QC Practical assignment

Daniel Francisco Teixeira Andrade - A100057

João Pacheco Mirra - A100083

Exercise 2 - 2x2 binary sudoku

Enunciado

Sudoku is a popular logic-based number-placement puzzle. The objective is to fill a grid with numbers so that each row, column, and designated subgrid contains all numbers without repetition.

For instance, in a 4x4 grid, there are 16 values to be assigned, with each position in the grid taking values 0 to 15. In a 2x2 sudoku, the problem is much simpler, and the rules are reduced to:

1) No column may contain the same value twice

2) No row may contain the same value twice

3) Assignments are binary.

As you should convince yourself, there are only two possible binary assignments to solve the problem.

Tasks:

1) Implement Grover's algorithm to find a solutions to the problem.

2) Assess the algorithm's efficiency and complexity.

3) Propose a generalization for a 3x3 sudoku and discuss potential limitations and resources required.

Imports

In [1]:
```python
import pennylane as qml
from collections import Counter
import math
from matplotlib import pyplot as plt

from typing import Any
```

Implement Grover's algo to find a solution to the problem

Preparação do espaço de procura

O primeiro passo do `algoritmo de Grover` é a preparação do estado inicial.

Para tal, temos de colocar os qubits que representam o espaço de busca numa superposição uniforme.

No código, isto é feito aplicando a porta `Hadamard` (`qml.Hadamard`) a cada qubit de `db` .

Além disso, preparamos um qubit auxiliar (`ancilla`) no estado |->, aplicando a porta Pauli-X (`qml.PauliX`) para inverter o seu estado de |0> para |1>, e em seguida a porta `Hadamard` para criar superposição. Este qubit ancilla é fundamental para que o `oracle` possa realizar a inversão de fase necessária para marcar os estados solução durante o algoritmo.

Fase iterativa: Oracle e Diffuser

Após a preparação do estado inicial, o algoritmo de Grover entra numa fase iterativa em que se aplicam repetidamente duas operações fundamentais: o `oracle` e o `diffuser` .

No código, para cada iteração:

- `Oracle` (inversão dos estados marcados):

O `oracle` é reponsável por identificar os estados que satisfazem as condições do problema (os estados "solução") e multiplicar a amplitude por -1.

Isto é feito através das operações `MultiControlledX` que atuam sobre o qubit ancilla apenas quando os qubits de `db=[0,1,2,3]` correspondem aos estados marcados, neste caso correspondem a `1001` e a `0110`. Assim, os estados que queremos destacar ficam com a sua fase invertida, enquanto os restantes permanecem inalterados.

- `Diffuser` (amplificação dos estados marcados):

  Após o `oracle`, aplicamos o `diffuser`, que tem como objetivo aumentar as amplitudes dos estados marcados para que, na medição, eles sejam obtidos com maior probabilidade.

  Para isso, em cada qubit de `db = [0,1,2,3]` aplicamos uma porta `Hadamard` seguida de uma porta `Pauli-X` - esta combinação transforma o estado para que uma inversão condicional possa ser aplicada.

  A seguir, a operação `ControlledQubitUnitary` com uma porta `Pauli-Z` atua como uma inversão condicional no último qubit, controlado pelos restantes. Aplica a porta Z ao qubit 3 apenas se os qubits 0,1 e 2 estiverem no estado |1>.

  Finalemente, aplicam-se novamente as portas `Pauli-X` e `Hadamard` para reverter as transformações, completando o `diffuser`.

Número ideal de iterações

O `oracle` e `diffuser` são repetidas um número ideal de vezes para maximizar a probabilidade de medir um estado solução no final do algoritmo. Esse número ideal de vezes é dada pela expressão:

$$k = \left\lfloor \frac{\pi}{4 \cdot \arcsin\left(\sqrt{\frac{M}{2^n}}\right)} \right\rfloor$$

onde:

- (`M`) = número de soluções (estados marcados pelo oráculo),
- (`n`) = número de qubits.

Podemos ainda simplicar a formula e retirar o `arcsin`, ficando apenas:

$$k = \left\lfloor \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{\frac{M}{2^n}} \right\rfloor$$

Representação do circuito

Para facilitar a visualizaçao do circuito e distinguir claramante cada fase do algoritmo, foram adicionadas barreiras (`qml.Barrier()`) em três pontos importantes:

- Entre a `inicilização dos qubits` e o `ínicio do loop iterativo`,
- Entre o `oracle` e o `diffuser` dentro do `loop`,
- E por fim, entre o `término da última iteração` e a `operação de medição` (retorno dos samples).

