabilidade com que a partícula atinge uma armadilha (que existe numa determinada coordenada ou região do espaço). Quando a partícula atinge esta armadilha é aniquilada. A probabilidade de sobrevivência é descrita pela seguinte equação:

$$S(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_s(t)}{N} \quad (9)$$

Onde $N_s(t)$ representa o número de partículas que sobreviveram ao passeio aleatório e N representa o número de partículas simuladas.

Tendo em mente os conceitos previamente introduzidos, pode-se agora proceder ao estudo do sistema conforme proposto no enunciado fornecido.

Para tal efeito computam-se $N = 50000$ vezes e precede-se a computar as funções $F(x, y, t)$ e $S(t)$. Este processo foi facilitado visto que resulta de uma pequena alteração no *script* produzido na secção anterior. A figura 5 contém o trecho de código onde é implementada essa pequena alteração.

```
%Detetar traps
if x==xc
    F_c(i)=F_c(i)+1;
    break
else
    S_c(i)=S_c(i)+1;
end
```

Figura 5: Deteção de armadilhas

Antes de proceder à apresentação dos resultados obtidos importa estabelecer aquilo que se entende como resultados esperados neste problema. As seguintes equações contêm os valores teóricos esperados para $F(t)$ e $S(t)$:

$$F(t) = \frac{|x_b - x_0|}{2\sqrt{\pi Dt^3}} \exp\left(-\frac{(x_b - x_0)^2}{4Dt}\right), \quad (10)$$

$$S(t) = \operatorname{erf}\left(\frac{|x_b - x_0|}{2\sqrt{Dt}}\right). \quad (11)$$

Onde $x_0 = 0$ corresponde à posição inicial e $x_b = -30$ corresponde à posição de uma barreira e $D = \frac{1}{4}$ corresponde ao coeficiente de difusão.

Após se ter estabelecido os resultados esperados, resta apresentar os resultados obtidos para a função $F(t)$. A figura 6 contém os gráficos com os valores computados.

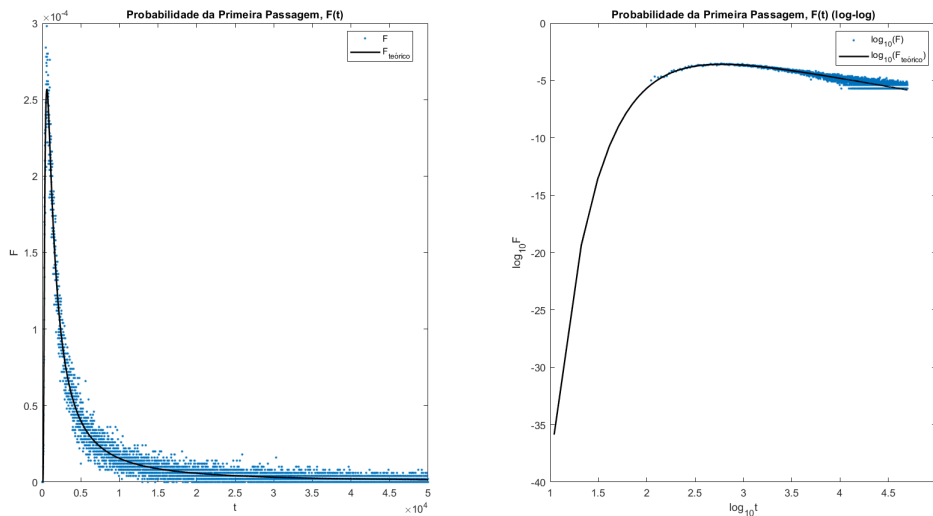


Figura 6: Valores Computados para a função $F(t)$. A direita podem observar-se os gráficos numa escala linear e à esquerda observam-se os mesmos gráficos numa escala logarítmica

Em seguida resta apresentar os valores computados para $S(t)$. À figura 7 contém os gráficos com os valores computados.

