Sistemas de Visão e Percepção Industrial

3-Processamento a Médio Nível

Morfologia - Formalização e extensão para níveis de cinzento

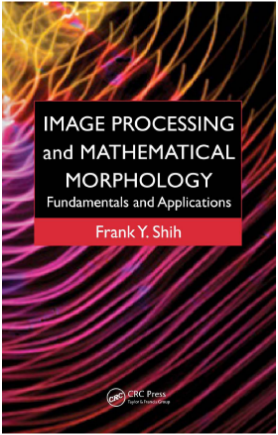
Universidade de Aveiro
2021-2022

Sumário

Referências

- Sonka, Cap. 11
- Burger, Cap. 10
- Gonzalez, Cap. 9
- Davies, Cap. 8

- Para estudos mais completos:
  - Image Processing and Mathematical Morphology: Fundamentals and Applications, F. Y. Shih, CRC Press, 2009.



Introdução e conceitos

Operações e definições da álgebra de conjuntos

- $\cap$ - interseção de conjuntos
- $\cup$ - reunião de conjuntos
- $\varnothing$ - conjunto vazio
- $\#$ - cardinal de um conjunto
- $\setminus$ - operação de "subtração" de conjuntos
- $\subset$ - Está contido (é subconjunto de)
- $\subseteq$ - Está contido ou é idêntico a
- $\not\subset$ - não está contido
- $\supset$ - Contém
- $\supseteq$ - Contém ou é idêntico a
- $\in$ - Pertence
- $\notin$ - Não pertence

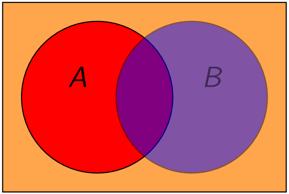
Formalização da morfologia

- Baseada na teoria de conjuntos
  - São exemplos de conjuntos:
    - Imagens
    - grupos de pixels ligados (regiões)
    - Vizinhanças/elementos estruturantes
- Nota preliminar
  - Os conjuntos de pontos em estudo são pixels (brancos, ou de objeto) que se caracterizam pelas suas coordenadas.
  - Portanto, trabalha-se unicamente com imagens binarizadas (exceto nos casos explicitamente apresentados mais tarde).

Definições e formalismos de conjuntos

- Os pixels
  - Os pontos associados aos pixels de imagens são em geral definidos num espaço Euclidiano (E) a duas dimensões: $p = (x, y)$, ou seja $p \in E^2$.
  - Mas, no caso geral, esse espaço consiste apenas de inteiros, eventualmente negativos, logo é comum utilizar $\mathbb{Z}^2$.

- Operações comuns
  - Reunião de dois conjuntos
    - $A \cup B = \{p \in \mathbb{Z}^2 : (p \in A) \vee (p \in B)\}$
  - Interseção de conjuntos
    - $A \cap B = \{p \in \mathbb{Z}^2 : (p \in A) \wedge (p \in B)\}$
  - Complemento de conjunto
    - $A^C = \{p \in \mathbb{Z}^2 : p \notin A\}$
  - Subtração de conjuntos
    - $A \setminus B = A - B = A \cap B^C = \{p \in \mathbb{Z}^2 : (p \in A) \wedge (p \notin B)\}$



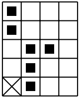
Quem é quem?

Formalismos de conjuntos – equivalente Matlab

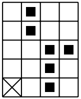
- Operações comuns – tradução em Matlab
- Reunião de dois conjuntos
  - $A \cup B = \{p \in \mathbb{Z}^2 : (p \in A) \vee (p \in B)\}$
  - Em Matlab: `C = A | B`
- Interseção de conjuntos
  - $A \cap B = \{p \in \mathbb{Z}^2 : (p \in A) \wedge (p \in B)\}$
  - Em Matlab: `C = A & B`
- Complemento de conjunto
  - $A^{\mathsf{C}} = A^{\complement} = \bar{A} = \{p \in \mathbb{Z}^2 : p \notin A\}$
  - Em Matlab: `C = ~A`
- Subtração de conjuntos
  - $A \setminus B = A - B = A \cap B^{\mathsf{C}} = \{p \in \mathbb{Z}^2 : (p \in A) \wedge (p \notin B)\}$
  - Em Matlab: `C = A & ~B`