Essas barreiras atuam como divisores visuais no diagrama do circuito, ajudando a perceber melhor a estrutura e o fluxo do `algoritmo de Grover`.

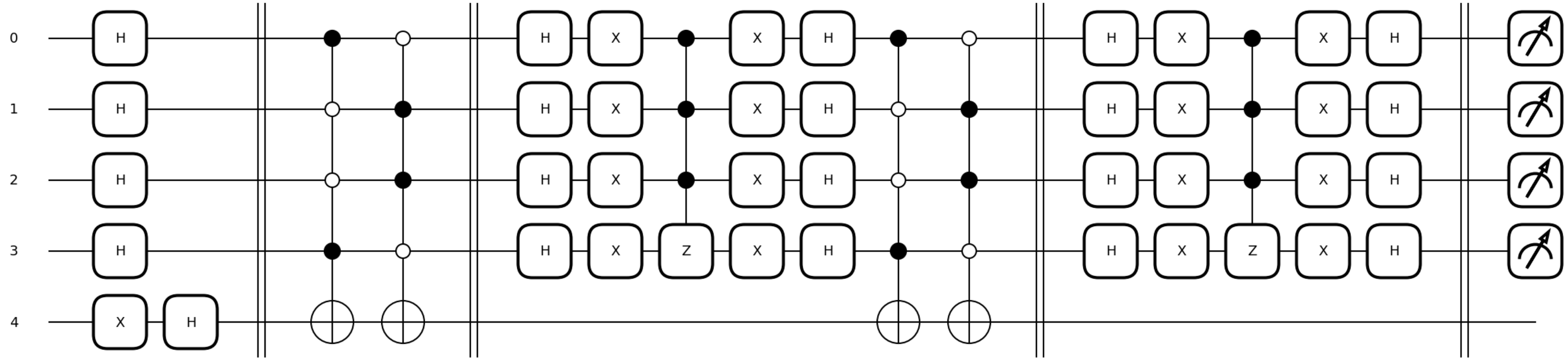
In [12]:

```
n_variable_qubits: int = 4
marked_states: int = 2

optimal_num_iterations: int = math.floor(
    math.pi / (4 * math.asin(math.sqrt(marked_states / 2**n_variable_qubits)))
)

dev: Any = qml.device("default.qubit", wires=5, shots=1024)
"""
Parameters:
    name (str): The name of the device to load.
        'default.qubit' <pennylane.devices.default_qubit>`: a simple state
        simulator of qubit-based quantum circuit architectures.

    wires (int): The number of wires (subsystems) to initialise the device with.

    shots (int): Is an integer that defines how many times
            the circuit should be evaluated (or "sampled") to estimate
            statistical quantities
"""
```

```python
@qml.qnode(dev)
def run_grover_sudoku(iterations: int = 2) -> qml.measurements.SampleMP:

    #create registers
    # 1001 => (0=1, 1=0, 2=0, 3=0)
    db: list[int] = [0,1,2,3] # 0000 to 1111 (all possibilities)
    ancilla: list[int] =[4]

    #superposition
    for i in db:
        qml.Hadamard(wires=i)

    qml.PauliX(wires=ancilla)
    qml.Hadamard(wires=ancilla)

    qml.Barrier() # for visual separation

    for it in range(iterations):

        # oracle (inverte os estados marcados)
        # solutions: 1001 and 0110
        qml.MultiControlledX(control_wires=db, wires=ancilla, control_values=[1, 0, 0, 1]) # marked: 1001
        qml.MultiControlledX(control_wires=db, wires=ancilla, control_values=[0, 1, 1, 0]) # marked: 0110

        qml.Barrier() # for visual separation

        #diffusion (amplifica os estados marcados)
        for i in db:
            qml.Hadamard(wires=i)
            qml.PauliX(wires=i)

        qml.ControlledQubitUnitary(qml.PauliZ(db[-1]), control_wires=db[:-1])

        for i in db:
            qml.PauliX(wires=i)
            qml.Hadamard(wires=i)

    qml.Barrier() # for visual separation

    # measurement
```

```
    return qml.sample(wires=db) # temos ruido

qml.draw_mpl(run_grover_sudoku)(optimal_num_iterations)
```