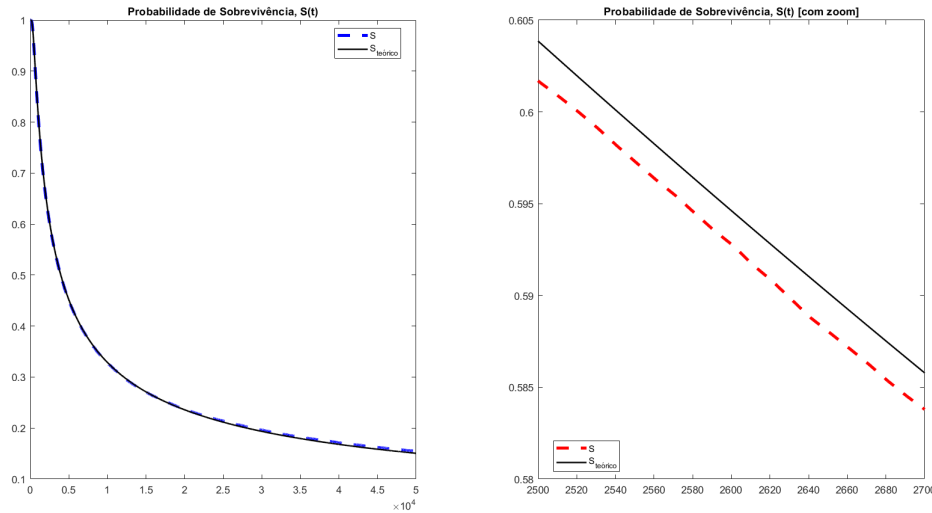


Figura 7: Valores Computados para a função $S(t)$. A direita podem observar-se os mesmos valores com uma ampliação

Como se pode verificar na figura 6 há uma convergência entre os valores computados e os valores teóricos esperados em ambas as escalas apresentadas, sendo que a função $F(t)$ apresenta um comportamento hiperbólico. Um outro aspeto que importa mencionar é que após atingir o ponto de inflexão a função decresce cada vez mais lentamente, indicando uma convergência para o choque com a armadilha, isto é, *"The drunk man, randomly walking in a town will reach sooner or later reach his home, because he is moving in a 2D system."*. Analiticamente este comportamento também pode ser explicado pela proporcionalidade de $F(t)$ a $\frac{1}{t(\ln t)^2}$. Finalmente resta também referir que o máximo da função toma advém da dependência de $F(t)$ com o fator $t^{-\frac{2}{3}}$.

Para finalizar esta secção resta realizar um breve análise acerca dos resultados obtidos na figura 7. Como se pode verificar há uma convergência dos valores computados com os valores teóricos esperados. Através deste gráfico é possível intuir a posição da barreira no espaço, visto que o valor do ponto de inflexão corresponde à coordenada barreira normalizada. Isto é a partir do momento em que passa pela barreira no passeio aleatório a probabilidade de sobrevivência decresce cada vez mais rapidamente.

4 Voos de Lévy

Nesta ultima secção foi proposto o estudo de voos de Lévy. Um voo de Lévy consiste num passeio aleatório onde o tamanho do salto é variável. A probabilidade de um determinado salto ter comprimento l é dado pela seguinte equação:

$$P(l) = Cl^{-\mu}, \quad (12)$$

onde,

$$C = \frac{\mu - 1}{1 - l_{max}^{1-\mu}}, \quad (13)$$

e μ representa a variância do sistema.

Numa primeira etapa do estudo deste tipo de sistemas começou-se por computar a trajetória de 3 voos de Lévy. Para esse efeito implementou-se, em *matlab*, um algoritmo análogo ao descrito na figura 5, com a pequena diferença de que este algoritmo computa, em cada iteração, o tamanho do salto a efetuar. A figura 8 contém o trecho de código que ilustra este processo.

```

for k=1:length(mu)
    x=0;
    y=0;
    for i=2:length(t)
        x_rand=rand(1);
        x_rand2=rand(1);
        l(i,k)=l_max/(((l_max^(mu(k))-1)-1)*x_rand+1)^(1/(mu(k)-1)));
        angle=2*pi*x_rand2;
        mov_x=l(i,k)*cos(angle);
        mov_y=l(i,k)*sin(angle);
        x=mov_x+x;
        y=mov_y+y;
        r_var(i,:)=x y;
    end
end

```

Figura 8: Cálculo de posições com saltos de tamanho variável

Desse modo, foi possível produzir as trajetórias conforme apresentadas na figura 9

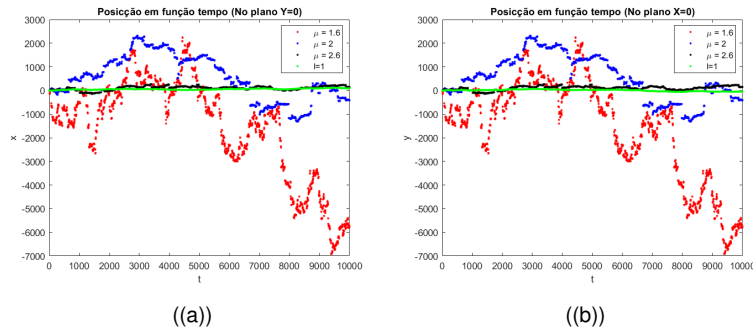


Figura 9: Valores computados para as posições $x(t)$ (em a) e $y(t)$ (em b) dos voos de Lévy