A operação de translação morfológica (*shift*)

- Operação que altera os pontos de um conjunto por modificação das suas coordenadas por adição de valores (translação).
- Sendo
  - A um conjunto de pontos (pixels não nulos numa imagem),
  - h um vetor que representa a translação morfológica a aplicar:
- A_h representa o novo conjunto (*shifted point set*) que se define:
- $A_h = \{p \in \mathbb{Z}^2 : p = x + h, x \in A\}$
- Exemplo com $h = (1, 0)$:



A



$A_h = A_{(1,0)}$

- O símbolo $\boxtimes$ representa a referência de coordenadas: $(0, 0)$.

Notação de operadores morfológicos

- Representação das operações básicas
- Dilatação da imagem A com o elemento estruturante B:

  $$A \oplus B$$

- Erosão da imagem A com o elemento estruturante B:

  $$A \ominus B$$

- Abertura da imagem A com o elemento estruturante B:

  $$A \circ B$$

- Fecho da imagem A com o elemento estruturante B:

  $$A \bullet B$$

A dilatação

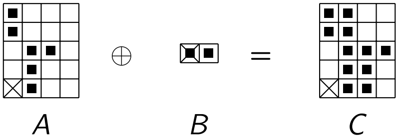
Dilatação – definição formal

- Dilatação da imagem A com o elemento estruturante B:
  - $C = A \oplus B$
- A operação de dilatação resulta num conjunto de pontos que representa todas as combinações de somas vetoriais de pontos entre os dois conjuntos em operação:
- $C = A \oplus B = \{c \in \mathbb{Z}^2 : c = a + b, a \in A \wedge b \in B\}$
  - $\mathbb{Z}^2$ é o espaço euclidiano a duas coordenadas (inteiras)
  - a, b e c são pontos a duas coordenadas [neste contexto, também são as coordenadas de pixels].

Exemplo de dilatação

- Exemplo:
  - $A = \{(1,0); (1,1); (1,2); (2,2); (0,3); (0,4)\}$
  - $B = \{(0,0); (1,0)\}$
  - Então, se $C = A \oplus B$
  - $C = \{(1,0); (1,1); (1,2); (2,2); (0,3); (0,4);$
    $(2,0); (2,1); (2,2); (3,2); (1,3); (1,4)\}$

Pontos repetidos reduzem-se a um!



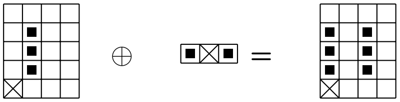
- Pontos de referência (origem ⊠) em cada conjunto com valor $(0,0)$.

Outro modo de formalizar a dilatação

- A dilatação pode também ser vista com uma união de todas as translações possíveis do objeto A com todos os elementos do elemento estruturante B
- $A \oplus B = \cup A_h$, para todos h , ou

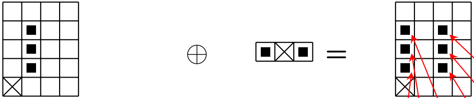
$$A \oplus B = \bigcup_{h \in B} A_h$$

- Exemplo ilustrativo onde $B = \{(-1, 0); (1, 0)\}$ e, portanto, o fulcro (ou ponto representativo, ou origem) não está incluído no elemento estruturante.



Outro modo de formalizar a dilatação (cont.)

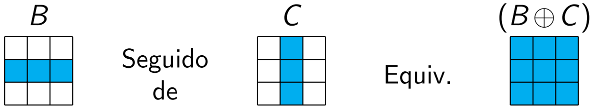
- Exemplo ilustrativo onde $B = \{(-1,0); (1,0)\}$ onde, portanto, o fulcro (ou ponto representativo, ou origem) não está incluído no elemento estruturante.