Out[12]: (<Figure size 2300x600 with 1 Axes>, <Axes: >)

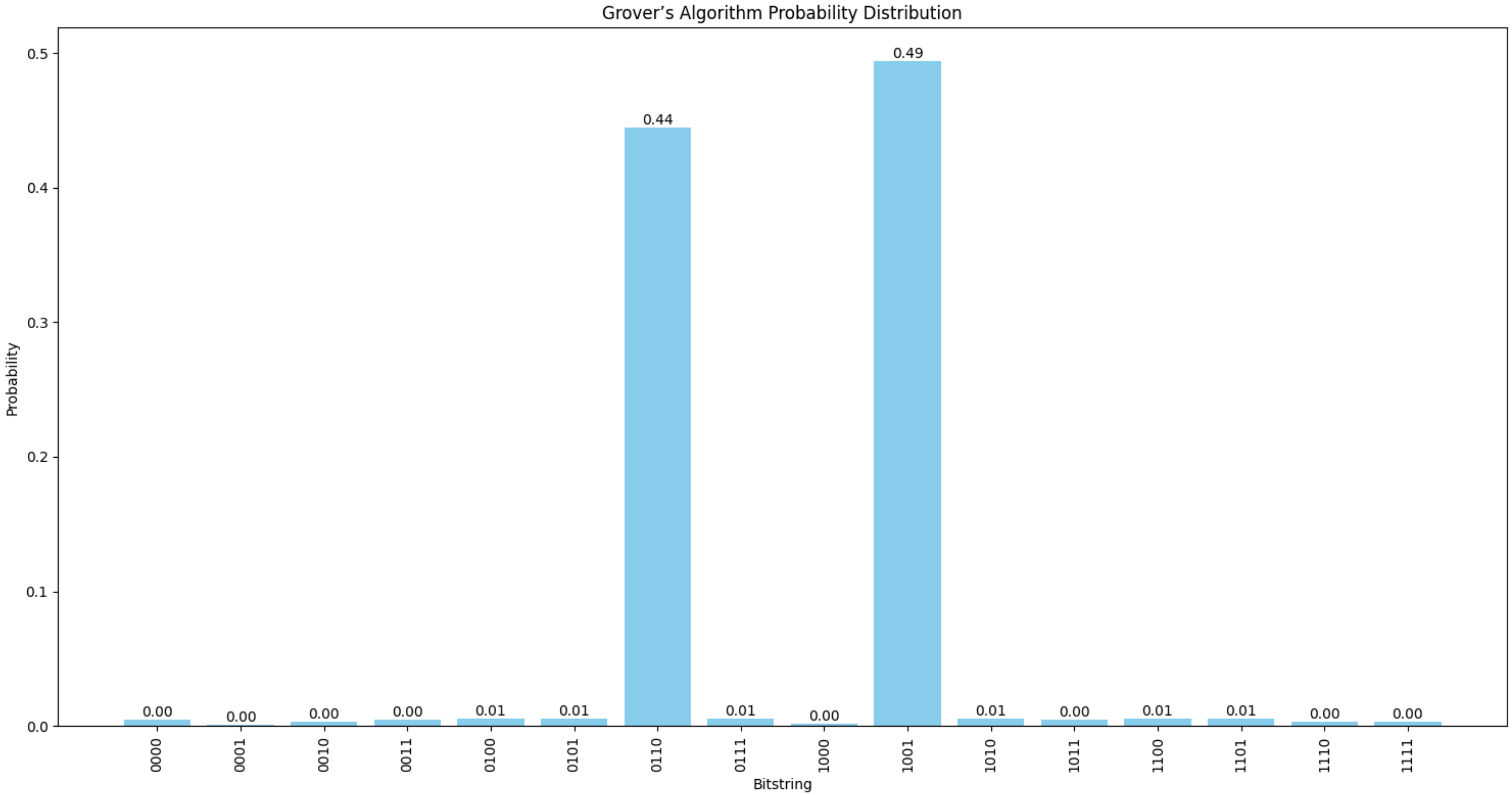


In [14]:

```
samples = run_grover_sudoku()

counts = Counter(''.join(map(str, s)) for s in samples)

total_shots = sum(counts.values())
print(f"Total shots: {total_shots}")


all_bitstrings = [format(i, '04b') for i in range(16)]
probabilities = {bit: counts.get(bit, 0) / total_shots for bit in all_bitstrings}
sorted_probs = [probabilities[bit] for bit in all_bitstrings]

plt.figure(figsize=(15, 8))
bars = plt.bar(all_bitstrings, sorted_probs, color='skyblue')
plt.xlabel('Bitstring')
plt.ylabel('Probability')
plt.title('Grover’s Algorithm Probability Distribution')

for bar, prob in zip(bars, sorted_probs):
    if prob > 0:
```

```
        plt.text(bar.get_x() + bar.get_width() / 2, bar.get_height() ,
             f"{prob:.2f}", ha='center', va='bottom')

plt.xticks(rotation=90)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

```
Total shots: 1024
```



Assess the algo's efficiency and complexity

`Eficiência`:

$$k = \left\lfloor \frac{\pi}{4 \cdot \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{16}}\right)} \right\rfloor = 2$$

Com apenas 2 iterações, conseguimos aplificar significativamente a probabilidade de medir os estados soluções. Isto mostra uma melhoria clara em eficiência relativamente à abordagem clássica, que necessitaria até 16 tentativas.

`Complexidade`:

O algoritmo de `Grover` oferece uma `aceleração quadrática` em relação à busca clássica. Em vez de $\mathcal{O}(N)$, ele executa em:

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{M}{2^n}}\right)$$

