Sistemas de Visão e Percepção Industrial

Geometria e Imagem

Parte 1 - Transformações Geométricas

Universidade de Aveiro
2021-2022

Sumário

Conceitos geométricos - Revisão

- Pontos no plano e no espaço
  - Vetores a duas e três coordenadas
  - $p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\mathsf{T}$
  - $q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^\mathsf{T}$
- Transformações geométricas no plano
  - Alteração das coordenadas dos pontos
  - $p_0 \rightarrow p_1$
- Transformações comuns
  - Translações
  - Rotações
  - Simetrias (axial e radial ou central)
  - Escala

Transformações no plano

Transformações no plano

- "Transformar" significa alterar as coordenadas de um ou mais pontos.
- As transformações lineares ou afins (affine transformations)
  - As novas coordenadas dependem linearmente das coordenadas originais

$$\begin{cases} x_1 = ax + by + t_x \\ y_1 = cx + dy + t_y \end{cases}$$

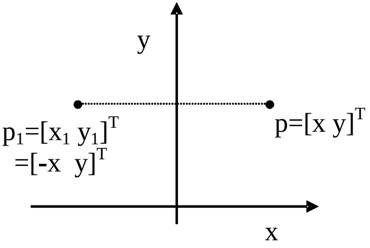
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}_1 = \mathbf{T}\vec{p} + \vec{t}$$

- Casos particulares – a simetria axial

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

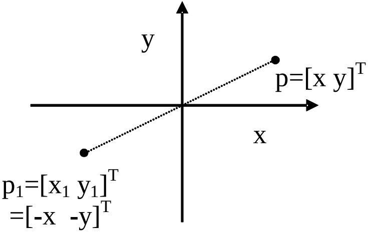
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$



- Casos particulares – a simetria central

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \vec{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

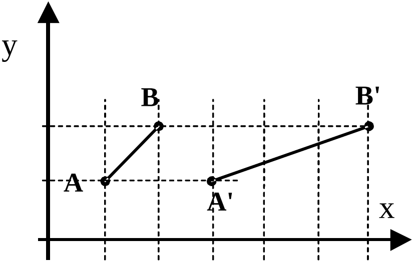


Transformações no plano

- Casos particulares – fator de escala

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \vec{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ y \end{bmatrix}$$

- Exemplo numérico: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$



$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

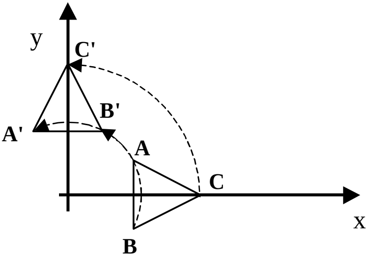
- Casos particulares – Rotação de 90°

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \vec{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

- Exemplo numérico: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$C' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$



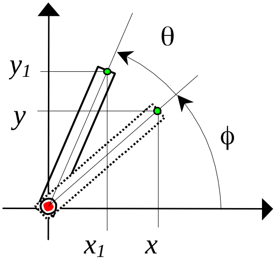
$$\begin{bmatrix} A' & B' & C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

aula3.m

- Rotação de um ângulo genérico θ

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta \\ S\theta & C\theta \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} x_1 = l\cos(\theta+\phi) = l\left(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi\right) \\ y_1 = l\sin(\theta+\phi) = l\left(\cos\phi\sin\theta + \sin\phi\cos\theta\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = l\cos\phi \\ y = l\sin\phi \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y_1 = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} C\theta & -S\theta \\ S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

aula3b.m

Coordenadas homogéneas

Transformações e coordenadas homogéneas

- A translação e a independência das coordenadas do ponto
- A transformação homogénea

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Coordenadas homogéneas – caso geral

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\ p_h = \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ k \end{bmatrix}$$

Representação alternativa

- Alguns autores (e.g. Gonzalez) usam uma representação transposta para as transformações
- Os pontos são vetores linha e não vetores coluna

$$p_1 = \mathbf{T}p \Leftrightarrow p_1^\intercal = (\mathbf{T}p)^\intercal \Leftrightarrow p_1^\intercal = p^\intercal \mathbf{T}^\intercal$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix}$$

Embora igualmente correto não é o formato mais usual e NÃO será o adotado na disciplina!