- Cálculos:
  - $A = \{(1,1); (1,2); (1,3)\}$
  - $B = \{(-1,0); (1,0)\}$
  - $A_{(-1,0)} = \{(0,1); (0,2); (0,3)\}$
  - $A_{(1,0)} = \{(2,1); (2,2); (2,3)\}$
  - $A \oplus B = A_{(-1,0)} \cup A_{(1,0)} = \{(0,1); (0,2); (0,3); (2,1); (2,2); (2,3)\}$

Algumas propriedades da dilatação

- Comutativa: $A \oplus B = B \oplus A$
- Associativa: $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
- A associatividade permite, por exemplo, aplicar duas dilatações de seguida sobre uma imagem e obter o mesmo resultado:

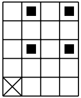


- $A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$
  - Distributividade em relação à união (a união equivale à junção de conjuntos pela operação de "ou" lógico dos pixels "0" e "1".)

Dilatação com elementos estruturantes menos comuns

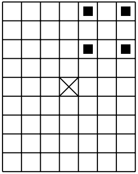
- Pela definição, qual o efeito de elementos estruturantes como, por exemplo, estes?

$\{(-1,0),(1,0),(2,0),(4,0)\}$



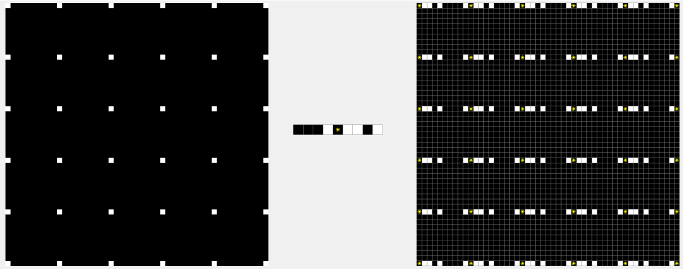
$\{(1,2),(3,2),(1,4),(3,4)\}$

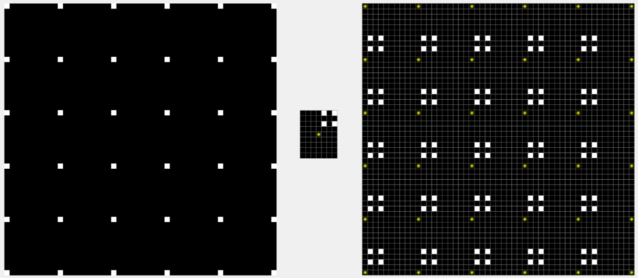
- Implementações respetivas em Matlab (que assume a origem como o ponto médio da matriz)



vs_se_strange.m

Resultados em Matlab





- As grelhas representadas são meramente ilustrativas para melhor identificar os "pixels"

A erosão

Erosão – definição formal

- Erosão da imagem A com o elemento estruturante B:
  - $C = A \ominus B$
- A operação de erosão resulta num conjunto de pontos tais que a sua translação com todos os elementos do elemento estruturante (B) resultaria nos pontos do conjunto em erosão (A):
- $C = A \ominus B = \{c \in \mathbb{Z}^2 : c + b \in A, \text{para todos } b \in B\}$
  - $\mathbb{Z}^2$ é o espaço euclidiano a duas coordenadas (inteiras).
  - a, b e c são pontos a duas coordenadas [neste contexto, são as coordenadas dos pixels (de objeto)]
  - Em termos práticos, o cálculo far-se-ia testando todos os pontos de A para ver se verificariam a definição.
  - Porém, este método não permite um cálculo tão imediato.
  - Isso poderá ser feito com outras definições...

Outras definições de erosão

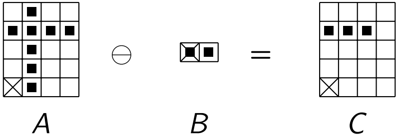
- $C = A \ominus B = \{c \in \mathbb{Z}^2 : B^{\mathsf{C}} \subseteq A\}$
- Ou aquela que é mais fácil de aplicar na prática:
- $C = A \ominus B = \cap A_{-h}$, para todos $h \in B$, ou

$$A \ominus B = \bigcap_{h \in B} A_{-h}$$

  - A_{-h} representa a translação morfológica com o vetor simétrico de h
- Com esta definição, pode-se definir o resultado da erosão como a interseção de todas as translações da imagem original (A) com os simétricos de todos os elementos do elemento estruturante (B).