Em seguida, foi proposto que se provasse que se x é um número aleatório uniformemente gerado num intervalo $[0, 1]$ então os números aleatórios:

$$l(x) = \left[1 - x(1 - l_{max}^{1-\mu}) \right]^{\frac{1}{1-\mu}}, \quad (14)$$

estão distribuídos conforme a distribuição dos voos de Lévy ilustrados na equação 12.

Desse modo, para cada um dos voos previamente computados, calculou-se a probabilidade com que cada l ocorre, e desenhou-se o respectivo histograma. Em seguida foi efetuada uma comparação com os valores previstos pela equação 12. A figura 10 contém os gráficos com os histogramas e as funções de distribuição probabilidades computadas (importa mencionar, que o perfil de um histograma corresponde à função de distribuição de probabilidade).

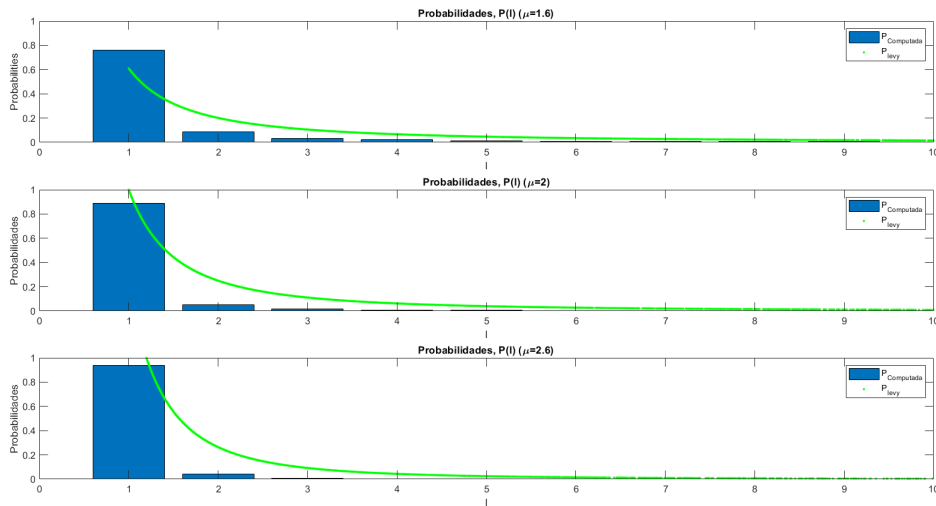


Figura 10: Função de distribuição prevista e histogramas da frequência de cada tamanho possível para l .

Como se pode verificar, há uma semelhança entre o comportamento da função $P_{Lévy}$ e o perfil dos histogramas computados, verificando, numericamente, a equação 12.

Numa etapa final foi proposto uma questão conceptual. Foi pedido que se colocasse no papel de um tubarão que procura maximizar o alimento a consumir num dado intervalo de tempo em duas situações:

1. Quando os peixes a atacar se distribuem de forma homogénea no espaço.
2. Quando os peixes formam cardumes numa posição aleatória.

Para a primeira situação, a estratégia ótima seria efetuar um passeio aleatório de l constante sendo que os peixes se encontram distribuídos uniformemente, logo procurá-los de forma uniforme seria o mais eficaz

Para a segunda situação a estratégia mais eficaz seria efetuar um voo de Lévy, pois desse modo permitiria efetuar saltos longos antes de se atingir o cardume (ou seja, não ficar muito tempo numa região sem comida) e realizar saltos curtos na localização do cardume e atacar o máximo de peixes possíveis.

5 Conclusão

Neste relatório foram estudados passeios aleatórios a 2 dimensões de forma em três situações: passeios aleatórios 2D (de forma geral), Probabilidades de Sobrevivência e Voos de Levy. Como houve aproximação dos resultados obtidos aos resultados teóricos esperados, o autor considera que houve sucesso nas simulações elaboradas.

Uma possível maneira de melhorar a qualidade dos resultados obtidos, isto é, obter uma maior convergência com o mesmo número de números aleatórios gerados, será, por exemplo, estudar mais atentamente o gerador de números pseudo-aleatórios do *matlab* e tentar aproximar o comportamento deste a um verdadeiro gerado de números aleatórios.