Propose a generalization for 3x3 sudoku and discuss potential limitations and resources required

---

Um sudoku 3x3 consistem numa grelha de 3 linhas por 3 colunas (9 céluluas), onde cada célula deve conter um número entre 1 e 3, obedecendo às seguintes regras:

- Cada número aparece apenas uma vez por linha;
- Cada número aparece apenass uma vez por coluna;

`Limitações`:

- Baixa vantagem quântica: O número total de soluções válidas é pequeno `(12 soluções)`, o que limita a possibilidade de se explorar vantagem quântica significativa.
- Espaço de busca: Com $3^9 = 19.683$ possibilidades, o problema é relativamente pequeno. Embora seja possível aplicar o algoritmo de Grover para encontrar soluções de um sudoku 3x3, essa abordagem não é prática, já que qualquer pessoa consegue resolver esse

quebra-cabeça de cabeça rapidamente.

`Recursos necessários` :

- Para representar os valores das células, cada célula precisa ser codificada em qubits - idealmente, 2 qubits por célula para representar os 3 possíveis valores (pois 2 qubits codificam até 4 estados). Ao todo temos cerca de 18 qubits para o tabuleiro completo.

Extra

Implementação (via restrições)

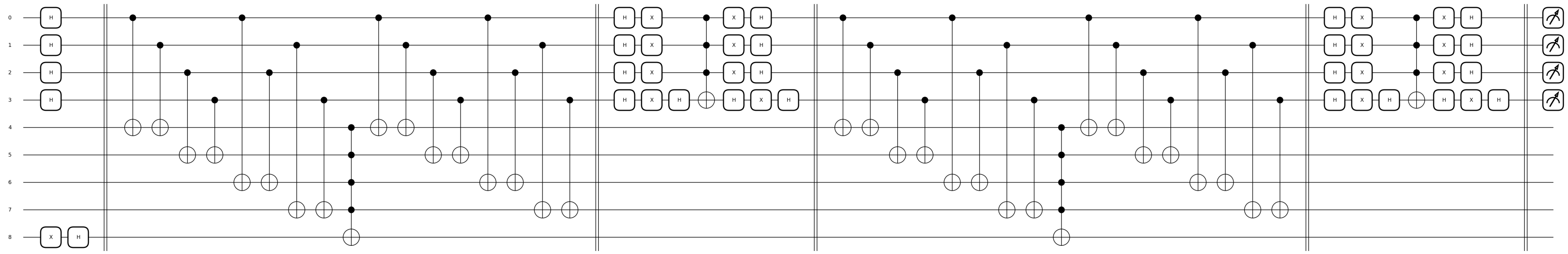
In [9]:
```
n_variable_qubits : int = 4
n_clause_qubits : int = 4
n_ancilla_qubit : int = 1
n_total_wires : int = n_variable_qubits + n_clause_qubits + n_ancilla_qubit


dev = qml.device("default.qubit", wires=n_total_wires, shots=1024)
"""
Parameters:
    name (str): The name of the device to load.
        'default.qubit' <pennylane.devices.default_qubit>`: a simple state
        simulator of qubit-based quantum circuit architectures.