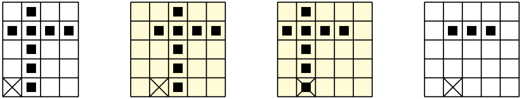
Exemplo de erosão

- Sejam:
  - $A = \{(1,0); (1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (0,3); (2,3); (3,3)\}$
  - $B = \{(0,0); (1,0)\}$
- Então, com $C = A \ominus B$:
  - $C = \{(0,3); (1,3); (2,3)\}$, como se pode concluir por observação visual, mas que se demonstra pela definição mais adiante.



- Pontos de referência (origem $\boxtimes$) em cada conjunto com valor $(0,0)$.

- Sendo
  - $A = \{(1,0); (1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (0,3); (2,3); (3,3)\}$
  - $B = \{(0,0); (1,0)\}$
  - $C = A \ominus B = \{(0,3); (1,3); (2,3)\}$, como se demonstrará.
- Cálculo pela definição: $[C = A \ominus B = \cap A_{-h}$, para todos $h \in B]$
  - $A_1 = A_{(0,0)} = \{(1,0); (1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (0,3); (2,3); (3,3)\}$
  - $A_2 = A_{(-1,0)} = \{(0,0); (0,1); (0,2); (0,3); (0,4); (-1,3); (1,3); (2,3)\}$
  - $C = A_1 \cap A_2 = \{(0,3); (1,3); (2,3)\}$



A $\quad A_1$ $\quad A_2$ $\quad A_1 \cap A_2$

Algumas propriedades da Erosão

- Em geral, a erosão não é comutativa nem associativa
  - $A \ominus B \neq B \ominus A$
  - $(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C)$
- Distributividade "especial" em relação à união
  - $A \ominus (B \cup C) = (A \ominus B) \cap (A \ominus C)$
- Distributividade à esquerda em relação à interseção
  - $(A \cap B) \ominus C = (A \ominus C) \cap (B \ominus C)$

Uma aplicação da erosão

- Qual o significado possível de:
  - $C = A \setminus (A \ominus B)$ ou de $C = (A \oplus B) \setminus A$
  - sendo $B = \text{ones}(3, 3)$

- Obtenção de um contorno!
  - NB, as duas operações $C = A \setminus (A \ominus B)$ e $C = (A \oplus B) \setminus A$ não resultam exatamente na mesma imagem, mas o efeito geral é similar.

vs_erode_edge.m

Abertura e fecho

- Abertura (opening)
  - $A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$
- Fecho (closing)
  - $A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$
- São ambos idempotentes:
  - $(A \circ B) \circ B = A \circ B$
  - $(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$
- Os efeitos finais destas operações são variáveis, mas em geral eliminam detalhes, ruídos e filamentos de imagens, podendo consolidar objetos com relação indefinida entre si...

Operações morfológicas mais complexas

Operação Hit-and-Miss

- Usado na busca de "padrões" de pixels.
- Recorre a dois elementos estruturantes:
  - $A \otimes (E, F) = (A \ominus E) \cap (A^C \ominus F)$
- Se se referir apenas um elemento estruturante, em geral, assume-se que o outro é o complemento:
  - $A \otimes E = A \otimes (E, E^C) = (A \ominus E) \cap (A^C \ominus E^C)$
- Esta operação pode ser levada a cabo numa imagem A com múltiplos pares de padrões...
- ... e o resultado final é obtido por união dos resultados parciais:
  - $\bigcup_i A \otimes (E_i, F_i) = \bigcup_i [(A \ominus E_i) \cap (A^C \ominus F_i)]$

vs_hitmiss_form.m

Operações morfológicas condicionadas

- As operações morfológicas podem ser condicionadas a uma dada "referência".
- Dilatação condicionada: para uma semente A, sendo um elemento estruturante B e uma máscara M, uma iteração de dilatação condicionada é designada por:
  - $A \oplus B; M = (A \oplus B) \cap M$
- Propagação (*dilate/fill*) da semente A até à máscara M com o elemento estruturante B (dilatação recursiva condicionada):

$$D = A \oplus |_M B \triangleq \begin{cases} X_0 = A \\ X_i = (X_{i-1} \oplus B) \cap M & , i = 1, 2, \ldots \\ D = X_i \Leftarrow X_i = X_{i-1} \end{cases}$$