A matriz de transformação

- Caso geral

$$\text{Rotação} \quad \left[\begin{array}{cc:c} \cos\theta & -\sin\theta & p_x \\ \sin\theta & \cos\theta & p_y \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{Translação}$$

- Rotação e translação pura

$$Rot\,(\theta) = \left[\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$Trans\,(t_x, t_y) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Combinações de transformações

Combinações de transformações

- A associação de transformações é possível.

$$\mathbf{p}' = \mathbf{T}_N \left(\cdots \left(\mathbf{T}_3 \cdot \left(\mathbf{T}_2 \cdot \left(\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{p} \right) \right) \right) \right) = \left(\mathbf{T}_N \cdots \mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1 \right) \mathbf{p} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{p}$$

- Porém, a multiplicação de transformações, em geral, não é comutativa exceto em alguns casos, como:
  - Translações
  - Rotações no plano
- Mas não é comutativa entre rotações e translações.

Sucessão de translações

- As translações são comutativas

$$\mathbf{T}_1 = Trans\left(a_x, a_y\right) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{T}_2 = Trans\left(b_x, b_y\right) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_x \\ 0 & 1 & b_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_x \\ 0 & 1 & b_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a_x + b_x \\ 0 & 1 & a_y + b_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1$$

Sucessão de rotações no plano (2D)

- As rotações no plano são comutativas

$$\mathbf{T}_1 = Rot\left(\theta_1\right) = \left[\begin{array}{cc|c} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$\mathbf{T}_2 = Rot\left(\theta_2\right) = \left[\begin{array}{cc|c} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 = \left[\begin{array}{cc|c} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} C\theta_1 C\theta_2 - S\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_1 S\theta_2 - S\theta_1 C\theta_2 & 0 \\ S\theta_1 C\theta_2 + C\theta_1 S\theta_2 & -S\theta_1 S\theta_2 + C\theta_1 C\theta_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} \cos\left(\theta_1+\theta_2\right) & -\sin\left(\theta_1+\theta_2\right) & 0 \\ \sin\left(\theta_1+\theta_2\right) & \cos\left(\theta_1+\theta_2\right) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sucessão de rotações e translações

- As rotações e translações NÃO são comutativas

$$\mathbf{T}_1 = Trans\left(t_x, t_y\right) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \mathbf{T}_2 = Rot\left(\theta\right) = \left[\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1 \neq \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2$$

$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 = Trans\left(t_x, t_y\right) Rot\left(\theta\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1 = Rot\left(\theta\right) Trans\left(t_x, t_y\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & t_x\cos\theta - t_y\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & t_x\sin\theta + t_y\cos\theta \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

`ex_transf_3.m` e `ex_transf_3b.m`

Generalização para 3D

Generalização para 3D

- Coordenadas homogéneas

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}_h = \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ kz \\ k \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}_h}{k}$$

- Matriz de transformação homogénea

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & t_x \\ d & e & f & t_y \\ g & h & i & t_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Rotações a 3D

- Definidas em torno de tês eixos possíveis

$$Rotz\,(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rotx\,(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Roty\,(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainda sobre a transformação a 3D

- Generalização usada em contextos mais gerais (como, por exemplo, transformações de homografia)

Rotações.
Fatores de escala local

Translação

$$\left[\begin{array}{ccc:c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{32} & p_y \\ r_{31} & r_{23} & r_{33} & p_z \\ \hdashline \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & s \end{array}\right]$$

Distorções de perspetiva

Fator de escala global

- As distorções de perspetiva ficam reservadas para os casos de transformações de homografia que não serão abordadas e, portanto, no presente contexto serão sempre (0,0,0), tal como o fator de escala global que se manterá sempre a 1.