    wires (int): The number of wires (subsystems) to initialise the device with.

    shots (int): Is an integer that defines how many times
            the circuit should be evaluated (or "sampled") to estimate
            statistical quantities
"""


variable_wires : list[int] = list(range(n_variable_qubits))
clause_eval_wires : list[int] = list(range(n_variable_qubits, n_variable_qubits + n_clause_qubits))
oracle_output_wire : int = n_variable_qubits + n_clause_qubits
```

```python
sudoku_clauses: list[list[int]] = [
    [0,1],
    [2,3],
    [0,2],
    [1,3]
]


marked_states : int = 2


optimal_num_iterations = math.floor(
    math.pi / (4 * math.asin(math.sqrt(marked_states / 2**n_variable_qubits)))
)


# XOR using CNOTs: output = a XOR b
def XOR(a, b, output):
    qml.CNOT(wires=[a, output])
    qml.CNOT(wires=[b, output])


# Oracle: marks correct solutions
def sudoku_oracle():
    for i, clause in enumerate(sudoku_clauses):
        XOR(clause[0], clause[1], clause_eval_wires[i])

    # Flip output qubit if all clause qubits are 1
    qml.MultiControlledX(
        control_wires=clause_eval_wires,
        wires=oracle_output_wire,
        control_values='1'*len(clause_eval_wires)
    )

    # Uncompute
    for i, clause in enumerate(sudoku_clauses):
        XOR(clause[0], clause[1], clause_eval_wires[i])


# Grover diffuser: reflect around the average
def diffuser(wires):
```

```python
    for w in wires:
        qml.Hadamard(wires=w)
    for w in wires:
        qml.PauliX(wires=w)

    qml.Hadamard(wires=wires[-1])
    qml.MultiControlledX(
        control_wires=wires[:-1],
        wires=wires[-1],
        control_values='1'*(len(wires)-1)
    )
    qml.Hadamard(wires=wires[-1])

    for w in wires:
        qml.PauliX(wires=w)
    for w in wires:
        qml.Hadamard(wires=w)


@qml.qnode(dev)
def run_grover_sudoku(num_iterations=2):

    #qml.Hadamard(wires=oracle_output_wire)
    #qml.PauliZ(wires=oracle_output_wire)
    # cima ou baixo são equivalentes (mas a de baixo é mais comum)
    qml.PauliX(wires=oracle_output_wire)
    qml.Hadamard(wires=oracle_output_wire)

    # Superposition over variable qubits
    for w in variable_wires:
        qml.Hadamard(wires=w)
    qml.Barrier() # for visual separation