Operações morfológicas repetidas

- Exemplos de operações repetidas recursivamente um determinado número de vezes k: (se $k = 0$ não há qualquer alteração: $C = A$)
- Erosão recursiva k vezes:

$$C = A \ominus kB = ((((A \ominus \underbrace{B) \ominus B) \ominus B) \cdots \ominus B}_{k\ vezes})$$

- Dilatação recursiva k vezes

$$C = A \oplus kB = ((((A \oplus \underbrace{B) \oplus B) \oplus B) \cdots \oplus B}_{k\ vezes})$$

- Porque o seguinte é verdade?

$$C = A \circ kB = A \circ B \quad , \quad \forall_{k>0}$$

Definição morfológica de esqueleto

- Um esqueleto S de uma imagem A define-se morfologicamente como:

$$S(A) = \bigcup_{k=0}^{K} S_k(A)$$

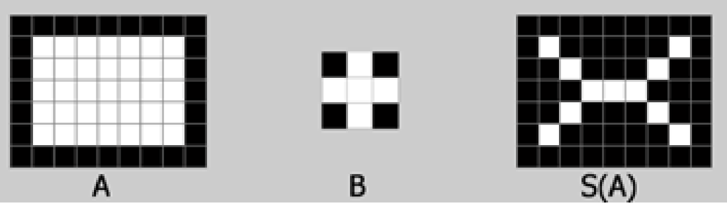
- Onde se tem:

$$S_k\,(A) = (A \ominus kB) \setminus ((A \ominus kB) \circ B)$$

- Onde para $k = 0$ será, naturalmente:

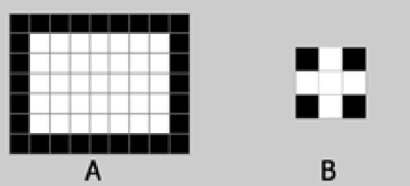
$$S_0(A) = A \setminus (A \circ B)$$

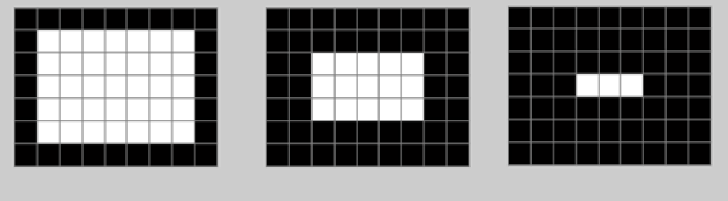
- Dada a imagem A e o elemento estruturante B, obter pela definição formal o esqueleto $S(A)$.



1. Para $k = 0$, $k = 1$, e $k = 2$, determinar e representar $(A \ominus kB)$
2. Para $k = 0$, $k = 1$, e $k = 2$, determinar e representar $(A \ominus kB) \circ B$
3. Com base na definição formal do esqueleto, obter e representar $S_k(A)$ para $k = 0, 1, 2$, e demonstrar que o esqueleto morfológico é dado por $S(A)$ como representado na figura.

$(A \ominus kB)$ Para $k = 0, 1, 2$

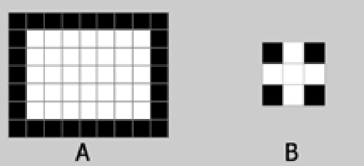




$k = 0$ $\qquad k = 1$ $\qquad k = 2$

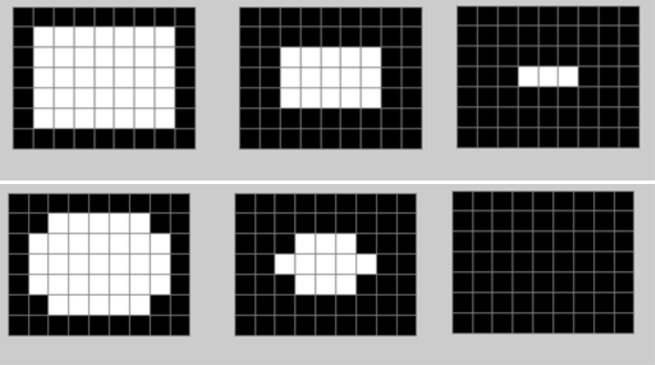
$(A \ominus kB) \circ B$ Para $k = 0, 1, 2$

- Cálculo das aberturas com B
  - Erosão seguida de dilatação



$(A \ominus kB)$

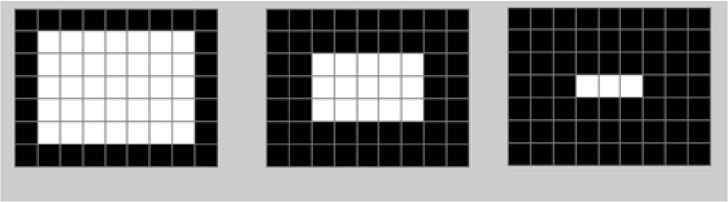
$(A \ominus kB) \circ B$



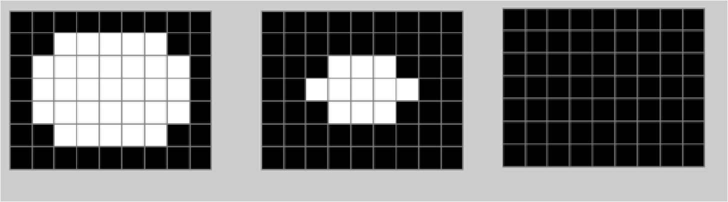
$k = 0$ $k = 1$ $k = 2$

$S_k(A) = (A \ominus kB) \setminus ((A \ominus kB) \circ B)$ Para $k = 0, 1, 2$

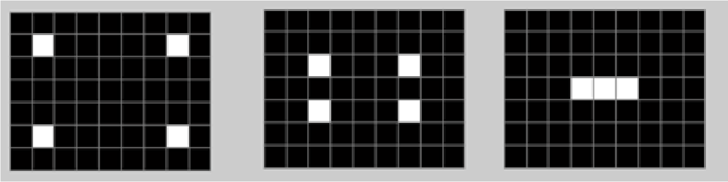
$(A \ominus kB)$



$(A \ominus kB) \circ B$

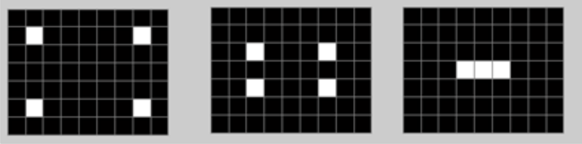


$S_k(A)$

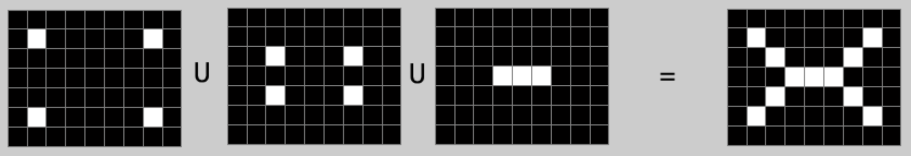


Esqueleto final pela união dos parciais

$S_k(A)$



$$S_0(A) \cup S_1(A) \cup S_2(A) = S(A)$$



Morfologia em níveis de cinzentos

Bases da morfologia em níveis de cinzento

- É possível definir as operações morfológicas para imagens em níveis de cinzento!
- Observações
  - O elemento estruturante H é agora uma entidade com valores reais em função de coordenadas inteiras:
    - $H(i,j) \in \mathbb{R}$, com $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$
  - Os valores nulos de H, podem agora contribuir para o resultado final, o que não acontecia na morfologia binária!
  - As operações em morfologia de cinzentos também se podem aplicar a imagens binárias (com os mesmos resultados).
- As operações binárias OR são substituídas pelo operador MAX
- As operações binárias AND são substituídas pelo operador MIN