    # Grover iterations
    for _ in range(optimal_num_iterations):  # 2 iterations for 4-variable space
        sudoku_oracle()
        qml.Barrier() # for visual separation
        diffuser(variable_wires)
        qml.Barrier() # for visual separation
```

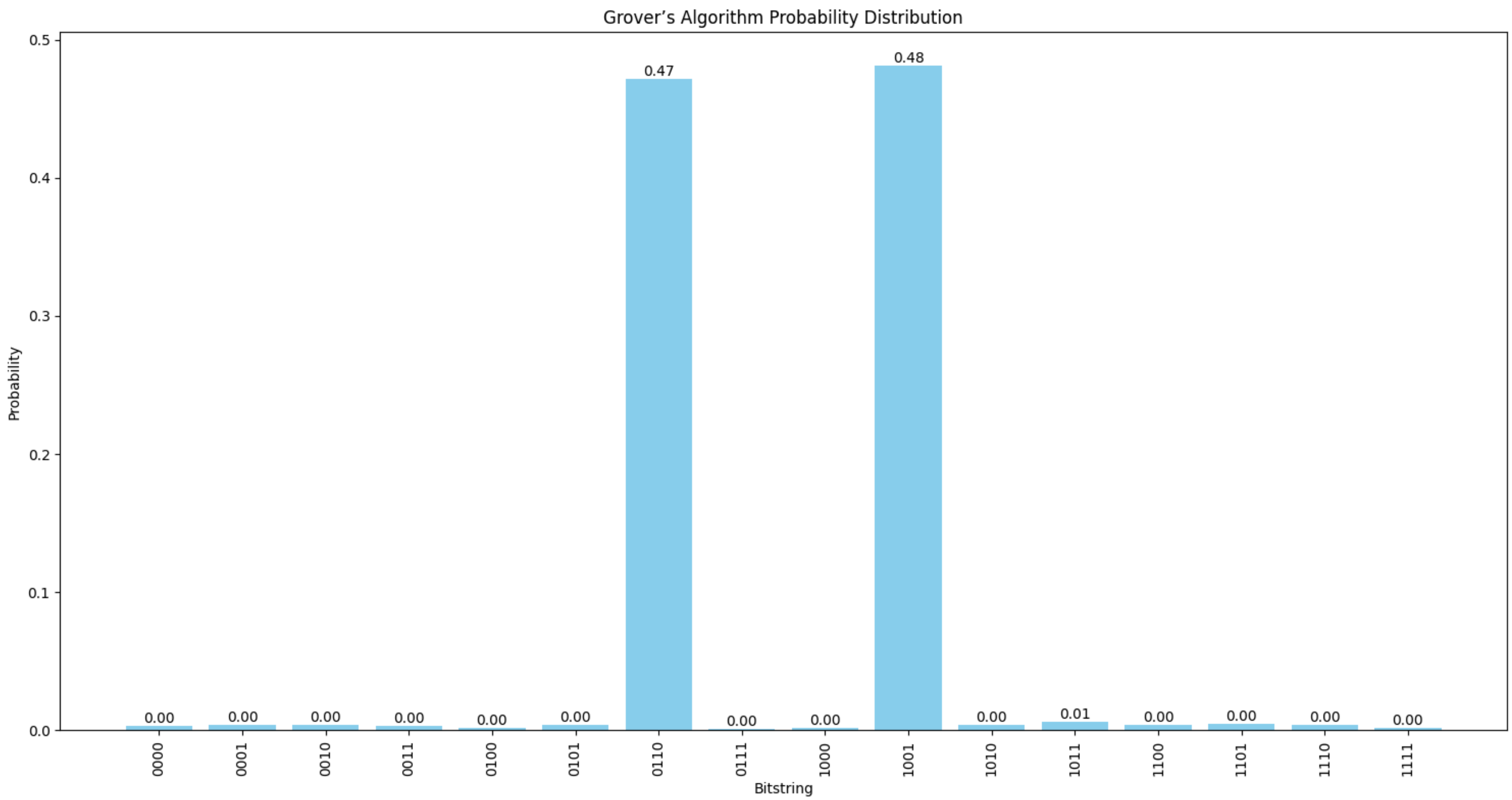
```
    return qml.sample(wires=variable_wires)

qml.draw_mpl(run_grover_sudoku)(num_iterations=optimal_num_iterations)
```

Out[9]: (<Figure size 5800x1000 with 1 Axes>, <Axes: >)



In [11]:

```
samples = run_grover_sudoku()

all_bitstrings = [format(i, '04b') for i in range(16)]
probabilities = {bit: counts.get(bit, 0) / total_shots for bit in all_bitstrings}
sorted_probs = [probabilities[bit] for bit in all_bitstrings]

plt.figure(figsize=(15, 8))
bars = plt.bar(all_bitstrings, sorted_probs, color='skyblue')
plt.xlabel('Bitstring')
plt.ylabel('Probability')
plt.title('Grover’s Algorithm Probability Distribution')

for bar, prob in zip(bars, sorted_probs):
    if prob > 0:
        plt.text(bar.get_x() + bar.get_width() / 2, bar.get_height() ,
                 f"{prob:.2f}", ha='center', va='bottom')

plt.xticks(rotation=90)
plt.tight_layout()
plt.show()
```



Referências

Wikipedia - Grover's Algorithm

IBM - Grover's Algorithm

IBM - Composer

Quantum Computing StackEnchange

Qiskit - Grover's algorithm