A compatibilidade de operações

- Binário: em matlab: $C = A\&B$; em termos de conjuntos: $A \cap B$
- Não binário: $C = \min(A, B)$
  - Exemplos:
    - $\min(1, 1) = 1 = (1\&1)$
    - $\min(1, 0) = 0 = (1\&0)$
- Binário: em matlab: $C = A|B$; em termos de conjuntos: $A \cup B$
- Não binário: $C = \max(A, B)$
  - Exemplos:
    - $\max(1, 0) = 1 = (1|1)$
    - $\max(0, 0) = 0 = (0|0)$
- Mas claro, as operações max() e min() são válidas para todo o tipo de argumentos reais!

Dilatação em níveis de cinzento

- Generalização para imagens não binárias
  - O operador dilatação obtém-se por máximos locais.
  - O valor de um pixel (u, v) da imagem A, quando sujeito a uma dilatação com o elemento estruturante B é dado por:

$$(A \oplus B)(u,v) = \max_{(i,j) \in B} \{A(u+i, v+j) + B(i,j)\}$$

max[(1+2),(2+1),(1+0),(2+3),**(4+5)**,(5+2),(1+2),(0+1),(1+3)]

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ \hline 2 & 4 & 5 & 2 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 8 & 4 & 1 & 5 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 0 \\ \hline 3 & \xcancel{5} & 2 \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 6 & 7 & 6 & 10 & 12 \\ \hline 7 & 9 & 10 & 9 & 10 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 8 & 7 \\ \hline 13 & 10 & 8 & 10 & 7 \\ \hline 9 & 11 & 9 & 6 & 8 \\ \hline \end{array}$$

max[(1+2),(2+1),(2+0),(1+3),**(5+5)**,(1+2),(4+2),(1+1),(0+3)]

- Observe-se que, neste exemplo de B, os termos $i, j \in \{-2, -1, 0, 2, 1\}$, mantendo a fórmula geral correta.

vs_gray_morph_simple.m

Erosão em níveis de cinzento

- Generalização para imagens não binárias
  - O operador erosão obtém-se por mínimos locais.
  - O valor de um pixel (u, v) da imagem A, quando sujeito a uma erosão com o elemento estruturante B é dado por:

$$(A \ominus B)(u,v) = \min_{(i,j)\in B} \{A(u+i, v+j) - B(i,j)\}$$

min[(1-2),(2-1),(1-0),(2-3),(4-5),(5-2),(1-2),(0-1),(1-3)]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ominus \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -4 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & -2 & -3 & -1 \\ -4 & -5 & -4 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & -4 & -3 & -4 \\ -4 & -3 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

min[(1-2),(2-1),(2-0),(1-3),(5-5),(1-2),(4-2),(1-1),(0-3)]

- Observe-se que, neste exemplo de B, os termos $i, j \in \{-2, -1, 0, 2, 1\}$, mantendo a fórmula geral correta.

vs_gray_morph_simple.m

Efeitos principais da erosão e dilatação

- As operações em níveis de cinzento funcionam como operações locais em que a dimensão e o conteúdo do elemento estruturante são determinantes.
- Uma dilatação, em geral, torna a imagem mais clara localmente (quando o SE for positivo)
- Uma erosão, em geral, torna a imagem mais escura localmente (com o SE positivo)

original dilate erode

vs_gray_morph_examples.m

Abertura e fecho em cinzentos

- A definição é a mesma do que nas versões binárias, mas pode ser mais difícil de observar os efeitos visualmente em especial se os elementos estruturantes forem de valores pequenos.
- Exemplos de efeitos em matlab:

original

open

close

vs_gray_morph_examples.m

Outras operações morfológicas

Top-Hat

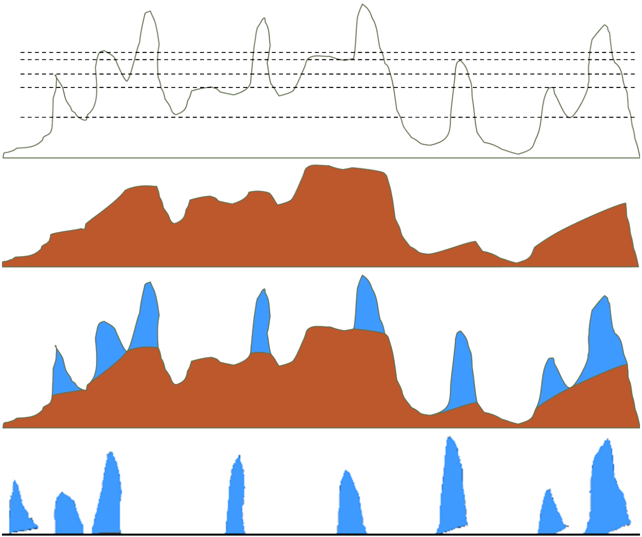
- Diferença entre a imagem original e a sua abertura.
  - $\text{TopHat}(A, B) = A \setminus (A \circ B)$
- O efeito principal é o destacar localmente os pixels em fundos variáveis
- Usada também para realçar regiões em baixos contrastes.
- Formulação do problema a uma dimensão:

- Como fazer para destacar os picos locais?

Ilustração do efeito do Top-Hat a uma dimensão

- $\text{TopHat}(A, B) = A \setminus (A \circ B)$

- Intensidade original. A que nível fazer a segmentação??



- Intensidade da "abertura" (erosão+dilatação) – "topos" ficaram "cortados"

- Top-Hat: topos destacados ficam nivelados

Exemplo de aplicação de Top-Hat

- Imagem original e o seu top-hat
- Respetivas binarizações

vs_top_hat.m

Exemplo de aplicação de Top-Hat – cont.

- O top-hat tem robustez às variação de iluminação.
- Exemplo com imagem original com intensidade duplicada

Exemplo de aplicação de Top-Hat – cont.

- O top-hat tem robustez às variação de iluminação.
- Exemplo com imagem original com intensidade a metade

Ainda sobre o Top-hat

- Coloca-se a questão de qual a dimensão mais adequada do elemento estruturante:
  - Depende do problema.
  - Sugestão: dimensões dos objetos que se pretendem destacar.

Thinning e Thickening

- O Hit-and-Miss é usado como base destas operações
- *Thinning* da imagem A com elementos estruturantes B e C:

$$D = A \oslash (B, C) = A \setminus (A \otimes (B, C))$$

- *Thickening* da imagem A com elementos estruturantes B e C:

$$D = A \odot (B, C) = A \cup (A \otimes (B, C))$$

- Tipicamente tem-se que B e C são complementares
  - mas com alguns "don't care";
- E os elementos estruturantes são vários e não apenas um:
  - Um número de 8 elementos estruturantes é o caso comum.

Elementos estruturantes para thinning e thickening

- Caso do *thinning* e *thickening*, respetivamente:

$$D = A \oslash \{B\} = (((A \oslash B^1) \oslash B^2) \oslash B^3) \cdots \oslash B^8$$
$$D = A \odot \{B\} = (((A \odot B^1) \odot B^2) \odot B^3) \cdots \odot B^8$$

- Onde $\{B\}$ é o conjunto de 8 elementos estruturantes dados por:

$$B^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \times & 1 & \times \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \times \end{bmatrix}, B^3 = \begin{bmatrix} 1 & \times & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \times & 0 \end{bmatrix}, B^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \times \\ 1 & 1 & 0 \\ \times & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$B^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \times & 1 & \times \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^6 = \begin{bmatrix} \times & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}, B^7 = \begin{bmatrix} 0 & \times & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \times & 1 \end{bmatrix}, B^8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \times \\ 0 & 1 & 1 \\ \times & 1 & 1 \end{bmatrix}$$